Maths – MPI

Romain Bricout

13 septembre 2023

Introduction

Ce document réunit l'ensemble de mes cours de Mathématiques de MPI, ainsi que les exercices les accompagnant. Le professeur était M. Walbron. J'ai adapté certaines formulations me paraissant floues ou ne me plaisant pas mais le contenu pur des cours est strictement équivalent.

Les éléments des tables des matières initiale et présentes au début de chaque chapitre sont cliquables (amenant directement à la partie cliquée). C'est également le cas des références à des éléments antérieurs de la forme, par exemple, « Démonstration 5.22 ».

Table des matières

Première partie

Cours

Chapitre 1

Espaces vectoriels normés

Sommaire

Dans ce chapitre, la lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Bornes supérieures, bornes inférieures

1.1.1 Borne supérieure d'une partie de $\mathbb{R}$

On rappelle le théorème fondamental, dit « théorème (ou axiome) de la borne supérieure ».

Théorème 1.1
Toute partie A de $\mathbb{R}$, non-vide et majorée, possède une borne supérieure, notée $\sup A$.

Toute partie A de $\mathbb{R}$, non-vide et minorée, possède une borne inférieure, notée $\inf A$.

On dispose de caractérisations équivalentes de la borne supérieure.

Proposition 1.2
Soient A une partie de $\mathbb{R}$, non-vide et majorée, et s un réel.

Alors il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- $s = \sup A$
- $\begin{cases} \forall a \in A, \quad a \leqslant s \\ \forall \varepsilon > 0, \quad \exists x \in A, \quad s - \varepsilon < x \leqslant s \end{cases}$
- $\begin{cases} \forall a \in A, \quad a \leqslant s \\ \exists\, (x_n) \in A^{\mathbb{N}}, \quad x_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} s \end{cases}$

On a évidemment les caractérisations associées à la borne inférieure.

1.1.2 Borne supérieure d'une application à valeurs dans $\mathbb{R}$

Définition 1.3
Soient X un ensemble non-vide et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

Si f est majorée sur X, alors on appelle borne supérieure de f sur X le réel $\sup f(X) = \sup\limits_{X} f = \sup\limits_{x \in X} f(x)$.

Si f est minorée sur X, alors on appelle borne inférieure de f sur X le réel $\inf f(X) = \inf\limits_{X} f = \inf\limits_{x \in X} f(x)$.

On déduit de la Proposition 1.2 les caractérisations suivantes.

Proposition 1.4
Soient X un ensemble non-vide, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ majorée sur X et s un réel.

Alors il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- $s = \sup\limits_{X} f$
- $\begin{cases} \forall x \in X, \quad f(x) \leqslant s \\ \forall \varepsilon > 0, \quad \exists x \in X, \quad s - \varepsilon < f(x) \leqslant s \end{cases}$
- $\begin{cases} \forall x \in X, \quad f(x) \leqslant s \\ \exists (x_n) \in X^{\mathbb{N}}, \quad f(x_n) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} s \end{cases}$

1.1.3 Règles pratiques

D'abord, des évidences auxquelles on ne pense pas toujours.

Proposition 1.5
Soit A une partie de $\mathbb{R}$, non-vide et majorée. Alors $\forall a \in A, \quad a \leqslant \sup A$.

Soient X un ensemble non-vide et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ majorée sur X. Alors $\forall x \in X, \quad f(x) \leqslant \sup\limits_{X} f$.

En pratique, on n'a pas souvent besoin de connaître la valeur exacte d'une borne supérieure, on a plus souvent besoin de la majorer.

Proposition 1.6

- *Soient A une partie de $\mathbb{R}$, non-vide et majorée, et M un réel.*
  Pour montrer $\sup A \leqslant M$, il suffit de montrer $\forall a \in A, \quad a \leqslant M$.
- *Soient X un ensemble non-vide, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ majorée sur X et M un réel.*
  Pour montrer $\sup\limits_{X} f \leqslant M$, il suffit de montrer $\forall x \in X, \quad f(x) \leqslant M$.

Multiplication par un réel positif.

Proposition 1.7
Soient X un ensemble non-vide et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ majorée sur X.

Alors pour tout $\lambda \geqslant 0$, $\sup\limits_X (\lambda f) = \lambda \sup\limits_X f$.

Attention ! C'est bien sûr faux si $\lambda < 0$.

1.2 Normes

1.2.1 Définition

Définition 1.8
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

On appelle norme sur E toute application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

- pour tout $x \in E$, $N(x) = 0 \iff x = 0$ (séparation)
- pour tout $x \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (homogénéité)
- pour tout $(x, y) \in E^2$, $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire).

Un espace vectoriel est dit espace vectoriel normé quand on lui associe une norme.

On déduit de l'inégalité triangulaire une inégalité classique (souvent appelée aussi inégalité triangulaire) :

$$\text{pour tout } (x, y) \in E^2, \; |N(x) - N(y)| \leqslant N(x - y).$$

Si N est une norme sur E, alors on peut définir une distance entre deux vecteurs de E : $d(u, v) = N(u - v)$.

On définit ainsi une application $d : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

- pour tout $(x, y) \in E^2$, $d(y, x) = d(x, y)$ (symétrie)
- pour tout $(x, y) \in E^2$, $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (sépration)
- pour tout $(x, y, z) \in E^3$, $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

1.2.2 Exemples fondamentaux

- La valeur absolue dans $\mathbb{R}$ et le module dans $\mathbb{C}$ sont des normes.

- La norme euclidienne habituelle en géométrie plane ou spatiale est une norme.

- Plus généralement, si $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E, la norme euclidienne associée $x \longmapsto \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$ est une norme au sens précédent.

- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On choisit une base de E $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Si v est un vecteur de E, on note $(v_1, \ldots, v_n)$ les coordonnées de v dans la base $\mathscr{B}$.
  On définit classiquement trois normes sur E :

$$\|v\|_\infty = \max_{i \in [\![1;n]\!]} |v_i| \qquad \|v\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i| \qquad \|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2}$$

  appelées respesctivement norme infinie ou norme sup, norme 1 et norme 2.
  Cas particulier : $E = \mathbb{R}^n$ muni de la base canonique.
  Cas particulier : $E = \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ muni de la base canonique. Si $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ est une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors

$$\|A\|_\infty = \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \left|a_{ij}\right| \qquad \|A\|_1 = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \left|a_{ij}\right| \qquad \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \left|a_{ij}\right|^2}$$

- Soient X un ensemble et E l'ensemble des applications bornées de X dans $\mathbb{K}$. La norme sup sur E est définie par $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.
  Cas particulier : si $X = \mathbb{N}$, E est l'ensemble des suites bornées et $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

Proposition 1.9
Soient E, F deux espaces vectoriels normés.

L'application de $E \times F$ dans $\mathbb{R}_+$ qui à (x, y) associe $\max\left(\|x\|_E, \|y\|_F\right)$ est une norme.

Autrement dit, le produit de deux espaces vectoriels normés est encore un espace vectoriel normé, résultat qui se généralise par récurrence à un nombre quelconque (fini) d'espaces vectoriels normés.

1.2.3 Normes équivalentes

Définition 1.10
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et N_1, N_2 deux normes sur E.

On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes quand il existe deux constantes strictement positives a, b telles que pour tout $v \in E$, $aN_1(v) \leqslant N_2(v) \leqslant bN_1(v)$.

Exercice 1.11
Montrez que si E est de dimension finie, les trois normes $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes.

Exercice 1.12
Soient $E = \mathbb{R}[X]$ et $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in E$. On pose $N_1(P) = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$ et $N_\infty(P) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n} |a_i|$.

Montrez que N_1 et N_∞ sont des normes sur E.

Montrez qu'elles ne sont pas équivalentes en considérant la suite des polynômes $P_n = \sum_{i=0}^{n} X^i$.

Le résultat suivant est fondamental.

Théorème 1.13
Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les normes sur E sont équivalentes.

Quand on est en dimension finie, cela signifie que tous les résultats qu'on peut démontrer pour une norme sont à facteurs près valables pour n'importe quelle norme, autrement dit cela nous permettra de choisir la norme que l'on préfère si on ne nous l'impose pas.

Dans toute la suite, E est un espace vectoriel normé par la norme $\|\cdot\|$.

1.2.4 Boules

Définition 1.14
Soient $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r l'ensemble noté $B(a, r)$ défini de la façon suivante :

$$B(a, r) = \{v \in E \mid \|v - a\| < r\}.$$

On appelle boule fermée de centre a et de rayon r l'ensemble noté (généralement) $\overline{B}(a, r)$:

$$\overline{B}(a, r) = \{v \in E \mid \|v - a\| \leqslant r\}.$$

On appelle sphère de centre a et de rayon r l'ensemble (généralement) noté $S(a, r)$:

$$S(a, r) = \{v \in E \mid \|v - a\| = r\}.$$

On appelle boule-unité la boule de centre 0 et de rayon 1, sphère-unité la sphère de centre 0 et de rayon 1.

Exercice 1.15
Que sont les boules dans $\mathbb{R}$? Que sont les sphères dans $\mathbb{R}$?

Exercice 1.16
On prend $E = \mathbb{R}^2$ et on définit les normes infinie, 1 et 2 relativement à la base canonique.

Représentez graphiquement les boules-unités pour chacune de ces trois normes.

Exercice 1.17
Montrez que toute boule ouverte est contenue dans une boule fermée et contient une boule fermée de mêmes centres.

Montrez la même chose en inversant les mots « ouverte » et « fermée ».

Définition 1.18
Soit $(x, y) \in E^2$. On note $[xy] = \{tx + (1-t)\, y \mid t \in [0\,;\,1]\}$, appelé segment (géométrique) d'extrémités x et y.

Une partie A de E est dite convexe quand pour tout $(x, y) \in A^2$, $[xy] \subseteq A$.

