Maths – MPI

Romain Bricout

8 octobre 2023

Introduction

Ce document réunit l'ensemble de mes cours de Mathématiques de MPI, ainsi que les exercices les accompagnant. Le professeur était M. Walbron. J'ai adapté certaines formulations me paraissant floues ou ne me plaisant pas mais le contenu pur des cours est strictement équivalent.

Les éléments des tables des matières initiale et présentes au début de chaque chapitre sont cliquables (amenant directement à la partie cliquée). C'est également le cas des références à des éléments antérieurs de la forme, par exemple, « Démonstration 5.22 ».

Cette version contient, en plus des cours imprimés distribués durant l'année, toutes les notes et démonstrations qui vont avec. Voir l'autre version pour n'avoir que les cours bruts.

Table des matières

I Cours 2

1 Espaces vectoriels normés 3

2 Séries numériques et vectorielles : révisions et compléments 4

3 Familles sommables 5

4 Rappels et compléments d'algèbre linéaire 6

II Exercices 7

1 Espaces vectoriels normés 8

2 Séries numériques et vectorielles : révisions et compléments 21

3 Familles sommables 36

4 Rappels et compléments d'algèbre linéaire 40

Première partie

Cours

Chapitre 1

Espaces vectoriels normés

$\star\star$ À venir $\star\star$

Chapitre 2

Séries numériques et vectorielles : révisions et compléments

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Chapitre 3

Familles sommables

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Chapitre 4

Rappels et compléments d'algèbre linéaire

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Deuxième partie

Exercices

Chapitre 1

Espaces vectoriels normés

$\star$ Exercice proche du cours
$\star\star$ Exercice de difficulté normale
$\star\star\star$ Exercice difficile (voire très difficile)
+ Exercice à faire en priorité

+ $\star\star$ Exercice 1.1 (Exercice 1)
Soit u une suite réelle bornée. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \left\{u_p \mid p \geqslant n\right\}$, $a_n = \inf U_n$ et $b_n = \sup U_n$.

(1) Justifiez l'existence des suites a et b et étudiez leur monotonie, ainsi que leur convergence.

(2) Montrez que u converge ssi a et b ont la même limite.

Note culturelle : la limite de a s'appelle la limite inférieure de u, notée $\underline{\lim}\, u$ et celle de b est la limite supérieure, notée $\overline{\lim}\, u$.

Correction 1.2
$\star\star$ **À venir** $\star\star$

+$\star$ Exercice 1.3 (Exercice 2)
Montrez que les applications N introduites ci-dessous sont des normes :

(1) si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, l'application N définie sur $\mathbb{R}^n$ par $N(X) = \|AX\|_2$;

(2) sur $E = \mathscr{C}^1([a\,;\,b], \mathbb{K})$, $N(f) = |f(a)| + \displaystyle\int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t$;

(3) pour des réels $\alpha_0 < \cdots < \alpha_n$ fixés, l'application N définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $N(P) = \max\limits_{k \in [\![0;n]\!]} |P(\alpha_k)|$.

Correction 1.4
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆ Exercice 1.5 (Exercice 3)
Sur $E = \mathbb{R}^2$, on définit

$$\|(x, y)\| = \max(|x|, |x + 2y|).$$

Démontrez que $\|\cdot\|$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$. Représentez graphiquement la boule-unité.

Correction 1.6
⋆⋆ À venir ⋆⋆

+ ⋆ ⋆ Exercice 1.7 (Exercice 4)
Les normes définies dans l'exercice 2 sont-elles équivalentes à la norme $\|\cdot\|_\infty$, la norme $\|\cdot\|_1$, la norme $\|\cdot\|_2$?

Correction 1.8
⋆⋆ À venir ⋆⋆

+⋆ Exercice 1.9 (Exercice 5)
Soit $\theta \not\equiv 0\,[\pi]$. Montrez que $(\sin(n\theta))$ et $(\cos(n\theta))$ divergent.

Correction 1.10
⋆⋆ À venir ⋆⋆

+⋆ Exercice 1.11 (Exercice 6)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que la suite $\left(A^k\right)$ converge. Montrez que sa limite est la matrice d'un projecteur.

Correction 1.12
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆⋆ Exercice 1.13 (Exercice 7)
Cet exercice prolonge le premier.

Soit u une suite vérifiant la propriété

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2,\ \ p \geqslant n \geqslant N \implies \left|u_n - u_p\right| \leqslant \varepsilon.$$

Montrez que u est bornée, puis en vous servant des suites a et b définies comme ci-dessus, montrez que u converge.

Note culturelle : on dit que u est une suite de Cauchy et on a donc montré que toute suite de Cauchy converge.

Correction 1.14
⋆⋆ À venir ⋆⋆

+ ⋆ ⋆ Exercice 1.15 (Exercice 8)
On note ℓ_1 l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que la série $\sum u_k$ soit absolument convergente, et on pose :

$$\forall u = (u_k) \in \ell_1,\ \ N(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|\,.$$

(1) Justifiez que ℓ_1 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(2) Montrez que N est une norme sur ℓ_1. On notera désormais $\|u\|_1$ pour $N(u)$.

(3) Justifiez que, si $\left(u^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de ℓ_1 convergeant vers la suite $a \in \ell_1$ pour la norme 1, alors

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \ u_k^{(n)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} a_k.$$

(4) Montrez que la réciproque est fausse.
Indication : on pourra étudier l'exemple où, pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, $u_k^{(n)} = \exp\left(\dfrac{-k}{n+1}\right)$.

Correction 1.16
⋆⋆ À venir ⋆⋆

+⋆ Exercice 1.17 (Exercice 9)
Soit E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites bornées muni de la norme infinie.

Montrez que les applications $u \longmapsto (u_{n+1} - u_n)$ et $u \longmapsto \dfrac{u_0 + \cdots + u_n}{n+1}$ sont des applications continues de E dans E.

Correction 1.18
★★ À venir ★★

+ ★ ★ Exercice 1.19 (Exercice 10)
Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $A = (a_{ij})$ on pose $\|A\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

(1) Montrez que $\| \cdot \|$ est une norme sur E.

(2) Montrez que l'application $A \longmapsto {}^tA$ est un endomorphisme continu et déterminez sa norme subordonnée.

Correction 1.20
★★ À venir ★★

★★ Exercice 1.21 (Exercice 11)
Soit $E = \mathscr{C}^0([0\,;\,1], \mathbb{R})$. On pose $A = \{f \in E \mid f \geqslant 0\}$ et pour $f \in E$, $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|$.

(1) Montrez que $\| \cdot \|_1$ est une norme sur E.

(2) Déterminez $\mathring{A}$ dans $(E, \| \cdot \|_\infty)$, puis dans $(E, \| \cdot \|_1)$.

(3) On pose $D = \mathscr{D}^1([0\,;\,1], \mathbb{R})$ le sous-espace des fonctions dérivables et P le sous-espace des fonctions polynômes.
Déterminez les intérieurs de P et D dans $(E, \| \cdot \|_\infty)$.

Correction 1.22
★★ À venir ★★

★★ Exercice 1.23 (Exercice 12)
Cet exercice prolonge le précédent, les notations sont reprises.

Soit $u : E \longrightarrow E$ qui à toute fonction f de E associe sa primitive qui s'annule en 0. Vérifiez que u est un endomorphisme de E.

Est-il continu de $(E, \| \cdot \|_?)$ dans $(E, \| \cdot \|_?)$ (vous étudierez les quatre possibilités) ? Quand c'est le cas, déterminez la norme subordonnée de u.

Correction 1.24
⋆⋆ À venir ⋆⋆

+ ⋆ ⋆ Exercice 1.25 (Exercice 13)
Soit $E = \left\{ f \in \mathscr{C}^1 \left([0\ ;\ 1], \mathbb{R} \right) \ \middle|\ f(0) = f(1) = 0 \right\}$. Pour $f \in E$, on pose $\|f\| = \sup\limits_{[0;1]} |f'|$.

