Maths – MPI

Romain Bricout

24 décembre 2023

Introduction

Ce document réunit l'ensemble de mes cours de Mathématiques de MPI, ainsi que les exercices les accompagnant. Le professeur était M. Walbron. J'ai adapté certaines formulations me paraissant floues ou ne me plaisant pas mais le contenu pur des cours est strictement équivalent.

Les éléments des tables des matières initiale et présentes au début de chaque chapitre sont cliquables (amenant directement à la partie cliquée). C'est également le cas des références à des éléments antérieurs de la forme, par exemple, « Démonstration 5.22 ».

Cette version contient, en plus des cours imprimés distribués durant l'année, toutes les notes et démonstrations qui vont avec. Voir l'autre version pour n'avoir que les cours bruts.

Table des matières

Première partie

Cours

Chapitre 1

Espaces vectoriels normés

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Chapitre 2

Séries numériques et vectorielles : révisions et compléments

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Chapitre 3

Familles sommables

$\star\star$ À venir $\star\star$

Chapitre 4

Rappels et compléments d'algèbre linéaire

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Chapitre 5

Réduction des endomorphismes

Sommaire

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$, en général $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

5.1 Éléments propres d'un endomorphisme

Dans cette section, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque, finie ou non.

5.1.1 Valeurs propres et vecteurs propres

Définition 5.1
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On dit que λ est une valeur propre de f quand il existe un vecteur v non-nul tel que $f(v) = \lambda v$.

Si λ est une valeur propre de f, alors tout vecteur non-nul v tel que $f(v) = \lambda v$ est appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Remarque 5.2
Si $f(v) = \lambda v$ et $v \neq 0$ alors pour tout $\alpha \neq 0$, $f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha(\lambda v) = \lambda(\alpha v)$. Donc αv est un vecteur propre de f pour la valeur propre λ.

Exemple 5.3
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \mathrm{id}_E$ a pour unique valeur propre α et tout vecteur non-nul de E est un vecteur propre associé.
- Si p est un projecteur non-trivial (*i.e.* $p \neq 0$ et $p \neq \mathrm{id}_E$), alors p a pour seules valeurs propres 0 et 1.
- De même, si s est une symétrie non-triviale (*i.e.* $s \neq \mathrm{id}_E$ et $s \neq -\mathrm{id}_E$), alors les valeurs propres de s sont 1 et -1.
- L'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ $P \longmapsto XP$ n'a pas de valeur propre.

L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme f est appelé le spectre de f et est noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f)$ ou plus simplement $\mathrm{Sp}(f)$ (en toute rigueur, cette définition est fausse en dimension infinie, mais à notre niveau, cette approximation est acceptable).

Définition 5.4
On appelle droite propre d'un endomorphisme toute droite dirigée par un vecteur propre.

Proposition 5.5
Les droites propres d'un endomorphisme sont exactement les droites stables par cet endomorphisme.

Exercice 5.6
Soit $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$ défini par : si $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on pose $f(u) = (u_{n+1})$. Quelles sont les valeurs propres de f et les vecteurs propres associés ?

Exercice 5.7
Même question avec d l'opérateur de dérivation dans $\mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 5.8
Même question avec D l'opérateur de dérivation dans $\mathbb{R}[X]$.

5.1.2 Lien avec les polynômes annulateurs

En dimension quelconque, il est souvent difficile de trouver les valeurs propres d'un endomorphisme. La connaissance d'un polynôme annulateur peut aider.

Lemme 5.9
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Si λ est une valeur propre de f et v un vecteur propre associé, alors $P(f)(v) = P(\lambda)v$.

Démonstration 5.10
On montre par récurrence la propriété $\mathscr{P}(k)$: « $f^k(v) = \lambda^k v$ ».

On a $f^0(v) = v = \lambda^0 v$.

Si $\mathscr{P}(k)$ est vraie, alors

$$\begin{aligned} f^{k+1}(v) &= f f^k(v) \\ &= f\left(\lambda^k v\right) \\ &= \lambda^k f(v) \\ &= \lambda^k \lambda v \\ &= \lambda^{k+1} v. \end{aligned}$$

D'où $\mathscr{P}(k+1)$.

Par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie.

On écrit $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$.

Alors $P(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i f^i$.

Donc

$$\begin{aligned} P(f)(v) &= \sum_{i=0}^{n} a_i f^i(v) \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i \left(\lambda^i v\right) \\ &= v \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i \\ &= P(\lambda) v. \end{aligned}$$

■

Si $P \in \mathbb{K}[X]$, on note $\mathrm{Z}_{\mathbb{K}}(P)$ l'ensemble des racines de P dans $\mathbb{K}$.

Proposition 5.11
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Si P est un polynôme annulateur de f, alors $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \mathrm{Z}_{\mathbb{K}}(P)$.

Démonstration 5.12
Il existe $v \neq 0$ tel que $f(v) = \lambda v$.

D'après le lemme précédent, $P(f)(v) = P(\lambda) v$.

Or $P(f) = 0$ donc $P(\lambda) v = 0$.

Or $v \neq 0$ donc $P(\lambda) = 0$.

Donc $\lambda \in \mathrm{Z}_{\mathbb{K}}(P)$. ■

Remarque 5.13
Attention ! La réciproque est fausse. Contre-exemple : le polynôme $P = X^2 - 1$ est annulateur de id_E et pourtant -1, qui est racine de P, n'est pas valeur propre de id_E.

Exercice 5.14
Soit $n \geqslant 2$. Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $f(M) = M + {}^t M + \mathrm{tr}(M) I_n$: f est clairement un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Déterminez un polynôme annulateur de f de degré 3 et déduisez-en les valeurs propres de f.

5.1.3 Sous-espaces propres

Proposition 5.15
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors λ est valeur propre de f ssi $\ker(f - \lambda \mathrm{id}_E) \neq \{0\}$, autrement dit ssi $f - \lambda \mathrm{id}_E$ n'est pas injectif.

Démonstration 5.16
On a

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathrm{Sp}(f) &\iff \exists v \in E,\ \ v \neq 0 \text{ et } f(v) = \lambda v \\
&\iff \exists v \in E,\ \ v \neq 0 \text{ et } f(v) - \lambda v = 0 \\
&\iff \exists v \in E,\ \ v \neq 0 \text{ et } \ (f - \lambda \mathrm{id}_E)(v) = 0 \\
&\iff \exists v \in E,\ \ v \neq 0 \text{ et } v \in \ker(f - \lambda \mathrm{id}_E) \\
&\iff \ker(f - \lambda \mathrm{id}_E) \neq \{0\} \\
&\iff f - \lambda \mathrm{id}_E \text{ non-injective.}
\end{aligned}$$

■

Définition 5.17
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, le noyau $\ker(f - \lambda \mathrm{id}_E)$ est appelé le sous-espace propre associé à la valeur propre λ. Il est souvent noté $\mathrm{sep}(f, \lambda)$.

Par conséquent, $\mathrm{sep}(f, \lambda)$ est l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ auquel on ajoute le vecteur nul.

Remarque 5.18
Un cas particulier important : 0 est valeur propre ssi f n'est pas injective.

Exercice 5.19
Soit u un endomorphisme ayant pour matrice $M = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -4 \\ 4 & -3 & 3 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ dans une certaine base $\mathscr{B}$.

Calculez $M^3 + 2M^2 - 3M$. Déduisez-en les valeurs propres de u puis déterminez les sous-espaces propres associés.

Proposition 5.20
Tout sous-espace propre d'un endomorphisme est stable par cet endomorphisme. L'endomorphisme induit sur un sous-espace propre est alors une homothétie.

Démonstration 5.21
Soit $v \in \operatorname{sep}(f, \lambda)$.

On a $f(v) = \lambda v$.

Donc $f(f(v)) = \lambda f(v)$.

Donc $f(v) \in \operatorname{sep}(f, \lambda)$.

Donc le sous-espace propre $\operatorname{sep}(f, \lambda)$ est stable par f.

De plus, l'endomorphisme induit par f sur ce sous-espace est

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{sep}(f,\lambda) & \longrightarrow & \operatorname{sep}(f,\lambda) \\ v & \longmapsto & f(v) = \lambda v \end{array}$$

i.e. l'homothétie de rapport λ. ■

Théorème 5.22
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des valeurs propres distinctes de f.

Alors les sous-espaces propres $(\operatorname{sep}(f, \lambda_i))_{1 \leqslant i \leqslant p}$ sont en somme directe.

Autrement dit, toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Démonstration 5.23

Soit $\left(v_1, \ldots, v_p\right) \in \prod_{i=1}^{p} \operatorname{sep}(f, \lambda_i)$ tel que $v_1 + \cdots + v_p = 0 \quad (1)$.

On veut montrer que $v_1 = \cdots = v_p = 0$.

On applique f à (1) : $f(v_1) + \cdots + f\left(v_p\right) = 0$ *i.e.* $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0$.

On réitère $p-2$ fois et on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} v_1 + \cdots + v_p = 0 \\ \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0 \\ \lambda_1^2 v_1 + \cdots + \lambda_p^2 v_p = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1^{p-1} v_1 + \cdots + \lambda_p^{p-1} v_p = 0 \end{cases}$$

La matrice de ce système linéaire est

$$\begin{pmatrix} 1 \ldots\ldots\ldots 1 \\ \lambda_1 \ldots\ldots\ldots \lambda_p \\ \lambda_1^2 \ldots\ldots\ldots \lambda_p^2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \lambda_1^{p-1} \ldots\ldots \lambda_p^{p-1} \end{pmatrix}$$

i.e. une matrice de Vandermonde inversible car les λ_i sont distincts donc le système a une unique solution $(v_1, \ldots, v_p) = (0, \ldots, 0)$. ■

Remarque 5.24
Quand on demande de déterminer les éléments propres d'un endomorphisme, on demande de déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres associés, *i.e.* les sous-espaces propres.

À partir de maintenant, il est toujours supposé que E est de dimension finie n

5.2 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

5.2.1 Caractérisation des valeurs propres en dimension finie

Proposition 5.25
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(f) \iff \mathrm{rg}(f - \lambda \mathrm{id}_E) < n.$$

Dans ce cas, $\dim \mathrm{sep}(f, \lambda) = n - \mathrm{rg}(f - \lambda \mathrm{id}_E)$.

Démonstration 5.26
D'après le théorème du rang, on a

$$n = \underbrace{\dim \ker (f - \lambda \mathrm{id}_E)}_{= \dim \mathrm{sep}(f, \lambda)} + \mathrm{rg}(f - \lambda \mathrm{id}_E).$$

Donc $\dim \mathrm{sep}(f, \lambda) = n - \mathrm{rg}(f - \lambda \mathrm{id}_E)$.

On obtient l'inégalité voulue grâce à la Proposition 5.15. ■

5.2.2 Définition et lien avec les valeurs propres

Définition 5.27
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

On appelle polynôme caractéristique de f le polynôme $\chi_f = \det(X\mathrm{id}_E - f)$.

La notation χ_f est très courante : elle est à connaître.

Théorème 5.28
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Alors χ_f est un polynôme unitaire de degré n de $\mathbb{K}[X]$ et les valeurs propres de f sont exactement les racines dans $\mathbb{K}$ de χ_f : $\mathrm{Z}_{\mathbb{K}}(\chi_f) = \mathrm{Sp}(f)$.

Par conséquent, un endomorphisme d'un espace de dimension n a au plus n valeurs propres distinctes.

Démonstration 5.29
On choisit une base $\mathscr{B}$ de E et on pose $A = (a_{i\,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de f dans $\mathscr{B}$.

On a

$$\begin{aligned}\chi_f &= \det(X\mathrm{id}_E - f)\\ &= \det(XI_n - A)\\ &= \begin{vmatrix} X - a_{1\,1} & -a_{1\,2} & \cdots & -a_{1\,n}\\ -a_{2\,1} & X - a_{2\,2} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & -a_{n-1\,n}\\ -a_{n\,1} & \cdots & -a_{n\,n-1} & X - a_{n\,n}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

On pose $c_{i\,j} = \begin{cases} -a_{i\,j} & \text{si } i \neq j\\ X - a_{i\,i} & \text{sinon}\end{cases}$

Alors

$$\begin{aligned}\chi_f &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} c_{i\,\sigma(i)}\\ &= \varepsilon(\mathrm{id}) \prod_{i=1}^{n} c_{i\,i} + \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n \setminus \{\mathrm{id}\}} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} c_{i\,\sigma(i)}\end{aligned}$$

On remarque que si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ alors σ a n points fixes si $\sigma = \mathrm{id}$ et σ a moins de $n-2$ points fixes sinon donc si $\sigma \neq \mathrm{id}$, il existe au moins deux entiers $i, j \in [\![1\,;n]\!]$ tels que $\sigma(i) \neq i$ et $\sigma(j) \neq j$.

Donc pour toute permutation $\sigma \neq \mathrm{id}$, parmi les facteurs du produit $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_{i\,\sigma(i)}$, il en existe au moins deux qui sont de la forme $a_{?\,?}$ donc $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} c_{i\,\sigma(i)}$ est un polynôme de degré au plus $n-2$.

Donc $\deg \chi_f = n$ et χ_f est unitaire.

De plus, on a

$$\begin{aligned}\lambda \in \mathrm{Sp}(f) &\iff f - \lambda\mathrm{id}_E \text{ n'est pas injectif}\\ &\iff f - \lambda\mathrm{id}_E \text{ n'est pas bijectif} \quad \textit{dimension finie}\\ &\iff \det(f - \lambda\mathrm{id}_E) = 0\\ &\iff \det(\lambda\mathrm{id}_E - f) = 0\\ &\iff \chi_f(\lambda) = 0.\end{aligned}$$

■

Exercice 5.30
Montrez que si $\dim E = 2$, alors pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$, $\chi_f = X^2 - \operatorname{tr}(f)\, X + \det f$.

Exercice 5.31
Calculez le polynôme caractéristique d'un endomorphisme de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ et donnez ses valeurs propres.

Exercice 5.32
Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $s = \sum_{i=1}^{n} e_i$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que pour tout $j \in [\![1 ; n]\!]$, $f(e_j) = e_j + s$.

Calculez son polynôme caractéristique et ses éléments propres.

On peut noter un lien avec la trace et le déterminant.

Proposition 5.33
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Alors $\chi_f = X^n - \operatorname{tr}(f)\, X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det f$.

Démonstration 5.34

- On a $\chi_f = \det(X\mathrm{id}_E - f)$ donc

$$\chi_f(0) = \det(-f) = (-1)^n \det f$$

  est le coefficient constant de χ_f.

- On avait $\chi_f = \prod_{i=1}^{n} (X - a_{i\,i}) + Q$ avec $\deg Q \leqslant n-2$ (*cf.* Démonstration 5.29).

  Donc le coefficient d'indice $n-1$ est celui du produit $\prod_{i=1}^{n} (X - a_{i\,i})$.

  Or on a

$$\begin{aligned}(X - a_{1\,1}) \dots (X - a_{n\,n}) &= X^n + (-a_{1\,1} - \dots - a_{n\,n})\, X^{n-1} + \dots \\ &= X^n - \operatorname{tr}(f)\, X^{n-1} + \dots. \end{aligned}$$

■

5.2.3 Ordre de multiplicité et dimension du sous-espace propre

Définition 5.35
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$.

On appelle ordre de multiplicité de la valeur propre λ son ordre de multiplicité en tant que racine de χ_f.

Proposition 5.36
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$, F un sous-espace vectoriel de E stable par f et g l'endomorphisme induit par f dans F.

Alors χ_g divise χ_f.

Démonstration 5.37
On choisit une base $\mathscr{B} = \left(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n\right)$ de E adaptée à F : $\left(e_1, \ldots, e_p\right)$ est une base de F.

Alors

$$\operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & ? \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.

On remarque que $A = \operatorname*{Mat}_{(e_1,\ldots,e_p)}(g)$.

Alors

$$\begin{aligned} \chi_f &= \begin{vmatrix} XI_p - A & -? \\ 0 & XI_{n-p} - B \end{vmatrix} \\ &= \underbrace{\det\left(XI_p - A\right)}_{=\chi_g} \det\left(XI_{n-p} - B\right). \end{aligned}$$

Donc $\chi_g \mid \chi_f$. ■

Une conséquence très importante de ce résultat est le théorème suivant.

Théorème 5.38
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$.

Si λ est une valeur propre d'ordre α, alors $1 \leqslant \dim \operatorname{sep}(f, \lambda) \leqslant \alpha$.

Démonstration 5.39
Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$ alors $\mathrm{sep}(f, \lambda)$ est stable par f et l'endomorphisme induit par f dans $\mathrm{sep}(f, \lambda)$ est l'homothétie de rapport λ : $g = \lambda \mathrm{id}$.

On note $p = \dim \mathrm{sep}(f, \lambda)$.

On a

$$\chi_g = \begin{vmatrix} X-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & X-\lambda \end{vmatrix}_{[p]} = (X-\lambda)^p.$$

D'après la Proposition 5.36, $(X-\lambda)^p \mid \chi_f$ donc $p \leqslant \alpha$.

De plus, on a $1 \leqslant p$ car $\mathrm{sep}(f, \lambda) \neq \{0\}$. ∎

Exercice 5.40
Soit f un endomorphisme de matrice $\begin{pmatrix} 3 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminez les valeurs propres de f, leur multiplicité et la dimension des sous-espaces propres associés.

5.2.4 Endomorphisme scindé

Définition 5.41
On dit qu'un endomorphisme de E est scindé quand son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.

Dans le cas d'un endomorphisme scindé, on connaît alors la somme et le produit des valeurs propres.

Proposition 5.42
Si $f \in \mathscr{L}(E)$ est scindé et a pour valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ avec les ordres de multiplicité $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, alors

$$\mathrm{tr}\, f = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \lambda_k \qquad \text{et} \qquad \det f = \prod_{k=1}^{p} \lambda_k^{\alpha_k}.$$

Démonstration 5.43
Relations coefficients/racines. ∎

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors on est dans ce cas, car tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont scindés dans $\mathbb{C}[X]$ d'après le théorème de d'Alembert-Gauss.

Mais si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors il faut se méfier des raisonnements hâtifs : comme un $\mathbb{R}$-endomorphisme peut ne pas avoir de valeurs propres réelles, la trace et le déterminant peuvent ne pas avoir de rapport avec les valeurs propres.

Exercice 5.44
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ dont la matrice dans une base est remplie par ligne de 1, ligne de 2, etc. Sans calculer le polynôme caractéristique, déterminez les valeurs propres complexes de f, leur multiplicité et la dimension des sous-espaces propres associés.

Remarque 5.45
Dans le langage courant, on dit souvent que la trace est la somme des valeurs propres. Cette phrase est correcte seulement si l'on sous-entend que l'on parle de la somme des valeurs propres comptées chacune avec son ordre de multiplicité.

On rencontre en fait deux types de résultats à propos des valeurs propres :

- ceux où l'on parle des valeurs propres distinctes (comme le Théorème 5.28) ;
- ceux où l'on parle des valeurs propres comptées selon leur multiplicité (comme la Proposition 5.42).