On a :

$$A \text{ est convexe} \iff \forall\, (x, y) \in A^2,\ \forall t \in [0\,;\,1]\,,\ tx + (1-t)\, y \in A.$$

Proposition 1.19
Les boules (ouvertes ou fermées) sont des parties convexes.

Les sphères ne sont jamais convexes.

Dans $\mathbb{R}$, les convexes sont les intervalles.

1.2.5 Parties bornées

Définition 1.20
On dit qu'une partie A de E est bornée quand il existe une boule qui la contient.

Exercice 1.21
Montrez que A est bornée ssi A est contenue dans une boule de centre 0.

Plus généralement, on choisit arbitrairement un point de E, noté x. Montrez l'équivalence A est bornée ssi A est contenue dans une boule de centre x.

Exercice 1.22
Montrez qu'en dimension finie, cette définition ne dépend pas de la norme.

Proposition 1.23
Une partie A de E n'est pas bornée ssi il existe une suite (v_n) à termes dans A telle que $\|v_n\| \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty$.

Exercice 1.24
Dans $E = \mathbb{R}^2$, on pose $A = \left\{(x, y) \mid x^4 + y^4 = 20\right\}$: A est-elle bornée ? Si oui, pour chacune des normes infinie, 1 et 2, donnez un rayon d'une boule centrée en 0 qui contient A.

Exercice 1.25
Même question avec $E = \mathbb{C}^2$.

Exercice 1.26
Dans $E = \mathbb{R}^3$, on pose $B = \left\{(x, y, z) \mid x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 2xy + 2xz - 2yz \leqslant 42\right\}$: B est-elle bornée ? Si oui, pour chacune des normes infinie, 1 et 2, donnez un rayon d'une boule centrée en 0 qui contient B.

Exercice 1.27
Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on note $\mathscr{P}$ l'ensemble des matrices de projecteurs : $\mathscr{P}$ est-il borné ?

Définition 1.28
On dit qu'une suite v à termes dans E est bornée quand l'ensemble de ses valeurs est borné, autrement dit quand il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|v_n\| \leqslant M$.

On dit qu'une fonction f d'un ensemble X dans E est bornée quand l'ensemble de ses valeurs prises sur X est borné, autrement dit quand il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in X$, $\|f(x)\| \leqslant M$.

Exercice 1.29
Soit u une suite complexe arithmético-géométrique de raison a. À quelle condition est-elle bornée ?

Exercice 1.30
Soient B, B' deux boules de E. Si $(x, x') \in E^2$, on pose $f(x, x') = d(x, x')$. Montrez que f est bornée sur $B \times B'$.

1.3 Convergence des suites

Dans cette section, E désigne un espace vectoriel normé par la norme $\|\cdot\|$.

1.3.1 Définition

Définition 1.31
Soient $u = (u_n)$ une suite à termes dans E et $\ell \in E$.

On dit que la suite u converge vers ℓ quand toute boule ouverte de centre ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geqslant n_0,\ \ u_n \in B\left(\ell, \varepsilon\right).$$

Proposition 1.32
Dans la définition, on peut remplacer les boules ouvertes par des boules fermées.

On peut réécrire la définition sous deux formes équivalentes :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geqslant n_0,\ \ \|u_n - \ell\| < \varepsilon$$

ou

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geqslant n_0,\ \ \|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon.$$

On peut donc se ramener aux suites réelles positives : la suite vectorielle u converge vers ℓ ssi la suite réelle $(\|u_n - \ell\|)$ converge vers 0.

Une suite qui ne converge vers aucun élément de E est dite divergente.

1.3.2 Propriétés usuelles

Proposition 1.33 (Unicité de la limite)
Si une suite $u \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$, elle ne peut converger vers un autre point de E.

On peut donc noter classiquement $\ell = \lim u = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n$ ou $u_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \ell$.

Proposition 1.34
Si une suite $u \in E^{\mathbb{N}}$ converge, alors elle est bornée.

Théorème 1.35 (Opérations sur les suites convergentes)
Soient $u, v \in E^{\mathbb{N}}$ convergeant respectivement vers ℓ et m deux éléments de E.

Alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, la suite $au + bv$ converge vers $a\ell + bm$.

Soit $\alpha \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors la suite αu converge vers $\lambda\ell$.

Proposition 1.36
Toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite.

Quasi-réciproque : si u est une suite telle que les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite ℓ, alors u converge vers ℓ.

Proposition 1.37
Dans un produit de deux espaces vectoriels normés $E \times F$, une suite $(u_n) = ((a_n, b_n))$ converge ssi les suites (a_n) et (b_n) convergent dans E, respectivement F.

Dans ce cas, $\lim (a_n, b_n) = (\lim a_n, \lim b_n)$.

Ce résultat se généralise sans difficulté par récurrence à un nombre quelconque (fini) d'espaces vectoriels normés.

1.3.3 Cas particulier en dimension finie

Dans cette partie, on suppose que E est de dimension finie.

Définition 1.38
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Pour $i \in [\![1\ ;\ n]\!]$, on appelle i-ème forme coordonnée (relative à la base $\mathscr{B}$), notée souvent d_i, la forme linéaire qui à un vecteur associe sa i-ème coordonnée dans la base $\mathscr{B}$:

$$\text{pour tout } v \in E, \quad v = \sum_{i=1}^{n} d_i(v)\, e_i.$$

Théorème 1.39
Soit $\mathscr{B}$ une base de E.

Une suite $u \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$ ssi pour toute forme coordonnée d relative à $\mathscr{B}$, la suite $(d(u_n))$ converge vers $d(\ell)$.

Autrement dit, une suite converge ssi ses suites-coordonnées dans n'importe quelle base convergent.

Dans ce cas, la limite de la suite u est le vecteur ℓ tel que pour toute forme coordonnée d, $d(\ell) = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} d(u_n)$.

Exemple 1.40

Si $M_n = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e}^{-n} \\ 1/n & n\sin\left(1/n\right) \end{pmatrix}$, alors la suite de matrices (M_n) converge vers la matrice I_2.

Corollaire 1.41
Si E est de dimension finie, la convergence d'une suite ne dépend pas du choix de la norme. On peut donc choisir la norme qu'on veut.

1.3.4 Point adhérent à une partie

Définition 1.42
Soient A une partie de E et $x \in E$.

On dit que x est un point adhérent à A quand il existe une suite $u \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x.

L'adhérence de A est l'ensemble de ses points adhérents, noté $\overline{A}$.

Intuitivement, l'adhérence d'une partie est elle-même à laquelle on ajoute tous les points qui se trouvent sur son bord.

Exercice 1.43
Quelle est l'adhérence d'une boule ouverte ?

Exercice 1.44
Quelle est l'adhérence de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$?

Proposition 1.45
Soient A une partie de E et $x \in E$.

Alors x est adhérent à A ssi toute boule centrée en x rencontre A.

De manière formalisée : $x \in \overline{A} \iff \forall r > 0,\ \exists y \in A,\ \ y \in B\left(x, r\right)$.

On peut donner la définition de la densité d'une partie.

Définition 1.46
On dit qu'une partie A est dense dans E quand $\overline{A} = E$, c'est-à-dire qu'on peut trouver des éléments de A aussi proches de n'importe quel point.

Exemple 1.47
- ▹ Dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses (*cf.* cours de première année).
- ▹ $\mathrm{GL}_n\left(\mathbb{K}\right)$ est dense dans $\mathscr{M}_n\left(\mathbb{K}\right)$ (démonstration ultérieure).

1.4 Limites de fonctions

Dans cette section, E et F sont deux espaces vectoriels normés par les normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.

1.4.1 Définition

Définition 1.48
Soient f une fonction de E dans F, D son ensemble de définition, $a \in \overline{D}$ et $\ell \in F$.

On dit que f a pour limite ℓ en a quand

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists \eta > 0,\ \ \forall x \in D,\ \ \|x - a\|_E < \eta \implies \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon.$$

Remarque 1.49
On peut remplacer les inégalités strictes sur les normes par des inégalités larges.

On peut réécrire la définition à l'aide de boules ouvertes (ou fermées) :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists \eta > 0,\ \ \forall x \in D \cap B(a, \eta),\ \ f(x) \in B(\ell, \varepsilon).$$

Si E et F sont de dimension finie, cette définition ne dépend pas du choix des normes.

1.4.2 Caractérisation séquentielle de la limite

Théorème 1.50
Soient f une fonction de E dans F, D son ensemble de défintion, $a \in \overline{D}$ et $\ell \in F$.

f a pour limite ℓ en a ssi pour toute suite u à termes dans D convergeant vers a, la suite $f \circ u = (f(u_n))$ converge vers ℓ.

En pratique, on utilise beaucoup plus souvent le sens direct de l'équivalence précédente.

1.4.3 Propriétés usuelles

Proposition 1.51 (Unicité de la limite)
Soient f une fonction de E dans F, D son ensemble de définition, $a \in \overline{D}$ et $\ell \in F$.

Si f a pour limite ℓ en a, alors elle ne peut avoir d'autre limite que ℓ en a.

On peut donc noter classiquement $\ell = \lim\limits_{a} f = \lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x)$ ou $f(x) \xrightarrow[x \longrightarrow a]{} \ell$.

Proposition 1.52
Si f a pour limite ℓ en a, alors elle est bornée au voisinage de a.

Théorème 1.53 (Opérations sur les limites)
Soient f et g deux fonctions de E dans F, définies sur la même partie D et ayant respectivement pour limites ℓ et m deux éléments de F en $a \in \overline{D}$.

Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, la fonction $\lambda f + \mu g$ a pour limite $\lambda \ell + \mu m$ en a.

Soient α une fonction de E dans $\mathbb{K}$ et f une fonction définie de E dans F, définies sur la même partie D et ayant respectivement pour limites $\beta \in \mathbb{K}$ et $\ell \in F$ en $a \in \overline{D}$.

Alors αf a pour limite $\beta \ell$ en a.

Proposition 1.54
Une fonction $f = (g, h)$ à valeurs dans un produit d'espaces vectoriels normés a une limite ssi g et h ont chacune une limite.