(1) Montrez que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.

(2) Soit $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 f$. Montrez que φ est continue et déterminez $|||f|||$.

Correction 1.26
⋆⋆ À venir ⋆⋆

+ ⋆ ⋆ Exercice 1.27 (Exercice 14)
Soient E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.

(1) Montrez que si $F \neq E$, alors $\mathring{F} = \varnothing$ et $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.

(2) Montrez que si F est un hyperplan, alors F est fermé ou dense dans E.

Correction 1.28
⋆⋆ À venir ⋆⋆

+⋆ Exercice 1.29 (Exercice 15)
Soient E un espace vectoriel normé et A une partie de E.

Montrez que $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A et $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A. Montrez que la frontière de A est un fermé d'intérieur vide.

Correction 1.30
⋆⋆ À venir ⋆⋆

★ **Exercice 1.31 (Exercice 16)**
Une intersection d'ouverts est-elle toujours un ouvert ? Une réunion de fermés est-elle toujours un fermé ?

Correction 1.32
★★ **À venir** ★★

+★ **Exercice 1.33 (Exercice 17)**
Montrez que si A est une partie convexe d'un espace vectoriel normé E, alors il en est de même pour $\overline{A}$ et $\mathring{A}$.

Correction 1.34
★★ **À venir** ★★

★★ **Exercice 1.35 (Exercice 18)**
Soient E un espace vectoriel normé, A une partie de E et $x \in E$. On dit que x est un point d'accumulation de A quand il existe une suite injective de $A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x. On dit que x est un point isolé de A quand il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \cap A = \{x\}$.

(1) Exemples. On pose $A = \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ dans $\mathbb{R}$: montrez que tous les points de A sont isolés, que le seul point d'accumulation de A est 0 et que A n'est pas fermé. On pose $B = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \,\middle|\, (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$: quels sont les points d'accumulation de B ?

(2) Montrez que x est un point d'accumulation ssi pour tout $r > 0$, $B(x, r) \cap A$ est un ensemble infini.

(3) On note A' l'ensemble des points d'accumulation de A et A^d l'ensemble des points isolés dans A. Montrez que $\overline{A} = A' \sqcup A^d$.

(4) Montrez que A' est un fermé.

Correction 1.36
★★ **À venir** ★★

⋆⋆ Exercice 1.37 (Exercice 19)
Soient E, F deux espaces vectoriels normés et $f : E \longrightarrow F$. Montrez l'équivalence entre les propositions :

(1) f est continue

(2) $\forall A \in \mathscr{P}(E), \quad f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$

(3) $\forall B \in \mathscr{P}(F), \quad f^{-1}\left(\mathring{B}\right) \subseteq \overbrace{f^{-1}(B)}^{\circ}$

Correction 1.38
⋆⋆ À venir ⋆⋆

+ ⋆ ⋆ Exercice 1.39 (Exercice 20)
Soient A, B deux fermés disjoints d'un espace vectoriel normé E.

(1) Montrez que $\{x \in E \mid d(x, A) > d(x, B)\}$ est un ouvert.

(2) Montrez qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $A \subseteq U$ et $B \subseteq V$.

Correction 1.40
⋆⋆ À venir ⋆⋆

+ ⋆ ⋆ Exercice 1.41 (Exercice 21)
Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Pour $r > 0$, on pose $V(A, r) = \{x \in E \mid d(x, A) < r\}$.

Montrez que $V(A, r)$ est un ouvert de E et $\displaystyle\bigcap_{r>0} V(A, r) = \overline{A}$.

Correction 1.42
⋆⋆ À venir ⋆⋆

+ ⋆ ⋆ Exercice 1.43 (Exercice 22)
Soient E un espace vectoriel normé, K un compact de E, $k \in [0\,;1[$ et $f : K \longrightarrow K$ telle que

$$\forall (x, y) \in K^2, \quad \|f(x) - f(y)\| \leqslant k\,\|x - y\|\,.$$

Soit u la suite définie par u_0 quelconque dans K et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Montrez que u converge et que sa limite est l'unique point fixe de f.

Correction 1.44
$\star\star$ **À venir** $\star\star$

$\star\star$ **Exercice 1.45 (Exercice 23)**
Soient E un espace vectoriel normé et A une partie non-vide de E. On appelle diamètre de A, noté $\delta(A)$, la borne supérieure dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ des $\|x-y\|$ quand $(x,y) \in A^2$.

(1) Montrez que $\delta(A) < +\infty$ ssi A est bornée.

(2) Quel est le diamètre d'une boule ?

(3) Montrez que si A est compacte, alors il existe $(a,b) \in A^2$ tel que $\delta(A) = \|a-b\|$. Est-ce encore vrai si on suppose seulement A bornée ? A fermée ?

Correction 1.46
$\star\star$ **À venir** $\star\star$

$+\star\star$ **Exercice 1.47 (Exercice 24)**
Soient E un espace vectoriel normé et A, B deux parties non-vides de E. On pose $d(A,B) = \inf_{(a,b)\in A\times B} \|a-b\|$, appelé distance de A à B.

(1) Montrez que si $d(A,B) > 0$, alors A et B sont disjointes, mais que la réciproque est fausse.

(2) Montrez que si A et B sont compactes, alors $d(A,B)$ est en fait un minimum plutôt qu'une borne inférieure.

(3) Montrez que ce résultat reste vrai si E est de dimension finie, l'une des deux parties est compacte et l'autre fermée.

(4) Est-ce encore vrai si on suppose seulement A et B fermées ?

Correction 1.48
$\star\star$ **À venir** $\star\star$

+ ★ ★ Exercice 1.49 (Exercice 25)
Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et $\left(B_n = \overline{B}\left(a_n, r_n\right)\right)$ une suite de boules fermées, décroissantes pour l'inclusion, telle que $r_n \longrightarrow 0$.

(1) Montrez que la suite (a_n) admet une sous-suite convergeant vers un vecteur a.

(2) Montrez que $a_n \longrightarrow a$.

(3) Montrez que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \{a\}$.

Correction 1.50
★★ À venir ★★

★★ Exercice 1.51 (Exercice 26)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrez que l'ensemble des projecteurs est fermé dans $\mathscr{L}(E)$. Est-il borné ? Compact ? Connexe par arcs ?

Correction 1.52
★★ À venir ★★

★★ Exercice 1.53 (Exercice 27)
Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $\varepsilon > 0$. On pose $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |f(x) - y| \leqslant \varepsilon\right\}$.

(1) Montrez que E est connexe par arcs.

(2) Montrez que si f est une fonction affine, alors E est une partie convexe.

(3) Montrez que la réciproque est vraie.

Correction 1.54
★★ À venir ★★

★★ Exercice 1.55 (Exercice 28)
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et H un hyperplan de E.

(1) Montrez que $E \setminus H$ possède deux composantes connexes par arcs qui sont ouvertes.

(2) Soit B une partie de H telle que $H \neq B$. Montrez que $E \setminus B$ est connexe par arcs.

Correction 1.56
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆⋆ Exercice 1.57 (Exercice 29)
Soient E un espace vectoriel normé et A, B deux parties de E telles que B est connexe par arcs et B rencontre à la fois A et $E \setminus A$.

Montrez que B rencontre la frontière de A.

Correction 1.58
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆⋆ Exercice 1.59 (Exercice 30)
Deux parties d'un espace vectoriel normé sont dites homéomorphes quand il existe une bijection continue de l'une dans l'autre telle que la réciproque soit aussi continue.

(1) Montrez que tout intervalle ouvert est homéomorphe à $\mathbb{R}$.