Il faut donc être très attentif à la façon dont on considère les valeurs propres.

5.3 Éléments propres d'une matrice carrée

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les matrices-colonnes d'ordre n sont les matrices de $\mathscr{M}_{n\,1}(\mathbb{K})$, espace souvent identifié avec $\mathbb{K}^n$.

5.3.1 Valeurs propres et vecteurs propres

Définition 5.46
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On dit que λ est valeur propre de A quand il existe une matrice-colonne X non-nulle telle que $AX = \lambda X$.

Si λ est une valeur propre de A, alors toute matrice-colonne non-nulle X telle que $AX = \lambda X$ est appelée vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Exemple 5.47
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, αI_n a pour unique valeur propre α et toute matrice-colonne non-nulle est un vecteur propre associé.
- Si A est une matrice diagonale, alors ses valeurs propres sont les coefficients diagonaux et des vecteurs propres associés sont les colonnes remplies de 0 sauf un seul coefficient égal à 1.

L'ensemble des valeurs propres d'une matrice A est appelé le spectre de A et est noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ ou plus simplement $\mathrm{Sp}(A)$.

Mais comme une matrice à coefficients réels est aussi une matrice à coefficients complexes, il vaut mieux savoir si on parle des valeurs propres réelles ou complexes. Il est donc préférable d'indiquer clairement le corps de base, comme le montre le résultat suivant.

Proposition 5.48
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}'$ une extension de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{C}$.

Alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \subseteq \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}'}(A)$.

Proposition 5.49
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ une base de E.

Si $A = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f)$, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \mathrm{Sp}(f)$.

Par conséquent, deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres (mais attention, pas forcément les mêmes vecteurs propres).

5.3.2 Lien avec les polynômes annulateurs

Proposition 5.50
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Si P est un polynôme annulateur de A, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \subseteq \mathrm{Z}_{\mathbb{K}}(P)$.

Attention ! La réciproque est fausse. Contre-exemple : le polynôme $P = X^2 - 1$ est annulateur de I_n et pourtant -1, qui est racine de P, n'est pas valeur propre de I_n.

5.3.3 Sous-espaces propres

Proposition 5.51
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors λ est valeur propre de A ssi $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible, autrement dit ssi $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) < n$ ou $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$, le sous-espace propre associé à la valeur propre λ est l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ auquel on ajoute le vecteur nul. Il est souvent noté $\mathrm{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda)$:

$$\mathrm{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda) = \{X \in \mathscr{M}_{n\,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \lambda X\}.$$

Proposition 5.52
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Alors*

$$\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \iff \mathrm{rg}(A - \lambda I_n) < n.$$

Dans ce cas, $\dim \mathrm{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda I_n)$.

Attention ! Dans la relation $\dim \mathrm{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda I_n)$, c'est n, pas n^2 ! Il s'agit de la dimension de $\mathscr{M}_{n\,1}(\mathbb{K})$, pas celle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque 5.53
Un cas particulier important : 0 est valeur propre ssi A n'est pas inversible, c'est-à-dire ssi $\mathrm{rg}\, A < n$.

Théorème 5.54
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ *des valeurs propres distinctes de* A.

Alors les sous-espaces propres $(\mathrm{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda_i))_{1 \leqslant i \leqslant p}$ *sont en somme directe.*

Autrement dit, toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Remarque 5.55
Quand on demande de déterminer les éléments propres d'une matrice, on demande de déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres associés, *i.e.* les sous-espaces propres.

5.4 Polynôme caractéristique d'une matrice carrée

5.4.1 Définition et lien avec les valeurs propres

Définition 5.56
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme $\chi_A = \det(XI_n - A)$.

Proposition 5.57
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $f \in \mathscr{L}(E)$ *et* $\mathscr{B}$ *une base de* E.

Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, *alors* $\chi_A = \chi_f$.

Par conséquent, deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Théorème 5.58
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Alors χ_A *est un polynôme unitaire de degré* n *de* $\mathbb{K}[X]$ *et les valeurs propres de* A *sont exactement les racines de* χ_A *dans* $\mathbb{K}$.

Par conséquent, une matrice carrée de taille (n, n) *a au plus* n *valeurs propres distinctes.*

Corollaire 5.59
L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *est dense dans* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration 5.60
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On veut montrer qu'il existe une suite de matrices inversibles qui converge vers A.

Considérons la suite $\left(A + \dfrac{1}{k} I_n\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$.

On a $\lim\limits_{k \longrightarrow +\infty} \left(A + \dfrac{1}{k} I_n\right) = A$.

Montrons qu'à partir d'un certain rang, cette suite est constituée de matrices inversibles.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A + \dfrac{1}{k} I_n$ n'est pas inversible $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{-1}{k}$ est valeur propre de A.

- Si A n'a que des valeurs propres positives ou nulles, alors comme pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{-1}{k} < 0$, $\dfrac{-1}{k}$ n'est pas valeur propre.
- Si A possède au moins une valeur propre strictement négative, on pose $r = \min \left\{ |\lambda| \;\middle|\; \lambda \in \mathrm{Sp}(A) \cap \mathbb{R}_-^* \right\} > 0$.
  Dès que $\dfrac{1}{k} < r$, il est certain que $\dfrac{-1}{k}$ n'est pas valeur propre. ∎

On peut noter un lien avec la trace et le déterminant.

Proposition 5.61
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Alors $\chi_A = X^n - \mathrm{tr}(A) X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A$.

5.4.2 Ordre de multiplicité et dimension du sous-espace propre

Définition 5.62
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$.

On appelle ordre de multiplicité de la valeur propre λ son ordre de multiplicité en tant que racine de χ_A.

Théorème 5.63
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$.

Si λ est une valeur propre d'ordre α, alors $1 \leqslant \dim \mathrm{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda) \leqslant \alpha$.

Proposition 5.64
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ une base de E.

Si $A = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f)$, alors $\dim \mathrm{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda) = \dim \mathrm{sep}(f, \lambda)$.

Par conséquent, deux matrices semblables ont des sous-espaces propres de même dimension (mais pas les mêmes vecteurs propres).

5.4.3 Matrice scindée

Définition 5.65
On dit qu'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est scindée quand son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.

Dans le cas d'une matrice scindée, on connaît alors la somme et le produit des valeurs propres.

Proposition 5.66
Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est scindée et a pour valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ avec les ordres de multiplicité $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, alors

$$\mathrm{tr}\, A = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \lambda_k \qquad \textit{et} \qquad \det A = \prod_{k=1}^{p} \lambda_k^{\alpha_k}.$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors on est dans ce cas, car tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont scindés dans $\mathbb{C}[X]$ d'après le théorème de d'Alembert-Gauss.

Mais si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors il faut se méfier des raisonnements hâtifs : comme un polynôme à coefficients réels peut ne pas avoir de racines réelles, la trace et le déterminant peuvent ne pas avoir de rapport avec les valeurs propres.

5.5 Endomorphismes diagonalisables, matrices diagonalisables

5.5.1 Définition

Définition 5.67
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On dit que f est diagonalisable quand il existe une base de E constituée de vecteurs propres de f.

On dit que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (ou $\mathbb{K}$-diagonalisable) quand il existe une base de $\mathscr{M}_{n\,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A.

D'après le lien entre les endomorphismes et les matrices carrées, un endomorphisme est diagonalisable ssi sa matrice dans n'importe quelle base est diagonalisable.

Exercice 5.68

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ est-elle $\mathbb{R}$-diagonalisable ? $\mathbb{C}$-diagonalisable ?

Exercice 5.69
Montrez que la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Exercice 5.70
Même exercice avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 5.71
La matrice $C = \begin{pmatrix} 11 & 7 & -3 \\ 11 & 7 & -3 \\ 66 & 42 & -18 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Proposition 5.72
Si un endomorphisme (une matrice) est diagonalisable, alors il (elle) est scindé(e).

Mais la réciproque est fausse.

5.5.2 Caractérisations équivalentes

On note $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 5.73
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

f est diagonalisable ssi il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$. Dans ce cas, les valeurs propres de f sont les éléments diagonaux de cette matrice.

A est $\mathbb{K}$-diagonalisable ssi elle est $\mathbb{K}$-semblable à une matrice diagonale, i.e. il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = PDP^{-1}$. Dans ce cas, les valeurs propres de A sont les éléments diagonaux de D.

Démonstration 5.74
Si f est diagonalisable, il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E constituée de vecteurs propres, *i.e.*

$$\text{pour tout } j \in [\![1\,;n]\!]\,,\quad f\left(e_j\right) = \lambda_j e_j$$

où λ_j est la valeur propre associée à e_j.

Donc

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})\,.$$

Et réciproquement. ■

Exemple 5.75
- ▹ Toute matrice diagonale est diagonalisable, car elle est semblable à elle-même.
- ▹ Les projecteurs et les symétries sont diagonalisables.

Remarque 5.76
Quitte à changer l'ordre des vecteurs dans la base, on peut ranger les valeurs propres sur la diagonale dans l'ordre qu'on veut.

Exemple 5.77

Si $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = P^{-1}AP$, alors la colonne 1 de P est un vecteur propre de A pour la valeur propre 1 et les deux autres sont des vecteurs propres pour la valeur propre 3, donc en posant $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, on a $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Lemme 5.78
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable : il existe une base de E dans laquelle la matrice D de f est diagonale.

Les valeurs propres de f sont les éléments diagonaux de D et si λ est un tel nombre, alors la dimension de $\operatorname{sep}(f, \lambda)$ est le nombre d'occurrences de λ dans la diagonale de D.

On en déduit les théorèmes suivants.

Théorème 5.79
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- ▹ *f est diagonalisable*
- ▹ *les sous-espaces propres de f sont supplémentaires dans E*
- ▹ $\displaystyle\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} \dim \operatorname{sep}(f, \lambda) = n$

Démonstration 5.80
Les sous-espaces propres d'un endomorphisme sont en somme directe donc ils sont supplémentaires ssi la somme de leurs dimensions est celle de l'espace E. ■

Et sa version matricielle.

Théorème 5.81
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- ▹ *A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*
- ▹ *les sous-espaces propres de A dans $\mathscr{M}_{n\,1}(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_{n\,1}(\mathbb{K})$*
- ▹ $\displaystyle\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} \dim \operatorname{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda) = n$

Exercice 5.82

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. On a vu à l'Exercice 5.70 que A est diagonalisable. Diagonalisez A.

5.5.3 Lien avec le polynôme caractéristique

Théorème 5.83
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- ▹ *f est diagonalisable*
- ▹ *f est scindé et pour tout $\lambda \in \operatorname{Sp}(f)$, la dimension de $\operatorname{sep}(f, \lambda)$ est égale à l'ordre de multiplicité de λ*

Démonstration 5.84
Si $\lambda \in \operatorname{Sp}(f)$, on note $\omega(\lambda)$ l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ.

$\boxed{\Longrightarrow}$

Si f est diagonalisable alors $\displaystyle\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} \dim \operatorname{sep}(f, \lambda) = n = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} \omega(\lambda)$.

Donc $\displaystyle\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} \underbrace{(\omega(\lambda) - \dim \operatorname{sep}(f, \lambda))}_{\geqslant 0 \text{ d'après le Théorème 5.38}} = 0$.

Or une somme de réels positifs est nulle ssi tous ces réels sont nuls donc

$$\forall \lambda \in \operatorname{Sp}(f), \quad \omega(\lambda) = \dim \operatorname{sep}(f, \lambda).$$

$\boxed{\Longleftarrow}$

Si f est scindé et $\forall \lambda \in \operatorname{Sp}(f), \ \omega(\lambda) = \dim \operatorname{sep}(f, \lambda)$, alors χ_f est scindé.

Donc $\displaystyle\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} \omega(\lambda) = \deg \chi_f = n$.

Donc $\displaystyle\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} \dim \operatorname{sep}(f, \lambda) = n$.

Donc f est diagonalisable d'après le Théorème 5.79. ∎

Et sa version matricielle.

Théorème 5.85
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- ▹ *A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*

▹ *A est scindée et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$, la dimension de $\mathrm{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda)$ est égale à l'ordre de multiplicité de λ*

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la condition « être scindé » est automatiquement satisfaite.

Un cas particulier très courant.

Proposition 5.86
Si un endomorphisme de E possède exactement n valeurs propres distinctes, alors il est diagonalisable.

Si une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ possède exactement n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$, alors elle est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 5.87
Montrez que la matrice $\begin{pmatrix} -4 & 8 & 22 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Théorème 5.88 (Théorème spectral)
Si A est une matrice réelle symétrique, alors A est diagonalisable.

Démonstration 5.89
⋆⋆ Admis, sera démontré plus tard ⋆⋆ ■

5.6 Lien entre diagonalisabilité et polynômes annulateurs

5.6.1 Racines du polynôme minimal

Proposition 5.90
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Les racines de μ_f sont exactement les valeurs propres de f : $\mathrm{Z}_{\mathbb{K}}(\mu_f) = \mathrm{Sp}(f)$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les racines dans $\mathbb{K}$ de μ_A sont exactement les valeurs propres dans $\mathbb{K}$ de A : $\mathrm{Z}_{\mathbb{K}}(\mu_A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$.

Démonstration 5.91
$\boxed{\supseteq}$ *Cf.* Proposition 5.11 car μ_f est un polynôme annulateur de f.

$\boxed{\subseteq}$

Soit $\lambda \in \mathrm{Z}_{\mathbb{K}}\left(\mu_f\right)$.

Alors $X - \lambda \mid \mu_f$, *i.e.* il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\mu_f = (X - \lambda) Q$.

Alors $\mu_f(f) = 0 = (f - \lambda \mathrm{id}_E) \circ Q(f)$.

Donc pour tout $x \in E$, $\;(f - \lambda \mathrm{id}_E)(Q(f)(x)) = 0$.

Donc $\operatorname{Im} Q(f) \subseteq \ker(f - \lambda \mathrm{id}_E)$.

Or $\deg Q < \deg \mu_f$ donc Q n'est pas annulateur de f, *i.e.* $Q(f) \neq 0$, *i.e.* $\operatorname{Im} Q(f) \neq \{0\}$.

Donc $\ker(f - \lambda \mathrm{id}_E) \neq \{0\}$, *i.e.* $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$.

Donc $\mathrm{Z}_{\mathbb{K}}\left(\mu_f\right) \subseteq \mathrm{Sp}(f)$. ■

5.6.2 Lemme des noyaux

Proposition 5.92
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ *et* $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ *tels que* $P \wedge Q = 1$.

Alors $\ker(PQ)(f) = \ker P(f) \oplus \ker Q(f)$.

Démonstration 5.93
D'après le théorème de Bézout, il existe $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $UP + VQ = 1$.

Donc $(UP)(f) + (VQ)(f) = \mathrm{id}_E$, *i.e.*

$$U(f) \circ P(f) + V(f) \circ Q(f) = \mathrm{id}_E \qquad (1)$$

Soit $x \in \ker P(f) \cap \ker Q(f)$.

On a $P(f)(x) = 0$ et $Q(f)(x) = 0$.

Donc, en appliquant (1) sur le vecteur x, on obtient

$$\begin{aligned} x &= U(f)(P(f)(x)) + V(f)(Q(f)(x)) \\ &= U(f)(0) + V(f)(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $\ker P(f)$ et $\ker Q(f)$ sont en somme directe.

$\boxed{\supseteq}$

On a $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f)$.

Donc $\ker P(f) \subseteq \ker (PQ)(f)$ et $\ker Q(f) \subseteq \ker (PQ)(f)$.

Donc $\ker P(f) \oplus \ker Q(f) \subseteq \ker (PQ)(f)$.

$\boxed{\subseteq}$

Soit $x \in \ker (PQ)(f)$.

On veut montrer qu'il existe $(a, b) \in \ker P(f) \times \ker Q(f)$ tel que $x = a + b$.

On applique (1) sur x :

$$x = U(f) \circ P(f)(x) + V(f) \circ Q(f)(x).$$

On pose $a = V(f) \circ Q(f)(x)$.

On a

$$P(f)(a) = P(f)(V(f) \circ Q(f)(x)) = (P(f) \circ V(f) \circ Q(f))(x).$$

Or $\mathbb{K}[f]$ est une algèbre commutative donc

$$\begin{aligned} P(f)(a) &= (V(f) \circ P(f) \circ Q(f))(x) \\ &= V(f)(P(f) \circ Q(f)(x)) \\ &= V(f)((PQ)(f)(x)) \\ &= V(f)(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $a \in \ker P(f)$.

De même, $b = U(f) \circ P(f)(x) \in \ker Q(f)$.

Finalement, on a

$$\ker (PQ)(f) = \ker P(f) \oplus \ker Q(f).$$

■

Proposition 5.94
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ *et* $P_1, \ldots, P_k \in \mathbb{K}[X]$ *premiers entre eux deux à deux. On pose* $P = \prod_{i=1}^{k} P_i$.

Alors $\ker P(f) = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker P_i(f)$.

Démonstration 5.95
On note $\mathscr{P}(k)$ le prédicat énoncé.

- On a clairement $\mathscr{P}(1)$ et $\mathscr{P}(2)$ est vraie (*cf.* Proposition 5.92).

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(k)$ soit vraie.

  Soient $P_1, \dots, P_{k+1} \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux deux à deux.

  On a $P_1 \dots P_k \wedge P_{k+1} = 1$.

  D'après $\mathscr{P}(2)$, on a

  $$\ker(P_1 \dots P_{k+1})(f) = \ker(P_1 \dots P_k)(f) \oplus \ker P_{k+1}(f).$$

  Puis, par hypothèse de récurrence, on a

  $$\ker(P_1 \dots P_k)(f) = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker P_i(f).$$

  Finalement, on a

  $$\ker(P_1 \dots P_{k+1})(f) = \bigoplus_{i=1}^{k+1} P_i(f)$$

  d'où $\mathscr{P}(k+1)$.

- D'après le principe de récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie. ∎

5.6.3 Application à la diagonalisabilité

Définition 5.96
Un polynôme est dit simplement scindé quand il est scindé et à racines simples.

Théorème 5.97
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

(α) *f est diagonalisable*

(β) *μ_f est simplement scindé*

(γ) il existe un polynôme annulateur de f simplement scindé

(δ) le polynôme $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} (X - \lambda)$ *est un polynôme annulateur de f*

Démonstration 5.98 ((β) $\implies$ (γ))
Immédiat car μ_f est annulateur de f. ∎

Démonstration 5.99 ((γ) $\implies$ (β))
Si P est simplement scindé et $P(f) = 0$ alors $\mu_f \mid P$ donc μ_f est simplement scindé. ∎

Démonstration 5.100 ((β) $\implies$ (δ))
On sait que $\mathrm{Z}_{\mathbb{K}}(\mu_f) = \mathrm{Sp}(f)$ donc si μ_f est simplement scindé, alors $\mu_f = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} (X - \lambda)$. Or μ_f est annulateur de f. ∎

Démonstration 5.101 ((δ) $\implies$ (γ))
Immédiat. ∎

Démonstration 5.102 ((α) $\implies$ (δ))
Supposons f diagonalisable, *i.e.* il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f)$ soit diagonale :

$$\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f) = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \Lambda_k \end{pmatrix} = D$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont les valeurs propres distinctes de f et pour tout $i \in [\![1\,;\,k]\!]$, $\Lambda_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$.