Dans ce cas, $\lim\limits_a f = \left(\lim\limits_a g, \lim\limits_a h\right)$.

Ce résultat se généralise sans difficulté par récurrence à un nombre quelconque (fini) d'espaces vectoriels normés.

1.4.4 Cas particulier de la dimension finie

Théorème 1.55
On suppose que F est de dimension finie. Soit $\mathscr{B}$ une base de F.

Soit f une fonction de E dans F, D son ensemble de définition, $a \in \overline{D}$ et $\ell \in F$.

La fonction f a pour limite ℓ en a ssi pour toute forme coordonnée d relative à $\mathscr{B}$, la fonction $d \circ f$ a pour limite $d(\ell)$ en a.

Autrement dit, une fonction a une limite en a ssi ses fonctions-coordonnées dans n'importe quelle base ont chacune une limite en a.

Dans ce cas, la limite de la fonction f en a est le vecteur ℓ tel que pour tout forme coordonnée d, $d(\ell) = \lim\limits_{x \longrightarrow a} d(f(x))$.

1.4.5 Composition des limites

G désigne un troisième espace vectoriel normé.

Théorème 1.56
Soient f une fonction de E dans F et D_f son ensemble de définition. Soient g une fonction de F dans G et D_g son ensemble de définition. On suppose que $f\left(D_f\right) \subseteq D_g$ (condition qui permet de définir la composée $g \circ f$ sur D_f).

Soient $a \in \overline{D_f}$, $b \in \overline{D_g}$ et $\ell \in G$.

Si f a pour limite b en a et g a pour limite ℓ en b, alors $g \circ f$ a pour limite ℓ en a.

Autrement dit, si $\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \longrightarrow a]{} b \\ g(y) \xrightarrow[y \longrightarrow b]{} \ell \end{cases}$ *alors* $g \circ f(x) \xrightarrow[x \longrightarrow a]{} \ell$.

1.4.6 Extensions des définitions

D'abord les limites infinies en un point dans le cas où l'espace d'arrivée est $\mathbb{R}$.

Définition 1.57
Soient f une fonction de E dans $\mathbb{R}$, D son ensemble de définition et $a \in \overline{D}$.

On dit que f a pour limite $+\infty$ en a quand

$$\forall M > 0,\ \ \exists \eta > 0,\ \ \forall x \in D,\ \ \|x - a\|_E \leqslant \eta \implies f(x) \geqslant M.$$

On dit que f a pour limite $-\infty$ en a quand

$$\forall M < 0,\ \ \exists \eta > 0,\ \ \forall x \in D,\ \ \|x - a\|_E \leqslant \eta \implies f(x) \leqslant M.$$

Puis les limites en « l'infini ».

Définition 1.58
Soient f une application de E dans F et $\ell \in F$.

On dit que f a pour limite ℓ quand $\|x\|$ tend vers l'infini quand

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists B > 0,\ \ \forall x \in E,\ \ \|x\|_E \geqslant B \implies \|f(x) - \ell\|_F \leqslant \varepsilon.$$

Dans le cas où $F = \mathbb{R}$, on dit que $f(x)$ a pour limite $+\infty$ quand $\|x\|$ tend vers l'infini quand

$$\forall M > 0,\ \ \exists B > 0,\ \ \forall x \in E,\ \ \|x\|_E \geqslant B \implies f(x) \geqslant M.$$

(Définition semblable pour la limite $-\infty$).

Enfin, dans le cas où l'espace de départ est $\mathbb{R}$, on peut parler de limite en l'infini au sens habituel.

Définition 1.59
Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ dans F, définie sur un ouvert $]? \,;+\infty[$ et $\ell \in F$.

On dit que $f(x)$ a pour limite ℓ quand x tend vers $+\infty$ quand

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists B > 0, \ \ \forall x \geqslant B, \ \ \|f(x) - \ell\| \leqslant \varepsilon.$$

(Définition semblable pour la limite x tend vers $-\infty$).

1.5 Fonctions continues

Dans cette section, E et F sont des espaces vectoriels normés par les normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.

1.5.1 Continuité en un point

Proposition 1.60
Soient f une fonction de E dans F, D son ensemble de définition, $a \in \overline{D}$ et $\ell \in F$.

Si f a pour limite ℓ en a et si $a \in D$, alors $\ell = f(a)$.

Dans ce cas, on dit que la fonction f est continue en a.

Définition 1.61
Soient f une fonction de E dans F, D son ensemble de définition et $a \in D$.

On dit que f est continue en a quand f a pour limite $f(a)$ en a.

On déduit de cette définition et des théorèmes précédents

- la caractérisation séquentielle de la continuité en un point ;
- le fait qu'une fonction continue en un point est bornée au voisinage de ce point ;
- les théorèmes d'opérations et de compositions des fonctions continues en un point ;
- l'équivalence entre la continuité d'une fonction et celle de ses fonctions-coordonnées dans une certaine base de F dans le cas où F est de dimension finie.

1.5.2 Continuité sur une partie

Définition 1.62
Soient f une fonction de E dans F, D son ensemble de définition et $A \subseteq D$.

On dit que f est continue sur A quand f est continue en tout point de A.

On déduit de cette définition et des théorèmes précédents

- les théorèmes d'opérations et de compositions des fonctions continues sur une partie ;
- l'équivalence entre la continuité d'une fonction et celle de ses fonctions-coordonnées dans une certaine base de F dans le cas où F est de dimension finie.

Proposition 1.63
Soient f et g deux fonctions de E dans F définies sur D et $A \subseteq D$.

Si A est dense dans D, f et g sont continues sur D et $f = g$ sur A, alors $f = g$ sur D.

1.5.3 Cas particulier de la dimension finie

On suppose que E et F sont de dimensions finies.

Dans une base donnée, les formes coordonnées relatives à cette base sont en particulier des applications continues.

Donc toute fonction f de E dans F dont les fonctions-coordonnées $(f_1, \ldots, f_n)$ dans une base de F sont définies polynomialement à partir des formes coordonnées dans une base de E est continue.

Exemple 1.64

- La fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y) = \left(x^2 + y^2, xy - (1 + x)^3\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- Les applications trace et déterminant définies sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont continues.

Exercice 1.65
Montrez que l'application $A \longmapsto A^2$ est continue de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans lui-même.

Exercice 1.66
En admettant (momentanément) que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert, montrez que l'application $A \longmapsto A^{-1}$ est continue de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dans lui-même.

1.5.4 Fonctions lipschitziennes

Définition 1.67
Soient f une application de E dans F, A une partie de E et $K \in \mathbb{R}_+$.

On dit que f est K-lipschitzienne sur A (ou lipschitzienne de rapport K) quand

$$\forall (x, y) \in A^2, \ \ \|f(y) - f(x)\|_F \leqslant K\|y - x\|_E.$$

On dit que f est lipschitzienne sur A quand il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que f soit K-lipschitzienne sur A.

Remarque 1.68
Si f est K-lipschitzienne sur A, alors le rapport K n'est pas unique, puisque pour tout $L \geqslant K$, on a encore f L-lipschitzienne sur A.

Proposition 1.69
Toute fonction lipschitzienne est continue.

Mais la réciproque est fausse (contre-exemple : la fonction $\sqrt{\cdot}$ sur $[0\,;+\infty[$).

Un exemple fondamental : la fonction $x \longmapsto d(x, A)$.

Définition 1.70
Soit A une partie de E.

Pour $x \in E$, on appelle distance de x à A le réel $\inf\limits_{a \in A} d(x, a)$.

Proposition 1.71
Pour toute partie A de E, la fonction $x \longmapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne.

L'adhérence de A est l'ensemble des points à distance nulle de A, i.e. tels que $d(x, A) = 0$.

1.5.5 Continuité des applications linéaires et n-linéaires

Proposition 1.72
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- ▹ *f est continue en 0 ;*
- ▹ *f est continue en un point x ;*
- ▹ *f est continue sur E ;*
- ▹ *f est lipschitzienne sur E ;*
- ▹ *il existe $K \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in E, \quad \|f(x)\|_F \leqslant K\|x\|_E$;*
- ▹ *f est bornée sur la boule-unité ;*
- ▹ *f est bornée sur une boule.*

Exercice 1.73
On pose $E = \mathscr{C}^0([0\,;1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie.

L'application $f \longmapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ est-elle continue sur E ?

Exercice 1.74
E désigne le même espace et on pose $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

Montrez que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur E.

L'application $f \longmapsto f(1)$ est-elle continue sur E ?

Définition 1.75
On note $\mathscr{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F.

Proposition 1.76
$\mathscr{L}_c(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E, F)$, en général distinct de $\mathscr{L}(E, F)$.

Cas particulier en dimension finie.

Théorème 1.77
On suppose que E est de dimension finie.

Toute application linéaire de E dans F est lipschitzienne sur E, donc continue.

Autrement dit, si E est de dimension finie, alors $\mathscr{L}_c(E, F) = \mathscr{L}(E, F)$.

Remarque 1.78
L'hypothèse de dimension finie de E est indispensable. Dans le cas contraire, c'est faux en général.

Le résultat précédent s'étend aux applications multilinéaires.

Théorème 1.79
Soient $E_1, \dots, E_n$ des espaces vectoriels normés de dimensions finies et $f : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ une application n-linéaire.

Il existe alors une constante $K \geqslant 0$ telle que

$$\text{pour tout } (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n, \ \ \|f(x_1, \dots, x_n)\| \leqslant K \|x_1\|_{E_1} \dots \|x_n\|_{E_n}.$$

Corollaire 1.80
Soient $E_1, \dots, E_n$ des espaces vectoriels normés de dimensions finies.

Toute application $f : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ qui est n-linéaire est continue sur $E_1 \times \cdots \times E_n$.

Exemple 1.81

- Le produit matriciel de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{pq}(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{M}_{nq}(\mathbb{K})$ est bilinéaire, donc continu.