(2) Montrez qu'un intervalle qui contient l'une de ses bornes réelles ne peut pas être homéomorphe à $\mathbb{R}$.

(3) Montrez que toute boule ouverte d'un espace vectoriel normé E est homéomorphe à E.

(4) Montrez qu'aucune boule fermée de E n'est homéomorphe à E.

Correction 1.60
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆ ⋆ ⋆ Exercice 1.61 (Exercice 31)
Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, autre que $\{0\}$.

(1) Montrez que $a = \inf G \cap \mathbb{R}_+^*$ existe.

(2) Montrez que $G = a\mathbb{Z}$ si $a > 0$ ou G est dense dans $\mathbb{R}$ si $a = 0$.

(3) On pose $G = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ (G est le sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ engendré par 1 et $\sqrt{2}$) et $r = \sqrt{2} - 1$. En considérant la suite (r^n), montrez que G est dense dans $\mathbb{R}$.
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et périodique de périodes 1 et $\sqrt{2}$. Que peut-on dire de f ?

(4) Soient a, b deux réels distincts et non-nuls, on pose $G = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$. Montrez que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, puis que G est dense dans $\mathbb{R}$ ssi $\dfrac{a}{b}$ est un rationnel.
Application : montrez que les ensembles $\{\cos n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $\{\sin n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sont denses dans $[-1 ; 1]$.

Correction 1.62
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆ ⋆ ⋆ Exercice 1.63 (Exercice 32)
Soit $E = \mathscr{C}^0([0\,;\,1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie $\|f\| = \sup\limits_{[0;1]} |f|$. On note $\overline{B}(0,1)$ la boule-unité fermée.

Soit (t_n) une suite injective à valeurs dans $[0\,;\,1]$. Pour $f \in E$, on pose $L(f) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{f(t_n)}{2^n}$.

(1) Montrez que L est une forme linéaire continue sur E.

(2) Déterminez $K = \sup\limits_{f \in \overline{B}(0,1)} |L(f)|$.

(3) Montrez que si la suite (t_n) converge ou si elle est dense dans $[0\,;\,1]$, K n'est pas atteinte.

(4) Donnez un exemple de suite (t_n) pour laquelle K est atteinte. Donnez une condition nécessaire et suffisante sur la suite t pour que K soit atteinte.

Correction 1.64
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆ ⋆ ⋆ Exercice 1.65 (Exercice 33)
Soient E un espace vectoriel normé et u une forme linéaire non-nulle et continue sur E. On pose $H = \ker u$ et $K = \sup\limits_{x \in E \setminus \{0\}} \dfrac{|u(x)|}{\|x\|}$.

(1) Justifiez l'existence de K.

(2) Montrez que pour tout $a \in E$, $d(a, H) = \dfrac{|u(a)|}{K}$.

Correction 1.66
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 1.67 (Oral CCMP, 1)
Soient E un espace vectoriel normé réel et B sa boule-unité ouverte. Montrez que E et B sont homéomorphes (*i.e.* il existe une bijection de E dans B qui est continue et dont la réciproque est aussi continue).

Correction 1.68
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 1.69 (Oral CCMP, 2)
Soient E un espace vectoriel normé réel et C, D deux parties de E telles que $C \subseteq D \subseteq \overline{C}$ et C convexe. Montrez que D est connexe par arcs.

Correction 1.70
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 1.71 (Oral CCMP, 3)
Soient E un espace vectoriel normé réel, K un compact de E et $f : K \longrightarrow K$ telle que

$$\forall (x, y) \in K^2, \;\; x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

(1) Montrez que f possède un unique point fixe.

(2) Soit u la suite définie par u_0 quelconque dans K et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrez que u converge vers le point fixe de f.

Correction 1.72
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 1.73 (Oral CCMP, 4)
Soit u une suite réelle bornée telle que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$. Montrez que l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est un intervalle.

Correction 1.74
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 1.75 (Oral Centrale, 5)
Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ tel que pour tout $g \in G$ il existe un voisinage V de g tel que $G \cap V = \{g\}$.

(1) Montrez que pour tout compact K de $\mathbb{C}^*$, $G \cap K$ est fini.

(2) Montrez que $G \cap \mathbb{U}$ est un groupe cyclique.

(3) On suppose que G n'est pas contenu dans $\mathbb{U}$. Soit $A = \{|x| \mid x \in G \text{ et } |x| > 1\}$. Montrez que A possède un plus petit élément. Déduisez-en G.

Correction 1.76

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 1.77 (Oral Centrale, 6)

Soient E, F deux espaces vectoriels normés de dimensions finies et $f : E \longrightarrow F$. On dit que f est propre quand pour tout compact K de F, $f^{-1}(K)$ est un compact de E.

(1) Montrez que si f est propre, alors l'image d'un fermé de E est un fermé de F.

(2) Montrez que f est propre ssi $\|f(x)\| \xrightarrow[\|x\| \longrightarrow +\infty]{} +\infty$.

Correction 1.78

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 1.79 (Oral X, 7)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, U_n l'ensemble des polynômes réels unitaires de degré n et A_n l'ensemble des polynômes de U_n qui sont simplement scindés (*i.e.* ayant n racines réelles distinctes).

(1) Montrez que A_n est un ouvert de U_n.

(2) Déterminez l'adhérence de A_n.

Correction 1.80

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Chapitre 2

Séries numériques et vectorielles : révisions et compléments

$\star$ Exercice proche du cours
$\star\star$ Exercice de difficulté normale
$\star\star\star$ Exercice difficile (voire très difficile)
+ Exercice à faire en priorité

$\star$ Exercice 2.1 (Exercice 1)

(1) Montrez que la série de terme général $u_n = \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{2n^2}$ est convergente.

(2) Montrez que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \operatorname{Arctan} \dfrac{n}{n+1} - \operatorname{Arctan} \dfrac{n-1}{n}$.

(3) Déduisez-en la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Correction 2.2
$\star\star$ À venir $\star\star$

$\star$ Exercice 2.3 (Exercice 2)

Justifiez que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{2n-1}{n^3-n}$ converge et déterminez sa somme (indication : décomposition en éléments simples).

Correction 2.4
$\star\star$ À venir $\star\star$

★★ Exercice 2.5 (Exercice 3)
Donnez la nature des séries suivantes (α désigne une constante strictement positive, x un réel dans $]-1\,;\,1[$) :

(1) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{\ln^n n}{n^{\ln n}}$

(2) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

(3) $\displaystyle\sum\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$

(4) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n\,n^\alpha}{n!}$

(5) $\displaystyle\sum\frac{(-1)^n\ln n}{n^\alpha}$

(6) $\displaystyle\sum\ln\left(1+x^n\right)$

(7) $\displaystyle\sum\frac{\sin n}{2^n}$

(8) $\displaystyle\sum 2\ln\left(n^3+1\right)-3\ln\left(n^2+1\right)$

(9) $\displaystyle\sum\frac{\sin n\sin\frac{1}{n}}{n}$

(10) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n}{(-1)^n+n}$

(11) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$

(12) $\displaystyle\sum\sqrt[n+1]{n+1}-\sqrt[n]{n}$

(13) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{\ln n+\sin\frac{2\pi n}{3}}$

(14) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}\right)$

(15) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\ln n\ln\left(\operatorname{ch} n\right)}$

(16) $\displaystyle\sum\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2 t}{n^2+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$

Correction 2.6
★★ À venir ★★

⋆⋆ Exercice 2.7 (Exercice 4)
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

(1) Déterminez a et b pour que la série de terme général $\ln n + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)$ converge. Dans ce cas, donnez la valeur de sa somme.

(2) Faites de même avec la série de terme général $\sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$.

Correction 2.8
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆⋆ Exercice 2.9 (Exercice 5)
Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la série de terme général $u_n = \operatorname{ch}^\alpha n - \operatorname{sh}^\alpha n$ converge-t-elle ? Dans ce cas, donnez un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k$.

