Maths – MPI

Romain Bricout

25 mars 2024

Introduction

Ce document réunit l'ensemble de mes cours de Mathématiques de MPI, ainsi que les exercices les accompagnant. Le professeur était M. Walbron. J'ai adapté certaines formulations me paraissant floues ou ne me plaisant pas mais le contenu pur des cours est strictement équivalent.

Les éléments des tables des matières initiale et présentes au début de chaque chapitre sont cliquables (amenant directement à la partie cliquée). C'est également le cas des références à des éléments antérieurs de la forme, par exemple, « Démonstration 5.22 ».

Cette version ne contient que le contenu des cours imprimés distribués au fil de l'année. Voir l'autre version pour les annotations.

Table des matières

Première partie

Cours

Chapitre 1

Espaces vectoriels normés

Sommaire

Dans ce chapitre, la lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Bornes supérieures, bornes inférieures

1.1.1 Borne supérieure d'une partie de $\mathbb{R}$

On rappelle le théorème fondamental, dit « théorème (ou axiome) de la borne supérieure ».

Théorème 1.1
Toute partie A de $\mathbb{R}$, non-vide et majorée, possède une borne supérieure, notée $\sup A$.

Toute partie A de $\mathbb{R}$, non-vide et minorée, possède une borne inférieure, notée $\inf A$.

On dispose de caractérisations équivalentes de la borne supérieure.

Proposition 1.2
Soient A une partie de $\mathbb{R}$, non-vide et majorée, et s un réel.

Alors il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- $s = \sup A$
- $\begin{cases} \forall a \in A, \quad a \leqslant s \\ \forall \varepsilon > 0, \quad \exists x \in A, \quad s - \varepsilon < x \leqslant s \end{cases}$
- $\begin{cases} \forall a \in A, \quad a \leqslant s \\ \exists\,(x_n) \in A^{\mathbb{N}}, \quad x_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} s \end{cases}$

On a évidemment les caractérisations associées à la borne inférieure.

1.1.2 Borne supérieure d'une application à valeurs dans $\mathbb{R}$

Définition 1.3
Soient X un ensemble non-vide et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

Si f est majorée sur X, alors on appelle borne supérieure de f sur X le réel $\sup f(X) = \sup\limits_X f = \sup\limits_{x \in X} f(x)$.

Si f est minorée sur X, alors on appelle borne inférieure de f sur X le réel $\inf f(X) = \inf\limits_X f = \inf\limits_{x \in X} f(x)$.

On déduit de la Proposition 1.2 les caractérisations suivantes.

Proposition 1.4
Soient X un ensemble non-vide, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ majorée sur X et s un réel.

Alors il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- $s = \sup\limits_X f$
- $\begin{cases} \forall x \in X, \quad f(x) \leqslant s \\ \forall \varepsilon > 0, \quad \exists x \in X, \quad s - \varepsilon < f(x) \leqslant s \end{cases}$
- $\begin{cases} \forall x \in X, \quad f(x) \leqslant s \\ \exists\, (x_n) \in X^{\mathbb{N}}, \quad f(x_n) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} s \end{cases}$

1.1.3 Règles pratiques

D'abord, des évidences auxquelles on ne pense pas toujours.

Proposition 1.5
Soit A une partie de $\mathbb{R}$, non-vide et majorée. Alors $\forall a \in A, \quad a \leqslant \sup A$.

Soient X un ensemble non-vide et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ majorée sur X. Alors $\forall x \in X, \quad f(x) \leqslant \sup\limits_X f$.

En pratique, on n'a pas souvent besoin de connaître la valeur exacte d'une borne supérieure, on a plus souvent besoin de la majorer.

Proposition 1.6
- *Soient A une partie de $\mathbb{R}$, non-vide et majorée, et M un réel.*
  Pour montrer $\sup A \leqslant M$, il suffit de montrer $\forall a \in A, \quad a \leqslant M$.
- *Soient X un ensemble non-vide, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ majorée sur X et M un réel.*
  Pour montrer $\sup\limits_X f \leqslant M$, il suffit de montrer $\forall x \in X, \quad f(x) \leqslant M$.

Multiplication par un réel positif.

Proposition 1.7
Soient X un ensemble non-vide et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ majorée sur X.

Alors pour tout $\lambda \geqslant 0$, $\sup\limits_X (\lambda f) = \lambda \sup\limits_X f$.

Attention ! C'est bien sûr faux si $\lambda < 0$.

1.2 Normes

1.2.1 Définition

Définition 1.8
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

On appelle norme sur E toute application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

- pour tout $x \in E$, $N(x) = 0 \iff x = 0$ (séparation)
- pour tout $x \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (homogénéité)
- pour tout $(x, y) \in E^2$, $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire).

Un espace vectoriel est dit espace vectoriel normé quand on lui associe une norme.

On déduit de l'inégalité triangulaire une inégalité classique (souvent appelée aussi inégalité triangulaire) :

$$\text{pour tout } (x, y) \in E^2, \ |N(x) - N(y)| \leqslant N(x - y).$$

Si N est une norme sur E, alors on peut définir une distance entre deux vecteurs de E : $d(u, v) = N(u - v)$.

On définit ainsi une application $d : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

- pour tout $(x, y) \in E^2$, $d(y, x) = d(x, y)$ (symétrie)
- pour tout $(x, y) \in E^2$, $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (sépration)
- pour tout $(x, y, z) \in E^3$, $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

1.2.2 Exemples fondamentaux

- La valeur absolue dans $\mathbb{R}$ et le module dans $\mathbb{C}$ sont des normes.

- La norme euclidienne habituelle en géométrie plane ou spatiale est une norme.

- Plus généralement, si $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E, la norme euclidienne associée $x \longmapsto \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$ est une norme au sens précédent.

- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On choisit une base de E $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Si v est un vecteur de E, on note $(v_1, \ldots, v_n)$ les coordonnées de v dans la base $\mathscr{B}$.
  On définit classiquement trois normes sur E :

$$\|v\|_\infty = \max_{i \in [\![1;n]\!]} |v_i| \qquad \|v\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i| \qquad \|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2}$$

  appelées respesctivement norme infinie ou norme sup, norme 1 et norme 2.
  Cas particulier : $E = \mathbb{R}^n$ muni de la base canonique.
  Cas particulier : $E = \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ muni de la base canonique. Si $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ est une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors

$$\|A\|_\infty = \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \left|a_{ij}\right| \qquad \|A\|_1 = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \left|a_{ij}\right| \qquad \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \left|a_{ij}\right|^2}$$

- Soient X un ensemble et E l'ensemble des applications bornées de X dans $\mathbb{K}$. La norme sup sur E est définie par $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.
  Cas particulier : si $X = \mathbb{N}$, E est l'ensemble des suites bornées et $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

Proposition 1.9
Soient E, F deux espaces vectoriels normés.

L'application de $E \times F$ dans $\mathbb{R}_+$ qui à (x, y) associe $\max\left(\|x\|_E, \|y\|_F\right)$ est une norme.

Autrement dit, le produit de deux espaces vectoriels normés est encore un espace vectoriel normé, résultat qui se généralise par récurrence à un nombre quelconque (fini) d'espaces vectoriels normés.

1.2.3 Normes équivalentes

Définition 1.10
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et N_1, N_2 deux normes sur E.

On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes quand il existe deux constantes strictement positives a, b telles que pour tout $v \in E$, $aN_1(v) \leqslant N_2(v) \leqslant bN_1(v)$.

Exercice 1.11
Montrez que si E est de dimension finie, les trois normes $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes.

Exercice 1.12
Soient $E = \mathbb{R}[X]$ et $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in E$. On pose $N_1(P) = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$ et $N_\infty(P) = \max_{0\leqslant i\leqslant n} |a_i|$.

Montrez que N_1 et N_∞ sont des normes sur E.

Montrez qu'elles ne sont pas équivalentes en considérant la suite des polynômes $P_n = \sum_{i=0}^{n} X^i$.

Le résultat suivant est fondamental.

Théorème 1.13
Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les normes sur E sont équivalentes.

Quand on est en dimension finie, cela signifie que tous les résultats qu'on peut démontrer pour une norme sont à facteurs près valables pour n'importe quelle norme, autrement dit cela nous permettra de choisir la norme que l'on préfère si on ne nous l'impose pas.

Dans toute la suite, E est un espace vectoriel normé par la norme $\|\cdot\|$.

1.2.4 Boules

Définition 1.14
Soient $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r l'ensemble noté $B(a,r)$ défini de la façon suivante :

$$B(a,r) = \{v \in E \mid \|v-a\| < r\}.$$

On appelle boule fermée de centre a et de rayon r l'ensemble noté (généralement) $\overline{B}(a,r)$:

$$\overline{B}(a,r) = \{v \in E \mid \|v-a\| \leqslant r\}.$$

On appelle sphère de centre a et de rayon r l'ensemble (généralement) noté $S(a,r)$:

$$S(a,r) = \{v \in E \mid \|v-a\| = r\}.$$

On appelle boule-unité la boule de centre 0 et de rayon 1, sphère-unité la sphère de centre 0 et de rayon 1.

Exercice 1.15
Que sont les boules dans $\mathbb{R}$? Que sont les sphères dans $\mathbb{R}$?

Exercice 1.16
On prend $E = \mathbb{R}^2$ et on définit les normes infinie, 1 et 2 relativement à la base canonique.

Représentez graphiquement les boules-unités pour chacune de ces trois normes.

Exercice 1.17
Montrez que toute boule ouverte est contenue dans une boule fermée et contient une boule fermée de mêmes centres.

Montrez la même chose en inversant les mots « ouverte » et « fermée ».

Définition 1.18
Soit $(x, y) \in E^2$. On note $[xy] = \{tx + (1-t)\,y \mid t \in [0\,;1]\}$, appelé segment (géométrique) d'extrémités x et y.

Une partie A de E est dite convexe quand pour tout $(x, y) \in A^2$, $[xy] \subseteq A$.

On a :
$$A \text{ est convexe} \iff \forall\,(x, y) \in A^2,\ \forall t \in [0\,;1]\,,\ tx + (1-t)\,y \in A.$$

Proposition 1.19
Les boules (ouvertes ou fermées) sont des parties convexes.

Les sphères ne sont jamais convexes.

Dans $\mathbb{R}$, les convexes sont les intervalles.

1.2.5 Parties bornées

Définition 1.20
On dit qu'une partie A de E est bornée quand il existe une boule qui la contient.

Exercice 1.21
Montrez que A est bornée ssi A est contenue dans une boule de centre 0.

Plus généralement, on choisit arbitrairement un point de E, noté x. Montrez l'équivalence A est bornée ssi A est contenue dans une boule de centre x.

Exercice 1.22
Montrez qu'en dimension finie, cette définition ne dépend pas de la norme.

Proposition 1.23
Une partie A de E n'est pas bornée ssi il existe une suite (v_n) à termes dans A telle que $\|v_n\| \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} +\infty$.

Exercice 1.24
Dans $E = \mathbb{R}^2$, on pose $A = \left\{(x, y) \mid x^4 + y^4 = 20\right\}$: A est-elle bornée ? Si oui, pour chacune des normes infinie, 1 et 2, donnez un rayon d'une boule centrée en 0 qui contient A.

Exercice 1.25
Même question avec $E = \mathbb{C}^2$.

Exercice 1.26
Dans $E = \mathbb{R}^3$, on pose $B = \left\{(x, y, z) \mid x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 2xy + 2xz - 2yz \leqslant 42\right\}$: B est-elle bornée ? Si oui, pour chacune des normes infinie, 1 et 2, donnez un rayon d'une boule centrée en 0 qui contient B.

Exercice 1.27
Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on note $\mathscr{P}$ l'ensemble des matrices de projecteurs : $\mathscr{P}$ est-il borné ?

Définition 1.28
On dit qu'une suite v à termes dans E est bornée quand l'ensemble de ses valeurs est borné, autrement dit quand il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|v_n\| \leqslant M$.

On dit qu'une fonction f d'un ensemble X dans E est bornée quand l'ensemble de ses valeurs prises sur X est borné, autrement dit quand il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in X$, $\|f(x)\| \leqslant M$.

Exercice 1.29
Soit u une suite complexe arithmético-géométrique de raison a. À quelle condition est-elle bornée ?

Exercice 1.30
Soient B, B' deux boules de E. Si $(x, x') \in E^2$, on pose $f(x, x') = d(x, x')$. Montrez que f est bornée sur $B \times B'$.

1.3 Convergence des suites

Dans cette section, E désigne un espace vectoriel normé par la norme $\|\cdot\|$.

1.3.1 Définition

Définition 1.31
Soient $u=(u_n)$ une suite à termes dans E et $\ell \in E$.

On dit que la suite u converge vers ℓ quand toute boule ouverte de centre ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang :

$$\forall \varepsilon>0,\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geqslant n_0,\ \ u_n \in B(\ell,\varepsilon).$$

Proposition 1.32
Dans la définition, on peut remplacer les boules ouvertes par des boules fermées.

On peut réécrire la définition sous deux formes équivalentes :

$$\forall \varepsilon>0,\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geqslant n_0,\ \ \|u_n-\ell\|<\varepsilon$$

ou

$$\forall \varepsilon>0,\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geqslant n_0,\ \ \|u_n-\ell\| \leqslant \varepsilon.$$

On peut donc se ramener aux suites réelles positives : la suite vectorielle u converge vers ℓ ssi la suite réelle $(\|u_n-\ell\|)$ converge vers 0.

Une suite qui ne converge vers aucun élément de E est dite divergente.

1.3.2 Propriétés usuelles

Proposition 1.33 (Unicité de la limite)
Si une suite $u \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$, elle ne peut converger vers un autre point de E.

On peut donc noter classiquement $\ell=\lim u=\lim\limits_{n \longrightarrow+\infty} u_n$ ou $u_n \xrightarrow[n \longrightarrow+\infty]{} \ell$.

Proposition 1.34
Si une suite $u \in E^{\mathbb{N}}$ converge, alors elle est bornée.

Théorème 1.35 (Opérations sur les suites convergentes)
Soient $u, v \in E^{\mathbb{N}}$ *convergeant respectivement vers* ℓ *et* m *deux éléments de* E.

Alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, *la suite* $au + bv$ *converge vers* $a\ell + bm$.

Soit $\alpha \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *convergeant vers* $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors la suite αu *converge vers* $\lambda\ell$.

Proposition 1.36
Toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite.

Quasi-réciproque : si u *est une suite telle que les deux suites extraites* (u_{2n}) *et* (u_{2n+1}) *convergent vers la même limite* ℓ, *alors* u *converge vers* ℓ.

Proposition 1.37
Dans un produit de deux espaces vectoriels normés $E \times F$, *une suite* $(u_n) = ((a_n, b_n))$ *converge ssi les suites* (a_n) *et* (b_n) *convergent dans* E, *respectivement* F.

Dans ce cas, $\lim (a_n, b_n) = (\lim a_n, \lim b_n)$.

Ce résultat se généralise sans difficulté par récurrence à un nombre quelconque (fini) d'espaces vectoriels normés.

1.3.3 Cas particulier en dimension finie

Dans cette partie, on suppose que E est de dimension finie.

Définition 1.38
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Pour $i \in [\![1\,;n]\!]$, on appelle i-ème forme coordonnée (relative à la base $\mathscr{B}$), notée souvent d_i, la forme linéaire qui à un vecteur associe sa i-ème coordonnée dans la base $\mathscr{B}$:

$$\text{pour tout } v \in E, \quad v = \sum_{i=1}^{n} d_i(v)\, e_i.$$

Théorème 1.39
Soit $\mathscr{B}$ *une base de* E.

Une suite $u \in E^{\mathbb{N}}$ *converge vers* $\ell \in E$ *ssi pour toute forme coordonnée* d *relative à* $\mathscr{B}$, *la suite* $(d(u_n))$ *converge vers* $d(\ell)$.

Autrement dit, une suite converge ssi ses suites-coordonnées dans n'importe quelle base convergent.

Dans ce cas, la limite de la suite u *est le vecteur* ℓ *tel que pour toute forme coordonnée* d, $d(\ell) = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} d(u_n)$.

Exemple 1.40

Si $M_n = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e}^{-n} \\ 1/n & n \sin (1/n) \end{pmatrix}$, alors la suite de matrices (M_n) converge vers la matrice I_2.

Corollaire 1.41
Si E est de dimension finie, la convergence d'une suite ne dépend pas du choix de la norme. On peut donc choisir la norme qu'on veut.

1.3.4 Point adhérent à une partie

Définition 1.42
Soient A une partie de E et $x \in E$.

On dit que x est un point adhérent à A quand il existe une suite $u \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x.

L'adhérence de A est l'ensemble de ses points adhérents, noté $\overline{A}$.

Intuitivement, l'adhérence d'une partie est elle-même à laquelle on ajoute tous les points qui se trouvent sur son bord.

Exercice 1.43
Quelle est l'adhérence d'une boule ouverte ?

Exercice 1.44
Quelle est l'adhérence de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$?

Proposition 1.45
Soient A une partie de E et $x \in E$.

Alors x est adhérent à A ssi toute boule centrée en x rencontre A.

De manière formalisée : $x \in \overline{A} \iff \forall r > 0, \ \exists y \in A, \ \ y \in B(x, r)$.

On peut donner la définition de la densité d'une partie.

Définition 1.46
On dit qu'une partie A est dense dans E quand $\overline{A} = E$, c'est-à-dire qu'on peut trouver des éléments de A aussi proches de n'importe quel point.

Exemple 1.47

- Dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses (*cf.* cours de première année).
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (démonstration ultérieure).

1.4 Limites de fonctions

Dans cette section, E et F sont deux espaces vectoriels normés par les normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.

1.4.1 Définition

Définition 1.48
Soient f une fonction de E dans F, D son ensemble de définition, $a \in \overline{D}$ et $\ell \in F$.

On dit que f a pour limite ℓ en a quand

$$\forall \varepsilon > 0, \;\; \exists \eta > 0, \;\; \forall x \in D, \;\; \|x - a\|_E < \eta \implies \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon.$$

Remarque 1.49
On peut remplacer les inégalités strictes sur les normes par des inégalités larges.

On peut réécrire la définition à l'aide de boules ouvertes (ou fermées) :

$$\forall \varepsilon > 0, \;\; \exists \eta > 0, \;\; \forall x \in D \cap B(a, \eta), \;\; f(x) \in B(\ell, \varepsilon).$$

Si E et F sont de dimension finie, cette définition ne dépend pas du choix des normes.

1.4.2 Caractérisation séquentielle de la limite

Théorème 1.50
Soient f une fonction de E dans F, D son ensemble de défintion, $a \in \overline{D}$ et $\ell \in F$.

f a pour limite ℓ en a ssi pour toute suite u à termes dans D convergeant vers a, la suite $f \circ u = (f(u_n))$ converge vers ℓ.

En pratique, on utilise beaucoup plus souvent le sens direct de l'équivalence précédente.

1.4.3 Propriétés usuelles

Proposition 1.51 (Unicité de la limite)
Soient f une fonction de E dans F, D son ensemble de définition, $a \in \overline{D}$ et $\ell \in F$.

Si f a pour limite ℓ en a, alors elle ne peut avoir d'autre limite que ℓ en a.

On peut donc noter classiquement $\ell = \lim_a f = \lim_{x \longrightarrow a} f(x)$ ou $f(x) \xrightarrow[x \longrightarrow a]{} \ell$.

Proposition 1.52
Si f a pour limite ℓ en a, alors elle est bornée au voisinage de a.

Théorème 1.53 (Opérations sur les limites)
Soient f et g deux fonctions de E dans F, définies sur la même partie D et ayant respectivement pour limites ℓ et m deux éléments de F en $a \in \overline{D}$.

Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, la fonction $\lambda f + \mu g$ a pour limite $\lambda \ell + \mu m$ en a.

Soient α une fonction de E dans $\mathbb{K}$ et f une fonction définie de E dans F, définies sur la même partie D et ayant respectivement pour limites $\beta \in \mathbb{K}$ et $\ell \in F$ en $a \in \overline{D}$.

Alors αf a pour limite $\beta \ell$ en a.

Proposition 1.54
Une fonction $f = (g, h)$ à valeurs dans un produit d'espaces vectoriels normés a une limite ssi g et h ont chacune une limite.

Dans ce cas, $\lim\limits_a f = \left(\lim\limits_a g, \lim\limits_a h\right)$.

Ce résultat se généralise sans difficulté par récurrence à un nombre quelconque (fini) d'espaces vectoriels normés.

1.4.4 Cas particulier de la dimension finie

Théorème 1.55
On suppose que F est de dimension finie. Soit $\mathscr{B}$ une base de F.

Soit f une fonction de E dans F, D son ensemble de définition, $a \in \overline{D}$ et $\ell \in F$.

La fonction f a pour limite ℓ en a ssi pour toute forme coordonnée d relative à $\mathscr{B}$, la fonction $d \circ f$ a pour limite $d(\ell)$ en a.

Autrement dit, une fonction a une limite en a ssi ses fonctions-coordonnées dans n'importe quelle base ont chacune une limite en a.

Dans ce cas, la limite de la fonction f en a est le vecteur ℓ tel que pour tout forme coordonnée d, $d(\ell) = \lim\limits_{x \longrightarrow a} d(f(x))$.

1.4.5 Composition des limites

G désigne un troisième espace vectoriel normé.

Théorème 1.56
Soient f une fonction de E dans F et D_f son ensemble de définition. Soient g une fonction de F dans G et D_g son ensemble de définition. On suppose que $f\left(D_f\right) \subseteq D_g$ (condition qui permet de définir la composée $g \circ f$ sur D_f).

Soient $a \in \overline{D_f}$, $b \in \overline{D_g}$ et $\ell \in G$.

Si f a pour limite b en a et g a pour limite ℓ en b, alors $g \circ f$ a pour limite ℓ en a.

Autrement dit, si $\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \longrightarrow a]{} b \\ g(y) \xrightarrow[y \longrightarrow b]{} \ell \end{cases}$ *alors* $g \circ f(x) \xrightarrow[x \longrightarrow a]{} \ell$.

1.4.6 Extensions des définitions

D'abord les limites infinies en un point dans le cas où l'espace d'arrivée est $\mathbb{R}$.

Définition 1.57
Soient f une fonction de E dans $\mathbb{R}$, D son ensemble de définition et $a \in \overline{D}$.

On dit que f a pour limite $+\infty$ en a quand

$$\forall M > 0,\ \ \exists \eta > 0,\ \ \forall x \in D,\ \ \|x - a\|_E \leqslant \eta \implies f(x) \geqslant M.$$

On dit que f a pour limite $-\infty$ en a quand

$$\forall M < 0,\ \ \exists \eta > 0,\ \ \forall x \in D,\ \ \|x - a\|_E \leqslant \eta \implies f(x) \leqslant M.$$

Puis les limites en « l'infini ».

Définition 1.58
Soient f une application de E dans F et $\ell \in F$.

On dit que f a pour limite ℓ quand $\|x\|$ tend vers l'infini quand

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists B > 0,\ \ \forall x \in E,\ \ \|x\|_E \geqslant B \implies \|f(x) - \ell\|_F \leqslant \varepsilon.$$

Dans le cas où $F = \mathbb{R}$, on dit que $f(x)$ a pour limite $+\infty$ quand $\|x\|$ tend vers l'infini quand

$$\forall M > 0,\ \ \exists B > 0,\ \ \forall x \in E,\ \ \|x\|_E \geqslant B \implies f(x) \geqslant M.$$

(Définition semblable pour la limite $-\infty$).

Enfin, dans le cas où l'espace de départ est $\mathbb{R}$, on peut parler de limite en l'infini au sens habituel.

Définition 1.59
Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ dans F, définie sur un ouvert $]? \, ; +\infty[$ et $\ell \in F$.

On dit que $f(x)$ a pour limite ℓ quand x tend vers $+\infty$ quand

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists B > 0, \quad \forall x \geqslant B, \quad \|f(x) - \ell\| \leqslant \varepsilon.$$

(Définition semblable pour la limite x tend vers $-\infty$).

1.5 Fonctions continues

Dans cette section, E et F sont des espaces vectoriels normés par les normes $\| \cdot \|_E$ et $\| \cdot \|_F$.

1.5.1 Continuité en un point

Proposition 1.60
Soient f une fonction de E dans F, D son ensemble de définition, $a \in \overline{D}$ et $\ell \in F$.

Si f a pour limite ℓ en a et si $a \in D$, alors $\ell = f(a)$.

Dans ce cas, on dit que la fonction f est continue en a.

Définition 1.61
Soient f une fonction de E dans F, D son ensemble de définition et $a \in D$.

On dit que f est continue en a quand f a pour limite $f(a)$ en a.

On déduit de cette définition et des théorèmes précédents

- la caractérisation séquentielle de la continuité en un point ;
- le fait qu'une fonction continue en un point est bornée au voisinage de ce point ;
- les théorèmes d'opérations et de compositions des fonctions continues en un point ;
- l'équivalence entre la continuité d'une fonction et celle de ses fonctions-coordonnées dans une certaine base de F dans le cas où F est de dimension finie.

1.5.2 Continuité sur une partie

Définition 1.62
Soient f une fonction de E dans F, D son ensemble de définition et $A \subseteq D$.

On dit que f est continue sur A quand f est continue en tout point de A.

On déduit de cette définition et des théorèmes précédents

- ▹ les théorèmes d'opérations et de compositions des fonctions continues sur une partie ;
- ▹ l'équivalence entre la continuité d'une fonction et celle de ses fonctions-coordonnées dans une certaine base de F dans le cas où F est de dimension finie.

Proposition 1.63
Soient f et g deux fonctions de E dans F définies sur D et $A \subseteq D$.

Si A est dense dans D, f et g sont continues sur D et $f = g$ sur A, alors $f = g$ sur D.

1.5.3 Cas particulier de la dimension finie

On suppose que E et F sont de dimensions finies.

Dans une base donnée, les formes coordonnées relatives à cette base sont en particulier des applications continues.

Donc toute fonction f de E dans F dont les fonctions-coordonnées $(f_1, \dots, f_n)$ dans une base de F sont définies polynomialement à partir des formes coordonnées dans une base de E est continue.

Exemple 1.64
- ▹ La fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y) = \left(x^2 + y^2, xy - (1 + x)^3\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- ▹ Les applications trace et déterminant définies sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont continues.

Exercice 1.65
Montrez que l'application $A \longmapsto A^2$ est continue de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans lui-même.

Exercice 1.66
En admettant (momentanément) que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert, montrez que l'application $A \longmapsto A^{-1}$ est continue de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dans lui-même.

1.5.4 Fonctions lipschitziennes

Définition 1.67
Soient f une application de E dans F, A une partie de E et $K \in \mathbb{R}_+$.

On dit que f est K-lipschitzienne sur A (ou lipschitzienne de rapport K) quand

$$\forall (x, y) \in A^2, \ \ \|f(y) - f(x)\|_F \leqslant K \|y - x\|_E .$$

On dit que f est lipschitzienne sur A quand il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que f soit K-lipschitzienne sur A.

Remarque 1.68
Si f est K-lipschitzienne sur A, alors le rapport K n'est pas unique, puisque pour tout $L \geqslant K$, on a encore f L-lipschitzienne sur A.

Proposition 1.69
Toute fonction lipschitzienne est continue.

Mais la réciproque est fausse (contre-exemple : la fonction $\sqrt{\cdot}$ sur $[0 ; +\infty[$).

Un exemple fondamental : la fonction $x \longmapsto d(x, A)$.

Définition 1.70
Soit A une partie de E.

Pour $x \in E$, on appelle distance de x à A le réel $\inf\limits_{a \in A} d(x, a)$.

Proposition 1.71
Pour toute partie A de E, la fonction $x \longmapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne.

L'adhérence de A est l'ensemble des points à distance nulle de A, i.e. tels que $d(x, A) = 0$.

1.5.5 Continuité des applications linéaires et n-linéaires

Proposition 1.72
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- *f est continue en 0 ;*
- *f est continue en un point x ;*
- *f est continue sur E ;*
- *f est lipschitzienne sur E ;*
- *il existe $K \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leqslant K \|x\|_E$;*
- *f est bornée sur la boule-unité ;*
- *f est bornée sur une boule.*

Exercice 1.73
On pose $E = \mathscr{C}^0([0\,;1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie.

L'application $f \longmapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ est-elle continue sur E ?

Exercice 1.74
E désigne le même espace et on pose $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

Montrez que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur E.

L'application $f \longmapsto f(1)$ est-elle continue sur E ?

Définition 1.75
On note $\mathscr{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F.

Proposition 1.76
$\mathscr{L}_c(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E, F)$, en général distinct de $\mathscr{L}(E, F)$.

Cas particulier en dimension finie.

Théorème 1.77
On suppose que E est de dimension finie.

Toute application linéaire de E dans F est lipschitzienne sur E, donc continue.

Autrement dit, si E est de dimension finie, alors $\mathscr{L}_c(E,F) = \mathscr{L}(E,F)$.

Remarque 1.78
L'hypothèse de dimension finie de E est indispensable. Dans le cas contraire, c'est faux en général.

Le résultat précédent s'étend aux applications multilinéaires.

Théorème 1.79
Soient $E_1, \ldots, E_n$ des espaces vectoriels normés de dimensions finies et $f : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ une application n-linéaire.

Il existe alors une constante $K \geqslant 0$ telle que

$$\text{pour tout } (x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n,\ \ \|f(x_1, \ldots, x_n)\| \leqslant K \|x_1\|_{E_1} \ldots \|x_n\|_{E_n}.$$

Corollaire 1.80
Soient $E_1, \ldots, E_n$ des espaces vectoriels normés de dimensions finies.

Toute application $f : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ qui est n-linéaire est continue sur $E_1 \times \cdots \times E_n$.

Exemple 1.81

- Le produit matriciel de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{pq}(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{M}_{nq}(\mathbb{K})$ est bilinéaire, donc continu.
- Un produit scalaire dans un espace euclidien est bilinéaire, donc continu.
- Le déterminant dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est n-linéaire par rapport aux colonnes, donc il est continu.

1.5.6 Norme subordonnée

On définit sur l'espace vectoriel $\mathscr{L}_c(E,F)$ des applications linéaires continues de E dans F la notion de norme subordonnée (relative aux deux normes sur E et F) ou norme triple.

Définition 1.82
Soit $f \in \mathscr{L}_c(E,F)$.

On pose $|||f||| = \sup\limits_{x \in B(0,1)} \|f(x)\|$, appelée la norme subordonnée de f.

Proposition 1.83
Soit $f \in \mathscr{L}_c(E, F)$.

Alors $|||f|||$ *est*

- *égal à* $\sup_{x \neq 0} \dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|}$, *mais aussi à* $\sup_{x \in S(0,1)} \|f(x)\|$;
- *le plus petit réel positif* M *tel que pour tout* $x \in E$, $\|f(x)\| \leqslant M\|x\|$.

Proposition 1.84
Les normes subordonnées sont des normes sur les espaces $\mathscr{L}_c(E, F)$.

Elles sont dites sous-multiplicatives : pour toutes applications linéaires continues et composables f *et* g,

$$|||f \circ g||| \leqslant |||f||| \times |||g|||.$$

Comme en dimension finie, on peut représenter par choix de bases les applications linéaires par des matrices, on définit de manière semblable la notion de norme sous-multiplicative de matrices (relativement aux normes) ou norme triple.

Définition 1.85
Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On choisit deux normes sur $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ (espaces identifiés à ceux des matrices-colonnes).

Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$, on pose $|||A||| = \sup_{\|X\|=1} \|AX\|$.

Proposition 1.86
Des normes étant choisies sur les espaces $\mathbb{K}^p$ *et* $\mathbb{K}^n$, *les normes subordonnées sont des normes sur tous les espaces* $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

Elles sont dites sous-multiplicatives : pour toutes matrices multipliables A *et* B,

$$|||AB||| \leqslant |||A||| \times |||B|||.$$

Remarque 1.87
Dans le cas où un espace vectoriel normé E est aussi une $\mathbb{K}$-algèbre, on dit qu'il est une algèbre normée quand la norme vérifie en plus la propriété de sous-multiplicativité : $\forall (x, y) \in E^2, \ \|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$.

1.6 Topologie d'un espace vectoriel normé

Dans cette section, E est un espace vectoriel normé.

1.6.1 Intérieur d'une partie, voisinage d'un point

Définition 1.88
Soient A une partie de E et $a \in A$.

On dit que a est un point intérieur à A quand on peut trouver un rayon $r > 0$ tel que $B(a,r)$ soit incluse dans A. On dit aussi dans ce cas que A est un voisinage de a.

L'intérieur de A est l'ensemble de ses points intérieurs, noté $\mathring{A}$.

On a :

$$a \in \mathring{A} \iff \exists r > 0,\ \ B(a,r) \subseteq A.$$

Exercice 1.89
Dans $\mathbb{R}$, quels sont les intérieurs des parties suivantes : $[0\,;1]$, $[0\,;+\infty[$, $\mathbb{Q}$?

Exercice 1.90
Quel est l'intérieur d'une boule de centre a et de rayon $r > 0$?

Remarque 1.91
Cette notion dépend a prori de la norme utilisée. En dimension finie, ce n'est pas le cas : l'intérieur d'une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie ne dépend pas du choix de la norme (pourquoi ?).

Proposition 1.92
Soient $u \in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$.

La suite u converge vers ℓ ssi tout voisinage de ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

1.6.2 Parties ouvertes

Définition 1.93
On dit qu'une partie A de E est ouverte (ou est un ouvert) quand à tout point de $a \in A$, on peut associer un rayon $r > 0$ tel que la boule de centre a et de rayon r soit incluse dans A :

$$\forall a \in A,\ \ \exists r > 0,\ \ B(a,r) \subseteq A.$$

Autrement dit, A est ouverte quand tout point de A est intérieur à A : $A = \mathring{A}$, ou, autrement dit, quand A est un voisinage de chacun de ses points.

Proposition 1.94
L'ensemble vide et E sont des parties ouvertes. Toute boule ouverte est une partie ouverte. Tout produit (fini) de parties ouvertes est ouvert.

La topologie de E est l'ensemble de tous les ouverts de E.

Remarque 1.95
La topologie dépend a priori de la norme utilisée. En dimension finie, ce n'est pas le cas : dans un espace vectoriel normé de dimension finie, le fait d'être un ouvert ne dépend pas du choix de la norme.

1.6.3 Parties fermées

On rappelle la notion de point adhérent à une partie.

Définition 1.96
Soient A une partie de E et $x \in E$.

On dit que x est un point adhérent à A quand il existe une suite $u \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x, ou, ce qui revient au même, quand toute boule centrée en x rencontre A, ou encore quand $d(x, A) = 0$.

L'adhérence de A est l'ensemble de ses points adhérents, noté $\overline{A}$.

On a montré

Définition 1.97
On dit qu'une partie A de E est fermée (ou est un fermé) quand tout point adhérent à A est dans A, autrement dit quand la propriété suivante est vraie :

si une suite quelconque à termes dans A converge vers un point x de E, alors $x \in A$.

Ou encore : A est fermée quand $A = \overline{A}$.

Proposition 1.98
L'ensemble vide et E sont des parties fermées. Toute boule fermée est une partie fermée. Tout produit (fini) de parties fermées est fermé.

On note le lien avec les parties ouvertes.

Proposition 1.99
Soit A une partie de E.

Alors A est une partie ouverte ssi son complémentaire est une partie fermée.

Encore une fois, le fait d'être un fermé en dimension finie ne dépend pas de la norme.

Proposition 1.100
- *Toute réunion de parties ouvertes est ouverte. Toute intersection finie de parties ouvertes est ouverte.*

- *Toute intersection de parties fermées est fermée. Toute réunion finie de parties fermées est fermée.*

Exercice 1.101
Montrez que pour tout $a \in E$, $E \setminus \{a\}$ est un ouvert. Déduisez-en que si A est une partie finie de E, alors $E \setminus A$ est un ouvert.

Exercice 1.102
Quels sont les sous-espaces vectoriels de E qui sont ouverts ?

Exercice 1.103
Montrez que $F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \geqslant 0 \text{ et } xy = 1\right\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1.104
On note S l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que tous les coefficients soient positifs et sur chaque ligne la somme des coefficients vaut 1.

Montrez que S est un fermé.

NB : S est l'ensemble des matrices dites stochastiques.

Remarque 1.105
A priori, une partie de E n'est ni ouverte ni fermée : par exemple, dans $\mathbb{R}$, l'ensemble $]0\,;1]$ n'est ni ouvert ni fermé.

Donc ne pas confondre « complémentaire » et « contraire » : on peut dire qu'une partie est un fermé quand son complémentaire est un ouvert, mais pas que le contraire d'être un ouvert c'est être un fermé.

Remarque 1.106
Il est souvent assez facile de montrer qu'une partie est un fermé grâce à la caractérisation séquentielle. Donc pour montrer qu'une partie est un ouvert, on montre souvent de cette façon que son complémentaire est un fermé.

Les fermés sont souvent définis par des égalités ou des inégalités larges. Par complémentaire, les ouverts sont souvent définis par des inégalités strictes ou des différences.

1.6.4 Ouverts ou fermés relatifs à une partie

Les définitions précédentes parlent d'ouverts et de fermés de E. On peut définir ces notions relativement à une partie.

Définition 1.107
Soient A une partie de E et U un sous-ensemble de A.

On dit que U est un ouvert de A quand il existe un ouvert V de E tel que $U = A \cap V$.

On dit que U est un fermé de A quand il existe un fermé V de E tel que $U = A \cap V$.

On remarque que les fermés de A sont les complémentaires dans A des ouverts de A. On peut caractériser de même une partie U fermée de A par l'égalité entre U et l'ensemble de ses points adhérents dans A.

1.6.5 Image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé par une fonction continue

Rappel 1.108
Si f est une fonction de E dans F définie sur D_f et $B \subseteq F$, l'image réciproque de B par f est

$$f^{-1}(B) = \left\{x \in D_f \;\middle|\; f(x) \in B\right\}.$$

Théorème 1.109
Soit f une fonction de E dans F définie sur D.

Alors on a équivalence entre les propositions suivantes :

- *f est continue sur D ;*
- *pour tout fermé B de F, son image réciproque $f^{-1}(B)$ est un fermé de D ;*
- *pour tout ouvert B de F, son image réciproque $f^{-1}(B)$ est un ouvert de D.*

Ceci est valable en particulier quand f est une application continue de E dans F, auquel cas on peut se passer des notions d'ouvert ou fermé relatif.

Exemple 1.110 (Cas particuliers fondamentaux)
Si f est continue sur E et à valeurs réelles, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, les ensembles suivants sont des fermés de E :

$$\{x \in E \mid f(x) \geqslant a\} \qquad \{x \in E \mid f(x) \leqslant a\} \qquad \{x \in E \mid f(x) = a\}.$$

Exemple 1.111

- Les courbes de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont des fermés de $\mathbb{R}^2$.
- L'ensemble des matrices de trace nulle est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Par passage au complémentaire, si f est continue sur E et à valeurs réelles, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, les ensembles suivants sont des ouverts de E :

$$\{x \in E \mid f(x) < a\} \qquad \{x \in E \mid f(x) > a\} \qquad \{x \in E \mid f(x) \neq a\}.$$

Exemple 1.112

- L'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x > 0$ et $y > x$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$: si une matrice A est inversible, alors toutes les matrices proches de A le sont aussi.

1.6.6 Frontière d'une partie

Définition 1.113

Soit A une partie de E. On appelle frontière de A l'ensemble $\overline{A} \setminus \mathring{A}$.

Exemple 1.114

- Si B est une boule, alors son intérieur est la boule ouverte de même centre et de même rayon, son adhérence est la boule fermée et sa frontière est la sphère.
- L'ensemble des rationnels est d'intérieur vide, d'adhérence égale à $\mathbb{R}$ et donc de frontière $\mathbb{R}$.

1.7 Compacité

Dans cette section, E est un espace vectoriel normé.

1.7.1 Valeurs d'adhérence d'une suite

Définition 1.115
Soient $u = (u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $a \in E$.

On dit que a est une valeur d'adhérence de la suite u quand il existe une extractrice φ telle que la suite extraite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ converge vers a.

Une suite peut avoir une ou plusieurs valeurs d'adhérence ou ne pas avoir de valeur d'adhérence :

- la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de valeur d'adhérence ;
- toute suite convergente possède une seule valeur d'adhérence : sa limite ;
- la suite u définie par $u_{2n} = \dfrac{1}{n+1}$ et $u_{2n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ possède deux valeurs d'adhérence : 0 et 1 ;
- il est possible de numéroter les rationnels, autrement dit de créer une suite u qui prend exactement toutes les valeurs rationnelles dans $\mathbb{R}$: cette suite a pour valeurs d'adhérence tous les réels.

On peut donner une caractérisation équivalente sans passer par la notion de suite extraite.

Proposition 1.116
Soient $u = (u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $a \in E$.

Alors a est une valeur d'adhérence de u ssi pour tout $\varepsilon > 0$, $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in B(a, \varepsilon)\}$ est infini.

Ceci peut encore être réécrit de la façon suivante.

Proposition 1.117
Soient $u = (u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $a \in E$.

Alors a est une valeur d'adhérence de u ssi $\forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant N,\ \|u_n - a\| < \varepsilon$.

Exercice 1.118
Soit $u = (u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Montrez que l'ensemble V des valeurs d'adhérence de la suite u est un fermé de E en utilisant les ensembles $U_p = \{u_n \mid n \geqslant p\}$.

1.7.2 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 1.119
Si E est de dimension finie, alors toute suite bornée de E possède une valeur d'adhérence.

Remarque 1.120
Ce théorème est faux en dimension infinie donc il faut bien mettre en valeur la dimension finie.

On peut ajouter une précision au théorème précédent.

Proposition 1.121
Si E est de dimension finie, alors toute suite bornée de E qui ne possède qu'une seule valeur d'adhérence est convergente vers cette valeur d'adhérence.

1.7.3 Parties compactes

Définition 1.122
Soit A une partie de E.

On dit que A est une partie compacte de E (ou un compact de E) quand toute suite à termes dans A possède une valeur d'adhérence dans A (propriété dite de Bolzano-Weierstrass).

Exemple 1.123

- Tout segment $[a\ ;\ b]$ de $\mathbb{R}$ est un compact et ce sont les seuls intervalles compacts. $[0\ ;\ 1] \cup [2\ ;\ 3]$ est compact.
- Dans $\mathbb{K}^n$, tout pavé $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} [a_i\ ;\ b_i]$ est un compact. Plus généralement, un produit (fini) de compacts est compact.

Les parties compactes sont donc celles dont on peut extraire des sous-suites convergentes. Un résultat précédent se généralise alors.

Proposition 1.124
Si A est une partie compacte, alors toute suite de A qui ne possède qu'une seule valeur d'adhérence est convergente vers cette valeur d'adhérence.

Un compact étant connu, il est facile d'en construire d'autres.

Proposition 1.125
Si A est une partie compacte de E, alors toute partie B fermée dans A est aussi compacte.

Reconnaître si une partie est compacte n'est pas toujours facile. On dispose d'une condition nécessaire, qui est suffisante en dimension finie.

Proposition 1.126
Soit A une partie de E.

Si A est compacte, alors A est une partie fermée et bornée.

La réciproque est hélas fausse en général. Néanmoins, en dimension finie, elle est vraie.

Proposition 1.127
Si E est de dimension finie, alors une partie de E est compacte ssi elle est fermée et bornée.

Remarque 1.128
En fait, il n'y a qu'en dimension finie que ce résultat est vrai. Un théorème de Riesz affirme que la boule-unité fermée d'un espace vectoriel normé est compacte ssi l'espace est de dimension finie, ce qui revient à dire que l'équivalence précédente n'est valable que dans un espace de dimension finie.

En dimension infinie, il se passe des choses vraiment étranges : les compacts sont des parties très petites et plates, par exemple, un compact est forcément d'intérieur vide. Heureusement, il est plus courant de travailler à notre niveau en dimension finie.

Exemple 1.129
- L'ensemble des matrices stochastiques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un compact.

- La boule-unité fermée de $E = \mathscr{C}^0([0\,;\,1], \mathbb{R})$ pour la norme infinie n'est pas compacte, car la suite des fonctions $(x \longmapsto x^n)$ a pour seule valeur d'adhérence possible la fonction $x \longmapsto 0$ si $x \neq 1$ et $1 \longmapsto 1$, qui n'est même pas dans l'espace E.

Une application importante de la notion de compacité est le théorème suivant.

Théorème 1.130
Tout sous-espace vectoriel de dimension finie de E est fermé.

En dimension infinie, là encore il peut se passer des choses étranges : un sous-espace de E de dimension infinie peut être dense (et donc non-fermé s'il est différent de E).

1.7.4 Théorème des bornes atteintes

Le principal intérêt des compacts est de pouvoir généraliser un théorème de première année.

Théorème 1.131
Soient E, F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E et $f : A \longrightarrow F$.

Si f est continue sur A et A est compacte, alors $f(A)$ est compacte.

On résume en disant que l'image continue d'un compact est un compact.

En particulier, toute fonction continue sur un compact est donc bornée. Dans le cas des fonctions numériques (*i.e.* à valeurs dans $\mathbb{R}$), on peut même être plus précis.

Théorème 1.132
Toute fonction continue sur un compact et à valeurs réelles est bornée et atteint ses bornes.

Autrement dit, si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur A et A est une partie compacte de E, alors il existe $(a, b) \in A^2$ tel que pour tout $x \in A$, $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$, ce qui revient à dire que f possède un minimum et un maximum sur A.

Remarque 1.133
Ce théorème est à rapprocher du théorème vu en première année : toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Néanmoins, le théorème de l'an dernier donnait un résultat un peu plus précis que celui de cette année car il donnait aussi l'image du segment, en précisant qu'il s'agissait aussi d'un segment, car il faisait aussi intervenir le théorème des valeurs intermédiaires.

Ici, dans la version proposée cette année, on ne peut rien dire de plus.

Exercice 1.134
Un exercice classique, à savoir refaire ! C'est la base de nombreux exercices.

Soient E de dimension finie et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que $f(x)$ tende vers $+\infty$ quand $\|x\|$ tend vers $+\infty$. Montrez que f possède un minimum.

Exemple : dans le plan euclidien géométrique, on choisit trois points A, B, C ; montrez alors qu'il existe un point M du plan tel que la somme $AM + BM + CM$ soit minimale.

Exercice 1.135
Soit $f : (x, y) \longmapsto xy\sqrt{1 - x^2 - 2y^2}$.

Justifiez que l'ensemble de définition D de f est un compact de $\mathbb{R}^2$.

Déterminez les points critiques de f dans l'ouvert $\mathring{D}$, puis les maxima et minima de f.

On retrouve aussi le théorème de Heine en conséquence de la compacité.

Définition 1.136
Soient E, F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E et $f : A \longrightarrow F$.

On dit que f est uniformément continue sur A quand

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x, y) \in A^2,\ \|x - y\| \leqslant \eta \implies \|f(x) - f(y)\| \leqslant \varepsilon.$$

Théorème 1.137
Soient E, F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E et $f : A \longrightarrow F$.

Si f est continue sur A et A est compacte, alors f est uniformément continue sur A.

1.8 Connexité par arcs

Dans cette section, E est un espace vectoriel normé.

1.8.1 Chemin

Définition 1.138
Soient A une partie de E et $a, b \in A$.

On appelle chemin (ou arc) dans A de a à b toute application continue $\varphi : [0\ ;\ 1] \longrightarrow A$ telle que $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = b$. Le support du chemin est l'image de φ.

On peut définir une relation d'équivalence sur une partie de E en mettant en relation les points joignables par un chemin.

Définition 1.139
Soient A une partie de E et $a, b \in A$.

On pose $a \mathscr{R} b$ quand il existe un chemin dans A de a à b.

Proposition 1.140
Avec les notations précédentes, la relation $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur A.

1.8.2 Parties connexes par arcs

Définition 1.141
Soit A une partie de E.

On dit que A est connexe par arcs quand tout couple de points $(a, b) \in A^2$ est joignable par un chemin.

Exemple 1.142

- ▹ Les parties convexes de E sont connexes par arcs.
- ▹ Les parties étoilées de E sont connexes par arcs.
- ▹ $\mathbb{C}^*$ et $\mathbb{C} \setminus D$ où D est la demi-droite des réels négatifs sont connexes par arcs.

Les classes d'équivalences de la relation notée $\mathscr{R}$ précédemment s'appellent les composantes connexes par arcs de A : ce sont par définition des parties connexes par arcs.

Proposition 1.143
Les seules parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Remarque 1.144
Il existe une notion plus générale, celle de partie connexe : une partie A de E est dite connexe quand les seules parties de A à la fois ouvertes et fermées sont $\varnothing$ et A. Elle est plus délicate à aborder et est hors-programme, c'est pourquoi on s'en tient à la notion de connexité par arcs (toute partie connexe par arcs est connexe).

1.8.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Là encore, la notion de connexité par arcs permet de généraliser des résultats de première année.

Théorème 1.145
Soient E, F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E et $f : A \longrightarrow F$.

Si f est continue par A et A est connexe par arcs, alors $f(A)$ est connexe par arcs.

On résume en disant que l'image continue d'un connexe par arcs est un connexe par arcs.

Dans le cas des fonctions numériques (*i.e.* à valeurs dans $\mathbb{R}$), on peut même être plus précis.

Théorème 1.146
Toute fonction continue sur un connexe par arcs et à valeurs réelles vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

Autremen dit, si $f : A \longrightarrow F$ *est continue sur* A *une partie connexe par arcs de* E*, alors* $f(A)$ *est un intervalle.*

Ou encore :
$$\forall (y,z) \in f(A)^2, \ \forall w \in [yz], \ \exists t \in A, \ f(t) = w.$$

Chapitre 2

Séries numériques et vectorielles : révisions et compléments

Sommaire

Dans ce chapitre, E désigne un espace vectoriel normé (qui peut être $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $\|\cdot\|$ la norme associée (qui est dans ces cas la valeur absolue ou le module).

2.1 Rappels

2.1.1 Définitions et notations

Définition 2.1 (Série vectorielle)
Soit u une suite de E.

On associe à cette suite la suite s définie de la façon suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

La suite s est appelée série de terme général u_n et notée $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ ou $\sum u$.

Chaque nombre s_n est appelé somme partielle d'indice n de la série.

L'adjectif « numérique » associé au mot « série » signifie que les termes généraux de la série sont en fait des nombres réels ou complexes.

2.1.2 Convergence d'une série

Définition 2.2
Soit u une suite de E.

On dit que la série $\sum u$ converge ssi la suite des sommes partielles $(s_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$ converge.

Dans ce cas, si $\ell = \lim_{n \longrightarrow +\infty} s_n$, alors ℓ est appelée somme de la série $\sum u$ et on note $\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

On appelle aussi reste partiel d'indice n de la série le nombre $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$, de sorte que $r_n + s_n = \ell$.

La suite des restes partiels converge donc vers 0.

Dans le cas contraire, on dit que la série $\sum u$ diverge.

Exemple 2.3

- Soit $x \in \mathbb{C}$. La série $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ converge ssi $|x| < 1$ et, dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$. Cette série est appelée série géométrique de raison x.
- Les séries de Riemann : $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z$.

On peut bien sûr généraliser aux séries quelques théorèmes d'opérations.

Proposition 2.4
Soient u, v deux suites de E et λ un scalaire.

Si les séries $\sum u$ et $\sum v$ convergent, alors la série $\sum (u + \lambda v)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Ceci prouve aussi que l'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel.

Remarque 2.5
La somme d'une série divergente et d'une série convergente est une série divergente.

En revanche, il n'y a rien à dire a priori à propos de la somme de deux séries divergentes.

2.1.3 Lien entre convergence de suites et convergence de séries

Proposition 2.6
Soit u une suite de E.

Si la série $\sum u$ converge, alors la suite u converge vers 0.

Remarque 2.7
- La réciproque est fausse.
- Par contraposition, si une suite u ne tend pas vers 0, alors la série associée diverge : on dit que la série $\sum u$ diverge grossièrement.

Exemple 2.8
On appelle série harmonique la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$.

Cette série diverge, pourtant son terme général tend vers 0.

Définition 2.9
Soit u une suite de E. On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$.

La série $\sum v$ est appelée la série télescopique (ou série domino, ou série différence) associée à u.

Proposition 2.10
Une suite converge ssi sa série télescopique associée converge.

Exercice 2.11

On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$. Montrez que la suite u converge.

2.2 Séries réelles à termes positifs

Dans cette section, on s'intéresse uniquement aux séries dont le terme général est un réel positif.

On appelle un premier théorème issu du cours de première année.

Théorème 2.12
Soient u et v deux suites réelles positives.

- *Si $0 \leqslant u \leqslant v$ et si la série $\sum v$ converge, alors la série $\sum u$ converge.*
- *Si $0 \leqslant u \leqslant v$ et si la série $\sum u$ diverge, alors la série $\sum v$ diverge.*
- *Si $u \sim v$, alors les séries $\sum u$ et $\sum v$ sont de même nature.*

Une application classique : la règle de d'Alembert.

Proposition 2.13
Soit u une suite réelle strictement positive telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \ell$. Alors

- *si $\ell < 1$, la série $\sum u$ converge ;*
- *si $\ell > 1$, la série $\sum u$ diverge ;*
- *si $\ell = 1$, on ne peut rien conclure.*

Exercice 2.14
Soient $x, y > 0$. Représentez graphiquement l'ensemble des couples (x, y) tels que la série $\sum \dfrac{x^n}{y^n + n^x}$ converge.

Exercice 2.15
Montrez que la suite (u_n) définie par $u_0 \in [0\,;1]$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + u_n^2\right)$ converge vers 0 et donnez la nature de la série $\sum u_n$.

On donne quelques versions plus élaborées du théorème de comparaison.

2.2.1 Théorème de Cesàro

Théorème 2.16
Soit u une suite numérique qui converge vers ℓ. Alors $\dfrac{u_0 + \cdots + u_n}{n} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \ell$.

Dans le cas où $\ell \neq 0$, la série $\sum u$ diverge grossièrement et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} n\ell$.

Dans le cas où $\ell = 0$, on peut juste dire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = o(n)$.

Exercice 2.17
Soit u la suite définie par récurrence par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{u_n + 1}{u_n + 2}$.

Étudiez la convergence ou divergence de la suite u, puis donnez un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$.

2.2.2 Théorème de comparaison par domination de séries à termes positifs

Dans le cas convergent d'abord, les restes partiels suivent la même relation de comparaison.

Théorème 2.18
Soient u, v deux suites réelles positives.

Si $u = \mathcal{O}(v)$ et la série $\sum v$ converge, alors la série $\sum u$ converge. De plus, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \mathcal{O}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.

Si $u = o(v)$ et la série $\sum v$ converge, alors la série $\sum u$ converge. De plus, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.

Dans le cas divergent ensuite, les sommes partielles suivent aussi la même relation de comparaison.

Théorème 2.19
Soient u, v deux suites réelles positives.

Si $u = \mathcal{O}(v)$ et la série $\sum u$ diverge, alors la série $\sum v$ diverge. De plus, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \mathcal{O}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.

Si $u = o(v)$ et la série $\sum u$ diverge, alors la série $\sum v$ diverge. De plus, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.

2.2.3 Théorème de comparaison par équivalence de séries à termes positifs

Théorème 2.20
Soient u, v deux suites réelles positives.

Si $u \sim v$, alors les séries $\sum u$ et $\sum v$ sont de même nature ; l'une converge ssi l'autre converge.

De plus,

- *si les séries convergent, alors les restes partiels sont équivalents :* $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ *;*
- *si les séries divergent, alors les sommes partielles divergent vers $+\infty$ et sont équivalentes :* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k$.

Exercice 2.21
Soit $a > 0$. On pose $u_n = \sin \dfrac{a^n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Selon la valeur de a, déterminez la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} u_n$.

Montrez que si $a = 1$, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \sim \ln n$ et si $a < 1$, $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = o\left(a^n\right)$.

2.2.4 Théorème de comparaison série - intégrale

Proposition 2.22
Soit f une fonction continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Alors la série de terme général $f(n)$ et la suite de terme général $\displaystyle\int_0^n f$ sont de même nature.

Méthode 2.23 (À retenir)
La technique d'encadrement des sommes partielles d'une série $\sum f(n)$ (ou des restes partiels) par des intégrales quand f est continue, positive et monotone.

Exemple 2.24

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \ln n$ (à connaître).
- Si $\alpha > 1$, un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ quand $n \longrightarrow +\infty$ est $\dfrac{1}{(\alpha-1)\, n^{\alpha-1}}$.

Exercice 2.25
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln k}{k^2}$.

Justifiez l'existence de u_n, puis montrez la divergence de la série $\sum u_n$.

Montrez que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \frac{\ln^2 n}{2}$.

2.3 Séries absolument convergentes

Définition 2.26
Soit u une suite de E.

On dit que la série $\sum u$ est absolument convergente ssi la série à termes positifs $\sum \|u\|$ est convergente.

2.3.1 Lien entre absolue convergence et convergence

Théorème 2.27
Si E est de dimension finie, alors toute série absolument convergente est convergente.

Remarque 2.28
- La réciproque est fausse : la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge (on l'appelle la série harmonique alternée) mais ne converge pas absolument.
- L'hypothèse de la dimension finie est indispensable. En dimension infinie, ce résultat est faux en général.

Exercice 2.29
Soit $x > 0$. Montrez que les séries suivantes convergent :

$$\sum_{n\geqslant2} \frac{\ln\left(n^2+(-1)^n n\right)}{n^2+(-1)^n x^n} \qquad \sum_{n\geqslant0} \sqrt{n}\cos(x)\sin^n(x) \qquad \sum_{n\geqslant0} \frac{(-1)^n \sqrt{n+x}}{x^n+n^{2/x}}.$$

2.3.2 Un exemple fondamental : l'exponentielle de matrice

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

On choisit comme norme sur $E = \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ une norme sous-multiplicative.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|A^n\| \leqslant \|A\|^n$, donc $\left\|\dfrac{A^n}{n!}\right\| \leqslant \dfrac{\|A\|^n}{n!}$.

Or la série $\sum \dfrac{\|A\|^n}{n!}$ converge (et sa somme vaut $\exp\|A\|$), donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \dfrac{A^n}{n!}$ est absolument convergente.

On pose alors $\exp A = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$.

2.3.3 Extension des résultats par comparaison

Définition 2.30
Soit u une suite de E et v une suite réelle positive.

On dit que $u = \mathcal{O}(v)$ quand $\exists M > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \|u_n\| \leqslant M v_n$.

On dit que $u = o(v)$ quand $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \|u_n\| \leqslant \varepsilon v_n$.

Proposition 2.31
Soient u une suite de E et v une suite réelle positive.

Si E est de dimension finie, $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ quand n tend vers $+\infty$ et la série $\sum v$ converge, alors la série $\sum u$ est absolument convergente.

De plus, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \mathcal{O}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.

Ceci est encore valable si $u_n = o(v_n)$.

Proposition 2.32
Soient u une suite de E et v une suite réelle positive.

Si E est de dimension finie, $u_n = o(v_n)$ quand n tend vers $+\infty$ et la série $\sum v$ converge, alors la série $\sum u$ est absolument convergente.

De plus, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.

2.3.4 Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes

Définition 2.33
Soient E une algèbre normée de dimension finie, $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ deux séries à termes dans E.

On appelle produit de Cauchy des deux séries la série $\sum_{n\geqslant 0} c_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Remarque 2.34
Quand les séries ne commencent pas à partir du rang 0, il faut se méfier ! Une idée simple est de se ramener au cas précédent en décalant les indices.

Exemple très courant : les séries commencent au rang 1. Dans ce cas, le produit de Cauchy des séries $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ est la série $\sum_{n\geqslant 1} c_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}$.

Théorème 2.35
Avec les mêmes hypothèses sur E.

Si les séries $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ *convergent absolument, alors leur produit de Cauchy est aussi absolument convergent et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times \sum_{k=0}^{+\infty} b_n.$$

2.4 Séries alternées

Définition 2.36
Une série alternée est une série réelle $\sum u_n$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} est de signe opposé à u_n.

En général, les séries alternées sont reconnaissables à la présence d'un facteur $(-1)^n$ dans l'expression du terme général.

On dispose d'une condition suffisante de convergence d'une série alternée qu'on appelle le critère spécial des séries alternées.

Théorème 2.37
Soit $\sum (-1)^n u_n$ *une série alternée.*

Si la suite u

- *est positive,*

- *est décroissante,*

- *et converge vers* 0*,*

alors la série $\sum (-1)^n u_n$ *converge.*

Dans ce cas, la somme de la série est positive, et si on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$ *le reste partiel d'indice* n*, alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* R_n *est du signe de son premier terme (i.e. du signe de* $(-1)^{n+1}$ *) et* $|R_n| \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$*.*

Exemple 2.38

- La série harmonique alternée $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge.
- La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ converge.

Remarque 2.39

- Si $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} (-1)^n u_n$ est une série alternée convergente, sa somme a le signe du premier terme de la série (ici le signe de $(-1)^{n_0} u_{n_0}$).

- La condition de décroissance de la suite u est essentielle ! Contre-exemple : la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}}$ est une série alternée divergente.
  De plus, cela fournit un contre-exemple au théorème de comparaison par équivalents si on ne tient pas compte de la condition sur le signe, qui doit être constant.

Exercice 2.40
Soit $\alpha > 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha + k}$.

Justifiez l'existence de u_n. Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

Chapitre 3

Familles sommables

Sommaire

Dans ce chapitre, E désigne un espace vectoriel normé de dimension finie (qui peut être $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $\|\cdot\|$ la norme associée (qui est dans ce cas la valeur absolue ou le module).

Si A, B sont deux ensembles, alors on note $A \subseteq_f B$ pour indiquer que A est un sous-ensemble fini de B.

3.1 Sommes finies

3.1.1 Définition

D'abord un rappel : on définit par récurrence la somme de n éléments de E notés $x_1, \ldots, x_n$ par :

- si $n = 0$, alors $\sum_{k=1}^{n} x_k = 0$ (une somme vide a pour valeur 0 par convention) ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n+1} x_k = x_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} x_k$.

On définit de même par récurrence les sommes de la forme $\sum_{k=p}^{q} x_k$ quand $p-1 \leqslant q$ (si $q = p-1$, la somme est vide donc vaut 0).

Proposition 3.1
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n \in E$.

Alors :

(1) pour tout $(p,q) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$ tel que $p \leqslant q$, $\sum_{k=p}^{n} x_k = \sum_{k=p}^{q} x_k + \sum_{k=q+1}^{n} x_k$;

(2) pour tout $\varphi \in \mathfrak{S}_n$, $\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_{\varphi(k)}$.

Démonstration 3.2 (1)
On pose $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $\forall (p,q) \in [\![1\,;\,n]\!],\ p \leqslant q \implies \sum_{k=p}^{n} x_k = \sum_{k=p}^{q} x_k + \sum_{k=q+1}^{n} x_k$ ».

Si $n = 1$, alors pour tout $(p,q) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$, $p = q = 1$ donc $\sum_{k=p}^{n} x_k = x_1 + 0 = \sum_{k=p}^{q} x_k + \sum_{k=q+1}^{n} x_k$ donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors soient $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in E^{n+1}$ et $(p,q) \in [\![1\,;\,n+1]\!]^2$ tel que $p \leqslant q$:

- si $q \leqslant n$, alors par définition, $\sum_{k=p}^{n+1} = \sum_{k=p}^{n} x_k + x_{n+1}$, donc d'après l'hypothèse de récurrence, $\sum_{k=p}^{n+1} x_k = \sum_{k=p}^{q} x_k + \sum_{k=q+1}^{n} x_k + x_{n+1} = \sum_{k=p}^{q} x_k + \sum_{k=q+1}^{n+1} x_k$;
- si $q = n+1$, alors $\sum_{k=p}^{n+1} x_k = \sum_{k=p}^{q} x_k + 0 = \sum_{k=p}^{q} x_k + \sum_{k=q+1}^{n+1} x_k$.

Dans les deux cas, on a montré $\sum_{k=p}^{n+1} x_k = \sum_{k=p}^{q} x_k + \sum_{k=q+1}^{n+1} x_k$. Autrement dit, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie. ■

Démonstration 3.3 (2)
On pose $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $\forall \varphi \in \mathfrak{S}_n, \quad \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_{\varphi(k)}$ ».

$\mathscr{P}(1)$ est vraie car le seul élément de $\mathfrak{S}_1$ est l'application $1 \longmapsto 1$.

Si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors soient $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in E^{n+1}$ et $\varphi \in \mathfrak{S}_{n+1}$:

- si $\varphi(n+1) = n+1$ alors φ induit une bijection de $[\![1\,;\,n]\!]$ dans lui-même donc d'après l'hypothèse de récurrence, $\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_{\varphi(k)}$ donc $\sum_{k=1}^{n+1} x_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{n} x_{\varphi(k)} + x_{\varphi(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} x_k$;
- si $\varphi(n+1) = m \neq n+1$, alors on pose $\psi = \begin{pmatrix} m & n+1 \end{pmatrix}\varphi$ et $a = \varphi^{-1}(n+1)$. On a alors $\psi(n+1) = n+1$, $\psi(a) = m$ et pour tout $k \in [\![1\,;\,n+1]\!] \setminus \{a, n+1\}$, $\psi(k) = \varphi(k)$. D'après le cas précédent, $\sum_{k=1}^{n+1} x_k = \sum_{k=1}^{n+1} x_{\psi(k)}$, donc en utilisant le résultat précédent :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} x_k &= \sum_{k=1}^{a-1} x_{\psi(k)} + x_{\psi(a)} + \sum_{k=a+1}^{n} x_{\psi(k)} + x_{\psi(n+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{a-1} x_{\varphi(k)} + x_m + \sum_{k=a+1}^{n} x_{\varphi(k)} + x_{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{a-1} x_{\varphi(k)} + x_{\varphi(n+1)} + \sum_{k=a+1}^{n} x_{\varphi(k)} + x_{\varphi(a)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} x_{\varphi(k)}.
\end{aligned}$$

Dans les deux cas, on a montré $\sum_{k=1}^{n+1} x_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{n+1} x_k$. Autrement dit, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie. ∎

Proposition 3.4
Soient I un ensemble fini et non-vide d'indices, n son cardinal et f, g deux bijections de $[\![1\,;\,n]\!]$ dans I (des énumérations de I).

Alors pour tout $(x_i)_{i\in I} \in E^I$, $\sum_{k=1}^{n} x_{f(k)} = \sum_{k=1}^{n} x_{g(k)}$.

Démonstration 3.5
On remarque que $g^{-1} \circ f$ est une bijection de $[\![1\,;\,n]\!]$ dans lui-même donc d'après la Proposition 3.1 :

$$\sum_{k=1}^{n} x_{g(k)} = \sum_{k=1}^{n} x_{g\left(g^{-1}\circ f(k)\right)} = \sum_{k=1}^{n} x_{f(k)}.$$

∎

Autrement dit, quel que soit l'ordre dans lequel on numérote les éléments de la famille $(x_i)_{i\in I}$, on obtient toujours la même somme en les additionnant.