- Un produit scalaire dans un espace euclidien est bilinéaire, donc continu.

- Le déterminant dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est n-linéaire par rapport aux colonnes, donc il est continu.

1.5.6 Norme subordonnée

On définit sur l'espace vectoriel $\mathscr{L}_c(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F la notion de norme subordonnée (relative aux deux normes sur E et F) ou norme triple.

Définition 1.82
Soit $f \in \mathscr{L}_c(E, F)$.

On pose $|||f||| = \sup\limits_{x \in B(0,1)} \|f(x)\|$, appelée la norme subordonnée de f.

Proposition 1.83
Soit $f \in \mathscr{L}_c(E, F)$.

Alors $|||f|||$ *est*

- *égal à* $\sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|}$, *mais aussi à* $\sup\limits_{x \in S(0,1)} \|f(x)\|$ *;*
- *le plus petit réel positif* M *tel que pour tout* $x \in E$, $\|f(x)\| \leqslant M\|x\|$.

Proposition 1.84
Les normes subordonnées sont des normes sur les espaces $\mathscr{L}_c(E, F)$.

Elles sont dites sous-multiplicatives : pour toutes applications linéaires continues et composables f *et* g*,*

$$|||f \circ g||| \leqslant |||f||| \times |||g|||.$$

Comme en dimension finie, on peut représenter par choix de bases les applications linéaires par des matrices, on définit de manière semblable la notion de norme sous-multiplicative de matrices (relativement aux normes) ou norme triple.

Définition 1.85
Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On choisit deux normes sur $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ (espaces identifiés à ceux des matrices-colonnes).

Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$, on pose $|||A||| = \sup\limits_{\|X\|=1} \|AX\|$.

Proposition 1.86
Des normes étant choisies sur les espaces $\mathbb{K}^p$ *et* $\mathbb{K}^n$*, les normes subordonnées sont des normes sur tous les espaces* $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

Elles sont dites sous-multiplicatives : pour toutes matrices multipliables A *et* B*,*

$$|||AB||| \leqslant |||A||| \times |||B|||.$$

Remarque 1.87
Dans le cas où un espace vectoriel normé E est aussi une $\mathbb{K}$-algèbre, on dit qu'il est une algèbre normée quand la norme vérifie en plus la propriété de sous-multiplicativité : $\forall (x, y) \in E^2, \ \|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$.

1.6 Topologie d'un espace vectoriel normé

Dans cette section, E est un espace vectoriel normé.

1.6.1 Intérieur d'une partie, voisinage d'un point

Définition 1.88
Soient A une partie de E et $a \in A$.

On dit que a est un point intérieur à A quand on peut trouver un rayon $r > 0$ tel que $B(a, r)$ soit incluse dans A. On dit aussi dans ce cas que A est un voisinage de a.

L'intérieur de A est l'ensemble de ses points intérieurs, noté $\mathring{A}$.

On a :

$$a \in \mathring{A} \iff \exists r > 0,\ \ B(a, r) \subseteq A.$$

Exercice 1.89
Dans $\mathbb{R}$, quels sont les intérieurs des parties suivantes : $[0\,;1]$, $[0\,;+\infty[$, $\mathbb{Q}$?

Exercice 1.90
Quel est l'intérieur d'une boule de centre a et de rayon $r > 0$?

Remarque 1.91
Cette notion dépend a prori de la norme utilisée. En dimension finie, ce n'est pas le cas : l'intérieur d'une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie ne dépend pas du choix de la norme (pourquoi ?).

Proposition 1.92
Soient $u \in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$.

La suite u converge vers ℓ ssi tout voisinage de ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

1.6.2 Parties ouvertes

Définition 1.93
On dit qu'une partie A de E est ouverte (ou est un ouvert) quand à tout point de $a \in A$, on peut associer un rayon $r > 0$ tel que la boule de centre a et de rayon r soit incluse dans A :

$$\forall a \in A,\ \ \exists r > 0,\ \ B(a, r) \subseteq A.$$

Autrement dit, A est ouverte quand tout point de A est intérieur à A : $A = \mathring{A}$, ou, autrement dit, quand A est un voisinage de chacun de ses points.

Proposition 1.94
L'ensemble vide et E sont des parties ouvertes. Toute boule ouverte est une partie ouverte. Tout produit (fini) de parties ouvertes est ouvert.

La topologie de E est l'ensemble de tous les ouverts de E.

Remarque 1.95
La topologie dépend a priori de la norme utilisée. En dimension finie, ce n'est pas le cas : dans un espace vectoriel normé de dimension finie, le fait d'être un ouvert ne dépend pas du choix de la norme.

1.6.3 Parties fermées

On rappelle la notion de point adhérent à une partie.

Définition 1.96
Soient A une partie de E et $x \in E$.

On dit que x est un point adhérent à A quand il existe une suite $u \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x, ou, ce qui revient au même, quand toute boule centrée en x rencontre A, ou encore quand $d(x, A) = 0$.

L'adhérence de A est l'ensemble de ses points adhérents, noté $\overline{A}$.

On a montré

Définition 1.97
On dit qu'une partie A de E est fermée (ou est un fermé) quand tout point adhérent à A est dans A, autrement dit quand la propriété suivante est vraie :

si une suite quelconque à termes dans A converge vers un point x de E, alors $x \in A$.

Ou encore : A est fermée quand $A = \overline{A}$.

Proposition 1.98
L'ensemble vide et E sont des parties fermées. Toute boule fermée est une partie fermée. Tout produit (fini) de parties fermées est fermé.

On note le lien avec les parties ouvertes.

Proposition 1.99
Soit A une partie de E.

Alors A est une partie ouverte ssi son complémentaire est une partie fermée.

Encore une fois, le fait d'être un fermé en dimension finie ne dépend pas de la norme.

Proposition 1.100
- ▹ *Toute réunion de parties ouvertes est ouverte. Toute intersection finie de parties ouvertes est ouverte.*
- ▹ *Toute intersection de parties fermées est fermée. Toute réunion finie de parties fermées est fermée.*

Exercice 1.101
Montrez que pour tout $a \in E$, $E \setminus \{a\}$ est un ouvert. Déduisez-en que si A est une partie finie de E, alors $E \setminus A$ est un ouvert.

Exercice 1.102
Quels sont les sous-espaces vectoriels de E qui sont ouverts ?

Exercice 1.103
Montrez que $F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geqslant 0 \text{ et } xy = 1\right\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1.104
On note S l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que tous les coefficients soient positifs et sur chaque ligne la somme des coefficients vaut 1.

Montrez que S est un fermé.

NB : S est l'ensemble des matrices dites stochastiques.

Remarque 1.105
A priori, une partie de E n'est ni ouverte ni fermée : par exemple, dans $\mathbb{R}$, l'ensemble $]0\,;1]$ n'est ni ouvert ni fermé.

Donc ne pas confondre « complémentaire » et « contraire » : on peut dire qu'une partie est un fermé quand son complémentaire est un ouvert, mais pas que le contraire d'être un ouvert c'est être un fermé.

Remarque 1.106
Il est souvent assez facile de montrer qu'une partie est un fermé grâce à la caractérisation séquentielle. Donc pour montrer qu'une partie est un ouvert, on montre souvent de cette façon que son complémentaire est un fermé.

Les fermés sont souvent définis par des égalités ou des inégalités larges. Par complémentaire, les ouverts sont souvent définis par des inégalités strictes ou des différences.

1.6.4 Ouverts ou fermés relatifs à une partie

Les définitions précédentes parlent d'ouverts et de fermés de E. On peut définir ces notions relativement à une partie.

Définition 1.107
Soient A une partie de E et U un sous-ensemble de A.

On dit que U est un ouvert de A quand il existe un ouvert V de E tel que $U = A \cap V$.

On dit que U est un fermé de A quand il existe un fermé V de E tel que $U = A \cap V$.

On remarque que les fermés de A sont les complémentaires dans A des ouverts de A. On peut caractériser de même une partie U fermée de A par l'égalité entre U et l'ensemble de ses points adhérents dans A.

1.6.5 Image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé par une fonction continue

Rappel 1.108
Si f est une fonction de E dans F définie sur D_f et $B \subseteq F$, l'image réciproque de B par f est

$$f^{-1}(B) = \left\{x \in D_f \;\middle|\; f(x) \in B\right\}.$$

Théorème 1.109
Soit f une fonction de E dans F définie sur D.

Alors on a équivalence entre les propositions suivantes :

- *f est continue sur D ;*
- *pour tout fermé B de F, son image réciproque $f^{-1}(B)$ est un fermé de D ;*
- *pour tout ouvert B de F, son image réciproque $f^{-1}(B)$ est un ouvert de D.*

Ceci est valable en particulier quand f est une application continue de E dans F, auquel cas on peut se passer des notions d'ouvert ou fermé relatif.

Exemple 1.110 (Cas particuliers fondamentaux)
Si f est continue sur E et à valeurs réelles, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, les ensembles suivants sont des fermés de E :

$$\{x \in E \mid f(x) \geqslant a\} \qquad \{x \in E \mid f(x) \leqslant a\} \qquad \{x \in E \mid f(x) = a\}.$$

Exemple 1.111

- Les courbes de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont des fermés de $\mathbb{R}^2$.
- L'ensemble des matrices de trace nulle est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Par passage au complémentaire, si f est continue sur E et à valeurs réelles, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, les ensembles suivants sont des ouverts de E :

$$\{x \in E \mid f(x) < a\} \qquad \{x \in E \mid f(x) > a\} \qquad \{x \in E \mid f(x) \neq a\}.$$

Exemple 1.112

- L'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x > 0$ et $y > x$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$: si une matrice A est inversible, alors toutes les matrices proches de A le sont aussi.

1.6.6 Frontière d'une partie

Définition 1.113
Soit A une partie de E. On appelle frontière de A l'ensemble $\overline{A} \setminus \mathring{A}$.