Correction 2.10
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆⋆ Exercice 2.11 (Exercice 6)

On pose $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{3/2}$. Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge-t-elle ? Dans ce cas, donnez un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Correction 2.12
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆⋆ Exercice 2.13 (Exercice 7, séries associées à des suites définies par récurrence)

(1) Soit u la suite définie par récurrence par $u_1 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{n e^{u_n}}$.
Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} u_n$?

(2) Soit u la suite définie par récurrence par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$.

Quelle est la nature de la série $\sum \left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right)$? Puis celle de $\sum u_n$? Donnez un équivalent de $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

(3) Soit u la suite définie par récurrence par $u_0 \in]0 ; \pi[$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \sin u_n$.

Quelle est la nature de la série $\sum \left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}\right)$? Puis celle de $\sum u_n$? Donnez un équivalent de $\sum_{k=0}^{n}$.

Correction 2.14
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆⋆ Exercice 2.15 (Exercice 8)
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $P(x) \geqslant 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{e^k + P(k)}$.

(1) Justifiez l'existence de u_n.

(2) Montrez que la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge.

Correction 2.16
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆⋆ Exercice 2.17 (Exercice 9)

Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.

(1) Justifiez l'existence de u_n.

(2) Montrez que $\frac{u_n + u_{n+1}}{2}$ est le reste d'une série alternée absolument convergente.

(3) Déduisez-en la nature de la série $\sum u_n$.

Correction 2.18
★★ À venir ★★

★★ Exercice 2.19 (Exercice 10, utilisation de développements limités ou asymptotiques)

(1) Montrez que la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$ converge.

(2) Montrez que la série $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge.

(3) Montrez que la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{1+(-1)^n n}$ converge.

(4) Montrez que la série $\sum_{n\geqslant 0} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$ converge.

(5) Déterminez la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} (-1)^n \frac{\ln\left(n+(-1)^n\sqrt{n}\right)}{n}$.

(6) Déterminez la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{1+(-1)^n\sqrt{n}}$.

Correction 2.20
★★ À venir ★★

★★ Exercice 2.21 (Exercice 11)
Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{(-1)^n+n^\alpha}}$ converge-t-elle ?

Correction 2.22
★★ À venir ★★

★★ Exercice 2.23 (Exercice 12, formule de Stirling)

Montrez que la suite de terme général $\frac{n!}{\sqrt{n}}\left(\frac{\mathrm{e}}{n}\right)^n$ converge vers un réel strictement positif L (indication : passer au logarithme et penser à une série).

Soit $u_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \,\mathrm{d}t$. On montre que $u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ et que $u_{2n} = \frac{\pi\,(2n)!}{2^{2n+1}\,(n!)^2}$. En admettant ces résultats, montrez la formule de Stirling :

$$n! \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

Correction 2.24
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆⋆ Exercice 2.25 (Exercice 13)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $u_n = \dfrac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^a}$.

(1) Dans le cas où $a \leqslant 0$ ou $a > 1$, quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$?

(2) On suppose désormais que $0 < a \leqslant 1$ et on pose $v_n = u_{2n-1} + u_{2n}$. Montrez que la série $\sum v_n$ converge. Déduisez-en la nature de la série $\sum u_n$.

Correction 2.26
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆⋆ Exercice 2.27 (Exercice 14)
Soient u une suite strictement positive et $\alpha > 0$.

Montrez que les séries de termes généraux u_n, $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$, $w_n = \ln(1+u_n)$ et $x_n = \displaystyle\int_0^{u_n} \frac{1}{1+x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ sont de même nature.

Correction 2.28
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆⋆ Exercice 2.29 (Exercice 15)
Soit u une suite réelle qui ne s'annule pas telle que $\dfrac{u_{2n+1}}{u_{2n}} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} a$ et $\dfrac{u_{2n}}{u_{2n-1}} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} b$.

Montrez que si $|ab| < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Correction 2.30
⋆⋆ À venir ⋆⋆

★★ Exercice 2.31 (Exercice 16)
Soit u une suite réelle positive décroissante.

Montrez que si $\sum u_n$ converge, alors $u_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

La réciproque est-elle vraie ?

Correction 2.32
★★ À venir ★★

★★ Exercice 2.33 (Exercice 17)
Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle strictement positive et bornée telle que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ diverge. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose S_n la somme partielle d'indice n de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.

(1) Montrez que $\dfrac{u_n}{S_n} \sim \ln \dfrac{S_n}{S_{n+1}}$. Déduisez-en la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{u_n}{S_n}$.

(2) Étudiez la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ quand $\alpha \in \,]0\,;1[$.

(3) Soit $\alpha > 1$. Montrez que $\dfrac{u_n}{S_n^\alpha} \leqslant \displaystyle\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$. Déduisez-en la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$.

Correction 2.34
★★ À venir ★★

★★ Exercice 2.35 (Exercice 18)
Soit u une suite strictement positive. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

On suppose que $u_n s_n$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Déterminez un équivalent simple de u_n.

Correction 2.36
★★ À venir ★★

★★ Exercice 2.37 (Exercice 19)
Soit u la suite définie par récurrence par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + u_n^2$. On pose $v_n = \frac{1}{2^n} \ln u_n$, puis $w_n = v_{n+1} - v_n$.

(1) Montrez que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

(2) Montrez que la suite (v_n) converge vers un réel $\ell > 0$. On pose alors $A = \mathrm{e}^{\ell} > 1$.

(3) Montrez que $u_n \sim A^{2^n}$.

Correction 2.38
★★ À venir ★★

★★★ Exercice 2.39 (Exercice 20, transformation d'Abel)
Soient u une suite réelle et v une suite complexe. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

On suppose que la suite u est positive et décroissante de limite nulle et que la suite V est bornée.

(1) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = u_n V_n - \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) V_k$.

(2) Déduisez-en que la série $\sum u_n v_n$ converge.

Applications :

(3) Soit w une suite complexe telle que $\sum w_n$ converge. Montrez que pour tout $a > 0$, $\sum \frac{w_n}{n^a}$ converge aussi.

(4) Soient $a > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Donnez la nature des séries $\sum \frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^a}$, $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n^a}$ et $\sum \frac{\sin(n\theta)}{n^a}$.

(5) Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \geqslant \frac{1 - \cos(2x)}{2}$. Déterminez la nature des séries $\sum \frac{|\cos(n\theta)|}{n^a}$ et $\sum \frac{|\sin(n\theta)|}{n^a}$.

Correction 2.40
★★ À venir ★★

⋆ ⋆ ⋆ Exercice 2.41 (Exercice 21)
Soit u une suite positive de limite nulle. On appelle U_n la somme partielle d'indice n de la série $\sum u_n$ et on suppose qu'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n - nu_n| \leqslant M$.

(1) Montrez que pour tout $n \geqslant 2$, $\left|\dfrac{U_n}{n} - \dfrac{U_{n-1}}{n-1}\right| \leqslant M\left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}\right)$.

(2) Montrez que la série $\sum u_n$ converge.

Correction 2.42
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆ ⋆ ⋆ Exercice 2.43 (Exercice 22)
Soit $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ une série convergente à termes positifs.

(1) Montrez que $\dfrac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

(2) Montrez que la série $\sum \dfrac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n\,(n+1)}$ converge et montrez que sa somme est la même que celle de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.

Correction 2.44
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 2.45 (Oral Saint-Cyr, 1)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$. Déterminez la nature de la série $\sum u_n$. Donnez un équivalent de $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Correction 2.46
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 2.47 (Oral IMT, 2)
Soit $\alpha > 0$. Donnez un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln^\alpha k$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Correction 2.48
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 2.49 (Oral CCINP, 3)
Soit u la suite définie par récurrence par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n}$.