Définition 3.6
Si I est un ensemble fini d'indices et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E, alors on pose $\sum_{i\in I} x_i$ la valeur d'une somme $\sum_{k=1}^{n} x_{f(k)}$, où f est une bijection de $[\![1 ; n]\!]$ dans I quelconque.

Cette définition est cohérente, puisque la valeur de la somme $\sum_{k=1}^{n} x_{f(k)}$ ne dépend pas du choix de f d'après la proposition précédente. Autrement dit, il est inutile de connaître l'énumération choisie pour additionner les éléments de la famille, on peut considérer cette somme comme une somme « en vrac » de tous les éléments.

3.1.2 Propriétés

Proposition 3.7
Soient I un ensemble fini d'indices de cardinal n et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E.

Alors :

(1) *pour toute bijection f d'un ensemble J dans I, $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{j\in J} x_{f(j)}$ (changement d'indice dans une somme) ;*

(2) *pour toute bijection f de I dans lui-même, $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} x_{f(i)}$ (propriété de commutativité) ;*

(3) *pour tout couple (J, J') de parties de I disjointes et de réunion I, $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in J} x_i + \sum_{i\in J'} x_i$ (propriété d'associativité) ;*

(4) *plus généralement, pour toute partition $(I_k)_{k\in K}$ de l'ensemble I, $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k\in K} \sum_{i\in I_k} x_i$.*

Démonstration 3.8 (1)
Soit f une bijection de J dans I. On choisit une énumération ψ de J. Alors $f\circ\psi$ est une énumération de I.

Alors, par définition, $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k=1}^{n} x_{f\circ\psi(k)}$ et $\sum_{j\in J} x_{f(j)} = \sum_{k=1}^{n} x_{f\circ\psi(k)}$ donc $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{j\in J} x_{f(j)}$. ■

Démonstration 3.9 (2)
Cas particulier $I = J$ du point précédent. ■

Démonstration 3.10 (3)
Soit (J, J') un couple de parties de I disjointes et de réunion I. On note q le cardinal de J, de sorte que $n - q$ est le cardinal de J'.

On choisit une énumération φ de J et une énumération ψ de J'. Alors l'application

$$\theta : \begin{array}{rcl} [\![1\,;n]\!] & \longrightarrow & I \\ k & \longmapsto & \begin{cases} \varphi(k) & \text{si } k \leqslant q \\ \psi(k-q) & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

est une énumération de I.

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{i\in I} x_i &= \sum_{k=1}^{n} x_{\theta(k)} \\ &= \sum_{k=1}^{q} x_{\theta(k)} + \sum_{k=q+1}^{n} x_{\theta(k)} \\ &= \sum_{k=1}^{q} x_{\varphi(k)} + \sum_{k=q+1}^{n} x_{\psi(k-q)} \\ &= \sum_{k=1}^{q} x_{\varphi(k)} + \sum_{k=1}^{n-q} x_{\psi(k)} \\ &= \sum_{i\in J} x_i + \sum_{i\in J'} x_i. \end{aligned}$$

■

Démonstration 3.11 (4)
Si $(I_k)_{k\in K}$ est une partition de l'ensemble I, l'ensemble K est fini donc par récurrence sur le cardinal b de K, on montre $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k\in K} \sum_{i\in I_k} x_i$ en utilisant le cas $b = 2$ démontré précédemment (il suffit de choisir un élément a de K, poser $J = I_a$ et $J' = \bigsqcup_{k\in K\setminus\{a\}} I_k$ et remarquer que la famille $(I_k)_{k\in K\setminus\{a\}}$ est une partition de l'ensemble J' et que le cardinal de $K \setminus \{a\}$ est $b - 1$). ■

3.2 Conventions de calcul dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

L'ensemble $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ est muni d'une addition : pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\})^2$,

- si x et y sont réels, $x + y$ est la somme habituelle de deux réels positifs ;
- si $x = +\infty$ ou $y = +\infty$ alors on pose $x + y = +\infty$

et d'une multiplication :

- si x et y sont réels, xy est le produit habituel de deux réels positifs ;
- si $x = 0$ ou $y = 0$ alors on pose $xy = 0$;
- si $x = y = +\infty$ alors on pose $xy = +\infty$.

Il est aussi muni d'une relation d'ordre :

- si x et y sont deux réels, alors $x \leqslant y$ ou $x < y$ désignent les relations habituelles ;
- si x est réel et $y = +\infty$, alors on pose $x \leqslant +\infty$ et $x < +\infty$;
- si $x = y = +\infty$ alors $+\infty \leqslant +\infty$.

Proposition 3.12
L'addition dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ est associative, commutative et admet pour neutre 0.

La relation $\leqslant$ est une relation d'ordre total dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

De plus, l'addition et la multiplication sont compatibles avec la relation d'ordre : on peut additionner ou multiplier deux inégalités membre à membre.

Définition 3.13
Soit A une partie non-vide de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Si A ne contient pas $+\infty$, alors :

- si A est majorée, elle possède une borne supérieure dans $\mathbb{R}$;
- sinon on pose $\sup A = +\infty$.

Si A contient $+\infty$, on pose $\sup A = +\infty$.

Cette définition prolonge la notion de borne supérieure à toutes les parties de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, au sens où pour toute partie A de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, $\sup A$ est le plus petit majorant dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ de la partie A.

3.3 Somme d'une famille de réels positifs

Définition 3.14
Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

On pose $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i = \sup\left\{\sum_{i\in J} x_i \;\middle|\; J \subseteq_f I\right\}$.

Remarque 3.15
Cette définition est sensée, car l'ensemble $\left\{\displaystyle\sum_{i\in J} x_i \;\middle|\; J \subseteq_f I\right\}$ est une partie de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, donc possède toujours une borne supérieure dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Définition 3.16
Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable quand $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i < +\infty$.

Évidemment, une famille sommable positive ne peut pas prendre la valeur $+\infty$, autrement dit, une famille sommable est nécessairement une famille de réels positifs.

3.3.1 Propriétés

Proposition 3.17
La somme d'une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ est invariante par permutation : si σ est une permutation de I, alors $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} x_{\sigma(i)}$.

En particulier, si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille sommable, toute permutation de la famille est encore une famille sommable de même somme.

En particulier, dans le cas où $I = \mathbb{N}$, si une série à termes positifs $\sum u_n$ est convergente, alors on dit qu'elle est commutativement convergente : changer l'ordre des termes change bien sûr les valeurs des sommes partielles mais ne change pas la valeur de la limite de ces sommes partielles.

Proposition 3.18
Soient $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}$ deux familles d'éléments de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ et λ un réel positif.

Alors $\displaystyle\sum_{i\in I} (x_i + y_i) = \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i$ et $\displaystyle\sum_{i\in I} \lambda x_i = \lambda \sum_{i\in I} x_i$.

Corollaire 3.19
La somme de deux familles positives est sommable ssi les deux familles sont sommables.

Le produit par un réel strictement positif d'une famille positive est sommable ssi la famille est sommable.

Proposition 3.20
Soient $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}$ *deux familles d'éléments de* $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Si pour tout $i \in I$, $0 \leqslant x_i \leqslant y_i$ *et si la famille* $(y_i)_{i\in I}$ *est sommable, alors la famille* $(x_i)_{i\in I}$ *l'est aussi et* $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i \leqslant \sum_{i\in I} y_i$.

3.3.2 Théorème de sommation par paquets

Théorème 3.21
Soit $(x_i)_{i\in I}$ *une famille de réels positifs.*

Si I *est partitionné en une famille* $\left(I_p\right)_{p\in P}$ *de parties, alors*

$$\sum_{p\in P} \sum_{i\in I_p} x_i = \sum_{i\in I} x_i.$$

3.3.3 Théorème de Fubini

Théorème 3.22
Soit $\left(x_{i\,j}\right)_{(i,j)\in I\times J}$ *une famille de réels positifs. Alors*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} x_{i\,j} = \sum_{j\in J} \sum_{i\in I} x_{i\,j} = \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} x_{i\,j}.$$

Ce résultat se généralise par récurrence dans le cas d'un produit cartésien $I_1 \times \cdots \times I_k$.

Un cas particulier courant.

Proposition 3.23
Soient $(a_i)_{i\in I}, \left(b_j\right)_{j\in J}$ *deux familles de réels positifs.*

Alors la famille $\left(a_i b_j\right)_{(i,j)\in I\times J}$ *est sommable ssi les familles* $(a_i)_{i\in I}$ *et* $\left(b_j\right)_{j\in J}$ *sont sommables et dans ce cas, on a*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \sum_{i\in I} a_i \times \sum_{j\in J} b_j.$$

3.4 Familles sommables dans un espace vectoriel normé de dimension finie

3.4.1 Définitions

Définition 3.24
Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E.

On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est sommable quand la famille $(\|x_i\|)_{i \in I}$ est sommable, c'est-à-dire quand $\sum\limits_{i \in I} \|x_i\| < +\infty$.

Cette définition est indépendante du choix de la norme, car en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

3.4.1.1 Cas réel

Définition 3.25
Soit x un réel.

On appelle partie positive de x le réel $x^+ = \max(0, x)$ et partie négative de x le réel $x^- = -\min(x, 0)$.

On remarque les égalités suivantes : $|x| = x^+ + x^-$ et $x = x^+ - x^-$.

Proposition 3.26
Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille sommable de nombre réels.

Alors les familles positives $\left(x_i^+\right)_{i \in I}$ et $\left(x_i^-\right)_{i \in I}$ sont sommables et on a bien sûr $\sum\limits_{i \in I} |x_i| = \sum\limits_{i \in I} x_i^+ + \sum\limits_{i \in I} x_i^-$.

On pose alors $\sum\limits_{i \in I} x_i = \sum\limits_{i \in I} x_i^+ - \sum\limits_{i \in I} x_i^-$, qui est un réel tel que $\left|\sum\limits_{i \in I} x_i\right| \leqslant \sum\limits_{i \in I} |x_i|$.

3.4.1.2 Cas complexe

Proposition 3.27
Soit $(a_k)_{k \in I}$ une famille sommable de nombres complexes.

Alors les deux familles réelles $(\operatorname{Re} a_k)_{k \in I}$ et $(\operatorname{Im} a_k)_{k \in I}$ sont sommables.

On pose alors $\sum\limits_{k \in I} a_k = \sum\limits_{k \in I} \operatorname{Re} a_k + \sum\limits_{k \in I} \operatorname{Im} a_k$ qui est un complexe tel que $\left|\sum\limits_{k \in I} a_k\right| \leqslant \sum\limits_{k \in I} |a_k|$.

Exemple 3.28

- Toute famille finie est sommable et sa somme au sens des familles sommables est sa somme habituelle.
- Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable ssi la série $\displaystyle\sum_n a_n$ est absolument convergente.

Exercice 3.29
Soit $\theta \in \left]0\ ;\ 2\pi\right[$. Montrez que la famille $\left(\dfrac{\mathrm{e}^{i\ell\theta}}{(k+\ell)^3}\right)_{(k,\ell)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.

3.4.1.3 Cas général

Comme E est de dimension finie, on en choisit une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$.

Pour toute famille sommable $(x_i)_{i\in I} \in E^I$, on note $(x_{i\,1}, \dots, x_{i\,p})$ les coordonnées de x_i dans la base $\mathscr{B}$.

Alors pour tout $k \in [\![1\ ;\ p]\!]$, la famille de réels ou de complexes $(x_{i\,k})_{i\in I}$ est sommable.

On pose alors $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i$ le vecteur qui a pour coordonnées $\left(\displaystyle\sum_{i\in I} x_{i\,1}, \dots, \sum_{i\in I} x_{i\,p}\right)$ dans la base $\mathscr{B}$.

On note $\ell^1(I, E)$ l'ensemble des familles sommables de E indicées par I.

3.4.2 Propriétés

Proposition 3.30
Toute sous-famille d'une famille sommable de E est elle-même sommable.

Toute permutation d'une famille sommable de E est encore sommable et de même somme.

En particulier, les séries absolument convergentes sont commutativement convergentes.

Les familles sommables sont celles qui sont approchables par des familles finies à ε près au sens de la proposition suivante.

Comme pour les séries, on dispose d'un théorème de comparaison entre familles sommables.

Proposition 3.31
Soient $(a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I}$ deux familles d'éléments indicées par I.

Si pour tout $i \in I$, $0 \leqslant \|a_i\| \leqslant b_i$ et si la famille $(b_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de réels positifs, alors la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable et on a $\left\|\displaystyle\sum_{i\in I} a_i\right\| \leqslant \sum_{i\in I} \|a_i\| \leqslant \sum_{i\in I} b_i$.

La linéarité est encore vérifiée, mais n'est pas évidente au regard des définitions.

Proposition 3.32
L'ensemble $\ell^1(I, E)$ *est un espace vectoriel et l'application* $(a_i)_{i\in I} \longmapsto \sum_{i\in I} a_i$ *est une forme linéaire : si* $(a_i), (b_i) \in \ell^1(I, E)$ *et* λ *est un scalaire, alors* $\sum_{i\in I}(a_i + b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i$ *et* $\sum_{i\in I} \lambda a_i = \lambda \sum_{i\in I} a_i$.

3.4.3 Théorème de sommation par paquets

Théorème 3.33
Soit $(a_i)_{i\in I}$ *une famille sommable de* E.

Si I *est partitionné en une famille* $(I_p)_{p\in P}$ *de parties, alors pour tout* $p \in P$, $(a_i)_{i\in I_p}$ *est sommable et*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{p\in P} \sum_{i\in I_p} a_i.$$

Exercice 3.34
Montrez que pour tout complexe z tel que $0 < |z| < 1$, la famille $\left(z^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et calculez sa somme.

Exercice 3.35
Montrez que la famille $\left(\dfrac{(-1)^n}{\max(m, n)^3}\right)_{m,n\geqslant 1}$ est sommable et calculez sa somme en fonction de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$.

3.4.4 Théorème de Fubini

Théorème 3.36
Soit $(a_{i\,j})_{(i,j)\in I\times J}$ *une famille sommable de* E.

Alors pour tout $i \in I$, *la famille* $(a_{i\,j})_{j\in J}$ *est sommable ; pour tout* $j \in J$, *la famille* $(a_{i\,j})_{i\in I}$ *est sommable et*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i\,j} = \sum_{j\in J} \sum_{i\in I} a_{i\,j} = \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} a_{i\,j}.$$

Ce résultat se généralise par récurrence dans le cas d'un produit cartésien $I_1 \times \cdots \times I_k$.

Exercice 3.37
Montrez que la famille $\left(\frac{(-1)^p}{q^p}\right)_{p,q\geqslant 2}$ est sommable et calculez sa somme.

Un cas particulier courant.

Proposition 3.38
Soient $(a_i) \in \ell^1(I,E)$ *et* $(b_j) \in \ell^1(J,E)$.

Alors la famille $(a_i b_j)_{(i,j)\in I\times J}$ *est sommable et*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \sum_{i\in I} a_i \times \sum_{j\in J} b_j.$$

3.4.5 Produit de Cauchy de deux séries

Définition 3.39
Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ deux séries à termes dans E.

On appelle produit de Cauchy des deux séries la série $\sum_{n\geqslant 0} c_n$ où pour tout $n\in\mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Remarque 3.40
Quand les séries ne commencent pas à partir du rang 0, il faut se méfier ! Une idée simple est de se ramener au cas précédent en décalant les indices.

Exemple très courant : les séries commençant au rang 1. Dans ce cas, le produit de Cauchy des séries $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ est la série $\sum_{n\geqslant 1} c_n$ où pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}$.

Théorème 3.41
Si les séries $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ *sont absolument convergentes, alors leur produit de Cauchy est aussi absolument convergent et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

Un exemple fondamental.

Proposition 3.42
Soit $z \in \mathbb{C}$. La série de terme général $\dfrac{z^n}{n!}$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z.$$

Remarque 3.43
L'absolue convergence des séries est indispensable ! Si on ne suppose que la convergence des séries, alors le produit de Cauchy peut très bien être une série divergente (voir exercice suivant).

Exercice 3.44
Soit $x > 0$. On pose b_n la somme partielle de la série $\sum_{n \geqslant 0} \dfrac{x^n}{n!}$ et $c_n = \dfrac{b_n}{x^n}$.

Donnez une CNS sur x pour que la série $\sum_{n \geqslant 0} c_n$ converge. Dans le cas où elle converge, donnez la valeur de sa somme en fonction de x.

Exercice 3.45
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Montrez que la série $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ converge, mais que son produit de Cauchy avec elle-même diverge (indication : pour tout $b > 0$, pour tout $x \in [0\,;b]$, $x(b-x) \leqslant \dfrac{b^2}{4}$).

Chapitre 4

Rappels et compléments d'algèbre linéaire

Sommaire

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$, en général $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

4.1 Sommes de sous-espaces vectoriels

4.1.1 Généralités

Définition 4.1
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.

On appelle somme de $F_1, \dots, F_n$ l'ensemble noté $F_1 + \cdots + F_n$:

$$F_1 + \cdots + F_n = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \;\middle|\; (x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n \right\}.$$

Proposition 4.2
Soit $(u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_n) \in E^n$.

Alors $\mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_n) = \mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_p) + \mathrm{Vect}\,(u_{p+1}, \dots, u_n)$.

Proposition 4.3
Avec les mêmes notations : $F_1 + \cdots + F_n$ *est un sous-espace vectoriel de* E.

De plus, c'est le plus petit sous-espace vectoriel qui contient $F_1, \dots, F_n$.

Si on connaît des familles génératrices de chacun des sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_n$*, alors en concaténant ces familles, on obtient une famille génératrice de* $F_1 + \cdots + F_n$.

Conséquence : en fractionnant une famille génératrice de E en sous-familles, on décompose l'espace E en une somme de sous-espaces vectoriels.

4.1.2 Sommes directes

Définition 4.4
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.

On dit que la somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe quand tout vecteur de $F_1 + \cdots + F_n$ a une unique écriture $\sum_{i=1}^{n} x_i$ où $(x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$.

On dit aussi que les sous-espaces sont en somme directe. Dans ce cas, quand on veut insister sur cette propriété, on note la somme sous la forme $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$.

Proposition 4.5
Avec les mêmes hypothèses.

La somme $F_1 + \cdots + F_n$ *est directe ssi le vecteur nul a une unique décomposition* $\sum_{i=1}^{n} x_i$ *où* $(x_1, \ldots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$*, qui est la décomposition triviale.*

Autrement dit, la somme $F_1 + \cdots + F_n$ *est directe ssi la seule solution de l'équation* $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ *d'inconnue* $(x_1, \ldots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$ *est le* n*-uplet nul.*

Un exemple fondamental : si $(v_1, \ldots, v_n)$ est une famille libre, alors les droites vectorielles $\mathrm{Vect}\,(v_i)$ sont en somme directe.

Proposition 4.6
Avec les mêmes hypothèses.

Si la somme $F_1 + \cdots + F_n$ *est directe, alors en concaténant des familles libres de chacun des sous-espaces vectoriels, on obtient une famille libre.*

4.1.3 Sous-espaces supplémentaires

Définition 4.7
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.

On dit que les sous-espaces $F_1, \ldots, F_n$ sont supplémentaires (dans E) quand $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$.

On déduit des deux parties précédentes le résultat de la décomposition d'un vecteur.

Proposition 4.8
Soient E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $F_1, \ldots, F_n$ *des sous-espaces vectoriels de* E*.*

Il y a équivalence entre :

- *les sous-espaces* $F_1, \ldots, F_n$ *sont supplémentaires*
- *tout vecteur de* E *peut s'écrire de façon unique comme somme de vecteurs des sous-espaces vectoriels* $F_1, \ldots, F_n$ *:*

$$\forall v \in E, \quad \exists!\,(v_1, \ldots, v_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n, \quad v = \sum_{i=1}^{n} v_i.$$

Dans ce cas, soit v un vecteur de E. Il existe un unique n-uplet $(v_1, \dots, v_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$ tel que $v = \sum_{i=1}^{n} v_i$.

Pour tout $j \in [\![1 ; n]\!]$, on définit $p_j : E \longrightarrow E$ en posant $p_j(v) = v_j$.

Alors les applications p_j sont des projecteurs qui vérifient les propriétés :

- $\sum_{i=1}^{n} p_i = \mathrm{id}_E$
- pour tout $(i, j) \in [\![1 ; n]\!]^2$, $p_i \circ p_j = \delta_{ij} p_i$ où δ_{xy} est le symbole de Kronecker.

La réciproque est vraie : si $(p_1, \dots, p_n)$ sont n projecteurs vérifiant les deux propriétés précédentes, alors les sous-espaces $(\mathrm{Im}\, p_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont supplémentaires.

Exercice 4.9
Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Pour $k \in \{0, 1, 2\}$, on pose $E_k = \left\{ f \in E \;\middle|\; \forall x \in \mathbb{C},\ \ f(jx) = j^k f(x) \right\}$.

Montrez que E_0, E_1, E_2 sont trois sous-espaces vectoriels de E supplémentaires.

Proposition 4.10
Avec les mêmes hypothèses.

Si les sous-espaces $F_1, \dots, F_n$ sont supplémentaires, alors en concaténant des bases de chacun des sous-espaces vectoriels, on obtient une base de E.

4.1.4 Cas particulier de deux sous-espaces

Proposition 4.11
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

La somme $F + G$ est directe ssi $F \cap G = \{0\}$.

Attention ! Il ne faut pas généraliser à trois ou plus sous-espaces. Même si $F_1 \cap F_2 \cap F_3$ est le sous-espace nul, on ne peut pas conclure que la somme $F_1 + F_2 + F_3$ est directe.

4.1.5 Applications linéaires et sommes directes

Proposition 4.12
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E et $f_1, \dots, f_n$ des applications linéaires de $E_1, \dots, E_n$ dans F respectivement.

Alors il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $f\big|_{E_i} = f_i$.

Autrement dit, pour définir une application linéaire sur une somme directe de sous-espaces vectoriels, il suffit de la définir sur chacun des sous-espaces vectoriels.

Exercice 4.13
Soient $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels supplémentaires. Quelles sont les applications qui induisent l'application identité sur un des E_i et l'application nulle sur les autres E_j ?

4.2 Somme de sous-espaces vectoriels en dimension finie

4.2.1 Base adaptée à un sous-espace

Définition 4.14
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace vectoriel de E de dimension p.

On appelle base de E adaptée à F toute base de E qui contient une base de F. Quitte à changer l'ordre des vecteurs, on peut suppose dans une base adaptée à F que les p premiers vecteurs de la base forment une base de F.

Définition 4.15
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $(F_1, \dots, F_p)$ une famille de sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

On appelle base adaptée à la somme $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ la concaténation de bases de chacun des sous-espaces $F_1, \dots, F_p$ (dans cet ordre).

Si $\mathscr{B}$ est une base de E, alors en fractionnant la base en sous-familles, les sous-espaces vectoriels engendrés par chacune de ces sous-familles sont supplémentaires et la base est alors adaptée à la somme des sous-espaces.

4.2.2 Sommes directes et bases

On donne un moyen simple de vérifier qu'une somme est directe, voire plus.

Proposition 4.16
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $(F_1, \ldots, F_p)$ une famille de sous-espaces vectoriels de E.

Si en concaténant des bases de chacun des sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_p$ on obtient une famille libre, alors les sous-espaces vectoriels sont en somme directe.

Si en concaténant des bases de chacun des sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_p$ on obtient une base de E, alors les sous-espaces vectoriels sont supplémentaires.

4.2.3 Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels

Proposition 4.17
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.

Alors $\dim \sum_{i=1}^{n} F_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$.

Il y a égalité quand la somme est directe.

Théorème 4.18
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.

Alors $F_1, \ldots, F_n$ sont en somme directe ssi $\dim \sum_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$.

4.2.4 Sous-espaces supplémentaires

En dimension finie, on a une façon plus simple de prouver que des sous-espaces vectoriels sont supplémentaires.

Proposition 4.19 (Trois pour le prix de deux)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.

Quand deux propriétés parmi les trois suivantes sont vraies, alors la troisième l'est aussi :

- $E = \sum_{i=1}^{n} F_i$
- $\dim \sum_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$

▹ $\dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$

Donc dans ce cas, les sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_n$ sont supplémentaires.

En pratique, le cas le plus utile est le suivant : si $\dim \sum_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i = \dim E$, alors les sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_n$ sont supplémentaires.

Exercice 4.20
Dans $\mathbb{R}^4$, soient $H = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x + z + t = 0 \text{ et } x - y - z + t = 0\right\}$, $F = \text{Vect}\left((-1, 0, 1, 1)\right)$ et $G = \text{Vect}\left((2, -1, 1, 0)\right)$.

F, G et H sont-ils supplémentaires ?

4.2.5 Dimension d'une somme de deux sous-espaces vectoriels

Rappel : la formule de Grassmann.

Proposition 4.21
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

Alors $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

4.3 Polynômes d'endomorphismes et de matrices

4.3.1 $\mathbb{K}$-algèbres

4.3.1.1 Définition

Définition 4.22
Un ensemble A est appelé $\mathbb{K}$-algèbre quand A est à la fois un anneau et un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, dont les multiplications sont compatibles.

Il y a donc trois lois dans une $\mathbb{K}$-algèbre :

▹ une addition classique $+$;

▹ une multiplication externe $.$;

▹ une multiplication interne, compatible avec la précédente :

$$\forall (\lambda, a, b) \in \mathbb{K} \times A^2, \quad \lambda. (ab) = (\lambda.a)\, b = a\, (\lambda.b)\,.$$

On qualifie les $\mathbb{K}$-algèbres par du vocabulaire des anneaux (algèbres intègres, algèbres principales, etc) ou des espaces vectoriels (algèbres de dimension finie, etc).

Exemple 4.23

- ▹ $\mathbb{K}$ est lui-même une $\mathbb{K}$-algèbre, où les deux multiplications sont confondues ; $\mathbb{C}$ est aussi une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension 2.
- ▹ $\mathbb{K}[X]$ est une $\mathbb{K}$-algèbre intègre, commutative et de dimension finie.
- ▹ Si I est un intervalle, $\mathscr{F}(I, \mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative, non-intègre et de dimension finie.
- ▹ Si $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension n^2 qui n'est ni intègre ni commutative.
- ▹ Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors $\mathscr{L}(E)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension finie ssi E l'est aussi qui n'est ni intègre ni commutative.

4.3.1.2 Polynômes d'éléments dans une $\mathbb{K}$-algèbre

Proposition 4.24
Soient A une $\mathbb{K}$-algèbre et $a \in A$.

Pour $P = \sum_{i=0}^{n} c_i X^i \in \mathbb{K}[X]$, on pose $P(a) = \sum_{i=0}^{n} c_i a^i$.

L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & A \\ P & \longmapsto & P(a) \end{array}$ *est alors un morphisme d'algèbres :*

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \begin{cases} (P+Q)(a) = P(a) + Q(a) \\ (PQ)(a) = P(a)\, Q(a) \\ (\lambda P)(a) = \lambda P(a) \end{cases}$$

De plus, on note $\mathbb{K}[a]$ l'ensemble $\{P(a) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$: cet ensemble est stable par les lois de A, on dit que c'est une sous-algèbre de A.

4.3.2 Cas particulier des algèbres $\mathscr{L}(E)$ ou $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

E étant un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, l'ensemble $\mathscr{L}(E)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre. De même, n étant un entier non-nul, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre. Dans ces algèbres, on définit naturellement la notion de polynôme d'endomorphisme ou de matrice. Bien sûr, ces notions sont liées par choix d'une base de l'espace.

Proposition 4.25
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B}$ une base de E et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f) = A$.

Alors pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(f)$ a pour matrice $P(A)$ dans la base $\mathscr{B}$.

Remarque 4.26
- La « multiplication » dans $\mathscr{L}(E)$ est la composition $\circ$. Donc la deuxième propriété de la Proposition 4.24 doit être comprise comme suit : si $f \in \mathscr{L}(E)$, alors $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$.
- Même si les multiplications dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ou $\mathscr{L}(E)$ ne sont pas commutatives en général, on peut intervertir l'ordre des polynômes car la multiplication dans $\mathbb{K}[X]$ est commutative : si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $(PQ)(A) = P(A)Q(A) = Q(A)P(A)$; si $u \in \mathscr{L}(E)$, $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.
- Attention aux notations ! Si $f \in \mathscr{L}(E)$, $x \in E$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, alors l'application de $P(f)$ au vecteur x se note $P(f)(x)$ et pas $P(f(x))$, notation qui n'a aucun sens.

4.3.3 Polynôme annulateur d'une matrice ou d'un endomorphisme

Définition 4.27
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme annulateur de A tout polynôme non-nul $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(A) = 0$.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. On appelle polynôme annulateur de u tout polynôme non-nul $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$.

Remarque 4.28
Attention à ne pas confondre les notions : si P est un polynôme annulateur de la matrice A (on dit aussi que P annule A par abus de langage), on ne dit pas que A est une racine de P !

Une racine d'un polynôme est un nombre...

De même, si $P(u) = 0$, on ne dit pas que u est une racine de P, ça n'a aucun sens.

Définition 4.29
Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors l'ensemble $\mathrm{Ann}(A) = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(A) = 0\}$ est appelé idéal annulateur de A.

Si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E, alors l'ensemble $\mathrm{Ann}(u) = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\}$ est appelé idéal annulateur de u.

Théorème 4.30
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. *Alors* $\mathrm{Ann}(A)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}[X]$ *stable par* $\times$. *De plus, il existe un unique polynôme unitaire* μ_A *tel que* $\mathrm{Ann}(A) = \mu_A\mathbb{K}[X]$.

Soient E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie et* $u \in \mathscr{L}(E)$. *Alors* $\mathrm{Ann}(u)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}[X]$ *stable par* $\times$. *De plus, il existe un unique polynôme unitaire* μ_u *tel que* $\mathrm{Ann}(u) = \mu_u\mathbb{K}[X]$.

Remarque 4.31
Ce dernier résultat est faux en dimension infinie. Contre-exemple : l'endomorphisme $u : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$ défini par $u(P) = XP$.

Définition 4.32
On appelle polynôme minimal d'une matrice carrée A le polynôme μ_A précédent (noté aussi parfois π_A). C'est le polynôme unitaire de degré minimal qui annule A.

On appelle polynôme minimal d'un endomorphisme u en dimension finie le polynôme μ_u précédent (noté aussi parfois π_u). C'est le polynôme unitaire de degré minimal qui annule u.

Autrement dit, on a l'équivalence : pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$P(u) = 0 \iff \mu_u \mid P.$$

De même, on a l'équivalence : pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$P(A) = 0 \iff \mu_A \mid P.$$

Les polynômes annulateurs sont donc les multiples des polynômes minimaux.

On verra plus tard qu'on peut trouver des polynômes annulateurs de plus petits degrés que ceux donnés par le théorème précédent.

En général, il est souvent pénible de calculer le polynôme minimal. En pratique, on se contente de trouver des polynômes annulateurs de degrés pas trop grands (et souvent, il s'agit du polynôme minimal).

Remarque 4.33
Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}'$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ qui contient $\mathbb{K}$ (on dit que $\mathbb{K}'$ est une extension de $\mathbb{K}$), alors le polynôme minimal de A, vue comme matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}')$, est a priori différent de celui de A vue comme matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On peut seulement affirmer pour l'instant que $\mu_{A\,\mathbb{K}'}$ divise $\mu_{A\,\mathbb{K}}$.

En fait, on montre plus loin que le polynôme minimal ne dépend pas du corps $\mathbb{K}$.

4.3.4 Utilisation pratique d'un polynôme annulateur

4.3.4.1 Calcul de l'inverse

Proposition 4.34
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Alors A est inversible ssi A possède un polynôme annulateur P tel que 0 ne soit pas racine de P. Dans ce cas, A^{-1} est un polynôme en A.

De même, soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$.

Alors si f possède un polynôme annulateur P tel que 0 ne soit pas racine de P, f est un automorphisme de E. Dans ce cas, f^{-1} est un polynôme en f. La réciproque est vraie si E est de dimension finie.

Exercice 4.35

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminez un polynôme annulateur de A, montrez que A est inversible et calculez A^{-1}.

Exercice 4.36
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur. Déterminez un polynôme annulateur de p.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On pose $f = p - \lambda \mathrm{id}_E$. Déterminez un polynôme annulateur de f et vérifiez que f est un automorphisme pour presque toutes les valeurs de λ ; dans ce cas, calculez son inverse.

4.3.4.2 Calcul de puissances

Proposition 4.37
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On choisit un polynôme annulateur P de la matrice A.

Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^p = R_p(A)$ où R_p est le reste de la division euclidienne de X^p par P.

De même, soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ qui possède un polynôme annulateur P.

Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^p = R_p(f)$ où R_p est le reste de la division euclidienne de X^p par P.

Conséquence :

- si A possède un polynôme annulateur de degré a, alors $\mathbb{K}[A] = \{P(A) \mid P \in \mathbb{K}_{a-1}[X]\}$;
- si f possède un polynôme annulateur de degré a, alors $\mathbb{K}[f] = \{P(f) \mid P \in \mathbb{K}_{a-1}[X]\}$.

Proposition 4.38
Si p est le degré du polynôme minimal d'une matrice A, alors $\dim \mathbb{K}[A] = p$ *et* $\left(I_n, A, \ldots, A^{p-1}\right)$ *est une base de* $\mathbb{K}[A]$.

Si p est le degré du polynôme minimal d'un endomorphisme f d'un espace vectoriel E, alors $\dim \mathbb{K}[f] = p$ *et* $\left(\mathrm{id}_E, f, \ldots, f^{p-1}\right)$ *est une base de* $\mathbb{K}[f]$.

Exercice 4.39
Soient E un espace vectoriel et $(p, q) \in \mathscr{L}(E)^2$ deux projecteurs tels que $p + q = \mathrm{id}_E$. Vérifiez que $p \circ q = q \circ p = 0$. Déterminez un polynôme annulateur de $f = 2p + 3q$. Donnez une expression générale de f^k en fonction de f et k.

Exercice 4.40

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -5 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Vérifiez que $P = X^3 - 2X^2 + X$ est un polynôme annulateur de A. Donnez une expression générale de A^p en fonction de A et p.

Corollaire 4.41
Si $\mathbb{K}'$ est une extension de $\mathbb{K}$, alors pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, ses polynômes minimaux relativement à $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}'$ sont égaux : $\mu_{A\,\mathbb{K}} = \mu_{A\,\mathbb{K}'}$.

Autrement dit, le polynôme minimal ne dépend pas du corps $\mathbb{K}$.

4.4 Matrices semblables, trace

4.4.1 Trace d'une matrice

Définition 4.42
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de A la somme de ses coefficients diagonaux :

$$\mathrm{tr}\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{i\,i}.$$

L'application trace vérifie de remarquables propriétés.

Proposition 4.43
- *La trace est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.*
- *Pour tout* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}\left(A^\top\right) = \mathrm{tr}\, A$.
- *Pour tout* $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA)$.

4.4.2 Matrices semblables

Définition 4.44
Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On dit que A et B sont semblables quand il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Proposition 4.45
La relation de similitude entre matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une relation d'équivalence.

La relation de similitude est une relation très contraignante. Il n'existe pas de caractérisation simple de la similitude entre deux matrices carrées : savoir si deux matrices sont semblables est un problème difficile.

D'après la formule de changement de base, on a immédiatement le résultat suivant.

Proposition 4.46
Deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables ssi elle représentent un même endomorphisme dans des bases différentes. La matrice P est la matrice de passage d'une base à l'autre.

Corollaire 4.47
Deux matrices semblables ont même rang, même trace et même déterminant.

Mais c'est loin d'être suffisant pour être semblables.

Proposition 4.48
Si A et B sont deux matrices semblables, alors pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A)$ et $P(B)$ sont semblables avec la même matrice de passage.

4.4.3 Trace d'un endomorphisme

Proposition 4.49
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$.

Toutes les matrices carrées représentant f ont la même trace. Cette trace ne dépend donc pas du choix de la base dans laquelle on écrit la matrice de f, elle ne dépend que de f : on l'appelle trace de f et on la note $\operatorname{tr} f$.

On peut alors reformuler les résultats sur la trace d'une matrice.

Proposition 4.50
- ▹ *La trace est une forme linéaire sur $\mathscr{L}(E)$.*
- ▹ *Pour tout $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$, $\operatorname{tr}(u \circ v) = \operatorname{tr}(v \circ u)$.*

4.5 Opérations par blocs

4.5.1 Cas général

Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On fixe deux entiers k, ℓ tels que $1 \leqslant k \leqslant n-1$ et $1 \leqslant \ell \leqslant p-1$.

À toute matrice $M \in \mathscr{M}_{n\,p}(\mathbb{K})$, on associe quatre matrices obtenues en découpant la matrice en blocs :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

où $A = \left(m_{i\,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\ 1\leqslant j\leqslant \ell}}$, $B = \left(m_{i\,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\ \ell+1\leqslant j\leqslant p}}$, $C = \left(m_{i\,j}\right)_{\substack{k+1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant \ell}}$ et $D = \left(m_{i\,j}\right)_{\substack{k+1\leqslant i\leqslant n\\ \ell+1\leqslant j\leqslant p}}$.

Cette décomposition par blocs permet de faire des calculs formellement comme s'il s'agissait de nombres.

Proposition 4.51

Soient $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ *et* $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ *deux matrices de même taille décomposées de la même façon en blocs et* $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors $M + M' = \begin{pmatrix} A+A' & B+B' \\ C+C' & D+D' \end{pmatrix}$ *et* $\lambda M = \begin{pmatrix} \lambda A & \lambda B \\ \lambda C & \lambda D \end{pmatrix}$.

Proposition 4.52

Soient $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ *et* $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ *deux matrices telles que le produit* MM' *existe et décomposées en blocs.*

Alors, sous réserve que les blocs soient de tailles compatibles pour la multiplication, on a

$$MM' = \begin{pmatrix} AA'+BC' & AB'+BD' \\ CA'+DC' & CB'+DD' \end{pmatrix}.$$

Remarque 4.53

- Comme les symboles mis en jeu ne sont pas des nombres mais des matrices, il est indispensable de respecter l'ordre dans les produits.
- On peut généraliser à un nombre quelconque de blocs, pas forcément deux en ligne ou en colonne.

4.5.2 Cas particuliers des matrices carrées

Si M est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors avec les mêmes notations, on choisit toujours A et D carrées elles aussi. Dans ce paragraphe, on suppose que c'est le cas.

Définition 4.54
On dit que M est triangulaire supérieure par blocs quand il existe des matrices carrées $A_1, \ldots, A_k$ telles que M soit de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & ? & ? \ldots\ldots\ldots & ? \\ 0 & A_2 & ? \ldots\ldots\ldots & ? \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 \ldots\ldots\ldots 0 & & A_{k-1} & ? \\ 0 \ldots\ldots\ldots 0 & & 0 & A_k \end{pmatrix}.$$

On définit de même la notion de matrice triangulaire inférieure par blocs.

Définition 4.55
On dit que M est diagonale par blocs quand il existe des matrices carrées $A_1, \ldots, A_k$ telles que M soit de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \ldots\ldots\ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 \ldots\ldots\ldots 0 & & A_{k-1} & 0 \\ 0 \ldots\ldots\ldots 0 & & 0 & A_k \end{pmatrix}.$$

Les résultats sur les matrices triangulaires ou diagonales restent valables par blocs : la somme et le produit de deux matrices triangulaires supérieures par blocs de mêmes tailles l'est encore, et de même pour les matrices triangulaires inférieures par blocs et les matrices diagonales par blocs.

Une conséquence est qu'une matrice M triangulaire par blocs est inversible ssi tous les blocs diagonaux sont inversibles.

Dans ce cas, l'inverse de M est triangulaire par blocs et ses blocs diagonaux sont les inverses des blocs diagonaux de M.

En particulier, l'inverse d'une matrice M diagonale par blocs est la matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont les inverses de ceux de M.

De plus, le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants des blocs diagonaux.

4.5.3 Interprétation des blocs

Définition 4.56
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathscr{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E.

On dit que F est stable par f quand $f(F) \subseteq F$, *i.e.* pour tout $x \in F$, $f(x) \in F$.

Dans ce cas, on peut définir une application φ de F dans F en posant pour tout $x \in F$, $\varphi(x) = f(x)$.

Il est facile de vérifier que φ est un endomorphisme de F, appelé endomorphisme induit par f dans F.

Exemple 4.57
Si g est un endomorphisme de E qui commute avec f (*i.e.* $fg = gf$), alors $\ker g$ et $\operatorname{Im} g$ sont stables par f.

Proposition 4.58
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $f \in \mathscr{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E de dimension p.

Si F est stable par f, alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure par bloc, le premier bloc étant de taille (p, p) :

$$\operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \text{ et } A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K}).$$

Réciproquement, si f possède une matrice de cette forme, alors le sous-espace vectoriel engendré par les p premiers vecteurs est stable par f.

Proposition 4.59
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$.

Si $F_1, \ldots, F_k$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires stables par f de dimensions respectives $p_1, \ldots, p_k$, alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs, la taille du i-ème bloc étant (p_i, p_i) :

$$\operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ 0 & A_2 & 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 \ldots\ldots\ldots 0 & A_{k-1} & 0 \\ 0 \ldots\ldots\ldots 0 & 0 & A_k \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, si f possède une matrice dans une certaine base qui est diagonale par blocs et contenant k blocs carrés, alors il existe k sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_k$ stables par f et supplémentaires dans E.

Chapitre 5

Réduction des endomorphismes

Sommaire

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$, en général $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

5.1 Éléments propres d'un endomorphisme

Dans cette section, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque, finie ou non.

5.1.1 Valeurs propres et vecteurs propres

Définition 5.1
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On dit que λ est une valeur propre de f quand il existe un vecteur v non-nul tel que $f(v) = \lambda v$.

Si λ est une valeur propre de f, alors tout vecteur non-nul v tel que $f(v) = \lambda v$ est appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Exemple 5.2

- Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \mathrm{id}_E$ a pour unique valeur propre α et tout vecteur non-nul de E est un vecteur propre associé.
- Si p est un projecteur non-trivial (*i.e.* $p \neq 0$ et $p \neq \mathrm{id}_E$), alors p a pour seules valeurs propres 0 et 1.
- De même, si s est une symétrie non-triviale (*i.e.* $s \neq \mathrm{id}_E$ et $s \neq -\mathrm{id}_E$), alors les valeurs propres de s sont 1 et -1.
- L'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ $P \longmapsto XP$ n'a pas de valeur propre.

L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme f est appelé le spectre de f et est noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f)$ ou plus simplement $\mathrm{Sp}(f)$ (en toute rigueur, cette définition est fausse en dimension infinie, mais à notre niveau, cette approximation est acceptable).

Définition 5.3
On appelle droite propre d'un endomorphisme toute droite dirigée par un vecteur propre.

Proposition 5.4
Les droites propres d'un endomorphisme sont exactement les droites stables par cet endomorphisme.

Exercice 5.5
Soit $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$ défini par : si $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on pose $f(u) = (u_{n+1})$. Quelles sont les valeurs propres de f et les vecteurs propres associés ?

Exercice 5.6
Même question avec d l'opérateur de dérivation dans $\mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 5.7
Même question avec D l'opérateur de dérivation dans $\mathbb{R}[X]$.

5.1.2 Lien avec les polynômes annulateurs

En dimension quelconque, il est souvent difficile de trouver les valeurs propres d'un endomorphisme. La connaissance d'un polynôme annulateur peut aider.

Lemme 5.8
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Si λ est une valeur propre de f et v un vecteur propre associé, alors $P(f)(v) = P(\lambda)v$.

Si $P \in \mathbb{K}[X]$, on note $\mathrm{Z}_{\mathbb{K}}(P)$ l'ensemble des racines de P dans $\mathbb{K}$.

Proposition 5.9
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Si P est un polynôme annulateur de f, alors $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \mathrm{Z}_{\mathbb{K}}(P)$.

Remarque 5.10
Attention ! La réciproque est fausse. Contre-exemple : le polynôme $P = X^2 - 1$ est annulateur de id_E et pourtant -1, qui est racine de P, n'est pas valeur propre de id_E.

Exercice 5.11
Soit $n \geqslant 2$. Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $f(M) = M + M^{\top} + \mathrm{tr}(M) I_n$: f est clairement un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Déterminez un polynôme annulateur de f de degré 3 et déduisez-en les valeurs propres de f.

5.1.3 Sous-espaces propres

Proposition 5.12
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors λ est valeur propre de f ssi $\ker(f - \lambda \mathrm{id}_E) \neq \{0\}$, *autrement dit ssi $f - \lambda \mathrm{id}_E$ n'est pas injectif.*

Définition 5.13
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, le noyau $\ker(f - \lambda \mathrm{id}_E)$ est appelé le sous-espace propre associé à la valeur propre λ. Il est souvent noté $\mathrm{sep}(f, \lambda)$.

Par conséquent, $\mathrm{sep}(f, \lambda)$ est l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ auquel on ajoute le vecteur nul.

Remarque 5.14
Un cas particulier important : 0 est valeur propre ssi f n'est pas injective.

Exercice 5.15
Soit u un endomorphisme ayant pour matrice $M = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -4 \\ 4 & -3 & 3 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ dans une certaine base $\mathscr{B}$.

Calculez $M^3 + 2M^2 - 3M$. Déduisez-en les valeurs propres de u puis déterminez les sous-espaces propres associés.

Proposition 5.16
Tout sous-espace propre d'un endomorphisme est stable par cet endomorphisme. L'endomorphisme induit sur un sous-espace propre est alors une homothétie.

Théorème 5.17
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des valeurs propres distinctes de f.

Alors les sous-espaces propres $(\mathrm{sep}(f, \lambda_i))_{1 \leqslant i \leqslant p}$ *sont en somme directe.*

Autrement dit, toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Remarque 5.18
Quand on demande de déterminer les éléments propres d'un endomorphisme, on demande de déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres associés, *i.e.* les sous-espaces propres.

À partir de maintenant, il est toujours supposé que E est de dimension finie n

5.2 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

5.2.1 Caractérisation des valeurs propres en dimension finie

Proposition 5.19
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Alors*

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(f) \iff \mathrm{rg}(f - \lambda \mathrm{id}_E) < n.$$

Dans ce cas, $\dim \mathrm{sep}(f, \lambda) = n - \mathrm{rg}(f - \lambda \mathrm{id}_E)$.

5.2.2 Définition et lien avec les valeurs propres

Définition 5.20
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

On appelle polynôme caractéristique de f le polynôme $\chi_f = \det(X\mathrm{id}_E - f)$.

La notation χ_f est très courante : elle est à connaître.

Théorème 5.21
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Alors χ_f *est un polynôme unitaire de degré* n *de* $\mathbb{K}[X]$ *et les valeurs propres de* f *sont exactement les racines dans* $\mathbb{K}$ *de* χ_f : $\mathrm{Z}_{\mathbb{K}}(\chi_f) = \mathrm{Sp}(f)$.

Par conséquent, un endomorphisme d'un espace de dimension n *a au plus* n *valeurs propres distinctes.*

Exercice 5.22
Montrez que si $\dim E = 2$, alors pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$, $\chi_f = X^2 - \mathrm{tr}(f)X + \det f$.

Exercice 5.23
Calculez le polynôme caractéristique d'un endomorphisme de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ et donnez ses valeurs propres.

Exercice 5.24
Soient $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, $s = \sum_{i=1}^{n} e_i$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que pour tout $j \in [\![1 ; n]\!]$, $f(e_j) = e_j + s$.

Calculez son polynôme caractéristique et ses éléments propres.

On peut noter un lien avec la trace et le déterminant.

Proposition 5.25
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Alors $\chi_f = X^n - \operatorname{tr}(f) X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det f$.

5.2.3 Ordre de multiplicité et dimension du sous-espace propre

Définition 5.26
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \operatorname{Sp}(f)$.

On appelle ordre de multiplicité de la valeur propre λ son ordre de multiplicité en tant que racine de χ_f.

Proposition 5.27
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$, F un sous-espace vectoriel de E stable par f et g l'endomorphisme induit par f dans F.

Alors χ_g divise χ_f.

Une conséquence très importante de ce résultat est le théorème suivant.

Théorème 5.28
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \operatorname{Sp}(f)$.

Si λ est une valeur propre d'ordre α, alors $1 \leqslant \dim \operatorname{sep}(f, \lambda) \leqslant \alpha$.

Exercice 5.29
Soit f un endomorphisme de matrice $\begin{pmatrix} 3 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminez les valeurs propres de f, leur multiplicité et la dimension des sous-espaces propres associés.

5.2.4 Endomorphisme scindé

Définition 5.30
On dit qu'un endomorphisme de E est scindé quand son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.

Dans le cas d'un endomorphisme scindé, on connaît alors la somme et le produit des valeurs propres.

Proposition 5.31
Si $f \in \mathscr{L}(E)$ est scindé et a pour valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ avec les ordres de multiplicité $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, alors

$$\operatorname{tr} f = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \lambda_k \qquad \textit{et} \qquad \det f = \prod_{k=1}^{p} \lambda_k^{\alpha_k}.$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors on est dans ce cas, car tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont scindés dans $\mathbb{C}[X]$ d'après le théorème de d'Alembert-Gauss.

Mais si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors il faut se méfier des raisonnements hâtifs : comme un $\mathbb{R}$-endomorphisme peut ne pas avoir de valeurs propres réelles, la trace et le déterminant peuvent ne pas avoir de rapport avec les valeurs propres.

Exercice 5.32
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ dont la matrice dans une base est remplie par ligne de 1, ligne de 2, etc. Sans calculer le polynôme caractéristique, déterminez les valeurs propres complexes de f, leur multiplicité et la dimension des sous-espaces propres associés.

Remarque 5.33
Dans le langage courant, on dit souvent que la trace est la somme des valeurs propres. Cette phrase est correcte seulement si l'on sous-entend que l'on parle de la somme des valeurs propres comptées chacune avec son ordre de multiplicité.

On rencontre en fait deux types de résultats à propos des valeurs propres :

- ceux où l'on parle des valeurs propres distinctes (comme le Théorème 5.21) ;
- ceux où l'on parle des valeurs propres comptées selon leur multiplicité (comme la Proposition 5.31).

Il faut donc être très attentif à la façon dont on considère les valeurs propres.

5.3 Éléments propres d'une matrice carrée

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les matrices-colonnes d'ordre n sont les matrices de $\mathscr{M}_{n\,1}(\mathbb{K})$, espace souvent identifié avec $\mathbb{K}^n$.

5.3.1 Valeurs propres et vecteurs propres

Définition 5.34
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On dit que λ est valeur propre de A quand il existe une matrice-colonne X non-nulle telle que $AX = \lambda X$.

Si λ est une valeur propre de A, alors toute matrice-colonne non-nulle X telle que $AX = \lambda X$ est appelée vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Exemple 5.35

- Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, αI_n a pour unique valeur propre α et toute matrice-colonne non-nulle est un vecteur propre associé.

- Si A est une matrice diagonale, alors ses valeurs propres sont les coefficients diagonaux et des vecteurs propres associés sont les colonnes remplies de 0 sauf un seul coefficient égal à 1.

L'ensemble des valeurs propres d'une matrice A est appelé le spectre de A et est noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ ou plus simplement $\mathrm{Sp}(A)$.

Mais comme une matrice à coefficients réels est aussi une matrice à coefficients complexes, il vaut mieux savoir si on parle des valeurs propres réelles ou complexes. Il est donc préférable d'indiquer clairement le corps de base, comme le montre le résultat suivant.

Proposition 5.36
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}'$ une extension de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{C}$.

Alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \subseteq \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}'}(A)$.

Proposition 5.37
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ une base de E.

Si $A = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f)$, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \mathrm{Sp}(f)$.

Par conséquent, deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres (mais attention, pas forcément les mêmes vecteurs propres).

5.3.2 Lien avec les polynômes annulateurs

Proposition 5.38
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Si P est un polynôme annulateur de A, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \subseteq \mathrm{Z}_{\mathbb{K}}(P)$.

Attention ! La réciproque est fausse. Contre-exemple : le polynôme $P = X^2 - 1$ est annulateur de I_n et pourtant -1, qui est racine de P, n'est pas valeur propre de I_n.

5.3.3 Sous-espaces propres

Proposition 5.39
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors λ *est valeur propre de* A *ssi* $A - \lambda I_n$ *n'est pas inversible, autrement dit ssi* $\operatorname{rg}(A - \lambda I_n) < n$ *ou* $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Si $\lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$, le sous-espace propre associé à la valeur propre λ est l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ auquel on ajoute le vecteur nul. Il est souvent noté $\operatorname{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda)$:

$$\operatorname{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda) = \{X \in \mathscr{M}_{n\,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \lambda X\}.$$

Proposition 5.40
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Alors*

$$\lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \iff \operatorname{rg}(A - \lambda I_n) < n.$$

Dans ce cas, $\dim \operatorname{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda) = n - \operatorname{rg}(A - \lambda I_n)$.

Attention ! Dans la relation $\dim \operatorname{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda) = n - \operatorname{rg}(A - \lambda I_n)$, c'est n, pas n^2 ! Il s'agit de la dimension de $\mathscr{M}_{n\,1}(\mathbb{K})$, pas celle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque 5.41
Un cas particulier important : 0 est valeur propre ssi A n'est pas inversible, c'est-à-dire ssi $\operatorname{rg} A < n$.

Théorème 5.42
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ *des valeurs propres distinctes de* A.

Alors les sous-espaces propres $(\operatorname{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda_i))_{1 \leqslant i \leqslant p}$ *sont en somme directe.*

Autrement dit, toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Remarque 5.43
Quand on demande de déterminer les éléments propres d'une matrice, on demande de déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres associés, *i.e.* les sous-espaces propres.

5.4 Polynôme caractéristique d'une matrice carrée

5.4.1 Définition et lien avec les valeurs propres

Définition 5.44
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme $\chi_A = \det(XI_n - A)$.

Proposition 5.45
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ une base de E.

Si $A = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f)$, alors $\chi_A = \chi_f$.

Par conséquent, deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Théorème 5.46
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Alors χ_A est un polynôme unitaire de degré n de $\mathbb{K}[X]$ et les valeurs propres de A sont exactement les racines de χ_A dans $\mathbb{K}$.

Par conséquent, une matrice carrée de taille (n, n) a au plus n valeurs propres distinctes.

Corollaire 5.47
L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On peut noter un lien avec la trace et le déterminant.

Proposition 5.48
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Alors $\chi_A = X^n - \mathrm{tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A$.

5.4.2 Ordre de multiplicité et dimension du sous-espace propre

Définition 5.49
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$.

On appelle ordre de multiplicité de la valeur propre λ son ordre de multiplicité en tant que racine de χ_A.

Théorème 5.50
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$.

Si λ *est une valeur propre d'ordre* α*, alors* $1 \leqslant \dim \mathrm{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda) \leqslant \alpha$.

Proposition 5.51
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*,* $f \in \mathscr{L}(E)$ *et* $\mathscr{B}$ *une base de* E.

Si $A = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f)$*, alors* $\dim \mathrm{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda) = \dim \mathrm{sep}(f, \lambda)$.

Par conséquent, deux matrices semblables ont des sous-espaces propres de même dimension (mais pas les mêmes vecteurs propres).

5.4.3 Matrice scindée

Définition 5.52
On dit qu'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est scindée quand son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.

Dans le cas d'une matrice scindée, on connaît alors la somme et le produit des valeurs propres.

Proposition 5.53
Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *est scindée et a pour valeurs propres* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ *avec les ordres de multiplicité* $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$*, alors*

$$\mathrm{tr}\, A = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \lambda_k \qquad \text{et} \qquad \det A = \prod_{k=1}^{p} \lambda_k^{\alpha_k}.$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors on est dans ce cas, car tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont scindés dans $\mathbb{C}[X]$ d'après le théorème de d'Alembert-Gauss.

Mais si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors il faut se méfier des raisonnements hâtifs : comme un polynôme à coefficients réels peut ne pas avoir de racines réelles, la trace et le déterminant peuvent ne pas avoir de rapport avec les valeurs propres.

5.5 Endomorphismes diagonalisables, matrices diagonalisables

5.5.1 Définition

Définition 5.54
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On dit que f est diagonalisable quand il existe une base de E constituée de vecteurs propres de f.

On dit que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (ou $\mathbb{K}$-diagonalisable) quand il existe une base de $\mathscr{M}_{n\,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A.

D'après le lien entre les endomorphismes et les matrices carrées, un endomorphisme est diagonalisable ssi sa matrice dans n'importe quelle base est diagonalisable.

Exercice 5.55

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ est-elle $\mathbb{R}$-diagonalisable ? $\mathbb{C}$-diagonalisable ?

Exercice 5.56
Montrez que la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Exercice 5.57
Même exercice avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 5.58
La matrice $C = \begin{pmatrix} 11 & 7 & -3 \\ 11 & 7 & -3 \\ 66 & 42 & -18 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Proposition 5.59
Si un endomorphisme (une matrice) est diagonalisable, alors il (elle) est scindé(e).

Mais la réciproque est fausse.

5.5.2 Caractérisations équivalentes

On note $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 5.60
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

f est diagonalisable ssi il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f) \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$. Dans ce cas, les valeurs propres de f sont les éléments diagonaux de cette matrice.

A est $\mathbb{K}$-diagonalisable ssi elle est $\mathbb{K}$-semblable à une matrice diagonale, i.e. il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = PDP^{-1}$. Dans ce cas, les valeurs propres de A sont les éléments diagonaux de D.

Exemple 5.61

- ▹ Toute matrice diagonale est diagonalisable, car elle est semblable à elle-même.
- ▹ Les projecteurs et les symétries sont diagonalisables.

Remarque 5.62
Quitte à changer l'ordre des vecteurs dans la base, on peut ranger les valeurs propres sur la diagonale dans l'ordre qu'on veut.

Exemple 5.63

Si $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = P^{-1}AP$, alors la colonne 1 de P est un vecteur propre de A pour la valeur propre 1 et les deux autres sont des vecteurs propres pour la valeur propre 3, donc en posant $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, on a $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Lemme 5.64
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable : il existe une base de E dans laquelle la matrice D de f est diagonale.

Les valeurs propres de f sont les éléments diagonaux de D et si λ est un tel nombre, alors la dimension de $\mathrm{sep}(f, \lambda)$ est le nombre d'occurrences de λ dans la diagonale de D.

On en déduit les théorèmes suivants.

Théorème 5.65
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- f *est diagonalisable*
- *les sous-espaces propres de* f *sont supplémentaires dans* E
- $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim \mathrm{sep}(f, \lambda) = n$

Et sa version matricielle.

Théorème 5.66
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- A *est diagonalisable dans* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$
- *les sous-espaces propres de* A *dans* $\mathscr{M}_{n\,1}(\mathbb{K})$ *sont supplémentaires dans* $\mathscr{M}_{n\,1}(\mathbb{K})$
- $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} \dim \mathrm{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda) = n$

Exercice 5.67

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. On a vu à l'Exercice 5.57 que A est diagonalisable. Diagonalisez A.

5.5.3 Lien avec le polynôme caractéristique

Théorème 5.68
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- f *est diagonalisable*
- f *est scindé et pour tout* $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$*, la dimension de* $\mathrm{sep}(f, \lambda)$ *est égale à l'ordre de multiplicité de* λ

Et sa version matricielle.

Théorème 5.69
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- ▹ *A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*
- ▹ *A est scindée et pour tout $\lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$, la dimension de $\operatorname{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda)$ est égale à l'ordre de multiplicité de λ*

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la condition « être scindé » est automatiquement satisfaite.

Un cas particulier très courant.

Proposition 5.70
Si un endomorphisme de E possède exactement n valeurs propres distinctes, alors il est diagonalisable.

Si une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ possède exactement n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$, alors elle est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 5.71
Montrez que la matrice $\begin{pmatrix} -4 & 8 & 22 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

5.6 Lien entre diagonalisabilité et polynômes annulateurs

5.6.1 Racines du polynôme minimal

Proposition 5.72
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Les racines de μ_f sont exactement les valeurs propres de f : $\mathrm{Z}_{\mathbb{K}}(\mu_f) = \operatorname{Sp}(f)$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les racines dans $\mathbb{K}$ de μ_A sont exactement les valeurs propres dans $\mathbb{K}$ de A : $\mathrm{Z}_{\mathbb{K}}(\mu_A) = \operatorname{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$.

5.6.2 Lemme des noyaux

Proposition 5.73
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ *et* $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ *tels que* $P \wedge Q = 1$.

Alors $\ker (PQ)(f) = \ker P(f) \oplus \ker Q(f)$.

Proposition 5.74
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ *et* $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{K}[X]$ *premiers entre eux deux à deux. On pose* $P = \prod_{i=1}^{k} P_i$.

Alors $\ker P(f) = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker P_i(f)$.

5.6.3 Application à la diagonalisabilité

Définition 5.75
Un polynôme est dit simplement scindé quand il est scindé et à racines simples.

Théorème 5.76
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- f *est diagonalisable*
- μ_f *est simplement scindé*
- *il existe un polynôme annulateur de* f *simplement scindé*
- *le polynôme* $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} (X - \lambda)$ *est un polynôme annulateur de* f

Et sa version matricielle.

Théorème 5.77
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- A *est diagonalisable dans* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

- ▹ *μ_A est simplement scindé*

- ▹ *il existe un polynôme annulateur de A simplement scindé dans $\mathbb{K}[X]$*

- ▹ *le polynôme $\displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} (X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de A*

Exercice 5.78

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Calculez $(A + I_3)^3$. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 5.79
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^3 = I_n$. Selon que $\mathbb{K}$ soit égal à $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$, à quelle condition A est-elle $\mathbb{K}$-diagonalisable ?

5.6.4 Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit

Proposition 5.80
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$, F un sous-espace vectoriel de E stable par f et g l'endomorphisme induit par f dans F.

Alors μ_g divise μ_f.

Corollaire 5.81
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par f.

Si f est diagonalisable, alors l'endomorphisme induit par f dans F est aussi diagonalisable.

Exercice 5.82
Soit f un endomorphisme de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Déterminez les sous-espaces vectoriels de E stables par f.

Exercice 5.83 (Codiagonalisation ou diagonalisation simultanée)
Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisables et qui commutent.

Montez qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ sont diagonales.

5.7 Quelques applications de la diagonalisation

5.7.1 Puissances d'une matrice, suites récurrentes linéairement

Un petit lemme déjà rencontré.

Lemme 5.84
Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PBP^{-1}$.

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PB^kP^{-1}$.

Le lemme précédent est particulièrement utile si A est diagonalisable et si on choisit $B = D$, matrice diagonale semblable à A, car calculer les puissances d'une matrice diagonale est très facile.

Grâce à la diagonalisation de A, on peut espérer exprimer la forme générale des suites récurrentes linéaires (voir le chapitre précédent, section sur les polynômes annulateurs).

Exercice 5.85
Soient u, v, w les trois suites réelles telles que $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = -4u_n + 4v_n - 6w_n \\ w_{n+1} = -3u_n + 3v_n - 4w_n \end{cases}$$

Déterminez des expressions de u_n, v_n, w_n en fonction de n.

Cette technique s'applique en particulier aux suites u vérifiant une relation de récurrence linéaire de la forme : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+d} = a_{d-1}u_{n+d-1} + \cdots + a_2u_{n+2} + a_1u_{n+1} + a_0u_n$.

On pose alors $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n+d-1} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{d-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_d(\mathbb{K})$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$ et on est ramené au cas précédent.

La matrice A s'appelle la matrice-compagnon du polynôme $P = X^d - a_{d-1}X^{d-1} - \cdots - a_1X - a_0$: elle a la propriété remarquable que son polynôme caractéristique est P, son polynôme minimal est aussi P et donc que ses valeurs propres sont les racines de P. C'est pourquoi le polynôme P est appelé polynôme caractéristique associé à la suite u (cas déjà étudié en première année : $d = 2$).

On en déduit que A est diagonalisable ssi P est simplement scindé et dans ce cas, A possède d valeurs propres distinctes. Dans ce cas, en notant $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes, la suite u est combinaison linéaire des suites géométriques $\left(\lambda_1^n\right), \ldots, \left(\lambda_d^n\right)$.

Exercice 5.86
Explicitez l'unique suite (u_n) vérifiant

$$u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 5 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n.$$

5.7.2 Systèmes d'équations différentielles

Ce point sera traité dans le chapitre sur les équations différentielles linéaires.

5.8 Endomorphismes trigonalisables, matrices trigonalisables

5.8.1 Définition et propriétés

Définition 5.87
Un endomorphisme est dit trigonalisable quand il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.

Une matrice carrée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ quand elle est semblable à une matrice triangulaire dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque 5.88

- Si un endomorphisme (une matrice) est diagonalisable, alors il (elle) est trigonalisable.
- Si une matrice est trigonalisable, ses valeurs propres sont les nombres sur la diagonale de toute matrice triangulaire semblable.

Exercice 5.89
On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 7 \\ 5 & 4 & -8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et f un endomorphisme de matrice M. Déterminez les éléments propres de M. Est-elle diagonalisable ? En complétant une famille libre de vecteurs propres, déterminez une base $\mathscr{B}$ de l'espace où la matrice de f est triangulaire supérieure, puis trigonalisez M.

Exercice 5.90
Soit f un endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -5 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Montrez que f n'est pas diagonalisable mais est trigonalisable et donnez une base de trigonalisation de f. Donnez une forme générale pour A^n.

Quand un endomorphisme ou une matrice n'est pas diagonalisable, on peut espérer qu'il ou elle est trigonalisable : faute de grives, on se contente de merles !

Remarque 5.91
On ne confondra pas la trigonalisation d'une matrice carrée et la transformation par lignes (ou colonnes) des matrices vue en première année ! Seule la trigonalisation fournit des matrices semblables ! La transformation par lignes ne conserve que le rang !

5.8.2 Caractérisation équivalente

La trigonalisabilité est beaucoup plus courante que la diagonalisabilité, comme on le voit grâce aux résultats suivants.

Proposition 5.92
Un endomorphisme (une matrice) est trigonalisable ssi il (elle) est scindé(e).

En particulier, quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tous les endomorphismes sont trigonalisables, toutes les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ sont trigonalisables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

En pratique, quand on cherche à trigonaliser un endomorphisme, on peut chercher une base dans laquelle la matrice est triangulaire supérieure avec des 1 ou des 0 sur la sur-diagonale et des 0 sur les diagonales partielles encore au-dessus (c'est démontrable, mais c'est difficile à démontrer, cela s'appelle le théorème de Jordan – hors-programme –).

Théorème 5.93
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- f *est trigonalisable*
- χ_f *est scindé*
- μ_f *est scindé*
- *il existe un polynôme annulateur de f scindé*

Et sa version matricielle.

Théorème 5.94
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- A *est trigonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*
- χ_A *est scindé*
- μ_A *est scindé*
- *il existe un polynôme annulateur de A qui est scindé dans $\mathbb{K}[X]$*

Exercice 5.95

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculez A^2, puis A^3. La matrice A est-elle diagonalisable ? trigonalisable ? Dans l'affirmative, diagonalisez ou trigonalisez la.

5.8.3 Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème 5.96
Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme (d'une matrice carrée) est un polynôme annulateur.

Corollaire 5.97
Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique. Donc en dimension n, le polynôme minimal est de degré au plus n.