Exemple 1.114

- Si B est une boule, alors son intérieur est la boule ouverte de même centre et de même rayon, son adhérence est la boule fermée et sa frontière est la sphère.
- L'ensemble des rationnels est d'intérieur vide, d'adhérence égale à $\mathbb{R}$ et donc de frontière $\mathbb{R}$.

1.7 Compacité

Dans cette section, E est un espace vectoriel normé.

1.7.1 Valeurs d'adhérence d'une suite

Définition 1.115
Soient $u = (u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $a \in E$.

On dit que a est une valeur d'adhérence de la suite u quand il existe une extractrice φ telle que la suite extraite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ converge vers a.

Une suite peut avoir une ou plusieurs valeurs d'adhérence ou ne pas avoir de valeur d'adhérence :

- la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de valeur d'adhérence ;
- toute suite convergente possède une seule valeur d'adhérence : sa limite ;
- la suite u définie par $u_{2n} = \dfrac{1}{n+1}$ et $u_{2n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ possède deux valeurs d'adhérence : 0 et 1 ;
- il est possible de numéroter les rationnels, autrement dit de créer une suite u qui prend exactement toutes les valeurs rationnelles dans $\mathbb{R}$: cette suite a pour valeurs d'adhérence tous les réels.

On peut donner une caractérisation équivalente sans passer par la notion de suite extraite.

Proposition 1.116
Soient $u = (u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $a \in E$.

Alors a est une valeur d'adhérence de u ssi pour tout $\varepsilon > 0$, $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in B(a, \varepsilon)\}$ est infini.

Ceci peut encore être réécrit de la façon suivante.

Proposition 1.117
Soient $u = (u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $a \in E$.

Alors a est une valeur d'adhérence de u ssi $\forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant N,\ \|u_n - a\| < \varepsilon$.

Exercice 1.118
Soit $u = (u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Montrez que l'ensemble V des valeurs d'adhérence de la suite u est un fermé de E en utilisant les ensembles $U_p = \{u_n \mid n \geqslant p\}$.

1.7.2 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 1.119
Si E est de dimension finie, alors toute suite bornée de E possède une valeur d'adhérence.

Remarque 1.120
Ce théorème est faux en dimension infinie donc il faut bien mettre en valeur la dimension finie.

On peut ajouter une précision au théorème précédent.

Proposition 1.121
Si E est de dimension finie, alors toute suite bornée de E qui ne possède qu'une seule valeur d'adhérence est convergente vers cette valeur d'adhérence.

1.7.3 Parties compactes

Définition 1.122
Soit A une partie de E.

On dit que A est une partie compacte de E (ou un compact de E) quand toute suite à termes dans A possède une valeur d'adhérence dans A (propriété dite de Bolzano-Weierstrass).

Exemple 1.123

- Tout segment $[a\,;\,b]$ de $\mathbb{R}$ est un compact et ce sont les seuls intervalles compacts. $[0\,;\,1] \cup [2\,;\,3]$ est compact.
- Dans $\mathbb{K}^n$, tout pavé $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} [a_i\,;\,b_i]$ est un compact. Plus généralement, un produit (fini) de compacts est compact.

Les parties compactes sont donc celles dont on peut extraire des sous-suites convergentes. Un résultat précédent se généralise alors.

Proposition 1.124
Si A est une partie compacte, alors toute suite de A qui ne possède qu'une seule valeur d'adhérence est convergente vers cette valeur d'adhérence.

Un compact étant connu, il est facile d'en construire d'autres.

Proposition 1.125
Si A est une partie compacte de E, alors toute partie B fermée dans A est aussi compacte.

Reconnaître si une partie est compacte n'est pas toujours facile. On dispose d'une condition nécessaire, qui est suffisante en dimension finie.

Proposition 1.126
Soit A une partie de E.

Si A est compacte, alors A est une partie fermée et bornée.

La réciproque est hélas fausse en général. Néanmoins, en dimension finie, elle est vraie.

Proposition 1.127
Si E est de dimension finie, alors une partie de E est compacte ssi elle est fermée et bornée.

Remarque 1.128
En fait, il n'y a qu'en dimension finie que ce résultat est vrai. Un théorème de Riesz affirme que la boule-unité fermée d'un espace vectoriel normé est compacte ssi l'espace est de dimension finie, ce qui revient à dire que l'équivalence précédente n'est valable que dans un espace de dimension finie.

En dimension infinie, il se passe des choses vraiment étranges : les compacts sont des parties très petites et plates, par exemple, un compact est forcément d'intérieur vide. Heureusement, il est plus courant de travailler à notre niveau en dimension finie.

Exemple 1.129
- L'ensemble des matrices stochastiques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un compact.

- La boule-unité fermée de $E = \mathscr{C}^0([0\,;\,1], \mathbb{R})$ pour la norme infinie n'est pas compacte, car la suite des fonctions $(x \longmapsto x^n)$ a pour seule valeur d'adhérence possible la fonction $x \longmapsto 0$ si $x \neq 1$ et $1 \longmapsto 1$, qui n'est même pas dans l'espace E.

Une application importante de la notion de compacité est le théorème suivant.

Théorème 1.130
Tout sous-espace vectoriel de dimension finie de E est fermé.

En dimension infinie, là encore il peut se passer des choses étranges : un sous-espace de E de dimension infinie peut être dense (et donc non-fermé s'il est différent de E).

1.7.4 Théorème des bornes atteintes

Le principal intérêt des compacts est de pouvoir généraliser un théorème de première année.

Théorème 1.131
Soient E, F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E et $f : A \longrightarrow F$.

Si f est continue sur A et A est compacte, alors $f(A)$ est compacte.

On résume en disant que l'image continue d'un compact est un compact.

En particulier, toute fonction continue sur un compact est donc bornée. Dans le cas des fonctions numériques (*i.e.* à valeurs dans $\mathbb{R}$), on peut même être plus précis.

Théorème 1.132
Toute fonction continue sur un compact et à valeurs réelles est bornée et atteint ses bornes.

Autrement dit, si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur A et A est une partie compacte de E, alors il existe $(a, b) \in A^2$ tel que pour tout $x \in A$, $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$, ce qui revient à dire que f possède un minimum et un maximum sur A.

Remarque 1.133
Ce théorème est à rapprocher du théorème vu en première année : toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Néanmoins, le théorème de l'an dernier donnait un résultat un peu plus précis que celui de cette année car il donnait aussi l'image du segment, en précisant qu'il s'agissait aussi d'un segment, car il faisait aussi intervenir le théorème des valeurs intermédiaires.

Ici, dans la version proposée cette année, on ne peut rien dire de plus.

Exercice 1.134
Un exercice classique, à savoir refaire ! C'est la base de nombreux exercices.

Soient E de dimension finie et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que $f(x)$ tende vers $+\infty$ quand $\|x\|$ tend vers $+\infty$. Montrez que f possède un minimum.

Exemple : dans le plan euclidien géométrique, on choisit trois points A, B, C ; montrez alors qu'il existe un point M du plan tel que la somme $AM + BM + CM$ soit minimale.

Exercice 1.135
Soit $f : (x, y) \longmapsto xy\sqrt{1 - x^2 - 2y^2}$.

Justifiez que l'ensemble de définition D de f est un compact de $\mathbb{R}^2$.

Déterminez les points critiques de f dans l'ouvert $\mathring{D}$, puis les maxima et minima de f.

On retrouve aussi le théorème de Heine en conséquence de la compacité.

Définition 1.136
Soient E, F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E et $f : A \longrightarrow F$.

On dit que f est uniformément continue sur A quand

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x, y) \in A^2,\ \|x - y\| \leqslant \eta \implies \|f(x) - f(y)\| \leqslant \varepsilon.$$

Théorème 1.137
Soient E, F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E et $f : A \longrightarrow F$.

Si f est continue sur A et A est compacte, alors f est uniformément continue sur A.

1.8 Connexité par arcs

Dans cette section, E est un espace vectoriel normé.

1.8.1 Chemin

Définition 1.138
Soient A une partie de E et $a, b \in A$.

On appelle chemin (ou arc) dans A de a à b toute application continue $\varphi : [0 ; 1] \longrightarrow A$ telle que $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = b$. Le support du chemin est l'image de φ.

On peut définir une relation d'équivalence sur une partie de E en mettant en relation les points joignables par un chemin.

Définition 1.139
Soient A une partie de E et $a, b \in A$.

On pose $a \mathscr{R} b$ quand il existe un chemin dans A de a à b.

Proposition 1.140
Avec les notations précédentes, la relation $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur A.

1.8.2 Parties connexes par arcs

Définition 1.141
Soit A une partie de E.

On dit que A est connexe par arcs quand tout couple de points $(a, b) \in A^2$ est joignable par un chemin.

Exemple 1.142
- Les parties convexes de E sont connexes par arcs.
- Les parties étoilées de E sont connexes par arcs.
- $\mathbb{C}^*$ et $\mathbb{C} \setminus D$ où D est la demi-droite des réels négatifs sont connexes par arcs.

Les classes d'équivalences de la relation notée $\mathscr{R}$ précédemment s'appellent les composantes connexes par arcs de A : ce sont par définition des parties connexes par arcs.

Proposition 1.143
Les seules parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ *sont les intervalles.*

Remarque 1.144
Il existe une notion plus générale, celle de partie connexe : une partie A de E est dite connexe quand les seules parties de A à la fois ouvertes et fermées sont $\varnothing$ et A. Elle est plus délicate à aborder et est hors-programme, c'est pourquoi on s'en tient à la notion de connexité par arcs (toute partie connexe par arcs est connexe).

1.8.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Là encore, la notion de connexité par arcs permet de généraliser des résultats de première année.

Théorème 1.145
Soient E, F *deux espaces vectoriels normés,* A *une partie de* E *et* $f : A \longrightarrow F$.

Si f *est continue par* A *et* A *est connexe par arcs, alors* $f(A)$ *est connexe par arcs.*

On résume en disant que l'image continue d'un connexe par arcs est un connexe par arcs.