On pose $P = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)$.

Or on a pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, $Q(D) = \begin{pmatrix} Q(\Lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & Q(\Lambda_k) \end{pmatrix}$

et pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, pour tout $i \in [\![1\,;\,k]\!]$, $Q(\Lambda_i) = \begin{pmatrix} Q(\lambda_i) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & Q(\lambda_i) \end{pmatrix}$.

En particulier, $P(D) = 0$ car $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\} = Z_{\mathbb{K}}(P)$. ■

Démonstration 5.103 ((δ) ⟹ (α))
On pose $\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ et pour tout $i \in [\![1\,;\,k]\!]$, $P_i = X - \lambda_i$.

Les polynômes $P_1, \ldots, P_k$ sont premiers entre eux deux à deux donc d'après le lemme des noyaux, on a

$$\ker \underbrace{(P_1 \ldots P_k)(f)}_{=0} = \bigoplus_{i=1}^{k} \underbrace{\ker P_i(f)}_{=\mathrm{sep}(f,\lambda_i)}.$$

D'où $E = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{sep}(f, \lambda_i)$.

Donc d'après le Théorème 5.79, f est diagonalisable. ■

Et sa version matricielle.

Théorème 5.104
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- ▹ *A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*
- ▹ *μ_A est simplement scindé*
- ▹ *il existe un polynôme annulateur de A simplement scindé dans $\mathbb{K}[X]$*
- ▹ *le polynôme $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} (X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de A*

Exercice 5.105

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Calculez $(A + I_3)^3$. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 5.106
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^3 = I_n$. Selon que $\mathbb{K}$ soit égal à $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$, à quelle condition A est-elle $\mathbb{K}$-diagonalisable ?

5.6.4 Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit

Proposition 5.107
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$, F un sous-espace vectoriel de E stable par f et g l'endomorphisme induit par f dans F.

Alors μ_g divise μ_f.

Démonstration 5.108
On a $g : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$

Pour tout $x \in F$, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(g)(x) = P(f)(x)$.

Or $\mu_f(f) = 0$ donc pour tout $x \in F$, $\mu_f(g)(x) = 0$, *i.e.* μ_f est annulateur de g.

Donc $\mu_g \mid \mu_f$. ∎

Corollaire 5.109
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par f.

Si f est diagonalisable, alors l'endomorphisme induit par f dans F est aussi diagonalisable.

Démonstration 5.110
Si f est diagonalisable, d'après le Théorème 5.97, μ_f est simplement scindé.

Or $\mu_g \mid \mu_f$ donc μ_g est simplement scindé.

Donc g est diagonalisable d'après le Théorème 5.97. ∎

Remarque 5.111
On a également :

- $\mathrm{Sp}(g) = \mathrm{Z}_{\mathbb{K}}(\mu_g) \subseteq \mathrm{Z}_{\mathbb{K}}(\mu_f) = \mathrm{Sp}(f)$
- si x est un vecteur propre de g pour la valeur propre λ, *i.e.* $\begin{cases} x \in F \\ x \neq 0 \\ g(x) = f(x) = \lambda x \end{cases}$ alors x est un vecteur propre de f dans F, et réciproquement.

  On a donc $\mathrm{sep}(g, \lambda) = \mathrm{sep}(f, \lambda) \cap F$.

Exercice 5.112
Soit f un endomorphisme de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Déterminez les sous-espaces vectoriels de E stables par f.

Exercice 5.113 (Codiagonalisation ou diagonalisation simultanée)
Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisables et qui commutent.

Montez qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ sont diagonales.

5.7 Quelques applications de la diagonalisation

5.7.1 Puissances d'une matrice, suites récurrentes linéairement

Un petit lemme déjà rencontré.

Lemme 5.114
Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PBP^{-1}$.

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PB^kP^{-1}$.

Le lemme précédent est particulièrement utile si A est diagonalisable et si on choisit $B = D$, matrice diagonale semblable à A, car calculer les puissances d'une matrice diagonale est très facile.

Grâce à la diagonalisation de A, on peut espérer exprimer la forme générale des suites récurrentes linéaires (voir le chapitre précédent, section sur les polynômes annulateurs).

Exercice 5.115
Soient u, v, w les trois suites réelles telles que $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = -4u_n + 4v_n - 6w_n \\ w_{n+1} = -3u_n + 3v_n - 4w_n \end{cases}$$

Déterminez des expressions de u_n, v_n, w_n en fonction de n.

Cette technique s'applique en particulier aux suites u vérifiant une relation de récurrence linéaire de la forme : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+d} = a_{d-1}u_{n+d-1} + \cdots + a_2u_{n+2} + a_1u_{n+1} + a_0u_n$.

On pose alors $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n+d-1} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{d-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_d(\mathbb{K})$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$ et on est ramené au cas précédent.

La matrice A s'appelle la matrice-compagnon du polynôme $P = X^d - a_{d-1}X^{d-1} - \cdots - a_1X - a_0$: elle a la propriété remarquable que son polynôme caractéristique est P, son polynôme minimal est aussi P et donc que ses valeurs propres sont les racines de P. C'est pourquoi le polynôme P est appelé polynôme caractéristique associé à la suite u (cas déjà étudié en première année : $d = 2$).

On en déduit que A est diagonalisable ssi P est simplement scindé et dans ce cas, A possède d valeurs propres distinctes. Dans ce cas, en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes, la suite u est combinaison linéaire des suites géométriques $\left(\lambda_1^n\right), \dots, \left(\lambda_d^n\right)$.

Exercice 5.116
Explicitez l'unique suite (u_n) vérifiant

$$u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 5 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n.$$

5.7.2 Systèmes d'équations différentielles

Ce point sera traité dans le chapitre sur les équations différentielles linéaires.

5.8 Endomorphismes trigonalisables, matrices trigonalisables

5.8.1 Définition et propriétés

Définition 5.117
Un endomorphisme est dit trigonalisable quand il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.

Une matrice carrée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ quand elle est semblable à une matrice triangulaire dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque 5.118

- Si un endomorphisme (une matrice) est diagonalisable, alors il (elle) est trigonalisable.

- Si une matrice est trigonalisable, ses valeurs propres sont les nombres sur la diagonale de toute matrice triangulaire semblable.

Exercice 5.119
On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 7 \\ 5 & 4 & -8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et f un endomorphisme de matrice M. Déterminez les éléments propres de M. Est-elle diagonalisable ? En complétant une famille libre de vecteurs propres, déterminez une base $\mathscr{B}$ de l'espace où la matrice de f est triangulaire supérieure, puis trigonalisez M.

Exercice 5.120
Soit f un endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -5 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Montrez que f n'est pas diagonalisable mais est trigonalisable et donnez une base de trigonalisation de f. Donnez une forme générale pour A^n.

Quand un endomorphisme ou une matrice n'est pas diagonalisable, on peut espérer qu'il ou elle est trigonalisable : faute de grives, on se contente de merles !

Remarque 5.121
On ne confondra pas la trigonalisation d'une matrice carrée et la transformation par lignes (ou colonnes) des matrices vue en première année ! Seule la trigonalisation fournit des matrices semblables ! La transformation par lignes ne conserve que le rang !

5.8.2 Caractérisation équivalente

La trigonalisabilité est beaucoup plus courante que la diagonalisabilité, comme on le voit grâce aux résultats suivants.

Proposition 5.122
Un endomorphisme (une matrice) est trigonalisable ssi il (elle) est scindé(e).

Démonstration 5.123
On pose $\mathscr{P}(n)$: « si f est un endomorphisme d'un espace de dimension n et si χ_f est scindé, alors f est trigonalisable ».

- $\mathscr{P}(1)$ est vraie car tout endomorphisme en dimension 1 est trigonalisable.

- Supposons $\mathscr{P}(n-1)$.

  Soient E un espace de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que χ_f soit scindé.

  Comme χ_f est scindé, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que λ soit racine de χ_f et donc une valeur propre de f à laquelle on associe un vecteur propre u_1.

  Comme $u_1 \neq 0$, d'après le théorème de la base incomplète, il existe $(u_2, \ldots, u_n) \in E^{n-1}$ tel que $\mathscr{B}_0 = (u_1, \ldots, u_n)$ soit une base de E.

On a

$$\underset{\mathscr{B}_0}{\mathrm{Mat}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & L \\ \hline 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right).$$

Donc

$$\chi_f = \left|\begin{array}{c|c} X-\lambda & -L \\ \hline 0 & \\ \vdots & XI_{n-1} - B \\ 0 & \end{array}\right| = (X-\lambda)\,\chi_B.$$

On pose $F = \mathrm{Vect}\,(u_2, \ldots, u_n)$.

Soit $g \in \mathscr{L}(F)$ tel que $\underset{(u_2,\ldots,u_n)}{\mathrm{Mat}}(g) = B$.

On a $\chi_g = \chi_B$ scindé donc par hypothèse de récurrence, g est trigonalisable : il existe une base $\left(u_2', \ldots, u_n'\right)$ de F telle que

$$\underset{\left(u_2',\ldots,u_n'\right)}{\mathrm{Mat}}(g) = \begin{pmatrix} t_{2\,2} & t_{2\,3} & \cdots & t_{2\,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{n-1\,n} \\ 0 & \cdots & 0 & t_{n\,n} \end{pmatrix} = T.$$

La famille $\mathscr{B} = \left(u_1, u_2', \ldots, u_n'\right)$ est une base de E.

On veut montrer que

$$\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha_2 & \cdots & \cdots & \alpha_n \\ 0 & t_{2\,2} & t_{2\,3} & \cdots & t_{2\,n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & t_{n-1\,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & t_{n\,n} \end{pmatrix}.$$

On a $g = p \circ f\big|_F$ où p est le projecteur sur F parallèlement à $\mathrm{Vect}\,(u_1)$.

Donc pour tout $x \in F$, $f(x) = \underbrace{g(x)}_{\in F} + \alpha u_1$ où $\alpha \in \mathbb{K}$.

De plus,

$$\begin{aligned} \text{pour tout } j \in [\![2\,;\,n]\!],\ f\left(u_j'\right) &= g\left(u_j'\right) + \alpha_j u_1 \\ &= \sum_{i=2}^{j} t_{i\,j} u_i' + \alpha_j u_1. \end{aligned}$$

D'où $\mathscr{P}(n)$.

- Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie. ■

En particulier, quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tous les endomorphismes sont trigonalisables, toutes les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ sont trigonalisables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

En pratique, quand on cherche à trigonaliser un endomorphisme, on peut chercher une base dans laquelle la matrice est triangulaire supérieure avec des 1 ou des 0 sur la sur-diagonale et des 0 sur les diagonales partielles encore au-dessus (c'est démontrable, mais c'est difficile à démontrer, cela s'appelle le théorème de Jordan – hors-programme –).

Théorème 5.124
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- ▹ *f est trigonalisable*
- ▹ *χ_f est scindé*
- ▹ *μ_f est scindé*
- ▹ *il existe un polynôme annulateur de f scindé*

Et sa version matricielle.

Théorème 5.125
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- ▹ *A est trigonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*
- ▹ *χ_A est scindé*
- ▹ *μ_A est scindé*
- ▹ *il existe un polynôme annulateur de A qui est scindé dans $\mathbb{K}[X]$*

Exercice 5.126

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculez A^2, puis A^3. La matrice A est-elle diagonalisable ? trigonalisable ? Dans l'affirmative, diagonalisez ou trigonalisez la.

5.8.3 Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème 5.127
Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme (d'une matrice carrée) est un polynôme annulateur.

Démonstration 5.128
On pose $\mathscr{P}(n)$: « si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, alors $\chi_A(A) = 0$ ».

- Si $n = 1$: on pose $A = (a)$.

  On a $\chi_A = X - a$ donc $\chi_A(A) = A - aI_1 = (a) - (a) = 0$.

  D'où $\mathscr{P}(1)$.

- Supposons $\mathscr{P}(n-1)$.

  Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

  Le polynôme χ_A est scindé donc A est trigonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, *i.e.* il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{C})$ telles que $A = PTP^{-1}$, avec $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & ? & \cdots & ? \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & ? \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

  On a $\chi_A = \chi_T = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$.

  On peut écrire
  $$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & ? & \cdots & \cdots & ? \\ 0 & \lambda_2 & ? & \cdots & ? \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & ? \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & ? \cdots ? \\ 0 & \\ \vdots & U \\ 0 & \end{pmatrix}$$
  où $U \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{C})$.

  On a $\chi_U = \prod_{i=2}^{n} (X - \lambda_i)$ donc $\chi_A = \chi_T = (X - \lambda_1)\,\chi_U$.

  Donc
  $$\begin{aligned} \chi_A(A) &= (A - \lambda_1 I_n)\,\chi_U(A) \\ &= \left(PTP^{-1} - \lambda_1 I_n\right)\chi_U\left(PTP^{-1}\right) \\ &= P\,(T - \lambda_1 I_n)\,\chi_U(T)\,P^{-1}. \end{aligned}$$
  $\left(PTP^{-1}\right)^k = PT^kP^{-1}$

Or on a

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & ? & \cdots & \cdots & ? \\ 0 & \lambda_2-\lambda_1 & ? & \cdots & ? \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & ? \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{T-\lambda_1 I_n} \underbrace{\begin{pmatrix} \chi_U(\lambda_1) & ? \cdots ? \\ 0 & \\ \vdots & \chi_U(U) \\ 0 & \end{pmatrix}}_{\chi_U(T)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

car $\chi_U(U) = 0$.

Donc $\chi_A(A) = 0$, d'où $\mathscr{P}(n)$.

- Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie. ■

Corollaire 5.129
Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique. Donc en dimension n, le polynôme minimal est de degré au plus n.

Les polynômes minimal et caractéristique partagent les mêmes racines dans $\mathbb{C}$ (en fait dans tout corps $\mathbb{K}$) mais pas avec les mêmes ordres de multiplicité : si f est scindé, alors en notant $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les k valeurs propres distinctes de f, on peut écrire

$$\chi_f = \prod_{i=1}^{k} (X-\lambda_i)^{\alpha_i} \qquad \text{et} \qquad \mu_f = \prod_{i=1}^{k} (X-\lambda_i)^{\beta_i}$$

où pour tout $i \in [\![1\,;k]\!]$, $1 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$.

5.8.4 Sous-espaces caractéristiques

Définition 5.130
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme scindé. On écrit $\chi_f = \prod_{i=1}^{k} (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont les k valeurs propres distinctes de f.

Les sous-espaces caractéristiques de f sont les noyaux $\ker(f-\lambda_i \mathrm{id}_E)^{\alpha_i}$.

Proposition 5.131
Les sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme scindé sont supplémentaires et stables par f.

Démonstration 5.132

- Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$ et α l'ordre de multiplicité de λ.

  Soit $x \in \ker(f - \lambda \mathrm{id}_E)^\alpha$.

  On a

$$\begin{aligned}(f - \lambda \mathrm{id}_E)^\alpha (f(x)) &= ((f - \lambda \mathrm{id}_E)^\alpha \circ f)(x) \\ &= (f \circ (f - \lambda \mathrm{id}_E)^\alpha)(x) \\ &= f(0) \\ &= 0.\end{aligned}$$

composée de deux polynômes en f donc commutative

  Donc $f(x) \in \ker(f - \lambda \mathrm{id}_E)^\alpha$.

  Donc $\ker(f - \lambda \mathrm{id}_E)^\alpha$ est stable par f.

- On a $\chi_f = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$: produit de polynômes premiers entre eux deux à deux.

  D'après le lemme des noyaux, on a

$$\ker \chi_f(f) = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker(f - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{\alpha_i}.$$

  Or $\chi_f(f) = 0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton donc

$$E = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker(f - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{\alpha_i}.$$

■

Théorème 5.133
Tout endomorphisme scindé possède une base dans laquelle sa matrice est diagonale par blocs telle que :

- *il y a autant de blocs que de valeurs propres : à chaque valeur propre, on associe un unique bloc ;*
- *chaque bloc est de la forme $\lambda I_r + U$ où λ est la valeur propre associée au bloc, r est l'ordre de multiplicité de λ et U est une matrice strictement triangulaire supérieure de $\mathscr{M}_r(\mathbb{K})$*

Toute matrice scindée est semblable à une matrice diagonale par blocs vérifiant les conditions précédentes.

Démonstration 5.134
Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$ et α son ordre de multiplicité.

Sur $F = \ker(f - \lambda \mathrm{id}_E)^\alpha$, f induit un endomorphisme $\tilde{f}$ tel que $\left(\tilde{f} - \lambda \mathrm{id}_F\right)^\alpha = 0$.

Donc $(X - \lambda)^\alpha$ est un polynôme annulateur de $\tilde{f}$ qui est scindé donc $\tilde{f}$ a pour unique valeur propre λ et est trigonalisable.

Donc il existe une base $\mathscr{B}_\lambda$ de F telle que

$$\underset{\mathscr{B}_\lambda}{\mathrm{Mat}}\left(\tilde{f}\right) = \begin{pmatrix} \lambda & ? & \cdots & ? \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & ? \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_\alpha + U.$$

Comme $E = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker(f - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{\alpha_i}$, en concaténant de telles bases, on obtient une base de E dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + U_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_k I_{\alpha_k} + U_k \end{pmatrix}.$$

■

Corollaire 5.135
La dimension d'un sous-espace caractéristique est l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée.

5.9 Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes

5.9.1 Généralités

Définition 5.136
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On dit que u est nilpotent quand il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est nilpotente quand il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$.

Le plus petit indice p satisfaisant à la condition précédente s'appelle l'indice de nilpotence de u (de A).

Proposition 5.137
Toute matrice strictement triangulaire (supérieure ou inférieure) est nilpotente. Par conséquent, les matrices semblables à une matrice strictement triangulaire sont nilpotentes.

Démonstration 5.138
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice strictement triangulaire :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & ? & \cdots & ? \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & ? \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $\chi_A = X^n$ et $\chi_A(A) = 0$ donc $A^n = 0$. ∎

Dans la décomposition en sous-espaces caractéristiques, on a vu apparaître des matrices $\lambda I_r + U$: les matrices U sont nilpotentes.

L'ensemble des matrices nilpotentes n'a pas de structure particulière : en général, la somme et le produit de deux matrices nilpotentes ne sont pas nilpotents. Néanmoins, avec une condition de commutation supplémentaire, on a quelques résultats.

Proposition 5.139
Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices nilpotentes.

Si A et B commutent, alors $A + B$ et AB sont nilpotentes.

Démonstration 5.140
Soit $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ tel que $A^k = 0$ et $B^\ell = 0$.

Supposons $AB = BA$.