Les polynômes minimal et caractéristique partagent les mêmes racines dans $\mathbb{C}$ (en fait dans tout corps $\mathbb{K}$) mais pas avec les mêmes ordres de multiplicité : si f est scindé, alors en notant $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les k valeurs propres distinctes de f, on peut écrire

$$\chi_f = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{\alpha_i} \qquad \text{et} \qquad \mu_f = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{\beta_i}$$

où pour tout $i \in [\![1 \,;\, k]\!]$, $1 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$.

5.8.4 Sous-espaces caractéristiques

Définition 5.98
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme scindé. On écrit $\chi_f = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont les k valeurs propres distinctes de f.

Les sous-espaces caractéristiques de f sont les noyaux $\ker (f - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{\alpha_i}$.

Proposition 5.99
Les sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme scindé sont supplémentaires et stables par f.

Théorème 5.100
Tout endomorphisme scindé possède une base dans laquelle sa matrice est diagonale par blocs telle que :

- *il y a autant de blocs que de valeurs propres : à chaque valeur propre, on associe un unique bloc ;*
- *chaque bloc est de la forme $\lambda I_r + U$ où λ est la valeur propre associée au bloc, r est l'ordre de multiplicité de λ et U est une matrice strictement triangulaire supérieure de $\mathscr{M}_r(\mathbb{K})$*

Toute matrice scindée est semblable à une matrice diagonale par blocs vérifiant les conditions précédentes.

Corollaire 5.101
La dimension d'un sous-espace caractéristique est l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée.

5.9 Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes

5.9.1 Généralités

Définition 5.102
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On dit que u est nilpotent quand il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est nilpotente quand il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$.

Le plus petit indice p satisfaisant à la condition précédente s'appelle l'indice de nilpotence de u (de A).

Proposition 5.103
Toute matrice strictement triangulaire (supérieure ou inférieure) est nilpotente. Par conséquent, les matrices semblables à une matrice strictement triangulaire sont nilpotentes.

Dans la décomposition en sous-espaces caractéristiques, on a vu apparaître des matrices $\lambda I_r + U$: les matrices U sont nilpotentes.

L'ensemble des matrices nilpotentes n'a pas de structure particulière : en général, la somme et le produit de deux matrices nilpotentes ne sont pas nilpotents. Néanmoins, avec une condition de commutation supplémentaire, on a quelques résultats.

Proposition 5.104
Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices nilpotentes.

Si A et B commutent, alors $A + B$ et AB sont nilpotentes.

On a bien sûr les mêmes résultats concernant les endomorphismes nilpotents.

5.9.2 Éléments propres d'un nilpotent

Proposition 5.105
Un endomorphisme en dimension n est nilpotent ssi son polynôme caractéristique est X^n, i.e. s'il est scindé et admet 0 comme unique valeur propre.

Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente ssi son polynôme caractéristique est X^n, i.e. si elle est scindée et admet 0 comme unique valeur propre.

L'indice de nilpotence dans ces deux cas est alors le degré du polynôme minimal ; il est donc inférieur ou égal à n.

Mis à part la matrice nulle, aucune matrice nilpotente n'est diagonalisable : c'est une idée parfois utile pour prouver qu'une matrice est nulle (diagonalisable et nilpotente implique nulle).

Proposition 5.106
Tout endomorphisme nilpotent est trigonalisable : il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure stricte. Réciproquement, si un endomorphisme est trigonalisable et n'a que 0 *pour valeur propre, alors il est nilpotent.*

Toute matrice nilpotente est trigonalisable : elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte. La réciproque est vraie.

5.9.3 Application aux sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme

Proposition 5.107
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Pour toute valeur propre λ de f, si α est l'ordre de multiplicité de λ dans le polynôme minimal de f, le sous-espace caractéristique associé est aussi le noyau $\ker(f - \lambda \mathrm{id}_E)^\alpha$.

On peut même démontrer mieux.

Proposition 5.108
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$, $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$ et α l'ordre de multiplicité de λ dans le polynôme minimal de f.

Alors la suite des noyaux $\left(\ker(f - \lambda \mathrm{id}_E)^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante jusqu'au rang α, puis constante à partir du rang α :

$$\{0\} \subsetneq \ker(f - \lambda \mathrm{id}_E) \subsetneq \ker(f - \lambda \mathrm{id}_E)^2 \subsetneq \ldots \subsetneq \ker(f - \lambda \mathrm{id}_E)^\alpha = \ker(f - \lambda \mathrm{id}_E)^{\alpha+1} = \ldots$$

Chapitre 6

Intégrales généralisées

Sommaire

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les fonctions considérées dans ce chapitre sont à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose connue la notion d'intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux à valeurs réelles ou complexes (*cf.* cours de première année).

Si f est une fonction continue sur un segment $[a\,;b]$ (ou $[b\,;a]$), on note $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ (ou toute autre lettre à la place de t) l'intégrale de f entre a et b : quand on a pas besoin de nommer la variable d'intégration, on ne la note pas, mais si on la note alors on n'oublie pas l'élément différentiel.

En préambule, on généralise la notion de fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque.

Fonctions continues par morceaux sur un intervalle

Définition 6.1
Soit I un intervalle quelconque.

On dit qu'une fonction est continue par morceaux sur I quand elle est continue par morceaux sur tout segment inclus dans I.

Exemple 6.2

- La fonction $t \longmapsto \begin{cases} -\ln t & \text{si } t \in \left]0\,;\,1\right] \\ \mathrm{e}^{-t} & \text{si } t \in \left[1\,;\,+\infty\right[\end{cases}$ est continue par morceaux sur $\left]0\,;\,+\infty\right]$.
- La fonction $t \longmapsto \left\lfloor \dfrac{1}{t} \right\rfloor$ est continue par morceaux sur $\left]0\,;\,+\infty\right]$.

Dans toute la suite, on note $\mathscr{C}_m^0(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Proposition 6.3
L'ensemble $\mathscr{C}_m^0(I, \mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

6.1 Intégrales généralisées sur $\left[a\,;\,+\infty\right[$

Dans cette section, a est un réel.

6.1.1 Définition et exemples fondamentaux

Définition 6.4
Soit $f \in \mathscr{C}_m^0(\left[a\,;\,+\infty\right[, \mathbb{K})$.

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge (ou qu'elle est convergente, ou simplement qu'elle existe) quand $\displaystyle\int_a^x f$ a une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

Dans ce cas, on pose $\displaystyle\int_a^{+\infty} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_a^x f$.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty}$ diverge (ou qu'elle est divergente).

Remarque 6.5
Une intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty}$ est une limite et une limite n'existe pas toujours. Avant d'utiliser une telle intégrale dans un raisonnement ou un calcul, on doit donc toujours justifier son existence !

Les résultats ci-dessous sont à connaître.

Exemple 6.6
- Soit α un réel. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge ssi $\alpha > 0$.
- Soit α un réel. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge ssi $\alpha > 1$ (intégrale dite de Riemann).

Exercice 6.7
Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$?

Exercice 6.8
Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$.

6.1.2 Propriétés

La convergence de l'intégrale ne dépend pas de la borne a, ce qui généralise la relation de Chasles.

Proposition 6.9
Soient $f \in \mathscr{C}_m^0([a\,;+\infty[\,,\mathbb{K})$ et $b \in [a\,;+\infty[$.

Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge ssi $\displaystyle\int_b^{+\infty} f$ converge.

Dans ce cas, on a $\displaystyle\int_a^{+\infty} f = \int_a^b f + \int_b^{+\infty} f$.

Dans le cas convergent, on retrouve la linéarité.

Proposition 6.10
Soient $(f,g) \in \mathscr{C}_m^0([a\,;+\infty[\,,\mathbb{K})^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$.

Si les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ convergent, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} (\lambda f + \mu g)$ converge.

Dans ce cas, on a $\displaystyle\int_a^{+\infty} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^{+\infty} f + \mu \int_a^{+\infty} g$.

Remarque 6.11
- « La somme d'une intégrale convergente et d'une divergente est divergente ».
- Il n'y a rien à dire *a priori* sur la « somme de deux intégrales divergentes ».

6.1.3 Cas des fonctions réelles positives

Quand une fonction f est positive et continue par morceaux, dans le cas où l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge, on pose par convention $\displaystyle\int_a^{+\infty} f = +\infty$, ce qui permet de donner un sens à toutes les intégrales de fonctions positives.

Proposition 6.12
Soit $f \in \mathscr{C}_m^0([a\,;+\infty[\,,\mathbb{R})$.

Si $f \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f \geqslant 0$.

Si, de plus, f est continue et prend au moins une valeur strictement positive, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f > 0$.

Ceci est vrai en particulier quand f est continue et strictement positive sur $[a\,;+\infty[$.

On en déduit la propriété de croissance des intégrales.

Proposition 6.13
Soit $(f,g) \in \mathscr{C}_m^0([a\,;+\infty[\,,\mathbb{R})^2$ tel que f et g soient positives.

Si $f \leqslant g$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f \leqslant \int_a^{+\infty} g$.

6.1.4 Théorème de comparaison entre fonctions positives

D'abord une condition nécessaire et suffisante de convergence dans le cas d'une fonction positive.

Proposition 6.14
Soit $f \in \mathscr{C}_m^0([a\,;+\infty[\,,\mathbb{R})$.

Si $f \geqslant 0$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge ssi la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^{x} f$ est majorée.

On en déduit un théorème de comparaison du même type que celui sur les séries.

Théorème 6.15
Soit $(f,g) \in \mathscr{C}_m^0([a\,;+\infty[\,,\mathbb{R})^2$ tel que f et g soient positives.

- *Si $f \leqslant g$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ converge, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge.*
- *Si $f \leqslant g$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ diverge.*

- *Si $f \underset{+\infty}{\sim} g$ alors les intégrales $\int_a^{+\infty} f$ et $\int_a^{+\infty} g$ sont de même nature : l'une converge ssi l'autre converge.*

Remarque 6.16

- Dans ce théorème, il suffit que les inégalités soient vraies au voisinage de $+\infty$ seulement.

- Si les fonctions sont à valeurs négatives, on se ramène à ce théorème en travaillant avec les fonctions opposées. Ce qui compte est donc qu'elles soient de signe constant.

- Avec des fonctions dont le signe n'est pas constant, ce théorème est faux. Il faut donc bien s'assurer et mettre en valeur que les fonctions sont positives (ou négatives).

- On compare les fonctions, pas les intégrales ! N'écrivez pas des symboles $\int_a^{+\infty} \cdots$ partout.

Exercice 6.17

Montrez que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \, \mathrm{d}t$ converge.

Exercice 6.18

Montrez que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln t} \, \mathrm{d}t$ diverge.

Exercice 6.19

Montrez que pour tout $\alpha > 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} \, \mathrm{d}t$ converge.

6.1.5 Lien avec les séries

Le théorème de comparaison série-intégrale peut se réécrire comme suit.

Proposition 6.20

Soit $f \in \mathscr{C}_m^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ positive et décroissante.

La série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ sont de même nature.

Dans le même genre, on peut étudier la convergence d'une intégrale d'une fonction positive par l'intermédiaire d'une série.

Proposition 6.21
Soient $f \in \mathscr{C}_m^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ positive et u une suite positive et strictement croissante qui diverge vers $+\infty$.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge ssi la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_{u_n}^{u_{n+1}} f$ converge.

Exercice 6.22
Montrez que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge.

Exercice 6.23
En utilisant l'inégalité $\sin t \geqslant \dfrac{2}{\pi}t$, valable pour tout $t \in \left[0 \,;\, \dfrac{\pi}{2}\right]$, montrez que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\mathrm{e}^x\,|\sin x|}\,\mathrm{d}x$ converge.

6.2 Intégrales généralisées sur d'autres types d'intervalles

6.2.1 Intégrales généralisées sur $[a\,;\,b[$

Dans cette partie, a est un réel et b est un réel ou $+\infty$, de sorte que $a < b$.

Définition 6.24
Soit $f \in \mathscr{C}_m^0([a\,;\,b[\,, \mathbb{K})$.

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge quand $\displaystyle\int_a^x f$ a une limite finie quand x tend vers b^-.

Dans ce cas, on pose $\displaystyle\int_a^b f = \lim_{x\longrightarrow b^-} \int_a^x f$.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ diverge (ou qu'elle est divergente).

6.2.2 Intégrales généralisées sur $]a\,;\,b]$

Dans cette partie, a est un réel ou $-\infty$ et b un réel, de sorte que $a < b$.

Définition 6.25
Soit $f \in \mathscr{C}^0_m\left(]a\,;b]\,,\mathbb{K}\right)$.

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge quand $\displaystyle\int_x^b f$ a une limite finie quand x tend vers a^+.

Dans ce cas, on pose $\displaystyle\int_a^b f = \lim_{x\longrightarrow a^+}\int_x^b f$.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ diverge (ou qu'elle est divergente).

Les résultats suivants sont à connaître.

Exemple 6.26

- $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
- Soit α un réel. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge ssi $\alpha < 1$ (intégrale dite de Riemann).

Exercice 6.27
Montrez que l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ diverge.

À quelle condition sur α l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{(t-1)^\alpha}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ converge-t-elle ?

On peut remarquer que par changement de variable $x \longmapsto -x$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est de même nature (et, dans le cas convergent, a la même valeur) que $\displaystyle\int_{-b}^{-a} f(-u)\,\mathrm{d}u$. Les résultats valables en un point réel ne dépendent donc pas du côté du point où on se place.

Exemple 6.28
- Si a est un réel, alors $\displaystyle\int_a^{a+1} \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge ssi $\alpha < 1$.
- Si a est un réel, alors $\displaystyle\int_{a-1}^{a} \frac{1}{(a-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge ssi $\alpha < 1$.
- $\displaystyle\int_0^1 \ln(1-t)\,\mathrm{d}t$ converge.

6.2.3 Intégrales généralisées sur $]a\ ;b[$

Dans cette partie, a et b sont des réels ou des infinis tels que $a < b$.

Définition 6.29
Soit $f \in \mathscr{C}^0_m(]a\ ;b[\,,\mathbb{K})$.

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge quand il existe $c \in\ ]a\ ;b[$ tel que $\displaystyle\int_a^c f$ et $\displaystyle\int_c^b f$ convergent.

Dans ce cas, on pose $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f = \lim_{x\longrightarrow a^+}\int_x^c f + \lim_{y\longrightarrow b^-}\int_c^y f$.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ diverge (ou qu'elle est divergente).

Remarque 6.30
Grâce à la relation de Chasles, on constate que la valeur de c n'est finalement pas importante : si ça marche pour un certain réel $c \in\ ]a\ ;b[$, alors ça marche pour toute autre valeur prise dans $]a\ ;b[$.

Exercice 6.31
Montrez que l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 6.32
Même chose avec l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t\,(1-t)}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 6.33
Même chose avec l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 6.34
Montrez que pour tout $\alpha > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ diverge.

6.2.4 Propriétés communes à toutes ces intégrales

Toutes les propriétés vues dans la première section sont préservées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.

En voici trois autres.

6.2.4.1 Changement de variable

Proposition 6.35
Soient a, b, α, β des réels ou des infinis tels que $a < b$ et $\alpha < \beta$ et $f \in \mathscr{C}^0_m(]a\,;b[\,,\mathbb{K})$.

Si φ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante de $]\alpha\,;\beta[$ dans $]a\,;b[$, alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f\circ\varphi(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature et, si elles sont convergentes, sont égales.

Remarque 6.36
On a évidemment un résultat analogue avec un changement de variable strictement décroissant et des bornes inversées.

Comme une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ entre deux intervalles est forcément strictement monotone, l'hypothèse de stricte monotonie est redondante ; mais comme elle est explicitement dans le programme de MPI, il vaut mieux la préciser (de toute façon, elle sera évidente dans les cas pratiques et ne nécessitera pas de longues preuves).

Exercice 6.37

Montrez que $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan t}\,\mathrm{d}t$ converge et qu'on a l'égalité $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{u}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$.

Exercice 6.38

Montrez que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 0.

Déduisez-en la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t$ où $a > 0$.

6.2.4.2 Intégration par parties

Si f est une fonction définie sur $]a\,;b[$ et a des limites finies en a^+ et en b^-, on note $[f]_a^b = \lim\limits_{b^-} f - \lim\limits_{a^+} f$.

Proposition 6.39
Soient a, b des réels ou des infinis tels que $a < b$ et $(f, g) \in \mathscr{C}^1(]a\,;b[\,,\mathbb{K})$.

Si parmi les trois quantités suivantes

$$\int_a^b f'g \qquad \int_a^b fg' \qquad [fg]_a^b$$

deux existent, alors la troisième existe aussi et, dans ce cas, on a l'égalité habituelle

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

.

En pratique, pour éviter d'écrire des choses qui n'ont pas de sens, il vaut mieux revenir à une vraie intégration par parties sur un segment $[x\ ;\ y] \subseteq]a\ ;\ b[$, s'assurer qu'on peut faire tendre x vers a et y vers b, puis le faire effectivement pour obtenir la relation entre les intégrales.

Exercice 6.40
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Montrez que les intégrales u_n convergent, donnez une relation de récurrence simple entre u_n et u_{n+1}, puis donnez la valeur de u_n en fonction de n.

Exercice 6.41
Montrez que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, puis déduisez-en que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

6.2.4.3 Primitives

Proposition 6.42
Soient $f \in \mathscr{C}_m^0(]a\ ;\ b[\,,\mathbb{K})$ et $c \in]a\ ;\ b[$ tel que l'intégrale $\displaystyle\int_a^c f$ converge.

Alors la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f$ est l'unique primitive de f sur $]a\ ;\ b[$ qui a pour limite 0 en a^+.

Proposition 6.43
Soient $f \in \mathscr{C}_m^0(]a\ ;\ b[\,,\mathbb{K})$ et $c \in]a\ ;\ b[$ tel que $\displaystyle\int_c^b f$ converge.

Alors la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_x^b f$ est l'opposée de l'unique primitive de f sur $]a\ ;\ b[$ qui a pour limite 0 en b^-.

Exemple 6.44
- ▹ La fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \ln(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de ln qui a pour limite 0 en 0.
- ▹ La fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{it}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est définie sur $]0\ ;+\infty[$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur cet intervalle, et sa dérivée est la fonction $x \longmapsto -\dfrac{\mathrm{e}^{ix}}{x^2}$.

6.3 Résumé pour étudier la convergence d'une intégrale

On veut savoir si une intégrale $\int_a^b f$ existe, où a et b sont des réels ou des infinis tels que $a < b$.

D'abord, on détermine le plus grand sous-ensemble de $[a\,;b]$ sur lequel f est continue par morceaux :

- si c'est $[a\,;b]$, alors il n'y a aucun problème d'existence de l'intégrale : c'est une bête intégrale classique ;
- si c'est $[a\,;b[$ (avec a réel) ou $]a\,;b]$ (avec b réel), alors il faut étudier le comportement de f au voisinage du point ouvert ;
- si c'est $]a\,;b[$, alors on choisit arbitrairement un point $c \in\,]a\,;b[$ et on se ramène deux fois au cas précédent.

Un petit résultat qui supprime parfois le problème en un point ouvert réel : pensez à étudier la limite de la fonction : si elle est réelle, c'est réglé. On dit qu'on a une fausse singularité en ce point réel.

Proposition 6.45
Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f \in \mathscr{C}_m^0(]a\,;b]\,,\mathbb{K})$.

Si f a une limite réelle en a par valeurs supérieures, alors on peut prolonger f par continuité en a, le prolongement $\overline{f}$ est une fonction continue par morceaux sur $[a\,;b]$ et l'intégrale $\int_a^b f$ converge et vaut $\int_a^b \overline{f}$.

Exercice 6.46
Justifiez que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 6.47
Montrez que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$ converge.

6.4 Fonctions intégrables sur un intervalle

Dans cette section, a et b sont des réels ou des infinis tels que $a < b$. On note $I = \,]a\,;b[$.

6.4.1 Intégrales absolument convergentes

Définition 6.48
Soit $f \in \mathscr{C}_m^0(I, \mathbb{K})$.

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge absolument (ou est absolument convergente) quand l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f|$ converge.

Le théorème suivant est primordial pour la suite du cours.

Théorème 6.49
Soit $f \in \mathscr{C}_m^0(I, \mathbb{K})$.

Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge absolument, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge.

Dans ce cas, on a $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$.

Exercice 6.50
Montrez que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^3}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente et donc convergente.

Exercice 6.51
Montrez que si m est un complexe de partie réelle strictement positive, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-mt}\,\mathrm{d}t$ converge et donnez sa valeur.

Déduisez-en l'existence et la valeur des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Remarque 6.52
La réciproque est fausse ! On a montré que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge et qu'elle ne converge pas absolument.

6.4.2 Fonctions intégrables

Définition 6.53
Soit $f \in \mathscr{C}_m^0(I, \mathbb{K})$.

On dit que f est intégrable sur I quand l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge absolument.

On note alors aussi $\displaystyle\int_I f = \int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f$.

L'ensemble des fonctions intégrables sur I est souvent noté $\mathscr{L}^1(I, \mathbb{K})$, L comme Lebesgue, mathématicien français de la fin du 19ème et début du 20ème siècle. Par abus de notation, on écrit parfois « f est $\mathscr{L}^1$ » pour « f est intégrable sur I ».

Exemple 6.54
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

- La fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[\varepsilon\,;+\infty[$.
  Plus généralement, la fonction $t \longmapsto t^a \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[\varepsilon\,;+\infty[$ (voire $[0\,;+\infty[$ si $a > -1$).
- La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[\varepsilon\,;+\infty[$ ssi $\alpha > 1$ et sur $]0\,;\varepsilon]$ ssi $\alpha < 1$.
- La fonction ln est intégrable sur $]0\,;\varepsilon]$.

Proposition 6.55
$\mathscr{L}^1(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition 6.56 (Stricte positivité de l'intégrale)

Si f est continue, intégrable sur I et $\displaystyle\int_I |f| = 0$, alors $f = 0$.

Par contraposée, si f est continue, intégrable sur I et $f \neq 0$, alors $\displaystyle\int_I |f| > 0$.

6.4.3 Théorème de comparaison des fonctions intégrables

Rappel 6.57
Soient f et g deux fonctions définies au voisinage d'un point $p \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

- $f = \mathcal{O}(g)$ au voisinage de p signifie qu'il existe $K > 0$ et V un voisinage de p tels que
$$\forall x \in V, \ \ |f(x)| \leqslant K\,|g(x)|\,.$$
- $f = o(g)$ au voisinage de p signifie qu'il existe une fonction $\varepsilon > 0$ et V un voisinage de p tels que
$$\forall x \in V, \ \ |f(x)| \leqslant \varepsilon(x)\,|g(x)| \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \longrightarrow p} \varepsilon(x) = 0.$$

Dans le cas où g ne s'annule pas (ce qui, en pratique, est toujours le cas) :

- $f = \mathcal{O}(g)$ au voisinage de p signifie que $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de p.
- $f = o(g)$ au voisinage de p signifie que $\dfrac{f}{g}$ a pour limite 0 en p.

Théorème 6.58
Soit $(f, g) \in \mathscr{C}^0_m(I, \mathbb{K})^2$.

- *Si* $|f| \leqslant |g|$ *sur* I *et si* g *est intégrable, alors* f *est intégrable.*
- *Si* $f = \mathcal{O}(g)$ *au voisinage des bornes ouvertes de* I *et* g *est intégrable, alors* f *est intégrable. C'est vrai en particulier si* $f = o(g)$.
- *Si* $f \sim g$ *au voisinage des bornes ouvertes de* I, *alors il y a équivalence entre l'intégrabilité de* f *et l'intégrabilité de* g.

Exercice 6.59
Montrez que la fonction $t \longmapsto \dfrac{\cos t}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 6.60
La fonction $t \longmapsto \dfrac{\ln t}{\cos t + t^2}$ est-elle intégrable sur $]0\,;+\infty[$?

6.5 Intégration des relations de comparaison

Les résultats présentés portent sur des fonctions intégrables sur $[a\,;+\infty[$. On obtient évidemment des résultats analogues sur les autres types d'intervalles.

6.5.1 Théorème de comparaison par domination

Dans le cas convergent d'abord, les « restes partiels » suivent la même relation de comparaison.

Théorème 6.61
Soient f, g deux fonctions définies sur $[a\,;+\infty[$ avec g à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Si $f = \mathcal{O}(g)$ et g est intégrable sur $[a\,;+\infty[$, alors f est intégrable sur $[a\,;+\infty[$.

De plus, $\displaystyle\int_x^{+\infty} f = \mathcal{O}\left(\int_x^{+\infty} g\right)$ *quand* $x \longrightarrow +\infty$.

Si $f = o(g)$ et g est intégrable sur $[a\,;+\infty[$, alors f est intégrable sur $[a\,;+\infty[$.

De plus, $\displaystyle\int_x^{+\infty} f = o\left(\int_x^{+\infty} g\right)$ *quand* $x \longrightarrow +\infty$.

Dans le cas divergent ensuite, les « intégrales partielles » suivent aussi la même relation de comparaison.

Théorème 6.62
Soient f, g deux fonctions définies sur $[a\,;+\infty[$ avec g à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Si $f = \mathcal{O}(g)$ et f n'est pas intégrable sur $[a\,;+\infty[$, alors g n'est pas intégrable sur $[a\,;+\infty[$.

De plus, $\displaystyle\int_a^{x} f = \mathcal{O}\left(\int_a^{x} g\right)$ *quand* $x \longrightarrow +\infty$.

Si $f = o(g)$ et f n'est pas intégrable sur $[a\,;+\infty[$, alors g n'est pas intégrable sur $[a\,;+\infty[$.

De plus, $\displaystyle\int_a^{x} f = o\left(\int_a^{x} g\right)$ *quand* $x \longrightarrow +\infty$.

6.5.2 Théorème de comparaison par équivalence

Théorème 6.63
Soient f, g deux fonctions définies sur $[a\,;+\infty[$ avec g à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Si $f \sim g$, alors l'intégrabilité de f est équivalente à l'intégrabilité de g.

De plus :

- *si les fonctions sont intégrables, alors les restes partiels sont équivalents :*

$$\int_x^{+\infty} f \underset{x\longrightarrow+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} g$$

- *si les fonctions ne sont pas intégrables, alors les intégrales partielles divergent et sont équivalentes :*

$$\int_a^{x} f \underset{x\longrightarrow+\infty}{\sim} \int_a^{x} g.$$

Chapitre 7

Intégrales à paramètre

Sommaire

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les fonctions dans ce chapitre sont à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On considère dans ce chapitre des intégrales de la forme $\displaystyle\int_a^b f(p,t)\,\mathrm{d}t$ où $f(p,t)$ est une expression qui dépend de deux variables p et t, p pouvant être de n'importe quel type mais t bien sûr réelle. Par habitude, on distingue dans le vocabulaire ces deux variables : t est appelée la variable d'intégration (notez le dt qui le signale) et p est appelée le paramètre.

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(p,t)\,\mathrm{d}t$ est donc une intégrale qui dépend du paramètre p (mais qui ne dépend bien entendu pas de t) et l'objet de ce chapitre est d'étudier des résultats concernant cette dépendance vis-à-vis de p ; en somme, d'étudier des propriétés de l'application $p \longmapsto \displaystyle\int_a^b f(p,t)\,\mathrm{d}t$.

Les sections 2 et 3 étudient surtout le cas où p est un paramètre entier naturel, les suivantes le cas où p est un paramètre réel.

7.1 Introduction

Pour commencer, un exercice d'intervertion de symboles, qui marque le début de l'étude de ce problème général et qui va nous occuper durant quelques chapitres.

Exercice 7.1
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = n^2 \mathrm{e}^{-nx}\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)$.

Pour $x \geqslant 0$, que vaut $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x)$?

Montrez la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ et donnez sa valeur en fonction de n.

Comparez $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x)\right) \mathrm{d}x$.

Quelle conclusion peut-on en tirer ?

7.2 Convergence simple

7.2.1 Convergence simple d'une suite de fonctions

Définition 7.2
Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions définies sur A.

On dit que la suite (f_n) converge simplement sur A quand pour tout $x \in A$, la suite numérique $(f_n(x))$ converge.

Dans ce cas, on peut définir une fonction f sur A en posant, pour tout $x \in A$, $f(x) = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x)$.

La fonction f est alors appelée limite simple sur A de la suite (f_n) et on dit que la suite (f_n) converge simplement vers f sur A.

Exercice 7.3
Étudiez, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la convergence simple de la suite de fonctions $f_n : x \longmapsto \dfrac{n\mathrm{e}^{-x} + x^2}{n + x}$ sur $[0\ ;+\infty[$

Exercice 7.4
Même question avec la suite de fonctions $f_n : x \longmapsto \dfrac{x^n}{1 + x^n}$ sur $[0\ ;+\infty[$.

Exercice 7.5
Même question avec la suite de fonctions $f_n : x \longmapsto n^\alpha x^n (1 - x)$ où α est un réel strictement positif.

7.2.2 Convergence simple d'une série de fonctions

Définition 7.6
Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions définies sur A.

On dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur A quand pour tout $x \in A$, la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge.

Autrement dit, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur A quand la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)$ converge simplement sur A.

Dans ce cas, on peut définir une fonction f sur A en posant, pour tout $x \in A$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

La fonction f est alors appelée (fonction) somme sur A de la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$.

Exercice 7.7
Étudiez, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la convergence simple de la série de fonctions $f_n : x \longmapsto \dfrac{nx^2}{n^3+x^2}$ sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice 7.8
Même question avec la série de fonctions $f_n : x \longmapsto \dfrac{x^n}{1+x^n}$ sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice 7.9
Même question avec la série de fonctions $f_n : x \longmapsto \dfrac{\sin(nx)}{n^3+x^3}$ sur $[0\,;+\infty[$.

7.3 Suites et séries de fonctions intégrables

Dans cette section, tous les théorèmes sont admis (démonstrations très difficiles !).

7.3.1 Théorème de convergence dominée

Théorème 7.10
Soient I un intervalle et (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux sur I.

Si

- *la suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f qui est continue par morceaux sur I*
- *il existe une fonction φ, intégrable sur I et à valeurs positives, telle que*

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\quad |f_n| \leqslant \varphi \text{ sur } I \text{ (hypothèse de domination)}$$

alors les fonctions f et f_n sont toutes intégrables sur I et $\displaystyle\int_I f_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \int_I f$.

L'hypothèse de domination est essentielle ! Il s'agit donc de trouver une fonction φ (dont on dit qu'elle domine la suite (f_n)) intégrable et, surtout, qui ne dépend pas de n !

Exercice 7.11
Montrez que la suite d'intégrales $\displaystyle\left(\int_0^{+\infty} \cos(t)\,\mathrm{e}^{-nt^2}\,\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 1}$ est bien définie et qu'elle converge vers 0.

Exercice 7.12
Montrez que la suite d'intégrales $\displaystyle\left(\int_0^{\pi/2} \sin^n t\,\mathrm{d}t\right)$ converge vers 0.

Exercice 7.13
Montrez que pour tout $n \geqslant 2$, $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^n}$ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$, puis donnez la limite des intégrales quand $n \longrightarrow +\infty$.

Quitte à utiliser la caractérisation séquentielle de la limite, on peut étendre le théorème précédent à des fonctions paramétrées par un réel.

Théorème 7.14
Soient I, A deux intervalles, $\alpha \in \overline{A}$ et $(f_a)_{a\in A}$ une famille de fonctions continues par morceaux sur I.

Si

- *pour tout $x \in I$, $f_a(x) \xrightarrow[a\longrightarrow\alpha]{} f(x)$ où f est une fonction continue par morceaux sur I*
- *il existe une fonction φ intégrable sur I et à valeurs positives, telle que*

$$\text{pour tout } a \in A,\quad |f_a| \leqslant \varphi \text{ sur } I \text{ (hypothèse de domination)}$$

alors les fonctions f et f_a sont toutes intégrables sur I et $\displaystyle\int_I f_a \xrightarrow[a\longrightarrow\alpha]{} \int_I f$.

7.3.2 Théorème d'intégration terme à terme

Théorème 7.15
Soient I un intervalle et (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux sur I.

Si

- *la série* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ *converge simplement sur I vers une fonction continue par morceaux sur I*
- *pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur I*
- *la série numérique* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_I |f_n|$ *converge*

alors la fonction somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est intégrable sur I et* $\displaystyle\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$.

L'hypothèse de convergence de la série des intégrales est essentielle, mais hélas très contraignante. Il arrive souvent qu'il soit plus facile d'utiliser le théorème de convergence dominée sur les sommes partielles de la série de fonctions.

Exercice 7.16
Justifiez l'existence et calculez $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$.

7.4 Fonctions définies par une intégrale à paramètre

On s'intéresse aux propriétés des fonctions définies par des intégrales du type $x \longmapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$. On dit que x est un paramètre de l'intégrale $\displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$.

7.4.1 Continuité

Théorème 7.17
Soient A, I deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : (x,t) \longmapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $A \times I$.

Si

- *pour tout $x \in A$, $t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I*
- *pour tout $t \in I$, $x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur A*

- *il existe une fonction φ intégrable sur I et à valeurs positives, telle que*

$$\text{pour tout } (x,t) \in A \times I, \ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t) \ \text{(hypothèse de domination)}$$

alors pour tout $x \in A$, $t \longmapsto f(x,t)$ est intégrable sur I et la fonction $x \longmapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur A.

Exercice 7.18
Montrez que la fonction $g : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7.19
Montrez que la fonction $h : u \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \operatorname{Arctan}(u + x\ln x)\,\mathrm{d}x$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

7.4.2 Dérivabilité

Théorème 7.20
Soient A, I deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : (x,t) \longmapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $A \times I$.

Si

- *pour tout $x \in A$, $t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I*
- *pour tout $t \in I$, $x \longmapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A*
- *pour tout $x \in A$, $t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I*
- *il existe une fonction φ intégrable et à valeurs positives, telle que*

$$\text{pour tout } (x,t) \in A \times I, \ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \ \text{(hypothèse de domination)}$$

alors la fonction $g : x \longmapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A et pour tout $x \in A$, $g'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 7.21
Montrez que la fonction $g : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x\sin t)\,\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7.22
Montrez que la fonction $g : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \cos\left(xt^2\right) \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Ce théorème est généralisable pour des dérivations d'ordre plus élevé.

Théorème 7.23
Soient A, I deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : (x,t) \longmapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $A \times I$.

Si

- *pour tout $x \in A$, $t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I*
- *pour tout $t \in I$, $x \longmapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur A*
- *pour tout $x \in A$, pour tout $j \in [\![1 ; k-1]\!]$, $t \longmapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I*
- *il existe une fonction φ intégrable sur I et à valeurs positives, telle que*

$$\text{pour tout } (x,t) \in A \times I, \quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \quad \text{(hypothèse de domination)}$$

alors la fonction $g : x \longmapsto \int_I f(x,t)\, \mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur A et pour tout $x \in A$, pour tout $j \in [\![1 ; k]\!]$, $g^{(j)}(x) = \int_I \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\, \mathrm{d}t$.

Exercice 7.24
Montrez que la fonction $g : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \cos\left(xt^2\right) \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

7.5 Domination sur des sous-intervalles

La continuité étant une propriété locale, il est souvent inutile d'avoir une domination globale sur A pour conclure. En général, on peut se contenter de domination sur des parties plus petites que A, en général les segments inclus dans A, ou toute famille recouvrante de parties de A.

Définition 7.25
Soit A un intervalle.

Une famille $\mathscr{F}$ de parties de A est dite recouvrante quand sa réunion est A : $A = \bigcup_{X \in \mathscr{F}} X$.

Proposition 7.26
Soit A un intervalle.

La famille des segments inclus dans A est recouvrante : $A = \displaystyle\bigcup_{(a,b)\in A^2} [a\;;b]$.

On en déduit alors le théorème suivant, dont il vaut mieux à mon avis, sur chaque exercice, présenter le détail des idées.

Théorème 7.27
Soient A, I deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : (x,t) \longmapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $A \times I$.

Soit $\mathscr{F}$ une famille recouvrante de parties de A.

Si

- *pour tout $x \in A$, $t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I*
- *pour tout $t \in I$, $x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur A*
- *pour toute partie F de $\mathscr{F}$, il existe une fonction φ_F intégrable sur I et à valeurs positives, telle que*
$$\text{pour tout } (x,t) \in F \times I,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi_F(t) \text{ (hypothèse de domination)}$$

alors pour tout $x \in A$, $t \longmapsto f(x,t)$ est intégrable sur I et la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur A.

On a de même une version locale des théorèmes de dérivation sous le signe intégrale.

Autrement dit, au lieu de chercher à appliquer les théorèmes précédents directement sur A, on trouve une famille recouvrante de sous-intervalles sur chacun desquels on peut appliquer les théorèmes précédents, conclure à la continuité ou dérivabilité sur chaque sous-intervalle, puis signaler que par réunion, la propriété reste valable sur A.

Exercice 7.28
Montrez que la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $]0\;;+\infty[$.

Exercice 7.29
Montrez que la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+xt)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $[0\;;+\infty[$ et qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0\;;+\infty[$. Donnez une expression simple de $f'(x)$ pour tout $x > 0$.

7.6 Complément : la fonction Γ d'Euler

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose, quand cela a un sens

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt.$$

Cette fonction très courante a les propriétés suivantes :

- ▹ Γ est définie sur $]0 ; +\infty[$
- ▹ Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0 ; +\infty[$
- ▹ pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
- ▹ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$
- ▹ $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
- ▹ il existe un unique $\alpha \in]1 ; 2[$ tel que $\Gamma'(\alpha) = 0$ et Γ est strictement décroissante sur $]0 ; \alpha]$ et strictement croissante sur $]\alpha ; +\infty[$
- ▹ Γ est convexe sur $]0 ; +\infty[$
- ▹ Γ a des limites infinies en 0 et en $+\infty$.

Chapitre 8

Espaces préhilbertiens réels

Sommaire

Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

8.1 Généralités

8.1.1 Produit scalaire

Définition 8.1
On appelle produit scalaire sur E toute application φ de E^2 dans $\mathbb{R}$ qui est

- bilinéaire (linéaire par rapport à chacune de ses deux variables)
- symétrique : pour tout $(x, y) \in E^2,\ \ \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$
- définie-positive : pour tout $x \in E,\ \ \varphi(x, x) \geqslant 0$ et $\varphi(x, x) = 0 \iff x = 0$.

Remarque 8.2
Pour montrer que φ est un produit scalaire, on montre en général d'abord que φ est symétrique, puis qu'elle est linéaire à gauche, la linéarité à droite découlant alors de la symétrie.

Définition 8.3
Quand E est muni d'un produit scalaire, on dit que E est un espace préhilbertien. Quand, de plus, E est de dimension finie, on dit que E est un espace euclidien.

En général, on note $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ les produits scalaires.

8.1.2 Exemples fondamentaux

- Le produit scalaire de la géométrie vérifie toutes ces propriétés.
- Si $E = \mathbb{R}^n$, soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$, on pose $\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$: φ est appelé le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.
- Plus généralement, si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, alors à toute base $\mathscr{B}$ de E, on peut associer un produit scalaire : si x et y sont deux vecteurs de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$, on pose $\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. L'expression matricielle du produit scalaire est alors $\varphi(x, y) = X^\top Y$.
- Si a, b sont deux réels tels que $a < b$, $I = [a\,;b]$ et $E = \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$, alors pour f, g deux éléments de E, on pose $\varphi(f, g) = \int_a^b fg$: φ est un produit scalaire sur E.
- Si I est un intervalle et $E = \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R}) \cap \mathscr{L}^2(I, \mathbb{R})$, ensemble des fonctions f à valeurs réelles, continues sur I et telles que f^2 soit intégrables sur I, alors pour f, g deux éléments de E, on pose $\varphi(f, g) = \int_I fg$: φ est un produit scalaire sur E.
- Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, l'application $(A, B) \longmapsto \operatorname{tr}\left(A^\top B\right)$ est un produit scalaire, c'est même le produit scalaire canonique.

8.1.3 Norme euclidienne

Définition 8.4
Soit E un espace préhilbertien. On note $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ le produit scalaire sur E.

On appelle norme euclidienne assoicée au produit scalaire l'application de E dans $\mathbb{R}_+$ définie par

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}.$$

Remarque 8.5
Cette définition a bien un sens, car d'après les propriétés d'un produit scalaire, pour tout $x \in E, \ \langle x \mid x \rangle \geqslant 0$ donc $\sqrt{\langle x \mid x \rangle}$ existe.

On vérifie alors les résultats suivants, inspirés par la géométrie habituelle dans un triangle ou un parallélogramme.

Proposition 8.6
Avec les mêmes notations, pour tout $(x, y) \in E^2$*,*

- $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x \mid y \rangle$ *(égalité d'Al-Kashi)*
- $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x \mid y \rangle$ *(égalité d'Al-Kashi)*
- $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ *(identité du parallélogramme)*
- $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\langle x \mid y \rangle$ *(identité de polarisation).*

Et encore

Proposition 8.7
Avec les mêmes notations,

- $|\langle x \mid y \rangle| \leqslant \|x\| \|y\|$ *(inégalité de Cauchy-Schwarz)*
- $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire)*
- *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- $\|x\| = 0 \iff x = 0.$

Remarque 8.8
Il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz ssi x et y sont colinéaires.

Il y a égalité dans l'inégalité triangulaire ssi x et y sont colinéaires de même sens.

On dit qu'un vecteur de E est unitaire (ou normalisé) si sa norme vaut 1. À tout vecteur $x \in E \setminus \{0\}$, on associe deux vecteurs unitaires : $\dfrac{x}{\|x\|}$ et $-\dfrac{x}{\|x\|}$.

Exercice 8.9
Soit $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Donnez une inégalité liant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k^2$.

Exercice 8.10
Soit $f \in \mathscr{C}^0\left([a\,;b], \mathbb{R}_+^*\right)$. Montrez que

$$(b-a)^2 \leqslant \left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f}\right).$$

8.1.4 Vecteurs orthogonaux

Définition 8.11
Soit E un espace préhilbertien. On note $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ le produit scalaire sur E.

On dit que deux vecteurs x, y sont orthogonaux (pour ce produit scalaire) quand $\langle x \mid y \rangle = 0$.

On peut alors noter $x \perp y$ pour signifier que x et y sont orthogonaux.

Plus généralement, si $x_1, \dots, x_n$ sont n vecteurs de E, on dit que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille orthogonale quand

$$\text{pour tout } (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2 \text{ tel que } i \neq j,\ \left\langle x_i \,\middle|\, x_j \right\rangle = 0.$$

On retrouve alors le célèbre théorème de Pythagore.

Proposition 8.12
Avec les mêmes notations,

$$x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Exercice 8.13
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension au moins 2 et u, v deux vecteurs non-colinéaires de E.

Montrez qu'il existe un produit scalaire sur E pour lequel u et v sont orthogonaux.

8.2 Bases orthonormées

8.2.1 Familles orthonormées

Définition 8.14
Soit E un espace préhilbertien.

Une famille de vecteurs de E est dite orthonormée (ou orthonormale) quand elle est orthogonale et ses vecteurs sont unitaires.

Proposition 8.15
Une famille orthogonale sans vecteur nul est libre. En particulier, une famille orthonormée est libre.

Une famille orthonormée génératrice de E est donc une base orthonormée de E.

Exercice 8.16
Généralisez l'exercice précédent.

8.2.2 Existence de bases orthonormées

Théorème 8.17
Soit E un espace euclidien.

Il existe dans E des bases orthonormées.

De plus, pour toute base $(v_1, \ldots, v_n)$ de E, il existe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que

$$\text{pour tout } k \in [\![1\,;n]\!]\,,\ \ \mathrm{Vect}\,(v_1, \ldots, v_k) = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_k)\,.$$

La démonstration repose sur l'algorithme d'orthogonalisation/orthonormalisation de Schmidt.

On en déduit le théorème de la base orthonormée incomplète.

Théorème 8.18
Soit E un espace euclidien.

Toute famille orthonormée de E peut être complétée en une base orthonormée de E.

Exercice 8.19
Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, on pose $u = (1, \ldots, n)$.

Complétez la famille u en une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

8.2.3 Calculs en base orthonormée

Soient E un espace euclidien et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.

Soient $x, y \in E$, de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$.

Alors

$$\langle x \mid y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^\top Y \qquad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{X^\top X} \qquad \forall i \in [\![1 \,;\, n]\!]\,,\ \ x_i = \langle x \mid e_i \rangle\,.$$

8.3 Sous-espaces orthogonaux

8.3.1 Orthogonalité de deux sous-espaces vectoriels

Définition 8.20
Soient E un espace préhilbertien, F, G deux sous-espaces vectoriels de E et $u \in E$.

On dit que u est orthogonal (ou normal) à F quand u est orthogonal à tous les vecteurs de F.

On dit que F et G sont orthogonaux quand tout vecteur de F et tout vecteur de G sont orthogonaux, autrement dit quand

$$\text{pour tout } \ (x, y) \in F \times G, \ \ \langle x \mid y \rangle = 0.$$

Proposition 8.21
Si F est de dimension finie et a pour famille génératrice $(v_1, \dots, v_k)$, alors u est orthogonal à F ssi pour tout $i \in [\![1 \,;\, k]\!]$, $\langle u \mid v_i \rangle = 0$.

Proposition 8.22
Si F et G sont orthogonaux, alors ils sont en somme directe : $F \cap G = \{0\}$.

8.3.2 Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Définition 8.23
Soient E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E.

On note $F^\perp$ l'ensemble des vecteurs normaux à F :

$$F^\perp = \{v \in E \mid \forall x \in F, \ \ \langle v \mid x \rangle = 0\}\,.$$

Avec cette notation, on a clairement l'équivalence :

$$F \text{ et } G \text{ sont orthogonaux} \iff F \subseteq G^\perp \text{ ou, ce qui revient au même, } G \subseteq F^\perp.$$

Théorème 8.24
Soient E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E.

Alors $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E, orthogonal à F et donc en somme directe avec F.

Proposition 8.25
Soient E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E.

Alors $F \subseteq \left(F^\perp\right)^\perp$.

Remarque 8.26
En général, $F^\perp$ n'est pas supplémentaire à F et F n'est pas égal à $\left(F^\perp\right)^\perp$.

Remarque 8.27
Dans le cas où F est une droite vectorielle dirigée par un vecteur u, on note plutôt $G = u^\perp$ l'orthogonal de F. Dans ce cas, $u^\perp$ est un hyperplan et on dit alors que u est un vecteur normal à G.

8.4 Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

8.4.1 Projection orthogonale

Définition 8.28
Soient E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

Alors $F^\perp$ est un supplémentaire de F, appelé le supplémentaire orthogonal de F.

Le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$ est appelé le projecteur orthogonal sur F.

La symétrie orthogonale par rapport à F est la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$.

Si on connaît une base orthonormée $\left(e_1, \dots, e_p\right)$ de F, alors il est facile de calculer la projection orthogonale de x sur F :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x \mid e_i \rangle \, e_i.$$

On en déduit l'inégalité de Bessel.

Proposition 8.29
Soient E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

Si p est le projecteur orthogonal sur F, alors pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

8.4.2 Distance à un sous-espace vectoriel

Proposition 8.30
Soient E un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et $x \in E$.

Soit y la projection orthogonale de x sur F.

Pour tout $z \in F$, $\|x - y\| \leqslant \|x - z\|$, avec égalité ssi $z = y$.

Autrement dit, le projeté orthogonal de x sur F est l'unique vecteur de F qui minimise la distance entre x et un point de F.

$\|x - y\|$ est appelé la distance de x à F, c'est la plus petite des distances entre x et un élément de F, notée $d(x, F)$.

Remarque 8.31
Tout ce qui précède est évidemment valable si E est de dimension finie.

Dans ce cas, pour tout sous-espace vectoriel F de E, $F^\perp$ est un supplémentaire de F dans E.

Par conséquent, $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$.

Chapitre 9

Endomorphismes dans un espace euclidien

Sommaire

Dans tout ce chapitre, E désigne un espace euclidien de dimension n, muni du produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$.

9.1 Adjoint d'un endomorphisme

9.1.1 Représentation des formes linéaires

Le théorème suivant est parfois appelé théorème de représentation de Riesz.

Proposition 9.1
Soit φ une forme linéaire sur E.

Il existe un unique vecteur $v \in E$ tel que pour tout $x \in E$, $\varphi(x) = \langle v \mid x \rangle$.

9.1.2 Adjoint

Proposition 9.2
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Il existe un unique endomorphisme $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle f(x) \mid y \rangle = \langle x \mid g(y) \rangle$.

Définition 9.3
L'endomorphisme g est appelé l'adjoint de f est est noté f^*.

Par bilinéarité et symétrie du produit scalaire, on en déduit les propriétés élémentaires de l'adjonction.

Proposition 9.4
- *L'application $f \longmapsto f^*$ est linéaire.*
- *Pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$,* $(f^*)^* = f$.
- *Pour tout* $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$, $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

Exercice 9.5
Montrez que si f est un projecteur orthogonal, alors $f^* = f$.

Exercice 9.6
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Montrez que $\operatorname{Im} f^* = (\ker f)^\perp$ et $\ker f^* = (\operatorname{Im} f)^\perp$.

Comparez $\operatorname{rg} f$ et $\operatorname{rg} f^*$.

Exercice 9.7
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Montrez que $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(f^* \circ f)$.

9.1.3 Matrice de l'adjoint

Proposition 9.8
Soient $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E et $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$.

On a $g = f^* \iff \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(g) = \left(\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f)\right)^\top$.

Remarque 9.9
Attention, ceci n'est valable qu'en base orthonormée. En base quelconque, c'est plus compliqué.

Exercice 9.10
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable.

Montrez l'équivalence

$$f^* = f^2 \iff f \text{ est un projecteur orthogonal.}$$

9.1.4 Stabilité de sous-espaces vectoriels

Une propriété remarquable et utile pour la suite du cours.

Proposition 9.11
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E.

Si F est stable par f, alors $F^\perp$ est stable par f^*.

9.2 Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

Définition 9.12
On dit que deux bases $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ de E ont la même orientation quand $\det_{\mathscr{B}} \mathscr{B}' > 0$, sinon on dit qu'elles sont d'orientations contraires.

Orienter E, c'est choisir une base de référence et déclarer directes toutes les bases qui ont la même orientation que cette base de référence. Les bases de l'autre classe d'équivalence sont dites indirectes (ou rétrogrades).

En géométrie classique, dans le plan ou l'espace, on convient systématiquement d'une orientation.

Dans toute la suite, E désigne un espace euclidien de dimension n. On suppose aussi que E est orienté.

9.3 Isométries vectorielles

Définition 9.13
On appelle isométrie vectorielle (ou automorphisme orthogonal) tout endomorphisme de E qui conserve la norme : pour tout $x \in E, \quad \|f(x)\| = \|x\|$.

Remarque 9.14
L'appellation « automorphisme » n'est pas usurpée.

L'ensemble des isométries vectorielles de E est noté $\mathscr{O}(E)$.

Proposition 9.15
$\mathscr{O}(E)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}(E), \circ)$.

Les symétries orthogonales sont des isométries vectorielles. Parmi celles-ci, on distingue les symétries orthogonales par rapport à un hyperplan : on les appelle les réflexions.

On peut caractériser les isométries vectorielles de diverses façons.

Proposition 9.16
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- ▹ *f est une isométrie vectorielle*
- ▹ *f conserve le produit scalaire : pour tout $(x, y) \in E^2, \quad \langle f(x) \mid f(y) \rangle = \langle x \mid y \rangle$*
- ▹ *f transforme toute base orthonormée en base orthonormée*
- ▹ *f est un automorphisme et $f^* = f^{-1}$, ou, ce qui revient au même : $f^* \circ f = \mathrm{id}_E$.*

Exercice 9.17
Soient E un espace euclidien, $a \in E \setminus \{0\}$ et $k \in \mathbb{R}$. On pose $f : x \longmapsto x + k\langle x \mid a \rangle a$.

Montrez que f est linéaire, puis déterminez les conditions sur a et k pour que f soit une isométrie vectorielle.

Dans ce cas, reconnaissez-la.

9.4 Matrices orthogonales

Proposition 9.18
Soient $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E et $f \in \mathscr{L}(E)$. On pose $A = \operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

On a $f \in \mathscr{O}(E) \iff A^\top A = I_n$.

Attention ! Ceci n'est valable que si la base $\mathscr{B}$ est orthonormée.

Définition 9.19
Une matrice carrée A est dite orthogonale quand $A^\top A = I_n$, ce qui est équivalent à $AA^\top = I_n$ ou A est inversible et $A^{-1} = A^\top$.

Proposition 9.20
Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale quand ses colonnes sont de norme 1 et deux à deux orthogonales pour le produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$.

Cela est également valable pour les lignes de la matrice.

Exercice 9.21
Vérifiez que la matrice $M = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale, puis montrez qu'elle est la matrice d'une symétrie orthogonale donc vous préciserez les éléments caractéristiques.

Exercice 9.22
Déterminez les réels a et b tels que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ soit orthogonale. Reconnaissez la nature de l'isométrie vectorielle de matrice A dans une base orthonormée $\mathscr{B}$.

L'ensemble des matrices orthogonales est noté $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 9.23
$\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$.

9.4.1 Déterminant d'une isométrie vectorielle

Proposition 9.24
Si $f \in \mathcal{O}(E)$*, alors* $\det f \in \{-1, 1\}$.

La réciproque est bien sûr fausse.

Les isométries vectorielles de déterminant 1 sont celles qui conservent l'orientation : les transforment les bases orthonormées directes en bases orthonormées directes. On les appelle les isométries vectorielles directes ou positives.

On note $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1 et $\mathcal{SO}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles positives.

Proposition 9.25
$\mathcal{SO}(E)$ *est un sous-groupe de* $\mathcal{O}(E)$*, appelé groupe spécial orthogonal de* E*.*

$\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ *est un sous-groupe de* $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$*, appelé groupe spécial orthogonal d'ordre* n*.*

Les réflexions sont des isométries négatives.

9.4.2 Changements de bases orthonormées

Proposition 9.26
Soient $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *deux bases orthonormées de* E*.*

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{B}'$ *est une matrice orthogonale.*

L'intérêt de ce genre de changement de bases est que la difficulté liée au calcul de l'inverse de la matrice de passage disparaît :

$X = PX'$ est équivalent à $X' = P^\top X$ donc $A' = P^{-1}AP$ devient $A' = P^\top AP$.

9.4.3 Produit mixte

Proposition 9.27
Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ *une famille de* n *vecteurs de* E*.*

Le déterminant de $(v_1, \ldots, v_n)$ *dans une base orthonormée directe ne dépend pas du choix de cette base.*

Dans ce cas, on appelle produit mixte de $(v_1, \ldots, v_n)$ le déterminant de cette famille dans n'importe quelle base orthonormée directe : il est noté habituellement $\mathrm{Det}(v_1, \ldots, v_n)$ ou $[v_1, \ldots, v_n]$.

Une conséquence directe de la définition du produit mixte est la caractérisation des bases directes.

Proposition 9.28
Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ *une famille de* n *vecteurs de* E*.*

La famille $(v_1, \ldots, v_n)$ *est une base directe de* E *ssi* $[v_1, \ldots, v_n] > 0$*.*

9.4.4 Produit vectoriel en dimension 3

Dans ce paragraphe, $n = 3$.

Proposition 9.29
Soit $(u, v) \in E^2$*.*

Il existe un unique vecteur $w \in E$ *tel que pour tout* $x \in E$*,* $\;[u, v, x] = \langle w \mid x \rangle$*.*

Ce vecteur est appelé le produit vectoriel de u *et* v *et est noté* $u \wedge v$ *ou* $u \times v$*.*

En base orthonormée directe, les coordonnées du produit vectoriel se calculent facilement. En base quelconque, c'est beaucoup plus pénible.

Notons quelques propriétés algébriques et géométriques du produit vectoriel.

Proposition 9.30

- *L'application* $\wedge$ *est bilinéaire et antisymétrique.*
- $u \wedge v = 0$ *ssi* u *et* v *sont colinéaires.*
- *Si* u *et* v *ne sont pas colinéaires, alors* $u \wedge v$ *est un vecteur normal au plan* $\mathrm{Vect}\,(u, v)$ *et la famille* $(u, v, u \wedge v)$ *est une base directe de* E*.*
- *Si* u *et* v *sont unitaires et orthogonaux, alors la famille* $(u, v, u \wedge v)$ *est une base orthonormée directe de* E*.*

9.5 Étude en dimension 2

Proposition 9.31
$\mathcal{O}_2\,(\mathbb{R})$ *contient exclusivement les matrices suivantes :*

- *les matrices de rotation* $R\,(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
- *les matrices de réflexions* $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

où θ est un réel quelconque.

L'ensemble des matrices de rotation forme le sous-groupe $\mathscr{SO}_2(\mathbb{R})$: c'est l'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1.

Il est remarquable que ce groupe est commutatif, car en dimension $n \geqslant 3$, ce n'est plus le cas. En effet, il est facile de constater que l'application $\theta \longmapsto R(\theta)$ est un morphisme surjectif de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathscr{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$ (dont le noyau est le sous-groupe $2\pi\mathbb{Z}$ de $(\mathbb{R}, +)$).

Autrement dit, l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{U} & \longrightarrow & \mathscr{SO}_2(\mathbb{R}) \\ e^{i\theta} & \longmapsto & R(\theta) \end{array}$ est un isomorphisme de groupes.

Proposition 9.32
En dimension 2, les isométries vectorielles sont :

- *les rotations vectorielles*
- *les réflexions vectorielles.*

9.6 Réduction des isométries vectorielles ou des matrices orthogonales

9.6.1 Réduction des isométries vectorielles

D'abord, deux résultats généraux sur les isométries vectorielles.

Proposition 9.33
Soit $f \in \mathscr{O}(E)$. On a :

- $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \{-1, 1\}$
- *Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f, alors $F^\perp$ est aussi un sous-espace vectoriel de E stable par f.*

De ces propriétés découlent le théorème suivant.

Théorème 9.34
Soit $f \in \mathscr{O}(E)$.

Il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs, les blocs étant des scalaires 1 ou -1 ou des matrices $(2, 2)$ de rotation.

Les matrices diagonales par blocs sont donc du type suivant :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & \\ & & & & & & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & & \\ & & & & & & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \cos\theta_k & -\sin\theta_k \\ & & & & & & & & \sin\theta_k & \cos\theta_k \end{pmatrix}.$$

9.6.2 Réduction des matrices orthogonales

Définition 9.35
Soient A, B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit que A et B sont orthogonalement semblables (ou orthosemblables) quand il existe $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP = P^\top AP$.

Deux matrices sont orthosemblables quand elles représentent le même endomorphisme dans des bases orthonormées différentes.

Le théorème de réduction précédent a une traduction matricielle.

Théorème 9.36
Toute matrice orthogonale est orthosemblable à une matrice diagonale par blocs du type ci-dessus.

Pour tout $A \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale par blocs comme ci-dessus telles que $A = P^\top DP$.

9.6.3 Étude en dimension 3

À l'aide de ce résultat, on peut classifier les isométries vectorielles de E en dimension 3. Seule la réduction des rotations est au programme.

Dans la suite de cette section, E est un espace euclidien de dimension 3 et orienté.

Proposition 9.37
Soit $f \in \mathscr{O}(E)$. On pose $F = \ker(f - \mathrm{id}_E)$. Alors

- *si* $\dim F = 3$, *alors* $f = \mathrm{id}_E$

- *si* $\dim F = 2$, *alors* f *est la réflexion par rapport à* F
- *si* $\dim F = 1$, *alors* f *est une rotation d'axe* F
- *si* $\dim F = 0$, *alors* f *est une antirotation, c'est-à-dire la composée d'une rotation et d'une réflexion dont l'axe et le plan de base respectifs sont orthogonaux.*

En étudiant les différents cas, on constate un lien entre le type de f et son déterminant.

Proposition 9.38
Soit $f \in \mathcal{O}(E)$ *telle que* $f \neq \mathrm{id}_E$.

f *est une rotation ssi* $\det f = 1$.

Dans le cas où $\det f = -1$, cette information ne suffit pas à connaître le type de f. Cependant, si on connaît la matrice A de f dans une base orthonormée, alors on peut distinguer les cas 1 et 3.

Proposition 9.39
Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ *et* A *la matrice de* f *dans une base orthonormée.*

Si A *est une matrice orthogonale et symétrique, alors* f *est une symétrie orthogonale.*

- *Si* $\det f = 1$, *alors* A *est un demi-tour (une rotation d'angle* π*).*
- *Si* $\det f = -1$, *alors* A *est une réflexion.*

Donc, si A est orthogonale de déterminant -1 et non-symétrique, alors f est une antirotation.

Exercice 9.40
Reconnaissez la nature de l'endomorphisme dont la matrice dans une base orthonormée $\mathscr{B}$ est $\dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} -11 & 10 & 2 \\ -2 & -5 & 14 \\ 10 & 10 & 5 \end{pmatrix}$ et précisez ses éléments caractéristiques.

Exercice 9.41
Même exercice avec la matrice $\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ 3 & 6 & 2 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

Exercice 9.42
Même exercice avec la matrice $\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 3 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 9.43
Soit $\mathscr{B} = (i, j, k)$ une base orthonormée directe de E de dimension 3.

Déterminez la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de la rotation d'axe orienté par $i + j + k$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

9.7 Endomorphismes auto-adjoints

9.7.1 Définition et propriétés

Définition 9.44
On dit qu'un endomorphisme f de E est auto-adjoint quand $f^* = f$, autrement dit quand

$$\forall (x, y) \in E^2, \ \langle f(x) \mid y \rangle = \langle x \mid f(y) \rangle .$$

On rencontre encore très souvent le mot « symétrique » pour « auto-adjoint ».

Exemple 9.45

- Les projecteurs orthogonaux sont des endomorphismes auto-adjoints (mais pas des endomorphismes orthogonaux !).
- Les symétries orthogonales sont aussi des endomorphismes auto-adjoints.

Proposition 9.46
Soient $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E et $f \in \mathscr{L}(E)$.

f est un endomorphisme auto-adjoint ssi sa matrice dans la base $\mathscr{B}$ est symétrique.

Corollaire 9.47
L'ensemble des endomorphismes auto-adjoints est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$, de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Il est noté $\mathscr{S}(E)$.

9.7.2 Théorème spectral

Il y a essentiellement un seul résultat à connaître sur les endomorphismes auto-adjoints ! On commence par deux lemmes.

Lemme 9.48
Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme auto-adjoint est scindé sur $\mathbb{R}$.

Lemme 9.49
Si un sous-espace vectoriel F est stable par un endomorphisme auto-adjoint, alors $F^{\perp}$ l'est aussi.

Théorème 9.50
Les sous-espaces propres d'un endomorphisme auto-adjoint sont deux à deux orthogonaux et leur somme directe est E.

Autrement dit, tout endomorphisme auto-adjoint est diagonalisable en base orthonormée, c'est-à-dire qu'il existe une base orthonormée de vecteurs propres.

On dit que les endomorphismes auto-adjoints sont orthodiagonalisables.

Remarque 9.51
La réciproque est vraie et presque évidente : si un endomorphisme est orthodiagonalisable, alors il est auto-adjoint.

Exercice 9.52 (Un grand classique à savoir refaire)
Soit u un endomorphisme auto-adjoint de E, B la boule-unité fermée de E et S la sphère-unité de E.

On pose α la plus petite des valeurs propres de u et β la plus grande.

Montrez que $\inf\limits_{x\in S} \langle x \mid u(x)\rangle = \alpha$ et $\sup\limits_{x\in B} \langle x \mid u(x)\rangle = \sup\limits_{x\in S} \langle x \mid u(x)\rangle = \beta$.

Exercice 9.53 (Un prolongement de l'exercice précédent)
Montrez que l'application $N : \mathcal{S}(E) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $N(u) = \sup\limits_{x\in B} |\langle x \mid u(x)\rangle|$ est une norme sur $\mathcal{S}(E)$.

Le théorème précédent a une version matricielle.

Théorème 9.54
Une matrice réelle est orthosemblable à une matrice diagonale ssi elle est symétrique.

On dit que les matrices symétriques réelles sont orthodiagonalisables.

Exercice 9.55
Orthodiagonalisez la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque 9.56
La condition « réelle » est indispensable dans le théorème spectral !

9.8 Endomorphismes auto-adjoints positifs, définis-positifs

9.8.1 Endomorphismes auto-adjoints positifs

Définition 9.57
Soit $f \in \mathcal{S}(E)$.

On dit que f est un endomorphisme auto-adjoint positif quand pour tout $x \in E$, $\langle f(x) \mid x \rangle \geqslant 0$.

On dit que f est un endomorphisme auto-adjoint défini-positif quand pour tout $x \in E \backslash \{0\}$, $\langle f(x) \mid x \rangle > 0$.

On note $\mathcal{S}^{+}(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints positifs et $\mathcal{S}^{++}(E)$ celui des endomorphismes auto-adjoints définis positifs. Attention, ces deux ensembles ne sont pas des espaces vectoriels et ne sont pas stables par composition.

Ces endomorphismes sont couramment présents dans les théories physiques et sont l'objet de propriétés spécifiques.

On donne par exemple une caractérisation simple à l'aide de valeurs propres.

Proposition 9.58
Soit $f \in \mathcal{S}(E)$.

On a $f \in \mathcal{S}^{+}(E)$ ssi les valeurs propres de f sont positives.

De même, $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$ ssi les valeurs propres de f sont strictement positives.

En particulier, $\mathcal{S}^{++}(E) = \mathcal{S}^{+}(E) \cap \mathrm{GL}(E)$.

9.8.2 Matrices symétriques positives

Définition 9.59
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

On dit que A est une matrice symétrique positive quand pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $X^\top AX \geqslant 0$.

On dit que A est une matrice symétrique définie-positive quand pour tout $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $X^\top AX > 0$.

Les matrices symétriques positives (respectivement définies-positives) sont donc les matrices dans des bases orthonormées des endomorphismes auto-adjoints positifs (respectivement définis-positifs).

On note $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ celui des matrices symétriques définies-positives. Attention, ces deux ensembles ne sont pas des espaces vectoriels et ne sont pas stables par produit.

Proposition 9.60
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

On a $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ *ssi les valeurs propres de* A *sont positives.*

De même, $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ *ssi les valeurs propres de* A *sont strictement positives.*

Chapitre 10

Fonctions vectorielles

Sommaire

Dans tout le chapitre, I et J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points et n désigne un entier naturel non-nul.

E et F désignent des espaces vectoriels normés de dimension finie. Par choix d'une base et sachant que les normes sont équivalentes, on peut se ramener à une étude sur $\mathbb{R}^n$.

10.1 Dérivée en un point

10.1.1 Dérivabilité en un point

Définition 10.1
Soient $f : I \longrightarrow E$ et $a \in I$.

On appelle (fonction) taux d'accroissement de f en a l'application

$$\tau_a : \begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array}.$$

On dit que f est dérivable en a quand $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ tend vers une limite $\ell \in E$ quand $x \longrightarrow a$.