(1) Montrez que (u_n) converge et déterminez sa limite.

(2) Déterminez la limite de $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$. Déduisez-en un équivalent de u_n.

Correction 2.50
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 2.51 (Oral CCINP, 4)
Montrez que pour $n \geqslant 1$, l'équation $x^n + \sqrt{n}x - 1 = 0$ admet une unique solution x_n dans $[0\,;1]$.

Étudiez la suite (x_n) et montrez qu'elle converge vers 0.

Trouvez un équivalent de x_n et étudiez la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} x_n$.

Correction 2.52
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 2.53 (Oral CCINP, 5)
Montrez que la suite (u_n) définie par $u_0 \in [0\,;1[$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + u_n^2\right)$ converge vers 0 et donnez la nature de la série $\sum u_n$.

Correction 2.54
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 2.55 (Oral CCINP, 6)
Quelle est la nature de la série de terme général $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n\,(n+1)}}\right)$?

Correction 2.56
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 2.57 (Oral CCINP, 7)
Soient $x, y > 0$. Représentez graphiquement l'ensemble des couples (x, y) tels que la série $\sum \dfrac{x^n}{y^n + n^x}$ converge.

Correction 2.58
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 2.59 (Oral CCMP, 8)
Étudiez la convergence de la suite (a_n) définie par $a_0 > 0$ et $a_{n+1} = 1 - \mathrm{e}^{-a_n}$.

Déterminez la nature des séries $\sum (-1)^n\, a_n$ et $\sum a_n^2$.

Déterminez la nature de la série $\sum a_n$ (on pourra étudier la série $\sum \ln \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$).

Correction 2.60
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 2.61 (Oral CCINP, 9)
Soient (a_n) une suite positive et (u_n) définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2}}{2}$.

(1) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leqslant \dfrac{a_n}{2}$.

(2) Montrez que si la série $\sum a_n$ converge, alors la suite (u_n) converge.

(3) La réciproque est-elle vraie ? Indication : considérer $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Correction 2.62
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Exercice 2.63 (Oral IMT, 10)
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+3} u_n$. On pose $(v_n) = \left(n^2 u_n\right)$.

(1) Déterminez la nature de la série de terme général $\ln \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

(2) Déduisez-en la nature de la série de terme général u_n.

Correction 2.64
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Exercice 2.65 (Oral Centrale, 11)

Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^2 - 1}$ converge et donnez la valeur de sa somme.

Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{n^2}{\left(n^2+1\right)^2}$ converge et donnez une valeur de n pour que sa somme partielle soit une valeur approchée de sa somme à 10^{-4} près.

Correction 2.66
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Exercice 2.67 (Oral Centrale, 12)

(1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrez que la suite $(H_n - \ln n)_{n \geqslant 1}$ converge.

(2) Déduisez de la question précédente la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

(3) Pour $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$. Calculez $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n) - 1}{n}$.

Correction 2.68
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 2.69 (Oral Centrale, 13)
Si (u_n) est une suite réelle telle que $u_0 = 0$, on pose alors $(v_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n\,(u_n - u_{n-1})$.

On note P_1 la propriété « la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ converge » et P_2 la propriété « il existe ℓ tel que $u_n \longrightarrow \ell$ et $\sum\,(\ell - u_n)$ converge ».

(1) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u_n = \operatorname{Arctan} n^\alpha$ pour $n \geqslant 1$, étudiez la véracité des propositions P_1 et P_2.

(2) Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle telle que $\sum a_n$ converge. Montrez que $\sum \dfrac{a_n}{n}$ converge et que $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \dfrac{a_k}{k} = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

(3) Comparez les propriétés P_1 et P_2.

Correction 2.70
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 2.71 (Oral CCMP, 14)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n\, n^\alpha}$ converge-t-elle ?

Correction 2.72
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 2.73 (Oral CCMP, 15)

Soient $\alpha > 0$ et $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k^\alpha}$.

(1) On suppose $\alpha > 1$. Montrez que $\sum\limits_{k=1}^{n} R_k = (n+1)\,R_n + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k^{\alpha-1}}$. Déduisez-en la convergence de la série $\sum R_n$.

(2) Étudiez le cas $\alpha \leqslant 1$.

Correction 2.74

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 2.75 (Oral CCMP, 16)

Soit $(a_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}^*}$.

(1) On suppose que la série $\sum a_n^{1-1/n}$ converge. Montrez que la série $\sum a_n$ converge.

(2) On suppose que la série $\sum a_n$ converge. Montrez que la série $\sum a_n^{1-1/n}$ converge.
Vous introduirez, pour $\lambda > 1$, l'ensemble $\left\{n \in \mathbb{N}^* \;\middle|\; a_n^{1-1/n} \leqslant \lambda a_n\right\}$ et son complémentaire.

(3) Généralisez en remplaçant $a_n^{1-1/n}$ par $a_n^{1-b_n}$ avec une hypothèse adéquate sur la suite (b_n).

Correction 2.76

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 2.77 (Oral CCMP, 17)
Soit f une permutation de $\mathbb{N}^*$. On pose $E\left(f\right) = \left\{\alpha \in \mathbb{R} \;\middle|\; \sum \dfrac{f\left(n\right)}{n^\alpha} \text{ converge}\right\}$.

(1) Montrez que $E\left(f\right)$ peut être vide. Montrez dans le cas contraire que $E\left(f\right)$ est un intervalle minoré par 2 et non-majoré.

(2) Soit $B \geqslant 2$. Montrez l'existence de f telle que $E\left(f\right) = \left]B\,;+\infty\right[$.

Correction 2.78

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 2.79 (Oral X, 18)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$.

(1) Montrez que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge. On note ℓ sa limite.

(2) Montrez que $\ell = -\left(1+\sqrt{2}\right)\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$.

Correction 2.80

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 2.81 (Oral X, 19)
Soit $\sum x_n$ une série absolument convergente de réels.

(1) Montrez que pour tout réel $p \geqslant 1$, la série $\sum |x_n|^p$ converge.

(2) Déterminez la limite de $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p$ quand $p \longrightarrow +\infty$.

Correction 2.82

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 2.83 (Oral X, 20)
Soient $\alpha > 0$ et (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Étudiez la convergence de la série $\sum u_n$.

Correction 2.84

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Chapitre 3

Familles sommables

$\star$ Exercice proche du cours
$\star\star$ Exercice de difficulté normale
$\star\star\star$ Exercice difficile (voire très difficile)
+ Exercice à faire en priorité

$\star\star$ Exercice 3.1 (Exercice 23)

La famille $\left(\dfrac{1}{pq\,(p+q)}\right)_{p,q\geqslant 1}$ est-elle sommable ?

Correction 3.2
$\star\star$ À venir $\star\star$

$\star\star$ Exercice 3.3 (Exercice 24)

(1) Soit $\alpha > 0$. Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^\alpha}{2^n}$ est convergente. On note $S(\alpha)$ sa somme.

(2) Dans cette question, on pose $\alpha = 1$ et on note $s = S(1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{2^n}$. En effectuant le changement d'indice $m = n-1$, montrez que $s = 2\left(s - \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{2^m}\right)$ et donnez la valeur de $S(1)$.

(3) En vous inspirant de ce qui précède, donnez une expression de $S(2)$ en fonction de $S(1)$ et $S(0)$, puis sa valeur.

(4) Montrez que la famille $\left(\dfrac{(-1)^{m+n}\,m}{2^{m+n}}\right)_{m,n\geqslant 0}$ est sommable et calculez sa somme.

Correction 3.4
★★ À venir ★★

★★ Exercice 3.5 (Exercice 25)
Soit a un complexe tel que $|a| < 1$.

En utilisant un produit de Cauchy, montrez que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\,a^n = \left(\frac{1}{1-a}\right)^2$.