On a
$$\begin{aligned}(AB)^{\min(k,\ell)} &= A^{\min(k,\ell)} B^{\min(k,\ell)} \\ &= 0\end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned}(A+B)^{k+\ell} &= \sum_{i=0}^{k+\ell} \binom{k+\ell}{i} A^i B^{k+\ell-i} \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k+\ell}{i} A^i \underbrace{B^{k+\ell-i}}_{=0} + \sum_{i=k+1}^{k+\ell} \binom{k+\ell}{i} \underbrace{A^i}_{=0} B^{k+\ell-i} \\ &= 0.\end{aligned}$$
∎

On a bien sûr les mêmes résultats concernant les endomorphismes nilpotents.

5.9.2 Éléments propres d'un nilpotent

Proposition 5.141
Un endomorphisme en dimension n est nilpotent ssi son polynôme caractéristique est X^n, i.e. s'il est scindé et admet 0 comme unique valeur propre.

Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente ssi son polynôme caractéristique est X^n, i.e. si elle est scindée et admet 0 comme unique valeur propre.

L'indice de nilpotence dans ces deux cas est alors le degré du polynôme minimal ; il est donc inférieur ou égal à n.

Démonstration 5.142
Si f est nilpotent alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k = 0$ donc X^k est annulateur de f donc $\operatorname{Sp}(f) = \{0\}$ donc $\chi_f = X^n$.

Réciproquement, si $\chi_f = X^n$, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $f^n = 0$ donc f est nilpotent.

Or $\mu_f \mid \chi_f$ donc μ_f est de la forme X^ℓ avec $\ell \leqslant n$ et par définition de μ_f, ℓ est l'indice de nilpotence de f. ∎

Mis à part la matrice nulle, aucune matrice nilpotente n'est diagonalisable : c'est une idée parfois utile pour prouver qu'une matrice est nulle (diagonalisable et nilpotente implique nulle).

Proposition 5.143
Tout endomorphisme nilpotent est trigonalisable : il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure stricte. Réciproquement, si un endomorphisme est trigonalisable et n'a que 0 pour valeur propre, alors il est nilpotent.

Toute matrice nilpotente est trigonalisable : elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte. La réciproque est vraie.

5.9.3 Application aux sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme

Proposition 5.144
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Pour toute valeur propre λ de f, si α est l'ordre de multiplicité de λ dans le polynôme minimal de f, le sous-espace caractéristique associé est aussi le noyau $\ker(f - \lambda \mathrm{id}_E)^\alpha$.

Lemme 5.145
Si $F_1, \dots, F_k, G_1, \dots, G_k$ vérifient $\bigoplus_{i=1}^{k} F_i = \bigoplus_{i=1}^{k} G_i$ et pour tout $i \in [\![1\ ;\ k]\!]$, $F_i \subseteq G_i$, alors pour tout $i \in [\![1\ ;\ k]\!]$, $F_i = G_i$.

Démonstration 5.146
Soient $i \in [\![1 ; k]\!]$ et $x \in G_i$.

On a $x \in \bigoplus_{j=1}^{k} G_j = \bigoplus_{j=1}^{k} F_j$.

Donc il existe $(y_1, \ldots, y_k) \in F_1 \times \cdots \times F_k$ tel que

$$\underbrace{x}_{\in G_i} = \underbrace{y_1}_{\in F_1 \subseteq G_1} + \cdots + \underbrace{y_k}_{\in F_k \subseteq G_k}.$$

Or la somme $\bigoplus_{j=1}^{k} G_j$ est directe donc par unicité

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ \vdots \\ y_{i-1} = 0 \\ y_i = x \\ y_{i+1} = 0 \\ \vdots \\ y_k = 0 \end{cases}$$

Donc $x = y_i \in F_i$.

Donc $F_i \subseteq G_i$.

Donc $F_i = G_i$. ■

Démonstration 5.147 (de la Proposition 5.144)

On note $\chi_f = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et $\mu_f = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{\beta_i}$ où pour tout $i \in [\![1 ; k]\!]$, $\alpha_i \geqslant \beta_i \geqslant 1$.

On veut montrer que pour tout $i \in [\![1 ; k]\!]$, $\ker (f - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{\alpha_i} = \ker (f - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{\beta_i}$.

Comme $\beta_i \leqslant \alpha_i$, on a immédiatement pour tout $i \in [\![1 ; k]\!]$, $\ker (f - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{\beta_i} \subseteq \ker (f - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{\alpha_i}$.

Comme $\mu_f(f) = \chi_f(f) = 0$, d'après le lemme des noyaux :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker (f - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{\beta_i} = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker (f - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{\alpha_i}.$$

D'après le Lemme 5.145, on en déduit

$$\forall i \in [\![1 ; k]\!], \ \ker (f - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{\alpha_i} = \ker (f - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{\beta_i}.$$ ■

On peut même démontrer mieux.

Proposition 5.148
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$, $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$ *et* α *l'ordre de multiplicité de* λ *dans le polynôme minimal de* f.

Alors la suite des noyaux $\left(\ker(f - \lambda \mathrm{id}_E)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *est strictement croissante jusqu'au rang* α, *puis constante à partir du rang* α *:*

$$\{0\} \subsetneq \ker(f - \lambda \mathrm{id}_E) \subsetneq \ker(f - \lambda \mathrm{id}_E)^2 \subsetneq \dots \subsetneq \ker(f - \lambda \mathrm{id}_E)^\alpha = \ker(f - \lambda \mathrm{id}_E)^{\alpha+1} = \dots$$

Deuxième partie

Exercices

Chapitre 1

Espaces vectoriels normés

$\star$ Exercice proche du cours
$\star\star$ Exercice de difficulté normale
$\star\star\star$ Exercice difficile (voire très difficile)
$+$ Exercice à faire en priorité

$+\star\star$ Exercice 1.1 (Exercice 1)
Soit u une suite réelle bornée. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \left\{u_p \mid p \geqslant n\right\}$, $a_n = \inf U_n$ et $b_n = \sup U_n$.

(1) Justifiez l'existence des suites a et b et étudiez leur monotonie, ainsi que leur convergence.

(2) Montrez que u converge ssi a et b ont la même limite.

Note culturelle : la limite de a s'appelle la limite inférieure de u, notée $\underline{\lim}\, u$ et celle de b est la limite supérieure, notée $\overline{\lim}\, u$.

Correction 1.2
$\star\star$ À venir $\star\star$

$+\star$ Exercice 1.3 (Exercice 2)
Montrez que les applications N introduites ci-dessous sont des normes :

(1) si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, l'application N définie sur $\mathbb{R}^n$ par $N(X) = \|AX\|_2$;

(2) sur $E = \mathscr{C}^1([a\,;b], \mathbb{K})$, $N(f) = |f(a)| + \displaystyle\int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t$;

(3) pour des réels $\alpha_0 < \cdots < \alpha_n$ fixés, l'application N définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $N(P) = \max\limits_{k \in [\![0;n]\!]} |P(\alpha_k)|$.

Correction 1.4
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆ Exercice 1.5 (Exercice 3)
Sur $E = \mathbb{R}^2$, on définit

$$\|(x, y)\| = \max\left(|x|, |x + 2y|\right).$$

Démontrez que $\|\cdot\|$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$. Représentez graphiquement la boule-unité.

Correction 1.6
⋆⋆ À venir ⋆⋆

+⋆⋆ Exercice 1.7 (Exercice 4)
Les normes définies dans l'exercice 2 sont-elles équivalentes à la norme $\|\cdot\|_\infty$, la norme $\|\cdot\|_1$, la norme $\|\cdot\|_2$?

Correction 1.8
⋆⋆ À venir ⋆⋆

+⋆ Exercice 1.9 (Exercice 5)
Soit $\theta \not\equiv 0\,[\pi]$. Montrez que $(\sin(n\theta))$ et $(\cos(n\theta))$ divergent.

Correction 1.10
⋆⋆ À venir ⋆⋆

+⋆ Exercice 1.11 (Exercice 6)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que la suite $\left(A^k\right)$ converge. Montrez que sa limite est la matrice d'un projecteur.

Correction 1.12
⋆⋆ À venir ⋆⋆

★★ **Exercice 1.13 (Exercice 7)**
Cet exercice prolonge le premier.

Soit u une suite vérifiant la propriété

$$\forall \varepsilon > 0,\quad \exists N \in \mathbb{N},\quad \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\quad p \geqslant n \geqslant N \implies \left|u_n - u_p\right| \leqslant \varepsilon.$$

Montrez que u est bornée, puis en vous servant des suites a et b définies comme ci-dessus, montrez que u converge.

Note culturelle : on dit que u est une suite de Cauchy et on a donc montré que toute suite de Cauchy converge.

Correction 1.14
★★ **À venir** ★★

+★★ **Exercice 1.15 (Exercice 8)**
On note ℓ_1 l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que la série $\sum u_k$ soit absolument convergente, et on pose :

$$\forall u = (u_k) \in \ell_1,\quad N(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|\,.$$

(1) Justifiez que ℓ_1 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(2) Montrez que N est une norme sur ℓ_1. On notera désormais $\|u\|_1$ pour $N(u)$.

(3) Justifiez que, si $\left(u^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de ℓ_1 convergeant vers la suite $a \in \ell_1$ pour la norme 1, alors

$$\forall k \in \mathbb{N},\quad u_k^{(n)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} a_k.$$

(4) Montrez que la réciproque est fausse.
Indication : on pourra étudier l'exemple où, pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, $u_k^{(n)} = \exp\left(\dfrac{-k}{n+1}\right)$.

Correction 1.16
★★ **À venir** ★★

+★ **Exercice 1.17 (Exercice 9)**
Soit E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites bornées muni de la norme infinie.

Montrez que les applications $u \longmapsto (u_{n+1} - u_n)$ et $u \longmapsto \dfrac{u_0 + \cdots + u_n}{n+1}$ sont des applications continues de E dans E.

Correction 1.18
★★ À venir ★★

+ ★ ★ Exercice 1.19 (Exercice 10)
Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $A = (a_{ij})$ on pose $\|A\| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

(1) Montrez que $\| \cdot \|$ est une norme sur E.

(2) Montrez que l'application $A \longmapsto {}^tA$ est un endomorphisme continu et déterminez sa norme subordonnée.

Correction 1.20
★★ À venir ★★

★★ Exercice 1.21 (Exercice 11)
Soit $E = \mathscr{C}^0([0\,;\,1], \mathbb{R})$. On pose $A = \{f \in E \mid f \geqslant 0\}$ et pour $f \in E$, $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f|$.

(1) Montrez que $\| \cdot \|_1$ est une norme sur E.

(2) Déterminez $\mathring{A}$ dans $(E, \| \cdot \|_\infty)$, puis dans $(E, \| \cdot \|_1)$.

(3) On pose $D = \mathscr{D}^1([0\,;\,1], \mathbb{R})$ le sous-espace des fonctions dérivables et P le sous-espace des fonctions polynômes.
Déterminez les intérieurs de P et D dans $(E, \| \cdot \|_\infty)$.

Correction 1.22
★★ À venir ★★

★★ Exercice 1.23 (Exercice 12)
Cet exercice prolonge le précédent, les notations sont reprises.

Soit $u : E \longrightarrow E$ qui à toute fonction f de E associe sa primitive qui s'annule en 0. Vérifiez que u est un endomorphisme de E.

Est-il continu de $(E, \| \cdot \|_?)$ dans $(E, \| \cdot \|_?)$ (vous étudierez les quatre possibilités) ? Quand c'est le cas, déterminez la norme subordonnée de u.

Correction 1.24
⋆⋆ À venir ⋆⋆

+ ⋆ ⋆ Exercice 1.25 (Exercice 13)
Soit $E = \left\{ f \in \mathscr{C}^1([0\,;\,1], \mathbb{R}) \;\middle|\; f(0) = f(1) = 0 \right\}$. Pour $f \in E$, on pose $\|f\| = \sup\limits_{[0;1]} |f'|$.

(1) Montrez que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.

(2) Soit $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 f$. Montrez que φ est continue et déterminez $|||f|||$.

Correction 1.26
⋆⋆ À venir ⋆⋆

+ ⋆ ⋆ Exercice 1.27 (Exercice 14)
Soient E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.

(1) Montrez que si $F \neq E$, alors $\mathring{F} = \varnothing$ et $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.

(2) Montrez que si F est un hyperplan, alors F est fermé ou dense dans E.

Correction 1.28
⋆⋆ À venir ⋆⋆

+⋆ Exercice 1.29 (Exercice 15)
Soient E un espace vectoriel normé et A une partie de E.

Montrez que $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A et $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A. Montrez que la frontière de A est un fermé d'intérieur vide.

Correction 1.30
⋆⋆ À venir ⋆⋆

★ **Exercice 1.31 (Exercice 16)**
Une intersection d'ouverts est-elle toujours un ouvert ? Une réunion de fermés est-elle toujours un fermé ?

Correction 1.32
★★ **À venir** ★★

+★ **Exercice 1.33 (Exercice 17)**
Montrez que si A est une partie convexe d'un espace vectoriel normé E, alors il en est de même pour $\overline{A}$ et $\mathring{A}$.

Correction 1.34
★★ **À venir** ★★

★★ **Exercice 1.35 (Exercice 18)**
Soient E un espace vectoriel normé, A une partie de E et $x \in E$. On dit que x est un point d'accumulation de A quand il existe une suite injective de $A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x. On dit que x est un point isolé de A quand il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \cap A = \{x\}$.

(1) Exemples. On pose $A = \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$ dans $\mathbb{R}$: montrez que tous les points de A sont isolés, que le seul point d'accumulation de A est 0 et que A n'est pas fermé. On pose $B = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \;\middle|\; (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$: quels sont les points d'accumulation de B ?

(2) Montrez que x est un point d'accumulation ssi pour tout $r > 0$, $B(x, r) \cap A$ est un ensemble infini.

(3) On note A' l'ensemble des points d'accumulation de A et A^d l'ensemble des points isolés dans A. Montrez que $\overline{A} = A' \sqcup A^d$.

(4) Montrez que A' est un fermé.

Correction 1.36
★★ **À venir** ★★

★★ Exercice 1.37 (Exercice 19)
Soient E, F deux espaces vectoriels normés et $f : E \longrightarrow F$. Montrez l'équivalence entre les propositions :

(1) f est continue

(2) $\forall A \in \mathscr{P}(E), \quad f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$

(3) $\forall B \in \mathscr{P}(F), \quad f^{-1}\left(\mathring{B}\right) \subseteq \overbrace{f^{-1}(B)}^{\circ}$

Correction 1.38
★★ À venir ★★

+ ★ ★ Exercice 1.39 (Exercice 20)
Soient A, B deux fermés disjoints d'un espace vectoriel normé E.

(1) Montrez que $\{x \in E \mid d(x, A) > d(x, B)\}$ est un ouvert.

(2) Montrez qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $A \subseteq U$ et $B \subseteq V$.

Correction 1.40
★★ À venir ★★

+ ★ ★ Exercice 1.41 (Exercice 21)
Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Pour $r > 0$, on pose $V(A, r) = \{x \in E \mid d(x, A) < r\}$.

Montrez que $V(A, r)$ est un ouvert de E et $\displaystyle\bigcap_{r>0} V(A, r) = \overline{A}$.

Correction 1.42
★★ À venir ★★

+ ★ ★ Exercice 1.43 (Exercice 22)
Soient E un espace vectoriel normé, K un compact de E, $k \in [0\,;1[$ et $f : K \longrightarrow K$ telle que

$$\forall (x, y) \in K^2, \quad \|f(x) - f(y)\| \leqslant k\,\|x - y\|\,.$$

Soit u la suite définie par u_0 quelconque dans K et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Montrez que u converge et que sa limite est l'unique point fixe de f.

Correction 1.44
$\star\star$ À venir $\star\star$

$\star\star$ Exercice 1.45 (Exercice 23)
Soient E un espace vectoriel normé et A une partie non-vide de E. On appelle diamètre de A, noté $\delta(A)$, la borne supérieure dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ des $\|x-y\|$ quand $(x,y) \in A^2$.

(1) Montrez que $\delta(A) < +\infty$ ssi A est bornée.

(2) Quel est le diamètre d'une boule ?

(3) Montrez que si A est compacte, alors il existe $(a,b) \in A^2$ tel que $\delta(A) = \|a-b\|$. Est-ce encore vrai si on suppose seulement A bornée ? A fermée ?

Correction 1.46
$\star\star$ À venir $\star\star$

$+\star\star$ Exercice 1.47 (Exercice 24)
Soient E un espace vectoriel normé et A, B deux parties non-vides de E. On pose $d(A,B) = \inf_{(a,b)\in A\times B} \|a-b\|$, appelé distance de A à B.

(1) Montrez que si $d(A,B) > 0$, alors A et B sont disjointes, mais que la réciproque est fausse.

(2) Montrez que si A et B sont compactes, alors $d(A,B)$ est en fait un minimum plutôt qu'une borne inférieure.

(3) Montrez que ce résultat reste vrai si E est de dimension finie, l'une des deux parties est compacte et l'autre fermée.

(4) Est-ce encore vrai si on suppose seulement A et B fermées ?

Correction 1.48
$\star\star$ À venir $\star\star$

$+\star\star$ Exercice 1.49 (Exercice 25)
Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et $\left(B_n = \overline{B}\left(a_n, r_n\right)\right)$ une suite de boules fermées, décroissantes pour l'inclusion, telle que $r_n \longrightarrow 0$.

(1) Montrez que la suite (a_n) admet une sous-suite convergeant vers un vecteur a.

(2) Montrez que $a_n \longrightarrow a$.

(3) Montrez que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \{a\}$.

Correction 1.50
$\star\star$ **À venir** $\star\star$

$\star\star$ Exercice 1.51 (Exercice 26)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrez que l'ensemble des projecteurs est fermé dans $\mathscr{L}(E)$. Est-il borné ? Compact ? Connexe par arcs ?

Correction 1.52
$\star\star$ **À venir** $\star\star$

$\star\star$ Exercice 1.53 (Exercice 27)
Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $\varepsilon > 0$. On pose $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |f(x) - y| \leqslant \varepsilon\right\}$.

(1) Montrez que E est connexe par arcs.

(2) Montrez que si f est une fonction affine, alors E est une partie convexe.

(3) Montrez que la réciproque est vraie.

Correction 1.54
$\star\star$ **À venir** $\star\star$

$\star\star$ Exercice 1.55 (Exercice 28)
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et H un hyperplan de E.

(1) Montrez que $E \setminus H$ possède deux composantes connexes par arcs qui sont ouvertes.

(2) Soit B une partie de H telle que $H \neq B$. Montrez que $E \setminus B$ est connexe par arcs.

Correction 1.56
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆⋆ Exercice 1.57 (Exercice 29)
Soient E un espace vectoriel normé et A, B deux parties de E telles que B est connexe par arcs et B rencontre à la fois A et $E \setminus A$.

Montrez que B rencontre la frontière de A.

Correction 1.58
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆⋆ Exercice 1.59 (Exercice 30)
Deux parties d'un espace vectoriel normé sont dites homéomorphes quand il existe une bijection continue de l'une dans l'autre telle que la réciproque soit aussi continue.

(1) Montrez que tout intervalle ouvert est homéomorphe à $\mathbb{R}$.