Si f est dérivable en a, on appelle dérivée de f en a le vecteur

$$f'(a) = \ell = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Remarque 10.2
Lorsqu'on étudie « à la main » la limite du taux d'accroissement, on effectue très souvent le changement d'origine $h = x - a$ et on étudie $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ quand $h \longrightarrow 0$ (ce qui permet d'utiliser les équivalents ou les développements limités usuels).

10.1.2 Interprétation géométrique, développement limité d'ordre 1, continuité

Proposition 10.3 (Développement limité d'ordre 1 d'une fonction dérivable)
Soient $f : I \longrightarrow E$ et $a \in I$.

f est dérivable en a ssi il existe $m \in E$ tel que $f(x) \underset{x \longrightarrow a}{=} f(a) + (x - a)m + o(x - a)$.

Lorsque ces énoncés sont vrais, on a $f'(a) = m$.

On peut utiliser un développement limité à un ordre au moins 1 en a pour montrer que la fonction est dérivable en a.

Proposition 10.4
Si une fonction est dérivable en a, alors elle est continue en a.

Remarque 10.5
Évidemment, la réciproque est fausse !

Dans le cas où $f'(a) \neq 0$: un vecteur directeur de la droite passant par $f(a)$ et $f(x)$ est par exemple $f(x) - f(a)$, mais aussi $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ quand $x \neq a$.

Autrement dit, f est dérivable en a quand ce vecteur directeur de la droite passant par $f(a)$ et $f(x)$ a une limite dans E, autrement dit, quand la courbe décrite par f a une tangente en a : c'est la droite passant par $f(a)$ et dirigée par $f'(a)$.

Si x représente une variable de temps, le vecteur dérivée $f'(a)$ est le vecteur vitesse instantanée au point a. Son sens donne le sens de parcours de la courbe.

10.1.3 Dérivées à gauche, dérivées à droite

Définition 10.6
Soient $f : I \longrightarrow E$ et $a \in I$.

On dit que f est dérivable à droite (respectivement à gauche) en a quand $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite à droite (respectivement à gauche) dans $\mathbb{R}^n$ quand x tend vers a.

Lorsque f est dérivable à droite (respectivement à gauche) en a, on appelle cette limite la dérivée à droite (respectivement à gauche) de f en a et on la note $f_d'(a)$ (respectivement $f_g'(a)$).

Proposition 10.7
Si f est dérivable à droite (respectivement à gauche) en a, alors f est continue à droite (respectivement à gauche) en a.

En outre, f est dérivable en a ssi f est dérivable à droite et à gauche en a et $f_d'(a) = f_g'(a)$.

Lorsque c'est le cas, $f'(a)$ est égale à la valeur commune de $f_d'(a)$ et $f_g'(a)$.

On peut parler, dans le cas de vecteurs non-nuls, de demi-tangentes à gaucne ou à droite.

10.1.4 Lien avec les coordonnées

E étant de dimension finie, on choisit une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E. Soit $f : I \longrightarrow E$.

On a pour tout $t \in I$, $f(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, e_i$.

On associe ainsi à f ses n fonctions-coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ (qui sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$).

Proposition 10.8
Avec les mêmes notations, il y a équivalence entre « f est dérivable en a » et « les fonctions f_i sont dérivables en a ».

Dans ce cas, on a $f'(a) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i'(a)\, e_i$.

Autrement dit, travailler avec une fonction à valeurs dans E revient à travailler avec n fonctions numériques simultanément.

10.1.5 Théorèmes opératoires

Proposition 10.9
Soient $f : I \longrightarrow E$, $g : I \longrightarrow E$, $a \in I$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Si f et g sont dérivables en a, alors $f+g$ et λf sont dérivables en a et

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a) \qquad (\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)\,.$$

Proposition 10.10
Soient $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f : J \longrightarrow E$ telles que $\varphi(I) \subseteq J$ et $a \in I$.

Si φ est dérivable en a et f est dérivable en $\varphi(a)$, alors $f \circ \varphi$ est dérivable en a et

$$(f \circ \varphi)'(a) = \varphi'(a)\, f'(\varphi(a))\,.$$

Proposition 10.11
Soient $f : I \longrightarrow E$, $L \in \mathscr{L}(E, F)$ et $a \in I$.

Si f est dérivable en a, alors $L \circ f$ l'est aussi et

$$(L \circ f)'(a) = L \circ f'(a)\,.$$

Exemple 10.12
Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et X est une fonction de I dans $\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$ dérivable en a, alors $Y : t \longmapsto AX(t)$ est dérivable en a et $Y'(a) = AX'(a)$.

Proposition 10.13
Soient $f, g : I \longrightarrow E$ et $B : E^2 \longrightarrow F$ bilinéaire.

Si f et g sont dérivables en a, alors (f, g) l'est aussi et $(B(f,g))'(a) = B(f', g)(a) + B(f, g')(a)$.

Exemple 10.14

- Si A et B sont deux fonctions de I dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dérivables en a, alors $M : t \longmapsto A(t)\,B(t)$ est aussi dérivable en a et $M'(a) = A'(a)\,B(a) + A(a)\,B'(a)$.

- Si u et v sont deux fonctions à valeurs dans E, espace euclidien, et dérivables en a, alors $p : t \longmapsto \langle u(t) \mid v(t) \rangle$ est dérivable en a et $p'(a) = \langle u'(a) \mid v(a) \rangle + \langle u(a) \mid v'(a) \rangle$.

Proposition 10.15
Soient $f_1, \ldots, f_p : I \longrightarrow E$, $a \in I$ *et* M *une application* p*-linéaire de* E^p *dans* F.

Si $f_1, \ldots, f_p$ *sont dérivables en* a, *alors* $M\left(f_1, \ldots, f_p\right)$ *l'est aussi et*

$$\left(M\left(f_1, \ldots, f_p\right)\right)'(a) = \sum_{i=1}^{p} M\left(f_1, \ldots, f_i', \ldots, f_p\right)(a).$$

Exemple 10.16
Si M est une fonction de I dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable en $a \in I$, alors $d : t \longmapsto \det M(t)$ est aussi dérivable en a et $d'(a) = \sum_{k=1}^{n} \det M_k^c(a)$ où $M_k^c(a)$ est la matrice obtenue à partir de $M(a)$ en remplaçant sa k-ème colonne par sa dérivée en a.

On a aussi $d'(a) = \sum_{k=1}^{n} \det M_k^{\ell}(a)$ où $M_k^{\ell}(a)$ est la matrice obtenue à partir de $M(a)$ en remplaçant sa k-ème ligne par sa dérivée en a.

10.2 Fonction dérivée

Définition 10.17
Soit $f : I \longrightarrow E$.

- On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point $a \in I$, ce qui revient à dire, après choix d'une base, que les fonctions coordonnées de f sont dérivables sur I.
- Si f est dérivable sur I, on définit sa fonction dérivée par

$$\begin{array}{rccc} f' : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

Proposition 10.18 (Théorèmes d'opérations sur les fonctions dérivables)
Soient f, g *deux fonctions définies sur* I *et* $\lambda \in \mathbb{K}$.

Si f *et* g *sont dérivables sur* I, *alors* $f + g$ *et* λf *sont dérivables sur* I *et*

$$(f+g)' = f' + g' \qquad (\lambda f)' = \lambda f'.$$

Proposition 10.19
Soient $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f : J \longrightarrow E$ telles que $\varphi(I) \subseteq J$.

Si φ est dérivable sur I et f est dérivable sur J, alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur I et
$$(f \circ \varphi)' = \varphi' \times f' \circ \varphi.$$

Proposition 10.20
Soient $f : I \longrightarrow E$ et $L \in \mathscr{L}(E, F)$.

Si f est dérivable sur I, alors $L \circ f$ l'est aussi et $(L \circ f)' = L \circ f'$.

Proposition 10.21
Soient $f, g : I \longrightarrow E$ et $B : E^2 \longrightarrow F$ bilinéaire.

Si f et g sont dérivables sur I, alors $B(f, g)$ l'est aussi et $(B(f, g))' = B(f', g) + B(f, g')$.

Proposition 10.22
Soient $f_1, \ldots, f_p : I \longrightarrow E$ et $M : E^p \longrightarrow F$ p-linéaire.

Si $f_1, \ldots, f_p$ sont dérivables sur I, alors $M\left(f_1, \ldots, f_p\right)$ l'est aussi et
$$\left(M\left(f_1, \ldots, f_p\right)\right)' = \sum_{k=1}^{p} M\left(f_1, \ldots, f_k', \ldots, f_p\right).$$

Exercice 10.23
Montrez que si un point M se déplace sur une sphère de centre A, sa vitesse est toujours orthogonale au vecteur $\overrightarrow{AM}$.

Montrez que la réciproque est vraie : si A est un point fixe et si la vitesse de M est toujours orthogonale au vecteur $\overrightarrow{AM}$, alors M se déplace sur une sphère.

Exercice 10.24
Soit $S : I \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable sur I telle que pour tout $t \in I$, $S(t)$ est une matrice de symétrie.

Montrez que pour tout $t \in I$, $\operatorname{tr}(S(t) S'(t)) = 0$.

Exercice 10.25
Soit $A : I \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dérivable sur I.

Montrez que $B : t \longmapsto A^{-1}(t)$ est dérivable sur I et calculez sa dérivée en fonction de celle de A.

Exercice 10.26
Soit $M : I \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable sur I, intervalle contenant 0. On pose $f : t \longmapsto \det(I_n + tM(t))$.

Justifiez que f est dérivable sur I et calculez $f'(0)$.

10.3 Dérivées successives

10.3.1 Définitions et exemples

Si f est dérivable sur I, f' est une fonction définie sur I. On peut donc essayer de la dériver : quand c'est possible, on obtient la dérivée seconde f'', et ainsi de suite...

Définition 10.27
Soit $f : I \longrightarrow E$. On définit, par récurrence, les notions suivantes :

- Par convention, on dit que f est toujours dérivable 0 fois sur I et on définit la dérivée d'ordre 0 de f par $f^{(0)} = f$.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

  On dit que f est dérivable k fois sur I si elle est dérivable $(k-1)$ fois sur I et que sa dérivée d'ordre $(k-1)$, la fonction $f^{(k-1)}$, est dérivable sur I.

  On définit alors la dérivée d'ordre k par

$$f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)'.$$

Remarque 10.28
$f^{(0)}$ désigne f, $f^{(1)}$ désigne f' et $f^{(2)}$ est aussi notée f''. À partir de trois dérivations, on n'utilise plus de primes.

La dérivée d'ordre k de f est également notée $\dfrac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}t^k}$.

Enfin, il est facile de montrer que f est $(p+q)$ fois dérivable sur I ssi f est p fois dérivable et $f^{(p)}$ est q fois dérivable sur I. Dans ce cas, on a l'égalité

$$\left(f^{(p)}\right)^{(q)} = f^{(p+q)}.$$

Définition 10.29
Soit $k \in \mathbb{N}$.

On dit que f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I si f est dérivable k fois sur I et que $f^{(k)}$ est une fonction continue sur I.

On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I si f est dérivable k fois sur I quel que soit $k \in \mathbb{N}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on notera $\mathscr{C}^k(I, E)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.

Remarque 10.30
« f est de classe $\mathscr{C}^0$ sur I » signifie « f est continue sur I ».

« f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I » signifie « f est dérivable sur I et f' est continue sur I ».

Proposition 10.31
Soient f une fonction définie sur I et $k \in \mathbb{N}^*$.

- *Si f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I, alors pour tout $p \in [\![0\,;\,k]\!]$, f est de classe $\mathscr{C}^p$ sur I.*
- *f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I ssi f est dérivable sur I et f' est de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ sur I, ou, ce qui revient au même, f est de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ sur I et $f^{(k-1)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.*

Les ensembles $\mathscr{C}^k(I,E)$ forment donc une chaîne d'inclusions :

$$\mathscr{C}^\infty(I,E) \subseteq \ldots \subseteq \mathscr{C}^{k+1}(I,E) \subseteq \mathscr{C}^k(I,E) \subseteq \ldots \subseteq \mathscr{C}^1(I,E) \subseteq \mathscr{C}^0(I,E).$$

10.3.2 Théorèmes opératoires pour les dérivées successives

Proposition 10.32
Soient $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $f, g : I \longrightarrow E$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On a :

- *$f+g$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et $(f+g)^{(k)} = f^{(k)} + g^{(k)}$*
- *λf est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et $(\lambda f)^{(k)} = \lambda f^{(k)}$.*

Proposition 10.33
Soient $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f : J \longrightarrow E$.

Si $\varphi(I) \subseteq J$ et φ et f sont de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et J respectivement, alors $f \circ \varphi$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.

Proposition 10.34
Soient $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $f : I \longrightarrow E$ et $L \in \mathscr{L}(E,F)$.

Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur I, alors $L \circ f$ l'est aussi et $(L \circ f)^{(k)} = L \circ f^{(k)}$.

Proposition 10.35
Soient $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $f, g : I \longrightarrow E$ et $B : E^2 \longrightarrow F$ bilinéaire.

Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^k$ sur I, alors $B(f,g)$ l'est aussi et, d'après la formule de Leibniz :

$$(B(f,g))^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B\left(f^{(i)}, g^{(k-i)}\right).$$

10.4 Intégrales

10.4.1 Définition

Définition 10.36
Soit $f : [a ; b] \longrightarrow E$ une fonction définie sur le segment $[a ; b]$.

On dit que f est continue par morceaux sur $[a ; b]$ quand il existe une subdivision $(c_0, \dots, c_n)$ de $[a ; b]$ telle que :

- pour tout $i \in [\![0 ; n-1]\!]$, f est continue sur l'intervalle ouvert $]c_i ; c_{i+1}[$
- f a une limite réelle en a à droite, en b à gauche et des limites réelles à gauche et à droite en chaque point c_i tel que $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

Toute subdivision qui convient dans cette définition est dite adaptée à f.

On choisit une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E. Il est alors évident qu'une fonction à valeurs dans E est continue par morceaux ssi ses fonctions coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ le sont aussi.

Définition 10.37
Soit $f : [a ; b] \longrightarrow E$ continue par morceaux sur $[a ; b]$.

On note $f_1, \dots, f_n$ ses fonctions coordonnées dans la base $\mathscr{B}$, *i.e.* $f = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i$.

On pose alors
$$\int_{[a;b]} f = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{[a;b]} f_i \right) e_i.$$

Bien sûr, les notations classiques pour les intégrales sont conservées : $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, etc.

On pose encore $\int_b^a f = -\int_a^b f$.

Cette définition est *a priori* ambiguë car elle dépend de la base $\mathscr{B}$ choisie. On montre aisément qu'en fait ce n'est pas le cas : on obtient toujours le même vecteur intégrale, indépendamment de la base choisie.

10.4.2 Propriétés

En se ramenant aux coordonnées dans une base, on retrouve les propriétés essentielles de l'intégrale.

Proposition 10.38
L'application $\begin{array}{ccc} \mathscr{C}_m^0([a\,;b]) & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f \end{array}$ *est linéaire.*

Proposition 10.39
La relation de Chasles reste valable : pour tout $(a,b,c) \in I^3$*, si* f *est continue par morceaux sur* I*, alors* $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

On retrouve une inégalité triangulaire avec la norme (n'importe laquelle !).

Proposition 10.40
Soit $f : [a\,;b] \longrightarrow E$ *continue par morceaux sur* $[a\,;b]$.

La fonction $t \longmapsto \|f(t)\|$ *est continue par morceaux sur* $[a\,;b]$ *et à valeurs réelles.*

De plus, on a
$$\left\| \int_a^b f \right\| \leqslant \int_a^b \|f\| .$$

On retrouve la notion de sommes de Riemann.

Proposition 10.41
Soit $f : [a\,;b] \longrightarrow E$ *continue par morceaux.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*, on introduit les sommes de Riemann associées à la fonction* f *sur* $[a\,;b]$ *: pour* $k \in [\![0\,;n]\!]$*, on pose* $c_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ *et*
$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k) \qquad S_n' = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(c_k) \qquad S_n'' = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n} f(c_k) .$$

Les suites (S_n)*,* (S_n') *et* (S_n'') *tendent toutes les trois vers* $\displaystyle\int_{[a;b]} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Enfin, une petite nouveauté.

Proposition 10.42
Soient $f : [a\,;b] \longrightarrow E$ *continue par morceaux et* $L \in \mathscr{L}(E,F)$.

La fonction $L \circ f = L(f)$ *est continue par morceaux et* $\displaystyle\int_a^b L(f) = L\left(\int_a^b f\right)$.

10.4.3 Primitives d'une fonction continue

Proposition 10.43
Soient $f : I \longrightarrow E$ continue et $a \in I$. On pose $\Phi : x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Φ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Remarque 10.44
On a donc montré que si f est continue sur I, alors la fonction $\Phi : x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, car pour tout $x \in I$, $\Phi'(x) = f(x)$, et non pas $\Phi'(x) = f(x) - f(a)$!

Corollaire 10.45
Toute fonction continue sur un intervalle y admet des primitives.

On en déduit l'inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ (dérivable ne suffit pas).

Proposition 10.46
Soit $f : I \longrightarrow E$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

Pour tout $(a, b) \in I^2$, $\|f(b) - f(a)\| \leqslant |b - a| \sup\limits_{[a;b]} \|f'\|$.

10.4.4 Formules de Taylor

On retrouve encore par utilisation des fonctions coordonnées les formules de Taylor usuelles.

La formule de Taylor avec reste intégral.

Proposition 10.47
Soient f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I et $a, b \in I$.

On a

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

L'inégalité de Taylor-Lagrange qui s'en déduit.

Proposition 10.48
Soient f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I et $a, b \in I$.

On a

$$\left\| f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n \right\| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[a;b]} \left\| f^{(n+1)} \right\|.$$

Et la formule de Taylor-Young.

Proposition 10.49
Soit $f : I \longrightarrow E$ de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.

Pour tout $t_0 \in I$, f possède un développement limité en t_0 à l'ordre n : il existe une fonction ε définie sur I et à valeurs dans E telle que

$$\begin{cases} \text{pour tout } t \in I, \quad f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t-t_0) + \dfrac{f''(t_0)}{2}(t-t_0)^2 + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n + (t-t_0)^n \varepsilon(t) \\ \varepsilon(t) \xrightarrow[t \longrightarrow t_0]{} 0 \end{cases}$$

Chapitre 11

Suites et séries de fonctions

Sommaire

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Toutes les fonctions considérées vont de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ dans un premier temps. Dans un second temps, on généralisera les définitions et résultats à des fonctions de $\boldsymbol{E}$ dans $\boldsymbol{F}$, deux espaces vectoriels normés de dimension finies.

11.1 Convergence d'une suite de fonctions

Comme son nom l'indique, une suite de fonctions est une suite (f_n) où f_n est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$.

11.1.1 Convergence simple

Définition 11.1
Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions définies sur A.

On dit que la suite (f_n) converge simplement sur A quand pour tout $x \in A$, la suite numérique $(f_n(x))$ converge.

Dans ce cas, on peut définir une fonction f sur A en posant pour tout $x \in A$, $f(x) = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x)$.

La fonction f est alors appelée limite simple sur A de la suite (f_n) et on dit que la suite (f_n) converge simplement vers f sur A.

On observe la définition formelle de la convergence simple sur A :

$$\forall x \in A, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Le rang n_0 dépend à la fois de x et de ε.

Exercice 11.2
Étudiez la convergence simple de la suite de fonctions $f_n : x \longmapsto \dfrac{n\mathrm{e}^{-x} + x^2}{n + x}$, où $n > 0$, sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice 11.3
Même question avec la suite de fonctions $f_n : x \longmapsto \dfrac{x^n}{1 + x^n}$, où $n > 0$, sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice 11.4
Même question avec la suite de fonctions $f_n : x \longmapsto n^\alpha x^n (1 - x)$, où $n > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, sur $[0\,;1]$.

11.1.2 Convergence uniforme

Rappel 11.5
Si g est une fonction bornée sur une partie A de $\mathbb{R}$, on pose $\|g\|_\infty^A = \sup\limits_{x \in A} |g(x)|$.

$\|\cdot\|_\infty^A$ est une norme sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions bornées sur A, appelée norme infinie ou norme uniforme sur A.

Un résultat essentiel : la majoration de la norme uniforme.

Proposition 11.6
Soient f une fonction bornée sur une partie A de $\mathbb{R}$ et K un réel positif.

On a
$$\|f\|_\infty^A \leqslant K \iff \forall x \in A,\ \ |f(x)| \leqslant K.$$

Définition 11.7
Soient A une partie de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions définies sur A et f une fonction définie sur A.

On dit que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur A quand pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f - f_n$ est bornée sur A et la suite réelle $\left(\|f - f_n\|_\infty^A\right)$ converge vers 0.

La fonction f est alors appelée limite uniforme sur A de la suite (f_n).

On observe la définition formelle de la convergence uniforme sur A :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geqslant n_0,\ \ \forall x \in A,\ \ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Le rang n_0 dépend seulement de ε mais plus de x : c'est le même n_0 pour toutes les valeurs de x, en ce sens, il est uniforme.

Souvent, on ne sait pas calculer les normes uniformes des fonctions $f_n - f$. Une simple majoration suffit, qu'on appelle majoration uniforme.

Définition 11.8
Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions définies sur A.

On appelle majoration uniforme sur A toute proposition du type
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \forall x \in A,\ \ |f_n(x)| \leqslant K_n$$
où K_n est une constante indépendante de x.

Exemple 11.9

- La proposition
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \forall x \in \mathbb{R},\ \ \left|\frac{\sin(nx)}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n}$$
est une majoration uniforme des fonctions $x \longmapsto \dfrac{\sin(nx)}{n}$ sur $\mathbb{R}$.

- La proposition
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \forall x \in \mathbb{R},\ \ \left|\frac{\sin(nx)}{n+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{n+x^2}$$
n'est pas une majoration uniforme des fonctions $x \longmapsto \dfrac{\sin(nx)}{n+x^2}$ sur $\mathbb{R}$ car le majorant dépend de x.

Exercice 11.10
Donnez une majoration uniforme des fonctions $x \longmapsto \dfrac{\ln(1+nx)}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 11.11
Même exercice avec les fonctions $x \longmapsto \dfrac{\sin(nx)}{\sin x}$ sur $]-\pi\,;\pi[\setminus\{0\}$.

Proposition 11.12
Avec les mêmes hypothèses, il y a équivalence entre

- *la suite (f_n) converge uniformément vers f sur A*
- *il existe une suite positive (α_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n - f\|_\infty^A \leqslant \alpha_n$ et $\alpha_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$*
- *il existe une majoration uniforme des fonctions $f_n - f$ sur A par les termes d'une suite numérique positive qui converge vers 0, i.e. on a une proposition du type*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \forall x \in A,\ \ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n \qquad \textit{et} \qquad \alpha_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$$

  où α_n ne dépend pas de x.

Il y a un lien entre convergence simple et uniforme, dans un seul sens !

Théorème 11.13
Si une suite (f_n) converge uniformément vers f sur A, alors (f_n) converge simplement vers f sur A.

La réciproque est fausse ! Contre-exemple : la suite de fonctions $(x \longmapsto x^n)$ sur $[0\,;1]$.

Conséquence : pour étudier la convergence uniforme d'une suite de fonctions, on commence par étudier sa convergence simple, car d'abord on détermine sa limite simple f, puis on cherche à savoir si elle est limite uniforme.

Exercice 11.14
Étudiez la convergence uniforme de la suite de fonctions $f_n : x \longmapsto \dfrac{n\mathrm{e}^{-x} + x^2}{n+x}$, où $n > 0$, sur $[0\,;1]$.

Exercice 11.15
Même question avec la suite de fonctions $f_n : x \longmapsto \dfrac{x^n}{1+x^n}$, où $n > 0$, sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice 11.16
Même question avec la suite de fonctions $f_n : x \longmapsto n^\alpha x^n (1-x)$, où $n > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, sur $[0 ; 1]$.

Pour montrer la non-convergence uniforme, on dispose d'un critère simple suffisant dans bien des cas.

Proposition 11.17
Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge simplement vers f sur une partie A de $\mathbb{R}$.

S'il existe une suite (x_n) à termes dans A telle que la suite $(f(x_n) - f_n(x_n))$ ne converge pas vers 0, alors la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur A.

Exercice 11.18
Montrez que la suite de fonctions $f_n : x \longmapsto x^2 \cos \dfrac{x}{n}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f à préciser.

Montrez que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$, mais qu'elle l'est sur tout segment $[0 ; a]$.

11.2 Convergence d'une série de fonctions

11.2.1 Convergence simple

Définition 11.19
Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions définies sur A.

On dit que la série $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge simplement sur A quand pour tout $x \in A$, la série numérique $\sum_{n \geqslant 0} f_n(x)$ converge.

Autrement dit, la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge simplement sur A quand la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)$ converge simplement sur A.

Dans ce cas, on peut définir une fonction f sur A en posant pour tout $x \in A$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

La fonction f est alors appelée (fonction) somme sur A de la série $\sum_{n \geqslant 0} f_n$.

Exercice 11.20
Étudiez la convergence simple de la série de fonctions $f_n : x \longmapsto \dfrac{nx^2}{n^3 + x^2}$, où $n \geqslant 0$, sur $[0 \,; +\infty[$.

Exercice 11.21
Même question avec la série de fonctions $f_n : x \longmapsto \dfrac{x^n}{1 + x^n}$, où $n > 0$, sur $[0 \,; +\infty[$.

Exercice 11.22
Même question avec la série de fonctions $f_n : x \longmapsto \dfrac{\sin(nx)}{n^3 + x^3}$, où $n > 0$, sur $[0 \,; +\infty[$.

11.2.2 Convergence uniforme

On a la même définition en remplaçant « simple » par « uniforme ».

Définition 11.23
Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions définies sur A.

On dit que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur A quand la suite des sommes partielles $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} f_k\right)$ converge uniformément sur A.

La fonction somme f est alors appelée limite uniforme sur A de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$.

Encore une fois, il y a un lien entre la convergence simple et uniforme, dans un seul sens !

Théorème 11.24
Si une série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur A, alors $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ converge simplement sur A.

La réciproque est fausse ! Contre-exemple : la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 0} (x \longmapsto x^n)$.

On peut réécrire la définition à l'aide des restes partiels.

Proposition 11.25
Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur A quand la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur A et la suite des restes partiels $\left(\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k\right)$ converge uniformément vers 0 sur A, i.e. $\left\|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k\right\|_\infty^A \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$.

Il suffit donc qu'il existe une suite positive (α_n) telle que $\left\|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k\right\|_\infty^A \leqslant \alpha_n$ et $\alpha_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$ pour que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément vers f sur A.

Autrement dit, il suffit de trouver une majoration uniforme des restes partiels par les termes d'une suite positive qui converge vers 0.

Exercice 11.26
Étudiez la convergence uniforme de la série de fonctions $f_n : x \longmapsto \dfrac{(-1)^n}{x+n}$, où $n > 0$, sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice 11.27
Même question avec la série de fonctions $f_n : x \longmapsto \dfrac{(-1)^n\,\mathrm{e}^{-nx}}{n}$, où $n > 0$, sur $[0\,;+\infty[$.

De manière analogue aux séries numériques, on note le lien entre la convergence uniforme d'une série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et la convergence uniforme de la suite (u_n).

Proposition 11.28
Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et (u_n) une suite de fonctions définies sur A.

Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge uniformément sur A, alors la suite (u_n) converge uniformément vers 0.

Évidemment, la réciproque est fausse.

11.2.3 Convergence normale

Ce dernier type de convergence est spécifique aux séries de fonctions.

Définition 11.29
Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions définies sur A.

On dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur A quand la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} \|f\|_\infty^A$ converge.

Souvent, on ne sait pas calculer les normes uniformes des fonctions f_n. Une simple majoration suffit.

Proposition 11.30
Avec les mêmes hypothèses, il y a équivalence entre

- *la série* $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ *converge normalement sur* A
- *il existe une suite positive* (α_n) *telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty^A \leqslant \alpha_n$ *et la série* $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n$ *converge*
- *il existe une majoration uniforme des fonctions* f_n *sur* A *par les termes d'une série positive convergente.*

Il y a un lien entre convergence uniforme et normale, dans un seul sens !

Théorème 11.31
Si une série de fonctions converge normalement sur A*, alors elle converge uniformément sur* A*. Elle converge aussi absolument sur* A*.*

La réciproque est fausse ! Contre-exemple : la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 2} \left(x \longmapsto \frac{x^n}{\ln n} - \frac{x^{n+1}}{\ln(n+1)} \right)$ converge uniformément sur $[0\,;\,1]$ mais pas normalement.

En pratique, il est souvent plus simple de montrer la convergence normale que la convergence uniforme d'une série. On commence donc par étudier la convergence simple, puis la convergence normale et, en cas d'échec, la convergence uniforme.

Exercice 11.32
Étudiez la convergence uniforme de la série de fonctions $f_n : x \longmapsto \frac{nx^2}{n^3+x^2}$, où $n > 0$, sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice 11.33
Même question avec la série de fonctions $f_n : x \longmapsto \frac{x^n}{1+x^n}$, où $n > 0$, sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice 11.34
Même question avec la série de fonctions $f_n : x \longmapsto \frac{x^2}{1+n^3x^3}$, où $n > 0$, sur $[0\,;+\infty[$.

11.3 Propriétés de la fonction limite

11.3.1 Monotonie

Proposition 11.35
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions définies sur I.

Si la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction f sur I et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est croissante sur I, alors f est croissante sur I.

On a évidemment le même résultat avec l'hypothèse et la conclusion de décroissance.

11.3.2 Continuité

Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge simplement vers f sur A.

En général, même si les fonctions f_n sont des fonctions continues, on ne peut rien affirmer à propos de la continuité de f. Contre-exemple : la suite de fonctions $(x \longmapsto x^n)$ sur $[0\,;1]$.

Le théorème suivant donne une condition suffisante pour que f soit continue sur A.

Théorème 11.36
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions définies sur I.

Si

- *la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers une fonction f sur I*
- *pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I*

alors f est continue sur I.

On en déduit la version correspondante de ce théorème sur les séries de fonctions.

Corollaire 11.37
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions définies sur I.

Si

- *la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur I*
- *pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I*

alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I.

Exercice 11.38
Montrez que la fonction $f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(nx)}{n^2}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle y est continue.

Exercice 11.39
Même exercice avec $f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 11.40
Montrez que la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x} \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Arctan}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{n^2}\right)$ est bien définie et continue sur $[0 ; +\infty[$, que f est intégrable sur $[0 ; +\infty[$, et que $\int_0^{+\infty} f = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\operatorname{Arctan} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^2} \ln\left(1 + n^4\right)\right)$.

La continuité étant une propriété locale, il est souvent inutile d'avoir une convergence uniforme globale pour conclure. En général, on peut se contenter de convergence uniforme sur des parties plus petites que I, en général les segments inclus dans I ou toute famille recouvrante de parties de I.

Définition 11.41
Soit I un intervalle.

Une famille $\mathscr{F}$ de parties de I est dite recouvrante quand $I = \bigcup_{X \in \mathscr{F}} X$.

Proposition 11.42
Soit I un intervalle.

La famille des segments inclus dans I est recouvrante : $I = \bigcup_{(a,b) \in I^2} [a ; b]$.

On en déduit alors le théorème suivant, dont il vaut mieux, à mon avis, présenter le détail des idées sur chaque exercice.

Théorème 11.43
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions définies sur I et $\mathscr{F}$ une famille d'intervalles recouvrant I.

Si

- *pour toute partie $X \in \mathscr{F}$, la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers une fonction f sur X*

▹ *pour tout* $n \in \mathbb{N},\ \ f_n$ *est continue sur* I

alors f *est continue sur* I.

En pratique, on choisit pour $\mathscr{F}$ une famille d'intervalles adaptés au problème (voir les nombreux exemples en exercice).

Exercice 11.44
Pour $x > 0$, on pose $u_0(x) = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1}(x) = \operatorname{Arctan}(x + u_n(x))$.

Montrez que la suite $(u_n(x))$ converge vers un réel $\varphi(x)$.

Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N},\ \ |u_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \dfrac{x + \pi/2}{(1+x^2)^n}$.

Déduisez-en que φ est continue sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 11.45
Montrez que la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(1+nx)}{n^2}$ est définie et continue sur $[0\,;+\infty[$.

11.3.3 Intervertion de limite et d'intégrale

Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge simplement vers f sur un segment $[a\,;b]$.

En général, même si les fonctions f_n sont des fonctions continues par morceaux, on ne peut rien affirmer à propos de la continuité par morceaux de f. Et même si on le peut (*cf.* théorème précédent), il n'y a *a priori* aucun rapport entre $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_a^b f_n$ et $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b \left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n\right)$: on ne peut en général pas intervertir une limite et une intégrale.

Exercice 11.46
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0\,;1]$, on pose $f_n(x) = n^2x^n(1-x)$.

Montrez que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction f et vérifiez que $\displaystyle\int_0^1 f = \int_0^1 \left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n\right) \neq \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^1 f_n$.

Le théorème suivant donne une condition suffisante pour que cela soit faisable.

Théorème 11.47
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions définies qui converge simplement vers une fonction f sur I et $a \in I$.

Si

- *la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment inclus dans I*
- *pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I*

alors f est continue sur I et la suite des primitives qui s'annulent en a, i.e. $\left(x \longmapsto \int_a^x f_n\right)$, converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers la primitive de f qui s'annule en a, i.e. $x \longmapsto \int_a^x f$.

On en déduit les corollaires sur l'intervertion de limite et d'intégrale.

Corollaire 11.48
Soient a, b deux réels et (f_n) une suite de fonctions définies sur $[a\,;b]$.

Si

- *la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers une fonction f sur $[a\,;b]$*
- *pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a\,;b]$*

alors f est continue sur $[a\,;b]$ et

$$\int_a^b f = \int_a^b \left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n\right) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_a^b f_n.$$

On rappelle qu'un symbole $\sum^{+\infty}$ est une limite : $\sum^{+\infty} = \lim_{N\longrightarrow+\infty} \sum^{N}$. On ne peut donc pas intervertir sans précaution un symbole $\sum^{+\infty}$ et une intégrale.

Corollaire 11.49
Soient a, b deux réels et (f_n) une suite de fonctions définies sur $[a\,;b]$.

Si

- *la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $[a\,;b]$*
- *pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a\,;b]$*

alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est continue sur* $[a\,;\,b]$*, la série des intégrales* $\sum_{n\geqslant 0} \int_a^b f_n$ *est convergente et*

$$\int_a^b f = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n.$$

On appelle aussi ce résultat le théorème d'intégration terme à terme sur un segment.

Remarque 11.50
Ces deux théorèmes ne sont valables que sur des segments, donc pour de vraies intégrales. Ils sont faux si on se place sur des intervalles autres et donc si on parle d'intégrales généralisées.

Exercice 11.51
Quelle est la limite de $\displaystyle\int_0^1 \frac{n\cos x/n}{n+x^n}\,\mathrm{d}x$ quand $n \longrightarrow +\infty$?

Exercice 11.52
Montrez que la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, x^{n+1}}{n}$ est définie et continue sur $[0\,;\,1]$, puis justifiez $\displaystyle\int_0^1 f = \frac{-1}{4}$.

Exercice 11.53

Montrez que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = \int_0^1 \frac{1}{2-x}\,\mathrm{d}x$ et donnez-en une valeur concrète.

Exercice 11.54
On pose $f_n : x \longmapsto \dfrac{x^n \mathrm{e}^{-x}}{n!}$.

Montrez que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0\,;\,+\infty[$.

Justifiez la convergence des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n$ et déterminez leur limite quand $n \longrightarrow +\infty$.

11.3.4 Intervertion de limites

De même, il est faux en général que $\lim\limits_{x\longrightarrow a}\left(\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)\right) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left(\lim\limits_{x\longrightarrow a} f_n(x)\right)$: on ne peut en général pas intervertir deux limites.

Exemple 11.55
On pose, pour tout $(x,n) \in [0\,;1[\times\mathbb{N},\ u_n(x) = \dfrac{x+x^n}{1+nx^n}$.

D'une part, pour tout $x \in [0\,;1[$, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n(x) = x$ donc $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\left(\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n(x)\right) = 1$.

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} u_n(x) = \dfrac{2}{n+1}$ donc $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left(\lim\limits_{x\longrightarrow 1} u_n(x)\right) = 0$.

Encore une fois, grâce à la convergence uniforme, c'est possible. Cependant, les résultats sont admis car plus difficiles à montrer : ce sont les théorèmes de double limite.

Théorème 11.56
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a une extrémité de I et (f_n) une suite de fonctions définies sur I.

Si

- ▹ *la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers une fonction f sur I*
- ▹ *pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n a pour limite finie ℓ_n en a*

alors la suite (ℓ_n) a une limite finie ℓ et f a pour limite ℓ en a :

$$\lim_{x\longrightarrow a}\left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\lim_{x\longrightarrow a} f_n(x)\right) = \ell.$$

On en déduit la version correspondante sur les séries de fonctions.

Corollaire 11.57
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a une extrémité de I et (f_n) une suite de fonctions définies sur I.

Si

- ▹ *la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur I*
- ▹ *pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n a pour limite finie ℓ_n en a*

alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \ell_n$ converge et, en notant ℓ la somme de cette série, la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ a pour limite ℓ en a :

$$\lim_{x\longrightarrow a}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{x\longrightarrow a} f_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n.$$

Exercice 11.58
Montrez que la fonction $f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{Arctan}(nx)}{n^4}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, puis déterminez la valeur de sa limite en $+\infty$ (on admettra que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$).

11.3.5 Dérivabilité

La situation est encore plus délicate : une dérivée étant une limite, intervertir une dérivation et une limite est en général impossible.

D'abord, la limite simple d'une suite de fonctions dérivables n'est pas forcément dérivable. Il est raisonnable de se dire que si on remplace la limite simple par une limite uniforme, comme dans les théorèmes précédents, on obtient le résultat.

Et bien non !

On peut montrer qu'il existe des suites de fonctions dérivables qui converge uniformément vers des fonctions non-dérivables (difficilement, car il faut construire des fonctions qui sont continues mais dérivables nulle part).

De même, il existe une suite de fonctions dérivables (f_n) qui converge uniformément vers une fonction dérivable f, mais la suite des dérivées $\left(f_n'\right)$ ne converge pas vers la dérivée f' : par exemple la suite des fonctions $x \longmapsto \frac{\sin(nx)}{n}$ sur $\left[\frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Pour obtenir un résultat vraiment utile, il faut supposer plus que dérivable, *i.e.* de classe $\mathscr{C}^1$, et imposer la convergence uniforme sur les dérivées.

Théorème 11.59
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions définies sur I.

Si

- *les fonctions f_n sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I*
- *la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I*
- *la suite des dérivées $\left(f_n'\right)$ converge uniformément sur I*

alors $f = \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et

$$f' = \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n'.$$

On en déduit la version correspondante sur les séries de fonctions.

Corollaire 11.60
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions définies sur I.

Si

- *les fonctions f_n sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I*
- *la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur I*
- *la série des dérivées $\sum_{n\geqslant 0} f_n'$ converge uniformément sur I*

alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'.$$

On appelle aussi ce résultat le théorème de dérivation terme à terme.

Exercice 11.61
Montrez que la fonction $f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(1+nx)}{n^2}$ est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1\,;+\infty[$. Que vaut $f'(1)$?

Remarque 11.62
Là encore, le caractère $\mathscr{C}^1$ d'une fonction est une propriété locale. Donc tout ce qui a été signalé à propos de la continuité sur des parties d'une famille recouvrante reste valable. En pratique, on choisit des intervalles adaptés au problème.

Exercice 11.63
Montrez que la fonction de l'exercice précédent est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.

11.3.6 Dérivation à un ordre plus élevé

Théorème 11.64
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$ et (f_n) une suite de fonctions définies sur I.

Si

- *les fonctions f_n sont de classe $\mathscr{C}^k$ sur I*
- *pour tout $j \in [\![0 ; k-1]\!]$, la suite de fonctions $\left(f_n^{(j)}\right)$ converge simplement sur I*
- *la suite des dérivées k-èmes $\left(f_n^{(k)}\right)$ converge uniformément sur I*

alors $f = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et pour tout $j \in [\![1 ; k]\!]$,

$$f^{(j)} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n^{(j)}.$$

On en déduit la version correspondante sur les séries de fonctions.

Corollaire 11.65
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$ et (f_n) une suite de fonctions définies sur I.

Si

- *les fonctions f_n sont de classe $\mathscr{C}^k$ sur I*
- *pour tout $j \in [\![0 ; k-1]\!]$, la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n^{(j)}$ converge simplement sur I*
- *la série des dérivées k-èmes $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n^{(k)}$ converge uniformément sur I*

alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et pour tout $j \in [\![1 ; k]\!]$,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}.$$

11.4 Généralisation

Dans cette section, E et F sont deux espaces vectoriels normés de dimension finie et les fonctions considérées vont de E dans F.

On étend sans peine les définitions de convergence simple et uniforme. Il suffit de remplacer les valeurs absolues ou modules par les normes.

11.4.1 Convergence simple

Définition 11.66
Soient A une partie de E et (f_n) une suite de fonctions définies sur A.

On dit que la suite (f_n) converge simplement sur A quand pour tout $x \in A$, la suite vectorielle $(f_n(x))$ converge dans F.

Dans ce cas, on peut définir une fonction f sur A en posant pour tout $x \in A$, $f(x) = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x)$.

La fonction f est alors appelée limite simple sur A de la suite (f_n) et on dit que la suite (f_n) converge simplement vers f sur A.

On adapte de même la définition de convergence simple d'une série de fonctions à valeurs dans F.

11.4.2 Convergence uniforme

Rappel 11.67
Si g est une fonction bornée sur une partie A de E, on pose $\|g\|_\infty^A = \sup\limits_{x \in A} \|g(x)\|$.

$\|\cdot\|_\infty^A$ est une norme sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions bornées sur A, appelée norme infinie ou norme uniforme sur A.

Définition 11.68
Soient A une partie de E, (f_n) une suite de fonctions définies sur A et f une fonction définie sur A.

On dit que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur A quand pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f - f_n$ est bornée sur A et la suite réelle $\left(\|f - f_n\|_\infty^A\right)$ converge vers 0.

La fonction f est alors appelée limite uniforme sur A de la suite (f_n).

On adapte de même la définition de convergence uniforme d'une série de fonctions à valeurs dans F.

11.4.3 Convergence normale des séries

Définition 11.69
Soient A une partie de E et (f_n) une suite de fonctions définies sur A.

On dit que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ converge normalement sur A quand la série numérique $\sum\limits_{n \geqslant 0} \|f_n\|_\infty^A$ converge.

Théorème 11.70
Si une série de fonctions converge normalement sur A, alors elle converge uniformément (et donc simplement) sur A.

11.4.4 Résultats préservés

Tous les résultats sur la continuité et la double limite restent valables pour des fonctions de E quand F.

Tous les résultats sur la primitivation, l'intégration sur des segments, la dérivation $\mathscr{C}^1$ ou, plus généralement $\mathscr{C}^k$, restent valables pour des fonctions de $\mathbb{R}$ dans F.

11.5 Approximation uniforme

11.5.1 Densité des fonctions en escaliers dans les fonctions continues par morceaux

On a déjà rencontré des exemples d'approximation uniforme en première année pour des fonctions à valeurs réelles. En travaillant sur les coordonnées, on peut généraliser ce résultat.

Théorème 11.71
Toute fonction continue par morceaux sur un segment est approchable uniformément par des fonctions en escaliers.

Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a\ ;\ b]$ et à valeurs dans F. Il existe une suite de fonctions en escaliers sur $[a\ ;\ b]$ qui converge uniformément vers f sur $[a\ ;\ b]$.

Avec le vocabulaire des espaces vectoriels normés, on peut retraduire ce résultat.

Proposition 11.72
Dans l'espace des fonctions bornées $\mathscr{B}([a\ ;\ b], F)$, muni de la norme infinie, le sous-espace des fonctions en escaliers $\mathrm{Esc}([a\ ;\ b], F)$ *est dense dans le sous-espace des fonctions continues par morceaux $\mathscr{C}_m^0([a\ ;\ b], F)$.*

Autrement dit

$$\forall f \in \mathscr{C}_m^0([a\ ;\ b], F),\ \ \forall \varepsilon > 0,\ \ \exists \varphi \in \mathrm{Esc}([a\ ;\ b], F),\ \ \|f - \varphi\|_\infty^{[a;b]} \leqslant \varepsilon.$$

En application, un exercice classique : le lemme de Lebesgue (Centrale - Mines).

Exercice 11.73
Soit $f : [a\ ;\ b] \longrightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux. Montrez que $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0$.

11.5.2 Densité des polynômes sur un segment dans les fonctions continues

Il s'agit du théorème de Stone-Weierstrass.

Théorème 11.74
Toute fonction continue sur un segment est approchable uniformément par des fonctions polynômes.

Soit f une fonction continue sur un segment $[a\ ;\ b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Il existe une suite de fonctions polynômes sur $[a\ ;\ b]$ qui converge uniformément vers f sur $[a\ ;\ b]$.

Avec le vocabulaire des espaces vectoriels normés, on peut retraduire ce résultat (en identifiant les polynômes et les fonctions polynômes sur un segment, ce qui est loisible car un segment est un ensemble infini).

Proposition 11.75
Dans l'espace des fonctions bornées $\mathscr{B}\left([a\ ;\ b], \mathbb{K}\right)$, muni de la norme infinie, le sous-espace des fonctions polynômes $\mathscr{P}\left([a\ ;\ b], \mathbb{K}\right) = \mathbb{K}[X]$ est dense dans le sous-espace des fonctions continues $\mathscr{C}^0\left([a\ ;\ b], \mathbb{K}\right)$.

Autrement dit

$$\forall f \in \mathscr{C}^0\left([a\ ;\ b], \mathbb{K}\right),\ \ \forall \varepsilon > 0,\ \ \exists P \in \mathbb{K}[X],\ \ \|f - P\|_\infty^{[a;b]} \leqslant \varepsilon.$$

En application, un exercice classique (CCP).

Exercice 11.76
Soit $f : [a\ ;\ b] \longrightarrow \mathbb{K}$ continue telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_a^b t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Montrez que $f = 0$.

Chapitre 12

Séries entières

Sommaire

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux séries de fonctions de la forme $x \longmapsto a_n x^n$, qu'on appelle des séries entières.

Par abus de notations, on les note sous la forme $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

Lorsque la variable est complexe, on la note systématiquement z et on parle des séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

12.1 Convergence simple d'une série entière

12.1.1 Rayon de convergence

On commence par le lemme d'Abel.

Proposition 12.1
Soient (a_n) une suite de complexes et z_0 un complexe.

Si la suite $\left(a_n z_0^n\right)$ est bornée, alors pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série numérique $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument.

Définition 12.2
Soit (a_n) une suite de complexes. On pose $M = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{la suite } \left(a_n r^n\right) \text{ est bornée}\}$.

M est une partie non-vide de $\mathbb{R}$ car elle contient 0.

Si elle est majorée, on appelle rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ le réel $R = \sup M$.

Sinon, on pose $R = +\infty$.

On peut préciser la convergence simple d'une série entière.

Proposition 12.3
Soit (a_n) une suite de complexes. On pose R le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

- *si $|z| < R$, alors la série numérique $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument*
- *si $|z| > R$, alors la série numérique $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ diverge grossièrement*
- *si $|z| = R$, alors on ne peut rien dire a priori.*

Définition 12.4
Soit (a_n) une suite de complexes. On pose R le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$.

Si $R > 0$, on appelle disque ouvert de convergence l'ensemble $D\,(0, R) \subseteq \mathbb{C}$ et intervalle ouvert de convergence l'ensemble $]-R\,;R[\, \subseteq \mathbb{R}$.

Exemple 12.5
- Le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} z^n$ est égal à 1 et pour tout $z \in D\,(0, 1)$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n = \dfrac{1}{1-q}$.
- Le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{z^n}{n!}$ est égal à $+\infty$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z$.

12.1.2 Détermination du rayon de convergence

La réciproque de la Proposition 12.3 est vraie.

Proposition 12.6
Soient (a_n) une suite de complexes et R un réel strictement positif.

Si

- *pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| < R$, *la série numérique* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *converge*
- *pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| > R$, *la série numérique* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *diverge*

alors R est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

De même, on peut donner quelques résultats pratiques découlant de la définition.

Proposition 12.7
Soient (a_n) une suite de complexes et R un réel strictement positif.

Si

- *pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| < R$, *la série numérique* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *converge*
- *il existe* $z_0 \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z_0| = R$ *et la série* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z_0^n$ *diverge*

alors R est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

Proposition 12.8
Soient (a_n) une suite de complexes et R un réel strictement positif.

Si

- *il existe* $z_0 \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z_0| = R$ *et la série* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z_0^n$ *converge*
- *pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| > R$, *la série numérique* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *diverge*

alors R est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

Exercice 12.9
Donnez le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 0} n z^n \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n} \qquad \sum_{n\geqslant 0} n!\, z^n \qquad \sum_{n\geqslant 0} 2^n z^{2n} \qquad \sum_{n\geqslant 0} \cos^2(n)\, z^n.$$

12.1.3 Comparaison de séries entières

Proposition 12.10
Soient $(a_n), (b_n)$ deux suites de complexes.

On pose R_a, R_b les rayons de convergence des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$.

Si $a_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{=} \mathcal{O}(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$.

En particulier, si $|a_n| \leqslant |b_n|$, alors $R_a \geqslant R_b$.

Si $a_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} b_n$, alors $R_a = R_b$.

Remarque 12.11
Comme le rayon de convergence se calcule en référence à la convergence absolue de la série, il suffit que $|a_n| \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} |b_n|$ pour avoir $R_a = R_b$.

Exercice 12.12
Donnez le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{n^2+1} z^n$.

Exercice 12.13
Même question avec la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$.

Un cas favorable très courant qui permet de calculer le rayon de convergence par utilisation de la règle de D'Alembert, particulièrement utile quand le coefficient a_n s'écrit à l'aide de produits ou de quotients.

Proposition 12.14
Soit (a_n) une suite de complexes qui ne s'annule pas.

Si la suite $\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)$ converge

- *vers un réel $\ell > 0$, alors $R_a = \frac{1}{\ell}$*
- *vers 0, alors $R_a = +\infty$.*

Exercice 12.15
Donnez le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{2^n+1}{n^2+1} z^n$.

Exercice 12.16
Même question avec la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n} z^{2n}$.

12.1.4 Opérations sur les séries entières

Proposition 12.17
Soient $(a_n), (b_n)$ *deux suites de complexes et* $\lambda \in \mathbb{C}$.

On pose R_a, R_b *les rayons de convergence des séries entières* $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ *et* $\sum_{n \geqslant 0} b_n z^n$.

On a

$$R_{a+b} \geqslant \min(R_a, R_b)$$

et

$$R_{\lambda a} \geqslant R_a$$

avec égalité si $\lambda \neq 0$

Par conséquent, l'ensemble des séries entières qui convergent sur un disque $D(0, R)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Proposition 12.18
Soient $(a_n), (b_n)$ *deux suites de complexes.*

On pose R_a, R_b *les rayons de convergence des séries entières* $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ *et* $\sum_{n \geqslant 0} b_n z^n$.

On pose (c_n) *le produit de Cauchy des suites* (a_n) *et* (b_n).

Alors la série entière $\sum_{n \geqslant 0} c_n z^n$ *est le produit de Cauchy des séries* $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ *et* $\sum_{n \geqslant 0} b_n z^n$ *et* $R_c \geqslant \min(R_a, R_b)$.

Exercice 12.19
Calculez le produit de Cauchy de la série $\sum_{n \geqslant 0} z^n$ avec elle-même.

Donnez la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} n z^n$ quand elle a un sens.

Remarque 12.20
Le résultat énoncé ici est utilisable avec des séries $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$: on commence à $n = 0$!

Dans le cas général, on s'y ramène en ajoutant des termes nuls au début des séries : si on veut faire le produit de Cauchy de deux séries $\sum_{n \geqslant n_1} a_n z^n$ et $\sum_{n \geqslant n_2} b_n z^n$, on pose $a_0 = \cdots = a_{n_1 - 1} = 0$ et $b_0 = \cdots = b_{n_2 - 1} = 0$, puis on peut appliquer le résultat précédent : pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$,

$$\sum_{n=n_1}^{+\infty} a_n z^n \times \sum_{n=n_2}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$.

Maintenant on peut prendre en compte les termes nuls.

Si $n < n_1 + n_2$, alors dans cette somme qu'on coupe en deux, tous les termes sont nuls :

$$c_n = \underbrace{a_0 b_n + \cdots + a_{n_1-1} b_{n+1-n_1}}_{\forall i \in [\![0;n_1-1]\!],\ a_i=0} + \underbrace{a_{n_1} b_{n-n_1} + \cdots + a_n b_0}_{\forall i \in [\![n_1;n]\!],\ n-i \leqslant n-n_1 \text{ donc } b_{n-i}=0} = 0$$

donc $\sum_{n=n_1}^{+\infty} a_n z^n \times \sum_{n=n_2}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{n=n_1+n_2}^{+\infty} c_n z^n$ où pour tout $n \geqslant n_1 + n_2$, $c_n = \sum_{k=n_1}^{n-n_2} a_k b_{n-k}$.

Ne retenons pas ça ! Retenons l'idée et ré-appliquons-la à chaque fois car, en pratique, on a très souvent $(n_1, n_2) = (1, 0)$ ou $(1, 1)$.

12.2 Propriétés de la fonction somme d'une série entière

12.2.1 Convergence uniforme et continuité

Théorème 12.21
Soit $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de converge $R > 0$.

La série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ converge normalement (donc uniformément) sur tout compact inclus dans $D(0, R)$.

D'après le théorème de continuité des séries de fonctions, on en déduit la continuité de la fonction somme.

Théorème 12.22
Soit $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de converge $R > 0$.

La fonction somme $z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur $D(0, R)$.

12.2.2 Primitivation et dérivation

Lemme 12.23
Soit (a_n) une suite de complexes.

Les séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} n a_n z^n$ *ont le même rayon de convergence.*

Plus généralement, pour tout polynôme P non-nul, la série entière $\sum_{n\geqslant 0} P(z)\, a_n z^n$ *a le même rayon de convergence.*

D'après le théorème de dérivabilité des séries de fonctions, on en déduit la dérivabilité de la fonction somme.

Théorème 12.24
Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon de converge $R > 0$.*

La fonction somme $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R\,;R[$.*

De plus, on a

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \ \forall x \in \,]-R\,;R[\,,\ \ f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}.$$

On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

On en déduit le théorème de primitivation.

Théorème 12.25
Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon de converge $R > 0$. On note f sa somme.*

La fonction somme $x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ *est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R\,;R[$ et est une primitive de f sur $]-R\,;R[$ (c'est d'ailleurs la primitive de f qui s'annule en 0).*

Exercice 12.26
Donnez le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} n x^n$ et retrouvez la valeur de sa somme.

Exercice 12.27
Même exercice avec $\sum_{n\geqslant 0} n^2 x^n$.

Exercice 12.28
Même exercice avec $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} x^n$.

12.2.3 Convergence radiale

Il existe plusieurs types de résultats concernant ce qui se passe au bord du disque ouvert de convergence. Le programme ne cite que le théorème de convergence radiale d'Abel.

Théorème 12.29
Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon de converge* $R > 0$*. On note* f *sa somme, définie sur* $[0\,;R[$*.*

Si la série $\sum a_n R^n$ *converge, alors* f *est définie sur* $[0\,;R]$ *et est continue à gauche en* R*, donc sur* $[0\,;R]$ *tout entier :*

$$\lim_{x\longrightarrow R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n.$$

La démonstration de ce théorème est hors-programme. Il y a deux cas particuliers faciles à démontrer : si les coefficients a_n sont tous positifs ou quand la série $\sum a_n R^n$ converge absolument. Dans le cas général, c'est plus difficile à justifier.

12.3 Fonction développable en série entière

12.3.1 Généralités

Définition 12.30
Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ et $r > 0$.

On dit que f est développable en série entière sur $]-r\,;r[$ quand il existe une suite complexe (a_n) telle que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ soit de rayon de convergence $R \geqslant r$ et pour tout $x \in]-r\,;r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

La somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est appelée le développement en série entière de f.

On dispose d'un théorème d'opérations sur les fonctions développables en série entière.

Théorème 12.31
Soient f, g *deux fonctions développables en série entière sur* $]-r\,;r[$*, où* $r > 0$*.*

- *Les fonctions* $f + g$ *et* fg *sont développables en série entière sur* $]-r\,;r[$*.*
- *Si* $f(0) = 0$*, alors* $g \circ f$ *est développable en série entière sur un intervalle* $]-r'\,;r'[$*, où* $r' > 0$*.*
- *Si* $f(0) \neq 0$*, alors* $\dfrac{1}{f}$ *est développable en série entière sur un intervalle* $]-r'\,;r'[$ *où* $r' > 0$*.*

Exemple 12.32
Les fonctions rationnelles qui n'ont pas 0 comme pôle sont développables en série entière.

Exercice 12.33
Développez en série entière la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$ et précisez le rayon de convergence.

Exercice 12.34
Même exercice avec la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1 + x + x^2}$.

Exercice 12.35
Même exercice avec la fonction $x \longmapsto \ln\left(1 + x + x^2\right)$.

Si une fonction f est développable en série entière sur un intervalle $]-r\,;r[$ (où $r > 0$), alors, d'après ce qui précède, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r\,;r[$ et pour tout $x \in\,]-r\,;r[\,,\ \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

La réciproque est fausse : une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle $]-r\,;r[$ n'est pas forcément développable en série entière.

De même, si une fonction est développable en série entière sur un intervalle $]-r\,;r[$ (où $r > 0$), alors elle possède un développement limité à tout ordre en 0, obtenu en tronquant le développement en série entière à l'ordre voulu.

Là encore, la réciproque est fausse.

12.3.2 Unicité du développement en série entière

Proposition 12.36
Soient (a_n) une suite de complexes et $r > 0$.

Si pour tout $x \in\,]-r\,;r[\,,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$, alors $(a_n) = 0$.

Le développement en série entière d'une fonction, s'il existe, est unique. Autrement dit, on peut identifier les coefficients de deux développements en série entière égaux.

Corollaire 12.37
Soient $(a_n), (b_n)$ *deux suites de complexes.*

Si les deux séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ *ont un rayon de convergence au moins égal à* $r > 0$ *et si pour tout* $x \in \left]-r\,;r\right[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, *alors* $(a_n) = (b_n)$.

Corollaire 12.38
Soit f *une fonction développable en série entière sur* $\left]-r\,;r\right[$, *où* $r > 0$.

Si f *est paire, alors les coefficients d'indices impairs du développement en série entière de* f *sont nuls.*

Si f *est impaire, alors les coefficients d'indices pairs du développement en série entière de* f *sont nuls.*

Exercice 12.39
On admet momentanément que $f : x \longmapsto \sqrt{1+x}$ est développable en série entière sur $\left]-1\,;1\right[$ et on note alors $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in \left]-1\,;1\right[$.

Déterminez une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre dont f est solution.

Déduisez-en que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2} a_n$, puis une expression de a_n en fonction de n.

12.3.3 Série de Taylor d'une fonction

Définition 12.40
Soient $r > 0$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]-r\,;r\right[$.

On appelle série de Taylor de f la série $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Autrement dit, f est développable en série entière ssi f est égale à la somme de sa série de Taylor.

Proposition 12.41
Soient $r > 0$ *et* f *une fonction de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *au voisinage de* 0.

f *est égale à sa série de Taylor sur* $\left]-r\,;r\right[$ *ssi* $\forall x \in \left]-r\,;r\right[$, $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_0^x \dfrac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

La démonstration est élémentaire et repose sur l'égalité de Taylor avec reste intégral.

Comme l'inégalité de Taylor-Lagrange découle de cette égalité, on a une condition suffisante pour qu'une fonction soit développable en série entière.

Proposition 12.42
Soient $r > 0$ *et* f *une fonction de classe* $\mathscr{C}^{\infty}$ *sur* $]-r\,;r[$.

Si $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{r^n}{n!} \sup\limits_{[-r;r]} \left| f^{(n)} \right| = 0$, *alors* f *est développable en série entière sur* $]-r\,;r[$.

Exercice 12.43
Soit $a \in\,]0\,;1[$. On pose $f : x \longmapsto (1+x)^a$.

Montrez que f est développable en série entière sur $\left]-\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right[$.

12.3.4 Développements en série entière usuels

Soient a un réel et n un entier naturel.

On pose $\dbinom{a}{n} = \dfrac{a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)}{n!}$.

Les fonctions usuelles suivantes sont développables en série entière avec un rayon de convergence $R > 0$:

- $\mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$ avec $R = +\infty$
- $\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ avec $R = +\infty$
- $\sin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ avec $R = +\infty$
- $\operatorname{ch} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$ avec $R = +\infty$
- $\operatorname{sh} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ avec $R = +\infty$
- $\operatorname{Arctan} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ avec $R = 1$
- $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ avec $R = 1$
- $(1+x)^a = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{a}{n} x^n$ avec $R = 1$.

Exercice 12.44
Développez en série entière la fonction $x \longmapsto \ln \frac{1-x}{1+x}$.

Exercice 12.45
Même exercice avec $x \longmapsto (x+2)\operatorname{ch} x$.

Exercice 12.46
Même exercice avec $x \longmapsto \sin^2 x$.

Exercice 12.47
Même exercice avec $x \longmapsto \mathrm{e}^x \ln(1+x)$.

Chapitre 13

Probabilités

Sommaire

13.1 Dénombrabilité

13.1.1 Vocabulaire

Définition 13.1
On dit qu'un ensemble E est dénombrable quand il existe une bijection de $\mathbb{N}$ dans E.

Dans ce cas, cela signifie qu'on peut numéroter les éléments de E par les entiers naturels et donc qu'on peut écrire E en extension sous une forme $E = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sans jamais répéter deux fois le même élément : on dit qu'on a énuméré les éléments de E.

Un ensemble fini est de la forme $\{x_0, \dots, x_n\}$: on peut aussi l'écrire sous la forme $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ en répétant une infinité de fois au moins un élément. C'est pourquoi on voit souvent dans les raisonnements apparaître la locution « ensemble fini ou dénombrable » ou « ensemble au plus dénombrable ».

Évidemment, tout ensemble en bijection avec un ensemble dénombrable est aussi dénombrable, car une composée de bijections est une bijection.

13.1.2 Exemples

Proposition 13.2

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, *plus généralement* $[n_0\,;+\infty[\,\cap\,\mathbb{N}$ *(pour tout* $n_0 \in \mathbb{N}$*), et encore plus généralement toute partie infinie de* $\mathbb{N}$ *sont dénombrables.*
- $\mathbb{Z}$ *est dénombrable.*
- *Pour tout* $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}^p$ *est dénombrable.*
- $\mathbb{Q}$ *est dénombrable.*
- *Si* $(u_i)_{i\in I}$ *est une famille sommable de complexes, alors le support de la famille* $\{i \in I \mid u_i \neq 0\}$ *est dénombrable.*

En revanche, il existe des ensembles infinis non-dénombrables, comme $\mathbb{R}$ ou tout intervalle de longueur non-nulle. Un ensemble non-dénombrable est trop gros pour qu'on puisse ordonner ses éléments et les numéroter.

13.1.3 Quelques propriétés

Proposition 13.3

Toute partie infinie d'un ensemble dénombrable est dénombrable.

Si E *est dénombrable, alors pour toute injection de* F *dans* E, F *est au plus dénombrable.*

Pourvu qu'on ne considère pas trop d'ensembles, les réunions d'ensembles dénombrables le sont aussi.

Proposition 13.4

Si $E_1, \dots, E_n$ *sont (au plus) dénombrables, alors* $E_1 \cup \dots \cup E_n$ *l'est aussi.*

Si $(E_i)_{i\in I}$ *est une famille (au plus) dénombrable d'ensembles (au plus) dénombrables, alors* $\displaystyle\bigcup_{i\in I} E_i$ *l'est aussi.*

En revanche, pour les produits cartésiens, il faut se contenter d'un nombre fini d'ensembles.

Proposition 13.5
Si $E_1, \dots, E_n$ sont dénombrables, alors $E_1 \times \dots \times E_n$ est dénombrable.

En revanche, un produit cartésien quelconque d'ensembles dénombrables ne l'est pas en général : par exemple, $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.

13.2 Espace probabilisé

13.2.1 Univers d'une expérience aléatoire

Une expérience aléatoire est une expérience dont on connaît les résultats possibles (les issues possibles) mais dont on ne peut pas connaître à l'avance le résultat. On modélise l'expérience par la donnée de l'ensemble Ω des issues possibles.

Définition 13.6
L'ensemble des issues possibles est appelé univers des possibles (ou univers). Il est souvent noté Ω.

Exemple 13.7

- On jette un dé non-truqué : les issues possibles sont les six entiers $1, \dots, 6$; l'univers est donc $\Omega = \{1, \dots, 6\}$.
- On jette n fois un dé : les issues possibles sont les suites de n entiers de l'ensemble $\{1, \dots, 6\}$; donc $\Omega = [\![1 ; 6]\!]^n$.
- On lance une pièce une infinité de fois : les issues possibles sont les suites infinies de 0 ou 1 ; donc $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

13.2.2 Tribu d'événements

De manière informelle, un événement est une partie de l'univers Ω. Mais cette définition est trop vague. Si on autorise toutes les parties de l'univers à être des événements, alors quand l'ensemble Ω est infini non-dénombrable, les seules probabilités sur Ω sont des probabilités discrètes (théorème d'Ulam), ce qui exclut tout un tas de probabilités intéressantes. Donc on doit en général restreindre la notion d'événement à certaines parties de Ω : certaines parties n'ont donc pas le droit d'être nommées « événement ».

Définition 13.8
Soit Ω un univers.

On appelle tribu sur Ω une partie $\mathscr{T}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ telle que :

- ▹ $\Omega \in \mathscr{T}$
- ▹ pour tout $A \in \mathscr{T}$, $\overline{A} \in \mathscr{T}$
- ▹ pour toute suite $(A_n) \in \mathscr{T}^{\mathbb{N}}$, $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{T}$.

Modéliser une expérience aléatoire, c'est choisir l'univers et une tribu : les éléments de la tribu sont appelés les événements. On dit qu'un événement est réalisé quand l'issue de l'expérience aléatoire appartient à cet événement. Le couple $(\Omega, \mathscr{T})$ est appelé espace probabilisable.

Exemple 13.9

- ▹ L'ensemble $\{\varnothing, \Omega\}$ est une tribu, c'est la plus petite tribu envisageable. Elle est inutilisable en pratique car elle ne comporte pas assez d'événements pour décrire des situations issues de la vie réelle.
- ▹ L'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$ est une tribu : quand l'univers Ω est fini ou dénombrable, c'est la tribu utilisée systématiquement, mais quand Ω est infini non-dénombrable, c'est une tribu trop grosse pour pouvoir y définir une probabilité vraiment utile.
- ▹ En école d'ingénieur, vous entendrez parler de la tribu des boréliens : c'est celle qui est couramment utilisée quand $\Omega = \mathbb{R}$.

Proposition 13.10
Soient Ω un ensemble et $\mathscr{T}$ une tribu sur Ω.