Correction 3.6
★★ À venir ★★

★★ Exercice 3.7 (Exercice 26)
(1) Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$ et $N \in \mathbb{N}$, que vaut $\displaystyle\sum_{n=N}^{+\infty} z^n$?

(2) Soit $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| < 1$. Montrez que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{1-x^{2p+1}}$.

Correction 3.8
★★ À venir ★★

★★ Exercice 3.9 (Exercice 27)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On rappelle que $H_n = \ln n + \gamma + o\,(1)$.

(1) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrez que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,(n+m)} \underset{m \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln m}{m}$.

(2) Montrez que la famille $\left(\dfrac{(-1)^m}{m\,(m+n^2)}\right)_{m,n \geqslant 1}$ est sommable.

(3) Montrez que la famille $\left(\dfrac{(-1)^m}{(m+n)\,(m+n-1)}\right)_{m,n \geqslant 1}$ est sommable et donnez la valeur de sa somme.

Correction 3.10
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆⋆ Exercice 3.11 (Exercice 28)
Pour $n \geqslant 2$, on note $P(n)$ le plus grand diviseur premier de n. On note $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, … la suite croissante des nombres premiers.

(1) Montrez que pour tout $k \geqslant 3$, $p_{k-1} \leqslant p_k - 2$, puis $\dfrac{p_k}{p_k - 1} \leqslant \sqrt{\dfrac{p_k}{p_{k-1}}}$.

(2) Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{nP(n)}$ converge (indication : pensez à une sommation par paquets).

Correction 3.12
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆⋆ Exercice 3.13 (Exercice 29)
Soit u une suite complexe.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $H_x = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > x\}$, son adhérence est $\overline{H_x} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geqslant x\}$.

(1) Montrez que s'il existe $s_0 \in \mathbb{C}$ tel que la famille $\left(\dfrac{u_n}{n^{s_0}}\right)_{n\geqslant 1}$ est sommable, alors pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$, la famille $\left(\dfrac{u_n}{n^{s}}\right)_{n\geqslant 1}$ est sommable.

(2) Quand la famille $\left(\dfrac{u_n}{n^{s}}\right)_{n\geqslant 1}$ est sommable, on pose $f_u(s) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{u_n}{n^s}$.
Montrez que l'ensemble de définition de f_u est, s'il est non-vide, $\mathbb{C}$, un ensemble H_x ou un ensemble $\overline{H_x}$.

(3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $D_n = \left\{(d, d') \in (\mathbb{N}^*)^2 \;\middle|\; dd' = n\right\}$. Montrez que $(\mathbb{N}^*)^2 = \displaystyle\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} D_n$.

(4) Soient $(a_n), (b_n)$ deux suites complexes et $s \in \mathbb{C}$ tels que les familles $\left(\dfrac{a_n}{n^{s}}\right)_{n\geqslant 1}$ et $\left(\dfrac{b_n}{n^{s}}\right)_{n\geqslant 1}$ soient sommables.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \displaystyle\sum_{d\mid n} a_d b_{n/d}$. Montrez que la famille $\left(\dfrac{c_n}{n^{s}}\right)_{n\geqslant 1}$ est sommable et que $f_c(s) = f_a(s) \times f_b(s)$.

Correction 3.14
⋆⋆ À venir ⋆⋆

★★ Exercice 3.15 (Exercice 30)
Cet exercice prolonge le précédent.

On rappelle la définition de l'indicatrice d'Euler : pour $n \in \mathbb{N}^*$, φ_n est le cardinal de l'ensemble $\{k \in [\![1\,;n]\!] \mid k \wedge n = 1\}$.

On définit par récurrence la suite de Möbius : $\mu_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 2$, $\mu_n = -\sum_{\substack{d \mid n \\ d < n}} \mu_d$.

Enfin, on note δ_n le nombre de diviseurs de n et σ_n la somme des diviseurs de n.

On pose $\zeta = f_1$, $\xi = f_\varphi$ et $M(s) = f_\mu$.

(1) Montrez que l'ensemble de définition (au sens précédent) de ζ est H_1. Montrez que ξ est définie sur H_2.

(2) On admet la relation suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n = \sum_{d \mid n} \varphi_d$. Donnez une relation valable sur H_2 liant les fonctions ξ et ζ. Justifiez alors que l'ensemble de définition de ξ est H_2.

(3) On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\mu_n| \leqslant 1$. Donnez une relation entre M et ζ et précisez l'ensemble de définition de M.

(4) Déduisez-en la relation : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\varphi_n}{n} = \sum_{d \mid n} \dfrac{\mu_d}{d}$ en admettant l'unicité des coefficients u_n d'une fonction f_u.

(5) Exprimez f_δ et f_σ en fonction de ζ et précisez leurs ensembles de définition.

Correction 3.16
★★ À venir ★★

Chapitre 4

Rappels et compléments d'algèbre linéaire

$\star$ Exercice proche du cours
$\star\star$ Exercice de difficulté normale
$\star\star\star$ Exercice difficile (voire très difficile)
+ Exercice à faire en priorité

$+\star\star$ Exercice 4.1 (Exercice 1)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_1, \dots, u_n)$ une famille libre de E.

(1) Pour $i \in [\![1\ ;\ n]\!]$, on pose $c_i = \displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\neq i}} u_k$. Montrez que la famille $(c_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre.

(2) Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. On pose $s = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ et pour tout $i \in [\![1\ ;\ n]\!]$, $v_i = s + u_i$. Montrez que la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est liée ssi $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = -1$.

(3) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On pose $s = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i$ et pour tout $i \in [\![1\ ;\ n]\!]$, $v_i = s + \lambda u_i$. Montrez qu'il existe exactement deux valeurs de λ pour lesquelles la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est liée.

Correction 4.2
$\star\star$ À venir $\star\star$

$+\star\star$ Exercice 4.3 (Exercice 2)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in [\![0\ ;\ n]\!]$, on pose $P_k = X^k\,(1-X)^{n-k}$. Montrez que la famille $\mathscr{F}_n = (P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n\,[X]$.

Correction 4.4
$\star\star$ À venir $\star\star$

$+\star\star$ Exercice 4.5 (Exercice 3)
Soit f une application d'un ensemble Ω dans $\mathbb{C}$ qui prend une infinité de valeurs.

Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\left(1, f, f^2, \dots, f^n\right)$ est libre dans l'espace $\mathscr{F}(\Omega, \mathbb{C})$.

Correction 4.6
$\star\star$ À venir $\star\star$

$+\star\star$ Exercice 4.7 (Exercice 4)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in [\![0\,;n]\!]$, on pose $P_k = (X+k)^n$. Montrez que la famille $\mathscr{F}_n = (P_0, \dots, P_n)$ est libre.

Correction 4.8
$\star\star$ À venir $\star\star$

$\star$ Exercice 4.9 (Exercice 5)
Soit $a \in \mathbb{C}^*$. $\mathbb{C}$ est vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à z associe $z + a\overline{z}$.

(1) Montrez que f est linéaire.

(2) Montrez que si $|a| \neq 1$, alors f est un automorphisme de $\mathbb{C}$.

(3) Déterminez le noyau et l'image de f dans le cas où $a = \mathrm{e}^{i\alpha}$ (on pourra utiliser l'écriture trigonométrique des complexes).

Correction 4.10
$\star\star$ À venir $\star\star$

$+\star$ Exercice 4.11 (Exercice 6)
Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ qui conserve le degré : pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg f(P) = \deg P$.

Montrez que f est un automorphisme de $\mathbb{K}[X]$ (on pourra étudier les restrictions de f à $\mathbb{K}_n[X]$).

Correction 4.12
⋆⋆ À venir ⋆⋆

$+\star\star$ Exercice 4.13 (Exercice 7)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $P \in \mathbb{K}_n[X]$, on pose $f(P) = \left(X^2 - 1\right) P' - nXP$.