Dans le cas des fonctions numériques (*i.e.* à valeurs dans $\mathbb{R}$), on peut même être plus précis.

Théorème 1.146
Toute fonction continue sur un connexe par arcs et à valeurs réelles vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

Autrement dit, si $f : A \longrightarrow F$ *est continue sur* A *une partie connexe par arcs de* E*, alors* $f(A)$ *est un intervalle.*

Ou encore :
$$\forall (y, z) \in f(A)^2, \ \forall w \in [yz], \ \exists t \in A, \ f(t) = w.$$

Chapitre 2

Séries numériques et vectorielles : révisions et compléments

Sommaire

Dans ce chapitre, E désigne un espace vectoriel normé (qui peut être $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $\|\cdot\|$ la norme associée (qui est dans ces cas la valeur absolue ou le module).

2.1 Rappels

2.1.1 Définitions et notations

Définition 2.1 (Série vectorielle)
Soit u une suite de E.

On associe à cette suite la suite s définie de la façon suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

La suite s est appelée série de terme général u_n et notée $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ ou $\sum u$.

Chaque nombre s_n est appelé somme partielle d'indice n de la série.

L'adjectif « numérique » associé au mot « série » signifie que les termes généraux de la série sont en fait des nombres réels ou complexes.

2.1.2 Convergence d'une série

Définition 2.2
Soit u une suite de E.

On dit que la série $\sum u$ converge ssi la suite des sommes partielles $(s_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k \right)$ converge.

Dans ce cas, si $\ell = \lim_{n \longrightarrow +\infty} s_n$, alors ℓ est appelée somme de la série $\sum u$ et on note $\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

On appelle aussi reste partiel d'indice n de la série le nombre $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$, de sorte que $r_n + s_n = \ell$.

La suite des restes partiels converge donc vers 0.

Dans le cas contraire, on dit que la série $\sum u$ diverge.

Exemple 2.3

- Soit $x \in \mathbb{C}$. La série $\sum_{n \geqslant 0} x^n$ converge ssi $|x| < 1$ et, dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$. Cette série est appelée série géométrique de raison x.
- Les séries de Riemann : $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z$.

On peut bien sûr généraliser aux séries quelques théorèmes d'opérations.

Proposition 2.4
Soient u, v deux suites de E et λ un scalaire.

Si les séries $\sum u$ et $\sum v$ convergent, alors la série $\sum (u + \lambda v)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Ceci prouve aussi que l'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel.

Remarque 2.5
La somme d'une série divergente et d'une série convergente est une série divergente.

En revanche, il n'y a rien à dire a priori à propos de la somme de deux séries divergentes.

2.1.3 Lien entre convergence de suites et convergence de séries

Proposition 2.6
Soit u une suite de E.

Si la série $\sum u$ converge, alors la suite u converge vers 0.

Remarque 2.7

- La réciproque est fausse.
- Par contraposition, si une suite u ne tend pas vers 0, alors la série associée diverge : on dit que la série $\sum u$ diverge grossièrement.

Exemple 2.8
On appelle série harmonique la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$.

Cette série diverge, pourtant son terme général tend vers 0.

Définition 2.9
Soit u une suite de E. On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$.

La série $\sum v$ est appelée la série télescopique (ou série domino, ou série différence) associée à u.

Proposition 2.10
Une suite converge ssi sa série télescopique associée converge.

Exercice 2.11

On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$. Montrez que la suite u converge.

2.2 Séries réelles à termes positifs

Dans cette section, on s'intéresse uniquement aux séries dont le terme général est un réel positif.

On appelle un premier théorème issu du cours de première année.

Théorème 2.12
Soient $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ deux suites réelles positives.

- *Si $0 \leqslant \boldsymbol{u} \leqslant \boldsymbol{v}$ et si la série $\sum \boldsymbol{v}$ converge, alors la série $\sum \boldsymbol{u}$ converge.*
- *Si $0 \leqslant \boldsymbol{u} \leqslant \boldsymbol{v}$ et si la série $\sum \boldsymbol{u}$ diverge, alors la série $\sum \boldsymbol{v}$ diverge.*
- *Si $\boldsymbol{u} \sim \boldsymbol{v}$, alors les séries $\sum \boldsymbol{u}$ et $\sum \boldsymbol{v}$ sont de même nature.*

Une application classique : la règle de d'Alembert.

Proposition 2.13
Soit $\boldsymbol{u}$ une suite réelle strictement positive telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \ell$. Alors

- *si $\ell < 1$, la série $\sum \boldsymbol{u}$ converge ;*
- *si $\ell > 1$, la série $\sum \boldsymbol{u}$ diverge ;*
- *si $\ell = 1$, on ne peut rien conclure.*

Exercice 2.14
Soient $x, y > 0$. Représentez graphiquement l'ensemble des couples (x, y) tels que la série $\sum \dfrac{x^n}{y^n + n^x}$ converge.

Exercice 2.15
Montrez que la suite (u_n) définie par $u_0 \in [0\,;1]$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + u_n^2\right)$ converge vers 0 et donnez la nature de la série $\sum u_n$.

On donne quelques versions plus élaborées du théorème de comparaison.

2.2.1 Théorème de Cesàro

Théorème 2.16
Soit u une suite numérique qui converge vers ℓ. Alors $\dfrac{u_0 + \cdots + u_n}{n} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \ell$.

Dans le cas où $\ell \neq 0$, la série $\sum u$ diverge grossièrement et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} n\ell$.

Dans le cas où $\ell = 0$, on peut juste dire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = o(n)$.

Exercice 2.17
Soit u la suite définie par récurrence par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{u_n + 1}{u_n + 2}$.

Étudiez la convergence ou divergence de la suite u, puis donnez un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$.

2.2.2 Théorème de comparaison par domination de séries à termes positifs

Dans le cas convergent d'abord, les restes partiels suivent la même relation de comparaison.

Théorème 2.18
Soient u, v deux suites réelles positives.

Si $u = \mathcal{O}(v)$ et la série $\sum v$ converge, alors la série $\sum u$ converge. De plus, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \mathcal{O}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.

Si $u = o(v)$ et la série $\sum v$ converge, alors la série $\sum u$ converge. De plus, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.

Dans le cas divergent ensuite, les sommes partielles suivent aussi la même relation de comparaison.

Théorème 2.19
Soient u, v deux suites réelles positives.

Si $u = \mathcal{O}(v)$ et la série $\sum u$ diverge, alors la série $\sum v$ diverge. De plus, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \mathcal{O}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.

Si $u = o(v)$ et la série $\sum u$ diverge, alors la série $\sum v$ diverge. De plus, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.

2.2.3 Théorème de comparaison par équivalence de séries à termes positifs

Théorème 2.20
Soient u, v deux suites réelles positives.

Si $u \sim v$, alors les séries $\sum u$ et $\sum v$ sont de même nature ; l'une converge ssi l'autre converge.

De plus,

- *si les séries convergent, alors les restes partiels sont équivalents :* $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$;
- *si les séries divergent, alors les sommes partielles divergent vers $+\infty$ et sont équivalentes :* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k$.

Exercice 2.21
Soit $a > 0$. On pose $u_n = \sin\dfrac{a^n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Selon la valeur de a, déterminez la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant1} u_n$.

Montrez que si $a = 1$, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \sim \ln n$ et si $a < 1$, $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = o\left(a^n\right)$.

2.2.4 Théorème de comparaison série - intégrale

Proposition 2.22
Soit f une fonction continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Alors la série de terme général $f(n)$ et la suite de terme général $\displaystyle\int_0^n f$ sont de même nature.

Méthode 2.23 (À retenir)
La technique d'encadrement des sommes partielles d'une série $\sum f(n)$ (ou des restes partiels) par des intégrales quand f est continue, positive et monotone.

Exemple 2.24

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} \ln n$ (à connaître).
- Si $\alpha > 1$, un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ quand $n \longrightarrow +\infty$ est $\displaystyle\frac{1}{(\alpha - 1)\, n^{\alpha-1}}$.

Exercice 2.25
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln k}{k^2}$.

Justifiez l'existence de u_n, puis montrez la divergence de la série $\sum u_n$.

Montrez que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln^2 n}{2}$.

2.3 Séries absolument convergentes

Définition 2.26
Soit u une suite de E.

On dit que la série $\sum u$ est absolument convergente ssi la série à termes positifs $\sum \|u\|$ est convergente.

2.3.1 Lien entre absolue convergence et convergence

Théorème 2.27
Si E est de dimension finie, alors toute série absolument convergente est convergente.

Remarque 2.28
- La réciproque est fausse : la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge (on l'appelle la série harmonique alternée) mais ne converge pas absolument.
- L'hypothèse de la dimension finie est indispensable. En dimension infinie, ce résultat est faux en général.

Exercice 2.29
Soit $x > 0$. Montrez que les séries suivantes convergent :

$$\sum_{n \geqslant 2} \frac{\ln\left(n^2 + (-1)^n n\right)}{n^2 + (-1)^n x^n} \qquad \sum_{n \geqslant 0} \sqrt{n} \cos(x) \sin^n(x) \qquad \sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n \sqrt{n + x}}{x^n + n^{2/x}}.$$

2.3.2 Un exemple fondamental : l'exponentielle de matrice

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

On choisit comme norme sur $E = \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ une norme sous-multiplicative.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|A^n\| \leqslant \|A\|^n$, donc $\|\frac{A^n}{n!}\| \leqslant \frac{\|A\|^n}{n!}$.

Or la série $\sum \frac{\|A\|^n}{n!}$ converge (et sa somme vaut $\exp\|A\|$), donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \frac{A^n}{n!}$ est absolument convergente.

On pose alors $\exp A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$.

2.3.3 Extension des résultats par comparaison

Définition 2.30
Soit u une suite de E et v une suite réelle positive.

On dit que $u = \mathcal{O}(v)$ quand $\exists M > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \|u_n\| \leqslant M v_n$.