Alors on a :

- ▹ $\varnothing \in \mathscr{T}$
- ▹ *pour toute suite* $(A_n) \in \mathscr{T}^{\mathbb{N}}$, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{T}$
- ▹ *pour toute famille finie* $(A_1, \dots, A_n)$ *d'événements,* $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} A_k$ *et* $\displaystyle\bigcap_{k=0}^{n} A_k$ *sont des événements.*

Définition 13.11
Ω est appelé l'événement certain, $\varnothing$ est appelé l'événement impossible.

Deux événements A et B sont dits incompatibles quand ils sont disjoints, *i.e.* $A \cap B = \varnothing$.

13.2.3 Probabilité

Définition 13.12
Soient Ω un univers et $\mathscr{T}$ une tribu sur Ω.

On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathscr{T})$ toute application $\mathbb{P} : \mathscr{T} \longrightarrow [0\ ;\ 1]$ telle que :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- pour toute suite $(A_n) \in \mathscr{T}^{\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles, la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ est convergente et $\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Le triplet $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ est appelé espace probabilisé.

En pratique, sauf dans certains cas où Ω est fini ou dénombrable, nous postulerons toujours l'existence d'un espace probabilisé qui modélise la situation, car c'est hors de notre portée de construire concrètement un tel espace. Dès que les expériences aléatoires peuvent avoir une infinité non-dénombrable de résultats possibles, il est souvent difficile de reprendre les idées développées en première année et définir, par exemple, des probabilités à partir d'événements élémentaires $\{\omega\}$ (définir Ω est en général à notre portée, mais construire la tribu et la probabilité est inaccessible à nos moyens). Nous admettrons donc toujours l'existence d'un espace probabilisé représentant notre expérience.

Dans moult cas, nous définirons les événements à partir d'événements « primitifs » : par exemple, dans le cas d'une suite de lancer de pièce, l'univers est simple : $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, mais il n'est pas dénombrable ; les événements primitifs sont les événements P_i, où $i \in \mathbb{N}$ et

$$P_i = \left\{\omega = (\omega_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \omega_i = 1\right\}$$

modélise l'événement au sens concret « obtenir pile au i-ème lancer ».

Exercice 13.13
On lancer une pièce une infinité de fois.

Exprimez par une phrase ce que représentent les événements suivants :

$$A_n = \bigcap_{i=0}^{n} P_i \qquad B_n = \bigcup_{i=0}^{n} \left(P_i \cap \bigcap_{\substack{0\leqslant j\leqslant n \\ j\neq i}} \overline{P_j} \right) \qquad C = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcap_{j\geqslant i} P_j .$$

Réciproquement, définissez à l'aide des P_i les événements suivants :

- on obtient pile un nombre fini de fois
- on obtient pile une infinité de fois.

13.2.4 Propriétés

On retrouve les propriétés vues en première année.

Proposition 13.14
Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Alors $\mathbb{P}$ vérifie les propriétés suivantes :

- *pour tout* $A \in \mathscr{T}$, $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$ *; en particulier* $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$
- *pour tout* $(A, B) \in \mathscr{T}^2$, $A \subseteq B \implies \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$
- *pour tout* $(A, B) \in \mathscr{T}^2$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Mais on en a d'autres, liées à la notion de suite dénombrable.

13.2.4.1 Continuité

Proposition 13.15 (Continuité croissante)
Si (A_n) est une suite croissante d'événements, c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subseteq A_{n+1}$, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Proposition 13.16 (Continuité décroissante)
Si (A_n) est une suite décroissante d'événements, c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subseteq A_n$, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Proposition 13.17
Soit (A_n) une suite quelconque d'événements. On a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N \longrightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) \qquad \textit{et} \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N \longrightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{N} A_n\right).$$

Exercice 13.18
On considère l'univers des suites infinies de lancers indépendants d'une pièce équilibrée : $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Montrez que les événements élémentaires $\{\omega\}$ sont de probabilité nulle.

Déduisez-en que l'univers n'est pas dénombrable.

Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre fini de face ?

13.2.4.2 Sous-additivité

Proposition 13.19 (Sous-additivité)
Si (A_n) est une suite d'événements, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Dans ce résultat, le symbole $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$ signifie $\lim_{N\longrightarrow+\infty} \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(A_n)$: c'est un réel si la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ est convergente, et $+\infty$ sinon (puisque la série est à termes positifs).

13.2.4.3 Événements négligeables ou presque sûrs

Définition 13.20
Un événement est dit négligeable quand sa probabilité est nulle.

Un événement est dit presque sûr quand sa probabilité est 1.

Proposition 13.21
Toute réunion ou intersection au plus dénombrable d'événements négligeables est négligeable.

Toute réunion ou intersection au plus dénombrable d'événements presque sûrs est presque sûre.

13.2.5 Probabilité discrète

Définition 13.22
Soit Ω un univers.

On appelle distribution de probabilité discrète sur Ω toute famille de réels positifs indexée par Ω, sommable et de somme totale 1.

Si Ω est un ensemble fini, on retrouve la définition de l'an dernier.

Proposition 13.23
Si $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ est une distribution de probabilité discrète sur Ω, alors son support $\{\omega \in \Omega \mid p_\omega > 0\}$ est au plus dénombrable.

À toute distribution de probabilité discrète sur Ω, on peut associer une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$.

Proposition 13.24
Si $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ est une distribution de probabilité discrète sur Ω, alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur la tribu $\mathscr{P}(\Omega)$ telle que pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$.

Quand l'univers est infini non-dénombrable, le résultat précédent donne toutes les probabilités discrètes sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$. Mais si on choisit des tribus plus petites (ce qui est très relatif : en général, ce sont des ensembles énormes, dont la puissance dépasse celle du continu !), alors on peut créer d'autres types de probabilités (comme les probabilités dites continues).

Quand l'univers Ω est fini ou dénombrable, alors toutes les probabilités sont discrètes : on choisit toujours la tribu $\mathscr{P}(\Omega)$, ce qui est toujours sous-entendu.

Proposition 13.25
Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ un ensemble fini.

Alors pour tout n-uplet $(p_1, \dots, p_n) \in [0\,;1]^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$.

Proposition 13.26
Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n, \dots\}$ un ensemble dénombrable.

Alors pour toute suite $(p_n) \in [0\,;1]^{\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum_{n\geqslant 1} p_n$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$, il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$.

Exercice 13.27
Déterminez l'unique constante λ telle qu'on puisse définir une probabilité sur $\mathbb{N}$ en posant

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{\lambda}{n!}.$$

Dans toute la suite, on suppose donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$.

13.3 Probabilités conditionnelles

13.3.1 Généralités

Définition 13.28
Soit $A \in \mathscr{T}$ un événement non-négligeable.

Pour $B \in \mathscr{T}$, on pose $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$, appelé probabilité sachant A de B.

On voit aussi la notation $\mathbb{P}(B \mid A)$, mais attention, cette notation est trompeuse, elle peut laisser penser qu'il existe un événement qui s'appellerait « B sachant A », ce qui n'a aucun sens.

L'idée derrière la notion de probabilité conditionnelle est que lorsqu'on dispose d'une information partielle sur le résultat de l'expérience, notre perception des probabilités s'en trouve modifiée.

Théorème 13.29
Sous les mêmes hypothèses, $\mathbb{P}_A$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{T})$, appelée probabilité conditionnelle relative à A.

En général, on connaît plutôt $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}_A(B)$, ce qui permet de calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}_A(B)\,.$$

On peut généraliser.

Théorème 13.30 (Formule des probabilités composées)
Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ une famille d'événements tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$.

Alors $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\,\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots \mathbb{P}_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)$.

En général, on utilise ce résultat lorsque des événements (au sens naturel) se succèdent et que la connaissance de chaque événement permet de déterminer l'état du système.

Exercice 13.31
On dispose d'une urne contenant une boule blanche et n boules noires (avec $n \geqslant 1$).

On effectue une suite de tirages jusqu'à obtenir la boule blanche en respectant le protocole suivant : si on tire une boule noire, on la remplace par deux boules noires.

Calculez la probabilité d'obtenir la boule blanche à l'issue du k-ème tirage et la probabilité de ne jamais tirer la boule blanche.

13.3.2 Systèmes complets d'événements

Définition 13.32
Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements.

On dit que la famille $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements si, et seulement si :

- I est fini ou dénombrable (en pratique, on a souvent $I = [\![1\ ;\ n]\!]$ ou $I = \mathbb{N}$)

- les événements sont deux à deux incompatibles :

$$\text{pour tout } (i, j) \in I^2, \ \ i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing$$

- $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$.

Exemple 13.33
- Si A est un événement, le couple $\left(A, \overline{A}\right)$ est un système complet d'événements.

- Si Ω est fini ou dénombrable, la famille de tous les événements élémentaires est un système complet d'événements.

Les systèmes complets d'événements interviennent lorsqu'on est tenté de faire une disjonction de cas : on est dans un cas, ou alors dans un autre, etc, mais sans que jamais deux cas soient simultanément possibles.

Si $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements, alors $\displaystyle\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) = 1$.

Remarque 13.34
D'une manière générale, dans toute la suite du cours, si on voit apparaître une somme $\displaystyle\sum_{i \in I} \ldots$, alors elle signifiera :

- une vraie somme quand I est fini

- une somme d'une famille sommable quand I est infini

- cas particulier : dans le cas de réels positifs, on peut oublier la condition de sommabilité et prendre les sommes dans $[0\ ;+\infty]$ (c'est presque toujours le cas tant qu'on ne manipule que des probabilités, qui sont des réels positifs).

Définition 13.35
Pour définir un système quasi-complet d'événements, on remplace la condition $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$ par la condition $\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) = 1$.

Un système complet d'événements est donc un système quasi-complet d'événements.

Réciproquement, si $(A_i)_{i \in I}$ est un système quasi-complet d'événements, on pose $B = \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$: B est alors un événement négligeable et le système d'événements constitué des événements A_i auxquels on ajoute l'événement B est alors un système complet.

Conclusion : à un événement négligeable près, les deux notions sont identiques. La suite du cours montre que la différence entre les deux notions n'est pas fondamentale en pratique.

13.3.3 Formule des probabilités totales

Théorème 13.36
Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements.

Alors pour tout événement B, $\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \cap A_i)$.

Si, de plus, tous les événements A_i sont de probabilité non-nulle, alors $\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}_{A_i}(B)\,\mathbb{P}(A_i)$.

Si A est un événement négligeable, alors $A \cap B$ en est un aussi : formellement, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A(B)$ n'est pas définie ; on lui donne alors une valeur arbitraire (souvent 0, en fait peu importe) et on accepte quand même l'égalité $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_A(B)\,\mathbb{P}(A) = 0$, car, dans ce cas, cette égalité est vraie puisque $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) = 0$.

Avec cette convention, on peut étendre la formule des probabilités totales à tout système quasi-complet d'événements.

Théorème 13.37
Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements.

Alors pour tout événement B, $\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}_{A_i}(B)\,\mathbb{P}(A_i)$.

Exercice 13.38
Soit $p \in]0\,;1[$.

Dans $\mathbb{N}$, on définit la probabilité $\mathbb{P}$ par $\mathbb{P}(\{n\}) = (1-p)\,p^n$.

Justifiez que cette égalité définit effectivement une probabilité sur $\mathbb{N}$.

On tire un entier N au hasard selon cette probabilité, puis on remplit une urne avec une boule noire et N boules blanches. On prélève enfin une boule dans l'urne.

Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire dans cette expérience ?

13.3.4 Formule de Bayes

Proposition 13.39
Soient A et B deux événements de probabilité non-nulle.

Alors $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)}$.

Cette formule est appelée la formule de probabilité des causes.

On déduit de cela et de la formule des probabilités totales la formule de Bayes.

Théorème 13.40
Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système quasi-complet d'événements.

Alors pour tout événement B tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on a $\mathbb{P}_B(A_i) = \dfrac{\mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}_{A_i}(B)}{\displaystyle\sum_{j\in I} \mathbb{P}(A_j)\,\mathbb{P}_{A_j}(B)}$.

Remarque 13.41
L'énoncé est donné ici dans sa pleine version mais, en pratique, on retrouve la formule à chaque fois en refaisant la démonstration dans le cas qui nous préoccupe.

Exercice 13.42
Une proportion p d'une population est atteinte d'une maladie donnée (*prévalence* de la maladie) pour laquelle un test de dépistage existe.

Appliqué à un individu atteint, le test donne un résultat positif avec une probabilité s (*sensibilité* du test).

Appliqué à un individu indemne, il donne un résultat négatif avec une probabilité s' (*spécificité* du test).

Calculez la probabilité qu'un patient soit effectivement atteint lorsque son test est positif (*valeur prédictive positive*) ; qu'il soit effectivement indemne lorsque son test est négatif (*valeur prédictive négative*).

Exercice 13.43
Jean-Eudes lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir pile, il compte le nombre de lancers nécessaires, noté k, puis il remplit une urne avec k boules numérotées de 1 à k. Enfin, il tire une boule dans l'urne.

Il nous annonce qu'il a obtenu 1, mais ne nous donne pas la valeur de k.

Déterminez la probabilité qu'il n'ait fait qu'un seul lancer de pièce.

13.4 Indépendance

13.4.1 Indépendance de deux événements

Définition 13.44
Soient A et B deux événements.

On dit que A et B sont indépendants (pour la probabilité $\mathbb{P}$) ssi $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Proposition 13.45
Si A et B sont deux événements indépendants, alors les événements A et $\overline{B}$ sont indépendants, les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants et les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Remarque 13.46

- Attention ! Ne pas confondre « événements indépendants » et « événements incompatibles » !
- Le fait que deux événements soient indépendants ou pas n'est pas seulement lié aux événements eux-mêmes, mais dépend aussi de la probabilité. Quand plusieurs probabilités sont utilisées (par exemple des probabilités conditionnelles), il est essentiel de préciser pour quelle probabilité les événements sont indépendants.

Proposition 13.47
Soient A et B deux événements tels que A n'est pas négligeable.

Alors A et B sont indépendants ssi $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_A(B)$.

Intuitivement, deux événements sont indépendants si le fait de savoir que l'un des deux est réalisé n'apporte aucune information sur le fait de savoir que l'autre le soit ou non : dans le cas où A et B sont deux événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$, alors $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$. Et non pas, comme c'est souvent indiqué dans la littérature, le fait qu'un événement n'influe pas sur un autre ! Mais tout ça n'est que baratin. **Il faut se méfier de l'intuition quand on fait des calculs de probabilités.**

Exercice 13.48
Une famille a n enfants (avec $n \geqslant 2$).

Quelle est la probabilité qu'il n'y ait que des enfants du même sexe ?

Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins deux filles ?

Montrez que ces deux événements sont indépendants ssi $n = 3$.

13.4.2 Indépendance mutuelle

Définition 13.49
Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie ou dénombrable d'événements.

On dit que les événements $(A_i)_{i \in I}$ sont (mutuellement) indépendants ssi pour tout sous-ensemble fini $J \subseteq I$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}\left(A_j\right)$.

Le résultat précédent peut être généralisé.

Proposition 13.50
Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'événements (mutuellement) indépendants, alors toute famille d'événements $(C_i)_{i \in I}$ où pour tout $i \in I$, on choisit $C_i = A_i$ ou $C_i = \overline{A_i}$, est aussi une famille d'événements mutuellement indépendants.

Remarque 13.51
On s'intéresse rarement (pour ne pas dire jamais !) à des familles d'événements deux à deux indépendants seulement : cette notion n'implique pas l'indépendance mutuelle, qui est la seule notion vraiment utile.

Remarque 13.52
L'indépendance mutuelle d'un grand nombre d'événements est presque toujours une propriété postulée lors de la modélisation et rarement une propriété démontrée car c'est une preuve difficile en général.

On finit par le lemme des coalitions sur les événements.

Théorème 13.53
Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements mutuellement indépendants.

Si l'événement B est le résultat d'opérations ensemblistes sur une sous-famille $\left(A_j\right)_{j \in J}$ (où $J \subseteq I$) et C est le résultat d'opérations ensemblistes sur la sous-famille complémentaire $(A_i)_{i \in I \setminus J}$, alors B et C sont indépendants.

Chapitre 14

Variables aléatoires discrètes

Sommaire

Dans tout ce chapitre, même si ce n'est pas rappelé à chaque fois, on suppose que $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

Dans ce chapitre, si E est un ensemble fini ou dénombrable et $(u_x)_{x\in E}$ une famille de réels indexée par E, la notation $\sum\limits_{x\in E} u_x$ désigne la somme au sens des familles sommables ou des familles positives selon les cas.

14.1 Variables aléatoires discrètes

14.1.1 Définition

Définition 14.1
On appelle variable aléatoire discrète toute application X de Ω dans un ensemble quelconque telle que son ensemble-image $X(\Omega)$ soit fini ou dénombrable et telle que pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathscr{T}$.

On appelle variable aléatoire discrète réelle (respectivement complexe) toute variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}$ (respectivement $\mathbb{C}$).

En général, on note avec des lettres majuscules droites les variables aléatoires : X, Y, S, etc.

Si $U \subseteq X(\Omega)$, on note plutôt $X^{-1}(U)$ sous la forme préférée des probabilistes $\{X \in U\}$ ou même $(X \in U)$.

Remarque 14.2

- Comme son nom ne l'indique pas, une variable aléatoire n'est pas une variable, mais une fonction ! La terminologie a été fixée à une époque ancienne où la notion n'était pas encore parfaitement claire.
- Toute fonction constante est une variable aléatoire, appelée variable aléatoire certaine.
- Si A est un événement, la variable aléatoire $\mathbb{1}_A$ est appelée fonction indicatrice de A.

14.1.2 Probabilité-image d'une variable aléatoire discrète

Proposition 14.3
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans E.

À toute partie U de $X(\Omega)$, on associe $\mathbb{P}_X(U) = \mathbb{P}(\{X \in U\}) = \mathbb{P}(X \in U)$.

Alors $\mathbb{P}_X$ est une probabilité sur $(X(\Omega), \mathscr{P}(X(\Omega)))$, appelée probabilité-image de X ou loi de X.

Remarque 14.4
L'intérêt de la notion de variable aléatoire est de déplacer les calculs de probabilité dans l'univers Ω souvent inconnu, muni d'une tribu inconnue, dans un ensemble fini ou dénombrable $X(\Omega)$ bien plus agréable, muni de la tribu simple $\mathscr{P}(X(\Omega))$.

Dans notre pratique des probabilités, nous supposerons toujours l'existence des variables aléatoires qu'on considère ! Voyons néanmoins un résultat de réalisation effective.

14.1.3 Loi d'une variable aléatoire discrète

On rappelle qu'une distribution discrète (de probabilités) est une famille de réels positifs $(p_x)_{x\in L}$ où L est un ensemble fini ou dénombrable (non vide) telle que $\displaystyle\sum_{x\in L} p_x = 1$.

Les exemples suivants sont fondamentaux et sont à connaître.

Exemple 14.5
Avec L un ensemble fini :

- Distribution uniforme sur L : $\mathscr{U}(L) = (p_x)_{x\in L}$ où $p_x = \dfrac{1}{\operatorname{Card} L}$.
- Distribution de Bernoulli de paramètre $p \in [0\,;1]$: $\mathscr{B}(p) = (p_0, p_1)$ où $p_1 = p$ et $p_0 = 1-p$.
- Distribution binomiale de paramètre $(n,p) \in \mathbb{N} \times [0\,;1]$: $\mathscr{B}(n,p) = (p_k)_{k\in[\![0;n]\!]}$ où $p_k = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Avec L dénombrable :

- Distribution géométrique de paramètre $p \in \,]0\,;1[$: $\mathscr{G}(p) = (p_x)_{x\in\mathbb{N}^*}$ où $p_x = (1-p)^{x-1}\, p$.
- Distribution de Poisson de paramètre $\lambda > 0$: $\mathscr{P}(\lambda) = (p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ où $p_k = \mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

Définition 14.6
On dit qu'une variable aléatoire discrète X sur Ω suit la loi discrète $\mathscr{L}$ quand

$$X(\Omega) \subseteq L \qquad \text{et} \qquad \forall x \in L,\ \mathbb{P}(X = x) = p_x$$

où $(p_x)_{x\in L}$ est la distribution de probabilités nommée par le même nom que $\mathscr{L}$.

Quand on demande la loi d'une variable aléatoire X, on demande donc de déterminer un ensemble L tel que $X(\Omega) \subseteq L$ et pour chaque $a \in L$, la valeur de $\mathbb{P}(X = a)$. En général, on a souvent $X(\Omega) = L$, mais parfois ce n'est pas ce qui est le plus simple.

Par abus de langage, on confond la loi et la distribution de probabilité associée.

Proposition 14.7
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathscr{L} = (p_x)_{x \in L}$.

La famille d'événements $(\{X = x\})_{x \in L}$ est un système quasi-complet d'événements, appelé système quasi-complet d'événements associé à X.

En particulier, on a $\sum_{x \in L} \mathbb{P}(X = x) = 1$.

Exercice 14.8
Une urne contient $n + 1$ boules numérotées de 0 à n.

On procède à deux tirages avec remise et on note S la somme des numéros des deux boules.

Déterminez la loi de S.

Exercice 14.9
On lance une infinité de fois une pièce dont la probabilité de tomber sur pile vaut $p \in \,]0\,;1[$.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers nécessaires pour obtenir une première fois pile.

Déterminez la loi de X en faisant des hypothèses raisonnables sur les lancers.

Théorème de réalisation.

Théorème 14.10
Soit $\mathscr{L}$ une distribution discrète de probabilités.

Il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire X sur Ω tels que X suive la loi $\mathscr{L}$.

On note $X \sim \mathscr{L}$ pour signifier que X suit la loi $\mathscr{L}$, ou $X \sim Y$ pour signifier que X et Y suivent la même loi (ce qui ne présuppose rien sur les univers de départ de X et Y : on a seulement $X(\Omega) = Y(\Omega')$ et les égalités numériques $\forall x \in X(\Omega)\,,\ \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(Y = x)$).

14.1.4 Cas des variables aléatoires discrètes réelles ou complexes

Proposition 14.11
L'ensemble des variables aléatoires discrètes réelles sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre : on peut donc additionner ou multiplier par un scalaire des variables aléatoires discrètes réelles, ou les additionner entre elles.

Si X est une variable aléatoire discrète réelle sur Ω et si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur $X(\Omega)$, alors la composée $f \circ X$ est une variable aléatoire discrète réelle définie sur Ω, qu'on note plutôt $f(X)$.

On a bien sûr le même résultat avec les variables complexes.

La loi de $f(X)$ est donc théoriquement donnée par :

$$\forall y \in f(X)(\Omega), \ \mathbb{P}(f(X) = y) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\}) \cap X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x).$$

En pratique, cette loi est souvent difficilement calculable.

Exercice 14.12
Soient X une variable aléatoire discrète suivant une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

On pose $Y = X^2 - (2p+1)X$.

Déterminez la loi de Y.

14.2 Espérance

14.2.1 Définitions

Définition 14.13
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $[0 ; +\infty]$.

On appelle alors espérance de X le nombre $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)$ (au sens des familles positives) : c'est un réel si la famille $(x\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable et $+\infty$ sinon.

Une variable aléatoire réelle positive possède donc toujours une espérance, éventuellement infinie. Dans le cas général, on ne peut pas toujours définir l'espérance.

Définition 14.14
Soit X une variable aléatoire discrète complexe.

On dit que X possède une espérance finie quand la famille $(x\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas, on appelle espérance de X le nombre $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)$ (au sens des familles sommables).

On note L^1 l'ensemble des variables à espérance finie. On voit souvent écrit $X \in L^1$ pour signifier en abrégé que la variable X possède une espérance finie.

L'espérance de X est donc la moyenne de ses valeurs possibles, pondérées par leurs probabilités respectives, quand cela a un sens.

Exemple 14.15

- L'espérance d'une variable aléatoire certaine égale à a est a.
- Si A est un événement, l'espérance de son indicatrice est sa probabilité : $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.

Exercice 14.16
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$.

Déterminez une CNS sur λ et α pour qu'existe une variable aléatoire X qui suit une loi $\left(\dfrac{\lambda}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

À quelle condition X possède-t-elle une espérance finie ?

Exercice 14.17
Calculez l'espérance d'une variable X qui suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0 ; 1[$.

Proposition 14.18
Toute variable aléatoire finie possède une espérance finie.

Toute variable aléatoire discrète complexe bornée possède une espérance finie.

14.2.2 Propriétés

Une propriété qui découle des théorèmes de comparaison classiques sur les familles sommables.

Proposition 14.19
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes complexes.

Si $|X| \leqslant |Y|$ et $Y \in L^1$, alors $X \in L^1$.

Si $X \in L^1$, alors $|X| \in L^1$ et $|\mathbb{E}(X)| \leqslant \mathbb{E}(|X|)$ (inégalité triangulaire).

La linéarité découle encore de la théorie des familles sommables.

Proposition 14.20
Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes complexes admettant chacune une espérance finie et λ un complexe.

Alors $X+Y$ et λX admettent une espérance finie et

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) \qquad \textit{et} \qquad \mathbb{E}(\lambda X) = \lambda \mathbb{E}(X).$$

En particulier : $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ \mathbb{E}(aX+b) = a\,\mathbb{E}(X) + b$.

Si X est une variable aléatoire réelle positive, alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles telles que $X \leqslant Y$, alors $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$.

Proposition 14.21
Soit X une variable aléatoire discrète réelle positive.

Alors X a une espérance nulle ssi X est presque sûrement nulle, i.e. $\mathbb{P}(X=0) = 1$.

Définition 14.22
On dit qu'une variable aléatoire discrète complexe X est centrée ssi $\mathbb{E}(X) = 0$.

À toute variable aléatoire discrète complexe X, on associe une variable aléatoire discrète complexe centrée : $X - \mathbb{E}(X)$.

14.2.3 Théorème de transfert

Théorème 14.23
Soient X une variable aléatoire discrète complexe et f une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie sur $X(\Omega)$.

La variable aléatoire discrète complexe $f(X)$ possède une espérance finie ssi la famille $(f(x)\,\mathbb{P}(X=x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable et, dans ce cas, on a

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\,\mathbb{P}(X=x).$$

Ce théorème permet de calculer directement l'espérance de $f(X)$ sans devoir calculer la loi de $f(X)$: il suffit de connaître celle de X.

Exercice 14.24
Soient $p \in \left]0\,;1\right[$ et $X \sim \mathscr{G}(p)$.

Calculez $\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-X}\right)$.

Enfin, un petit résultat utile.

Proposition 14.25
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On a $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n)$.

14.2.4 Inégalité de Markov

Proposition 14.26
Soit X une variable aléatoire discrète réelle positive admettant une espérance finie.

On a
$$\forall a > 0,\ \ \mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Cette inégalité n'a d'intérêt que pour $a > \mathbb{E}(X)$, sinon on majore une probabilité par un nombre plus grand que 1.

Il arrive souvent qu'on ne sache pas calculer explicitement la loi d'une variable aléatoire, mais qu'on arrive à calculer son espérance (par exemple comme somme de variables aléatoires simples). Les inégalités de ce type permettent quand même parfois d'obtenir des résultats à propos des probabilités de certains événements.

Corollaire 14.27
Soit X une variable aléatoire discrète complexe admettant une espérance finie.

On a
$$\forall a > 0,\ \ \mathbb{P}(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}.$$

14.3 Variance d'une variable réelle

14.3.1 Moments d'ordre 2

Proposition 14.28
Soit X une variable aléatoire discrète réelle.

Si X^2 possède une espérance finie (on dit aussi que X possède un moment d'ordre 2), alors X possède une espérance finie.

Dans ce cas, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $(X+a)^2$ possède une espérance finie.

On note L^2 l'ensemble des variables aléatoires discrètes réelles X telles que X^2 est d'espérance finie, *i.e.* $\mathbb{E}\left(X^2\right) < +\infty$.

Proposition 14.29
Soient $X, Y \in L^2$.

On a $XY \in L^1$ *et* $\mathbb{E}(XY)^2 \leqslant \mathbb{E}\left(X^2\right)\mathbb{E}\left(Y^2\right)$.

Il s'agit bien sûr de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

14.3.2 Variance et écart-type

Définition 14.30
Soit X une variable aléatoire discrète réelle telle que $X \in L^2$.

On appelle variance de X le nombre $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$.

On appelle écart-type de X le réel $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

La variance (ou l'écart-type) mesure la dispersion de X autour de sa moyenne. Une variable de variance 1 est dite réduite.

Proposition 14.31
Soit X *une variable aléatoire discrète réelle telle que* $X \in L^2$.

On a $\mathbb{V}(X) = 0$ *ssi* X *est presque sûrement constante.*

En général, on calcule la variance par la formule suivante.

Proposition 14.32 (Formule de Huyghens)
Soit X *une variable aléatoire discrète réelle telle que* $X \in L^2$. *On a*

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Exercice 14.33
Calculez la variance d'une variable suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0\,;1[$.

Proposition 14.34
Soient X *une variable aléatoire discrète réelle telle que* $X \in L^2$ *et* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

On a $aX + b \in L^2$ *et* $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\,\mathbb{V}(X)$.

Remarque 14.35
Si X est une variable aléatoire discrète réelle d'espérance m et de variance v, on pose $X' = \dfrac{1}{\sqrt{v}}(X - m)$.

X' est alors une variable aléatoire discrète réelle centrée dont la variance vaut 1 : on l'appelle la variable aléatoire discrète réelle centrée réduite associée à X.

14.3.3 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Proposition 14.36
Soit X une variable aléatoire discrète réelle possédant un moment d'ordre 2. On a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

La même remarque que pour l'inégalité de Markov s'applique : cette inégalité n'a d'intérêt que pour des valeurs assez grandes de ε, sinon on majore une probabilité par 1.

Exercice 14.37
On lance n fois un dé à six faces.

Comment choisir n pour que la probabilité d'obtenir moins d'une fois sur deux le nombre 6 soit au moins égale à $\dfrac{3}{4}$?

14.3.4 Généralisation

Définition 14.38
Soient X une variable aléatoire discrète réelle et $k \in \mathbb{N}^*$.

On dit que X admet un moment d'ordre k quand X^k a une espérance finie.

Proposition 14.39
Soient X une variable aléatoire discrète réelle et $k \in \mathbb{N}^*$.

Si X possède un moment d'ordre k, alors pour tout $\ell \in [\![1\ ;\ k]\!]$, X possède un moment d'ordre ℓ.

14.4 Lois classiques

14.4.1 Loi uniforme

Définition 14.40
Soit L un ensemble fini non-vide.

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur L quand $X(\Omega) = L$ et $\mathbb{P}_X$ est la probabilité uniforme sur L, autrement dit si pour tout $x \in L$, $\mathbb{P}(X = x) = \dfrac{1}{\operatorname{Card} L}$.

On note alors $X \sim \mathcal{U}(L)$.

Le cas le plus courant est celui des variables à valeurs entières.

Définition 14.41
Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a \leqslant b$.

On dit qu'une variable aléatoire suit la loi uniforme sur $[\![a\ ;\ b]\!]$ quand $X(\Omega) = [\![a\ ;\ b]\!]$ et $\mathbb{P}_X$ est la probabilité uniforme sur $[\![a\ ;\ b]\!]$, *i.e.* si pour tout $k \in [\![a\ ;\ b]\!]\,,\ \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{1}{b - a + 1}$.

On note alors $X \sim \mathscr{U}([\![a\ ;\ b]\!])$.

Dans ce cas, on a $\mathbb{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{(b-a)(b-a+2)}{12}$.

Souvent, on a $a = 1$ et $b = n$ donc, dans ce cas, on a $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

Exemple 14.42
Si on note X le nombre obtenu après un lancer d'un dé non-truqué, X suit la loi uniforme sur $[\![1\ ;\ 6]\!]$.

14.4.2 Loi de Bernoulli

Définition 14.43
Soit $p \in [0\ ;\ 1]$.

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p quand $X(\Omega) \subseteq \{0, 1\}$ et $\mathbb{P}(X = 1) = p$.

On note alors $X \sim \mathscr{B}(p)$.

Dans ce cas, on note souvent $q = 1 - p$ et on a $\mathbb{E}(X) = p$ et $\mathbb{V}(X) = pq$.

Exemple 14.44

- Toute expérience aléatoire à deux issues peut être représentée par une variable de Bernoulli en notant 0 et 1 les deux issues. Le cas typique est le lancer d'une pièce (équilibrée si $p = 1/2$, non-équilibrée sinon).

- En particulier, toute expérience dont seul la réussite ou l'échec importe peut être représentée par une variable de Bernoulli : 1 représente la réussite, 0 l'échec.

14.4.3 Loi binomiale

Définition 14.45
Soit $p \in [0\ ;\ 1]$.

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètre (n, p) quand $X(\Omega) \subseteq [\![0\ ;\ n]\!]$ et pour tout $k \in [\![0\ ;\ n]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

On note alors $X \sim \mathscr{B}(n, p)$.

En notant $q = 1 - p$, on a $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = npq$.

Proposition 14.46
On considère une suite de n expériences aléatoires indépendantes qui suivent une loi de Bernoulli de même paramètre p.

On note X le nombre de réussites dans cette répétition d'expériences, appelée schéma de Bernoulli.

Alors X suit la loi binomiale de paramètre (n, p).

Exemple 14.47

- On lance n fois une pièce dont la probabilité de tomber sur pile vaut p. Alors si X est le nombre de fois où on tombe sur pile, on a $X \sim \mathscr{B}(n, p)$.
- On fait n tirages successifs avec remise dans une urne contenant une proportion p de boules blanches. Le nombre de boules blanches tirées suit la loi binomiale de paramètre (n, p).

14.4.4 Loi géométrique

Définition 14.48
Soit $p \in]0\ ;\ 1[$.

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre p quand $X(\Omega) \subseteq \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, $\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} p$.

On note alors $X \sim \mathscr{G}(p)$.

En notant $q = 1 - p$, on a $\mathbb{P}(X = +\infty) = 0$, $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$ et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{q}{p^2}$.

Proposition 14.49
La loi géométrique de paramètre p est la loi du rang du premier succès dans un schéma de Bernoulli infini de paramètre p.

Exemple 14.50

- On lance une pièce dont la probabilité de tomber sur pile vaut p. Alors si X est le premier rang pour lequel le lancer donne pile, on a $X \sim \mathscr{G}(p)$.

- On fait des tirages successifs avec remise dans une urne contenant une proportion p de boules blanches. Le premier rang où on tire une boule blanche suit la loi géométrique de paramètre p.

14.4.5 Loi de Poisson

Définition 14.51
Soit $\lambda > 0$.

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ quand $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

On note alors $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$.

On a $\mathbb{E}(X) = \lambda$ et $\mathbb{V}(X) = \lambda$.

La loi de Poisson est la loi qui compte le nombre d'événements dans un intervalle de temps fixé, quand ces événements se produisent à une certaine fréquence connue et indépendamment du temps écoulé depuis le précédent. Le paramètre λ est alors le nombre moyen d'événements se produisant durant la durée fixée et X compte le nombre d'événements qui se sont effectivement produits durant la durée fixée.

Par exemple, si des statistiques montrent que le passage à une borne de péage se fait à une fréquence de f véhicules par heure, alors on choisit souvent la loi de Poisson $\mathscr{P}(f \times h)$ pour compter le nombre de véhicules qui passent dans une durée de h heures : $\mathbb{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-fh}\dfrac{(fh)^k}{k!}$ est la probabilité pour que sur un intervalle de temps de h heures, k voitures soient effectivement passées à la borne.

Souvent, la fréquence f est faible : on utilise cette loi pour l'étude des événements dits « rares ».

14.5 Couples de variables aléatoires

14.5.1 Généralités

Définition 14.52
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes.

La fonction $\omega \longmapsto (X(\omega), Y(\omega))$ est appelée couple de variables aléatoires.

Si X et Y sont réelles, le couple est dit couple de variables aléatoires discrètes réelles.

On peut reprendre le même schéma de présentation que pour une seule variable aléatoire discrète.

Proposition 14.53
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes.

La famille d'événements $(\{X = x\} \cap \{Y = y\})_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$ est un système quasi-complet d'événements appelé système quasi-complet d'événements associé au couple (X, Y).

La probabilité $\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$ est souvent notée $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$.

Définition 14.54
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes.

La loi conjointe de X et Y est la loi du couple (X, Y).

Dans le cas d'un univers fini, on la représente souvent par un tableau à double entrée : si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_m\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_n\}$, alors on place $\mathbb{P}\left(X = x_i, Y = y_j\right)$ sur la i-ème ligne et la j-ème colonne.

14.5.2 Lois marginales

Définition 14.55
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes.

Les lois marginales du couple (X, Y) sont les lois de X et de Y.

Proposition 14.56
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes. On a :

- *pour tout $x \in X(\Omega)$,* $\displaystyle \mathbb{P}(X = x) = \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$
- *pour tout $y \in Y(\Omega)$,* $\displaystyle \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$.

Si on a représenté la loi conjointe de (X, Y) sous forme d'un tableau, on obtient les lois marginales en additionnant les probabilités sur chaque ligne ou chaque colonne (d'où le nom « lois marginales » : celles qu'on note en marge du tableau).

Exercice 14.57
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.

On tire une boule avec remise et on note X le numéro de la boule.

Puis, on tire X boules et on note Y le maximum des numéros des boules tirées.

Déterminez la loi de X et la loi conjointe de (X, Y), déduisez-en la loi de Y.

Remarque 14.58
La loi d'une variable aléatoire ne peut pas dépendre d'une autre variable aléatoire !

Écrire par exemple que $Y(\Omega) = [\![X\ ;\ n]\!]$ dans l'exercice précédent est un non-sens car X n'est pas un nombre mais une variable aléatoire (*i.e.* une fonction !).

Écrire $Y(\Omega) = [\![i\ ;\ n]\!]$ où i est la valeur de X après le premier tirage est tout aussi absurde !

Il faut imaginer que l'expérience a lieu dans un lieu qui vous est caché et que l'opérateur ne vous donne que la valeur de Y. On laisse l'opérateur répéter son expérience un grand nombre de fois et on attend qu'il vous donne les valeurs de Y pour chacune des expériences. Qu'allez-vous obtenir ? Toutes les valeurs possibles de Y, qui peut varier de 1 à n. Certainement pas quelque chose qui dépend de X, puisque vous ne savez même pas quelle expérience réelle a lieu dans le lieu caché : pour vous, observateur extérieur, X n'existe pas.

14.5.3 Lois conditionnelles

Définition 14.59
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes.

Pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$, la loi de X sachant $(Y = y)$ est la loi de X dans l'espace probabilisé $\left(\Omega, \mathbb{P}_{(Y=y)}\right)$:

$$\forall x \in X(\Omega),\ \ \mathbb{P}_{(Y=y)}(X = x) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)}.$$

On déduit de toutes les définitions précédentes les relations suivantes.

Proposition 14.60
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes.

On suppose que pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$ et $\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$.

Pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, on a :

- $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(Y = y) \times \mathbb{P}_{(Y=y)}(X = x) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}_{(X=x)}(Y = y)$
- $\mathbb{P}(X = x) = \displaystyle\sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(Y = y) \times \mathbb{P}_{(Y=y)}(X = x)$
- $\mathbb{P}(Y = y) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}_{(X=x)}(Y = y).$

14.5.4 Covariance

Définition 14.61
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles ayant une variance finie.

On appelle covariance du couple (X, Y) le nombre

$$\mathrm{Cov}\,(X, Y) = \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}\,(X)\right)\left(Y - \mathbb{E}\,(Y)\right)\right).$$

Si, de plus, $\mathbb{V}\,(X)$ et $\mathbb{V}\,(Y)$ sont non-nulles, on appelle coefficient de corrélation du couple (X, Y) le nombre

$$\rho\,(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}\,(X, Y)}{\sigma\,(X)\,\sigma\,(Y)}.$$

Comme pour la variance, on a une expression plus simple.

Proposition 14.62
Avec les mêmes hypothèses :

$$\mathrm{Cov}\,(X, Y) = \mathbb{E}\,(XY) - \mathbb{E}\,(X)\,\mathbb{E}\,(Y).$$

L'application Cov a des propriétés classiques de bilinéarité.

Proposition 14.63
Cov *est une application bilinéaire.*

De plus, pour tout couple de variables aléatoires discrètes réelles (X, Y) *ayant une variance finie, on a*

$$\mathbb{V}\,(X + Y) = \mathbb{V}\,(X) + \mathbb{V}\,(Y) + 2\,\mathrm{Cov}\,(X, Y).$$

Proposition 14.64 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Pour tout couple de variables aléatoires discrètes réelles (X, Y) *ayant une variance finie, on a*

$$|\mathrm{Cov}\,(X, Y)| \leqslant \sigma\,(X)\,\sigma\,(Y).$$

Si, de plus, $\sigma\,(X)$ *et* $\sigma\,(Y)$ *sont non-nuls, on a* $\rho\,(X, Y) \in [-1\,;\,1]$ *et* $|\rho\,(X, Y)| = 1$ *ssi il existe* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $Y = aX + b$ *presque sûrement.*

14.6 Indépendance de variables aléatoires

14.6.1 Généralités

Définition 14.65
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes.

On dit que X et Y sont indépendantes quand pour toute partie A de $X(\Omega)$ et toute partie B de $Y(\Omega)$, les événements $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ sont indépendants, *i.e.* quand

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B).$$

Dans ce cas, on note $X \perp\!\!\!\perp Y$ pour signaler que X et Y sont indépendantes.

On peut se restreindre aux événements des systèmes quasi-complets d'événements associés à X et Y (résultat admis).

Proposition 14.66
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes.

X et Y sont indépendantes ssi pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, les événements $\{X = x\}$ et $\{Y = y\}$ sont indépendants, i.e. si

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y).$$

Remarque 14.67
En général, la connaissance des lois marginales de (X, Y) ne permet pas de retrouver la loi conjointe de (X, Y).

Dans le cas où les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, c'est possible.

Donc pour montrer que deux variables X et Y ne sont pas indépendantes, il suffit de trouver deux valeurs x, y de X, Y respectivement telles que $\mathbb{P}(X = x, Y = y) \neq \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y)$.

On a un résultat sur les composées de variables indépendantes.

Proposition 14.68
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes.

Si X et Y sont indépendantes, alors pour toute fonction f définie sur $X(\Omega)$ et toute fonction g définie sur $Y(\Omega)$, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

14.6.2 Espérance et indépendance

On a un résultat remarquable sur les espérances de variables aléatoires discrètes indépendantes (résultat admis).

Proposition 14.69
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes.

Si X et Y sont indépendantes, alors on a :

- $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$

et dans le cas de variables réelles :

- $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$
- $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

Remarque 14.70
La réciproque est fausse.

Deux variables aléatoires discrètes réelles de covariance nulle sont dites non-corrélées, mais c'est un renseignement très faible sur les variables, à la différence de l'indépendance, qui est une contrainte extrêmement forte.

14.6.3 Généralisation

Tous les résultats sont admis.

Définition 14.71
Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille finie ou dénombrable de variables aléatoires discrètes.

On dit que les variables aléatoires $(X_i)_{i\in I}$ sont mutuellement indépendantes quand pour toute partie finie $J \subseteq I$, pour toute famille de parties $\left(A_j\right)_{j\in J}$ de $\prod_{j\in J} \mathscr{P}\left(X_j\left(\Omega\right)\right)$, les événements $\left(\left\{X_j \in A_j\right\}\right)_{j\in J}$ sont indépendants.

On retrouve la même caractérisation à l'aide des événements des systèmes quasi-complets d'événements associés aux différentes variables aléatoires et on peut même faire plus simple.

Proposition 14.72
Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille finie ou dénombrable de variables aléatoires discrètes.

Les variables aléatoires $(X_i)_{i \in I}$ sont mutuellement indépendantes quand pour toute partie finie $J \subseteq I$, pour toute famille $\left(x_j\right)_{j \in J}$ de $\prod_{j \in J} X_j(\Omega)$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} \left\{X_j = x_j\right\}\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}\left(X_j = x_j\right).$$

Exercice 14.73
Soient (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2) deux couples de variables indépendantes telles que pour tout $i \in \{1, 2\}$, $X_i \sim Y_i$.

Montrez que $X_1 + X_2 \sim Y_1 + Y_2$.

Le résultat est-il encore valable en supprimant l'hypothèse d'indépendance ?

Enfin, un petit lemme classique : le lemme des coalitions.

Proposition 14.74
Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille finie de variables aléatoires discrètes réelles indépendantes.

Soient J, K deux parties de I non-vides et disjointes, f une fonction de $\mathbb{R}^{\operatorname{Card} J}$ dans $\mathbb{R}$ et g une fonction de $\mathbb{R}^{\operatorname{Card} K}$ dans $\mathbb{R}$.

Alors les deux variables aléatoires discrètes réelles $f\left(X_j, j \in J\right)$ et $g\left(X_k, k \in K\right)$ sont indépendantes.

En clair, si on partage des variables aléatoires discrètes réelles indépendantes en deux sous-ensembles n'ayant aucune variable en commun, alors n'importe quoi qui dépend uniquement des variables du premier ensemble est indépendant de n'importe quoi qui dépend uniquement des variables du deuxième ensemble.

Le résultat se généralise à toute famille dénombrable de variables aléatoires discrètes réelles indépendantes, puisque la définition même de l'indépendance impose de ne considérer que des sous-familles finies.

Exemple 14.75
Un cas très courant : si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille de variables aléatoires discrètes réelles indépendantes, alors :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} X_k$ est indépendante de X_{n+1}
- pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n < p$, $\sum_{k=0}^{n} X_k$ est indépendante de $\sum_{k=n+1}^{p} X_k$.

On en déduit la généralisation du résultat sur les variances.

Proposition 14.76
Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes réelles indépendantes.

On a $\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \cdots + \mathbb{V}(X_n)$.

14.6.4 Théorème de réalisation

Le théorème de Kolmogorov est un théorème de réalisation sur les familles de variables aléatoires indépendantes (admis et jamais utilisé en pratique).

Théorème 14.77
Soit $(\mathscr{L}_i)_{i\in I}$ une famille finie ou dénombrable de lois de probabilités.

Il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ et des variables aléatoires $(X_i)_{i\in I}$ indépendantes telles que pour tout $i \in I$, $X_i \sim \mathscr{L}_i$.

Un cas particulier très courant.

Définition 14.78
On dit qu'une famille finie ou dénombrable de variables aléatoires discrètes est identiquement distribuée quand toutes les variables aléatoires suivent la même loi.

Théorème 14.79
Soit $\mathscr{L}$ une loi de probabilités.

Il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ et des variables aléatoires $(X_i)_{i\in I}$ indépendantes et identiquement distribuées qui suivent la loi $\mathscr{L}$.

Dans ce cas, on voit parfois écrit que la famille de variables aléatoires discrètes est une famille de variables indépendantes identiquement distribuées.

L'exemple typique est l'étude des suites infinies de lancers d'une pièce : on modélise cette expérience aléatoire par une suite de variables de Bernoulli indépendantes identiquement distribuées de même paramètre p.

14.6.5 Somme de variables indépendantes identiquement distribuées

Plusieurs résultats classiques.

Proposition 14.80
Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles.

Si ces n variables aléatoires sont mutuellement indépendantes et suivent la même loi de Bernoulli de paramètre p, alors la somme $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi binomiale de paramètre (n, p).

Proposition 14.81
Soient X, Y deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètres $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.

Alors $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

14.7 Loi faible des grands nombres

Proposition 14.82
Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes réelles indépendantes identiquement distribuées admettant une variance finie.

En posant $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $m = \mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma^2 = \mathbb{V}(X_1)$, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \ \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0.$$

Plus précisément, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \ \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

14.8 Fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs entières

14.8.1 Généralités

Définition 14.83
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

On appelle série génératrice de X la série entière $\sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(X = n) z^n$.

Quand cette série converge, on appelle $G_X(z)$ sa somme : la fonction $z \longmapsto G_X(z)$ est appelée fonction génératrice de X.

On peut écrire sa somme comme une espérance : $G_X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \mathbb{P}(X=n) = \mathbb{E}\left(z^X\right)$, à condition que la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(X=n) z^n$ converge absolument.

Proposition 14.84
La série génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ est de rayon de convergence au moins 1 et converge normalement sur $[0\ ;1]$.

La fonction G_X est donc continue sur $[0\ ;1]$.

De plus, on a $G_X(1) = \mathbb{P}(X \neq +\infty) = 1 - \mathbb{P}(X = +\infty)$.

Exercice 14.85
Déterminez la fonction génératrice associée à une variable de Bernoulli.

Exercice 14.86
Même question avec une variable qui suit une loi binomiale.

Exercice 14.87
Même question avec une variable qui suit une loi uniforme sur $[\![1\ ;n]\!]$.

Exercice 14.88
Même question avec une variable qui suit une loi géométrique.

Exercice 14.89
Même question avec une variable qui suit une loi de Poisson.

La fonction génératrice caractérise parfaitement la variable aléatoire.

Proposition 14.90
Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Si $G_X = G_Y$ sur un intervalle $[0\ ;\alpha]$ où $\alpha > 0$, alors $X \sim Y$.

14.8.2 Lien entre espérance et fonction génératrice

Quand $\mathbb{P}(X = +\infty) = 0$, on dit que la variable est presque sûrement à valeurs dans $\mathbb{N}$ (exemple typique : les variables suivant des lois géométriques). C'est évidemment le cas quand X est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Théorème 14.91
Soit X une variable aléatoire discrète presque sûrement à valeurs dans $\mathbb{N}$.

X admet une espérance finie ssi G_X est dérivable en 1 et, dans ce cas, $\mathbb{E}(X) = G_X'(1)$.

X admet une variance finie ssi G_X est deux fois dérivable en 1 et, dans ce cas, $\mathbb{E}(X(X-1)) = G_X''(1)$.

Quand $\mathbb{P}(X = +\infty) > 0$, X n'est pas d'espérance finie (on a $\mathbb{E}(X) = +\infty$ dans ce cas).

14.8.3 Fonction génératrice d'une somme de variables indépendantes

---

Proposition 14.92
Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Si X et Y sont indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

Plus généralement, si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, alors $G_{X_1+\cdots+X_n} = \prod_{k=1}^{n} G_{X_k}$.

Exemple 14.93
Si X et Y sont indépendantes et suivent des lois de Poisson de paramètres $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, alors $X + Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Chapitre 15

Équations différentielles linéaires

Sommaire

Dans tout le cours, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points, n désigne un entier naturel non-nul, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E est un espace vectoriel normé de dimension finie n.

Si f est un endomorphisme de E et v un vecteur de E, on note $f.v$ l'image de v par f, au lieu de la traditionnelle notation $f(v)$. Sans cette notation, on rencontrerait des notations lourdes comme $f(t)(v)$ ou $f(t)(v(t))$, qui seront donc avantageusement remplacées par $f(t).v$ ou $f(t).v(t)$.

15.1 Équations et systèmes différentiels linéaires du premier ordre

15.1.1 Généralités

Définition 15.1
On appelle équation différentielle linéaire (du premier ordre) toute équation différentielle de la forme

$$x' = a(t).x + b(t)$$

où

- a est une fonction continue de I dans $\mathscr{L}(E)$
- b est une fonction continue de I dans E (appelée second membre)
- x est la fonction inconnue dérivable de I dans E et x' sa dérivée.

Définition 15.2
Avec les notations précédentes, on appelle solution (sur I) de l'équation différentielle toute application x dérivable sur I qui vérifie $\forall t \in I,\ \ x'(t) = a(t).x(t) + b(t)$.

Remarque 15.3
Si le second membre b peut s'écrire sous la forme $b = b_1 + b_2$, alors en additionnant les solutions de l'équation $x' = a(t).x + b_1(t)$ avec celles de l'équation $x' = a(t).x + b_2(t)$, on obtient des solutions de $x' = a(t).x + b(t)$.

On appelle cette idée le principe de superposition.

Comme E est de dimension finie n, si on choisit une base $\mathscr{B}$, alors en exprimant les coordonnées des vecteurs et les matrices des endomorphismes dans la base $\mathscr{B}$, on obtient une traduction matricielle de l'équation différentielle précédente.

Définition 15.4
On appelle système différentiel linéaire (du premier ordre) toute équation différentielle de la forme

$$X' = A(t)X + B(t)$$

où

- A est une fonction continue de I dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$
- B est une fonction continue de I dans $\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n$
- X est la fonction inconnue dérivable de I dans $\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$ et X' sa dérivée.

Exemple 15.5

- Le système $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = -x + 4y \end{cases}$ est un système différentiel linéaire où A est la fonction constante égale à $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = 0$.
- Le système $\begin{cases} x' = t^2 x + \mathrm{e}^t y + \sin t \\ y' = -tx + \cos(t)\, y - 1 \end{cases}$ est un système différentiel linéaire où A est la fonction $t \longmapsto \begin{pmatrix} t^2 & \mathrm{e}^t \\ -t & \cos t \end{pmatrix}$ et B est la fonction $t \longmapsto \begin{pmatrix} \sin t \\ -1 \end{pmatrix}$.

Définition 15.6
Avec les notations précédentes, on appelle solution (sur I) du système différentiel toute application X dérivable sur I qui vérifie $\forall t \in I,\ \ X'(t) = A(t)\, X(t) + B(t)$.

Proposition 15.7
Les solutions d'une telle équation différentielle ou d'un tel système différentiel linéaire sont au moins de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

À partir de maintenant, le cours portera sur les équations différentielles, mais tout ce qui est énoncé à leur propos est valable pour les systèmes différentiels.

15.1.2 Problème de Cauchy

Définition 15.8
Soit $(*) : x' = a(t).x + b(t)$ une équation différentielle linéaire qui respecte les conditions ci-dessus. On choisit un réel $t_0 \in I$ et un vecteur $v_0 \in E$.

Le problème d'existence et d'unicité d'une solution de $(*)$ qui satisfait la condition initiale $x(t_0) = v_0$ est appelé un problème de Cauchy.

Le problème de Cauchy

$$(1) : \begin{cases} x' = a(t).x + b(t) \\ x(t_0) = v_0 \end{cases}$$

est équivalent au problème intégral

$$(2) : x(t) = \int_{t_0}^{t} (a(\tau).x(\tau) + b(\tau))\, \mathrm{d}\tau + v_0$$

i.e. x est solution de (1) ssi x est solution de (2).

15.1.3 Équation différentielle linéaire homogène

Définition 15.9
On appelle équation différentielle linéaire homogène (du premier ordre) toute équation différentielle de la forme

$$x' = a(t).x$$

où a est une fonction continue de I dans $\mathscr{L}(E)$.

Il y a un seul résultat à connaître sur de telles équations : le théorème de Cauchy-Lipschitz (ou théorème de Cauchy linéaire).

Théorème 15.10
L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène $x' = a(t).x$ est un sous-espace vectoriel de dimension n de $\mathscr{F}(I, \mathbb{K})$.

Plus précisément, en notant S l'ensemble des solutions, pour tout $t_0 \in I$, l'application

$$\begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x(t_0) \end{array}$$

est un isomorphisme.

Autrement dit, pour tout $t_0 \in I$ et $v_0 \in E$ (appelé vecteur des conditions initiales), il existe une unique solution telle que $x(t_0) = v_0$.

La conjonction d'une équation différentielle linéaire homogène et d'une condition initiale s'appelle un problème de Cauchy linéaire.

Ce qui précède signifie que n'importe quel problème de Cauchy linéaire possède une unique solution.

Une base de l'ensemble des solutions est appelé un système fondamental de solutions.

Exercice 15.11
Montrez que les fonctions $t \longmapsto \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \end{pmatrix}$ et $t \longmapsto \begin{pmatrix} -t\sin t \\ t\cos t \end{pmatrix}$ forment un système fondamental de solutions du système différentiel sur $\mathbb{R}_+^*$ $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{t}x - y \\ y' = x + \dfrac{1}{t}y \end{cases}$

Exercice 15.12
Déterminez un système fondamental de solutions polynomiales du système différentiel $\begin{cases} x' = \dfrac{t}{1+t^2}x + \dfrac{1}{1+t^2}y \\ y' = \dfrac{-1}{1+t^2}x + \dfrac{t}{1+t^2}y \end{cases}$

15.1.4 Cas général

Proposition 15.13
Soit $x' = a(t).x + b(t)$ une équation différentielle linéaire sur I.

Si on connaît une solution p dite particulière de l'équation, alors on connaît la forme générale des solutions : elles sont toutes de la forme

$$t \longmapsto g(t) + p(t)$$

où g est la solution générale de l'équation différentielle linéaire homogène associée.

Autrement dit, l'ensemble des solutions est un sous-espace affine de $\mathscr{F}(I, \mathbb{K})$: $p+S$ où S est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz est encore valable sous une forme amenuisée.

Théorème 15.14
Pour tout $t_0 \in I$ et $v_0 \in E$, il existe une unique solution telle que $x(t_0) = v_0$.

Remarque 15.15
Il n'existe pas de méthode simple pour résoudre concrètement de telles équations différentielles linéaires, à part dans le cas où a est une constante.

15.2 Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

15.2.1 Définition

Proposition 15.16
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. La série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} \frac{u^k}{k!}$ converge absolument dans $\mathscr{L}(E)$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. La série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} \frac{A^k}{k!}$ converge absolument dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 15.17
Avec les mêmes hypothèses, on pose

$$\exp(u) = \mathrm{e}^u = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!} \qquad \text{et} \qquad \exp(A) = \mathrm{e}^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Il est bien sûr évident que si u a pour matrice A dans une base $\mathscr{B}$, alors e^u a pour matrice e^A dans cette même base.

15.2.2 Propriétés algébriques

L'exponentielle d'endomorphismes ou de matrices a de nombreuses propriétés communes avec l'exponentielle de nombres, mais pas toutes, car les algèbres $\mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ne sont pas commutatives.

Proposition 15.18
Pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, u *et* e^u *commutent. De même avec les matrices.*

Proposition 15.19
Soient u, v *deux endomorphismes de* E *qui commutent. On a* $\mathrm{e}^{u+v} = \mathrm{e}^u\mathrm{e}^v = \mathrm{e}^v\mathrm{e}^u$.

De même avec des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *qui commutent.*

Attention ! Sans hypothèse de commutation, ce résultat est faux en général.

Une conséquence immédiate est que pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, e^u est inversible (donc non nul) et son inverse est e^{-u}. De même pour les matrices.

Si A et B sont semblables, alors e^A et e^B le sont aussi avec la même matrice de passage : si $B = PAP^{-1}$ alors $\mathrm{e}^B = P\mathrm{e}^A P^{-1}$.

En général, il est difficile de calculer une exponentielle d'endomorphisme ou de matrice. Deux cas simples :

Dans le cas diagonalisable, c'est faisable, car l'exponentielle d'une matrice diagonale est très simple.

Proposition 15.20
Soit $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On a $\mathrm{e}^A = \operatorname{diag}\left(\mathrm{e}^{\lambda_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n}\right)$.

Si une matrice A est nilpotente, alors son exponentielle est en fait un polynôme en A.

Dans le cas général, le calcul est souvent pénible. Néanmoins, on a quelques résultats généraux simples.

Proposition 15.21
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *scindée.*

On a $\operatorname{Sp}\left(\mathrm{e}^A\right) = \mathrm{e}^{\operatorname{Sp}(A)}$.

En particulier, on a $\det \mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{\operatorname{tr} A}$.

15.2.3 Propriétés fonctionnelles

La convergence absolue de la série définissant l'exponentielle entraîne quelques résultats simples à propos de la continuité et de la dérivabilité.

Proposition 15.22
Les fonctions $u \longmapsto \mathrm{e}^u$ *et* $A \longmapsto \mathrm{e}^A$ *sont continues sur* $\mathscr{L}(E)$ *et* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *respectivement.*

Proposition 15.23
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

La fonction de variable réelle $t \longmapsto \mathrm{e}^{tu}$ *est dérivable et sa dérivée est* $t \longmapsto u\mathrm{e}^{tu} = u\mathrm{e}^{tu}$.

15.3 Équations linéaires homogènes à coefficients constants

15.3.1 Forme générale de la solution

Proposition 15.24
Soient $a \in \mathscr{L}(E)$, $t_0 \in I$ *et* $v_0 \in E$.

L'unique solution au problème de Cauchy $\begin{cases} x' = a.x \\ x(t_0) = v_0 \end{cases}$ *est la fonction* $t \longmapsto \mathrm{e}^{(t-t_0)a}.v_0$.

On a bien sûr l'équivalent matriciel.

Proposition 15.25
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $t_0 \in I$ *et* $V_0 \in \mathbb{K}^n$.

L'unique solution au problème de Cauchy $\begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = V_0 \end{cases}$ *est la fonction* $t \longmapsto \mathrm{e}^{(t-t_0)A}V_0$.

15.3.2 Cas praticable

Proposition 15.26
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On suppose que A est diagonalisable : on note $a_1, \ldots, a_n$ les valeurs propres non-distinctes de A et $(V_1, \ldots, V_n)$ une base de l'espace $\mathscr{M}_{n\,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres associés.

Les solutions du système différentiel linéaire homogène $X' = AX$ sont les fonctions

$$t \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{e}^{a_i t} V_i$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des constantes dites d'intégration.

En pratique, on diagonalise la matrice A en donnant une matrice de passage P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$, on pose $X = PY$ et on résout le système différentiel $Y' = DY$, ce qui donne la forme générale de Y puis celle de $X = PY$. Ce qui est remarquable, c'est qu'il est inutile de calculer P^{-1}.

Quand la matrice A n'est pas diagonalisable mais seulement trigonalisable, alors en notant T une matrice triangulaire semblable à A, la même stratégie peut être appliquée, moyennant une résolution un peu plus difficile du système différentiel $Y' = TY$.

Exercice 15.27
Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = 2x + y - z \\ y' = x + 2y - z \\ z' = -x - y + 2z \end{cases}$

Exercice 15.28
Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = -2x - y + 7z \\ y' = 5x + 4y - 8z \\ z' = x + y + z \end{cases}$

Dans la suite, on s'intéresse à d'autres types d'équations différentielles linéaires, où les inconnues sont à valeurs réelles ou complexes.

15.4 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n

15.4.1 Généralités

Définition 15.29
On appelle équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n toute équation différentielle de la forme

$$y^{(n)} = a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y + b(t)$$

où $a_0, \ldots, a_{n-1}, b$ sont $n+1$ fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$ et y est la fonction inconnue de I dans $\mathbb{K}$.

Définition 15.30
Avec les notations précédentes, on appelle solution (sur I) de l'équation différentielle toute application f n fois dérivable sur I et telle que

$$\forall t \in I, \quad f^{(n)}(t) = a_{n-1}(t) f^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t) f'(t) + a_0(t) f(t) + b(t).$$

Exemple 15.31
- ▹ $y'' - (t-1) y' + ty = 0$ a pour solution sur $\mathbb{R}$ la fonction exp.
- ▹ $y'' + \dfrac{1}{t} y' + 4t^2 y = 1 + t^4$ a pour solution sur $\mathbb{R}^*$ la fonction $t \longmapsto \cos\left(t^2\right) + \dfrac{t^2}{4}$.

Proposition 15.32
Les solutions d'une telle équation différentielle linéaire sont au moins de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.

15.4.2 Représentation matricielle

On considère une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n

$$(1) : y^{(n)} = a_{n-1}(t) y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t) y' + a_0(t) y + b(t)$$

On pose $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$.

On définit ainsi trois fonctions vectorielles (matricielles) $X \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$, $A \in \mathscr{C}^0(I, \mathscr{M}_n(\mathbb{K}))$ et $B \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K}^n)$.

L'équation (1) est alors équivalente au système différentiel $X' = AX + B$.

Par conséquent, tous les résultats précédents sont applicables dans ce cas particulier.

15.4.3 Équation différentielle linéaire homogène

Définition 15.33
On appelle équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre n toute équation différentielle de la forme

$$y^{(n)} = a_{n-1}(t) y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t) y' + a_0(t) y$$

où $a_0, \ldots, a_{n-1}$ sont n fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et y est la fonction inconnue de I dans $\mathbb{K}$.

Là encore, il y a un seul résultat à connaître sur de telles équations : le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Théorème 15.34
L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre n est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

Plus précisément, en notant S l'ensemble des solutions, pour tout $t_0 \in I$, l'application

$$\begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ f & \longmapsto & \left(f(t_0), f'(t_0), \ldots, f^{(n-1)}(t_0)\right) \end{array}$$

est un isomorphisme.

Autrement dit, pour tout $t_0 \in I$ et $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ (appelé vecteur des conditions initiales), il existe une unique solution telle que pour tout $k \in [\![0 \,;\, n-1]\!]$, $f^{(k)}(t_0) = v_k$.

Là encore, toute base de l'ensemble des solutions est appelée système fondamental de solutions. Il n'y a hélas pas de méthode générale pour en calculer concrètement.

15.4.4 Cas général

Proposition 15.35
Soit

$$(1) : y^{(n)} = a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y + b(t)$$

une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n sur l'intervalle I.

Si on connaît une solution p dite particulière de l'équation, alors on connaît la forme générale des solutions : elles sont de la forme

$$t \longmapsto g(t) + p(t)$$

où g est la solution générale de l'équation différentielle linéaire homogène associée.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz est encore valable sous une forme amenuisée.

Théorème 15.36
Pour tout choix des conditions initiales $(v_0, \ldots, v_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y^{(n)} = a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y + b(t) \\ y(t_0) = v_0 \\ y'(t_0) = v_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = v_{n-1} \end{cases}$$

possède toujours une unique solution.

Remarque 15.37
La recherche d'une solution particulière est un problème difficile. Sauf cas évidents, des indications seront données.

15.4.5 Diverses idées pour résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre n

En pratique, on a souvent $n = 2$.

- Chercher des solutions sous une forme *a priori* raisonnable (polynomiale, exponentielle, etc.).

- Chercher des solutions développables en série entière.

- Faire un changement de variable ou un changement de fonction inconnue en suivant les indications de l'énoncé.

- Quand on connaît une solution non-nulle z, en chercher une autre sous la forme uz où u est une fonction inconnue à déterminer (c'est la méthode de variation de la constante !), qui transforme le problème différentiel d'ordre n en un problème d'ordre $n-1$ plus une intégration.

Exercice 15.38
Résolvez l'équation différentielle suivante sur $\left]-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$: $(2t+1)\,y''(t) + (4t-2)\,y'(t) - 8y(t) = 0$ en cherchant une solution polynomiale et une solution exponentielle.

Exercice 15.39
Même exercice sur $\mathbb{R}_+^*$ avec : $y''(t) + 2t\,(1+t)\,y'(t) - 2\,(1+t)\,y(t) = 0$ en cherchant une première solution de la forme $t \longmapsto t^{\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 15.40
Même exercice sur $\mathbb{R}$ avec : $\left(1+t^2\right)y''(t) + 4ty'(t) + 2y(t) = 1$ en cherchant des solutions développables en série entière.

Exercice 15.41
Même exercice sur $\mathbb{R}_+^*$ avec : $t^2y''(t) + 4ty'(t) - \left(t^2-2\right)y(t) = \mathrm{e}^t$ en effectuant le changement de fonction inconnue $z(t) = t^2y(t)$.