(2) Montrez qu'un intervalle qui contient l'une de ses bornes réelles ne peut pas être homéomorphe à $\mathbb{R}$.

(3) Montrez que toute boule ouverte d'un espace vectoriel normé E est homéomorphe à E.

(4) Montrez qu'aucune boule fermée de E n'est homéomorphe à E.

Correction 1.60
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆ ⋆ ⋆ Exercice 1.61 (Exercice 31)
Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, autre que $\{0\}$.

(1) Montrez que $a = \inf G \cap \mathbb{R}_+^*$ existe.

(2) Montrez que $G = a\mathbb{Z}$ si $a > 0$ ou G est dense dans $\mathbb{R}$ si $a = 0$.

(3) On pose $G = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ (G est le sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ engendré par 1 et $\sqrt{2}$) et $r = \sqrt{2} - 1$. En considérant la suite (r^n), montrez que G est dense dans $\mathbb{R}$.
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et périodique de périodes 1 et $\sqrt{2}$. Que peut-on dire de f ?

(4) Soient a, b deux réels distincts et non-nuls, on pose $G = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$. Montrez que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, puis que G est dense dans $\mathbb{R}$ ssi $\dfrac{a}{b}$ est un rationnel.
Application : montrez que les ensembles $\{\cos n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $\{\sin n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sont denses dans $[-1 ; 1]$.

Correction 1.62
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆ ⋆ ⋆ Exercice 1.63 (Exercice 32)
Soit $E = \mathscr{C}^0([0\,;\,1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie $\|f\| = \sup_{[0;1]} |f|$. On note $\overline{B}(0,1)$ la boule-unité fermée.

Soit (t_n) une suite injective à valeurs dans $[0\,;\,1]$. Pour $f \in E$, on pose $L(f) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{f(t_n)}{2^n}$.

(1) Montrez que L est une forme linéaire continue sur E.

(2) Déterminez $K = \sup_{f \in \overline{B}(0,1)} |L(f)|$.

(3) Montrez que si la suite (t_n) converge ou si elle est dense dans $[0\,;\,1]$, K n'est pas atteinte.

(4) Donnez un exemple de suite (t_n) pour laquelle K est atteinte. Donnez une condition nécessaire et suffisante sur la suite t pour que K soit atteinte.

Correction 1.64
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆ ⋆ ⋆ Exercice 1.65 (Exercice 33)
Soient E un espace vectoriel normé et u une forme linéaire non-nulle et continue sur E. On pose $H = \ker u$ et $K = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{|u(x)|}{\|x\|}$.

(1) Justifiez l'existence de K.

(2) Montrez que pour tout $a \in E$, $\; d(a, H) = \frac{|u(a)|}{K}$.

Correction 1.66
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 1.67 (Oral CCMP, 1)
Soient E un espace vectoriel normé réel et B sa boule-unité ouverte. Montrez que E et B sont homéomorphes (*i.e.* il existe une bijection de E dans B qui est continue et dont la réciproque est aussi continue).

Correction 1.68
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 1.69 (Oral CCMP, 2)
Soient E un espace vectoriel normé réel et C, D deux parties de E telles que $C \subseteq D \subseteq \overline{C}$ et C convexe. Montrez que D est connexe par arcs.

Correction 1.70
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 1.71 (Oral CCMP, 3)
Soient E un espace vectoriel normé réel, K un compact de E et $f : K \longrightarrow K$ telle que

$$\forall (x, y) \in K^2, \ \ x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\| .$$

(1) Montrez que f possède un unique point fixe.

(2) Soit u la suite définie par u_0 quelconque dans K et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrez que u converge vers le point fixe de f.

Correction 1.72
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 1.73 (Oral CCMP, 4)
Soit u une suite réelle bornée telle que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$. Montrez que l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est un intervalle.

Correction 1.74
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 1.75 (Oral Centrale, 5)
Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ tel que pour tout $g \in G$ il existe un voisinage V de g tel que $G \cap V = \{g\}$.

(1) Montrez que pour tout compact K de $\mathbb{C}^*$, $G \cap K$ est fini.

(2) Montrez que $G \cap \mathbb{U}$ est un groupe cyclique.

(3) On suppose que G n'est pas contenu dans $\mathbb{U}$. Soit $A = \{|x| \mid x \in G \text{ et } |x| > 1\}$. Montrez que A possède un plus petit élément. Déduisez-en G.

Correction 1.76

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 1.77 (Oral Centrale, 6)
Soient E, F deux espaces vectoriels normés de dimensions finies et $f : E \longrightarrow F$. On dit que f est propre quand pour tout compact K de F, $f^{-1}(K)$ est un compact de E.

(1) Montrez que si f est propre, alors l'image d'un fermé de E est un fermé de F.

(2) Montrez que f est propre ssi $\|f(x)\| \xrightarrow[\|x\| \longrightarrow +\infty]{} +\infty$.

Correction 1.78

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 1.79 (Oral X, 7)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, U_n l'ensemble des polynômes réels unitaires de degré n et A_n l'ensemble des polynômes de U_n qui sont simplement scindés (*i.e.* ayant n racines réelles distinctes).

(1) Montrez que A_n est un ouvert de U_n.

(2) Déterminez l'adhérence de A_n.

Correction 1.80

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Chapitre 2

Séries numériques et vectorielles : révisions et compléments

$\star$ Exercice proche du cours
$\star\star$ Exercice de difficulté normale
$\star\star\star$ Exercice difficile (voire très difficile)
$+$ Exercice à faire en priorité

$\star$ Exercice 2.1 (Exercice 1)

(1) Montrez que la série de terme général $u_n = \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{2n^2}$ est convergente.

(2) Montrez que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \operatorname{Arctan} \dfrac{n}{n+1} - \operatorname{Arctan} \dfrac{n-1}{n}$.

(3) Déduisez-en la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Correction 2.2
$\star\star$ À venir $\star\star$

$\star$ Exercice 2.3 (Exercice 2)

Justifiez que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{2n-1}{n^3-n}$ converge et déterminez sa somme (indication : décomposition en éléments simples).

Correction 2.4
$\star\star$ À venir $\star\star$

★★ Exercice 2.5 (Exercice 3)
Donnez la nature des séries suivantes (α désigne une constante strictement positive, x un réel dans $]-1\ ;\ 1[$) :

(1) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln^n n}{n^{\ln n}}$

(2) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

(3) $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$

(4) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n n^\alpha}{n!}$

(5) $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n \ln n}{n^\alpha}$

(6) $\displaystyle\sum \ln(1+x^n)$

(7) $\displaystyle\sum \frac{\sin n}{2^n}$

(8) $\displaystyle\sum 2\ln\left(n^3+1\right) - 3\ln\left(n^2+1\right)$

(9) $\displaystyle\sum \frac{\sin n \sin\frac{1}{n}}{n}$

(10) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{(-1)^n+n}$

(11) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$

(12) $\displaystyle\sum \sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}$

(13) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\ln n + \sin\frac{2\pi n}{3}}$

(14) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e}\right)$

(15) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\ln n \ln(\operatorname{ch} n)}$

(16) $\displaystyle\sum \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 t}{n^2+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$

Correction 2.6
★★ À venir ★★

$\star\star$ **Exercice 2.7 (Exercice 4)**
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

(1) Déterminez a et b pour que la série de terme général $\ln n + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)$ converge. Dans ce cas, donnez la valeur de sa somme.

(2) Faites de même avec la série de terme général $\sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$.

Correction 2.8
$\star\star$ **À venir** $\star\star$

$\star\star$ **Exercice 2.9 (Exercice 5)**
Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la série de terme général $u_n = \operatorname{ch}^\alpha n - \operatorname{sh}^\alpha n$ converge-t-elle ? Dans ce cas, donnez un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k$.

Correction 2.10
$\star\star$ **À venir** $\star\star$

$\star\star$ **Exercice 2.11 (Exercice 6)**

On pose $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{3/2}$. Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge-t-elle ? Dans ce cas, donnez un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Correction 2.12
$\star\star$ **À venir** $\star\star$

$\star\star$ **Exercice 2.13 (Exercice 7, séries associées à des suites définies par récurrence)**

(1) Soit u la suite définie par récurrence par $u_1 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{n e^{u_n}}$.
Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} u_n$?

(2) Soit u la suite définie par récurrence par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

Quelle est la nature de la série $\sum \left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \right)$? Puis celle de $\sum u_n$? Donnez un équivalent de $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

(3) Soit u la suite définie par récurrence par $u_0 \in]0 \,;\, \pi[$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \sin u_n$.

Quelle est la nature de la série $\sum \left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \right)$? Puis celle de $\sum u_n$? Donnez un équivalent de $\sum_{k=0}^{n}$.

Correction 2.14

⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆⋆ Exercice 2.15 (Exercice 8)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $P(x) \geqslant 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\mathrm{e}^k + P(k)}$.

(1) Justifiez l'existence de u_n.

(2) Montrez que la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge.

Correction 2.16

⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆⋆ Exercice 2.17 (Exercice 9)

Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.

(1) Justifiez l'existence de u_n.

(2) Montrez que $\frac{u_n + u_{n+1}}{2}$ est le reste d'une série alternée absolument convergente.

(3) Déduisez-en la nature de la série $\sum u_n$.

Correction 2.18

⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆⋆ Exercice 2.19 (Exercice 10, utilisation de développements limités ou asymptotiques)

(1) Montrez que la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$ converge.

(2) Montrez que la série $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge.

(3) Montrez que la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{1+(-1)^n n}$ converge.

(4) Montrez que la série $\sum_{n\geqslant 0} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$ converge.

(5) Déterminez la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} (-1)^n \frac{\ln\left(n+(-1)^n\sqrt{n}\right)}{n}$.

(6) Déterminez la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{1+(-1)^n\sqrt{n}}$.

Correction 2.20

⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆⋆ Exercice 2.21 (Exercice 11)

Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{(-1)^n+n^\alpha}}$ converge-t-elle ?

Correction 2.22

⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆⋆ Exercice 2.23 (Exercice 12, formule de Stirling)

Montrez que la suite de terme général $\frac{n!}{\sqrt{n}}\left(\frac{\mathrm{e}}{n}\right)^n$ converge vers un réel strictement positif L (indication : passer au logarithme et penser à une série).

Soit $u_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \,\mathrm{d}t$. On montre que $u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ et que $u_{2n} = \frac{\pi\,(2n)!}{2^{2n+1}\,(n!)^2}$. En admettant ces résultats, montrez la formule de Stirling :

$$n! \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

Correction 2.24
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆⋆ Exercice 2.25 (Exercice 13)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $u_n = \dfrac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^a}$.

(1) Dans le cas où $a \leqslant 0$ ou $a > 1$, quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$?

(2) On suppose désormais que $0 < a \leqslant 1$ et on pose $v_n = u_{2n-1} + u_{2n}$. Montrez que la série $\sum v_n$ converge. Déduisez-en la nature de la série $\sum u_n$.

Correction 2.26
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆⋆ Exercice 2.27 (Exercice 14)
Soient u une suite strictement positive et $\alpha > 0$.

Montrez que les séries de termes généraux u_n, $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$, $w_n = \ln(1+u_n)$ et $x_n = \displaystyle\int_0^{u_n} \frac{1}{1+x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ sont de même nature.

Correction 2.28
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆⋆ Exercice 2.29 (Exercice 15)
Soit u une suite réelle qui ne s'annule pas telle que $\dfrac{u_{2n+1}}{u_{2n}} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} a$ et $\dfrac{u_{2n}}{u_{2n-1}} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} b$.

Montrez que si $|ab| < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Correction 2.30
⋆⋆ À venir ⋆⋆

★★ **Exercice 2.31 (Exercice 16)**
Soit u une suite réelle positive décroissante.

Montrez que si $\sum u_n$ converge, alors $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

La réciproque est-elle vraie ?

Correction 2.32
★★ **À venir** ★★

★★ **Exercice 2.33 (Exercice 17)**
Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle strictement positive et bornée telle que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ diverge. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose S_n la somme partielle d'indice n de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

(1) Montrez que $\frac{u_n}{S_n} \sim \ln \frac{S_n}{S_{n+1}}$. Déduisez-en la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{u_n}{S_n}$.

(2) Étudiez la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ quand $\alpha \in]0\,;1[$.

(3) Soit $\alpha > 1$. Montrez que $\frac{u_n}{S_n^\alpha} \leqslant \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$. Déduisez-en la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{u_n}{S_n^\alpha}$.

Correction 2.34
★★ **À venir** ★★

★★ **Exercice 2.35 (Exercice 18)**
Soit u une suite strictement positive. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

On suppose que $u_n s_n$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Déterminez un équivalent simple de u_n.

Correction 2.36
★★ **À venir** ★★

⋆⋆ Exercice 2.37 (Exercice 19)
Soit u la suite définie par récurrence par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + u_n^2$. On pose $v_n = \frac{1}{2^n} \ln u_n$, puis $w_n = v_{n+1} - v_n$.

(1) Montrez que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

(2) Montrez que la suite (v_n) converge vers un réel $\ell > 0$. On pose alors $A = \mathrm{e}^{\ell} > 1$.

(3) Montrez que $u_n \sim A^{2^n}$.

Correction 2.38
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆⋆⋆ Exercice 2.39 (Exercice 20, transformation d'Abel)
Soient u une suite réelle et v une suite complexe. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

On suppose que la suite u est positive et décroissante de limite nulle et que la suite V est bornée.

(1) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = u_n V_n - \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) V_k$.

(2) Déduisez-en que la série $\sum u_n v_n$ converge.

Applications :

(3) Soit w une suite complexe telle que $\sum w_n$ converge. Montrez que pour tout $a > 0$, $\sum \frac{w_n}{n^a}$ converge aussi.

(4) Soient $a > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Donnez la nature des séries $\sum \frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^a}$, $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n^a}$ et $\sum \frac{\sin(n\theta)}{n^a}$.

(5) Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \geqslant \frac{1 - \cos(2x)}{2}$. Déterminez la nature des séries $\sum \frac{|\cos(n\theta)|}{n^a}$ et $\sum \frac{|\sin(n\theta)|}{n^a}$.

Correction 2.40
⋆⋆ À venir ⋆⋆

$\star\star\star$ **Exercice 2.41 (Exercice 21)**
Soit u une suite positive de limite nulle. On appelle U_n la somme partielle d'indice n de la série $\sum u_n$ et on suppose qu'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n - nu_n| \leqslant M$.

(1) Montrez que pour tout $n \geqslant 2$, $\left|\dfrac{U_n}{n} - \dfrac{U_{n-1}}{n-1}\right| \leqslant M\left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}\right)$.

(2) Montrez que la série $\sum u_n$ converge.

Correction 2.42
$\star\star$ **À venir** $\star\star$

$\star\star\star$ **Exercice 2.43 (Exercice 22)**
Soit $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ une série convergente à termes positifs.

(1) Montrez que $\dfrac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

(2) Montrez que la série $\sum \dfrac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n\,(n+1)}$ converge et montrez que sa somme est la même que celle de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.

Correction 2.44
$\star\star$ **À venir** $\star\star$

Exercice 2.45 (Oral Saint-Cyr, 1)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$. Déterminez la nature de la série $\sum u_n$. Donnez un équivalent de $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Correction 2.46
$\star\star$ **À venir** $\star\star$

Exercice 2.47 (Oral IMT, 2)
Soit $\alpha > 0$. Donnez un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln^{\alpha} k$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Correction 2.48
★★ **À venir** ★★

Exercice 2.49 (Oral CCINP, 3)
Soit u la suite définie par récurrence par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n}$.

(1) Montrez que (u_n) converge et déterminez sa limite.

(2) Déterminez la limite de $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$. Déduisez-en un équivalent de u_n.

Correction 2.50
★★ **À venir** ★★

Exercice 2.51 (Oral CCINP, 4)
Montrez que pour $n \geqslant 1$, l'équation $x^n + \sqrt{n}x - 1 = 0$ admet une unique solution x_n dans $[0\ ;\ 1]$.

Étudiez la suite (x_n) et montrez qu'elle converge vers 0.

Trouvez un équivalent de x_n et étudiez la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} x_n$.

Correction 2.52
★★ **À venir** ★★

Exercice 2.53 (Oral CCINP, 5)
Montrez que la suite (u_n) définie par $u_0 \in [0\ ;\ 1[$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + u_n^2\right)$ converge vers 0 et donnez la nature de la série $\sum u_n$.

Correction 2.54
★★ **À venir** ★★

Exercice 2.55 (Oral CCINP, 6)
Quelle est la nature de la série de terme général $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n\,(n+1)}}\right)$?

Correction 2.56
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 2.57 (Oral CCINP, 7)
Soient $x, y > 0$. Représentez graphiquement l'ensemble des couples (x, y) tels que la série $\sum \dfrac{x^n}{y^n + n^x}$ converge.

Correction 2.58
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 2.59 (Oral CCMP, 8)
Étudiez la convergence de la suite (a_n) définie par $a_0 > 0$ et $a_{n+1} = 1 - \mathrm{e}^{-a_n}$.

Déterminez la nature des séries $\sum (-1)^n\, a_n$ et $\sum a_n^2$.

Déterminez la nature de la série $\sum a_n$ (on pourra étudier la série $\sum \ln \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$).

Correction 2.60
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 2.61 (Oral CCINP, 9)
Soient (a_n) une suite positive et (u_n) définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2}}{2}$.

(1) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leqslant \dfrac{a_n}{2}$.

(2) Montrez que si la série $\sum a_n$ converge, alors la suite (u_n) converge.

(3) La réciproque est-elle vraie ? Indication : considérer $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Correction 2.62
★★ **À venir** ★★

Exercice 2.63 (Oral IMT, 10)
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+3} u_n$. On pose $(v_n) = \left(n^2 u_n\right)$.

(1) Déterminez la nature de la série de terme général $\ln \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

(2) Déduisez-en la nature de la série de terme général u_n.

Correction 2.64
★★ **À venir** ★★

Exercice 2.65 (Oral Centrale, 11)

Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^2 - 1}$ converge et donnez la valeur de sa somme.

Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{n^2}{\left(n^2+1\right)^2}$ converge et donnez une valeur de n pour que sa somme partielle soit une valeur approchée de sa somme à 10^{-4} près.

Correction 2.66
★★ **À venir** ★★

Exercice 2.67 (Oral Centrale, 12)

(1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrez que la suite $(H_n - \ln n)_{n \geqslant 1}$ converge.

(2) Déduisez de la question précédente la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

(3) Pour $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$. Calculez $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n) - 1}{n}$.

Correction 2.68
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 2.69 (Oral Centrale, 13)
Si (u_n) est une suite réelle telle que $u_0 = 0$, on pose alors $(v_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n\,(u_n - u_{n-1})$.

On note P_1 la propriété « la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge » et P_2 la propriété « il existe ℓ tel que $u_n \longrightarrow \ell$ et $\sum (\ell - u_n)$ converge ».

(1) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u_n = \operatorname{Arctan} n^\alpha$ pour $n \geqslant 1$, étudiez la véracité des propositions P_1 et P_2.