On dit que $u = o(v)$ quand $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \|u_n\| \leqslant \varepsilon v_n$.

Proposition 2.31
Soient u une suite de E et v une suite réelle positive.

Si E est de dimension finie, $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ quand n tend vers $+\infty$ et la série $\sum v$ converge, alors la série $\sum u$ est absolument convergente.

De plus, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \mathcal{O}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.

Ceci est encore valable si $u_n = o(v_n)$.

Proposition 2.32
Soient u une suite de E et v une suite réelle positive.

Si E est de dimension finie, $u_n = o(v_n)$ quand n tend vers $+\infty$ et la série $\sum v$ converge, alors la série $\sum u$ est absolument convergente.

De plus, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.

2.3.4 Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes

Définition 2.33
Soient E une algèbre normée de dimension finie, $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ deux séries à termes dans E.

On appelle produit de Cauchy des deux séries la série $\sum_{n\geqslant 0} c_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Remarque 2.34
Quand les séries ne commencent pas à partir du rang 0, il faut se méfier ! Une idée simple est de se ramener au cas précédent en décalant les indices.

Exemple très courant : les séries commencent au rang 1. Dans ce cas, le produit de Cauchy des séries $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ est la série $\sum_{n\geqslant 1} c_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}$.

Théorème 2.35
Avec les mêmes hypothèses sur E.

Si les séries $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ convergent absolument, alors leur produit de Cauchy est aussi absolument convergent et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times \sum_{k=0}^{+\infty} b_n.$$

2.4 Séries alternées

Définition 2.36
Une série alternée est une série réelle $\sum u_n$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} est de signe opposé à u_n.

En général, les séries alternées sont reconnaissables à la présence d'un facteur $(-1)^n$ dans l'expression du terme général.

On dispose d'une condition suffisante de convergence d'une série alternée qu'on appelle le critère spécial des séries alternées.

Théorème 2.37
Soit $\sum (-1)^n u_n$ *une série alternée.*

Si la suite u

- *est positive,*
- *est décroissante,*
- *et converge vers* 0,

alors la série $\sum (-1)^n u_n$ *converge.*

Dans ce cas, la somme de la série est positive, et si on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$ *le reste partiel d'indice* n*, alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$, R_n *est du signe de son premier terme (i.e. du signe de* $(-1)^{n+1}$ *) et* $|R_n| \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

Exemple 2.38

- La série harmonique alternée $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge.
- La série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ converge.

Remarque 2.39

- Si $\sum_{n\geqslant n_0} (-1)^n u_n$ est une série alternée convergente, sa somme a le signe du premier terme de la série (ici le signe de $(-1)^{n_0} u_{n_0}$).
- La condition de décroissance de la suite u est essentielle ! Contre-exemple : la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}}$ est une série alternée divergente.
  De plus, cela fournit un contre-exemple au théorème de comparaison par équivalents si on ne tient pas compte de la condition sur le signe, qui doit être constant.

Exercice 2.40
Soit $\alpha > 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha + k}$.

Justifiez l'existence de u_n. Montrez que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

Deuxième partie

Exercices

Chapitre 3

Espaces vectoriels normés

$\star$ Exercice proche du cours
$\star\star$ Exercice de difficulté normale
$\star\star\star$ Exercice difficile (voire très difficile)
+ Exercice à faire en priorité

+ $\star\star$ Exercice 3.1 (Exercice 1)
Soit u une suite réelle bornée. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \left\{u_p \;\middle|\; p \geqslant n\right\}$, $a_n = \inf U_n$ et $b_n = \sup U_n$.

(1) Justifiez l'existence des suites a et b et étudiez leur monotonie, ainsi que leur convergence.

(2) Montrez que u converge ssi a et b ont la même limite.

Note culturelle : la limite de a s'appelle la limite inférieure de u, notée $\underline{\lim}\, u$ et celle de b est la limite supérieure, notée $\overline{\lim}\, u$.

Correction 3.2
$\star\star$ À venir $\star\star$

+$\star$ Exercice 3.3 (Exercice 2)
Montrez que les applications N introduites ci-dessous sont des normes :

(1) si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, l'application N définie sur $\mathbb{R}^n$ par $N(X) = \|AX\|_2$;

(2) sur $E = \mathscr{C}^1([a\,;\,b], \mathbb{K})$, $N(f) = |f(a)| + \displaystyle\int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t$;

(3) pour des réels $\alpha_0 < \cdots < \alpha_n$ fixés, l'application N définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $N(P) = \max\limits_{k \in [\![0;n]\!]} |P(\alpha_k)|$.

Correction 3.4
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆ Exercice 3.5 (Exercice 3)
Sur $E = \mathbb{R}^2$, on définit
$$\|(x, y)\| = \max\left(|x|, |x + 2y|\right).$$

Démontrez que $\|\cdot\|$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$. Représentez graphiquement la boule-unité.

Correction 3.6
⋆⋆ À venir ⋆⋆

+ ⋆ ⋆ Exercice 3.7 (Exercice 4)
Les normes définies dans l'exercice 2 sont-elles équivalentes à la norme $\|\cdot\|_\infty$, la norme $\|\cdot\|_1$, la norme $\|\cdot\|_2$?

Correction 3.8
⋆⋆ À venir ⋆⋆

+⋆ Exercice 3.9 (Exercice 5)
Soit $\theta \not\equiv 0\,[\pi]$. Montrez que $(\sin(n\theta))$ et $(\cos(n\theta))$ divergent.

Correction 3.10
⋆⋆ À venir ⋆⋆

+⋆ Exercice 3.11 (Exercice 6)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que la suite $\left(A^k\right)$ converge. Montrez que sa limite est la matrice d'un projecteur.

Correction 3.12
⋆⋆ À venir ⋆⋆

★★ Exercice 3.13 (Exercice 7)
Cet exercice prolonge le premier.

Soit u une suite vérifiant la propriété

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2,\ \ p \geqslant n \geqslant N \implies \left|u_n - u_p\right| \leqslant \varepsilon.$$

Montrez que u est bornée, puis en vous servant des suites a et b définies comme ci-dessus, montrez que u converge.

Note culturelle : on dit que u est une suite de Cauchy et on a donc montré que toute suite de Cauchy converge.

Correction 3.14
★★ À venir ★★

+ ★ ★ Exercice 3.15 (Exercice 8)
On note ℓ_1 l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que la série $\sum u_k$ soit absolument convergente, et on pose :

$$\forall u = (u_k) \in \ell_1,\ \ N(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|\,.$$

(1) Justifiez que ℓ_1 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(2) Montrez que N est une norme sur ℓ_1. On notera désormais $\|u\|_1$ pour $N(u)$.

(3) Justifiez que, si $\left(u^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de ℓ_1 convergeant vers la suite $a \in \ell_1$ pour la norme 1, alors

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \ u_k^{(n)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} a_k.$$

(4) Montrez que la réciproque est fausse.
Indication : on pourra étudier l'exemple où, pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, $u_k^{(n)} = \exp\left(\dfrac{-k}{n+1}\right)$.

Correction 3.16
★★ À venir ★★

+★ Exercice 3.17 (Exercice 9)
Soit E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites bornées muni de la norme infinie.

Montrez que les applications $u \longmapsto (u_{n+1} - u_n)$ et $u \longmapsto \dfrac{u_0 + \cdots + u_n}{n+1}$ sont des applications continues de E dans E.

Correction 3.18

★★ À venir ★★

+ ★ ★ Exercice 3.19 (Exercice 10)

Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $A = (a_{ij})$ on pose $\|A\| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

(1) Montrez que $\| \cdot \|$ est une norme sur E.

(2) Montrez que l'application $A \longmapsto {}^tA$ est un endomorphisme continu et déterminez sa norme subordonnée.

Correction 3.20

★★ À venir ★★

★★ Exercice 3.21 (Exercice 11)

Soit $E = \mathscr{C}^0([0\,;\,1], \mathbb{R})$. On pose $A = \{f \in E \mid f \geqslant 0\}$ et pour $f \in E$, $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f|$.

(1) Montrez que $\| \cdot \|_1$ est une norme sur E.

(2) Déterminez $\mathring{A}$ dans $(E, \| \cdot \|_\infty)$, puis dans $(E, \| \cdot \|_1)$.

(3) On pose $D = \mathscr{D}^1([0\,;\,1], \mathbb{R})$ le sous-espace des fonctions dérivables et P le sous-espace des fonctions polynômes.
Déterminez les intérieurs de P et D dans $(E, \| \cdot \|_\infty)$.

Correction 3.22

★★ À venir ★★

★★ Exercice 3.23 (Exercice 12)

Cet exercice prolonge le précédent, les notations sont reprises.

Soit $u : E \longrightarrow E$ qui à toute fonction f de E associe sa primitive qui s'annule en 0. Vérifiez que u est un endomorphisme de E.

Est-il continu de $(E, \| \cdot \|_?)$ dans $(E, \| \cdot \|_?)$ (vous étudierez les quatre possibilités) ? Quand c'est le cas, déterminez la norme subordonnée de u.

Correction 3.24
⋆⋆ À venir ⋆⋆

+ ⋆ ⋆ Exercice 3.25 (Exercice 13)
Soit $E = \left\{ f \in \mathscr{C}^1 \left([0\,;\,1]\,, \mathbb{R} \right) \,\middle|\, f\left(0\right) = f\left(1\right) = 0 \right\}$. Pour $f \in E$, on pose $\|f\| = \sup\limits_{[0;1]} |f'|$.

(1) Montrez que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.

(2) Soit $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi\left(f\right) = \displaystyle\int_0^1 f$. Montrez que φ est continue et déterminez $|||f|||$.

Correction 3.26
⋆⋆ À venir ⋆⋆

+ ⋆ ⋆ Exercice 3.27 (Exercice 14)
Soient E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.

(1) Montrez que si $F \neq E$, alors $\mathring{F} = \varnothing$ et $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.