Dans le cas $n = 2$, pour trouver une solution particulière de l'équation $y'' = a(t)\,y' + b(t)\,y + c(t)$, si on connaît un système fondamental de solutions de l'équation homogène associée $y'' = a(t)\,y' + b(t)\,y$, alors on peut parfois réussir à trouver une solution particulière par variations des constantes : en notant (s_1, s_2) un système fondamental de solutions de l'équation homogène associée, on pose $p = u_1s_1 + u_2s_2$ où u_1 et u_2 sont deux fonctions inconnues deux fois dérivables. Comme on a deux inconnues pour une seule équation, on impose une condition supplémentaire : $u_1's_1 + u_2's_2 = 0$, afin que la recherche de solutions particulières aboutisse au système suivant :

$$\begin{cases} u_1's_1 + u_2's_2 = 0 \\ u_1's_1' + u_2's_2' = c \end{cases}$$

Comme dans le cas de la méthode de variation de la constante vue en première année, la détermination explicite de u_1 et u_2 est parfois empêchée par les calculs de primitives non-explicitables.

Exercice 15.42
Résolvez l'équation $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{t-1}{t^2}\mathrm{e}^{-t}$ sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 15.43
Résolvez l'équation $y'' + 4y = \tan t$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Chapitre 16

Calcul différentiel

Sommaire

Dans tout le cours, E, F (et éventuellement G) sont des $\mathbb{R}$-esapces vectoriels normés de dimensions finies p, n respectivement (éventuellement q). Comme dans le chapitre précédent, si $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in E$, on note $\varphi.v$ plutôt que $\varphi(v)$ l'image de v par l'application linéaire φ.

16.1 Dérivées partielles

16.1.1 Dérivée selon un vecteur

Définition 16.1
Soient U un ouvert de E, $f : U \longrightarrow F$, $a \in U$, $v \in E \setminus \{0\}$ et $t \in \mathbb{R}$.

On dit que f possède une dérivée en a selon le vecteur v quand la fonction $t \longmapsto f(a+tv)$ est dérivable en 0, *i.e.* quand $\dfrac{f(a+tv)-f(a)}{t}$ a une limite finie dans F quand t tend vers 0.

Dans ce cas, on pose $\mathrm{D}_v f(a) = \lim\limits_{t \longrightarrow 0} \dfrac{f(a+tv)-f(a)}{t}$.

16.1.2 Dérivées partielles dans une base

Définition 16.2
Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, U un ouvert de E, $f : U \longrightarrow F$ et $a \in U$.

On dit que f possède des dérivées partielles en a dans la base $\mathscr{B}$ quand pour tout $j \in [\![1 ; p]\!]$, f possède une dérivée en a selon le vecteur e_j.

Dans ce cas, on note $\partial_j f(a) = \mathrm{D}_{e_j} f(a) = \lim\limits_{t \longrightarrow 0} \dfrac{f(a+te_j)-f(a)}{t}$.

Avec les mêmes notations, en notant $x = \sum\limits_{j=1}^{p} x_j e_j$ un vecteur générique de E, on identifie en général les notations $f(x)$ et $f(x_1, \dots, x_p)$: moyennant le choix d'une base de E, toute fonction de E dans F peut être vue comme une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans F, donc comme une fonction de p variables réelles et à valeurs dans F. On note alors aussi $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \partial_j f(a)$.

Autrement dit, f possède une j-ème dérivée partielle en $a = (a_1, \dots, a_p)$ quand la fonction $\varphi_j : x_j \longmapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_p)$ est dérivable en a_j. Dans ce cas, $\partial_j f(a) = \varphi_j'(a_j)$.

16.1.3 Absence de lien entre la continuité et l'existence de dérivées selon tout vecteur

Pour une fonction d'une seule variable, l'existence d'une dérivée en un point implique la continuité en ce point. Dès que $p \geqslant 2$, ce lien est faux : une fonction peut très bien avoir des dérivées selon tout vecteur mais n'être pas continue.

Exercice 16.3
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : si $(x, y) \neq 0$, $f(x, y) = \dfrac{\sin(x)\sin^2(y)}{x^2 + y^2}$ et $f(0, 0) = 0$.

Vérifiez que f a des dérivées selon tout vecteur en $(0, 0)$ et qu'elle est continue en ce point.

Exercice 16.4
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : si $y \neq 0$, $f(x, y) = \dfrac{x^2}{y}$ et si $y = 0$, $f(x, 0) = 0$.

La fonction f est-elle continue en $(0, 0)$? A-t-elle une dérivée selon un vecteur v en $(0, 0)$?

Exercice 16.5
Soit $f : (x, y) \longmapsto \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ prolongée en $(0, 0)$ par 0.

Montrez que f possède des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$. Ces dérivées partielles sont-elles continues ?

Exercice 16.6
Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(A) = \operatorname{tr} A^2$.

Montrez que f possède en tout point des dérivées selon tout vecteur.

En choisissant comme base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la base canonique et en notant $x_{i\,j}$ les coordonnées dans cette base, calculez $\dfrac{\partial f}{\partial x_{i\,j}}(A)$.

16.2 Différentielle

16.2.1 Application différentiable

Définition 16.7
Soient U un ouvert de E, $f : U \longrightarrow F$ et $a \in U$.

On dit que f est différentiable en a quand il existe une application linéaire $L : E \longrightarrow F$ continue, un réel $r > 0$ et une application $\varepsilon : B(0, r) \longrightarrow F$ telles que

$$\begin{cases} \forall v \in B(0, r), \quad f(a + v) = f(a) + L.v + \|v\| \varepsilon(v) \\ \lim\limits_{v \longrightarrow 0} \varepsilon(v) = 0 \end{cases}$$

On note classiquement $o(\|v\|)$ toute expression du type $\|v\| \varepsilon(v)$ où $\lim\limits_{v \longrightarrow 0} \varepsilon(v) = 0$.

La définition précédente affirme donc l'existence d'un développement limité à l'ordre 1 : $f(a + v) = f(a) + L.v + o(\|v\|)$.

Remarque 16.8
Dans la définition précédente, l'hypothèse de continuité de L est superflue car E est de dimension finie donc toutes les applications linéaires de E dans F sont continues. Mais, au cas où un sujet hors-programme vous placerait dans un espace E de dimension infinie, vous avez la définition complète.

Exercice 16.9
Soit $f : (x, y) \longmapsto y \ln x + e^{xy}$.

Montrez que f est différentiable en $(1, 1)$.

Exercice 16.10
Soit $C : v \longmapsto \|v\|^2$ (où la norme est ici la norme euclidienne).

Montrez que C est différentiable en tout point.

En est-il de même pour l'application norme elle-même ?

Exercice 16.11
Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $f(A) = A^2$.

Montrez que f est différentiable en tout point de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 16.12
Soit $g : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ définie par : $g(A) = A^{-1}$.

Rappelez pourquoi $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrez qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $V \in B(0, r)$, $\sum\limits_{k \geqslant 0} (-V)^k$ converge.

Dans ce cas, que vaut sa somme ?

Montrez que g est différentiable en I_n, puis en tout point de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 16.13
Avec les mêmes notations, si f est différentiable en a, alors

- *f est continue en a*
- *f admet des dérivées selon tout vecteur en a.*

Bien évidemment, la réciproque est fausse.

16.2.2 Différentielle

Proposition 16.14
Avec les mêmes notations, l'application L est unique.

Dans le cas où f est différentiable en a, l'application L s'appelle la différentielle de f en a ou l'application linéaire tangente en a. Elle est notée $\mathrm{d}f(a)$.

Le développement limité en a à l'ordre 1 est donc

$$f(a+v) = f(a) + \mathrm{d}f(a).v + o(\|v\|)$$

et la dérivée selon le vecteur v en a est

$$\mathrm{D}_v f(a) = \mathrm{d}f(a).v$$

16.2.3 Différentiabilité sur un ouvert

Définition 16.15
Soient U un ouvert de E et $f : U \longrightarrow F$.

On dit que f est différentiable sur U quand f est différentiable en tout point de U. On lui associe donc une unique application $\mathrm{d}f : U \longrightarrow \mathscr{L}(E,F)$, appelée la différentielle de f sur U.

Remarque 16.16
En fait, on devrait noter $\mathrm{d}f : U \longrightarrow \mathscr{L}_c(E,F)$.

Deux cas particuliers :

- si f est constante sur U, alors $\mathrm{d}f = 0$
- si f est linéaire, alors $\mathrm{d}f = f$.

16.2.4 Lien avec les dérivées partielles

Proposition 16.17
Soient U un ouvert de E, $f : U \longrightarrow F$, $a \in U$ et $\mathscr{B}$ une base de E.

Si f est différentiable en a, alors f possède des dérivées partielles en a dans la base $\mathscr{B}$ et pour tout $v \in E$ de coordonnées $\left(h_1, \ldots, h_p\right)$, $\mathrm{d}f\,(a)\,.v = \sum_{j=1}^{p} \partial_j f\,(a)\,h_j = \sum_{j=1}^{p} \dfrac{\partial f}{\partial x_j}\,(a)\,h_j.$

Remarque 16.18
Dans la notation précédente, on a exceptionnellement fait une entorse à la convention habituelle qui consiste à écrire les produits externes scalaire-vecteur dans le sens λv.

Ici, les dérivées partielles $\partial_j f\,(a)$ sont des vecteurs de F et les h_j sont des scalaires, on devrait donc noter les produits externes $h_j\,\partial_j f\,(a)$. Mais l'usage veut que dans le cas des différentielles, on respecte l'ordre des objets plutôt que la convention du produit externe.

Un cas particulier : si $p = 1$, alors f est différentiable en a ssi f est dérivable en a et dans ce cas, pour tout $h \in \mathbb{R}$, $\mathrm{d}f\,(a)\,.h = f'\,(a)\,h$.

Exercice 16.19
Soit $f : (x, y) \longmapsto y \ln x + \mathrm{e}^{xy}$.

En admettant momentanément que f est différentiable sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, calculez sa différentielle en tout point.

Exercice 16.20
Soit $g : \mathscr{M}_2\,(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_2\,(\mathbb{R})$ définie par : $g\,(A) = A^\top A$.

En notant $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix}$, calculez la différentielle de g en la matrice $J = (i + j)_{1 \leqslant i,j \leqslant 2}$.

16.2.5 Caractérisation des fonctions à dérivée partielle nulle

Proposition 16.21
Soient $D = I \times J$ où I, J sont deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et f une fonction différentiable sur D.

- *Si pour tout $a \in D$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}\,(a) = 0$, alors il existe une fonction v dérivable sur J telle que*

$$\text{pour tout } (x, y) \in D,\ \ f\,(x, y) = v\,(y)\,.$$

▹ *Si pour tout $a \in D$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$, alors il existe une fonction u dérivable sur I telle que*

$$\textit{pour tout } (x, y) \in D, \quad f(x, y) = u(x).$$

Exprimé de façon plus grossière, si la dérivée partielle par rapport à une variable est constamment nulle, alors la fonction ne dépend pas de cette variable. Bien sûr, ce résultat s'étend à des fonctions à plus de deux variables.

Corollaire 16.22
Avec les mêmes hypothèses, si pour tout $a \in D$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$, alors f est constante sur D.

Remarque 16.23
Ce résultat reste valable sur des ouverts de forme plus générale (voir plus loin) ou en adaptant légèrement l'énoncé, avec plus de trois variables.

Exercice 16.24
Déterminez les fonctions f différentiables sur $\mathbb{R}^2$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lambda$, où λ est une constante.

Exercice 16.25
Faites de même avec la condition $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos x$.

Exercice 16.26
Faites de même avec la condition $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f(x, y)$.

Ce genre de problème s'appelle des équations aux dérivées partielles.

16.2.6 Matrice jacobienne

Définition 16.27
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $a \in U$.

Si f est différentiable en a, alors on appelle (matrice) jacobienne de f en a la matrice dans les bases canoniques de $\mathrm{d}f(a)$, souvent notée $\mathrm{J}f(a)$. C'est une matrice de $\mathscr{M}_{n\,p}(\mathbb{R})$.

On note $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ où $f_1, \ldots, f_n$ sont n fonctions de U dans $\mathbb{R}$.

Proposition 16.28
Avec les mêmes notations, f est différentiable en a ssi pour tout $i \in [\![1\,;\,p]\!]$, f_i est différentiable en a.

Dans ce cas, on a

$$\mathrm{J}\,f\,(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1\,(a) & \partial_2 f_1\,(a) \ldots\ldots \partial_p f_1\,(a) \\ \partial_1 f_2\,(a) & \partial_2 f_2\,(a) \ldots\ldots \partial_p f_2\,(a) \\ \vdots & \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ \partial_1 f_n\,(a) & \partial_2 f_n\,(a) \ldots\ldots \partial_p f_n\,(a) \end{pmatrix} = \big(\partial_j f_i\,(a)\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$$

Exercice 16.29
Calculez la jacobienne du changement de variables en polaires $(r,\theta) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

16.2.7 Cas particulier où $F = \mathbb{R}$

Si $n = 1$, alors $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, donc si f est différentiable en a, alors $\mathrm{d}f\,(a)$ est une forme linéaire de E.

Si on a muni E d'un produit scalaire $\cdot$, on appelle alors gradient de f en a, noté $\nabla f\,(a)$, l'unique vecteur de E tel que

$$\forall v \in E,\ \ \mathrm{d}f\,(a)\,.v = \nabla f\,(a) \cdot v.$$

Le développement limité à l'ordre 1 devient donc dans ce cas

$$f\,(a+v) = f\,(a) + \nabla f\,(a) \cdot v + o\,(\|v\|)$$

et la dérivée selon le vecteur v en a est donc

$$\mathrm{D}_v\,f\,(a) = \nabla f\,(a) \cdot v.$$

Dans une base orthonormée $\mathscr{B} = \big(e_1, \ldots, e_p\big)$, le vecteur $\nabla f\,(a)$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \partial_1 f\,(a) \\ \vdots \\ \partial_p f\,(a) \end{pmatrix}$, tandis que la matrice jacobienne est donc une matrice-ligne :

$$\mathrm{J}\,f\,(a) = \big(\partial_1 f\,(a) \quad \partial_2 f\,(a) \ldots\ldots \partial_p f\,(a)\big).$$

Remarque 16.30
Si $\nabla f\,(a) \neq 0$, alors $\nabla f\,(a)$ est positivement colinéaire au vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale : l'application $v \longmapsto \nabla f\,(a) \cdot v = \mathrm{D}_v\,f\,(a)$, définie sur la sphère-unité, est maximale en le vecteur $v = \dfrac{1}{\|\nabla f\,(a)\|}\nabla f\,(a)$.

16.3 Opérations sur les fonctions différentiables

16.3.1 Combinaison linéaire

Proposition 16.31
Soient U un ouvert de E, $f,g : U \longrightarrow F$ et $a \in U$.

Si f et g sont différentiables en a, alors $f+g$ l'est aussi et $\mathrm{d}(f+g)(a) = \mathrm{d}f(a) + \mathrm{d}g(a)$.

Si f est différentiable en a, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf l'est aussi et $\mathrm{d}(\lambda f)(a) = \lambda\,\mathrm{d}f(a)$.

Autrement dit, l'application $f \longmapsto \mathrm{d}f(a)$ est linéaire.

16.3.2 Composition par une application linéaire

Proposition 16.32
Soient U un ouvert de E, $f : U \longrightarrow F$, $a \in U$ et $L \in \mathscr{L}(F,G)$.

Si f est différentiable en a, alors $L \circ f$ l'est aussi et $\mathrm{d}(L \circ f)(a) = L \circ \mathrm{d}f(a)$.

Autrement dit, pour tout vecteur $v \in E$,

$$\mathrm{d}(L \circ f)(a).v = L(\mathrm{d}f(a).v).$$

16.3.3 Composition par une application k-linéaire

Proposition 16.33
Soient U un ouvert de E, $f_1, \ldots, f_k : U \longrightarrow F$, $a \in U$ et $M : F^k \longrightarrow G$ k-linéaire.

Si $f_1, \ldots, f_k$ sont différentiable en a, alors $M(f_1, \ldots, f_k)$ l'est aussi et

$$\mathrm{d}(M(f_1, \ldots, f_k))(a) = \sum_{i=1}^{k} M(f_1(a), \ldots, f_{i-1}(a), \mathrm{d}f_i(a), f_{i+1}(a), \ldots, f_k(a)).$$

Autrement dit, pour tout vecteur $v \in E$,

$$\mathrm{d}(M(f_1, \ldots, f_k))(a).v = \sum_{i=1}^{k} M(f_1(a), \ldots, f_{i-1}(a), \mathrm{d}f_i(a).v, f_{i+1}(a), \ldots, f_k(a)).$$

Un cas particulier important : le produit externe.

Proposition 16.34
Soient U un ouvert de E, $\lambda : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : U \longrightarrow F$ et $a \in U$.

Si λ et g sont différentiables en a, alors

$$\mathrm{d}(\lambda g)(a) = \mathrm{d}\lambda(a)\, g(a) + \lambda(a)\, \mathrm{d}g(a).$$

D'une manière générale, tout produit vérifie le même genre de relation (produit de deux réels, de deux matrices, de deux polynômes, composée de deux endomorphismes, etc).

16.3.4 Composition d'applications différentiables

Ce résultat est souvent appelé règle de la chaîne.

Proposition 16.35
Soient U un ouvert de E, V un ouvert de F, $f : U \longrightarrow V$, $g : V \longrightarrow G$ et $a \in U$.

Si f est différentiable en a et g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et

$$\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g(f(a)) \circ \mathrm{d}f(a).$$

Autrement dit, pour tout vecteur $v \in E$,

$$\mathrm{d}(g \circ f)(a).v = \mathrm{d}g(f(a)).(\mathrm{d}f(a).v)$$

ce qui est conventionnellement noté $\mathrm{d}g(f(a)).\mathrm{d}f(a).v$.

Proposition 16.36
Si E est identifié à $\mathbb{R}^p$, F à $\mathbb{R}^n$ et G à $\mathbb{R}^q$ par choix de bases, alors cela se traduit sur les matrices jacobiennes :

$$\mathrm{J}(g \circ f)(a) = \mathrm{J}\,g(f(a)) \times \mathrm{J}\,f(a).$$

On retrouve la règle de composition des dérivées partielles de première année. En particulier, les changements de variables entrent dans cette catégorie des composées de fonctions différentiables.

Exercice 16.37
Soient U, V deux ouverts et $f : U \longrightarrow V$ une bijection différentiable sur U telle que f^{-1} le soit aussi.

Que dire de la matrice jacobienne de f en tout point de U ?

Exemple 16.38
Soient f une fonction différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un ouvert D et x, y deux fonctions différentiables sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ telles que pour tout $(u,v) \in U,\ \Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v)) \in D$.

Alors la fonction composée $g : (u,v) \longmapsto f(\Phi(u,v))$ est différentiable sur U et on a l'égalité matricielle

$$\begin{pmatrix} \partial_1 g(u,v) & \partial_2 g(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 f(\Phi(u,v)) & \partial_2 f(\Phi(u,v)) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_1 x(u,v) & \partial_2 x(u,v) \\ \partial_1 y(u,v) & \partial_2 y(u,v) \end{pmatrix},$$

ce qui se traduit, en clair, par

$$\forall (u,v) \in U, \quad \begin{cases} \partial_1 g(u,v) = \partial_1 f(\Phi(u,v))\, \partial_1 x(u,v) + \partial_2 f(\Phi(u,v))\, \partial_1 y(u,v) \\ \partial_2 g(u,v) = \partial_1 f(\Phi(u,v))\, \partial_2 x(u,v) + \partial_2 f(\Phi(u,v))\, \partial_2 y(u,v) \end{cases}$$

Avec les notations des physiciens, c'est plus clair, à condition de fixer les noms des variables selon leur rang :

$$\forall (u,v) \in U, \quad \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\Phi(u,v))\, \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\Phi(u,v))\, \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\ \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\Phi(u,v))\, \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\Phi(u,v))\, \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{cases}$$

voire même, de façon encore plus abrégée :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial g}{\partial v} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v} \end{cases}$$

Remarque 16.39
Attention ! Plus on utilise des notations abrégées, plus il y a de sous-entendus ! Donc pour comprendre correctement ces égalités, il faut les replacer dans le contexte, donc ne pas oublier ces sous-entendus.

Exemple 16.40 (Cas particulier important : le passage en coordonnées polaires)
Si f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, alors $g : (r,\theta) \longmapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\Phi(r,\theta))\cos\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\Phi(r,\theta))\sin\theta \\ \dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -\dfrac{\partial f}{\partial x}(\Phi(r,\theta))\, r\sin\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\Phi(r,\theta))\, r\cos\theta \end{cases}$$

Avec ces changements de variables, on peut résoudre quelques équations aux dérivées partielles simples, la difficulté étant de trouver un bon changement de variables. En pratique, il est presque toujours donné par l'énoncé.

Exercice 16.41
Déterminez les fonctions différentiables sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ telles que $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Exercice 16.42
Déterminez les fonctions différentiables sur $\mathbb{R}^2$ telles que $2\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, en posant $x = 2u - v$ et $y = v - u$.

Exercice 16.43
Déterminez les fonctions différentiables sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ telles que $2xy\dfrac{\partial f}{\partial x} + \left(1 + y^2\right)\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, en posant $x = \dfrac{u^2 + v^2}{2}$ et $y = \dfrac{u}{v}$.

16.3.5 Dérivation le long d'un chemin

On appelle ici chemin une fonction $\gamma : I \longrightarrow E$ continue sur I, comme pour la définition de connexité par arcs (*cf.* Définition 1.138).

Proposition 16.44
Soient U un ouvert de E, $f : U \longrightarrow F$ et $\gamma : I \longrightarrow U$ un chemin.

Si γ est dérivable en $t \in I$ et f est différentiable en $\gamma(t)$, alors $f \circ \gamma$ est dérivable en t et

$$(f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t)).\gamma'(t).$$

Un cas particulier : si f est à valeurs réelles.

Proposition 16.45
Soient U un ouvert de E, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\gamma : I \longrightarrow U$ un chemin.

Si γ est dérivable en $t \in I$ et f est différentiable en $\gamma(t)$, alors $f \circ \gamma$ est dérivable en t et

$$(f \circ \gamma)'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t).$$

Dans le cas où E est identifié à $\mathbb{R}^p$ par choix d'une base, en notant $\gamma(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{pmatrix}$, on a

$$(f \circ \gamma)'(t) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))\, u_i'(t).$$

Si la situation précédente est valable pour tout $t \in I$, alors le support Γ de γ (*i.e.* son image) est une courbe.

- Si pour tout $t \in I$, les vecteurs $\nabla f(\gamma(t))$ et $\gamma'(t)$ sont orthogonaux, alors la fonction f est constante sur la courbe Γ : on dit que Γ est une ligne de niveau.

- Si pour tout $t \in I$, les vecteurs $\nabla f(\gamma(t))$ et $\gamma'(t)$ sont colinéaires de même sens, alors la courbe Γ est une courbe sur laquelle quand on se déplace, les variations relatives de f sont maximales : on dit que Γ est une ligne de champ de f.

- Par conséquent, si une ligne de niveau et une ligne de champ se croisent en un point, les vecteurs tangents en ce point sont orthogonaux : on dit que les lignes de champ sont orthogonales aux lignes de niveau.

Exemple 16.46

- Les lignes de niveau dans $\mathbb{R}^2$ de la fonction $f : (x, y) \longmapsto x^2 + y^2$ sont les courbes inscrites dans des cercles ; les lignes de champ sont les courbes inscrites dans les droites passant par l'origine.

- Les lignes de niveau dans $\mathbb{R}^2$ de la fonction $f : (x, y) \longmapsto xy$ sont les courbes inscrites dans les hyperboles d'asymptotes (Ox) et (Oy) ; les lignes de champ sont les courbes inscrites dans les hyperboles d'asymptotes les deux bissectrices des axes.

16.4 Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

16.4.1 Définition

Si une fonction $f : U \longrightarrow F$ est différentiable en tout point d'un ouvert U, alors pour tout $a \in U$, $\mathrm{d}f(a)$ est une application linéaire (continue) de E dans F, donc un élément de $\mathscr{L}_c(E, F)$ (qui est égal à $\mathscr{L}(E, F)$ dans ce cours, puisque les dimensions de E et F sont finies). On peut alors définir l'application $\mathrm{d}f : U \longrightarrow \mathscr{L}(E, F)$ (remarque : $\mathscr{L}(E, F)$ est aussi de dimension finie selon les hypothèses de ce cours).

Définition 16.47
On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U quand $\mathrm{d}f$ est une application continue de U dans $\mathscr{L}(E, F)$.

Un exemple fondamental : les applications linéaires ou k-linéaires.

16.4.2 Caractérisation

Théorème 16.48
Soient U un ouvert de E et $f : U \longrightarrow F$.

En identifiant E et $\mathbb{R}^p$ par choix d'une base quelconque, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U ssi f possède des dérivées partielles en tout point de U et si toutes ses dérivées partielles sont continues sur U.

16.4.3 Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Grâce aux théorèmes d'opérations et de composition des fonctions continues, il devient évident que

- toute combinaison linéaire d'applications $\mathscr{C}^1$ est $\mathscr{C}^1$
- tout produit ou quotient (sous réserve de définition) de fonctions $\mathscr{C}^1$ est $\mathscr{C}^1$
- toute composée de fonctions $\mathscr{C}^1$ est $\mathscr{C}^1$.

Exemple 16.49

- Les applications coordonnées $(x_1, \dots, x_p) \longmapsto x_i$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ donc toute application de U dans $\mathbb{R}$ qui est polynomiale en ses p variables est elle-même de classe $\mathscr{C}^1$: le produit scalaire, le déterminant sont des applications de classe $\mathscr{C}^1$.
- On retrouve ainsi que l'application $A \longmapsto A^{-1}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 16.50
La fonction $f : (x, y) \longmapsto \dfrac{y^4}{x^2 + y^2}$ prolongée en $(0, 0)$ par 0 est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 16.51
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.

On pose $\varphi(x, y) = \dfrac{1}{y - x} \displaystyle\int_x^y f$ si $x \neq y$ et $\varphi(x, x) = f(x)$.

Montrez que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

16.4.4 Caractérisation des fonctions constantes parmi les $\mathscr{C}^1$

Proposition 16.52
Soient U un ouvert de E, $f : U \longrightarrow F$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $a, b \in U$.

Pour tout chemin $\gamma : [0\,;\,1] \longrightarrow U$ de classe $\mathscr{C}^1$ tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$, on a

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t)).\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 16.53
Si U est un ouvert connexe par arcs de E et f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, alors f est constante sur U ssi $\mathrm{d}f = 0$ *sur U.*

Remarque 16.54
Attention ! Ce résultat n'est valable que sur un ouvert connexe par arcs ! Dans le cas contraire, on est dans une situation analogue à celle rencontrée sur $\mathbb{R}$: la fonction $x \longmapsto \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{x}$ est de dérivée nulle sur $\mathbb{R}^*$ mais n'est pas constante sur $\mathbb{R}^*$.

16.5 Vecteurs tangents à une partie

Définition 16.55
Soient A une partie de E, $a \in A$ et $v \in E$.

On dit que v est un vecteur tangent à A en a quand il existe un chemin γ défini au voisinage de 0, dérivable en 0 et à valeurs dans A tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$.

L'ensemble des vecteurs tangents à A en a est noté $\mathrm{T}_a(A)$. Il contient toujours le vecteur nul. Quand il s'agit d'un sous-espace vectoriel de E, on l'appelle le sous-espace tangent à A en a.

Proposition 16.56
Soient U un ouvert de E et $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On pose $A = g^{-1}(\{0\})$.

Pour tout $a \in A$ tel que $\mathrm{d}g(a) \neq 0$, l'ensemble des vecteurs tangents à A en a est le sous-espace $\ker \mathrm{d}g(a)$.

Dans le cas où $\mathrm{d}g(a) = 0$, il n'y a pas de résultat général.

Remarque 16.57
- Dans le cas où $p = 2$, A est appelé une ligne de niveau d'équation $g(x, y) = 0$.

  Si $M = (a, b) \in A$ et $\mathrm{d}g(M) \neq 0$, alors $\mathrm{T}_M(A)$ est la droite vectorielle d'équation $\dfrac{\partial g}{\partial x}(M)\, x + \dfrac{\partial g}{\partial y}(M)\, y = 0$ et $\nabla g(M)$ est un vecteur normal à cette droite.

  La droite affine $M + \mathrm{T}_M(A)$ d'équation $\dfrac{\partial g}{\partial x}(M)(x - a) + \dfrac{\partial g}{\partial y}(M)(y - b) = 0$ est la tangente en M.

- Dans le cas où $p = 3$, A est appelé une surface de niveau d'équation $g(x, y, z) = 0$.

  Si $M = (a, b, c) \in A$ et $\mathrm{d}g(M) \neq 0$, alors $\mathrm{T}_M(A)$ est le plan d'équation $\dfrac{\partial g}{\partial x}(M)\,x + \dfrac{\partial g}{\partial y}(M)\,y + \dfrac{\partial g}{\partial z}(M)\,z = 0$ et $\nabla g(M)$ est un vecteur normal à ce plan.

  Le plan affine $M + \mathrm{T}_M(A)$ d'équation $\dfrac{\partial g}{\partial x}(M)(x - a) + \dfrac{\partial g}{\partial y}(M)(y - b) + \dfrac{\partial g}{\partial z}(M)(z - c) = 0$ est le plan tangent en M.

Les physiciens utilisent aussi le terme d'équipotentielle. Par extension, en dimension quelconque, le vecteur $\nabla g(M)$ est appelé vecteur normal à la ligne de niveau d'équation $g(M) = 0$.

Exercice 16.58
Soit A l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Soient M_0 et M_1 deux point de A tels que les tangentes à A en M_0 et M_1 se coupent en un point N.

Montrez que la droite (ON) passe par le milieu de $[M_0M_1]$.

16.6 Optimisation au premier ordre

16.6.1 Vocabulaire

Définition 16.59
Soient f une fonction de E dans $\mathbb{R}$ définie sur une partie A et $a_0 \in A$.

On dit que

- f possède un maximum local sur A en a_0 quand il existe $r > 0$ tel que

$$\forall a \in B(a_0, r) \cap A, \quad f(a) \leqslant f(a_0)$$

- f possède un minimum local sur A en a_0 quand il existe $r > 0$ tel que

$$\forall a \in B(a_0, r) \cap A, \quad f(a) \geqslant f(a_0)$$

- f possède un extremum local sur A en a_0 quand f possède un maximum ou un minimum local sur A en a_0.

Définition 16.60
Soient f une fonction de E dans $\mathbb{R}$ définie sur une partie A et $a_0 \in A$.

On dit que

- ▹ f possède un maximum global sur A en a_0 quand

$$\forall a \in A, \quad f(a) \leqslant f(a_0)$$

- ▹ f possède un minimum global sur A en a_0 quand

$$\forall a \in A, \quad f(a) \geqslant f(a_0)$$

- ▹ f possède un extremum global sur A en a_0 quand f possède un maximum ou un minimum global sur A en a_0.

La recherche des points en lesquels une fonction possède des extrema (locaux ou globaux) dépend à la fois des propriétés de la fonction et de l'ensemble sur lequel la fonction est définie.

16.6.2 Points critiques, extrema locaux d'une fonction sur un ouvert

Définition 16.61
Soient U un ouvert de E et $f : U \longrightarrow F$ différentiable sur U.

Un point critique de f est un point $a \in U$ tel que $\mathrm{d}f(a) = 0$.

Comme dans le cours de première année, on retrouve la condition nécessaire d'existence d'un extremum local pour les fonctions à valeurs réelles.

Proposition 16.62
Soient U un ouvert de E, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur U et $a \in U$.

Si f possède un extremum local en a, alors a est un point critique de f.

Remarque 16.63
- ▹ La réciproque est fausse (contre-exemple : la selle de cheval $(x, y) \longmapsto x^2 - y^2$).
- ▹ Ce résultat n'est valable que sur un ouvert, donc en particulier en tout point intérieur à une partie, mais pas sur les bords. En général, on distingue donc dans l'étude des extrema les points sur la frontière et ceux à l'intérieur.

Exercice 16.64
Déterminez les extrema de la fonction $(x, y) \longmapsto x^3 + y^3 - 3xy$.

Exercice 16.65
Même question avec $(x, y) \longmapsto x^3 + x^2 + y^2$.

Exercice 16.66
Même question avec $(x, y) \longmapsto x^2 + x^2 y + y^3$.

16.6.3 Extrema locaux d'une fonction sur une partie

La recherche des extrema locaux sur une partie quelconque est souvent un problème difficile. Néanmoins, on dispose de quelques résultats.

D'abord, on généralise le théorème précédent (admis).

Proposition 16.67
Soient U un ouvert de E, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur U, A une partie de U et $a \in A$.

Si f possède un extremum local sur A en a, alors $\mathrm{d}f\,(a)$ s'annule sur $\mathrm{T}_a\,(A)$.

En conséquence, on a un résultat dans certains cas particuliers d'équipotentielles, appelé théorème d'optimisation sous une contrainte.

Proposition 16.68
Soient U un ouvert de E et $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.

Soient $A = g^{-1}\,(\{0\})$ et $a \in A$.

Si f possède un extremum local sur A en a et si $\mathrm{d}g\,(a) \neq 0$, alors $\mathrm{d}f\,(a)$ est colinéaire à $\mathrm{d}g\,(a)$, ce qui revient à dire que les vecteurs gradients de f et g en a sont colinéaires.

Remarque 16.69
Là encore, il s'agit de conditions nécessaires mais pas suffisantes en général. Une fois les points candidats trouvés, il faut toujours une étude locale pour les accepter ou non, ou bien utiliser un théorème d'existence comme le théorème des bornes atteintes.

Exercice 16.70
Déterminez les extrema de la fonction $(x, y) \longmapsto xy$ sur la courbe d'équation $x^4 + y^4 = 1$.

Exercice 16.71
Même question avec la fonction $(x, y) \longmapsto x^3 + 2y^3$ sur la courbe d'équation $x^2 - y^2 = 1$.

Exercice 16.72
Même question avec la fonction $(x, y, z) \longmapsto x + y + z$ sur la surface d'équation $x^2 + y^2 - 2z^2 = 2$.

16.7 Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

16.7.1 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Pour une fonction quelconque définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$, on peut éventuellement définir récursivement ses dérivées partielles d'ordre k comme étant les dérivées partielles des dérivées partielles d'ordre $(k-1)$ quand cela a un sens.

Évidemment, l'ordre dans lequel on effectue les dérivations a une importance.

Si $i = (i_1, \ldots, i_k) \in [\![1\ ;\ p]\!]^k$ est un multi-indice, on note $\partial_i f$, $\partial_{i_1,\ldots,i_k} f$ ou $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}}$ la dérivée partielle $\partial_{i_1}\left(\partial_{i_2} \ldots \partial_{i_k} f\right)$.

L'ordre des dérivées partielles se lit donc de la droite vers la gauche.

A priori si une fonction a p variables, elle peut posséder jusqu'à p^k dérivées partielles d'ordre k.

16.7.2 Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

La classe $\mathscr{C}^0$ étant celle des fonctions continues, on peut donner une définition récursive de la classe $\mathscr{C}^k$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Définition 16.73
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : U \longrightarrow F$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

On dit que f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur U quand elle a des dérivées partielles en tout point de U et que celles-ci sont de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ sur U.

On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur U quand pour tout $k \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathscr{C}^k$.

Par application récursive des théorèmes d'opérations précédents, on obtient les théorèmes d'opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sans difficulté.

16.7.3 Théorème de Schwarz

Dans le cas des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, il y a finalement bien moins de dérivées partielles que prévu.

Théorème 16.74
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \longrightarrow F$.

Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U, alors pour tout $(i, j) \in [\![1\ ;\ p]\!]^2$, $\partial_i\left(\partial_j f\right) = \partial_j\left(\partial_i f\right)$.

On en déduit par récurrence que pour toute fonction de classe $\mathscr{C}^k$, l'ordre des dérivations (jusqu'à k dérivations successives) n'importe pas.

16.8 Optimisation au second ordre

16.8.1 Hessienne

Définition 16.75
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et $a \in U$.

On appelle hessienne de f en a la matrice $\mathrm{H}_f(a) = \left(h_{i\,j}\right) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (i, j) \in [\![1 \, ; p]\!]^2, \ \ h_{i\,j} = \partial_i \, \partial_j f(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(a).$$

D'après le théorème de Schwarz, la hessienne de f est alors une matrice symétrique.

On lui associe l'application $\mathrm{h}_f(a)$ de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ définie de la façon suivante :

$$\forall v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p, \ \ \mathrm{h}_f(a).v = v^\top \, \mathrm{H}_f(a)\, v.$$

C'est un produit scalaire (canonique) entre le vecteur-colonne v et $\mathrm{H}_f(a)\, v$. Cette application est appelée la forme hessienne de f en a (à titre culturel, on appelle ce genre d'application des formes quadratiques).

En clair, on a

$$\mathrm{h}_f(a).v = \sum_{1 \leqslant i, j \leqslant p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(a)\, v_i v_j.$$

16.8.2 Développement limité à l'ordre 2

On admet le résultat suivant, appelé formule de Taylor-Young à l'ordre 2.

Proposition 16.76
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et $a \in U$.

Pour tout vecteur v au voisinage de 0, on a

$$f(a+v) = f(a) + \mathrm{d}f(a).v + \frac{1}{2}\,\mathrm{h}_f(a).v + o\left(\|v\|^2\right).$$

Ce développement limité est souvent écrit à l'aide du gradient et de la hesienne :

$$f(a+v) = f(a) + \nabla f(a) \cdot v + \frac{1}{2}\left(\mathrm{H}_f(a)\, v\right) \cdot v + o\left(\|v\|^2\right).$$

16.8.3 Application à l'étude des points critiques

Proposition 16.77
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et $a \in U$.

Si f possède un minimum local en a, alors a est un point critique de f et $\mathrm{H}_f(a) \in \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$.

Remarque 16.78
Attention ! La réciproque est fausse. Néanmoins, elle est « presque vraie » en ajoutant une précision.

Proposition 16.79
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et $a \in U$.

Si a est un point critique de f et $\mathrm{H}_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$, alors f possède un minimum local strict en a.

Cas particulier très courant : les applications à deux variables.

Soient f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et $a \in U$.

On a

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{H}_f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(a) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est définie-positive ssi sa trace et son déterminant sont strictement positifs.

En remplaçant f par $-f$, on en déduit des résultats similiaires à propos des maxima locaux.

Proposition 16.80
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et $a \in U$.

Si f possède un maximum local en a, alors a est un point critique de f et $\mathrm{H}_f(a) \in \mathcal{S}_p^-(\mathbb{R})$ (i.e. c'est une matrice symétrique négative, ses valeurs propres sont négatives).

Proposition 16.81
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et $a \in U$.

Si a est un point critique de f et $\mathrm{H}_f(a) \in \mathcal{S}_p^{--}(\mathbb{R})$ (i.e. c'est une matrice définie-négative, ses valeurs propres sont strictement négatives), alors f possède un maximum local strict en a.

Pour une application à deux variables, sa hessienne est définie-négative ssi sa trace est strictement négative et son déterminant strictement positif.

Proposition 16.82
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et $a \in U$.

Si a est un point critique de f et $\mathrm{H}_f(a)$ est une matrice symétrique ayant deux valeurs propres non-nulles de signes opposés, alors f ne possède pas d'extremum en a (le point a est appelé point-col ou point-selle).

Exercice 16.83
Déterminez les extrema de la fonction $(x, y) \longmapsto 2y^2 + 2x^2 - x^4$.

Exercice 16.84
Même question avec $(x, y) \longmapsto y\left(x^2 + \ln^2 y\right)$.

Exercice 16.85
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

On pose $f : (x, y) \longmapsto \dfrac{1}{2x}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(y - a_i)^2 + \dfrac{n}{2}\ln x$.

Déterminez, s'ils existent, les extrema de f.

Exercice 16.86
Déterminez les extrema de la fonction $(x, y) \longmapsto x^3 + y^2$.

Deuxième partie

Exercices

Chapitre 1

Espaces vectoriels normés

$\star$ Exercice proche du cours
$\star\star$ Exercice de difficulté normale
$\star\star\star$ Exercice difficile (voire très difficile)
+ Exercice à faire en priorité

+ $\star\star$ Exercice 1.1 (Exercice 1)
Soit u une suite réelle bornée. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \left\{u_p \mid p \geqslant n\right\}$, $a_n = \inf U_n$ et $b_n = \sup U_n$.

(1) Justifiez l'existence des suites a et b et étudiez leur monotonie, ainsi que leur convergence.

(2) Montrez que u converge ssi a et b ont la même limite.

Note culturelle : la limite de a s'appelle la limite inférieure de u, notée $\underline{\lim}\, u$ et celle de b est la limite supérieure, notée $\overline{\lim}\, u$.

+$\star$ Exercice 1.2 (Exercice 2)
Montrez que les applications N introduites ci-dessous sont des normes :

(1) si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, l'application N définie sur $\mathbb{R}^n$ par $N(X) = \|AX\|_2$;

(2) sur $E = \mathscr{C}^1([a\,;b], \mathbb{K})$, $N(f) = |f(a)| + \displaystyle\int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t$;

(3) pour des réels $\alpha_0 < \cdots < \alpha_n$ fixés, l'application N définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $N(P) = \max\limits_{k \in [\![0;n]\!]} |P(\alpha_k)|$.

$\star$ Exercice 1.3 (Exercice 3)
Sur $E = \mathbb{R}^2$, on définit

$$\|(x, y)\| = \max(|x|, |x + 2y|).$$

Démontrez que $\|\cdot\|$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$. Représentez graphiquement la boule-unité.

$+\star\star$ Exercice 1.4 (Exercice 4)
Les normes définies dans l'exercice 2 sont-elles équivalentes à la norme $\|\cdot\|_\infty$, la norme $\|\cdot\|_1$, la norme $\|\cdot\|_2$?

$+\star$ Exercice 1.5 (Exercice 5)
Soit $\theta \not\equiv 0\,[\pi]$. Montrez que $(\sin(n\theta))$ et $(\cos(n\theta))$ divergent.

$+\star$ Exercice 1.6 (Exercice 6)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que la suite $\left(A^k\right)$ converge. Montrez que sa limite est la matrice d'un projecteur.

$\star\star$ Exercice 1.7 (Exercice 7)
Cet exercice prolonge le premier.

Soit u une suite vérifiant la propriété

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ \ p \geqslant n \geqslant N \implies \left|u_n - u_p\right| \leqslant \varepsilon.$$

Montrez que u est bornée, puis en vous servant des suites a et b définies comme ci-dessus, montrez que u converge.

Note culturelle : on dit que u est une suite de Cauchy et on a donc montré que toute suite de Cauchy converge.

$+\star\star$ Exercice 1.8 (Exercice 8)
On note ℓ_1 l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que la série $\sum u_k$ soit absolument convergente, et on pose :

$$\forall u = (u_k) \in \ell_1,\ \ N(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|\,.$$

(1) Justifiez que ℓ_1 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(2) Montrez que N est une norme sur ℓ_1. On notera désormais $\|u\|_1$ pour $N(u)$.

(3) Justifiez que, si $\left(u^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de ℓ_1 convergeant vers la suite $a \in \ell_1$ pour la norme 1, alors

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \ u_k^{(n)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} a_k.$$

(4) Montrez que la réciproque est fausse.
Indication : on pourra étudier l'exemple où, pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, $u_k^{(n)} = \exp\left(\dfrac{-k}{n+1}\right)$.

+★ Exercice 1.9 (Exercice 9)
Soit E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites bornées muni de la norme infinie.

Montrez que les applications $u \longmapsto (u_{n+1} - u_n)$ et $u \longmapsto \dfrac{u_0 + \cdots + u_n}{n+1}$ sont des applications continues de E dans E.

+ ★ ★ Exercice 1.10 (Exercice 10)
Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $A = (a_{ij})$ on pose $\|A\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

(1) Montrez que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.

(2) Montrez que l'application $A \longmapsto A^\top$ est un endomorphisme continu et déterminez sa norme subordonnée.

★★ Exercice 1.11 (Exercice 11)
Soit $E = \mathscr{C}^0([0\,;1], \mathbb{R})$. On pose $A = \{f \in E \mid f \geqslant 0\}$ et pour $f \in E$, $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f|$.

(1) Montrez que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur E.

(2) Déterminez $\mathring{A}$ dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$, puis dans $(E, \|\cdot\|_1)$.

(3) On pose $D = \mathscr{D}^1([0\,;1], \mathbb{R})$ le sous-espace des fonctions dérivables et P le sous-espace des fonctions polynômes.
Déterminez les intérieurs de P et D dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

★★ Exercice 1.12 (Exercice 12)
Cet exercice prolonge le précédent, les notations sont reprises.

Soit $u : E \longrightarrow E$ qui à toute fonction f de E associe sa primitive qui s'annule en 0. Vérifiez que u est un endomorphisme de E.

Est-il continu de $(E, \|\cdot\|_?)$ dans $(E, \|\cdot\|_?)$ (vous étudierez les quatre possibilités) ? Quand c'est le cas, déterminez la norme subordonnée de u.

+ ★ ★ Exercice 1.13 (Exercice 13)
Soit $E = \left\{f \in \mathscr{C}^1([0\,;1], \mathbb{R}) \;\middle|\; f(0) = f(1) = 0\right\}$. Pour $f \in E$, on pose $\|f\| = \sup\limits_{[0;1]} |f'|$.

(1) Montrez que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.

(2) Soit $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 f$. Montrez que φ est continue et déterminez $|||f|||$.

+★★ Exercice 1.14 (Exercice 14)
Soient E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.

(1) Montrez que si $F \neq E$, alors $\mathring{F} = \varnothing$ et $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.

(2) Montrez que si F est un hyperplan, alors F est fermé ou dense dans E.

+★ Exercice 1.15 (Exercice 15)
Soient E un espace vectoriel normé et A une partie de E.

Montrez que $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A et $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A. Montrez que la frontière de A est un fermé d'intérieur vide.

★ Exercice 1.16 (Exercice 16)
Une intersection d'ouverts est-elle toujours un ouvert ? Une réunion de fermés est-elle toujours un fermé ?

+★ Exercice 1.17 (Exercice 17)
Montrez que si A est une partie convexe d'un espace vectoriel normé E, alors il en est de même pour $\overline{A}$ et $\mathring{A}$.

★★ Exercice 1.18 (Exercice 18)
Soient E un espace vectoriel normé, A une partie de E et $x \in E$. On dit que x est un point d'accumulation de A quand il existe une suite injective de $A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x. On dit que x est un point isolé de A quand il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \cap A = \{x\}$.

(1) Exemples. On pose $A = \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$ dans $\mathbb{R}$: montrez que tous les points de A sont isolés, que le seul point d'accumulation de A est 0 et que A n'est pas fermé. On pose $B = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \;\middle|\; (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$: quels sont les points d'accumulation de B ?

(2) Montrez que x est un point d'accumulation ssi pour tout $r > 0$, $B(x,r) \cap A$ est un ensemble infini.

(3) On note A' l'ensemble des points d'accumulation de A et A^d l'ensemble des points isolés dans A. Montrez que $\overline{A} = A' \sqcup A^d$.

(4) Montrez que A' est un fermé.

★★ Exercice 1.19 (Exercice 19)
Soient E, F deux espaces vectoriels normés et $f : E \longrightarrow F$. Montrez l'équivalence entre les propositions :

(1) f est continue

(2) $\forall A \in \mathscr{P}(E)\,,\ \ f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$

(3) $\forall B \in \mathscr{P}(F)\,,\ \ f^{-1}\left(\mathring{B}\right) \subseteq \overbrace{f^{-1}(B)}^{\circ}$

+★★ Exercice 1.20 (Exercice 20)
Soient A, B deux fermés disjoints d'un espace vectoriel normé E.

(1) Montrez que $\{x \in E \mid d(x, A) > d(x, B)\}$ est un ouvert.

(2) Montrez qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $A \subseteq U$ et $B \subseteq V$.

+★★ Exercice 1.21 (Exercice 21)
Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Pour $r > 0$, on pose $V(A, r) = \{x \in E \mid d(x, A) < r\}$.

Montrez que $V(A, r)$ est un ouvert de E et $\displaystyle\bigcap_{r>0} V(A, r) = \overline{A}$.

+★★ Exercice 1.22 (Exercice 22)
Soient E un espace vectoriel normé, K un compact de E, $k \in [0\,;1[$ et $f : K \longrightarrow K$ telle que

$$\forall (x, y) \in K^2,\ \ \|f(x) - f(y)\| \leqslant k\,\|x - y\|\,.$$

Soit u la suite définie par u_0 quelconque dans K et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Montrez que u converge et que sa limite est l'unique point fixe de f.

★★ Exercice 1.23 (Exercice 23)
Soient E un espace vectoriel normé et A une partie non-vide de E. On appelle diamètre de A, noté $\delta(A)$, la borne supérieure dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ des $\|x - y\|$ quand $(x, y) \in A^2$.

(1) Montrez que $\delta(A) < +\infty$ ssi A est bornée.

(2) Quel est le diamètre d'une boule ?

(3) Montrez que si A est compacte, alors il existe $(a, b) \in A^2$ tel que $\delta(A) = \|a - b\|$. Est-ce encore vrai si on suppose seulement A bornée ? A fermée ?

$+\star\star$ Exercice 1.24 (Exercice 24)
Soient E un espace vectoriel normé et A, B deux parties non-vides de E. On pose $d(A, B) = \inf_{(a,b)\in A\times B} \|a-b\|$, appelé distance de A à B.

(1) Montrez que si $d(A, B) > 0$, alors A et B sont disjointes, mais que la réciproque est fausse.

(2) Montrez que si A et B sont compactes, alors $d(A, B)$ est en fait un minimum plutôt qu'une borne inférieure.

(3) Montrez que ce résultat reste vrai si E est de dimension finie, l'une des deux parties est compacte et l'autre fermée.

(4) Est-ce encore vrai si on suppose seulement A et B fermées ?

$+\star\star$ Exercice 1.25 (Exercice 25)
Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et $\left(B_n = \overline{B}(a_n, r_n)\right)$ une suite de boules fermées, décroissantes pour l'inclusion, telle que $r_n \longrightarrow 0$.

(1) Montrez que la suite (a_n) admet une sous-suite convergeant vers un vecteur a.

(2) Montrez que $a_n \longrightarrow a$.

(3) Montrez que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \{a\}$.

$\star\star$ Exercice 1.26 (Exercice 26)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrez que l'ensemble des projecteurs est fermé dans $\mathscr{L}(E)$. Est-il borné ? Compact ? Connexe par arcs ?

$\star\star$ Exercice 1.27 (Exercice 27)
Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $\varepsilon > 0$. On pose $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |f(x) - y| \leqslant \varepsilon\right\}$.

(1) Montrez que E est connexe par arcs.

(2) Montrez que si f est une fonction affine, alors E est une partie convexe.

(3) Montrez que la réciproque est vraie.

★★ Exercice 1.28 (Exercice 28)
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et H un hyperplan de E.

(1) Montrez que $E \setminus H$ possède deux composantes connexes par arcs qui sont ouvertes.

(2) Soit B une partie de H telle que $H \neq B$. Montrez que $E \setminus B$ est connexe par arcs.

★★ Exercice 1.29 (Exercice 29)
Soient E un espace vectoriel normé et A, B deux parties de E telles que B est connexe par arcs et B rencontre à la fois A et $E \setminus A$.

Montrez que B rencontre la frontière de A.

★★ Exercice 1.30 (Exercice 30)
Deux parties d'un espace vectoriel normé sont dites homéomorphes quand il existe une bijection continue de l'une dans l'autre telle que la réciproque soit aussi continue.

(1) Montrez que tout intervalle ouvert est homéomorphe à $\mathbb{R}$.

(2) Montrez qu'un intervalle qui contient l'une de ses bornes réelles ne peut pas être homéomorphe à $\mathbb{R}$.

(3) Montrez que toute boule ouverte d'un espace vectoriel normé E est homéomorphe à E.

(4) Montrez qu'aucune boule fermée de E n'est homéomorphe à E.

★★★ Exercice 1.31 (Exercice 31)
Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, autre que $\{0\}$.

(1) Montrez que $a = \inf G \cap \mathbb{R}_+^*$ existe.

(2) Montrez que $G = a\mathbb{Z}$ si $a > 0$ ou G est dense dans $\mathbb{R}$ si $a = 0$.

(3) On pose $G = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ (G est le sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ engendré par 1 et $\sqrt{2}$) et $r = \sqrt{2} - 1$. En considérant la suite (r^n), montrez que G est dense dans $\mathbb{R}$.
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et périodique de périodes 1 et $\sqrt{2}$. Que peut-on dire de f ?

(4) Soient a, b deux réels distincts et non-nuls, on pose $G = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$. Montrez que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, puis que G est dense dans $\mathbb{R}$ ssi $\dfrac{a}{b}$ est un rationnel.
Application : montrez que les ensembles $\{\cos n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $\{\sin n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sont denses dans $[-1 \,;\, 1]$.

$\star\star\star$ Exercice 1.32 (Exercice 32)
Soit $E = \mathscr{C}^0\left([0\ ;\ 1], \mathbb{R}\right)$ muni de la norme infinie $\|f\| = \sup\limits_{[0;1]} |f|$. On note $\overline{B}(0,1)$ la boule-unité fermée.

Soit (t_n) une suite injective à valeurs dans $[0\ ;\ 1]$. Pour $f \in E$, on pose $L(f) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{f(t_n)}{2^n}$.

(1) Montrez que L est une forme linéaire continue sur E.

(2) Déterminez $K = \sup\limits_{f \in \overline{B}(0,1)} |L(f)|$.

(3) Montrez que si la suite (t_n) converge ou si elle est dense dans $[0\ ;\ 1]$, K n'est pas atteinte.

(4) Donnez un exemple de suite (t_n) pour laquelle K est atteinte. Donnez une condition nécessaire et suffisante sur la suite t pour que K soit atteinte.

$\star\star\star$ Exercice 1.33 (Exercice 33)
Soient E un espace vectoriel normé et u une forme linéaire non-nulle et continue sur E. On pose $H = \ker u$ et $K = \sup\limits_{x \in E\setminus\{0\}} \dfrac{|u(x)|}{\|x\|}$.

(1) Justifiez l'existence de K.

(2) Montrez que pour tout $a \in E$, $d(a, H) = \dfrac{|u(a)|}{K}$.

Exercice 1.34 (Oral CCMP, 1)
Soient E un espace vectoriel normé réel et B sa boule-unité ouverte. Montrez que E et B sont homéomorphes (*i.e.* il existe une bijection de E dans B qui est continue et dont la réciproque est aussi continue).

Exercice 1.35 (Oral CCMP, 2)
Soient E un espace vectoriel normé réel et C, D deux parties de E telles que $C \subseteq D \subseteq \overline{C}$ et C convexe. Montrez que D est connexe par arcs.

Exercice 1.36 (Oral CCMP, 3)
Soient E un espace vectoriel normé réel, K un compact de E et $f : K \longrightarrow K$ telle que

$$\forall (x, y) \in K^2,\ \ x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

(1) Montrez que f possède un unique point fixe.

(2) Soit u la suite définie par u_0 quelconque dans K et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrez que u converge vers le point fixe de f.

Exercice 1.37 (Oral CCMP, 4)
Soit u une suite réelle bornée telle que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$. Montrez que l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est un intervalle.

Exercice 1.38 (Oral Centrale, 5)
Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ tel que pour tout $g \in G$ il existe un voisinage V de g tel que $G \cap V = \{g\}$.

(1) Montrez que pour tout compact K de $\mathbb{C}^*$, $G \cap K$ est fini.

(2) Montrez que $G \cap \mathbb{U}$ est un groupe cyclique.

(3) On suppose que G n'est pas contenu dans $\mathbb{U}$. Soit $A = \{|x| \mid x \in G \text{ et } |x| > 1\}$. Montrez que A possède un plus petit élément. Déduisez-en G.

Exercice 1.39 (Oral Centrale, 6)
Soient E, F deux espaces vectoriels normés de dimensions finies et $f : E \longrightarrow F$. On dit que f est propre quand pour tout compact K de F, $f^{-1}(K)$ est un compact de E.

(1) Montrez que si f est propre, alors l'image d'un fermé de E est un fermé de F.

(2) Montrez que f est propre ssi $\|f(x)\| \xrightarrow[\|x\| \longrightarrow +\infty]{} +\infty$.

Exercice 1.40 (Oral X, 7)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, U_n l'ensemble des polynômes réels unitaires de degré n et A_n l'ensemble des polynômes de U_n qui sont simplement scindés (*i.e.* ayant n racines réelles distinctes).

(1) Montrez que A_n est un ouvert de U_n.

(2) Déterminez l'adhérence de A_n.

Chapitre 2

Séries numériques et vectorielles : révisions et compléments

$\star$ Exercice proche du cours
$\star\star$ Exercice de difficulté normale
$\star\star\star$ Exercice difficile (voire très difficile)
+ Exercice à faire en priorité

$\star$ Exercice 2.1 (Exercice 1)

(1) Montrez que la série de terme général $u_n = \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{2n^2}$ est convergente.

(2) Montrez que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \operatorname{Arctan} \dfrac{n}{n+1} - \operatorname{Arctan} \dfrac{n-1}{n}$.

(3) Déduisez-en la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

$\star$ Exercice 2.2 (Exercice 2)

Justifiez que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{2n-1}{n^3-n}$ converge et déterminez sa somme (indication : décomposition en éléments simples).

$\star\star$ Exercice 2.3 (Exercice 3)

Donnez la nature des séries suivantes (α désigne une constante strictement positive, x un réel dans $]-1\,;\,1[$) :

(1) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln^n n}{n^{\ln n}}$

(2) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

(3) $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$

(4) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n\, n^\alpha}{n!}$

(5) $\sum \frac{(-1)^n \ln n}{n^\alpha}$

(6) $\sum \ln\left(1+x^n\right)$

(7) $\sum \frac{\sin n}{2^n}$

(8) $\sum 2\ln\left(n^3+1\right) - 3\ln\left(n^2+1\right)$

(9) $\sum \frac{\sin n \sin \frac{1}{n}}{n}$

(10) $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{(-1)^n+n}$

(11) $\sum_{n\geqslant 0} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$

(12) $\sum \sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}$

(13) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\ln n + \sin \frac{2\pi n}{3}}$

(14) $\sum_{n\geqslant 1} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e}\right)$

(15) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\ln n \ln(\operatorname{ch} n)}$

(16) $\sum \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 t}{n^2+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$

★★ Exercice 2.4 (Exercice 4)

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

(1) Déterminez a et b pour que la série de terme général $\ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$ converge. Dans ce cas, donnez la valeur de sa somme.

(2) Faites de même avec la série de terme général $\sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$.

★★ Exercice 2.5 (Exercice 5)

Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la série de terme général $u_n = \operatorname{ch}^\alpha n - \operatorname{sh}^\alpha n$ converge-t-elle ? Dans ce cas, donnez un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k$.

★★ Exercice 2.6 (Exercice 6)

On pose $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{3/2}$. Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge-t-elle ? Dans ce cas, donnez un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

★★ Exercice 2.7 (Exercice 7, séries associées à des suites définies par récurrence)

(1) Soit u la suite définie par récurrence par $u_1 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{n\mathrm{e}^{u_n}}$.
Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$?

(2) Soit u la suite définie par récurrence par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$.
Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum \left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right)$? Puis celle de $\sum u_n$? Donnez un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

(3) Soit u la suite définie par récurrence par $u_0 \in \left]0\,;\pi\right[$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \sin u_n$.
Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum \left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}\right)$? Puis celle de $\sum u_n$? Donnez un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}$.

★★ Exercice 2.8 (Exercice 8)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $P(x) \geqslant 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\mathrm{e}^k + P(k)}$.

(1) Justifiez l'existence de u_n.

(2) Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

★★ Exercice 2.9 (Exercice 9)

Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.

(1) Justifiez l'existence de u_n.

(2) Montrez que $\dfrac{u_n + u_{n+1}}{2}$ est le reste d'une série alternée absolument convergente.

(3) Déduisez-en la nature de la série $\sum u_n$.

★★ Exercice 2.10 (Exercice 10, utilisation de développements limités ou asymptotiques)

(1) Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$ converge.

(2) Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge.

(3) Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{1+(-1)^n n}$ converge.

(4) Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$ converge.

(5) Déterminez la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} (-1)^n \frac{\ln\left(n+(-1)^n\sqrt{n}\right)}{n}$.

(6) Déterminez la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{1+(-1)^n\sqrt{n}}$.

★★ Exercice 2.11 (Exercice 11)
Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{(-1)^n + n^\alpha}}$ converge-t-elle ?

★★ Exercice 2.12 (Exercice 12, formule de Stirling)

Montrez que la suite de terme général $\dfrac{n!}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{\mathrm{e}}{n}\right)^n$ converge vers un réel strictement positif L (indication : passer au logarithme et penser à une série).

Soit $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t \,\mathrm{d}t$. On montre que $u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ et que $u_{2n} = \dfrac{\pi\,(2n)!}{2^{2n+1}\,(n!)^2}$. En admettant ces résultats, montrez la formule de Stirling :

$$n! \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

★★ Exercice 2.13 (Exercice 13)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $u_n = \dfrac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^a}$.

(1) Dans le cas où $a \leqslant 0$ ou $a > 1$, quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$?

(2) On suppose désormais que $0 < a \leqslant 1$ et on pose $v_n = u_{2n-1} + u_{2n}$. Montrez que la série $\sum v_n$ converge. Déduisez-en la nature de la série $\sum u_n$.

★★ Exercice 2.14 (Exercice 14)

Soient u une suite strictement positive et $\alpha > 0$.

Montrez que les séries de termes généraux u_n, $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$, $w_n = \ln(1+u_n)$ et $x_n = \displaystyle\int_0^{u_n} \frac{1}{1+x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ sont de même nature.

★★ Exercice 2.15 (Exercice 15)

Soit u une suite réelle qui ne s'annule pas telle que $\dfrac{u_{2n+1}}{u_{2n}} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} a$ et $\dfrac{u_{2n}}{u_{2n-1}} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} b$.

Montrez que si $|ab| < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.

★★ Exercice 2.16 (Exercice 16)

Soit u une suite réelle positive décroissante.

Montrez que si $\sum u_n$ converge, alors $u_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

La réciproque est-elle vraie ?

★★ Exercice 2.17 (Exercice 17)

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle strictement positive et bornée telle que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ diverge. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose S_n la somme partielle d'indice n de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.

(1) Montrez que $\dfrac{u_n}{S_n} \sim \ln \dfrac{S_n}{S_{n+1}}$. Déduisez-en la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{u_n}{S_n}$.

(2) Étudiez la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ quand $\alpha \in \,]0\,;1[$.

(3) Soit $\alpha > 1$. Montrez que $\dfrac{u_n}{S_n^\alpha} \leqslant \displaystyle\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$. Déduisez-en la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$.

★★ Exercice 2.18 (Exercice 18)
Soit u une suite strictement positive. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

On suppose que $u_n s_n$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Déterminez un équivalent simple de u_n.

★★ Exercice 2.19 (Exercice 19)
Soit u la suite définie par récurrence par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + u_n^2$. On pose $v_n = \frac{1}{2^n} \ln u_n$, puis $w_n = v_{n+1} - v_n$.

(1) Montrez que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

(2) Montrez que la suite (v_n) converge vers un réel $\ell > 0$. On pose alors $A = \mathrm{e}^{\ell} > 1$.

(3) Montrez que $u_n \sim A^{2^n}$.

★★★ Exercice 2.20 (Exercice 20, transformation d'Abel)
Soient u une suite réelle et v une suite complexe. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

On suppose que la suite u est positive et décroissante de limite nulle et que la suite V est bornée.

(1) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = u_n V_n - \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) V_k$.

(2) Déduisez-en que la série $\sum u_n v_n$ converge.

Applications :

(3) Soit w une suite complexe telle que $\sum w_n$ converge. Montrez que pour tout $a > 0$, $\sum \frac{w_n}{n^a}$ converge aussi.

(4) Soient $a > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Donnez la nature des séries $\sum \frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^a}$, $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n^a}$ et $\sum \frac{\sin(n\theta)}{n^a}$.

(5) Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \geqslant \frac{1 - \cos(2x)}{2}$. Déterminez la nature des séries $\sum \frac{|\cos(n\theta)|}{n^a}$ et $\sum \frac{|\sin(n\theta)|}{n^a}$.

$\star\star\star$ Exercice 2.21 (Exercice 21)
Soit u une suite positive de limite nulle. On appelle U_n la somme partielle d'indice n de la série $\sum u_n$ et on suppose qu'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n - nu_n| \leqslant M$.

(1) Montrez que pour tout $n \geqslant 2$, $\left|\dfrac{U_n}{n} - \dfrac{U_{n-1}}{n-1}\right| \leqslant M\left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}\right)$.

(2) Montrez que la série $\sum u_n$ converge.

$\star\star\star$ Exercice 2.22 (Exercice 22)
Soit $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ une série convergente à termes positifs.

(1) Montrez que $\dfrac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

(2) Montrez que la série $\sum \dfrac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n\,(n+1)}$ converge et montrez que sa somme est la même que celle de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

Exercice 2.23 (Oral Saint-Cyr, 1)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$. Déterminez la nature de la série $\sum u_n$. Donnez un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} u_k$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Exercice 2.24 (Oral IMT, 2)
Soit $\alpha > 0$. Donnez un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \ln^\alpha k$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Exercice 2.25 (Oral CCINP, 3)
Soit u la suite définie par récurrence par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n}$.

(1) Montrez que (u_n) converge et déterminez sa limite.

(2) Déterminez la limite de $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$. Déduisez-en un équivalent de u_n.

Exercice 2.26 (Oral CCINP, 4)
Montrez que pour $n \geqslant 1$, l'équation $x^n + \sqrt{n}x - 1 = 0$ admet une unique solution x_n dans $[0\,;1]$.

Étudiez la suite (x_n) et montrez qu'elle converge vers 0.

Trouvez un équivalent de x_n et étudiez la convergence de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} x_n$.

Exercice 2.27 (Oral CCINP, 5)
Montrez que la suite (u_n) définie par $u_0 \in [0\,;1[$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + u_n^2\right)$ converge vers 0 et donnez la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 2.28 (Oral CCINP, 6)
Quelle est la nature de la série de terme général $\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n\,(n+1)}}\right)$?

Exercice 2.29 (Oral CCINP, 7)
Soient $x, y > 0$. Représentez graphiquement l'ensemble des couples (x, y) tels que la série $\sum \dfrac{x^n}{y^n + n^x}$ converge.

Exercice 2.30 (Oral CCMP, 8)
Étudiez la convergence de la suite (a_n) définie par $a_0 > 0$ et $a_{n+1} = 1 - \mathrm{e}^{-a_n}$.

Déterminez la nature des séries $\sum (-1)^n a_n$ et $\sum a_n^2$.

Déterminez la nature de la série $\sum a_n$ (on pourra étudier la série $\sum \ln \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$).

Exercice 2.31 (Oral CCINP, 9)
Soient (a_n) une suite positive et (u_n) définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2}}{2}$.

(1) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leqslant \dfrac{a_n}{2}$.