(2) Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle telle que $\sum a_n$ converge. Montrez que $\sum \frac{a_n}{n}$ converge et que $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k}{k} = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

(3) Comparez les propriétés P_1 et P_2.

Correction 2.70
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 2.71 (Oral CCMP, 14)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$. La série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n\, n^\alpha}$ converge-t-elle ?

Correction 2.72
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 2.73 (Oral CCMP, 15)

Soient $\alpha > 0$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$.

(1) On suppose $\alpha > 1$. Montrez que $\sum_{k=1}^{n} R_k = (n+1)\, R_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^{\alpha-1}}$. Déduisez-en la convergence de la série $\sum R_n$.

(2) Étudiez le cas $\alpha \leqslant 1$.

Correction 2.74
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 2.75 (Oral CCMP, 16)

Soit $(a_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}^*}$.

(1) On suppose que la série $\sum a_n^{1-1/n}$ converge. Montrez que la série $\sum a_n$ converge.

(2) On suppose que la série $\sum a_n$ converge. Montrez que la série $\sum a_n^{1-1/n}$ converge.
Vous introduirez, pour $\lambda > 1$, l'ensemble $\left\{n \in \mathbb{N}^* \;\middle|\; a_n^{1-1/n} \leqslant \lambda a_n\right\}$ et son complémentaire.

(3) Généralisez en remplaçant $a_n^{1-1/n}$ par $a_n^{1-b_n}$ avec une hypothèse adéquate sur la suite (b_n).

Correction 2.76
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 2.77 (Oral CCMP, 17)
Soit f une permutation de $\mathbb{N}^*$. On pose $E(f) = \left\{\alpha \in \mathbb{R} \;\middle|\; \sum \dfrac{f(n)}{n^\alpha} \text{ converge}\right\}$.

(1) Montrez que $E(f)$ peut être vide. Montrez dans le cas contraire que $E(f)$ est un intervalle minoré par 2 et non-majoré.

(2) Soit $B \geqslant 2$. Montrez l'existence de f telle que $E(f) = \left]B\,;+\infty\right[$.

Correction 2.78
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 2.79 (Oral X, 18)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$.

(1) Montrez que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge. On note ℓ sa limite.

(2) Montrez que $\ell = -\left(1+\sqrt{2}\right)\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$.

Correction 2.80
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 2.81 (Oral X, 19)
Soit $\sum x_n$ une série absolument convergente de réels.

(1) Montrez que pour tout réel $p \geqslant 1$, la série $\sum |x_n|^p$ converge.

(2) Déterminez la limite de $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p$ quand $p \longrightarrow +\infty$.

Correction 2.82
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 2.83 (Oral X, 20)
Soient $\alpha > 0$ et (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Étudiez la convergence de la série $\sum u_n$.

Correction 2.84
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Chapitre 3

Familles sommables

$\star$ Exercice proche du cours
$\star\star$ Exercice de difficulté normale
$\star\star\star$ Exercice difficile (voire très difficile)
$+$ Exercice à faire en priorité

$\star\star$ Exercice 3.1 (Exercice 23)

La famille $\left(\dfrac{1}{pq\,(p+q)}\right)_{p,q\geqslant 1}$ est-elle sommable ?

Correction 3.2
$\star\star$ À venir $\star\star$

$\star\star$ Exercice 3.3 (Exercice 24)

(1) Soit $\alpha > 0$. Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^\alpha}{2^n}$ est convergente. On note $S(\alpha)$ sa somme.

(2) Dans cette question, on pose $\alpha = 1$ et on note $s = S(1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$. En effectuant le changement d'indice $m = n - 1$, montrez que $s = 2\left(s - \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^m}\right)$ et donnez la valeur de $S(1)$.

(3) En vous inspirant de ce qui précède, donnez une expression de $S(2)$ en fonction de $S(1)$ et $S(0)$, puis sa valeur.

(4) Montrez que la famille $\left(\dfrac{(-1)^{m+n}\,m}{2^{m+n}}\right)_{m,n\geqslant 0}$ est sommable et calculez sa somme.

Correction 3.4
★★ À venir ★★

★★ Exercice 3.5 (Exercice 25)
Soit a un complexe tel que $|a| < 1$.

En utilisant un produit de Cauchy, montrez que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, a^n = \left(\frac{1}{1-a}\right)^2$.

Correction 3.6
★★ À venir ★★

★★ Exercice 3.7 (Exercice 26)
(1) Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$ et $N \in \mathbb{N}$, que vaut $\displaystyle\sum_{n=N}^{+\infty} z^n$?

(2) Soit $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| < 1$. Montrez que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{1-x^{2p+1}}$.

Correction 3.8
★★ À venir ★★

★★ Exercice 3.9 (Exercice 27)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On rappelle que $H_n = \ln n + \gamma + o\,(1)$.

(1) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrez que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,(n+m)} \underset{m\longrightarrow+\infty}{\sim} \frac{\ln m}{m}$.

(2) Montrez que la famille $\left(\dfrac{(-1)^m}{m\,(m+n^2)}\right)_{m,n\geqslant 1}$ est sommable.

(3) Montrez que la famille $\left(\dfrac{(-1)^m}{(m+n)\,(m+n-1)}\right)_{m,n\geqslant 1}$ est sommable et donnez la valeur de sa somme.

Correction 3.10
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆⋆ Exercice 3.11 (Exercice 28)
Pour $n \geqslant 2$, on note $P(n)$ le plus grand diviseur premier de n. On note $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, ... la suite croissante des nombres premiers.

(1) Montrez que pour tout $k \geqslant 3$, $p_{k-1} \leqslant p_k - 2$, puis $\dfrac{p_k}{p_k - 1} \leqslant \sqrt{\dfrac{p_k}{p_{k-1}}}$.

(2) Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{nP(n)}$ converge (indication : pensez à une sommation par paquets).

Correction 3.12
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆⋆ Exercice 3.13 (Exercice 29)
Soit u une suite complexe.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $H_x = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > x\}$, son adhérence est $\overline{H_x} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geqslant x\}$.

(1) Montrez que s'il existe $s_0 \in \mathbb{C}$ tel que la famille $\left(\dfrac{u_n}{n^{s_0}}\right)_{n \geqslant 1}$ est sommable, alors pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$, la famille $\left(\dfrac{u_n}{n^s}\right)_{n \geqslant 1}$ est sommable.

(2) Quand la famille $\left(\dfrac{u_n}{n^s}\right)_{n \geqslant 1}$ est sommable, on pose $f_u(s) = \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{u_n}{n^s}$.
Montrez que l'ensemble de définition de f_u est, s'il est non-vide, $\mathbb{C}$, un ensemble H_x ou un ensemble $\overline{H_x}$.

(3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $D_n = \left\{(d, d') \in (\mathbb{N}^*)^2 \,\middle|\, dd' = n\right\}$. Montrez que $(\mathbb{N}^*)^2 = \displaystyle\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} D_n$.

(4) Soient $(a_n), (b_n)$ deux suites complexes et $s \in \mathbb{C}$ tels que les familles $\left(\dfrac{a_n}{n^s}\right)_{n \geqslant 1}$ et $\left(\dfrac{b_n}{n^s}\right)_{n \geqslant 1}$ soient sommables.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \displaystyle\sum_{d \mid n} a_d b_{n/d}$. Montrez que la famille $\left(\dfrac{c_n}{n^s}\right)_{n \geqslant 1}$ est sommable et que $f_c(s) = f_a(s) \times f_b(s)$.

Correction 3.14
⋆⋆ À venir ⋆⋆

★★ Exercice 3.15 (Exercice 30)
Cet exercice prolonge le précédent.

On rappelle la définition de l'indicatrice d'Euler : pour $n \in \mathbb{N}^*$, φ_n est le cardinal de l'ensemble $\{k \in [\![1\ ;\ n]\!] \mid k \wedge n = 1\}$.

On définit par récurrence la suite de Möbius : $\mu_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 2$, $\mu_n = -\sum_{\substack{d|n \\ d<n}} \mu_d$.

Enfin, on note δ_n le nombre de diviseurs de n et σ_n la somme des diviseurs de n.

On pose $\zeta = f_1$, $\xi = f_\varphi$ et $M(s) = f_\mu$.

(1) Montrez que l'ensemble de définition (au sens précédent) de ζ est H_1. Montrez que ξ est définie sur H_2.

(2) On admet la relation suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n = \sum_{d|n} \varphi_d$. Donnez une relation valable sur H_2 liant les fonctions ξ et ζ. Justifiez alors que l'ensemble de définition de ξ est H_2.

(3) On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\mu_n| \leqslant 1$. Donnez une relation entre M et ζ et précisez l'ensemble de définition de M.

(4) Déduisez-en la relation : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\varphi_n}{n} = \sum_{d|n} \dfrac{\mu_d}{d}$ en admettant l'unicité des coefficients u_n d'une fonction f_u.

(5) Exprimez f_δ et f_σ en fonction de ζ et précisez leurs ensembles de définition.

Correction 3.16
★★ À venir ★★

Chapitre 4

Rappels et compléments d'algèbre linéaire

$\star$ Exercice proche du cours
$\star\star$ Exercice de difficulté normale
$\star\star\star$ Exercice difficile (voire très difficile)
+ Exercice à faire en priorité

+ $\star\star$ Exercice 4.1 (Exercice 1)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_1, \dots, u_n)$ une famille libre de E.

(1) Pour $i \in [\![1 \,;\, n]\!]$, on pose $c_i = \displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq i}} u_k$. Montrez que la famille $(c_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre.

(2) Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. On pose $s = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ et pour tout $i \in [\![1 \,;\, n]\!]$, $v_i = s + u_i$. Montrez que la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est liée ssi $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = -1$.

(3) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On pose $s = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i$ et pour tout $i \in [\![1 \,;\, n]\!]$, $v_i = s + \lambda u_i$. Montrez qu'il existe exactement deux valeurs de λ pour lesquelles la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est liée.

Correction 4.2
$\star\star$ **À venir** $\star\star$

+ $\star\star$ Exercice 4.3 (Exercice 2)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in [\![0 \,;\, n]\!]$, on pose $P_k = X^k (1 - X)^{n-k}$. Montrez que la famille $\mathscr{F}_n = (P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Correction 4.4
$\star\star$ **À venir** $\star\star$

$+\star\star$ Exercice 4.5 (Exercice 3)
Soit f une application d'un ensemble Ω dans $\mathbb{C}$ qui prend une infinité de valeurs.

Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\left(1, f, f^2, \ldots, f^n\right)$ est libre dans l'espace $\mathscr{F}(\Omega, \mathbb{C})$.

Correction 4.6
$\star\star$ À venir $\star\star$

$+\star\star$ Exercice 4.7 (Exercice 4)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in [\![0\,;n]\!]$, on pose $P_k = (X+k)^n$. Montrez que la famille $\mathscr{F}_n = (P_0, \ldots, P_n)$ est libre.

Correction 4.8
$\star\star$ À venir $\star\star$

$\star$ Exercice 4.9 (Exercice 5)
Soit $a \in \mathbb{C}^*$. $\mathbb{C}$ est vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à z associe $z + a\bar{z}$.

(1) Montrez que f est linéaire.

(2) Montrez que si $|a| \neq 1$, alors f est un automorphisme de $\mathbb{C}$.

(3) Déterminez le noyau et l'image de f dans le cas où $a = \mathrm{e}^{i\alpha}$ (on pourra utiliser l'écriture trigonométrique des complexes).

Correction 4.10
$\star\star$ À venir $\star\star$

$+\star$ Exercice 4.11 (Exercice 6)
Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ qui conserve le degré : pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg f(P) = \deg P$.

Montrez que f est un automorphisme de $\mathbb{K}[X]$ (on pourra étudier les restrictions de f à $\mathbb{K}_n[X]$).

Correction 4.12
⋆⋆ À venir ⋆⋆

+ ⋆ ⋆ Exercice 4.13 (Exercice 7)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $P \in \mathbb{K}_n[X]$, on pose $f(P) = \left(X^2 - 1\right) P' - nXP$.

(1) Montrez que f est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

(2) Montrez que si $P \in \ker f$, alors $X^2 - 1$ divise P, puis justifiez qu'il existe $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P = \left(X^2 - 1\right)^\alpha Q$ et $(Q(1) \neq 0$ ou $Q(-1) \neq 0)$.

(3) Montrez que si n est impair, alors f est un automorphisme.

(4) Montrez que si n est pair, alors $\ker f$ est une droite vectorielle. Déduisez-en la dimension de $\operatorname{Im} f$.

Correction 4.14
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆⋆ Exercice 4.15 (Exercice 8)
On pose $E = \mathbb{C}[X]$. Pour $P \in E$, on pose $f(P) = \left(X^2 - 1\right) P' - 2XP(X)$.

(1) Montrez que $f \in \mathscr{L}(E)$.

(2) Déterminez $\ker f$.

(3) Montrez que $\operatorname{Im} f = \{Q \in C[X] \mid Q'(1) = Q(1) \text{ et } Q'(-1) = -Q(-1)\}$. Indication : restreindre à $\mathbb{C}_n[X]$.

Correction 4.16
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆ Exercice 4.17 (Exercice 9)
Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$.

Montrez que $f(\ker(g \circ f)) = \ker g \cap \operatorname{Im} f$.

Correction 4.18
$\star\star$ **À venir** $\star\star$

$+\star\star$ Exercice 4.19 (Exercice 10)
Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $(f, g) \in \mathscr{L}(E, F) \times \mathscr{L}(F, G)$.

(1) Montrez que $\ker(g \circ f) = \ker f \iff \ker g \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

(2) Montrez que $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g \iff \ker g + \operatorname{Im} f = F$.

Correction 4.20
$\star\star$ **À venir** $\star\star$

$\star\star\star$ Exercice 4.21 (Exercice 11)
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On dit que $g \in \mathscr{L}(F, E)$ est un inverse à droite de f quand $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

(1) Montrez que si f possède deux inverses à droite différents, alors f en possède une infinité.

(2) Montrez que si f possède un unique inverse à droite, alors f est un isomorphisme (vous admettrez l'existence d'un supplémentaire de tout sous-espace vectoriel).

Correction 4.22
$\star\star$ **À venir** $\star\star$

$+\star\star$ Exercice 4.23 (Exercice 12)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E.

(1) Montrez que $p + q$ est un projecteur ssi $p \circ q = q \circ p = 0$.

(2) Dans ce cas, montrez alors que $\operatorname{Im}(p + q) = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$ et $\ker(p + q) = \ker p \cap \ker q$.

Correction 4.24
$\star\star$ **À venir** $\star\star$

⋆⋆ Exercice 4.25 (Exercice 13)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E tels que $p \circ q = 0$. Soit $r = p + q - q \circ p$.

Montrez que r est un projecteur et précisez ses éléments caractéristiques.

Correction 4.26
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆⋆ Exercice 4.27 (Exercice 14)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On suppose qu'il existe $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$ tel que $f \circ g - g \circ f = \mathrm{id}_E$.

(1) Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f \circ g^n - g^n \circ f = ng^{n-1}$.

(2) Déduisez-en que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $\left(g^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est libre dans $\mathscr{L}(E)$.

(3) Si E est de dimension finie $p \geqslant 1$, que pouvez-vous conclure ?

Correction 4.28
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆⋆ Exercice 4.29 (Exercice 15)
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = \mathrm{id}_E$. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $u \in E$, on veut résoudre l'équation $x + af(x) = u$ d'inconnue $x \in E$.

(1) Montrez que pour toutes les valeurs de a, sauf une seule a_0, l'équation a une unique solution que vous calculerez.

(2) Dans le cas où $a = a_0$, donnez une condition nécessaire sur u pour qu'il existe une solution, puis si cette condition est satisfaite, déterminez une solution particulière de l'équation qui soit combinaison linéaire de u et $f(u)$. Concluez.

Correction 4.30
⋆⋆ À venir ⋆⋆

$+\star\star$ Exercice 4.31 (Exercice 16)
Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(E)$.

(1) Montrez que $\operatorname{Im} f = \ker f$ et, ssi n est pair, $\operatorname{rg} f = \dfrac{n}{2}$ et $f^2 = 0$.

(2) Donnez un exemple d'une telle application linéaire f.

(3) Si les conditions de la question (1) sont satisfaites, alors on pose $r = \dfrac{n}{2}$: montrez qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_r & 0 \end{pmatrix}$ (matrice par blocs).

Correction 4.32
$\star\star$ À venir $\star\star$

$+\star\star$ Exercice 4.33 (Exercice 17)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrez l'équivalence

$$E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f \iff \ker f^2 = \ker f \iff \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2.$$

Correction 4.34
$\star\star$ À venir $\star\star$

$\star$ Exercice 4.35 (Exercice 18)
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $(f, g) \in \mathscr{L}(E, F)^2$. Montrez que $|\operatorname{rg} f - \operatorname{rg} g| \leqslant \operatorname{rg}(f + g) \leqslant \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$.

Correction 4.36
$\star\star$ À venir $\star\star$

$\star\star$ Exercice 4.37 (Exercice 19)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$. On suppose que $u \circ v = 0$ et $u + v \in \mathrm{GL}(E)$. Démontrez que $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v = \dim E$.

Correction 4.38
$\star\star$ À venir $\star\star$

★★ Exercice 4.39 (Exercice 20)
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.

(1) Soit U un sous-espace vectoriel de E. On pose $\mathscr{A} = \{u \in \mathscr{L}(E,F) \mid U \subseteq \ker u\}$. Montrez que $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E,F)$ tel que pour tout $(f,u) \in \mathscr{L}(E) \times \mathscr{A}$, $fu \in \mathscr{A}$ et calculez sa dimension.

(2) Montrez que la réciproque est vraie : si $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E,F)$ tel que pour tout $(f,u) \in \mathscr{L}(E) \times \mathscr{A}$, $fu \in \mathscr{A}$, alors il existe U un sous-espace vectoriel de E tel que $\mathscr{A} = \{u \in \mathscr{L}(E,F) \mid U \subseteq \ker u\}$.

Correction 4.40
★★ À venir ★★

+★ Exercice 4.41 (Exercice 21)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1. Montrez que A peut s'écrire comme le produit d'une matrice colonne par une matrice ligne. Déduisez-en $A^2 = \operatorname{tr}(A)\, A$.

Correction 4.42
★★ À venir ★★

+★★ Exercice 4.43 (Exercice 22)
Soit f une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$, $f(AB) = f(BA)$. Montrez que f est proportionnelle à la trace (indication : faire intervenir la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$).

Correction 4.44
★★ À venir ★★

★★★ Exercice 4.45 (Exercice 23)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et G un sous-groupe de cardinal n de $\mathrm{GL}(E)$.

On pose $F = \{x \in E \mid \forall g \in G,\ g(x) = x\}$.

Montrez que $\dim F = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{g \in G} \operatorname{tr} g$. Indication : on pourra utiliser $p = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{g \in G} g$.

Correction 4.46
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆ Exercice 4.47 (Exercice 24)
Montrez qu'il n'existe pas de couple de matrices $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ tels que $AB - BA = I_n$.