(1) Montrez que f est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

(2) Montrez que si $P \in \ker f$, alors $X^2 - 1$ divise P, puis justifiez qu'il existe $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P = \left(X^2 - 1\right)^\alpha Q$ et $(Q(1) \neq 0$ ou $Q(-1) \neq 0)$.

(3) Montrez que si n est impair, alors f est un automorphisme.

(4) Montrez que si n est pair, alors $\ker f$ est une droite vectorielle. Déduisez-en la dimension de $\operatorname{Im} f$.

Correction 4.14
⋆⋆ À venir ⋆⋆

$\star\star$ Exercice 4.15 (Exercice 8)
On pose $E = \mathbb{C}[X]$. Pour $P \in E$, on pose $f(P) = \left(X^2 - 1\right) P' - 2XP(X)$.

(1) Montrez que $f \in \mathscr{L}(E)$.

(2) Déterminez $\ker f$.

(3) Montrez que $\operatorname{Im} f = \{Q \in C[X] \mid Q'(1) = Q(1) \text{ et } Q'(-1) = -Q(-1)\}$. Indication : restreindre à $\mathbb{C}_n[X]$.

Correction 4.16
⋆⋆ À venir ⋆⋆

$\star$ Exercice 4.17 (Exercice 9)
Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$.

Montrez que $f(\ker(g \circ f)) = \ker g \cap \operatorname{Im} f$.

Correction 4.18
⋆⋆ À venir ⋆⋆

+ ⋆ ⋆ Exercice 4.19 (Exercice 10)
Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $(f, g) \in \mathscr{L}(E, F) \times \mathscr{L}(F, G)$.

(1) Montrez que $\ker(g \circ f) = \ker f \iff \ker g \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

(2) Montrez que $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g \iff \ker g + \operatorname{Im} f = F$.

Correction 4.20
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆ ⋆ ⋆ Exercice 4.21 (Exercice 11)
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On dit que $g \in \mathscr{L}(F, E)$ est un inverse à droite de f quand $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

(1) Montrez que si f possède deux inverses à droite différents, alors f en possède une infinité.

(2) Montrez que si f possède un unique inverse à droite, alors f est un isomorphisme (vous admettrez l'existence d'un supplémentaire de tout sous-espace vectoriel).

Correction 4.22
⋆⋆ À venir ⋆⋆

+ ⋆ ⋆ Exercice 4.23 (Exercice 12)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E.

(1) Montrez que $p + q$ est un projecteur ssi $p \circ q = q \circ p = 0$.

(2) Dans ce cas, montrez alors que $\operatorname{Im}(p + q) = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$ et $\ker(p + q) = \ker p \cap \ker q$.

Correction 4.24
⋆⋆ À venir ⋆⋆

★★ Exercice 4.25 (Exercice 13)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E tels que $p \circ q = 0$. Soit $r = p + q - q \circ p$.

Montrez que r est un projecteur et précisez ses éléments caractéristiques.

Correction 4.26
★★ À venir ★★

★★ Exercice 4.27 (Exercice 14)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On suppose qu'il existe $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$ tel que $f \circ g - g \circ f = \mathrm{id}_E$.

(1) Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f \circ g^n - g^n \circ f = ng^{n-1}$.

(2) Déduisez-en que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $\left(g^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est libre dans $\mathscr{L}(E)$.

(3) Si E est de dimension finie $p \geqslant 1$, que pouvez-vous conclure ?

Correction 4.28
★★ À venir ★★

★★ Exercice 4.29 (Exercice 15)
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = \mathrm{id}_E$. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $u \in E$, on veut résoudre l'équation $x + af(x) = u$ d'inconnue $x \in E$.

(1) Montrez que pour toutes les valeurs de a, sauf une seule a_0, l'équation a une unique solution que vous calculerez.

(2) Dans le cas où $a = a_0$, donnez une condition nécessaire sur u pour qu'il existe une solution, puis si cette condition est satisfaite, déterminez une solution particulière de l'équation qui soit combinaison linéaire de u et $f(u)$. Concluez.

Correction 4.30
★★ À venir ★★

$+\star\star$ Exercice 4.31 (Exercice 16)
Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(E)$.

(1) Montrez que $\operatorname{Im} f = \ker f$ et, ssi n est pair, $\operatorname{rg} f = \dfrac{n}{2}$ et $f^2 = 0$.

(2) Donnez un exemple d'une telle application linéaire f.

(3) Si les conditions de la question (1) sont satisfaites, alors on pose $r = \dfrac{n}{2}$: montrez qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_r & 0 \end{pmatrix}$ (matrice par blocs).

Correction 4.32
$\star\star$ À venir $\star\star$

$+\star\star$ Exercice 4.33 (Exercice 17)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrez l'équivalence

$$E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f \iff \ker f^2 = \ker f \iff \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2.$$

Correction 4.34
$\star\star$ À venir $\star\star$

$\star$ Exercice 4.35 (Exercice 18)
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $(f, g) \in \mathscr{L}(E, F)^2$. Montrez que $|\operatorname{rg} f - \operatorname{rg} g| \leqslant \operatorname{rg}(f + g) \leqslant \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$.

Correction 4.36
$\star\star$ À venir $\star\star$

$\star\star$ Exercice 4.37 (Exercice 19)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$. On suppose que $u \circ v = 0$ et $u + v \in \mathrm{GL}(E)$. Démontrez que $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v = \dim E$.

Correction 4.38
$\star\star$ À venir $\star\star$

★★ **Exercice 4.39 (Exercice 20)**
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.

(1) Soit U un sous-espace vectoriel de E. On pose $\mathscr{A} = \{u \in \mathscr{L}(E,F) \mid U \subseteq \ker u\}$. Montrez que $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E,F)$ tel que pour tout $(f,u) \in \mathscr{L}(E) \times \mathscr{A},\ \ fu \in \mathscr{A}$ et calculez sa dimension.

(2) Montrez que la réciproque est vraie : si $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E,F)$ tel que pour tout $(f,u) \in \mathscr{L}(E) \times \mathscr{A},\ \ fu \in \mathscr{A}$, alors il existe U un sous-espace vectoriel de E tel que $\mathscr{A} = \{u \in \mathscr{L}(E,F) \mid U \subseteq \ker u\}$.

Correction 4.40
★★ **À venir** ★★

+★ **Exercice 4.41 (Exercice 21)**
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1. Montrez que A peut s'écrire comme le produit d'une matrice colonne par une matrice ligne. Déduisez-en $A^2 = \operatorname{tr}(A)\, A$.

Correction 4.42
★★ **À venir** ★★

+★★ **Exercice 4.43 (Exercice 22)**
Soit f une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \ f(AB) = f(BA)$. Montrez que f est proportionnelle à la trace (indication : faire intervenir la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$).

Correction 4.44
★★ **À venir** ★★

★★★ **Exercice 4.45 (Exercice 23)**
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et G un sous-groupe de cardinal n de $\mathrm{GL}(E)$.

On pose $F = \{x \in E \mid \forall g \in G,\ \ g(x) = x\}$.

Montrez que $\dim F = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{g \in G} \operatorname{tr} g$. Indication : on pourra utiliser $p = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{g \in G} g$.

Correction 4.46
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆ Exercice 4.47 (Exercice 24)
Montrez qu'il n'existe pas de couple de matrices $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tels que $AB - BA = I_n$.

Correction 4.48
⋆⋆ À venir ⋆⋆

+⋆ Exercice 4.49 (Exercice 25)
Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n. On suppose que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\operatorname{tr}(AX) = \operatorname{tr}(BX)$. Montrez que $A = B$.