(2) Montrez que si la série $\sum a_n$ converge, alors la suite (u_n) converge.

(3) La réciproque est-elle vraie ? Indication : considérer $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Exercice 2.32 (Oral IMT, 10)
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+3} u_n$. On pose $(v_n) = \left(n^2 u_n\right)$.

(1) Déterminez la nature de la série de terme général $\ln \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

(2) Déduisez-en la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 2.33 (Oral Centrale, 11)

Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2-1}$ converge et donnez la valeur de sa somme.

Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{n^2}{\left(n^2+1\right)^2}$ converge et donnez une valeur de n pour que sa somme partielle soit une valeur approchée de sa somme à 10^{-4} près.

Exercice 2.34 (Oral Centrale, 12)

(1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrez que la suite $(H_n - \ln n)_{n\geqslant 1}$ converge.

(2) Déduisez de la question précédente la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

(3) Pour $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$. Calculez $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n)-1}{n}$.

Exercice 2.35 (Oral Centrale, 13)
Si (u_n) est une suite réelle telle que $u_0 = 0$, on pose alors $(v_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n\,(u_n - u_{n-1})$.

On note P_1 la propriété « la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge » et P_2 la propriété « il existe ℓ tel que $u_n \longrightarrow \ell$ et $\sum (\ell - u_n)$ converge ».

(1) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u_n = \operatorname{Arctan} n^\alpha$ pour $n \geqslant 1$, étudiez la véracité des propositions P_1 et P_2.

(2) Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle telle que $\sum a_n$ converge. Montrez que $\sum \dfrac{a_n}{n}$ converge et que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k}{k} = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

(3) Comparez les propriétés P_1 et P_2.

Exercice 2.36 (Oral CCMP, 14)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n n^\alpha}$ converge-t-elle ?

Exercice 2.37 (Oral CCMP, 15)

Soient $\alpha > 0$ et $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$.

(1) On suppose $\alpha > 1$. Montrez que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} R_k = (n+1) R_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^{\alpha-1}}$. Déduisez-en la convergence de la série $\sum R_n$.

(2) Étudiez le cas $\alpha \leqslant 1$.

Exercice 2.38 (Oral CCMP, 16)

Soit $(a_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}^*}$.

(1) On suppose que la série $\sum a_n^{1-1/n}$ converge. Montrez que la série $\sum a_n$ converge.

(2) On suppose que la série $\sum a_n$ converge. Montrez que la série $\sum a_n^{1-1/n}$ converge.
Vous introduirez, pour $\lambda > 1$, l'ensemble $\left\{n \in \mathbb{N}^* \;\middle|\; a_n^{1-1/n} \leqslant \lambda a_n\right\}$ et son complémentaire.

(3) Généralisez en remplaçant $a_n^{1-1/n}$ par $a_n^{1-b_n}$ avec une hypothèse adéquate sur la suite (b_n).

Exercice 2.39 (Oral CCMP, 17)

Soit f une permutation de $\mathbb{N}^*$. On pose $E(f) = \left\{\alpha \in \mathbb{R} \;\middle|\; \sum \frac{f(n)}{n^\alpha} \text{ converge}\right\}$.

(1) Montrez que $E(f)$ peut être vide. Montrez dans le cas contraire que $E(f)$ est un intervalle minoré par 2 et non-majoré.

(2) Soit $B \geqslant 2$. Montrez l'existence de f telle que $E(f) =]B\,;+\infty[$.

Exercice 2.40 (Oral X, 18)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$.

(1) Montrez que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ converge. On note ℓ sa limite.

(2) Montrez que $\ell = -\left(1 + \sqrt{2}\right) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$.

Exercice 2.41 (Oral X, 19)
Soit $\sum x_n$ une série absolument convergente de réels.

(1) Montrez que pour tout réel $p \geqslant 1$, la série $\sum |x_n|^p$ converge.

(2) Déterminez la limite de $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p$ quand $p \longrightarrow +\infty$.

Exercice 2.42 (Oral X, 20)
Soient $\alpha > 0$ et (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Étudiez la convergence de la série $\sum u_n$.

Chapitre 3

Familles sommables

$\star$ Exercice proche du cours
$\star\star$ Exercice de difficulté normale
$\star\star\star$ Exercice difficile (voire très difficile)
+ Exercice à faire en priorité

$\star\star$ Exercice 3.1 (Exercice 23)

La famille $\left(\dfrac{1}{pq\,(p+q)}\right)_{p,q\geqslant 1}$ est-elle sommable ?

$\star\star$ Exercice 3.2 (Exercice 24)

(1) Soit $\alpha > 0$. Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^\alpha}{2^n}$ est convergente. On note $S(\alpha)$ sa somme.

(2) Dans cette question, on pose $\alpha = 1$ et on note $s = S(1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$. En effectuant le changement d'indice $m = n-1$, montrez que $s = 2\left(s - \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^m}\right)$ et donnez la valeur de $S(1)$.

(3) En vous inspirant de ce qui précède, donnez une expression de $S(2)$ en fonction de $S(1)$ et $S(0)$, puis sa valeur.

(4) Montrez que la famille $\left(\dfrac{(-1)^{m+n}\,m}{2^{m+n}}\right)_{m,n\geqslant 0}$ est sommable et calculez sa somme.

$\star\star$ Exercice 3.3 (Exercice 25)

Soit a un complexe tel que $|a| < 1$.

En utilisant un produit de Cauchy, montrez que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\,a^n = \left(\frac{1}{1-a}\right)^2$.

★★ Exercice 3.4 (Exercice 26)

(1) Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$ et $N \in \mathbb{N}$, que vaut $\displaystyle\sum_{n=N}^{+\infty} z^n$?

(2) Soit $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| < 1$. Montrez que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{1-x^{2p+1}}$.

★★ Exercice 3.5 (Exercice 27)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On rappelle que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

(1) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrez que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+m)} \underset{m \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln m}{m}$.

(2) Montrez que la famille $\left(\dfrac{(-1)^m}{m(m+n^2)}\right)_{m,n \geqslant 1}$ est sommable.

(3) Montrez que la famille $\left(\dfrac{(-1)^m}{(m+n)(m+n-1)}\right)_{m,n \geqslant 1}$ est sommable et donnez la valeur de sa somme.

★★ Exercice 3.6 (Exercice 28)

Pour $n \geqslant 2$, on note $P(n)$ le plus grand diviseur premier de n. On note $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, ... la suite croissante des nombres premiers.

(1) Montrez que pour tout $k \geqslant 3$, $p_{k-1} \leqslant p_k - 2$, puis $\dfrac{p_k}{p_k - 1} \leqslant \sqrt{\dfrac{p_k}{p_{k-1}}}$.

(2) Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{nP(n)}$ converge (indication : pensez à une sommation par paquets).

★★ Exercice 3.7 (Exercice 29)

Soit u une suite complexe.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $H_x = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > x\}$, son adhérence est $\overline{H_x} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geqslant x\}$.

(1) Montrez que s'il existe $s_0 \in \mathbb{C}$ tel que la famille $\left(\dfrac{u_n}{n^{s_0}}\right)_{n \geqslant 1}$ est sommable, alors pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$, la famille $\left(\dfrac{u_n}{n^s}\right)_{n \geqslant 1}$ est sommable.

(2) Quand la famille $\left(\dfrac{u_n}{n^s}\right)_{n \geqslant 1}$ est sommable, on pose $f_u(s) = \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{u_n}{n^s}$.
Montrez que l'ensemble de définition de f_u est, s'il est non-vide, $\mathbb{C}$, un ensemble H_x ou un ensemble $\overline{H_x}$.

(3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $D_n = \left\{(d, d') \in (\mathbb{N}^*)^2 \;\middle|\; dd' = n\right\}$. Montrez que $(\mathbb{N}^*)^2 = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} D_n$.

(4) Soient $(a_n), (b_n)$ deux suites complexes et $s \in \mathbb{C}$ tels que les familles $\left(\frac{a_n}{n^s}\right)_{n \geqslant 1}$ et $\left(\frac{b_n}{n^s}\right)_{n \geqslant 1}$ soient sommables.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \sum_{d|n} a_d b_{n/d}$. Montrez que la famille $\left(\frac{c_n}{n^s}\right)_{n \geqslant 1}$ est sommable et que $f_c(s) = f_a(s) \times f_b(s)$.

★★ Exercice 3.8 (Exercice 30)
Cet exercice prolonge le précédent.

On rappelle la définition de l'indicatrice d'Euler : pour $n \in \mathbb{N}^*$, φ_n est le cardinal de l'ensemble $\{k \in [\![1 ; n]\!] \mid k \wedge n = 1\}$.

On définit par récurrence la suite de Möbius : $\mu_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 2$, $\mu_n = -\sum_{\substack{d|n \\ d<n}} \mu_d$.

Enfin, on note δ_n le nombre de diviseurs de n et σ_n la somme des diviseurs de n.

On pose $\zeta = f_1$, $\xi = f_\varphi$ et $M(s) = f_\mu$.

(1) Montrez que l'ensemble de définition (au sens précédent) de ζ est H_1. Montrez que ξ est définie sur H_2.

(2) On admet la relation suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n = \sum_{d|n} \varphi_d$. Donnez une relation valable sur H_2 liant les fonctions ξ et ζ. Justifiez alors que l'ensemble de définition de ξ est H_2.

(3) On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\mu_n| \leqslant 1$. Donnez une relation entre M et ζ et précisez l'ensemble de définition de M.

(4) Déduisez-en la relation : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\varphi_n}{n} = \sum_{d|n} \frac{\mu_d}{d}$ en admettant l'unicité des coefficients u_n d'une fonction f_u.

(5) Exprimez f_δ et f_σ en fonction de ζ et précisez leurs ensembles de définition.

Chapitre 4

Rappels et compléments d'algèbre linéaire

$\star$ Exercice proche du cours
$\star\star$ Exercice de difficulté normale
$\star\star\star$ Exercice difficile (voire très difficile)
$+$ Exercice à faire en priorité

$+\star\star$ Exercice 4.1 (Exercice 1)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille libre de E.

(1) Pour $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, on pose $c_i = \displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq i}} u_k$. Montrez que la famille $(c_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre.

(2) Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. On pose $s = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ et pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, $v_i = s + u_i$. Montrez que la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est liée ssi $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = -1$.

(3) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On pose $s = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i$ et pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, $v_i = s + \lambda u_i$. Montrez qu'il existe exactement deux valeurs de λ pour lesquelles la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est liée.

$+\star\star$ Exercice 4.2 (Exercice 2)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in [\![0\,;\,n]\!]$, on pose $P_k = X^k\,(1-X)^{n-k}$. Montrez que la famille $\mathscr{F}_n = (P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n\,[X]$.

$+\star\star$ Exercice 4.3 (Exercice 3)
Soit f une application d'un ensemble Ω dans $\mathbb{C}$ qui prend une infinité de valeurs.

Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\left(1, f, f^2, \ldots, f^n\right)$ est libre dans l'espace $\mathscr{F}\,(\Omega, \mathbb{C})$.

$+ \star \star$ Exercice 4.4 (Exercice 4)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in [\![0 \,;\, n]\!]$, on pose $P_k = (X+k)^n$. Montrez que la famille $\mathscr{F}_n = (P_0, \ldots, P_n)$ est libre.

$\star$ Exercice 4.5 (Exercice 5)
Soit $a \in \mathbb{C}^*$. $\mathbb{C}$ est vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à z associe $z + a\bar{z}$.

(1) Montrez que f est linéaire.

(2) Montrez que si $|a| \neq 1$, alors f est un automorphisme de $\mathbb{C}$.

(3) Déterminez le noyau et l'image de f dans le cas où $a = \mathrm{e}^{i\alpha}$ (on pourra utiliser l'écriture trigonométrique des complexes).

$+\star$ Exercice 4.6 (Exercice 6)
Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ qui conserve le degré : pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg f(P) = \deg P$.

Montrez que f est un automorphisme de $\mathbb{K}[X]$ (on pourra étudier les restrictions de f à $\mathbb{K}_n[X]$).

$+ \star \star$ Exercice 4.7 (Exercice 7)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $P \in \mathbb{K}_n[X]$, on pose $f(P) = \left(X^2 - 1\right) P' - nXP$.

(1) Montrez que f est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

(2) Montrez que si $P \in \ker f$, alors $X^2 - 1$ divise P, puis justifiez qu'il existe $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P = \left(X^2 - 1\right)^\alpha Q$ et $(Q(1) \neq 0$ ou $Q(-1) \neq 0)$.

(3) Montrez que si n est impair, alors f est un automorphisme.

(4) Montrez que si n est pair, alors $\ker f$ est une droite vectorielle. Déduisez-en la dimension de $\operatorname{Im} f$.

$\star\star$ Exercice 4.8 (Exercice 8)
On pose $E = \mathbb{C}[X]$. Pour $P \in E$, on pose $f(P) = \left(X^2 - 1\right) P' - 2XP(X)$.

(1) Montrez que $f \in \mathscr{L}(E)$.

(2) Déterminez $\ker f$.

(3) Montrez que $\operatorname{Im} f = \{Q \in C[X] \mid Q'(1) = Q(1) \text{ et } Q'(-1) = -Q(-1)\}$. Indication : restreindre à $\mathbb{C}_n[X]$.

★ Exercice 4.9 (Exercice 9)
Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$.

Montrez que $f(\ker(g \circ f)) = \ker g \cap \operatorname{Im} f$.

+★★ Exercice 4.10 (Exercice 10)
Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $(f, g) \in \mathscr{L}(E, F) \times \mathscr{L}(F, G)$.

(1) Montrez que $\ker(g \circ f) = \ker f \iff \ker g \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

(2) Montrez que $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g \iff \ker g + \operatorname{Im} f = F$.

★★★ Exercice 4.11 (Exercice 11)
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On dit que $g \in \mathscr{L}(F, E)$ est un inverse à droite de f quand $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

(1) Montrez que si f possède deux inverses à droite différents, alors f en possède une infinité.

(2) Montrez que si f possède un unique inverse à droite, alors f est un isomorphisme (vous admettrez l'existence d'un supplémentaire de tout sous-espace vectoriel).

+★★ Exercice 4.12 (Exercice 12)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E.

(1) Montrez que $p + q$ est un projecteur ssi $p \circ q = q \circ p = 0$.

(2) Dans ce cas, montrez alors que $\operatorname{Im}(p + q) = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$ et $\ker(p + q) = \ker p \cap \ker q$.

★★ Exercice 4.13 (Exercice 13)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E tels que $p \circ q = 0$. Soit $r = p + q - q \circ p$.

Montrez que r est un projecteur et précisez ses éléments caractéristiques.

★★ Exercice 4.14 (Exercice 14)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On suppose qu'il existe $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$ tel que $f \circ g - g \circ f = \mathrm{id}_E$.

(1) Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f \circ g^n - g^n \circ f = n g^{n-1}$.

(2) Déduisez-en que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $\left(g^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est libre dans $\mathscr{L}(E)$.

(3) Si E est de dimension finie $p \geqslant 1$, que pouvez-vous conclure ?

★★ Exercice 4.15 (Exercice 15)
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = \mathrm{id}_E$. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $u \in E$, on veut résoudre l'équation $x + af(x) = u$ d'inconnue $x \in E$.

(1) Montrez que pour toutes les valeurs de a, sauf une seule a_0, l'équation a une unique solution que vous calculerez.

(2) Dans le cas où $a = a_0$, donnez une condition nécessaire sur u pour qu'il existe une solution, puis si cette condition est satisfaite, déterminez une solution particulière de l'équation qui soit combinaison linéaire de u et $f(u)$. Concluez.

+★★ Exercice 4.16 (Exercice 16)
Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(E)$.

(1) Montrez que $\mathrm{Im}\, f = \ker f$ et, ssi n est pair, $\mathrm{rg}\, f = \dfrac{n}{2}$ et $f^2 = 0$.

(2) Donnez un exemple d'une telle application linéaire f.

(3) Si les conditions de la question (1) sont satisfaites, alors on pose $r = \dfrac{n}{2}$: montrez qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_r & 0 \end{pmatrix}$ (matrice par blocs).

+★★ Exercice 4.17 (Exercice 17)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrez l'équivalence

$$E = \ker f \oplus \mathrm{Im}\, f \iff \ker f^2 = \ker f \iff \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2.$$

★ Exercice 4.18 (Exercice 18)
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $(f, g) \in \mathscr{L}(E, F)^2$. Montrez que $|\mathrm{rg}\, f - \mathrm{rg}\, g| \leqslant \mathrm{rg}\,(f+g) \leqslant \mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g$.

★★ Exercice 4.19 (Exercice 19)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$. On suppose que $u \circ v = 0$ et $u + v \in \mathrm{GL}(E)$. Démontrez que $\mathrm{rg}\, u + \mathrm{rg}\, v = \dim E$.

★★ Exercice 4.20 (Exercice 20)
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.

(1) Soit U un sous-espace vectoriel de E. On pose $\mathscr{A} = \{u \in \mathscr{L}(E,F) \mid U \subseteq \ker u\}$. Montrez que $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E,F)$ tel que pour tout $(f,u) \in \mathscr{L}(E) \times \mathscr{A},\ \ fu \in \mathscr{A}$ et calculez sa dimension.

(2) Montrez que la réciproque est vraie : si $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E,F)$ tel que pour tout $(f,u) \in \mathscr{L}(E) \times \mathscr{A},\ \ fu \in \mathscr{A}$, alors il existe U un sous-espace vectoriel de E tel que $\mathscr{A} = \{u \in \mathscr{L}(E,F) \mid U \subseteq \ker u\}$.

+★ Exercice 4.21 (Exercice 21)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1. Montrez que A peut s'écrire comme le produit d'une matrice colonne par une matrice ligne. Déduisez-en $A^2 = \operatorname{tr}(A)\, A$.

+ ★ ★ Exercice 4.22 (Exercice 22)
Soit f une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \ f(AB) = f(BA)$. Montrez que f est proportionnelle à la trace (indication : faire intervenir la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$).

★ ★ ★ Exercice 4.23 (Exercice 23)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et G un sous-groupe de cardinal n de $\mathrm{GL}(E)$.

On pose $F = \{x \in E \mid \forall g \in G,\ \ g(x) = x\}$.

Montrez que $\dim F = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{g \in G} \operatorname{tr} g$. Indication : on pourra utiliser $p = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{g \in G} g$.

★ Exercice 4.24 (Exercice 24)
Montrez qu'il n'existe pas de couple de matrices $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ tels que $AB - BA = I_n$.

+★ Exercice 4.25 (Exercice 25)
Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n. On suppose que pour tout $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \ \operatorname{tr}(AX) = \operatorname{tr}(BX)$. Montrez que $A = B$.

★ Exercice 4.26 (Exercice 26)
Soient u, v les deux suites réelles telles que $u_0 = 1$, $v_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = -3u_n + 10v_n$ et $v_{n+1} = -3u_n + 8v_n$.

Donnez des expressions de u_n et v_n en fonction de n.

★★ Exercice 4.27 (Exercice 27)
Soient u, v, w les trois suites réelles telles que $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{3}{2}u_n - \dfrac{1}{2}v_n + \dfrac{1}{2}w_n \\ v_{n+1} = 5u_n - \dfrac{5}{2}v_n + 2w_n \\ w_{n+1} = 4u_n - \dfrac{5}{2}v_n + 2w_n \end{cases}$$

Donnez des expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n et leurs limites quand n tend vers $+\infty$.

+★★ Exercice 4.28 (Exercice 28)
Soient $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$ et $C \in \mathscr{M}_{pq}(\mathbb{K})$. On suppose connaître P un polynôme annulateur de A et Q un polynôme annulateur de B.

On pose $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p+q}(\mathbb{K})$.

(1) Montrez que PQ est un polynôme annulateur de M dans le cas où $C = 0$.

(2) Montrez que ce résultat reste vrai même si C n'est pas nulle. Indication : penser à un produit par blocs.

+★★ Exercice 4.29 (Exercice 29)
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et P un polynôme annulateur de A. On définit $B \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{K})$ par blocs : $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

(1) Calculez pour $k \in \mathbb{N}$ la matrice B^k en distinguant les cas k pair et k impair.

(2) On pose $Q(X) = P\left(X^2\right)$. Montrez que Q est un polynôme annulateur de B.

+★★ Exercice 4.30 (Exercice 30)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On définit $B \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{K})$ par blocs : $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$.

(1) Calculez pour $k \in \mathbb{N}$ la matrice B^k.

(2) Déterminez un polynôme annulateur de B.

+ ★ ★ Exercice 4.31 (Exercice 31)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{K}_n[X]$. On pose $d : P \longmapsto P'$, endomorphisme de E, et $f : P \longmapsto P + P'$.

(1) Donnez un polynôme annulateur de d. Déduisez-en un polynôme annulateur de f.

(2) Montrez que f est un automorphisme, puis exprimez son inverse à l'aide de f.

(3) Vérifiez que $f^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k d^k$.

+ ★ ★ Exercice 4.32 (Exercice 32)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $f(M) = M + \operatorname{tr}(M) A$.

(1) Montrez que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

(2) Déterminez un polynôme annulateur de f de degré 2.

(3) Dans quels cas f est-il un automorphisme ? Calculez f^{-1} quand c'est possible.

(4) Dans le cas contraire, vérifiez que f est un projecteur et déterminez ses éléments caractéristiques.

+ ★ ★ Exercice 4.33 (Exercice 33)
Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$.

On suppose que f possède un polynôme annulateur P vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.

Montrez qu'on a alors $\operatorname{Im} f \oplus \ker f = E$.

Exercice 4.34 (Oral CCINP, 1)
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et p, q deux endomorphismes de E.

On suppose que $p + q = \mathrm{id}_E$ et $\operatorname{rg} p + \operatorname{rg} q \leqslant \dim E$.

Montrez que p et q sont deux projecteurs.

Exercice 4.35 (Oral IMT, 2)
Soient E un espace vectoriel de dimension supérieure à 2 et f, g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g \circ f = f$.

(1) Montrez que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des projecteurs.

(2) Que peut-on dire des rangs de f, $f \circ g$ et $g \circ f$?

(3) Montrez que $f \circ g$ est un projecteur sur $\mathrm{Im}\, f$, parallèlement à un sous-espace contenant $\ker g$.

(4) On suppose désormais qu'on a aussi $g \circ f \circ g = g$. Que dire des rangs de f et g ?

(5) Montrez que $E = \mathrm{Im}\, f \oplus \ker g$.

Exercice 4.36 (Oral TPE, 3)
Soient E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$.

(1) Montrez que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}\, f^{k+1} \subseteq \mathrm{Im}\, f^k$.

(2) Montrez que s'il existe un entier p tel que $\mathrm{Im}\, f^{p+1} = \mathrm{Im}\, f^p$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}\, f^{p+k} \subseteq \mathrm{Im}\, f^p$.

(3) Déduisez-en que $\mathrm{Im}\, f^{n+1} = \mathrm{Im}\, f^n$.

Exercice 4.37 (Oral TPE, 4)
Montrez que $P \longmapsto P - P'$ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et donnez son endomorphisme réciproque.

Exercice 4.38 (Oral Centrale, 5)
Soient E un espace vectoriel de dimension finie non-nulle et u, v deux endomorphismes de E.

(1) Montrez que $|\mathrm{rg}\, u - \mathrm{rg}\, v| \leqslant \mathrm{rg}\,(u+v) \leqslant \mathrm{rg}\, u + \mathrm{rg}\, v$.

(2) Soient F un sous-espace de E et G, H deux supplémentaires de F dans E. On pose p le projecteur sur F parallèlement à G et q celui sur H parallèlement à F. Montrez que $\mathrm{rg}\,(p+q) = \mathrm{rg}\, p + \mathrm{rg}\, q$.

Exercice 4.39 (Oral Centrale, 6)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ une famille libre de E^* (note : E^* est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des formes linéaires sur E) et $\psi \in E^*$.

(1) Montrez que $\psi \in \mathrm{Vect}\,(\varphi_1, \dots, \varphi_p) \iff \displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} \ker \varphi_i \subseteq \ker \psi$.

(2) On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrez que les conditions de la question précédente sont encore équivalentes à l'existence d'un réel $M > 0$ tel que $\forall x \in E$, $|\psi(x)| \leqslant M \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} |\varphi_i(x)|$.

Exercice 4.40 (Oral CCMP, 7)
Soient n, k deux entiers tels que $2 \leqslant k \leqslant n$. On pose $A_k = \left(a_{ij}^{(k)}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij}^{(k)} = 1$ si $i - j = k - 1$, les autres coefficients étant nuls.

(1) Calculez $A_k^\top A_k$.

Soit p un projecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que $p \neq \mathrm{id}$.

(2) Justifiez que $\operatorname{rg} p < n$.

(3) Montrez que p est la composée de deux endomorphismes nilpotents.

Exercice 4.41 (Oral CCMP, 8)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f, g deux endomorphismes de E.

On suppose f inversible et g de rang 1.

Montrez que $f + g$ est inversible ssi $\operatorname{tr}\left(g \circ f^{-1}\right) \neq -1$.

Exercice 4.42 (Oral CCMP, 9)
Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{pn}(\mathbb{R})$.

Montrez que $p + \operatorname{rg}(I_n + AB) = n + \operatorname{rg}\left(I_p + BA\right)$.

Exercice 4.43 (Oral CCMP, 10)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $E = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid AMB = 0\}$.

Montrez que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et donnez sa dimension.

Exercice 4.44 (Oral CCMP, 11)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résolvez dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ l'équation $M = \operatorname{Com} M$.

Chapitre 5

Réduction des endomorphismes

Sommaire

Exercices

⋆ Exercice proche du cours
⋆⋆ Exercice de difficulté normale
⋆ ⋆ ⋆ Exercice difficile (voire très difficile)
\+ Exercice à faire en priorité

⋆⋆ Exercice 5.1 (Exercice 1)

(1) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que P ne soit pas constant. On note $a_1, \ldots, a_m$ les racines distinctes de P et $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ leurs ordres de multiplicité. Rappelez la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.

(2) Application : déterminez les éléments propres de l'endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$ défini par $f(P) = (2X+1)P - \left(X^2-1\right)P'$. On rappelle que la décomposition en éléments simples est unique.

(3) Même question avec $f(P) = \left(X^3+X\right)P' - \left(3X^2-1\right)P$.

⋆⋆ Exercice 5.2 (Exercice 2)

Soit $E = \mathscr{C}^0([0\,;1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on définit l'application $\varphi(f) : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de la façon suivante : $\varphi(f)(0) = f(0)$ et pour tout $x \in]0\,;1]$, $\varphi(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

(1) Montrez que φ est un endomorphisme de E.

(2) Montrez que 0 n'est pas valeur propre de φ.

(3) Montrez que 1 est valeur propre de φ et donnez le sous-espace propre associé.

(4) Déterminez les autres valeurs propres de φ.

★★ Exercice 5.3 (Exercice 3)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $f(M) = \lambda M + \operatorname{tr}(M) A$.

(1) Justifiez rapidement que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

(2) Déterminez un polynôme annulateur de f de degré 2.

(3) Déduisez-en les éléments propres de f.

(4) À quelle condition l'endomorphisme f est-il inversible ?

★★ Exercice 5.4 (Exercice 4)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $f(M) = AM$.

Montrez que $\operatorname{Sp}(f) = \operatorname{Sp}(A)$. Pour tout λ valeur propre de f, donnez une relation entre les dimensions des sous-espaces propres $\operatorname{sep}(f, \lambda)$ et $\operatorname{sep}(A, \lambda)$.

★★ Exercice 5.5 (Exercice 5, matrices stochastiques)
Soit $A = \left(a_{i\,j}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall (i, j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ \ a_{i\,j} \geqslant 0 \text{ et } \forall i \in [\![1\,;n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i\,j} = 1.$$

(1) Montrez que 1 est valeur propre de A.

(2) Montrez que toutes les valeurs propres complexes de A sont de module inférieur ou égal à 1.

(3) On suppose que A est strictement stochastique, c'est-à-dire que A est stochastique et que ses coefficients sont strictement positifs. Montrez que 1 est la seule valeur propre de A de module 1.

★★ Exercice 5.6 (Exercice 6)
Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq b$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & \cdots & a \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & 0 \end{pmatrix}$.

(1) On pose J la matrice remplie de 1. Montrez que $t \longmapsto \det(XI_n - A - tJ)$ est une fonction polynôme en t de degré au plus 1, puis calculez $\det(XI_n - A - tJ)$ en fonction de t.

(2) Montrez que le polynôme caractéristique de A est $\dfrac{1}{b-a}\left(b\,(X+a)^n - a\,(X+b)^n\right)$.

(3) Montrez que si $b = -a$, alors les images dans $\mathbb{C}$ des valeurs propres de A sont sur une droite que vous préciserez, sinon elles sont sur un cercle.

★★ Exercice 5.7 (Exercice 7)
Soient $n \geqslant 2$, $U \in \mathscr{M}_{n\,1}(\mathbb{R})$ et $A = UU^\top$. On note $U^\top U = \begin{pmatrix} s \end{pmatrix}$ qui est une matrice carrée à un seul élément.

(1) Montrez que le polynôme $X^2 - sX$ est annulateur de A. Déduisez-en que A a au plus deux valeurs propres.

(2) Quel est le rang de A ? Précisez les valeurs propres de A.

(3) Déterminez le polynôme caractéristique de A.

(4) Déterminez les sous-espaces propres de A.

★ Exercice 5.8 (Exercice 8)

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.

(1) Déterminez le polynôme caractéristique de A.

(2) Déduisez-en sans calcul supplémentaire que A est diagonalisable.

(3) Déterminez les sous-espaces propres de A.

(4) Diagonalisez A, c'est-à-dire explicitez une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

(5) Calculez A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

⋆ Exercice 5.9 (Exercice 9, réduction en élégance)

Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 4 & 8 & -12 \end{pmatrix}$.

(1) Calculez efficacement le rang de B. Déduisez-en une valeur propre de B ainsi que la dimension du sous-espace propre associé.

(2) Démontrez sans calculer le polynôme caractéristique que B admet une autre valeur propre et qu'elle est simple.

(3) Déduisez-en le polynôme caractéristique de B. Vérifiez le résultat en le calculant grâce à sa définition.

(4) La matrice B est-elle diagonalisable ?

⋆ Exercice 5.10 (Exercice 10)

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 7 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

⋆ Exercice 5.11 (Exercice 11)

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

⋆ Exercice 5.12 (Exercice 12)

Déterminez une condition nécessaire et suffisante sur le triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pour que la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

⋆ Exercice 5.13 (Exercice 13)

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui n'est pas de la forme λI_2.

Montrez que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ ssi $(a-d)^2 + 4bc \neq 0$.

À quelle condition A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$?

⋆⋆ Exercice 5.14 (Exercice 14)

Soit $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & -5 \\ -5 & 3 & 3 \\ -5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. On recherche les éventuelles racines carrées de A, c'est-à-dire les matrices $R \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $R^2 = A$.

(1) Montrez que A est diagonalisable et déterminez une matrice D diagonale semblable à A avec le moins de calculs possible.

(2) Soit $S \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ une racine carrée de D. Montrez que S et D commutent puis montrez que S est diagonale.

(3) Déterminez les racines carrées S de D.

(4) Déduisez-en toutes les racines carrées R de A. Combien y en a-t-il ? Pourquoi ?

(5) Énoncez des conjectures quant au nombre de racines carrées d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ plus générale, en discutant selon la nature de ses éléments propres.

⋆⋆ Exercice 5.15 (Exercice 15)

Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(1) Diagonalisez la matrice A.

(2) On suppose que F est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ stable par u. Montrez que F est engendré par une famille de vecteurs propres de u.

(3) Déterminez tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par u.

⋆ Exercice 5.16 (Exercice 16)

Même exercice avec $A = \begin{pmatrix} -1 & -6 & -2 \\ 2 & 7 & 2 \\ -6 & -18 & -5 \end{pmatrix}$.

⋆ Exercice 5.17 (Exercice 17)

Montrez que les suites $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence suivante sont combinaisons linéaires de trois suites géométriques réelles (α^n), (β^n) et (γ^n) : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+3} = -\dfrac{5}{12}u_{n+2} + \dfrac{1}{2}u_{n+1} - \dfrac{1}{12}u_n$.

Déterminez à quelle condition sur (u_0, u_1, u_2) ces suites sont convergentes.

⋆ Exercice 5.18 (Exercice 18)

Même exercice avec $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+3} = \dfrac{3}{2}u_{n+2} - \dfrac{3}{4}u_{n+1} + \dfrac{1}{4}u_n$ en prenant des suites géométriques complexes.

Montrez que les suites (u_n) sont combinaisons linéaires de trois suites réelles simples que l'on précisera. Déterminez à quelle condition sur (u_0, u_1, u_2) ces suites sont convergentes.

⋆ Exercice 5.19 (Exercice 19)

Les matrices suivantes sont-elles trigonalisables ? Donnez alors, quand c'est possible, une matrice triangulaire supérieure semblable.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

⋆ Exercice 5.20 (Exercice 20)

Soient $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) Déterminez le polynôme caractéristique de C. Est-elle diagonalisable ? Trigonalisable ?

(2) Déterminez les éléments propres de C.

(3) Montrez que la matrice C est semblable à la matrice T. On pourra considérer l'endomorphisme u canoniquement associé à C et construire, par analyse-synthèse, une base $\mathscr{B}$ où la matrice de u est T.

(4) Montrez que T peut s'écrire $D + N$ où D est diagonale, N est nilpotente et D et N commutent. Déduisez-en, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T^n puis C^n.

(5) On considère trois suites $(x_n), (y_n), (z_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - 3y_n - z_n \\ y_{n+1} = x_n - 2y_n - z_n \\ z_{n+1} = -2x_n + 6y_n + 3z_n \end{cases}$$

Explicitez x_n, y_n, z_n en fonction de n et de x_0, y_0, z_0.

★★ Exercice 5.21 (Exercice 21)
Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $u^2 + u + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} = 0$.

(1) Soient F un sous-espace stable par u et $x \notin F$. Montrez que $\Pi_x = \mathrm{Vect}(x, u(x))$ est un plan, qu'il est stable par u et qu'il est en somme directe avec F.

(2) Montrez qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, de blocs $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Qu'en déduisez-vous concernant n ?

(3) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de u dans la base canonique. Réduisez A dans $\mathbb{C}$.

(4) Retrouvez que A est $\mathbb{R}$-semblable à une matrice diagonale par blocs, de blocs R.

★★ Exercice 5.22 (Exercice 22)
Soient $p \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathrm{GL}(E)$.

Montrez que f est diagonalisable ssi f^p est diagonalisable.

Est-ce encore vrai si on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$?

★★ Exercice 5.23 (Exercice 23)
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$.

(1) Montrez que si f est diagonalisable, alors f^2 est diagonalisable et $\mathrm{rg}\, f^2 = \mathrm{rg}\, f$.

(2) Montrez que si λ est une valeur propre de f^2 non-nulle et μ est une racine carrée de λ, alors $\mathrm{sep}\left(f^2, \lambda\right) = \ker(f - \mu\mathrm{id}) \oplus \ker(f + \mu\mathrm{id})$.

(3) Montrez que la réciproque de la proposition de la question (1) est vraie.

$\star\star$ Exercice 5.24 (Exercice 24, spectre du polynôme d'une matrice)
Soient $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable et $Q \in \mathbb{K}[X]$.

(1) Montrez que la matrice $Q(M)$ est également diagonalisable. Exprimez le spectre de $Q(M)$ en fonction des valeurs propres de M.

(2) Précisez les sous-espaces propres de $Q(M)$.

(3) Ces résultats restent-ils valables si M est seulement trigonalisable ? Sans hypothèse sur M ?

$\star\star\star$ Exercice 5.25 (Exercice 25)
Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = I_2$. Montrez que $A^{12} = I_2$.

$\star\star$ Exercice 5.26 (Exercice 26)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrez que A est nilpotente ssi pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{tr} A^k = 0$.

$\star\star$ Exercice 5.27 (Exercice 27)
Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. On note $C(f)$ le sous-espace vectoriel des endomorphismes de E qui commutent avec f.

(1) Démontrez que $g \in C(f)$ ssi les sous-espaces propres de f sont stables par g.

(2) Déduisez-en que $\dim C(f) = \displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \omega_\lambda^2$ où ω_λ désigne la multiplicité de la valeur propre λ.

(3) On suppose que les valeurs propres de f sont simples. Démontrez que $\left(\mathrm{id}, f, \ldots, f^{n-1}\right)$ est une base de $C(f)$.

$\star\star$ Exercice 5.28 (Exercice 28)

(1) Montrez que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

(2) Montrez que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs et que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ne l'est pas. Déterminez alors les composantes connexes par arcs de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

(3) Montrez que l'ensemble $D_n(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrez la même chose avec l'ensemble $D_n^+(\mathbb{C})$ des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dont toutes les valeurs propres sont distinctes. Montrez que l'intérieur de $D_n(\mathbb{C})$ est $D_n^+(\mathbb{C})$.

(4) Montrez que $D_2(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(5) Montrez que l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un fermé et qu'il est l'adhérence de $D_n(\mathbb{R})$.

(6) Soit $r \in [\![1\ ;\ n]\!]$. Montrez que l'ensemble des matrices de rang inférieur à r est un fermé et qu'il est l'adhérence de l'ensemble des matrices de rang r.

★★★ Exercice 5.29 (Exercice 29)
Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

(1) Montrez que si l'une des deux matrices est inversible, alors AB et BA ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes ordres de multiplicité.

(2) Montrez que ce résultat reste vrai même sans suppose l'une des deux matrices inversible.

Exercice 5.30 (Oral IMT, 1)
Soient u, v, w trois suites vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \begin{cases} u_{n+1} = 4u_n - 3v_n - 3w_n \\ v_{n+1} = 3u_n - 2v_n - 3w_n \\ w_{n+1} = 3u_n - 3v_n - 2w_n \end{cases}$$

Exprimez u_n, v_n, w_n en fonction de n, u_0, v_0, w_0.

Exercice 5.31 (Oral IMT, 2)
Déterminez les matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5.32 (Oral St-Cyr, 3)

Montrez que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a+b & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$ est diagonalisable et donnez ses éléments propres.

Exercice 5.33 (Oral TPE, 4)

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$.

(1) Déterminez un polynôme annulateur de degré 3 de A.

(2) La matrice A est-elle inversible ?

(3) Est-elle diagonalisable ?

(4) Montrez que les valeurs propres de A^2 sont négatives ou nulles.

Exercice 5.34 (Oral TPE, 5)
Montrez de deux façons différentes que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice 5.35 (Oral IMT, 6)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminez la limite quand $n \longrightarrow +\infty$ de $\begin{pmatrix} \cos {}^{\alpha}/_{n} & \sin {}^{\alpha}/_{n} \\ \sin {}^{\alpha}/_{n} & \cos {}^{\alpha}/_{n} \end{pmatrix}^n$.

Exercice 5.36 (Oral IMT, 7)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^2 - 2A$ soit diagonalisable et 1 n'est pas valeur propre de A.

Montrez que A est diagonalisable.

Exercice 5.37 (Oral CCINP, 8)

(1) Soient $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres. Montrez que $\operatorname{tr} M^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$.

(2) Pour $n \geqslant 3$, on pose A la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux situés sur les quatre bords, égaux à 1. Déterminez les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

Exercice 5.38 (Oral CCINP, 9)
Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et $A = \left(\alpha^{i+j-2}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

(1) Calculez le rang de A. Déduisez-en ses valeurs propres.

(2) À quelle condition sur α la matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 5.39 (Oral CCINP, 10)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $f(M) = M + 2M^{\top}$.

(1) Déterminez les valeurs et vecteurs propres de f.

(2) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Calculez sa trace et son déterminant.

Exercice 5.40 (Oral Navale, 11)
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrez que 1 est la seule valeur propre de M ssi pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{tr} M^k = n$.

Exercice 5.41 (Oral Navale, 12)

(1) Diagonalisez la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $B = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$. Montrez que B et C sont semblables.

Exercice 5.42 (Oral CCINP, 13)

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

(1) Exprimez le rang de B en fonction du rang de A.

(2) Trouvez une relation entre χ_A et χ_B. Déduisez-en le spectre de B en fonction de celui de A.

(3) Déterminez les dimensions des sous-espaces propres de B en fonction de celles des sous-espaces propres de A.

(4) Montrez que B est diagonalisable ssi A est diagonalisable et inversible.

Exercice 5.43 (Oral IMT, 14)
Soient E un espace muni d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$, v un vecteur de E et f l'endomorphisme de E tel que $f(e_1) = \cdots = f(e_n) = v$.

(1) Quel est le rang de f ?

(2) Discutez de la diagonalisabilité de f en fonction du vecteur v.

Exercice 5.44 (Oral CCINP, 15)
(1) Montrez que si deux matrices U et V sont semblables, alors pour tout polynôme R, $R(U)$ et $R(V)$ sont semblables.

Soient A, B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$. On pose $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

(2) Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, exprimez $P(M)$ en fonction de $P(A)$, $P'(A)$ et B.

(3) Montrez que si A est diagonalisable et B est nulle, alors M est diagonalisable.

(4) Montrez la réciproque.

Exercice 5.45 (Oral CCMP, 16)

(1) Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = B^2 = 0$ et $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$. Montrez que A et B sont semblables.

(2) Le résultat subsiste-t-il avec les hypothèses $A^3 = B^3 = 0$ et $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$?

Exercice 5.46 (Oral CCMP, 17)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $(AB)^n = 0$. Montrez que $(BA)^n = 0$.

Exercice 5.47 (Oral CCMP, 18)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathscr{L}(E)$.

(1) On suppose que $\operatorname{Vect}(u, v)$ contient un élément inversible. Montrez que $\ker u \cap \ker v = \{0\}$.

(2) Montrez que la réciproque est fausse.

(3) Montrez que si u et v commutent, alors la réciproque est vraie.

Exercice 5.48 (Oral CCMP, 19)

Soient $u \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ non-nul tel que $u^3 = u^2$ et $C(u) = \left\{v \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right) \;\middle|\; u \circ v = v \circ u\right\}$.

Montrez que $C(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ et déterminez sa dimension.

Exercice 5.49 (Oral CCMP, 20)

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et φ l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $\varphi : M \longmapsto M + \operatorname{tr}(AM)\, A$.

(1) Étudiez la diagonalisabilité de φ.

(2) Calculez $\operatorname{tr} \varphi$ et $\det \varphi$.

Exercice 5.50 (Oral CCMP, 21)

Pour $c \in \mathbb{R}$, on pose $A(c) = \begin{pmatrix} -c & -1 & c \\ -1 & 1-c & 1 \\ c & -1 & -c \end{pmatrix}$.

(1) Déterminez les réels c tels que $A(c)$ ne pas diagonalisable.

(2) Soit d la plus petite de ces valeurs. Trouvez P inversible telle que $P^{-1}A(d)P$ soit triangulaire.

Exercice 5.51 (Oral CCMP, 22)

(1) Soit $x = \cos\dfrac{2\pi}{5}$. Déterminez une équation du second degré à coefficients rationnels dont x est racine, puis donnez les valeurs de x et $\cos\dfrac{4\pi}{5}$.

(2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 + A^3 + A^2 + A + I_n = 0$. On suppose que la trace de A est un rationnel. Montrez que 4 divise n.

Exercice 5.52 (Oral CCMP, 23)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Montrez que $\det A > 0$.

Exercice 5.53 (Oral CCMP, 24)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$. Déterminez une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

Exercice 5.54 (Oral CCMP, 25)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & A \end{pmatrix}$. On suppose que B est diagonalisable. Montrez que A est diagonalisable et que $I_n - A$ est inversible.

Exercice 5.55 (Oral CCMP, 26)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(A)$ est diagonalisable et $P'(A)$ est inversible. Montrez que A est diagonalisable.

Exercice 5.56 (Oral CCMP, 27)
Soit $A = \left(a_{i\,j}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i\,i} = 0$ et $a_{i\,j} = i$ si $i \neq j$.

(1) Montrez qu'un réel λ est valeur propre de A ssi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+\lambda} = 1$.

(2) Montrez que A est diagonalisable. Listez ses valeurs propres avec un encadrement le plus précis possible.

(3) Déterminez la somme des valeurs propres de A. On note μ_n la plus grande d'entre elles. Trouvez $C \in \mathbb{R}$ tel que $\mu_n \sim Cn^2$ quand n tend vers l'infini.

Exercice 5.57 (Oral Centrale, 28)

À quelles conditions $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 2 & 0 \\ d & e & f & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Le cas échéant, diagonalisez A.

Exercice 5.58 (Oral Centrale, 29)

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{pmatrix}$.

(1) Donnez un vecteur propre évident de A.

(2) Calculez le polynôme caractéristique de A et donnez son spectre. Justifiez que A est diagonalisable.

(3) Exprimez, lorsqu'elle existe, la matrice inverse A^{-1} en fonction de I_4, A, A^2 et A^3.

Exercice 5.59 (Oral Centrale, 30)
Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_{AM+B} = \chi_{AM}$.

(1) Montrez qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $B^p = 0$.

(2) Montrez que $BA = 0$.

(3) Réciproquement, soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $B^n = BA = 0$. Montrez que pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_{AM+B} = \chi_{AM}$.

Exercice 5.60 (Oral Centrale, 31)
Soient $\theta_1, \dots, \theta_p$ des réels distincts modulo 2π et $m_1, \dots, m_p$ des complexes non-nuls. Le but de l'exercice est de montrer que la suite $\left(m_1 e^{i\theta_1 n} + \cdots + m_p e^{i\theta_p n}\right)$ ne converge pas vers 0.

Par l'absurde, on suppose que $m_1 e^{i\theta_1 n} + \cdots + m_p e^{i\theta_p n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

(1) On note $M_n = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1 n} & \dots\dots\dots\dots & e^{i\theta_p n} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{i\theta_1 (n+p-1)} & \dots\dots & e^{i\theta_p (n+p-1)} \end{pmatrix}$. Montrez que $Y_n = M_n \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_p \end{pmatrix} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

(2) Montrez que $|\det M_n|$ est une constante non-nulle.

(3) À l'aide du théorème de Cayley-Hamilton, exprimez M^{-1} et trouvez une contradiction.

Exercice 5.61 (Oral ENS, 32)
On considère un automorphisme α de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ qui conserve le produit matriciel, c'est-à-dire tel que pour tout $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\alpha(AB) = \alpha(A)\alpha(B)$.

(1) Montrez que $\alpha(I_n) = I_n$.

(2) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Montrez que $\alpha(A)$ l'est aussi.

(3) On suppose que A est semblable à une matrice diagonale D à coefficients diagonaux tous distincts. Montrez que $\alpha(A)$ est, elle aussi, semblable à D.

(4) Justifiez l'existence de $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\alpha(D) = PDP^{-1}$ puis montrez que $\alpha(E) = PEP^{-1}$ pour toute matrice diagonale E.

(5) Déterminer α.

Problème – Matrices réelles sans valeur propre réelle

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non-nul. Pour alléger les notations, on pose $E_n = \mathscr{M}_{n\,1}(\mathbb{C})$. La lettre X est utilisée ici pour désigner une matrice-colonne, on évitera donc de l'utiliser pour désigner l'indéterminée des polynômes qui sera pour une fois notée x.

Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $S(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Toute matrice Z à coefficients complexes de $\mathscr{M}_{p\,q}(\mathbb{C})$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $X + iY$ où X, Y sont deux matrices réelles de $\mathscr{M}_{p\,q}(\mathbb{R})$. On appelle conjuguée de Z la matrice $\overline{Z} = X - iY$.

D'après les propriétés de la conjugaison dans $\mathbb{C}$, on en déduit que les règles de calcul sont les mêmes : $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$, $\overline{\lambda Z} = \overline{\lambda}\,\overline{Z}$ et $\overline{Z_1.Z_2} = \overline{Z_1}.\overline{Z_2}$.

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On veut montrer l'équivalence entre les propositions suivante :

(α) il existe $(a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m) \in \mathbb{R}^{2m}$ tel que M soit semblable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à la matrice diagonale par blocs

$$\operatorname{diag}(S(a_1,b_1), \ldots, S(a_m,b_m)) = \begin{pmatrix} S(a_1,b_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & S(a_m,b_m) \end{pmatrix}$$

(β) il existe un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ annulateur de M à racines simples non-réelles.

Un cas particulier simple

Soit ω un complexe non-réel. On pose $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \omega z$.

Vérifiez que f est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, que f a un polynôme annulateur réel à racines simples non-réelles et que sa matrice dans une base de $\mathbb{C}$ bien choisie est une matrice $S(a,b)$.

$(\beta) \implies (\alpha)$

Question 1
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $b \neq 0$. Montrez qu'il existe un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ annulateur de $S(a,b)$ à racines simples non-réelles.

Question 2
Montrez l'implication $(\beta) \implies (\alpha)$.

$(\alpha) \implies (\beta)$

Dans cette partie, M est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui annule un polynôme réel à racines simples non-réelles. On appelle f l'endomorphisme de E_n de matrice M dans la base canonique de E_n (autrement dit, pour tout $Z \in E_n$, $f(Z) = MZ$).

Question 3
Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\overline{z} = \lambda z$. Montrez qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda = e^{2i\theta}$ et $e^{i\theta} z$ est un réel.

Question 4
Montrez que n est pair. On note $n = 2m$.

Question 5
Montrez que si λ est une valeur propre de M, alors $\overline{\lambda}$ en est une aussi, puis que les sous-espaces propres $\operatorname{sep}(M, \lambda)$ et $\operatorname{sep}\left(M, \overline{\lambda}\right)$ ont la même dimension.

Question 6
Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de M et Z un vecteur propre de M.

(a) Montrez que $\operatorname{Vect}\left(Z, \overline{Z}\right)$ est un plan stable par f.

(b) On pose $Z = X + iY$ où X, Y sont des matrices réelles. Montrez que (X, Y) est une base de ce plan.

(c) Montrez qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $b \neq 0$ et l'endomorphisme induit par f dans ce plan a pour matrice $S(a, b)$ dans la base (X, Y).

Question 7
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de M. On choisit une base $\left(Z_1, \ldots, Z_p\right)$ de $\operatorname{sep}(M, \lambda)$ et on écrit chaque vecteur sous la forme $Z_k = X_k + iY_k$ où X_k, Y_k sont réelles.

Montrez que les plans $(\operatorname{Vect}(X_k, Y_k))_{1 \leqslant k \leqslant p}$ sont en somme directe et que $\operatorname{sep}(M, \lambda) \oplus \operatorname{sep}\left(M, \overline{\lambda}\right) = \bigoplus_{k=1}^{p} \operatorname{Vect}(X_k, Y_k)$.

Question 8
Montrez qu'il existe une base de E_n constituée de vecteurs réels dans laquelle la matrice de f est égale à une matrice diagonale par blocs $D = \operatorname{diag}\left(S(a_1, b_1), \ldots, S(a_m, b_m)\right)$.

Montrez enfin qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = PDP^{-1}$.

Un exemple

On pose $M = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Question 9
On écrit $xI_4 - M$ par blocs $(2,2)$: $xI_4 - M = \begin{pmatrix} A & -4I_2 \\ 2I_2 & B \end{pmatrix}$.

(1) Calculez le produit par blocs $\begin{pmatrix} -4I_2 & A \\ B & 2I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2I_2 & 0 \\ B & I_2 \end{pmatrix}$. Déduisez-en que $\det(xI_4 - M) = \det(AB + 8I_2)$.

(2) Explicitez le polynôme caractéristique de M. Déterminez ses racines imaginaires pures, puis les autres racines.

Question 10
Montrez que M annule un polynôme réel à racines simples non-réelles.

Vérifiez que les vecteurs-colonnes $\begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \\ 2 \\ 1+i \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 \\ 2-2i \\ 2 \\ 1-i \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de M, puis donnez une matrice $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et une matrice réelle diagonale par blocs D telle que $M = PDP^{-1}$.

Application

Dans cette partie, on suppose que $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ annule un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ à racines simples dans $\mathbb{C}$. On garde les notations introduites précédemment.

On note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$ l'ensemble des valeurs propres réelles et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}(M)$ l'ensemble des valeurs propres complexes non-réelles de M.

Question 11
On pose $G = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M)} \mathrm{sep}(M, \lambda)$ et $H = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}(M)} \mathrm{sep}(M, \lambda)$. Par convention, si M n'a pas de valeur propre réelle, alors $G = \{0\}$ et si M n'a que des valeurs propres réelles, alors $H = \{0\}$.

Montrez que G et H sont supplémentaires dans E_n et qu'ils sont stables par f.

On note g et h les endomorphismes induits par f dans G et H respectivement.

Question 12
Montrez qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E_n telle que $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f) = R = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$ où D est une matrice diagonale réelle et S une matrice diagonale par blocs $\mathrm{diag}(S(a_1, b_1), \dots, S(a_m, b_m))$. On remarque que R est une matrice réelle.

Question 13
Un exercice classique : soit $(U, V) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$.

(1) Justifiez que la fonction $x \longmapsto \det(U + xV)$ est une fonction polynôme.

(2) Montrez que s'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $\det(U + zV) \neq 0$, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\det(U + xV) \neq 0$.

Application : soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que A et B soient semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$; montrez qu'elles sont alors semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Question 14
Montrez finalement que M et R sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Chapitre 6

Intégrales généralisées

Sommaire

Exercices

⋆ Exercice proche du cours
⋆⋆ Exercice de difficulté normale
⋆ ⋆ ⋆ Exercice difficile (voire très difficile)
+ Exercice à faire en priorité

⋆ Exercice 6.1
Montrez la convergence des intégrales suivantes et calculez leurs valeurs.

(1) $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,\mathrm{d}x$$

(2) $$\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^3+x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$

(3) $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$$

(4) $$\int_0^{+\infty} \frac{x^5}{x^{12}+1}\,\mathrm{d}x$$

(5) $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1+t^2\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

(6) $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\operatorname{Arctan}(t+1) - \operatorname{Arctan} t)\,\mathrm{d}t$

★ Exercice 6.2
Justifiez la convergence des intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} x}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} x}\,\mathrm{d}x$ et donnez leurs valeurs en vous servant de l'égalité $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

★ Exercice 6.3
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Montrez que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)}\,\mathrm{d}x$ converge et donnez sa valeur en faisant le changement de variable $y = \dfrac{1}{x}$.

★★ Exercice 6.4
Montrez la convergence des intégrales suivantes et calculez leurs valeurs.

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+a)^2}\,\mathrm{d}x$ (où $a > 0$)

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x$

(5) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1+3x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$

(6) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$

★★ Exercice 6.5
On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

(1) Justifiez que I est convergente.

(2) Démontrez que $\forall t \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right],\ \ t - \dfrac{t^3}{6} \leqslant \sin t \leqslant t$.

Déduisez-en $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0^+} \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

(3) Montrez que $\lim\limits_{y \longrightarrow +\infty} \displaystyle\int_y^{3y} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t = 0$.

(4) Linéarisez $\sin^3 t$ et déduisez de tout ce qui précède la valeur de I.

★ Exercice 6.6
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$.

(1) Déterminez une application affine φ envoyant l'intervalle $]-1\,;\,1[$ sur $]a\,;\,b[$.

(2) Déduisez-en la nature et la valeur éventuelle de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}$.

★★ Exercice 6.7

On pose $C = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$, $S = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$ et $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$.

(1) Justifiez l'existence de ces trois intégrales.

(2) Montrez que $C = S$.

(3) Montrez que $I = 2S$ et donnez une autre relation liant $C + S$ et I.

(4) Donnez la valeur de ces trois intégrales.

★★ Exercice 6.8
Justifiez l'existence des intégrales suivantes, puis par le changement de variable $x = \sin t$, montrez que

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\left(2 - x^2\right)\sqrt{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos^2 t}\,\mathrm{d}t.$$

Effectuez le changement de variable $u = \tan t$ dans la dernière intégrale afin d'obtenir sa valeur.

★★ Exercice 6.9

(1) Soit $a > 0$. Montrez que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^a}\,\mathrm{d}t$ converge ssi $a < 2$.

(2) Montrez que les intégrales suivantes convergent : $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x$.

★★ Exercice 6.10

Soient $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ converge et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$.

(1) Montrez que pour tout $\varepsilon > 0$, $\displaystyle\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

(2) Déduisez-en que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $f(0)\ln\dfrac{b}{a}$.

★★ Exercice 6.11

Soient $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et ayant une limite réelle ℓ en $+\infty$ et $a > 0$.

Montrez que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(x) - f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x$ converge et donnez sa valeur en fonction de ℓ, $f(0)$ et a.

★★ Exercice 6.12 (Fonction Γ d'Euler)

Pour $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

(1) Montrez que Γ est bien définie sur $]0\,;+\infty[$.

(2) Donnez une relation de récurrence entre $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$.
Déduisez-en la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

★★ Exercice 6.13

Une idée fausse : beaucoup pensent que si f est positive et intégrable sur $[0\,;+\infty[$, alors f a pour limite 0 en $+\infty$.

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ de la façon suivante : pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \dfrac{1}{2n^2}$ puis, pour $x \geqslant 0$,

- ▹ s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n - a_n \leqslant x \leqslant n$, alors $f(x) = 2n^2(x-n) + 1$
- ▹ s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \leqslant x \leqslant n + a_n$, alors $f(x) = -2n^2(x-n) + 1$
- ▹ sinon, $f(x) = 0$.

Représentez la courbe de f sur $[0\,;4{,}5]$ et montrez que f est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ mais que f n'a pas de limite en $+\infty$.

★★ **Exercice 6.14**

Déterminez la nature des intégrales suivantes (où $\alpha > 0$).

$$(1)\quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+|\sin x|}\,\mathrm{d}x$$

$$(2)\quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha\left(1+\sin^2 x\right)}\,\mathrm{d}x$$

$$(3)\quad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

$$(4)\quad \int_0^{1} \mathrm{e}^{-1/t}\,\mathrm{d}t$$

$$(5)\quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$$

$$(6)\quad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\ln^2 x}\,\mathrm{d}x$$

$$(7)\quad \int_0^{1} \sin\left(\ln t\right)\mathrm{d}t$$

$$(8)\quad \int_0^{1} \frac{\ln t}{(1-t)^{3/2}}\,\mathrm{d}t$$

$$(9)\quad \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}\sqrt{t}}{t\left(1+t^2\right)}\,\mathrm{d}t$$

$$(10)\quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$$

$$(11)\quad \int_0^{+\infty} \sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t$$

$$(12)\quad \int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$$

$$(13)\quad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

★★ **Exercice 6.15**

Montrez les comparaisons suivantes en justifiant l'existence des intégrales.

$$(1)\quad \int_0^{X} \frac{\ln x}{x+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x \underset{X\longrightarrow+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\ln^2 X$$

$$(2)\quad \int_x^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}\sqrt{t}}{t\left(1+t^2\right)}\,\mathrm{d}t \underset{x\longrightarrow+\infty}{\sim} \frac{\pi}{4x^2}$$

$$(3)\quad \int_x^{1} \frac{\mathrm{e}^t}{\sin t}\,\mathrm{d}t \underset{x\longrightarrow 0}{\sim} -\ln x$$

(4) $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \underset{x\longrightarrow 0}{\sim} 2\sqrt{x}$

(5) $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \underset{x\longrightarrow +\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{-x}\right)$

(6) $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \underset{x\longrightarrow 0}{\sim} -\ln x$

(7) $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{t}}{t}\,\mathrm{d}t \underset{x\longrightarrow +\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{x/2}\right)$

(8) $\displaystyle\int_0^x \frac{\ln\left(1+t^2\right)}{1+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \underset{x\longrightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{x}\ln x$

★★ Exercice 6.16
Donnez des équivalents simples aux points indiqués des intégrales suivantes en justifiant leurs existences.

(1) $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \underset{x\longrightarrow 0}{\sim} ?$

(2) $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t \underset{x\longrightarrow 0}{\sim} ?$

(3) $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{t^2\mathrm{e}^{-t}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \underset{x\longrightarrow +\infty}{\sim} ?$

(4) $\displaystyle\int_0^x \ln\left(t^2+\sin t\right)\mathrm{d}t \underset{x\longrightarrow +\infty}{\sim} ?$

★★ Exercice 6.17
Soient a, α deux réels strictement positifs.

(1) En effectuant le changement de variable $t = \tan x$, montrez que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+a\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(1+a)\,t^2}\,\mathrm{d}t$$

puis calculez ces intégrales et donnez la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1+a\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

(2) Donnez la nature de la série de terme général $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1+(t+n\pi)^{\alpha}\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$ selon la valeur de α.

(3) Étudiez la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^{\alpha}\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

★★ Exercice 6.18
Discutez, selon α et β réels, de la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(t+1)^{\alpha}-t^{\alpha}}{t^{\beta}}\,\mathrm{d}t$.

★★ Exercice 6.19

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;+\infty[$, à valeurs réelles et telle que les fonctions $t \longmapsto t^2 f^2(t)$ et $t \longmapsto f'^2(t)$ soient intégrables sur $[0\,;+\infty[$.

(1) Montrez que la fonction $t \longmapsto t f(t) f'(t)$ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$.

(2) Montrez que pour tout $x > 0$, $x f^2(x) = \displaystyle\int_0^x f^2(t)\,\mathrm{d}t + 2\int_0^x t f(t) f'(t)\,\mathrm{d}t$.
Déduisez-en que $x f^2(x) \xrightarrow[x\longrightarrow+\infty]{} 0$.

(3) Montrez que $t \longmapsto f^2(t)$ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$.

(4) Démontrez que

$$\left(\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant 4\left(\int_0^{+\infty} t^2 f^2(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^{+\infty} f'^2(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Exercice 6.20 (Oral IMT, 1)

Justifiez l'existence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 6.21 (Oral IMT, 2)

Soit $a \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^a \ln\left(1+\mathrm{e}^{ax}\right)\mathrm{d}x$ est-elle convergente ?

Exercice 6.22 (Oral IMT, 3)

Justifiez l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(1 - t\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$ et donnez sa valeur.

Exercice 6.23 (Oral CCINP, 4)

Justifiez l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 6.24 (Oral CCINP, 5)
Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n}\,\mathrm{d}x$ converge-t-elle ? Donnez alors sa valeur.

Exercice 6.25 (Oral IMT, 6)
Soit $a > 0$. Donnez la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^a}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 6.26 (Oral CCINP, 7)

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_k = \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{x - 1/2 - \lfloor x \rfloor}{x}\,\mathrm{d}x$.

(1) Calculez I_k.

(2) On pose $J_n = \displaystyle\int_1^{n} \frac{x - 1/2 - \lfloor x \rfloor}{x}\,\mathrm{d}x$. Montrez que $J_n = n + \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\ln(n+1) - \ln n!$.

(3) Montrez que $\ln n! = n\ln n - n + \ln n + \dfrac{1}{2}\ln(2\pi) + o(1)$.

(4) Montrez que la suite $(J_n)_{n\geqslant 1}$ converge et donnez sa valeur.

(5) Montrez que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x - 1/2 - \lfloor x \rfloor}{x}\,\mathrm{d}x$ converge et donnez sa valeur.

Exercice 6.27 (Oral CCINP, 8)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n}$, $v_n = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$ et $I_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

(1) Montrez que la série $\displaystyle\sum_n v_n$ converge.

(2) Montrez que I_n existe et que $I_n = 2\left(1+\sqrt{n}\right)v_n$.

(3) On pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$. Montrez que $I_{n+1} \leqslant R_n \leqslant I_n$ et donnez un équivalent de R_n.

(4) On pose $T_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Montrez que $T_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \dfrac{R_n}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

Exercice 6.28 (Oral Centrale, 9)

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1+t^3\right)^n}\,\mathrm{d}t$ pour $n \geqslant 1$.

(1) On définit les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.
Montrez qu'elles convergent vers la même limite.

(2) Montrez que pour tout $n \geqslant 1$, $I_{n+1} = \left(1 - \dfrac{1}{3n}\right) I_n$.

(3) Montrez qu'il existe des réels a et b tels que $\ln I_n = a \ln n + b + o(1)$.

(4) Montrez que la série de terme général I_n converge.

Exercice 6.29 (Oral CCMP, 10)
Soit $y \in \mathbb{R}$.

Calculez $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^2y^2\right)}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 6.30 (Oral CCMP, 11)
Soit $y \in \mathbb{R}$.

Justifiez l'existence et calculez $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(1+x^2\right)\left(1+ixy\right)}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 6.31 (Oral CCMP, 12)
Soit $\alpha > 0$.

Étudiez la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\exp\left(\frac{\sin^2 t}{t^\alpha}\right) - 1\right)\mathrm{d}t$.

Exercice 6.32 (Oral CCMP, 13)
Soient $a \in [0\,;1[$ et $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue par morceaux telle que $\dfrac{f(x+1)}{f(x)} \xrightarrow[x\longrightarrow+\infty]{} a$.

Montrez que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Problème 1 – Calculs d'intégrales

Intégrale de Gauss

L'intégrale de Gauss est l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

On rappelle un résultat à propos des intégrales de Wallis : en notant $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^n\,\mathrm{d}\theta$, on a $W_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Question 1
Justifiez que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Question 2
Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \forall t \in \left[0\ ;\ \sqrt{n}\right],\ \ \left(1-\dfrac{t^2}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^{-n}$.

Question 3
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

À l'aide du changement de variable $t = \sqrt{n}\sin\theta$, exprimez l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$ en fonction d'une intégrale de Wallis.

Question 4
Avec le changement de variable $t = \sqrt{n}\tan\theta$, établissez que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n}W_{2n-2}.$$

Déduisez-en que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \sqrt{n}W_{2n+1} \leqslant \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n}W_{2n-2}$.

Question 5
Déterminez enfin la valeur de l'intégrale de Gauss.

Des intégrales avec des logarithmes

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \ln(t)\,\mathrm{d}t$ et $v_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \frac{\ln t}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Question 6

(1) Justifiez l'existence de u_n et v_n, puis montrez que $u_n = \dfrac{-1}{(n+1)^2}$.

(2) Montrez que $|v_n| \leqslant -u_n$ et déduisez-en la limite de v_n quand n tend vers $+\infty$.

Question 7

(1) Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n u_n$ converge, puis que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k = v_0 + (-1)^n v_{n+1}$.

(2) On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrez que $v_0 = -\dfrac{\pi^2}{12}$.

Question 8

Montrez que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge et donnez sa valeur grâce à ce qui précède.

Problème 2 – Des inégalités entre intégrales

Partie 1

Soit $f : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(0) = f(1) = 0$.

Question 1

Montrez l'existence des intégrales suivantes et justifiez l'égalité

$$\int_0^1 f(x)\, f'(x) \operatorname{cotan}(\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{f^2(x)}{\sin^2(\pi x)}\,\mathrm{d}x.$$

Question 2

Déduisez-en $\displaystyle\int_0^1 f'^2 - \pi^2 \int_0^1 f^2 = \int_0^1 \left(f'(x) - \pi f(x) \operatorname{cotan}(\pi x)\right)^2 \mathrm{d}x$.

Question 3

Concluez : $\displaystyle\int_0^1 f'^2 \geqslant \pi^2 \int_0^1 f^2$. Dans quel cas y a-t-il égalité ?

Partie 2

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(0) = 0$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'^2$ converge.

On pose $g : x \longmapsto \dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}$.