Correction 4.48
⋆⋆ À venir ⋆⋆

+⋆ Exercice 4.49 (Exercice 25)
Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n. On suppose que pour tout $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\operatorname{tr}(AX) = \operatorname{tr}(BX)$. Montrez que $A = B$.

Correction 4.50
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆ Exercice 4.51 (Exercice 26)
Soient u, v les deux suites réelles telles que $u_0 = 1$, $v_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -3u_n + 10v_n$ et $v_{n+1} = -3u_n + 8v_n$.

Donnez des expressions de u_n et v_n en fonction de n.

Correction 4.52
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆⋆ Exercice 4.53 (Exercice 27)
Soient u, v, w les trois suites réelles telles que $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{3}{2}u_n - \dfrac{1}{2}v_n + \dfrac{1}{2}w_n \\ v_{n+1} = 5u_n - \dfrac{5}{2}v_n + 2w_n \\ w_{n+1} = 4u_n - \dfrac{5}{2}v_n + 2w_n \end{cases}$$

Donnez des expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n et leurs limites quand n tend vers $+\infty$.

Correction 4.54
⋆⋆ À venir ⋆⋆

+ ⋆ ⋆ Exercice 4.55 (Exercice 28)
Soient $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$ et $C \in \mathscr{M}_{pq}(\mathbb{K})$. On suppose connaître P un polynôme annulateur de A et Q un polynôme annulateur de B.

On pose $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p+q}(\mathbb{K})$.

(1) Montrez que PQ est un polynôme annulateur de M dans le cas où $C = 0$.

(2) Montrez que ce résultat reste vrai même si C n'est pas nulle. Indication : penser à un produit par blocs.

Correction 4.56
⋆⋆ À venir ⋆⋆

+ ⋆ ⋆ Exercice 4.57 (Exercice 29)
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et P un polynôme annulateur de A. On définit $B \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{K})$ par blocs : $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

(1) Calculez pour $k \in \mathbb{N}$ la matrice B^k en distinguant les cas k pair et k impair.

(2) On pose $Q(X) = P\left(X^2\right)$. Montrez que Q est un polynôme annulateur de B.

Correction 4.58
⋆⋆ À venir ⋆⋆

+ ⋆ ⋆ Exercice 4.59 (Exercice 30)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On définit $B \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{K})$ par blocs : $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$.

(1) Calculez pour $k \in \mathbb{N}$ la matrice B^k.

(2) Déterminez un polynôme annulateur de B.

Correction 4.60
⋆⋆ À venir ⋆⋆

+ ⋆ ⋆ Exercice 4.61 (Exercice 31)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{K}_n[X]$. On pose $d : P \longmapsto P'$, endomorphisme de E, et $f : P \longmapsto P + P'$.

(1) Donnez un polynôme annulateur de d. Déduisez-en un polynôme annulateur de f.

(2) Montrez que f est un automorphisme, puis exprimez son inverse à l'aide de f.

(3) Vérifiez que $f^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k d^k$.

Correction 4.62
⋆⋆ À venir ⋆⋆

+ ⋆ ⋆ Exercice 4.63 (Exercice 32)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $f(M) = M + \operatorname{tr}(M) A$.

(1) Montrez que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

(2) Déterminez un polynôme annulateur de f de degré 2.

(3) Dans quels cas f est-il un automorphisme ? Calculez f^{-1} quand c'est possible.

(4) Dans le cas contraire, vérifiez que f est un projecteur et déterminez ses éléments caractéristiques.

Correction 4.64
⋆⋆ À venir ⋆⋆

+ ⋆ ⋆ Exercice 4.65 (Exercice 33)
Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$.

On suppose que f possède un polynôme annulateur P vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.

Montrez qu'on a alors $\operatorname{Im} f \oplus \ker f = E$.

Correction 4.66
★★ À venir ★★

Exercice 4.67 (Oral CCINP, 1)
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et p, q deux endomorphismes de E.

On suppose que $p + q = \mathrm{id}_E$ et $\operatorname{rg} p + \operatorname{rg} q \leqslant \dim E$.

Montrez que p et q sont deux projecteurs.

Correction 4.68
★★ À venir ★★

Exercice 4.69 (Oral IMT, 2)
Soient E un espace vectoriel de dimension supérieure à 2 et f, g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g \circ f = f$.

(1) Montrez que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des projecteurs.

(2) Que peut-on dire des rangs de f, $f \circ g$ et $g \circ f$?

(3) Montrez que $f \circ g$ est un projecteur sur $\operatorname{Im} f$, parallèlement à un sous-espace contenant $\ker g$.

(4) On suppose désormais qu'on a aussi $g \circ f \circ g = g$. Que dire des rangs de f et g ?

(5) Montrez que $E = \operatorname{Im} f \oplus \ker g$.

Correction 4.70
★★ À venir ★★

Exercice 4.71 (Oral TPE, 3)
Soient E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$.

(1) Montrez que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Im} f^{k+1} \subseteq \operatorname{Im} f^k$.

(2) Montrez que s'il existe un entier p tel que $\operatorname{Im} f^{p+1} = \operatorname{Im} f^p$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Im} f^{p+k} \subseteq \operatorname{Im} f^p$.

(3) Déduisez-en que $\operatorname{Im} f^{n+1} = \operatorname{Im} f^n$.

Correction 4.72
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 4.73 (Oral TPE, 4)
Montrez que $P \longmapsto P - P'$ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et donnez son endomorphisme réciproque.

Correction 4.74
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 4.75 (Oral Centrale, 5)
Soient E un espace vectoriel de dimension finie non-nulle et u, v deux endomorphismes de E.

(1) Montrez que $|\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v| \leqslant \operatorname{rg}(u + v) \leqslant \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v$.

(2) Soient F un sous-espace de E et G, H deux supplémentaires de F dans E. On pose p le projecteur sur F parallèlement à G et q celui sur H parallèlement à F. Montrez que $\operatorname{rg}(p + q) = \operatorname{rg} p + \operatorname{rg} q$.

Correction 4.76
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 4.77 (Oral Centrale, 6)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ une famille libre de E^* (note : E^* est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des formes linéaires sur E) et $\psi \in E^*$.

(1) Montrez que $\psi \in \operatorname{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_p) \iff \bigcap_{i=1}^{p} \ker \varphi_i \subseteq \ker \psi$.

(2) On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrez que les conditions de la question précédente sont encore équivalentes à l'existence d'un réel $M > 0$ tel que $\forall x \in E,\ \ |\psi(x)| \leqslant M \max_{1 \leqslant i \leqslant p} |\varphi_i(x)|$.

Correction 4.78
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 4.79 (Oral CCMP, 7)
Soient n, k deux entiers tels que $2 \leqslant k \leqslant n$. On pose $A_k = \left(a_{i\,j}^{(k)}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i\,j}^{(k)} = 1$ si $i - j = k - 1$, les autres coefficients étant nuls.

(1) Calculez ${}^t A_k A_k$.

Soit p un projecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que $p \neq \mathrm{id}$.

(2) Justifiez que $\operatorname{rg} p < n$.

(3) Montrez que p est la composée de deux endomorphismes nilpotents.

Correction 4.80
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 4.81 (Oral CCMP, 8)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f, g deux endomorphismes de E.

On suppose f inversible et g de rang 1.

Montrez que $f + g$ est inversible ssi $\operatorname{tr}\left(g \circ f^{-1}\right) \neq -1$.

Correction 4.82
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 4.83 (Oral CCMP, 9)
Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{pn}(\mathbb{R})$.

Montrez que $p + \operatorname{rg}(I_n + AB) = n + \operatorname{rg}\left(I_p + BA\right)$.

Correction 4.84
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 4.85 (Oral CCMP, 10)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $E = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid AMB = 0\}$.

Montrez que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et donnez sa dimension.

Correction 4.86

$\star\star$ **À venir** $\star\star$

Exercice 4.87 (Oral CCMP, 11)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résolvez dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ l'équation $M = \operatorname{Com} M$.

Correction 4.88

$\star\star$ **À venir** $\star\star$

Chapitre 5

Réduction des endomorphismes

Sommaire

Exercices

⋆ Exercice proche du cours
⋆⋆ Exercice de difficulté normale
⋆ ⋆ ⋆ Exercice difficile (voire très difficile)
+ Exercice à faire en priorité

⋆⋆ Exercice 5.1 (Exercice 1)

(1) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que P ne soit pas constant. On note $a_1, \ldots, a_m$ les racines distinctes de P et $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ leurs ordres de multiplicité. Rappelez la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.

(2) Application : déterminez les éléments propres de l'endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$ défini par $f(P) = (2X+1)P - \left(X^2-1\right)P'$. On rappelle que la décomposition en éléments simples est unique.

(3) Même question avec $f(P) = \left(X^3+X\right)P' - \left(3X^2-1\right)P$.

Correction 5.2

⋆⋆ À venir ⋆⋆

★★ Exercice 5.3 (Exercice 2)
Soit $E = \mathscr{C}^0([0\,;1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on définit l'application $\varphi(f) : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de la façon suivante : $\varphi(f)(0) = f(0)$ et pour tout $x \in]0\,;1]$, $\varphi(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

(1) Montrez que φ est un endomorphisme de E.

(2) Montrez que 0 n'est pas valeur propre de φ.

(3) Montrez que 1 est valeur propre de φ et donnez le sous-espace propre associé.

(4) Déterminez les autres valeurs propres de φ.

Correction 5.4
★★ À venir ★★

★★ Exercice 5.5 (Exercice 3)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $f(M) = \lambda M + \mathrm{tr}(M)A$.

(1) Justifiez rapidement que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

(2) Déterminez un polynôme annulateur de f de degré 2.

(3) Déduisez-en les éléments propres de f.

(4) À quelle condition l'endomorphisme f est-il inversible ?

Correction 5.6
★★ À venir ★★

★★ Exercice 5.7 (Exercice 4)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $f(M) = AM$.

Montrez que $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A)$. Pour tout λ valeur propre de f, donnez une relation entre les dimensions des sous-espaces propres $\mathrm{sep}(f, \lambda)$ et $\mathrm{sep}(A, \lambda)$.

Correction 5.8
★★ À venir ★★

⋆⋆ Exercice 5.9 (Exercice 5, matrices stochastiques)
Soit $A = \left(a_{i\,j}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall (i, j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2,\ \ a_{i\,j} \geqslant 0 \text{ et } \forall i \in [\![1\,;\,n]\!],\ \ \sum_{j=1}^{n} a_{i\,j} = 1.$$

(1) Montrez que 1 est valeur propre de A.

(2) Montrez que toutes les valeurs propres complexes de A sont de module inférieur ou égal à 1.

(3) On suppose que A est strictement stochastique, c'est-à-dire que A est stochastique et que ses coefficients sont strictement positifs. Montrez que 1 est la seule valeur propre de A de module 1.

Correction 5.10
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆⋆ Exercice 5.11 (Exercice 6)
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq b$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & \cdots & a \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & 0 \end{pmatrix}$.

(1) On pose J la matrice remplie de 1. Montrez que $t \longmapsto \det(XI_n - A - tJ)$ est une fonction polynôme en t de degré au plus 1, puis calculez $\det(XI_n - A - tJ)$ en fonction de t.

(2) Montrez que le polynôme caractéristique de A est $\dfrac{1}{b-a}\left(b\,(X+a)^n - a\,(X+b)^n\right)$.

(3) Montrez que si $b = -a$, alors les images dans $\mathbb{C}$ des valeurs propres de A sont sur une droite que vous préciserez, sinon elles sont sur un cercle.

Correction 5.12
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆⋆ Exercice 5.13 (Exercice 7)
Soient $n \geqslant 2$, $U \in \mathscr{M}_{n\,1}(\mathbb{R})$ et $A = U\,{}^tU$. On note ${}^tUU = (s)$ qui est une matrice carrée à un seul élément.

(1) Montrez que le polynôme $X^2 - sX$ est annulateur de A. Déduisez-en que A a au plus deux valeurs propres.

(2) Quel est le rang de A ? Précisez les valeurs propres de A.

(3) Déterminez le polynôme caractéristique de A.

(4) Déterminez les sous-espaces propres de A.

Correction 5.14
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆ Exercice 5.15 (Exercice 8)

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.

(1) Déterminez le polynôme caractéristique de A.

(2) Déduisez-en sans calcul supplémentaire que A est diagonalisable.

(3) Déterminez les sous-espaces propres de A.

(4) Diagonalisez A, c'est-à-dire explicitez une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

(5) Calculez A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction 5.16
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆ Exercice 5.17 (Exercice 9, réduction en élégance)

Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 4 & 8 & -12 \end{pmatrix}$.

(1) Calculez efficacement le rang de B. Déduisez-en une valeur propre de B ainsi que la dimension du sous-espace propre associé.

(2) Démontrez sans calculer le polynôme caractéristique que B admet une autre valeur propre et qu'elle est simple.

(3) Déduisez-en le polynôme caractéristique de B. Vérifiez le résultat en le calculant grâce à sa définition.

(4) La matrice B est-elle diagonalisable ?

Correction 5.18

⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆ Exercice 5.19 (Exercice 10)

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 7 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Correction 5.20

⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆ Exercice 5.21 (Exercice 11)

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Correction 5.22

⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆ Exercice 5.23 (Exercice 12)

Déterminez une condition nécessaire et suffisante sur le triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pour que la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Correction 5.24

⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆ Exercice 5.25 (Exercice 13)

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui n'est pas de la forme λI_2.

Montrez que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ ssi $(a-d)^2 + 4bc \neq 0$.

À quelle condition A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$?

Correction 5.26

⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆⋆ Exercice 5.27 (Exercice 14)

Soit $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & -5 \\ -5 & 3 & 3 \\ -5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. On recherche les éventuelles racines carrées de A, c'est-à-dire les matrices $R \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $R^2 = A$.

(1) Montrez que A est diagonalisable et déterminez une matrice D diagonale semblable à A avec le moins de calculs possible.

(2) Soit $S \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ une racine carrée de D. Montrez que S et D commutent puis montrez que S est diagonale.

(3) Déterminez les racines carrées S de D.

(4) Déduisez-en toutes les racines carrées R de A. Combien y en a-t-il ? Pourquoi ?

(5) Énoncez des conjectures quant au nombre de racines carrées d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ plus générale, en discutant selon la nature de ses éléments propres.

Correction 5.28

⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆⋆ Exercice 5.29 (Exercice 15)

Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(1) Diagonalisez la matrice A.

(2) On suppose que F est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ stable par u. Montrez que F est engendré par une famille de vecteurs propres de u.

(3) Déterminez tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par u.

Correction 5.30
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆ Exercice 5.31 (Exercice 16)

Même exercice avec $A = \begin{pmatrix} -1 & -6 & -2 \\ 2 & 7 & 2 \\ -6 & -18 & -5 \end{pmatrix}$.

Correction 5.32
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆ Exercice 5.33 (Exercice 17)
Montrez que les suites $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence suivante sont combinaisons linéaires de trois suites géométriques réelles (α^n), (β^n) et (γ^n) : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+3} = -\dfrac{5}{12}u_{n+2} + \dfrac{1}{2}u_{n+1} - \dfrac{1}{12}u_n$.

Déterminez à quelle condition sur (u_0, u_1, u_2) ces suites sont convergentes.

Correction 5.34
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆ Exercice 5.35 (Exercice 18)
Même exercice avec $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+3} = \dfrac{3}{2}u_{n+2} - \dfrac{3}{4}u_{n+1} + \dfrac{1}{4}u_n$ en prenant des suites géométriques complexes.

Montrez que les suites (u_n) sont combinaisons linéaires de trois suites réelles simples que l'on précisera.
Déterminez à quelle condition sur (u_0, u_1, u_2) ces suites sont convergentes.

Correction 5.36
⋆⋆ À venir ⋆⋆

★ Exercice 5.37 (Exercice 19)
Les matrices suivantes sont-elles trigonalisables ? Donnez alors, quand c'est possible, une matrice triangulaire supérieure semblable.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Correction 5.38
★★ À venir ★★

★ Exercice 5.39 (Exercice 20)

Soient $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) Déterminez le polynôme caractéristique de C. Est-elle diagonalisable ? Trigonalisable ?

(2) Déterminez les éléments propres de C.

(3) Montrez que la matrice C est semblable à la matrice T. On pourra considérer l'endomorphisme u canoniquement associé à C et construire, par analyse-synthèse, une base $\mathscr{B}$ où la matrice de u est T.

(4) Montrez que T peut s'écrire $D + N$ où D est diagonale, N est nilpotente et D et N commutent. Déduisez-en, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T^n puis C^n.

(5) On considère trois suites $(x_n), (y_n), (z_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - 3y_n - z_n \\ y_{n+1} = x_n - 2y_n - z_n \\ z_{n+1} = -2x_n + 6y_n + 3z_n \end{cases}$$

Explicitez x_n, y_n, z_n en fonction de n et de x_0, y_0, z_0.

Correction 5.40
★★ À venir ★★

★★ Exercice 5.41 (Exercice 21)
Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $u^2 + u + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} = 0$.

(1) Soient F un sous-espace stable par u et $x \notin F$. Montrez que $\Pi_x = \mathrm{Vect}(x, u(x))$ est un plan, qu'il est stable par u et qu'il est en somme directe avec F.

(2) Montrez qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, de blocs $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Qu'en déduisez-vous concernant n ?

(3) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de u dans la base canonique. Réduisez A dans $\mathbb{C}$.

(4) Retrouvez que A est $\mathbb{R}$-semblable à une matrice diagonale par blocs, de blocs R.

Correction 5.42
★★ À venir ★★

★★ Exercice 5.43 (Exercice 22)
Soient $p \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathrm{GL}(E)$.

Montrez que f est diagonalisable ssi f^p est diagonalisable.

Est-ce encore vrai si on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$?

Correction 5.44
★★ À venir ★★

★★ Exercice 5.45 (Exercice 23)
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$.

(1) Montrez que si f est diagonalisable, alors f^2 est diagonalisable et $\mathrm{rg}\, f^2 = \mathrm{rg}\, f$.

(2) Montrez que si λ est une valeur propre de f^2 non-nulle et μ est une racine carrée de λ, alors $\mathrm{sep}\left(f^2, \lambda\right) = \ker(f - \mu\mathrm{id}) \oplus \ker(f + \mu\mathrm{id})$.

(3) Montrez que la réciproque de la proposition de la question (1) est vraie.

Correction 5.46
★★ À venir ★★

$\star\star$ Exercice 5.47 (Exercice 24, spectre du polynôme d'une matrice)
Soient $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable et $Q \in \mathbb{K}[X]$.

(1) Montrez que la matrice $Q(M)$ est également diagonalisable. Exprimez le spectre de $Q(M)$ en fonction des valeurs propres de M.

(2) Précisez les sous-espaces propres de $Q(M)$.

(3) Ces résultats restent-ils valables si M est seulement trigonalisable ? Sans hypothèse sur M ?

Correction 5.48
$\star\star$ À venir $\star\star$

$\star\star\star$ Exercice 5.49 (Exercice 25)
Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = I_2$. Montrez que $A^{12} = I_2$.