Correction 4.50
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆ Exercice 4.51 (Exercice 26)
Soient u, v les deux suites réelles telles que $u_0 = 1$, $v_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -3u_n + 10v_n$ et $v_{n+1} = -3u_n + 8v_n$.

Donnez des expressions de u_n et v_n en fonction de n.

Correction 4.52
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆⋆ Exercice 4.53 (Exercice 27)
Soient u, v, w les trois suites réelles telles que $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{3}{2}u_n - \dfrac{1}{2}v_n + \dfrac{1}{2}w_n \\ v_{n+1} = 5u_n - \dfrac{5}{2}v_n + 2w_n \\ w_{n+1} = 4u_n - \dfrac{5}{2}v_n + 2w_n \end{cases}$$

Donnez des expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n et leurs limites quand n tend vers $+\infty$.

Correction 4.54
⋆⋆ À venir ⋆⋆

+ ⋆ ⋆ Exercice 4.55 (Exercice 28)
Soient $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$ et $C \in \mathscr{M}_{pq}(\mathbb{K})$. On suppose connaître P un polynôme annulateur de A et Q un polynôme annulateur de B.

On pose $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p+q}(\mathbb{K})$.

(1) Montrez que PQ est un polynôme annulateur de M dans le cas où $C = 0$.

(2) Montrez que ce résultat reste vrai même si C n'est pas nulle. Indication : penser à un produit par blocs.

Correction 4.56
⋆⋆ À venir ⋆⋆

+ ⋆ ⋆ Exercice 4.57 (Exercice 29)
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et P un polynôme annulateur de A. On définit $B \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{K})$ par blocs : $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

(1) Calculez pour $k \in \mathbb{N}$ la matrice B^k en distinguant les cas k pair et k impair.

(2) On pose $Q(X) = P\left(X^2\right)$. Montrez que Q est un polynôme annulateur de B.

Correction 4.58
⋆⋆ À venir ⋆⋆

+ ⋆ ⋆ Exercice 4.59 (Exercice 30)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On définit $B \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{K})$ par blocs : $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$.

(1) Calculez pour $k \in \mathbb{N}$ la matrice B^k.

(2) Déterminez un polynôme annulateur de B.

Correction 4.60
⋆⋆ À venir ⋆⋆

+ ⋆ ⋆ Exercice 4.61 (Exercice 31)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{K}_n[X]$. On pose $d : P \longmapsto P'$, endomorphisme de E, et $f : P \longmapsto P + P'$.

(1) Donnez un polynôme annulateur de d. Déduisez-en un polynôme annulateur de f.

(2) Montrez que f est un automorphisme, puis exprimez son inverse à l'aide de f.

(3) Vérifiez que $f^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k d^k$.

Correction 4.62
⋆⋆ À venir ⋆⋆

+ ⋆ ⋆ Exercice 4.63 (Exercice 32)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $f(M) = M + \mathrm{tr}(M)A$.

(1) Montrez que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

(2) Déterminez un polynôme annulateur de f de degré 2.

(3) Dans quels cas f est-il un automorphisme ? Calculez f^{-1} quand c'est possible.

(4) Dans le cas contraire, vérifiez que f est un projecteur et déterminez ses éléments caractéristiques.

Correction 4.64
⋆⋆ À venir ⋆⋆

+ ⋆ ⋆ Exercice 4.65 (Exercice 33)
Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$.

On suppose que f possède un polynôme annulateur P vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.

Montrez qu'on a alors $\mathrm{Im}\, f \oplus \ker f = E$.

Correction 4.66
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 4.67 (Oral CCINP, 1)
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et p, q deux endomorphismes de E.

On suppose que $p + q = \mathrm{id}_E$ et $\mathrm{rg}\, p + \mathrm{rg}\, q \leqslant \dim E$.

Montrez que p et q sont deux projecteurs.

Correction 4.68
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 4.69 (Oral IMT, 2)
Soient E un espace vectoriel de dimension supérieure à 2 et f, g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g \circ f = f$.

(1) Montrez que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des projecteurs.

(2) Que peut-on dire des rangs de f, $f \circ g$ et $g \circ f$?

(3) Montrez que $f \circ g$ est un projecteur sur $\mathrm{Im}\, f$, parallèlement à un sous-espace contenant $\ker g$.

(4) On suppose désormais qu'on a aussi $g \circ f \circ g = g$. Que dire des rangs de f et g ?

(5) Montrez que $E = \mathrm{Im}\, f \oplus \ker g$.

Correction 4.70
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 4.71 (Oral TPE, 3)
Soient E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$.

(1) Montrez que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}\, f^{k+1} \subseteq \mathrm{Im}\, f^k$.

(2) Montrez que s'il existe un entier p tel que $\mathrm{Im}\, f^{p+1} = \mathrm{Im}\, f^p$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}\, f^{p+k} \subseteq \mathrm{Im}\, f^p$.

(3) Déduisez-en que $\mathrm{Im}\, f^{n+1} = \mathrm{Im}\, f^n$.

Correction 4.72
★★ **À venir** ★★

Exercice 4.73 (Oral TPE, 4)
Montrez que $P \longmapsto P - P'$ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et donnez son endomorphisme réciproque.

Correction 4.74
★★ **À venir** ★★

Exercice 4.75 (Oral Centrale, 5)
Soient E un espace vectoriel de dimension finie non-nulle et u, v deux endomorphismes de E.

(1) Montrez que $|\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v| \leqslant \operatorname{rg}(u+v) \leqslant \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v$.

(2) Soient F un sous-espace de E et G, H deux supplémentaires de F dans E. On pose p le projecteur sur F parallèlement à G et q celui sur H parallèlement à F. Montrez que $\operatorname{rg}(p+q) = \operatorname{rg} p + \operatorname{rg} q$.

Correction 4.76
★★ **À venir** ★★

Exercice 4.77 (Oral Centrale, 6)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ une famille libre de E^* (note : E^* est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des formes linéaires sur E) et $\psi \in E^*$.

(1) Montrez que $\psi \in \operatorname{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p) \iff \bigcap_{i=1}^{p} \ker \varphi_i \subseteq \ker \psi$.

(2) On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrez que les conditions de la question précédente sont encore équivalentes à l'existence d'un réel $M > 0$ tel que $\forall x \in E,\ \ |\psi(x)| \leqslant M \max_{1 \leqslant i \leqslant p} |\varphi_i(x)|$.

Correction 4.78
★★ **À venir** ★★

Exercice 4.79 (Oral CCMP, 7)
Soient n, k deux entiers tels que $2 \leqslant k \leqslant n$. On pose $A_k = \left(a_{ij}^{(k)}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij}^{(k)} = 1$ si $i - j = k - 1$, les autres coefficients étant nuls.

(1) Calculez ${}^t A_k A_k$.

Soit p un projecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que $p \neq \mathrm{id}$.

(2) Justifiez que $\operatorname{rg} p < n$.

(3) Montrez que p est la composée de deux endomorphismes nilpotents.

Correction 4.80
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 4.81 (Oral CCMP, 8)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f, g deux endomorphismes de E.

On suppose f inversible et g de rang 1.

Montrez que $f + g$ est inversible ssi $\operatorname{tr}\left(g \circ f^{-1}\right) \neq -1$.

Correction 4.82
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 4.83 (Oral CCMP, 9)
Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{pn}(\mathbb{R})$.

Montrez que $p + \operatorname{rg}(I_n + AB) = n + \operatorname{rg}\left(I_p + BA\right)$.

Correction 4.84
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 4.85 (Oral CCMP, 10)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $E = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid AMB = 0\}$.

Montrez que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et donnez sa dimension.

Correction 4.86

$\star\star$ **À venir** $\star\star$

Exercice 4.87 (Oral CCMP, 11)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résolvez dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ l'équation $M = \operatorname{Com} M$.

Correction 4.88

$\star\star$ **À venir** $\star\star$