Question 4

(1) Montrez que g est prolongeable par continuité en 0.

(2) Justifiez que g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[$ et montrez que

$$\forall x > 0,\quad f'^2(x) = xg'^2(x) + g(x)\,g'(x) + \frac{1}{4x}g^2(x)\,.$$

Question 5

Montrez que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} xg'^2(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ sont convergentes et que la fonction g^2 a une limite réelle en $+\infty$.

Question 6

Montrez que cette limite est nulle et déduisez-en l'inégalité

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 \mathrm{d}x \leqslant 4\int_0^{+\infty} f'^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Question 7

Étudiez le cas d'égalité.

Partie 3

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f^2$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f''^2$ convergent.

On rappelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz : si u, v sont deux fonctions continues sur $[a\,;b]$, alors

$$\left(\int_a^b uv\right)^2 \leqslant \int_a^b u^2 \times \int_a^b v^2.$$

Question 8

(1) Montrez que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} ff''$ est absolument convergente.

(2) Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, donnez une relation entre $\displaystyle\int_a^b f'^2$ et $\displaystyle\int_a^b ff''$.

Question 9

On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'^2$ diverge.

(1) Montrez que $f(x)\,f'(x) \xrightarrow[x \longrightarrow +\infty]{} +\infty$. Déduisez-en que $f^2(x) \xrightarrow[x \longrightarrow +\infty]{} +\infty$.

(2) Est-ce possible ? Que pensez-vous de la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f'^2$.

Question 10

(1) Montrez que la fonction ff' a des limites réelles a des limites réelles en $+\infty$ et en $-\infty$, puis que ces limites sont nulles.

(2) Justifiez finalement l'inégalité

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2\right)^2 \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 \times \int_{-\infty}^{+\infty} f''^2.$$

Question 11

Étudiez le cas d'égalité dans l'inégalité précédente.

Chapitre 7

Intégrales à paramètre

Sommaire

Exercices

★ Exercice 7.1
Déterminez les limites suivantes :

$$\text{(1)}\quad \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(1+t^2\right)^n}\,\mathrm{d}t$$

$$\text{(2)}\quad \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{t^n}{1+t^{n+2}}\,\mathrm{d}t$$

$$\text{(3)}\quad \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^n+\mathrm{e}^x}$$

★★ Exercice 7.2
Déterminez les limites suivantes :

$$\text{(1)}\quad \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{t}{2n}\right)^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

$$\text{(2)}\quad \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}t$$

(3) $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n}\, \mathrm{d}x$

★★ Exercice 7.3
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \sin(t^n)\, \mathrm{d}t$.

(1) Établissez l'inégalité suivante : $\forall u \in \mathbb{R},\ \ |\sin u| \leqslant |u|$.

(2) Déduisez-en la limite de la suite $(I_n)_{n \geqslant 0}$ puis retrouvez ce résultat par une autre méthode.

(3) À l'aide du changement de variable $t = u^{1/n}$, montrez que

$$I_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{J}{n}$$

où J est une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer.

★★ Exercice 7.4

(1) Soit $f : [0\,;\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrez que $\displaystyle\int_0^1 f(t^n)\, \mathrm{d}t \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} f(0)$.

(2) Cherchez un équivalent de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\, \mathrm{d}t$.

(3) Cherchez un équivalent de $-1 + \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t^n}\, \mathrm{d}t$.

★★ Exercice 7.5
Soit $x \in [0\,;\,n]$.

Montrez que $\left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.

Déduisez-en $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^p\, \mathrm{d}x$ pour $p \in \mathbb{N}$.

★★ Exercice 7.6
En utilisant notamment un changement de variable et le théorème de convergence dominée, démontrez que

$$\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^n}\, \mathrm{d}x \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{K}{n}$$

où $K = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t$.

★ Exercice 7.7
En développant en série $\dfrac{1}{1-t}$, démontrez que

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

★★ Exercice 7.8

Montrez que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

★★ Exercice 7.9
Montrez que la série $\displaystyle\sum_n (-1)^n \int_0^{\pi/2} \cos(t)^n\,\mathrm{d}t$ converge et donnez la valeur de sa somme.

★★ Exercice 7.10
Soit (a_n) une suite telle que la série $\displaystyle\sum_n a_n$ converge absolument.

(1) Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\displaystyle\sum_n \frac{a_n}{n!} x^n$ est convergente.

(2) On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \mathrm{e}^{-x}$. On admettra momentanément que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Montrez que f est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

★★ Exercice 7.11
Montrez que la fonction $S : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

On admettra momentanément que S est continue sur $\mathbb{R}$.

Prouvez l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(x)\,\mathrm{d}x$ et calculez la.

★★ Exercice 7.12

On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (voir un exercice ci-dessous).

Montrez que pour tout $x \in]-1\,;1[$, $\displaystyle\frac{2x}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{t^2}-x}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

★★ Exercice 7.13
Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{sh} x}\,\mathrm{d}x$ (on admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$).

★★ Exercice 7.14 (Intégrale de Gauss)
Le but de cet exercice est de déterminer la valeur de l'intégrale de Gauss

$$I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$g(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad h(x) = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

(1) Montrez que g et h sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et calculez leurs dérivées.

(2) Montrez que $g + h^2$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}_+$, constante que l'on déterminera.

(3) Montrez que $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty} g(x) = 0$.

(4) En déduire que $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

★★ Exercice 7.15 (Fonction caractéristique de la loi normale centrée réduite)
On cherche à calculer explicitement la fonction ϕ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad \phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{itx}\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x.$$

NB : il s'agit de la fonction caractéristique pour la loi normale centrée réduite. Pour les variables aléatoires continues, la fonction caractéristique joue un rôle analogue à la fonction génératrice pour les variables discrètes.

(1) Montrez que ϕ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donnez une expression de sa dérivée.

(2) Montrez que ϕ est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 que l'on précisera.

(3) À l'aide de l'intégrale de Gauss, calculez $\phi(0)$.

(4) Montrez enfin que $\forall t \in \mathbb{R},\ \ \phi(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2}$.

★★ Exercice 7.16

On pose, pour tout réel a : $F(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+a^4t^2}}\,\mathrm{d}t$.

(1) Montrez que la fonction F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

(2) Déduisez-en la valeur de $\displaystyle\lim_{a\longrightarrow 0} \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+a^4t^2}}\,\mathrm{d}t$.

★★ Exercice 7.17

On considère la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

(1) Déterminez le domaine de définition de F.

(2) Montrez que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son domaine de définition.

(3) Calculez F' et déduisez-en F.

★★ Exercice 7.18

Démontrez que la fonction F définie par

$$\forall p \geqslant 0,\ \ F(p) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-pt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

est continue sur $[0\ ;+\infty[$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0\ ;+\infty[$.

★★ Exercice 7.19

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a > 0$. On pose

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt} - \mathrm{e}^{-at}}{t}\cos(bt)\,\mathrm{d}t.$$

(1) Justifiez que g est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

(2) Justifiez que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(3) Calculez g' puis g.

★★ Exercice 7.20 (Compléments sur la fonction Gamma d'Euler)

On rappelle la définition de la fonction Gamma d'Euler :

$$\forall x > 0, \;\; \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t.$$

Démontrez la relation suivante :

$$\forall x > 1, \;\; \Gamma(x)\,\zeta(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{\mathrm{e}^t - 1} \,\mathrm{d}t,$$

où ζ est la fonction zêta de Riemann vérifiant $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-x}$ pour tout réel $x > 1$.

★★ Exercice 7.21 (Transformée de Fourier)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$. On définit la transformée de Fourier de f, notée $\hat{f}$, par :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \;\; \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{-i\omega x} \,\mathrm{d}x.$$

(1) Montrez que la fonction $\hat{f}$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

(2) On suppose de plus que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et que f' est intégrable sur $\mathbb{R}$.

  (a) Montrez que $\lim\limits_{\pm\infty} f = 0$.

  (b) Montrez que $\forall \omega \in \mathbb{R}, \;\; \widehat{f'}(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega)$.

★★ Exercice 7.22

On pose $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t} \,\mathrm{d}t$.

(1) (a) Déterminez le domaine de définition $\mathscr{D}$ de g.

  (b) Montrez que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{D}$ et calculez sa dérivée.

  (c) Déduisez-en l'expression de g.

(2) On pose, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$: $I(\alpha, \beta) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^\alpha - t^\beta}{\ln t} \,\mathrm{d}t$.

  (a) Pour quelles valeurs de (α, β) cette intégrale est-elle convergente ?

  (b) Lorsqu'elle converge, pratiquez le changement de variable $u \longmapsto u^\gamma$ dans cette intégrale. Déduisez-en la valeur de $I(\alpha, \beta)$.

★★ Exercice 7.23
On s'intéresse au comportement de la fonction F de l'exercice 18 au voisinage de 0.

(1) Montrez que pour tout $p > 0$, $F'(p)$ se met sous la forme

$$F'(p) = \int_0^{+\infty} G(p,u)\, \mathrm{e}^{-u}\, \mathrm{d}u,$$

où $G(p,u)$ est une fonction rationnelle des variables p et u que l'on précisera.

(2) Conjecturez la limite quand $p \longrightarrow 0^+$ de $F'(p)$ puis démontrez la.

(3) La fonction F est-elle dérivable en 0 ? Donnez une interprétation graphique du résultat.

★★ Exercice 7.24 (Prolongement $\mathscr{C}^\infty$)
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$.

(1) Montrez que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{f(x)}{x} = \displaystyle\int_0^1 f'(tx)\, \mathrm{d}t$.

(2) Déduisez-en que $g : x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

★★ Exercice 7.25
On donne la valeur de l'intégrale de Dirichlet :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, \mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}.$$

Calculez, pour tout réel x positif :

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t\left(1+t^2\right)}\, \mathrm{d}t.$$

★★ Exercice 7.26
Soit $f \in \mathscr{C}^0([0\,;\,1], \mathbb{R})$.Démontrez que

$$\lim_{h \longrightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2} f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} f(0).$$

Indication : on pourra effectuer le changement de variable $x = ht$.

Exercice 7.27 (Oral CCINP, 1)

(1) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \longmapsto (\operatorname{ch} x)^{-n}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

(2) Calculez la limite de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

(3) Donnez la nature des séries $\displaystyle\sum_n (-1)^n I_n$ et $\displaystyle\sum_n I_n$ *(indication : montrez que pour tout* $x \in \mathbb{R}_+,\ \operatorname{ch} x \geqslant \operatorname{sh} x$*).*

(4) Donnez le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_n I_n x^n$.

Exercice 7.28 (Oral Navale, 2)

On pose, pour $n \geqslant 2$: $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 + t^n}{\sqrt{t} + t^{2n}}\,\mathrm{d}t$.

Montrez que (I_n) est bien définie et calculez sa limite.

Exercice 7.29 (Oral CCINP, 3)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 + t^n}\,\mathrm{d}t$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1 + t^n)\,\mathrm{d}t$.

(1) Donnez une relation entre I_n et J_n (on pourra calculer $n(1 - I_n)$).

(2) Déduisez-en un développement asymptotique de I_n avec une précision de $\dfrac{1}{n}$.

(3) Montrez que l'application $F : u \in [0\,;1] \longmapsto \displaystyle\int_0^u \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est bien définie, puis montrez que $\displaystyle\int_0^1 F(t^n)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$.

(4) Déduisez-en un développement asymptotique de J_n avec une précision $\dfrac{1}{n}$, puis un développement de I_n en $\dfrac{1}{n^2}$.

Exercice 7.30 (Oral ENSEA, 4)

Soit $\Phi : t \longmapsto \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(t \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

Montrez que Φ admet une unique racine $z \in [0\,;\pi]$ et que $z > \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 7.31 (Oral IMT, 5)

Soit $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

(1) Montrez que pour tout $x > 0$, l'intégrale $F(x)$ est convergente.

(2) Étudiez les variations de F.

(3) Montrez que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.

(4) Montrez que pour tout $x > 0$, $\;F(x) \geqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}} \displaystyle\int_0^{1/\sqrt{x}} \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$. Déduisez-en la limite de F en 0.

Exercice 7.32 (Oral ENSEA, 6)

(1) Déterminez le domaine de définition de $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} t}{t}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

(2) Calculez f'.

(3) Déterminez la limite de f en $+\infty$. Déduisez-en f.

Exercice 7.33 (Oral CCINP, 7)

Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-xt}}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$.

(1) Donnez le domaine de définition de f.

(2) Calculez la limite de f en $+\infty$.

(3) Pour $x > 0$, calculez $f(x-1) - f(x)$.

(4) Déterminez une expression de $f(x)$ sous forme de série.

(5) Quelle autre méthode aurait-on pu utiliser pour trouver cette expression de $f(x)$?

Exercice 7.34 (Oral CCINP, 8)

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

(1) Montrez que $f(x)$ existe pour $x \geqslant 0$.

(2) Montrez que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(3) Montrez que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[$.

(4) Déterminez les limites de f et f' en $+\infty$.

(5) Calculez $f'(x)$ et $f(x)$.

(6) Justifiez l'existence et calculez $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 7.35 (Oral CCINP, 9)

On pose $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

(1) Montrez que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

(2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \ln(f(t))\,\mathrm{d}t$.
Déterminez la nature de la série $\displaystyle\sum_n (-1)^n u_n$.

Exercice 7.36 (Oral CCMP, 10)
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose $g(x) = \displaystyle\int_0^1 f(xt)\ln(t)\,\mathrm{d}t$.

(1) Montrez que g est définie sur $\mathbb{R}$ et calculez $g(0)$.

(2) Montrez que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculez $g'(0)$.

Exercice 7.37 (Oral CCMP, 11)

Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+t^x)}\,\mathrm{d}t$.

(1) Montrez que f est définie sur $\mathbb{R}_+$. Calculez $f(0)$ et $\lim\limits_{+\infty} f$.

(2) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Calculez $f(x)$.

Exercice 7.38 (Oral CCMP, 12)

Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \cos(xt)\,\mathrm{d}t$.

(1) Montrez que f est définie sur $\mathbb{R}$.

(2) Montrez que f est solution d'une équation différentielle.

(3) Déduisez-en f.

Exercice 7.39 (Oral CCMP, 13)

Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{1} \ln(t)\ln(1-t^x)\,\mathrm{d}t$.

(1) Déterminez le domaine de définition de f.

(2) Écrivez f comme somme d'une série de fonctions.

(3) Déterminez la limite de f en 0.

Exercice 7.40 (Oral CCMP, 14)

Soit $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

(1) Montrez que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$.

(2) Trouvez un équivalent simple de f en $+\infty$.

(3) Trouvez un équivalent simple de f en 0.

Exercice 7.41 (Oral CCMP, 15)
Soit Γ la fonction de la variable réelle x définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

(1) Déterminez le domaine de définition de Γ.

(2) Donnez un équivalent en $+\infty$ de $f(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} \ln(\Gamma(u))\,\mathrm{d}u$.

(3) Déduisez-en un équivalent en $+\infty$ de $\ln(\Gamma(x))$.

Exercice 7.42 (Oral CCMP, 16)

Soit $f : x \longmapsto \int_0^1 \mathrm{e}^{t^x \ln t}\,\mathrm{d}t$.

(1) Montrez que f est définie sur $\mathbb{R}$.

(2) Montrez que f est croissante et continue sur $\mathbb{R}$.

(3) Donnez une expression de $f(x)$ comme somme de série pour $x > 0$.

Exercice 7.43 (Oral CCMP, 17)
Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs, croissante et de limite $+\infty$.

Montrez l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \mathrm{e}^{-a_n t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{a_n}.$$

Exercice 7.44 (Oral CCMP, 18)
Soit $f :]-1\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-(1-t^x)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Justifiez la définition de f et donnez une expression de $f(x)$ comme somme d'une série.

Exercice 7.45 (Oral CCMP, 19)

Soit $T : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{itx}-1}{t}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Montrez que T est définie sur $\mathbb{R}$ et calculez $T(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Problème 1 – CCINP 2013 – PC

On s'intéresse ici à des suites et séries de fonctions en liaison avec des intégrales.

Les deux premières parties sont indépendantes.

On admet les résultats suivants :

$$K = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \frac{\ln u}{u-1}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi^2}{6}.$$

Étude de quelques suites d'intégrales

Question 1

(1) On considère ici une application continue $f : [0\ ;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t$.

Déterminez $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} I_n$.

(2) On suppose ici de plus que $u \longmapsto \dfrac{f(u)}{u}$ est intégrable sur $]0\ ;1]$.

Déterminez $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} nI_n$.

On pourra transformer nI_n grâce à un changement de variable.

(3) Application : déterminez un équivalent quand $n \longrightarrow +\infty$ de $\displaystyle\int_0^1 \sin(t^n)\,\mathrm{d}t$ (grâce à une intégrale).

Question 2

On considère maintenant que $f : [0\ ;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est une application continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

(1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Grâce à un changement de variable approprié, justifiez l'existence de $A_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} f(t^n)\,\mathrm{d}t$.

(2) Déterminez $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} nA_n$ (grâce à une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer).

Question 3

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$ et tout $A > 1$, on pose $C_n(A) = \displaystyle\int_1^A \sin(t^n)\,\mathrm{d}t$.

Grâce à un changement de variable et une intégration par parties, exprimez $C_n(A)$ en fonction de $\displaystyle\int_1^{A^n} \frac{1-\cos u}{u^2} u^{1/n}\,\mathrm{d}u$ et de A.

(2) Déduisez-en que $C_n(A)$ a une limite quand $A \longrightarrow +\infty$, prouvant l'existence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(t^n)\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.

(3) Application : déterminez $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} n\int_0^{+\infty} \sin(t^n)\,\mathrm{d}t$ grâce à K, admise en préambule.

Étude de séries de fonctions

⋆⋆ Ne pas traiter les questions 4 et 5 ⋆⋆

Question 4 (Un premier exemple)

(1) Pour tout $x \in]-1\ ;1[$, calculez $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ ainsi que $F'(x)$.

(2) Déterminez $\lim_{x \longrightarrow 1^-} F(x)$, $\lim_{x \longrightarrow 1^-} (1-x) F(x)$, $\lim_{x \longrightarrow 1^-} (1-x) F'(x)$ et $\lim_{x \longrightarrow 1^-} (1-x)^2 F'(x)$.

Question 5 (Un deuxième exemple)

Dans cette question pour tout $x \in]-1\ ;1[$, on pose cette fois $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$.

(1) Soit $a \in]0\ ;1[$. Prouvez la convergence normale de cette série de fonctions sur le segment $[-a\ ;a]$.
Déduisez-en que F est définie et continue sur $]-1\ ;1[$.

(2) Montrez que, pour tout $x \in]0\ ;1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1-x^n}{1-x} \leqslant n$.
Déduisez-en $\lim_{x \longrightarrow 1^-} F(x)$ et $\lim_{x \longrightarrow 1^-} (1-x) F(x)$.

Question 6

Dans cette question, f est une application réelle continue et croissante sur $[0\ ;1[$ avec $f(0) = 0$ et telle que $u \longmapsto \frac{f(u)}{u}$ soit intégrable sur $]0\ ;1[$.

Soit $x \in]0\ ;1[$.

(1) Justifiez l'existence de $G(x) = \int_0^{+\infty} f\left(x^t\right) \mathrm{d}t$ et l'égalité $G(x) = -\frac{1}{\ln x} \int_0^1 \frac{f(u)}{u} \mathrm{d}u$.

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifiez l'encadrement

$$\int_n^{n+1} f\left(x^t\right) \mathrm{d}t \leqslant f(x^n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f\left(x^t\right) \mathrm{d}t.$$

(3) Déduisez-en l'existence de $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(x^n)$, ainsi qu'un encadrement de $F(x)$ par deux intégrales dépendant de x.

(4) Concluez avec soin que $\lim_{x \longrightarrow 1^-} (1-x) F(x) = \int_0^1 \frac{f(u)}{u} \mathrm{d}u$.

Question 7 (Un dernier exemple)
⋆⋆ Ne pas traiter la sous-question 1 ⋆⋆

Pour tout $x \in \left]-1\,;1\right[$, on pose cette fois $F(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1-x^n)$.

(1) Montrez que F est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]-1\,;1\right[$ et exprimez sa dérivée sous la forme d'une série de fonctions.

(2) Grâce à la question 6.4, montrez que $\lim_{x \longrightarrow 1^-} (1-x)\,F(x) = \int_0^1 \frac{\ln u}{u-1}\,\mathrm{d}u$ (intégrale donnée en préambule).

(3) Par une méthode similaire à celle de la question 6, montrez que

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \left((1-x)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} \right) = \int_0^1 \frac{\ln u}{u-1}\,\mathrm{d}u.$$

Déduisez-en $\lim_{x \longrightarrow 1^-} (1-x)^2\,F'(x)$.

Problème 2 – CCINP 2022 – MP – Math 1

Dans ce problème, on étudie certaines intégrales et séries numériques reliées aux intégrales dites de Fresnel. Augustin Fresnel (1788-1827) démontra le caractère ondulatoire de la lumière et, pour cette raison, il est considéré comme un des fondateurs de l'optique moderne.

Intégrales fonctions de leur borne

⋆⋆ Ne pas traiter les questions 3, 7 et 8 ⋆⋆

Dans cette partie, on définit la fonction H par l'expression $H(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{it^2}\,\mathrm{d}t$, où e^{it^2} signifie $\exp\left(it^2\right)$.

Question 1
Démontrez que H est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Donnez une expression de $H'(x)$.

Question 2
Étudiez la parité de la fonction H.

Question 3
Démontrez que la fonction $t \longmapsto e^{it^2}$ est développable en série entière au voisinage de 0. Déduisez-en un développement en série entière de la fonction H au voisinage de 0, en précisant l'intervalle sur lequel ce développement est valable.

Question 4
Si $x > 0$, démontrez que

$$H(x) = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\, du.$$

Question 5
Pour $x > \sqrt{2\pi}$, déduisez-en que

$$H(x) - H\left(\sqrt{2\pi}\right) = -i\frac{e^{ix^2}}{2x} + \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} - \frac{i}{4}\int_{2\pi}^{x^2} \frac{e^{iu}}{u^{3/2}}\, du.$$

Question 6
Déduisez-en que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it^2}\, dt$ converge.

Question 7 (Informatique Pour Tous)
Proposez, en langage Python, une fonction `I(f, a, b, n)` qui prend en entrée une fonction `f` à valeurs réelles ou complexes, deux réels `a` et `b` et un entier naturel `n` et qui renvoie une valeur approchée avec la méthode des rectangles de $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ calculée avec n rectangles.

Question 8 (Informatique Pour Tous)
Proposez, en langage Python, une fonction `H(x, n)` qui prend en entrée un réel `x` et un entier naturel `n` et qui renvoie une valeur approchée de $H(x)$ calculée avec la fonction de la question précédente. On rappelle que le code Python pour e^{it^2} est `exp(1j * t ** 2)`.

Calcul des intégrales de Fresnel

Dans cette partie, on étudie la fonction g d'expression

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}\,\mathrm{d}t.$$

Pour cela, on pose $f(x,t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}$.

Question 9
Si $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, déterminez les modules des nombres complexes $\mathrm{e}^{-x^2(t^2-i)}$ et $t^2 - i$.

Question 10
Démontrez que g est définie et continue sur $\mathbb{R}$ (on pourra utiliser un argument de parité).

Question 11
Soit $(x_n)_n$ une suite divergente vers $+\infty$.

À l'aide du théorème de convergence dominée, démontrez que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} g(x_n) = 0$.

Déduisez-en la limite de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

Question 12
Démontrez que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

Question 13
On admet dans cette question que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et est égale à $\sqrt{\pi}$.

Vérifiez que

$$\forall x > 0,\quad g'(x) = -2\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{ix^2}.$$

Question 14
Décomposez dans $\mathbb{C}[X]$ la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X^2-i}$.

On admet ensuite que

$$\frac{1}{X^2-i} = \frac{1-i}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2X-\sqrt{2}}{X^2-X\sqrt{2}+1} + \frac{i}{X^2-X\sqrt{2}+1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2X+\sqrt{2}}{X^2+X\sqrt{2}+1} + \frac{i}{X^2+X\sqrt{2}+1}\right).$$

Démontrez que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\,\mathrm{d}t = \pi\sqrt{2}$.

Donnez la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\,\mathrm{d}t$ puis déterminez la valeur de $g(0)$.

Question 15
Déduisez-en que

$$\forall x > 0, \quad g(x) = \frac{(1+i)\,\pi}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{\pi} H(x)\,.$$

Donnez ensuite les valeurs de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{it^2}\,\mathrm{d}t$, de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos\left(t^2\right)\mathrm{d}t$ et de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t$.

Étude d'une série de fonctions

Dans cette partie, on étudie la fonction S d'expression

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{inx}}{\sqrt{n}}.$$

Pour tout entier naturel n non-nul, on note f_n la fonction d'expression $f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{inx}}{\sqrt{n}}$.

Question 16
On suppose que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite réelle positive décroissante de limite nulle et que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée.

En admettant l'identité suivante :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{N} a_n\,(b_n - b_{n-1}) = \sum_{n=1}^{N} (a_n - a_{n+1})\,b_n + a_{N+1}b_N - a_1 b_0,$$

démontrez que la série $\displaystyle\sum_n a_n\,(b_n - b_{n-1})$ converge.

Question 17
Soient $x \in\,]0\,;2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Démontrez que

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ikx} = \mathrm{e}^{\frac{i(n+1)x}{2}} \times \frac{\sin\left(^{nx}/_2\right)}{\sin\left(^{x}/_2\right)}.$$

Question 18
À l'aide des deux questions précédentes, démontrez que S est définie sur $]0\,;2\pi[$.

Question 19
On admet dans cette question que si $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0\,;2\pi[$, alors

$$\left|\frac{e^{i(k+1)x} - e^{ikx}}{ix\sqrt{k}} - \int_k^{k+1} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\,dt\right| \leqslant \frac{1}{4k^{3/2}}.$$

Démontrez qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in]0\,;2\pi[$:

$$\left|\frac{e^{ix} - 1}{ix} S(x) - \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\,dt\right| \leqslant C.$$

Question 20
Démontrez la convergence de l'intégrale $J(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\,dt$.

Déterminez la limite, quand x tend vers 0^+, de $I(x) = \sqrt{x}J(x)$.

Question 21
Déterminez la limite en 0^+ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{ix} - 1}{ix}$.

Donnez un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0^+.

Chapitre 8

Espaces préhilbertiens réels

Cf. chapitre suivant.

Chapitre 9

Endomorphismes dans un espace euclidien

Sommaire

Exercices

⋆ Exercice proche du cours
⋆⋆ Exercice de difficulté normale
⋆ ⋆ ⋆ Exercice difficile (voire très difficile)
+ Exercice à faire en priorité

⋆ Exercice 9.1
Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On définit $\langle P \mid Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(k)\,Q(k)$.

(1) Montrez que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

(2) Dans le cas où $n = 3$, donnez une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.

(3) Calculez la distance de X^3 à $\mathbb{R}_2[X]$.

⋆ Exercice 9.2
Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire classique $(A, B) \longmapsto \operatorname{tr}\left(A^\top B\right)$.

(1) Montrez que si A est symétrique et B est antisymétrique, alors A et B sont orthogonales pour ce produit scalaire.

(2) Déterminez $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^{\perp}$.

(3) Dans le cas où $n = 2$, calculez la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures.

★★ Exercice 9.3
Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On définit $\langle P \mid Q \rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P(k)\,Q(k)}{2^k}$.

(1) Montrez que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

(2) Donnez une base orthonormée du sous-espace $\mathbb{R}_2[X]$.

(3) Calculez la distance de X^3 à $\mathrm{Vect}\left(1, X, X^2\right)$.

★★ Exercice 9.4
Même exercice avec $\langle P \mid Q \rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\,Q(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

★★ Exercice 9.5

(1) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme T_n tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos t) = \cos(nt)$.

(2) Calculez T_0 et T_1 puis montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$. En déduire le degré et le coefficient dominant de T_n.

(3) Montrez que l'application $(P, Q) \longmapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)\,Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

(4) Montrez que la famille (T_n) est orthogonale pour ce produit scalaire.

★★ Exercice 9.6
Soit E l'ensemble des suites réelles x telles que la série $\displaystyle\sum_n x_n^2$ converge.

(1) Vérifiez rapidement que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $|ab| \leqslant \dfrac{a^2 + b^2}{2}$.

(2) Soient $x, y \in E$. Montrez que la série $\displaystyle\sum_n x_n y_n$ est absolument convergente.

(3) Montrez que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(4) On pose $\langle x \mid y \rangle = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$. Montrez qu'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

⋆ Exercice 9.7

Soit E un espace euclidien de dimension 3 muni d'une base orthonormée dans laquelle toutes les coordonnées sont exprimées. Soient u de coordonnées $(1,3,1)$, v de coordonnées $(5,2,-1)$ et w de coordonnées $(1,1,1)$.

(1) Donnez un système d'équation et une base d'un supplémentaire de chacun des sous-espaces vectoriels $\text{Vect}\,(u)$ et $\text{Vect}\,(u,v)$.

(2) Déterminez la projection orthogonale de v sur la droite $\text{Vect}\,(u)$.

(3) Déterminez la projection orthogonale de w sur le plan $\text{Vect}\,(u,v)$.

(4) Déterminez la matrice du projecteur orthogonal sur le plan précédent.

⋆ Exercice 9.8

Soient E un espace euclidien de dimension 4 muni d'une base orthonormée dans laquelle toutes les coordonnées sont exprimées et $F = \{x \in E \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \text{ et } x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$.

(1) Justifiez que F est un sous-espace vectoriel de E. Donnez une base orthonormée de F.

(2) Soit v de coordonnées $(2,3,1,-1)$. Déterminez sa projection orthogonale sur F.

(3) Déterminez la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à F.

⋆⋆ Exercice 9.9

Soit $E = \text{Vect}\left(\text{id}_{[0;\pi]}, \sin, \cos\right)$ muni du produit scalaire $\langle f \mid g\rangle = \displaystyle\int_0^\pi f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$.

Déterminez $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^\pi (x - (a\cos x + b\sin x))^2\,\mathrm{d}x$.

⋆⋆ Exercice 9.10

(1) Déterminez $\displaystyle\inf_{x\in\mathbb{R}} \left((2x-b_1)^2 + (3x-b_2)^2 + (4x-b_3)^2\right)$ où b_1, b_2, b_3 sont fixés dans $\mathbb{R}$.

(2) Déterminez $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \sum_{k=1}^{n} \left(k^2 - ak - b\right)^2$. On admet $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right)}{30}$.

(3) Déterminez $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 \left(x^2 - ax - b\right)^2 x^2\,\mathrm{d}x$.

(4) Déterminez $\displaystyle\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-\pi}^{\pi} (t - a\sin t - b\cos t - c)^2\,\mathrm{d}t$.

★★ Exercice 9.11

Soient E un espace euclidien et $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$ des vecteurs unitaires tels que

$$\forall x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x \mid e_k \rangle^2 .$$

Montrez que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E.

★★ Exercice 9.12

Soient E un espace euclidien et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

Montrez que $\left(F^\perp\right)^\perp = F$, $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

★★★ Exercice 9.13

On munit $E = \mathscr{C}^0([0\,;1], \mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle f \mid g \rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$.

Soit $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.

A-t-on $E = F \oplus F^\perp$? A-t-on $\left(F^\perp\right)^\perp = F$?

Indication : si $f \in F^\perp$, considérez la fonction $t \longmapsto t f(t)$.

★★ Exercice 9.14

Soient E un espace euclidien et $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur.

On sait d'après le cours que si p est un projecteur orthogonal, alors pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Montrez que la réciproque est vraie, en utilisant le vecteur $y + \lambda x$, où $x \in \operatorname{Im} p$, $y \in \ker p$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

★★ Exercice 9.15

Soient E un espace euclidien de dimension 3 rapporté à une base orthonormée $\mathscr{B}$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = A = \dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} 8 & 6 & -10 \\ -10 & 5 & 0 \\ 6 & -8 & 5 \end{pmatrix}$.

(1) Donnez une base du noyau et de l'image de f. Vérifiez que ces deux sous-espaces de E sont supplémentaires orthogonaux.

(2) Donnez une base orthonormée directe $\mathscr{B}'$ de E dont les vecteurs sont choisis dans le noyau ou l'image de f (dans cet ordre).

(3) Montrez que la matrice de f dans cette nouvelle base est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

(4) Donnez une interprétation géométrique de l'application f.

⋆ Exercice 9.16

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 rapporté à une base orthonormée directe.

Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de chacune des applications linéaires dont les matrices sont :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix} \qquad C = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \qquad E = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & -2 \end{pmatrix}.$$

⋆⋆ Exercice 9.17

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 rapporté à une base orthonormée directe.

Déterminez la matrice de la rotation d'axe orienté par u de coordonnées $(1, 1, -1)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

⋆⋆ Exercice 9.18

Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3 rapporté à une base orthonormée directe, u un vecteur unitaire, θ un réel et f la rotation d'axe orienté par u et d'angle θ.

Montrez que pour tout $x \in E$, $\; f(x) = (1 - \cos\theta)\,\langle x \mid u\rangle\, u + \cos(\theta)\, x + \sin(\theta)\, u \wedge x$.

⋆⋆ Exercice 9.19

Déterminez $\mathrm{Card}\left(\mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})\right)$.

⋆⋆ Exercice 9.20

Soit E un espace euclidien et u un automorphisme orthogonal de E. On pose $v = \mathrm{id}_E - u$.

(1) Montrez que $\ker v = (\mathrm{Im}\, v)^{\perp}$.

(2) Soit p la projection orthogonale sur $\ker v$. Montrez que

$$\forall x \in E,\; \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k(x) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} p(x).$$

⋆ Exercice 9.21
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^\top = A$.

(1) Montrez que s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = I_n$, alors $A^2 = I_n$. Que peut-on dire de mieux si k est impair ?

(2) Montrez que si A est nilpotente, alors $A = 0$.

⋆ Exercice 9.22
Soient $S = (s_{i\,j})$ une matrice symétrique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres.

Montrez que $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} s_{i\,j}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$.

⋆⋆ Exercice 9.23
Soient $n \geqslant 3$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \dots\dots 1 & 1 \\ 1 & 0 \dots\dots 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \quad 0 \quad \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \dots\dots 0 & 1 \\ 1 & 1 \dots\dots 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

(1) Justifiez que A est diagonalisable, puis que A possède au plus trois valeurs propres distinctes dont l'une est 0.

(2) En notant λ et μ les deux autres valeurs propres (pouvant être égales), donnez deux équations reliant λ et μ, et déduisez-en le spectre de A.

⋆⋆ Exercice 9.24
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrez que $AA^\top$ et $A^\top A$ sont orthosemblables.

⋆⋆ Exercice 9.25
Déterminez toutes les matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$AA^\top A = I_n.$$

★★ Exercice 9.26
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire

$$\langle P \mid Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)\, Q(t)\, \mathrm{d}t.$$

(1) Montrez que l'application $u : P \longmapsto \left(1 - X^2\right) P'' - 2XP'$ est un endomorphisme auto-adjoint de E.

(2) Montrez que les valeurs propres de u sont négatives.

★★ Exercice 9.27
Soient E un espace euclidien, $u_1, \ldots, u_p \in E$ et f l'application de E dans E telle que

$$f : x \longmapsto \sum_{k=1}^{p} \langle u_k \mid x \rangle\, u_k.$$

(1) Quelle est l'application f lorsque $\left(u_1, \ldots, u_p\right)$ est une famille orthonormée ?

(2) Dans le cas général, montrez que f est un endomorphisme auto-adjoint positif de E.

(3) Déterminez $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.

★★ Exercice 9.28
Rappel : une matrice symétrique $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite positive quand $\forall X \in \mathscr{M}_{n\,1}(\mathbb{R}),\ \ X^\top A X \geqslant 0$.

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrez l'équivalence des propriétés suivantes :

(α) A est positive

(β) toutes les valeurs propres de A sont positives

(γ) il existe $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = M^\top M$

(δ) il existe $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = S^2$.

Modifiez les propositions précédentes pour caractériser les matrices A définies-positives.

★ ★ ★ Exercice 9.29 (Racine carrée)

(1) Montrez que $r : \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M^2 \end{array}$ est une surjection.

(2) Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et M un antécédent de A par r. Montrez qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $M = P(A)$.

(3) Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et M, N deux antécédents de A par r. Montrez que $(M - N)(M + N) = 0$ et que $M + N$ est inversible. Déduisez-en que l'application r est injective.

$\star\star\star$ Exercice 9.30 (Décomposition polaire)

Montrez que pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, il existe un unique couple $(Q, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = QS$.

$\star\star$ Exercice 9.31

Soient f et g deux endomorphismes auto-adjoints d'un espace euclidien.

Montrez que $f \circ g$ est auto-adjoint ssi f et g commutent.

$\star\star$ Exercice 9.32

(1) Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrez qu'il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et des matrices colonnes $U_1, \dots, U_n$ de $\mathcal{M}_{n\,1}(\mathbb{R})$ tels que

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ \ U_i^\top U_j = \delta_{i\,j} \qquad \text{et} \qquad S = \sum_{i=1}^n \lambda_i U_i U_i^\top.$$

(2) Soit u un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien E. Montrez que u est combinaison linéaire de projections orthogonales sur des droites et que ces projections commutent entre elles.

$\star\star$ Exercice 9.33

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $M^2 + 4I_n = 0$ et $M^\top M = MM^\top = S$.

(1) Trouvez un polynôme annulateur de S de degré 2.

(2) Déduisez-en que $\dfrac{1}{2}M$ est orthogonale.

(3) Dans le cas $n = 2$, déterminez toutes les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient les conditions de l'exercice.

$\star\star$ Exercice 9.34

Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3 et u un vecteur non-nul de E.

On pose f l'endomorphisme de E défini par $f(x) = u \wedge (u \wedge x)$.

Montrez que f est diagonalisable et diagonalisez-le.

$\star\star$ Exercice 9.35

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $S = \dfrac{1}{2}\left(A + A^\top\right)$ et a, b les plus petite et plus grande valeurs propres de S.

Montrez que toute valeur propre réelle de A est comprise entre a et b.

★★ **Exercice 9.36**
Soit E un espace euclidien. On dit qu'un endomorphisme f de E est anti-adjoint quand

$$\forall u, v \in E, \ \ \langle f(u) \mid v \rangle = -\langle u \mid f(v) \rangle .$$

Soit f un endomorphisme anti-adjoint de E.

(1) Montrez que $\forall u \in E, \ \ f(u) \perp u$.

(2) Montrez que la seule valeur propre possible de f est 0. L'endomorphisme f peut-il être diagonalisable ?

(3) Montrez que $f \circ f$ est un endomorphisme auto-adjoint de E et que ses valeurs propres sont négatives ou nulles.

(4) Soit x un vecteur propre de $f \circ f$ pour la valeur propre $-\lambda \neq 0$.

   (a) Montrez que $P_x = \operatorname{Vect}(x, f(x))$ est un plan vectoriel stable par f.

   (b) Montrez qu'il existe une base orthonormée (a, b) de P_x où la matrice de l'endomorphisme induit f_{P_x} est de la forme
   $$R_\mu = \begin{pmatrix} 0 & -\mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix},$$
   où μ est un réel strictement positif que l'on précisera.

(5) Montrez qu'il existe une base orthonormée de E où la matrice de f est diagonale par blocs, avec des blocs de la forme R_μ d'abord puis des blocs (0) de taille 1×1.

Exercice 9.37 (Oral CCINP, 1)

(1) Calculez, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} t^n \, \mathrm{d}t$ (distinguer les cas n pair et n impair ; on donne de plus $I_0 = 1$).

(2) Montrez que l'application $(P, Q) \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

(3) Calculez la distance de X^3 à $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 9.38 (Oral CCINP, 2)
Soit $E = \mathscr{C}^0([0\,;1],\mathbb{R})$. On pose pour $(f,g) \in E^2$: $\langle f \mid g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,g(t)\,t^2\,\mathrm{d}t$.

(1) Montrez que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

(2) Calculez $\displaystyle\int_0^1 t^n \ln(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(3) Soit $F = \left\{x \longmapsto ax+b \;\middle|\; (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$ et $u \in E$ telle que $u(x) = x\ln x$ pour tout $x \in\,]0\,;1]$. Déterminez le projeté orthogonal de u sur F.

(4) Déterminez $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (at+b-t\ln t)^2\,t^2\,\mathrm{d}t$.

Exercice 9.39 (Oral CCINP, 3)
Soit $E = \mathscr{C}^2([0\,;1],\mathbb{R})$. On pose pour $(f,g) \in E^2$: $\langle f \mid g\rangle = \displaystyle\int_0^1 (fg + f'g')$.

On considère les sous-ensembles

$V = \{f \in E \mid f'' = f\} \qquad G = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\} \qquad H = \{f \in E \mid f(0) = \operatorname{ch} 1 \text{ et } f(1) = 1\}$.

(1) Montrez que la famille $(\operatorname{ch}, \operatorname{sh})$ est une base de V.

(2) Soient $f \in V$ et $g \in E$. Montrez que $\langle f \mid g\rangle = f'(1)\,g(1) - f'(0)\,g(0)$. Calculez $\langle \operatorname{ch} \mid \operatorname{sh}\rangle$, $\|\operatorname{ch}\|^2$ et $\|\operatorname{sh}\|^2$.

(3) Soient $f \in V$ et $g \in G$. Montrez que $\langle f \mid g\rangle = 0$.

(4) Soit $f \in H$. Calculez $\langle f \mid \operatorname{ch}\rangle$ et $\langle f \mid \operatorname{sh}\rangle$. Déduisez-en le projeté orthogonal de f sur V.

(5) Calculez $\displaystyle\inf_{f\in H} \int_0^1 \left(f^2 + f'^2\right)$.

Exercice 9.40 (Oral CCINP, 4)
Soient E un espace euclidien, $(e_1,\ldots,e_n)$ une base orthonormée de E et $(u_1,\ldots,u_n)$ une famille de vecteurs de E.

(1) Soit $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrez que $\displaystyle\left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i\right\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \times \sum_{i=1}^n \|u_i\|^2$.

(2) Déduisez-en que si $\displaystyle\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 < 1$, alors la famille $(e_i + u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de E.

Exercice 9.41 (Oral CCINP, 5)
Soient E un espace euclidien et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. On note D la droite engendrée par le vecteur $u = \sum_{k=1}^{n} k e_k$.

(1) Donnez la matrice dans la base $\mathscr{B}$ du projecteur orthogonal sur D, noté p.

(2) Donnez le polynôme caractéristique et le spectre de p.

(3) Calculez la distance de $v = \sum_{k=1}^{n} e_k$ à D.

Exercice 9.42 (Oral CCINP, 6)
Soient $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice définie-positive et $B \in \mathscr{M}_{n\,m}(\mathbb{R})$ une matrice de rang m.

(1) Montrez que $n \geqslant m$.

(2) Montrez que $C = \begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & 0 \end{pmatrix}$ est inversible.

Exercice 9.43 (Oral IMT, 7)
Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme auto-adjoint défini-positif de E.

(1) Montrez que $(x, y) \longmapsto \langle f(x) \mid y \rangle$ est un produit scalaire sur E.

(2) Montrez qu'il existe un endomorphisme auto-adjoint défini-positif g tel que $g^2 = f$.

Exercice 9.44 (Oral IMT, 8)
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AA^\top = A^\top A$ et $p \geqslant 2$ tel que $A^p = 0$.

Montrez que $A = 0$.

Exercice 9.45 (Oral CCINP, 9)
Soient $A, B \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = \dfrac{1}{3}(2A + B) \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.

(1) Calculez $AB^\top + BA^\top$ en calculant $MM^\top$.

(2) Montrez que $A = B$.

Exercice 9.46 (Oral CCINP, 10)

Soient $C \in \mathscr{M}_{n\,1}(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & -C^\top \\ C & I_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

(1) Calculez $M^\top M$, déduisez-en que M est inversible.

(2) Montrez que $M^{-1}M^\top$ est une matrice orthogonale.

Exercice 9.47 (Oral CCINP, 11)
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M \neq I_n$, $M^3 = I_n$ et $MM^\top = M^\top M$.

(1) Montrez que $M \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.

(2) Dans le cas où $n = 3$, déterminez les matrices M vérifiant les conditions de l'énoncé.

Exercice 9.48 (Oral CCMP, 12)

(1) Montrez que $\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

(2) Est-ce que l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel ?

(3) Soit $\mathscr{N}$ un sous-espace de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ constitué de matrices nilpotentes. Montrez que $\dim \mathscr{N} \leqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$.

(4) Peut-on avoir $\dim \mathscr{N} = \dfrac{n(n-1)}{2}$?

Exercice 9.49 (Oral Centrale, 13)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est une matrice normale quand $AA^\top = A^\top A$.

(1) Déterminez les matrices normales de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(2) Montrez que toute matrice normale stabilise un espace de dimension 1 ou 2.

(3) Montrez que si A est normale, alors il existe $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^\top AP$ soit diagonale par blocs, chaque bloc diagonal étant soit un bloc (a), soit un bloc $\begin{pmatrix} a & c \\ -c & b \end{pmatrix}$.

Exercice 9.50 (Oral Centrale, 14)
Soit $A \in \mathscr{M}_{n\,p}(\mathbb{R})$. On munit $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ de leurs produits scalaires canoniques.

(1) Montrez que $\ker A = \ker A^\top A$. Déduisez-en que $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^\top A$ (noté r dans la suite).

(2) Montrez qu'il existe une famille orthonormée $(y_1, \ldots, y_r)$ de $\mathbb{R}^r$ telle que la matrice Y de colonnes $y_1, \ldots, y_r$ vérifie $Y^\top A^\top AY = D$, où D est diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs.

(3) Montrez qu'il existe U, V orthogonales et Δ diagonale telles que $A = U\Delta V$.

Exercice 9.51 (Oral CCMP, 15)
Soit $A = \left(a_{i\,j}\right) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

(1) Montrez que pour tout $(i, j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ \ a_{i\,j} > 0$ et $a_{i\,j}^2 \leqslant a_{i\,i}a_{j\,j}$.

(2) Montrez que $\displaystyle\max_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} \left|a_{i\,j}\right| = \max_{k\in[\![1;n]\!]} a_{k\,k}$.

Exercice 9.52 (Oral CCMP, 16)
(1) Montrez que si $A, B \in \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})$, alors $\operatorname{tr}(AB) \geqslant 0$.

(2) Déterminez les matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall S \in \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R}),\ \ \operatorname{tr}(MS) \geqslant 0$.

Exercice 9.53 (Oral CCMP, 17)
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $k \geqslant 2$ tels que $A^k = A^\top$.

(1) Montrez que $\ker A$ et $\operatorname{Im} A$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbb{R}^n$.

(2) Montrez que $B = A^{k+1}$ est une matrice de projecteur orthogonal.

(3) Montrez que A induit une isométrie sur $\operatorname{Im} A$.

(4) Déduisez-en A.

Exercice 9.54 (Oral CCMP, 18)
Soient $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

(1) Montrez que le spectre complexe de A est inclus dans $i\mathbb{R}$.

(2) Montrez qu'il existe $S' \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S'^2 = S$.

(3) Montrez que $\det S \leqslant \det(S + A)$.

Problème

Notations

Pour ce problème, on désigne par n un entier naturel non-nul.

On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; A^\top = A\right\}$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques.

Un vecteur de $\mathbb{R}^n$ est noté $x = (x_j)_{1\leqslant j\leqslant n} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ en identifiant les matrices-colonnes de $\mathscr{M}_{n\,1}(\mathbb{R})$ avec les éléments de $\mathbb{R}^n$.

Une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est notée $A = (a_{i\,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où $a_{i\,j}$ est le coefficient de A situé en ligne i et colonne j.

$\mathrm{Sp}(A)$ est le spectre de A, ensemble de ses valeurs propres.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique défini par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\;\; \langle x \mid y\rangle = x^\top y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

et $x \longmapsto \|x\| = \sqrt{\langle x \mid x\rangle}$ est la norme euclidienne associée.

La sphère unité de R^n est notée $\Omega_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$.

À toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on associe la fonction $q_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\;\; q_A(x) = \langle Ax \mid x\rangle\,.$$

Une norme sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$

Question 1
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

(1) Montrez que la fonction q_A est bornée et atteint ses bornes sur la sphère unité Ω_n. On note alors

$$m_A = \min_{x\in\Omega_n} q_A(x) \qquad \text{et} \qquad M_A = \max_{x\in\Omega_n} q_A(x)\,.$$

(2) Démontrez que toute valeur propre réelle de A se trouve dans l'intervalle $[m_A\,;\,M_A]$.

(3) Explicitez $\mathrm{Sp}(A)$, m_A et M_A pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Question 2

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $q_A(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega_n$.

(1) Montrez que $q_A(y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$.

(2) Si $(y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, exprimez $q_A(y+z)$ (qui est nul d'après la question 2a) en fonction de $\langle Ay \mid z \rangle$ et $\langle Az \mid y \rangle$.

(3) Montrez que la matrice A est anti-symétrique (c'est à dire que $A^\top = -A$).

Question 3

Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Montrez que

$$[\forall x \in \Omega_n, \ \ q_A(x) = 0] \iff A = 0_n.$$

Question 4

Montrez que l'application $N : \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}), \ \ N(A) = \sup_{x \in \Omega_n} |q_A(x)|$$

est une norme.

Question 5

On considère $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.

(1) Justifiez qu'il existe n nombres réels

$$\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$$

et une base orthonormée $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$\forall k \in [\![1 \ ; n]\!], \ \ u(e_k) = Ae_k = \lambda_k e_k.$$

(2) Précisez $q_A(e_k)$ pour tout $k \in [\![1 \ ; n]\!]$.

(3) Soit $x = \sum_{k=1}^{n} x'_k e_k \in \Omega_n$. Exprimez $q_A(x)$ en fonction des valeurs propres λ_k de A et des composantes x'_k de x.

(4) Redémontrez le résultat de la question 1 : la fonction q_A possède un minimum m_A et un maximum M_A sur la sphère unité Ω_n. Explicitez m_A et M_A en fonction des valeurs propres de A.

(5) Montrez que

$$N(A) = \sup_{x \in \Omega_n} |q_A(x)| = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|.$$

Établissez une inégalité entre $|\det A|$ et $(N(A))^n$.

(6) Exemple : si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$, calculez $\det A$ et $N(A)$.

Dans toute la suite du problème, pour tout entier $n \geqslant 2$, on désigne par H_n la matrice de Hilbert d'ordre n définie par

$$H_n = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \ldots\ldots\ldots & 1/n \\ 1/2 & 1/3 \ldots\ldots\ldots & 1/n+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1/n & 1/n+1 \ldots\ldots & 1/2n-1 \end{pmatrix}$$

ou encore $H_n = (a_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ avec $a_{i\,j} = \dfrac{1}{i+j-1}$.

Pour simplifier, on notera q_n la fonction $q_{H_n} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \ q_n(x) = q_{H_n}(x) = \langle H_n x \mid x \rangle$.

Sur les valeurs propres de H_n

Question 6
Soit $x = (x_j)_{1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathbb{R}^n$.

(1) Montrez que

$$q_n(x) = \langle H_n x \mid x \rangle = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{i+j-1} \right) x_i = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{x_i x_j}{i+j-1}.$$

(2) Développez $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i t^{i-1} \right) \left(\sum_{j=1}^{n} x_j t^{j-1} \right)$ où t est une variable réelle.

(3) Montrez que $q_n(x) = \displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{n} x_j t^{j-1} \right)^2 \mathrm{d}t.$

(4) Montrez que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \ q_n(x) \geqslant 0$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \ q_n(x) = 0 \iff x = 0.$$

Que peut-on en déduire concernant les valeurs propres de H_n ?

Question 7

(1) Soit $P(t) = \sum_{k=0}^{m} a_k t^k$ un polynôme à coefficients complexes.

Montrez que $\int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t = -i \int_0^{\pi} P\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right) \mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$.

On pourra expliciter $\int_{-1}^{1} t^k\,\mathrm{d}t$ *et* $-i \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{ik\theta}\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$.

(2) En gardant les notations introduites dans la question 6 et en notant $Q(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k t^{k-1}$, montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$0 \leqslant q_n(x) = \int_0^1 Q^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{n} x_k \mathrm{e}^{i(k-1)\theta} \right|^2 \mathrm{d}\theta.$$

Question 8

(1) Soit f une fonction continue sur $[0\,;\pi]$ à valeurs complexes telle que $\int_0^{\pi} |f(\theta)|\,\mathrm{d}\theta = \left| \int_0^{\pi} f(\theta)\,\mathrm{d}\theta \right|$.

Montrez que f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

(2) Soit $P(t) = \sum_{k=0}^{m} a_k t^k$ un polynôme à coefficients complexes.

Calculez, pour $k \in [\![0\,;n]\!]$, $\int_0^{2\pi} P\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right) \mathrm{e}^{-ik\theta}\,\mathrm{d}\theta$.

Déduisez-en que s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout θ, $P\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right) \mathrm{e}^{-i\alpha} \in \mathbb{R}_+$, alors P est constant.

(3) Montrez que les inégalités de la question 7b sont strictes pour $x \neq 0$.

Question 9

Montrez que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \ 0 \leqslant q_n(x) \leqslant \pi \|x\|^2,$$

les inégalités étant strictes pour $x \neq 0$.

Question 10

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note

$$\mu_n = \min \mathrm{Sp}(H_n) \qquad \text{et} \qquad \rho_n = \max \mathrm{Sp}(H_n).$$

(1) Explicitez μ_2 et ρ_2. Montrez que pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$0 < \mu_n < \rho_n < \pi.$$

(2) Montrez que $q_n(\Omega_n) = [\mu_n\ ;\ \rho_n]$.

(3) Calculez $\langle H_n\varepsilon_n \mid \varepsilon_n\rangle$ où ε_n désigne le dernier vecteur de la base canonique de $\mathscr{M}_{n\,1}(\mathbb{R})$: $\varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Déduisez-en la limite de μ_n lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

Sur le déterminant de H_n

H_n désigne toujours la matrice de Hilbert d'ordre n, pour $n \geqslant 2$.

Question 11 (Une fraction rationnelle)
On considère la fraction rationnelle

$$R_n(x) = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(x-k)}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x+k)}.$$

On admettra qu'il existe des réels $\lambda_{0\,n}, \ldots, \lambda_{n\,n}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \ldots, -n\},\ \ R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_{k\,n}}{x+k},$$

cette décomposition (en éléments simples) de R_n étant unique.

Exprimez le coefficient $\lambda_{n\,n}$ de $\dfrac{1}{x+n}$ à l'aide de $(2n)!$ et de $n!$.

Question 12 (Matrice A_n)
Pour $n \geqslant 2$, on considère la matrice A_n définie par $A_n = \left(a_{i\,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec

$$a_{i\,j} = \begin{cases} \dfrac{1}{i+j-1} & \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n-1 \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant n \\[2ex] R_{n-1}(j) & \text{pour } i = n \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant n \end{cases}$$

où les R_p ont été définis plus haut.

(1) Montrez que pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on a

$$R_{n-1}(i) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j-1\,n-1} h_{i\,j}$$

puis déduisez-en que $\det A_n = \dbinom{2(n-1)}{n-1} \det H_n$.

(2) Montrez que

$$\det A_n = \frac{\det H_{n-1}}{(2n-1)\dbinom{2\,(n-1)}{n-1}}.$$

Déduisez-en l'expression de $\det H_n$ en fonction de $\det H_{n-1}$.

(3) Montrez que pour tout $n \geqslant 2$,

$$\det H_n \neq 0,$$

puis que

$$\frac{1}{\det H_n} \in \mathbb{N}^*.$$

Question 13 (Calcul de $\det H_n$)
En notant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\Phi_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k!$, montrez que

$$\forall n \geqslant 2, \quad \det H_n = \frac{\Phi_{n-1}^4}{\Phi_{2n-1}}.$$

Chapitre 10

Fonctions vectorielles

$\star$ Exercice proche du cours
$\star\star$ Exercice de difficulté normale
$\star\star\star$ Exercice difficile (voire très difficile)
$+$ Exercice à faire en priorité

$\star\star$ Exercice 10.1

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$D_n = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dfrac{x^2}{2!} & x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \dfrac{x^3}{3!} & \dfrac{x^2}{2!} & x & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \dfrac{x^{n-2}}{(n-2)!} & \cdots & \dfrac{x^2}{2!} & x & 1 \\ \dfrac{x^n}{n!} & \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \dfrac{x^{n-2}}{(n-2)!} & \cdots & \dfrac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}.$$

(1) Justifiez que D_n est dérivable et calculez D_n'.

(2) Donnez une expression générale de $D_n(x)$.

$\star\star$ Exercice 10.2

Soient $a > 0$ et $f : [0\,;a] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $[0\,;a]$ et telle que $f(0) = f'(0) = f(a) = 0$.

Montrez qu'il existe $c \in \,]0\,;a[$ tel que la tangente au point d'abscisse c passe par l'origine du repère.

$\star\star$ Exercice 10.3

Soient $f, g : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a\,;b]$ et dérivables sur $]a\,;b[$.

Montrez qu'il existe $c \in \,]a\,;b[$ tel que

$$(f(b) - f(a))\, g'(c) = (g(b) - g(a))\, f'(c)\,.$$

⋆⋆ Exercice 10.4

Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(x) \xrightarrow[x \longrightarrow +\infty]{} 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) f'(x_0) \geqslant 0$.

(1) Montrez qu'il existe $x_1 > x_0$ tel que $f'(x_1) = 0$.

(2) Montrez qu'il existe $x_2 > x_1$ tel que $f''(x_2) = 0$.

⋆⋆ Exercice 10.5

Soient f une fonction n fois dérivable sur un intervalle I et $(x_0, \ldots, x_n) \in I^{n+1}$ tel que $x_0 < \cdots < x_n$ et $f(x_0) = \cdots = f(x_n) = 0$.

Montrez qu'il existe $c \in I$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Application : soit P une fonction polynôme de degré n ; montrez que l'équation $\mathrm{e}^x = P(x)$ a au plus $n + 1$ solutions.

⋆⋆ Exercice 10.6

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que f et f'' aient pour limite 0 en $+\infty$.

Montrez que f' a aussi pour limite 0 en $+\infty$.

⋆⋆ Exercice 10.7

(1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculez la dérivée n-ème de la fonction $x \longmapsto x^{n-1} \ln(1 + x)$ définie sur $]-1 ; +\infty[$.

(2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction n fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculez la dérivée n-ème de

$$x \longmapsto x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right).$$

(3) Déduisez-en les dérivées n-èmes de

$$x \longmapsto x^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \qquad \text{et} \qquad x \longmapsto x^{n-1} \mathrm{e}^{1/x}.$$

⋆⋆ Exercice 10.8

Soit $F : t \longmapsto \displaystyle\int_t^{t^2} \frac{1}{\ln u} \, \mathrm{d}u$.

(1) Déterminez l'ensemble de définition de F.

(2) Soit $\varphi : u \longmapsto \dfrac{1}{\ln u} - \dfrac{1}{u-1}$. Montrez que φ est prolongeable en une fonction continue sur $]0\,;+\infty[$.

Déduisez-en que $\lim\limits_{t\longrightarrow 1} \displaystyle\int_t^{t^2} \frac{1}{\ln u}\,\mathrm{d}u = \ln 2$.

(3) Montrez que pour tout $t \in]1\,;+\infty[$, $\dfrac{t^2-t}{2\ln t} \leqslant \displaystyle\int_t^{t^2} \frac{1}{\ln u}\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{t^2-t}{\ln t}$. Déduisez-en $\lim\limits_{t\longrightarrow+\infty} \displaystyle\int_t^{t^2} \frac{1}{\ln u}\,\mathrm{d}u$.

(4) Étudiez la fonction F (on la prolongera par continuité chaque fois que c'est possible) et donnez l'allure de sa courbe représentative.

(5) Soit $f : x \longmapsto \dfrac{x-1}{\ln x}$, prolongée par continuité en 0 et en 1. Montrez que pour tout $t \in]0\,;1[$, $\displaystyle\int_0^t f = F(t)$. Déduisez-en la valeur de $\displaystyle\int_0^1 f$.

★★ Exercice 10.9

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.

Montrez que pour toute application $f \in \mathscr{C}^1([a\,;b],\mathbb{R})$, on a

$$\max_{[a;b]} |f| \leqslant \int_a^b |f'| + \frac{1}{b-a}\int_a^b |f|.$$

Montrez que cette inégalité est également valable pour toute application $f \in \mathscr{C}^1([a\,;b],\mathbb{C})$.

★★ Exercice 10.10

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f \in \mathscr{C}^2([a\,;b],E)$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. On pose $M = \sup\limits_{[a;b]} \|f''\|$.

(1) Montrez que pour tout $x \in [a\,;b]$, $\|f(x)\| \leqslant \dfrac{M}{2}(x-a)(b-x)$.

(2) Montrez que $\left\|\displaystyle\int_a^b f\right\| \leqslant \dfrac{M(b-a)^3}{12}$.

(3) Déduisez-en une majoration de l'erreur commise lors du calcul approché de $\displaystyle\int_a^b f$ par la méthode des trapèzes.

★★ Exercice 10.11

Soit f continue sur $[a\,;b]$ avec $a < b$.

Montrez que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \left(\displaystyle\int_a^b \|f(t)\|^n\,\mathrm{d}t\right)^{1/n} = \sup\limits_{[a;b]} \|f\|$.

★★ Exercice 10.12
Soit $a > 1$.

Montrez que la fonction $f : x \longmapsto \ln\left(1 - 2a\cos x + a^2\right)$ est continue sur $[0 \,;\, \pi]$.

Sans chercher à utiliser une primitive, montrez $\displaystyle\int_0^{\pi} f = 2\pi \ln a$.

★★ Exercice 10.13
Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$.

Décomposez en éléments simples la fraction $\dfrac{nX^{n-1}}{X^n - 1}$ puis calculez $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{z - \mathrm{e}^{it}}\,\mathrm{d}t$.

★★ Exercice 10.14
On considère une application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et 2π-périodique telle que pour tout $t \in \mathbb{R},\ f(t) \neq 0$.

Montrez que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{f'}{f} \in 2\pi\mathbb{Z}$.

★★ Exercice 10.15
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{C}^{\infty}([a \,;\, b], E)$.

On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a \,;\, b],\ \left\|f^{(n)}(x)\right\| \leqslant |P(x)|$.

Montrez que $f = 0$.

★★ Exercice 10.16 (Égalité de la moyenne généralisée)
Soient $f, g \in \mathscr{C}^0([a \,;\, b], \mathbb{R})$ telles que g soit positive.

Montrez qu'il existe $c \in [a \,;\, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

★★ Exercice 10.17 (Égalité de Taylor-Lagrange)
Soit $f \in \mathscr{C}^{n+1}([a \,;\, b], E)$.

Montrez qu'il existe $c \in \,]a \,;\, b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

★★★ Exercice 10.18
Soit $f \in \mathscr{C}^2([a\,;b], \mathbb{R})$.

Montrez qu'il existe $c \in]a\,;b[$ tel que

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(c).$$

★★★ Exercice 10.19
Soit $f \in \mathscr{C}^2([a\,;b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$.

Montrez qu'il existe $c \in]a\,;b[$ tel que $f''(c) = f(c)$.

★★ Exercice 10.20
On considère l'application $u : t \longmapsto \mathrm{e}^{-t^2/2}$ et on pose pour $n \in \mathbb{N}$, $H_n(t) = \mathrm{e}^{t^2/2} u^{(n)}(t)$.

(1) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme de degré n.

(2) Montrez que si $f \in \mathscr{C}^0([a\,;+\infty[, \mathbb{R})$ est dérivable sur $[a\,;+\infty[$ et si $f(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} f(a)$, alors il existe $c \in]a\,;+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

(3) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

★★ Exercice 10.21
Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que f et f'' soient bornées. On note $M_0 = \sup_{\mathbb{R}} |f|$ et $M_2 = \sup_{\mathbb{R}} |f''|$.

(1) Montrez que pour tout $(x,h) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leqslant \frac{h^2}{2} M_2$ et $|f(x-h) - f(x) + hf'(x)| \leqslant \frac{h^2}{2} M_2$.

(2) Déduisez-en que pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $h > 0$, $|f'(x)| \leqslant \frac{M_0}{h} + \frac{h}{2} M_2$.

(3) Montrez que f' est aussi bornée sur $\mathbb{R}$ et que $M_1 = \sup_{\mathbb{R}} |f'| \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$.

★★★ Exercice 10.22
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$

- il existe $a > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\left|f^{(n)}(t)\right| \leqslant a^n n!$.

(1) Montrez que f est la fonction nulle sur $\left[\dfrac{-1}{a} ; \dfrac{1}{a}\right]$.

(2) Montrez que f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10.23 (Oral CCINP, 1)
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f'(x) \xrightarrow[x \longrightarrow +\infty]{} +\infty$.

Montrez que $f(x) \xrightarrow[x \longrightarrow +\infty]{} +\infty$.

Exercice 10.24 (Oral TPE, 2)
Cherchez les $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que $f(0) = 1$, $f'(0) > 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(f(x)) f'(x) = 1$.

Exercice 10.25 (Oral CCINP, 3)
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \longmapsto x^n \ln x$.

Montrez que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n^{(n)}\left(\dfrac{1}{n}\right) = \gamma$ où γ est la constante d'Euler-Mascheroni.

Exercice 10.26 (Oral CCMP, 4)
Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On pose $g : x \longmapsto x f(x)$ et $h : x \longmapsto f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Montrez que g est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ ssi h l'est aussi.

Exercice 10.27 (Oral CCMP, 5)
Soit $f : [0 ; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que pour tout $x \in [0 ; 1]$, $(f(x), f'(x)) \neq (0, 0)$.

Montrez que l'ensemble des zéros de f est fini.

Exercice 10.28 (Oral CCMP, 6)
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et E l'ensemble des fonctions continues sur $[a ; b]$ et strictement positives.

Pour $f \in E$, on pose $\varphi(f) = \displaystyle\int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f}$.

Déterminez $\varphi(E)$.

Exercice 10.29 (Oral CCMP, 7)
Soit $E = \left\{ f \in \mathscr{C}^0\left([0\ ;\ 1], \mathbb{R}_+\right) \,\middle|\, \forall (x, y) \in [0\ ;\ 1]^2,\ \ |f(x) - f(y)| \geqslant |x - y| \right\}$.

Déterminez $\displaystyle\inf_{f \in E} \int_0^1 f$.

Exercice 10.30 (Oral Centrale, 8)
Soient $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ majorée et $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\ f''(x) \geqslant \alpha f(x)$.

(1) Montrez que f' est croissante et $\displaystyle\lim_{+\infty} f' = 0$.

(2) Montrez que $\displaystyle\lim_{+\infty} f = 0$.

(3) Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\ f(x) \leqslant f(0)\,\mathrm{e}^{-x\sqrt{\alpha}}$.

Chapitre 11

Suites et séries de fonctions

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Chapitre 12

Séries entières

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Chapitre 13

Probabilités

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Chapitre 14

Variables aléatoires discrètes

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Chapitre 15

Équations différentielles linéaires

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Chapitre 16

Calcul différentiel

⋆⋆ À venir ⋆⋆