Correction 5.50
$\star\star$ À venir $\star\star$

$\star\star$ Exercice 5.51 (Exercice 26)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrez que A est nilpotente ssi pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{tr} A^k = 0$.

Correction 5.52
$\star\star$ À venir $\star\star$

$\star\star$ Exercice 5.53 (Exercice 27)
Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. On note $C(f)$ le sous-espace vectoriel des endomorphismes de E qui commutent avec f.

(1) Démontrez que $g \in C(f)$ ssi les sous-espaces propres de f sont stables par g.

(2) Déduisez-en que $\dim C(f) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \omega_\lambda^2$ où ω_λ désigne la multiplicité de la valeur propre λ.

(3) On suppose que les valeurs propres de f sont simples. Démontrez que $\left(\mathrm{id}, f, \dots, f^{n-1}\right)$ est une base de $C(f)$.

Correction 5.54
$\star\star$ **À venir** $\star\star$

$\star\star$ **Exercice 5.55 (Exercice 28)**

(1) Montrez que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

(2) Montrez que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs et que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ne l'est pas. Déterminez alors les composantes connexes par arcs de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

(3) Montrez que l'ensemble $D_n(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrez la même chose avec l'ensemble $D_n^+(\mathbb{C})$ des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dont toutes les valeurs propres sont distinctes. Montrez que l'intérieur de $D_n(\mathbb{C})$ est $D_n^+(\mathbb{C})$.

(4) Montrez que $D_2(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(5) Montrez que l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un fermé et qu'il est l'adhérence de $D_n(\mathbb{R})$.

(6) Soit $r \in [\![1\ ;\ n]\!]$. Montrez que l'ensemble des matrices de rang inférieur à r est un fermé et qu'il est l'adhérence de l'ensemble des matrices de rang r.

Correction 5.56
$\star\star$ **À venir** $\star\star$

$\star\star\star$ **Exercice 5.57 (Exercice 29)**
Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

(1) Montrez que si l'une des deux matrices est inversible, alors AB et BA ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes ordres de multiplicité.

(2) Montrez que ce résultat reste vrai même sans suppose l'une des deux matrices inversible.

Correction 5.58
$\star\star$ **À venir** $\star\star$

Exercice 5.59 (Oral IMT, 1)
Soient u, v, w trois suites vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 4u_n - 3v_n - 3w_n \\ v_{n+1} = 3u_n - 2v_n - 3w_n \\ w_{n+1} = 3u_n - 3v_n - 2w_n \end{cases}$$

Exprimez u_n, v_n, w_n en fonction de n, u_0, v_0, w_0.

Correction 5.60
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 5.61 (Oral IMT, 2)
Déterminez les matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction 5.62
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 5.63 (Oral St-Cyr, 3)

Montrez que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a+b & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$ est diagonalisable et donnez ses éléments propres.

Correction 5.64
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 5.65 (Oral TPE, 4)

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$.

(1) Déterminez un polynôme annulateur de degré 3 de A.

(2) La matrice A est-elle inversible ?

(3) Est-elle diagonalisable ?

(4) Montrez que les valeurs propres de A^2 sont négatives ou nulles.

Correction 5.66
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Exercice 5.67 (Oral TPE, 5)
Montrez de deux façons différentes que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Correction 5.68
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Exercice 5.69 (Oral IMT, 6)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminez la limite quand $n \longrightarrow +\infty$ de $\begin{pmatrix} \cos \alpha/n & \sin \alpha/n \\ \sin \alpha/n & \cos \alpha/n \end{pmatrix}^n$.

Correction 5.70
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Exercice 5.71 (Oral IMT, 7)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^2 - 2A$ soit diagonalisable et 1 n'est pas valeur propre de A.

Montrez que A est diagonalisable.

Correction 5.72
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Exercice 5.73 (Oral CCINP, 8)
(1) Soient $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres. Montrez que $\operatorname{tr} M^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$.

(2) Pour $n \geqslant 3$, on pose A la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux situés sur les quatre bords, égaux à 1. Déterminez les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

Correction 5.74
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Exercice 5.75 (Oral CCINP, 9)
Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et $A = \left(\alpha^{i+j-2}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

(1) Calculez le rang de A. Déduisez-en ses valeurs propres.

(2) À quelle condition sur α la matrice A est-elle diagonalisable ?

Correction 5.76
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 5.77 (Oral CCINP, 10)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $f(M) = M + 2\,{}^tM$.

(1) Déterminez les valeurs et vecteurs propres de f.

(2) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Calculez sa trace et son déterminant.

Correction 5.78
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 5.79 (Oral Navale, 11)
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrez que 1 est la seule valeur propre de M ssi pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{tr} M^k = n$.

Correction 5.80
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 5.81 (Oral Navale, 12)

(1) Diagonalisez la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $B = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$. Montrez que B et C sont semblables.

Correction 5.82
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 5.83 (Oral CCINP, 13)

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

(1) Exprimez le rang de B en fonction du rang de A.

(2) Trouvez une relation entre χ_A et χ_B. Déduisez-en le spectre de B en fonction de celui de A.

(3) Déterminez les dimensions des sous-espaces propres de B en fonction de celles des sous-espaces propres de A.

(4) Montrez que B est diagonalisable ssi A est diagonalisable et inversible.

Correction 5.84
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 5.85 (Oral IMT, 14)
Soient E un espace muni d'une base $(e_1, \dots, e_n)$, v un vecteur de E et f l'endomorphisme de E tel que $f(e_1) = \cdots = f(e_n) = v$.

(1) Quel est le rang de f ?

(2) Discutez de la diagonalisabilité de f en fonction du vecteur v.

Correction 5.86
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 5.87 (Oral CCINP, 15)
(1) Montrez que si deux matrices U et V sont semblables, alors pour tout polynôme R, $R(U)$ et $R(V)$ sont semblables.

Soient A, B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$. On pose $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

(2) Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, exprimez $P(M)$ en fonction de $P(A)$, $P'(A)$ et B.

(3) Montrez que si A est diagonalisable et B est nulle, alors M est diagonalisable.

(4) Montrez la réciproque.

Correction 5.88

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 5.89 (Oral CCMP, 16)

(1) Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = B^2 = 0$ et $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$. Montrez que A et B sont semblables.

(2) Le résultat subsiste-t-il avec les hypothèses $A^3 = B^3 = 0$ et $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$?

Correction 5.90

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 5.91 (Oral CCMP, 17)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $(AB)^n = 0$. Montrez que $(BA)^n = 0$.

Correction 5.92

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 5.93 (Oral CCMP, 18)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathscr{L}(E)$.

(1) On suppose que $\operatorname{Vect}(u, v)$ contient un élément inversible. Montrez que $\ker u \cap \ker v = \{0\}$.

(2) Montrez que la réciproque est fausse.

(3) Montrez que si u et v commutent, alors la réciproque est vraie.

Correction 5.94

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 5.95 (Oral CCMP, 19)

Soient $u \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ non-nul tel que $u^3 = u^2$ et $C(u) = \left\{v \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right) \,\middle|\, u \circ v = v \circ u\right\}$.

Montrez que $C(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ et déterminez sa dimension.

Correction 5.96
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 5.97 (Oral CCMP, 20)
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et φ l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $\varphi : M \longmapsto M + \operatorname{tr}(AM)\,A$.

(1) Étudiez la diagonalisabilité de φ.

(2) Calculez $\operatorname{tr}\varphi$ et $\det\varphi$.

Correction 5.98
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 5.99 (Oral CCMP, 21)

Pour $c \in \mathbb{R}$, on pose $A(c) = \begin{pmatrix} -c & -1 & c \\ -1 & 1-c & 1 \\ c & -1 & -c \end{pmatrix}$.

(1) Déterminez les réels c tels que $A(c)$ ne pas diagonalisable.

(2) Soit d la plus petite de ces valeurs. Trouvez P inversible telle que $P^{-1}A(d)\,P$ soit triangulaire.

Correction 5.100
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 5.101 (Oral CCMP, 22)

(1) Soit $x = \cos\dfrac{2\pi}{5}$. Déterminez une équation du second degré à coefficients rationnels dont x est racine, puis donnez les valeurs de x et $\cos\dfrac{4\pi}{5}$.

(2) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 + A^3 + A^2 + A + I_n = 0$. On suppose que la trace de A est un rationnel. Montrez que 4 divise n.

Correction 5.102
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 5.103 (Oral CCMP, 23)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Montrez que $\det A > 0$.

Correction 5.104
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 5.105 (Oral CCMP, 24)

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$. Déterminez une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

Correction 5.106
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 5.107 (Oral CCMP, 25)

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & A \end{pmatrix}$. On suppose que B est diagonalisable. Montrez que A est diagonalisable et que $I_n - A$ est inversible.

Correction 5.108
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 5.109 (Oral CCMP, 26)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(A)$ est diagonalisable et $P'(A)$ est inversible. Montrez que A est diagonalisable.

Correction 5.110
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 5.111 (Oral CCMP, 27)
Soit $A = \left(a_{i\,j}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i\,i} = 0$ et $a_{i\,j} = i$ si $i \neq j$.

(1) Montrez qu'un réel λ est valeur propre de A ssi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+\lambda} = 1$.

(2) Montrez que A est diagonalisable. Listez ses valeurs propres avec un encadrement le plus précis possible.

(3) Déterminez la somme des valeurs propres de A. On note μ_n la plus grande d'entre elles. Trouvez $C \in \mathbb{R}$ tel que $\mu_n \sim Cn^2$ quand n tend vers l'infini.

Correction 5.112
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 5.113 (Oral Centrale, 28)

À quelles conditions $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 2 & 0 \\ d & e & f & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Le cas échéant, diagonalisez A.

Correction 5.114
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 5.115 (Oral Centrale, 29)

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{pmatrix}$.

(1) Donnez un vecteur propre évident de A.

(2) Calculez le polynôme caractéristique de A et donnez son spectre. Justifiez que A est diagonalisable.

(3) Exprimez, lorsqu'elle existe, la matrice inverse A^{-1} en fonction de I_4, A, A^2 et A^3.

Correction 5.116

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 5.117 (Oral Centrale, 30)

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_{AM+B} = \chi_{AM}$.

(1) Montrez qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $B^p = 0$.

(2) Montrez que $BA = 0$.

(3) Réciproquement, soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $B^n = BA = 0$. Montrez que pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_{AM+B} = \chi_{AM}$.

Correction 5.118

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 5.119 (Oral Centrale, 31)

Soient $\theta_1, \dots, \theta_p$ des réels distincts modulo 2π et $m_1, \dots, m_p$ des complexes non-nuls. Le but de l'exercice est de montrer que la suite $\left(m_1 e^{i\theta_1 n} + \cdots + m_p e^{i\theta_p n}\right)$ ne converge pas vers 0.

Par l'absurde, on suppose que $m_1 e^{i\theta_1 n} + \cdots + m_p e^{i\theta_p n} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$.

(1) On note $M_n = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1 n} & \dots\dots\dots\dots & e^{i\theta_p n} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{i\theta_1 (n+p-1)} & \dots\dots & e^{i\theta_p (n+p-1)} \end{pmatrix}$. Montrez que $Y_n = M_n \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_p \end{pmatrix} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$.

(2) Montrez que $|\det M_n|$ est une constante non-nulle.

(3) À l'aide du théorème de Cayley-Hamilton, exprimez M^{-1} et trouvez une contradiction.

Correction 5.120

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 5.121 (Oral ENS, 32)
On considère un automorphisme α de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui conserve le produit matriciel, c'est-à-dire tel que pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\alpha(AB) = \alpha(A)\alpha(B)$.

(1) Montrez que $\alpha(I_n) = I_n$.

(2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Montrez que $\alpha(A)$ l'est aussi.

(3) On suppose que A est semblable à une matrice diagonale D à coefficients diagonaux tous distincts. Montrez que $\alpha(A)$ est, elle aussi, semblable à D.

(4) Justifiez l'existence de $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\alpha(D) = PDP^{-1}$ puis montrez que $\alpha(E) = PEP^{-1}$ pour toute matrice diagonale E.

(5) Déterminer α.

Correction 5.122
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Problème – Matrices réelles sans valeur propre réelle

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non-nul. Pour alléger les notations, on pose $E_n = \mathcal{M}_{n\,1}(\mathbb{C})$. La lettre X est utilisée ici pour désigner une matrice-colonne, on évitera donc de l'utiliser pour désigner l'indéterminée des polynômes qui sera pour une fois notée x.

Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $S(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Toute matrice Z à coefficients complexes de $\mathcal{M}_{p\,q}(\mathbb{C})$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $X+iY$ où X, Y sont deux matrices réelles de $\mathcal{M}_{p\,q}(\mathbb{R})$. On appelle conjuguée de Z la matrice $\overline{Z} = X - iY$.

D'après les propriétés de la conjugaison dans $\mathbb{C}$, on en déduit que les règles de calcul sont les mêmes : $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$, $\overline{\lambda Z} = \overline{\lambda}\,\overline{Z}$ et $\overline{Z_1.Z_2} = \overline{Z_1}.\overline{Z_2}$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On veut montrer l'équivalence entre les propositions suivante :

(α) il existe $(a_1, b_1, \dots, a_m, b_m) \in \mathbb{R}^{2m}$ tel que M soit semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la matrice diagonale par blocs

$$\mathrm{diag}\left(S(a_1, b_1), \dots, S(a_m, b_m)\right) = \begin{pmatrix} S(a_1, b_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & S(a_m, b_m) \end{pmatrix}$$

(β) il existe un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ annulateur de M à racines simples non-réelles.

Un cas particulier simple

Soit ω un complexe non-réel. On pose $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \omega z$.

Vérifiez que f est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, que f a un polynôme annulateur réel à racines simples non-réelles et que sa matrice dans une base de $\mathbb{C}$ bien choisie est une matrice $S(a, b)$.

Correction 5.123
⋆⋆ À venir ⋆⋆

$(\beta) \implies (\alpha)$

Question 1
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $b \neq 0$. Montrez qu'il existe un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ annulateur de $S(a, b)$ à racines simples non-réelles.

Correction 5.124
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Question 2
Montrez l'implication $(\beta) \implies (\alpha)$.

Correction 5.125
⋆⋆ À venir ⋆⋆

$(\alpha) \implies (\beta)$

Dans cette partie, M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui annule un polynôme réel à racines simples non-réelles. On appelle f l'endomorphisme de E_n de matrice M dans la base canonique de E_n (autrement dit, pour tout $Z \in E_n,\ \ f(Z) = MZ$).

Question 3
Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\overline{z} = \lambda z$. Montrez qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda = \mathrm{e}^{2i\theta}$ et $\mathrm{e}^{i\theta} z$ est un réel.

Correction 5.126
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Question 4
Montrez que n est pair. On note $n = 2m$.

Correction 5.127
$\star\star$ **À venir** $\star\star$

Question 5
Montrez que si λ est une valeur propre de M, alors $\overline{\lambda}$ en est une aussi, puis que les sous-espaces propres $\operatorname{sep}(M, \lambda)$ et $\operatorname{sep}\left(M, \overline{\lambda}\right)$ ont la même dimension.

Correction 5.128
$\star\star$ **À venir** $\star\star$

Question 6
Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de M et Z un vecteur propre de M.

(a) Montrez que $\operatorname{Vect}\left(Z, \overline{Z}\right)$ est un plan stable par f.

(b) On pose $Z = X + iY$ où X, Y sont des matrices réelles. Montrez que (X, Y) est une base de ce plan.

(c) Montrez qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $b \neq 0$ et l'endomorphisme induit par f dans ce plan a pour matrice $S(a, b)$ dans la base (X, Y).

Correction 5.129
$\star\star$ **À venir** $\star\star$

Question 7
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de M. On choisit une base $\left(Z_1, \ldots, Z_p\right)$ de $\operatorname{sep}(M, \lambda)$ et on écrit chaque vecteur sous la forme $Z_k = X_k + iY_k$ où X_k, Y_k sont réelles.

Montrez que les plans $(\operatorname{Vect}(X_k, Y_k))_{1 \leqslant k \leqslant p}$ sont en somme directe et que $\operatorname{sep}(M, \lambda) \oplus \operatorname{sep}\left(M, \overline{\lambda}\right) = \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{p} \operatorname{Vect}(X_k, Y_k)$.

Correction 5.130
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Question 8
Montrez qu'il existe une base de E_n constituée de vecteurs réels dans laquelle la matrice de f est égale à une matrice diagonale par blocs $D = \operatorname{diag}\left(S\left(a_1, b_1\right), \ldots, S\left(a_m, b_m\right)\right)$.

Montrez enfin qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = PDP^{-1}$.

Correction 5.131
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Un exemple

On pose $M = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Question 9
On écrit $xI_4 - M$ par blocs $(2,2)$: $xI_4 - M = \begin{pmatrix} A & -4I_2 \\ 2I_2 & B \end{pmatrix}$.

(1) Calculez le produit par blocs $\begin{pmatrix} -4I_2 & A \\ B & 2I_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2I_2 & 0 \\ B & I_2 \end{pmatrix}$. Déduisez-en que $\det\left(xI_4 - M\right) = \det\left(AB + 8I_2\right)$.

(2) Explicitez le polynôme caractéristique de M. Déterminez ses racines imaginaires pures, puis les autres racines.

Correction 5.132
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Question 10
Montrez que M annule un polynôme réel à racines simples non-réelles.

Vérifiez que les vecteurs-colonnes $\begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \\ 2 \\ 1+i \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 \\ 2-2i \\ 2 \\ 1-i \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de M, puis donnez une matrice $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et une matrice réelle diagonale par blocs D telle que $M = PDP^{-1}$.

Correction 5.133
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Application

Dans cette partie, on suppose que $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ annule un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ à racines simples dans $\mathbb{C}$. On garde les notations introduites précédemment.

On note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$ l'ensemble des valeurs propres réelles et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}(M)$ l'ensemble des valeurs propres complexes non-réelles de M.

Question 11
On pose $G = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M)} \mathrm{sep}(M, \lambda)$ et $H = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}(M)} \mathrm{sep}(M, \lambda)$. Par convention, si M n'a pas de valeur propre réelle, alors $G = \{0\}$ et si M n'a que des valeurs propres réelles, alors $H = \{0\}$.

Montrez que G et H sont supplémentaires dans E_n et qu'ils sont stables par f.

On note g et h les endomorphismes induits par f dans G et H respectivement.

Correction 5.134
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Question 12
Montrez qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E_n telle que $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f) = R = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$ où D est une matrice diagonale réelle et S une matrice diagonale par blocs $\mathrm{diag}(S(a_1, b_1), \ldots, S(a_m, b_m))$. On remarque que R est une matrice réelle.

Correction 5.135
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Question 13
Un exercice classique : soit $(U, V) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$.

(1) Justifiez que la fonction $x \longmapsto \det(U + xV)$ est une fonction polynôme.

(2) Montrez que s'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $\det(U + zV) \neq 0$, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\det(U + xV) \neq 0$.

Application : soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que A et B soient semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$; montrez qu'elles sont alors semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Correction 5.136
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Question 14
Montrez finalement que M et R sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Correction 5.137
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