(2) Montrez que si F est un hyperplan, alors F est fermé ou dense dans E.

Correction 3.28
⋆⋆ À venir ⋆⋆

+⋆ Exercice 3.29 (Exercice 15)
Soient E un espace vectoriel normé et A une partie de E.

Montrez que $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A et $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A. Montrez que la frontière de A est un fermé d'intérieur vide.

Correction 3.30
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆ Exercice 3.31 (Exercice 16)
Une intersection d'ouverts est-elle toujours un ouvert ? Une réunion de fermés est-elle toujours un fermé ?

Correction 3.32
⋆⋆ À venir ⋆⋆

+⋆ Exercice 3.33 (Exercice 17)
Montrez que si A est une partie convexe d'un espace vectoriel normé E, alors il en est de même pour $\overline{A}$ et $\mathring{A}$.

Correction 3.34
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆⋆ Exercice 3.35 (Exercice 18)
Soient E un espace vectoriel normé, A une partie de E et $x \in E$. On dit que x est un point d'accumulation de A quand il existe une suite injective de $A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x. On dit que x est un point isolé de A quand il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \cap A = \{x\}$.

(1) Exemples. On pose $A = \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ dans $\mathbb{R}$: montrez que tous les points de A sont isolés, que le seul point d'accumulation de A est 0 et que A n'est pas fermé. On pose $B = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \,\middle|\, (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$: quels sont les points d'accumulation de B ?

(2) Montrez que x est un point d'accumulation ssi pour tout $r > 0$, $B(x, r) \cap A$ est un ensemble infini.

(3) On note A' l'ensemble des points d'accumulation de A et A^d l'ensemble des points isolés dans A. Montrez que $\overline{A} = A' \sqcup A^d$.

(4) Montrez que A' est un fermé.

Correction 3.36
⋆⋆ À venir ⋆⋆

★★ Exercice 3.37 (Exercice 19)
Soient E, F deux espaces vectoriels normés et $f : E \longrightarrow F$. Montrez l'équivalence entre les propositions :

(1) f est continue

(2) $\forall A \in \mathscr{P}(E), \ f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$

(3) $\forall B \in \mathscr{P}(F), \ f^{-1}\left(\mathring{B}\right) \subseteq \overbrace{f^{-1}(B)}^{\circ}$

Correction 3.38
★★ À venir ★★

+ ★ ★ Exercice 3.39 (Exercice 20)
Soient A, B deux fermés disjoints d'un espace vectoriel normé E.

(1) Montrez que $\{x \in E \mid d(x, A) > d(x, B)\}$ est un ouvert.

(2) Montrez qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $A \subseteq U$ et $B \subseteq V$.

Correction 3.40
★★ À venir ★★

+ ★ ★ Exercice 3.41 (Exercice 21)
Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Pour $r > 0$, on pose $V(A, r) = \{x \in E \mid d(x, A) < r\}$.

Montrez que $V(A, r)$ est un ouvert de E et $\bigcap_{r>0} V(A, r) = \overline{A}$.

Correction 3.42
★★ À venir ★★

+ ★ ★ Exercice 3.43 (Exercice 22)
Soient E un espace vectoriel normé, K un compact de E, $k \in [0\,;1[$ et $f : K \longrightarrow K$ telle que

$$\forall (x, y) \in K^2, \ \|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x - y\|.$$

Soit u la suite définie par u_0 quelconque dans K et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Montrez que u converge et que sa limite est l'unique point fixe de f.

Correction 3.44
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆⋆ Exercice 3.45 (Exercice 23)
Soient E un espace vectoriel normé et A une partie non-vide de E. On appelle diamètre de A, noté $\delta(A)$, la borne supérieure dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ des $\|x - y\|$ quand $(x, y) \in A^2$.

(1) Montrez que $\delta(A) < +\infty$ ssi A est bornée.

(2) Quel est le diamètre d'une boule ?

(3) Montrez que si A est compacte, alors il existe $(a, b) \in A^2$ tel que $\delta(A) = \|a - b\|$. Est-ce encore vrai si on suppose seulement A bornée ? A fermée ?

Correction 3.46
⋆⋆ À venir ⋆⋆

+ ⋆ ⋆ Exercice 3.47 (Exercice 24)
Soient E un espace vectoriel normé et A, B deux parties non-vides de E. On pose $d(A, B) = \inf_{(a,b)\in A\times B} \|a - b\|$, appelé distance de A à B.

(1) Montrez que si $d(A, B) > 0$, alors A et B sont disjointes, mais que la réciproque est fausse.

(2) Montrez que si A et B sont compactes, alors $d(A, B)$ est en fait un minimum plutôt qu'une borne inférieure.

(3) Montrez que ce résultat reste vrai si E est de dimension finie, l'une des deux parties est compacte et l'autre fermée.

(4) Est-ce encore vrai si on suppose seulement A et B fermées ?

Correction 3.48
⋆⋆ À venir ⋆⋆

$+\star\star$ Exercice 3.49 (Exercice 25)
Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et $\left(B_n = \overline{B}(a_n, r_n)\right)$ une suite de boules fermées, décroissantes pour l'inclusion, telle que $r_n \longrightarrow 0$.

(1) Montrez que la suite (a_n) admet une sous-suite convergeant vers un vecteur a.

(2) Montrez que $a_n \longrightarrow a$.

(3) Montrez que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \{a\}$.

Correction 3.50
$\star\star$ À venir $\star\star$

$\star\star$ Exercice 3.51 (Exercice 26)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrez que l'ensemble des projecteurs est fermé dans $\mathscr{L}(E)$. Est-il borné ? Compact ? Connexe par arcs ?

Correction 3.52
$\star\star$ À venir $\star\star$

$\star\star$ Exercice 3.53 (Exercice 27)
Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $\varepsilon > 0$. On pose $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |f(x) - y| \leqslant \varepsilon\right\}$.

(1) Montrez que E est connexe par arcs.

(2) Montrez que si f est une fonction affine, alors E est une partie convexe.

(3) Montrez que la réciproque est vraie.

Correction 3.54
$\star\star$ À venir $\star\star$

$\star\star$ Exercice 3.55 (Exercice 28)
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et H un hyperplan de E.

(1) Montrez que $E \setminus H$ possède deux composantes connexes par arcs qui sont ouvertes.

(2) Soit B une partie de H telle que $H \neq B$. Montrez que $E \setminus B$ est connexe par arcs.

Correction 3.56
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆⋆ Exercice 3.57 (Exercice 29)
Soient E un espace vectoriel normé et A, B deux parties de E telles que B est connexe par arcs et B rencontre à la fois A et $E \setminus A$.

Montrez que B rencontre la frontière de A.

Correction 3.58
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆⋆ Exercice 3.59 (Exercice 30)
Deux parties d'un espace vectoriel normé sont dites homéomorphes quand il existe une bijection continue de l'une dans l'autre telle que la réciproque soit aussi continue.

(1) Montrez que tout intervalle ouvert est homéomorphe à $\mathbb{R}$.

(2) Montrez qu'un intervalle qui contient l'une de ses bornes réelles ne peut pas être homéomorphe à $\mathbb{R}$.

(3) Montrez que toute boule ouverte d'un espace vectoriel normé E est homéomorphe à E.

(4) Montrez qu'aucune boule fermée de E n'est homéomorphe à E.

Correction 3.60
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆ ⋆ ⋆ Exercice 3.61 (Exercice 31)
Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, autre que $\{0\}$.

(1) Montrez que $a = \inf G \cap \mathbb{R}_+^*$ existe.

(2) Montrez que $G = a\mathbb{Z}$ si $a > 0$ ou G est dense dans $\mathbb{R}$ si $a = 0$.

(3) On pose $G = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ (G est le sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ engendré par 1 et $\sqrt{2}$) et $r = \sqrt{2} - 1$. En considérant la suite (r^n), montrez que G est dense dans $\mathbb{R}$.
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et périodique de périodes 1 et $\sqrt{2}$. Que peut-on dire de f ?

(4) Soient a, b deux réels distincts et non-nuls, on pose $G = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$. Montrez que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, puis que G est dense dans $\mathbb{R}$ ssi $\dfrac{a}{b}$ est un rationnel.
Application : montrez que les ensembles $\{\cos n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $\{\sin n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sont denses dans $[-1 ; 1]$.

Correction 3.62
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆ ⋆ ⋆ Exercice 3.63 (Exercice 32)
Soit $E = \mathscr{C}^0\left([0\,;\,1]\,,\mathbb{R}\right)$ muni de la norme infinie $\|f\| = \sup\limits_{[0;1]} |f|$. On note $\overline{B}\,(0,1)$ la boule-unité fermée.

Soit (t_n) une suite injective à valeurs dans $[0\,;\,1]$. Pour $f \in E$, on pose $L\,(f) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{f\,(t_n)}{2^n}$.

(1) Montrez que L est une forme linéaire continue sur E.

(2) Déterminez $K = \sup\limits_{f\in\overline{B}(0,1)} |L\,(f)|$.

(3) Montrez que si la suite (t_n) converge ou si elle est dense dans $[0\,;\,1]$, K n'est pas atteinte.

(4) Donnez un exemple de suite (t_n) pour laquelle K est atteinte. Donnez une condition nécessaire et suffisante sur la suite t pour que K soit atteinte.

Correction 3.64
⋆⋆ À venir ⋆⋆

⋆ ⋆ ⋆ Exercice 3.65 (Exercice 33)
Soient E un espace vectoriel normé et u une forme linéaire non-nulle et continue sur E. On pose $H = \ker u$ et $K = \sup\limits_{x\in E\setminus\{0\}} \dfrac{|u\,(x)|}{\|x\|}$.

(1) Justifiez l'existence de K.

(2) Montrez que pour tout $a \in E$, $d\,(a,H) = \dfrac{|u\,(a)|}{K}$.

Correction 3.66
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 3.67 (Oral CCMP, 1)
Soient E un espace vectoriel normé réel et B sa boule-unité ouverte. Montrez que E et B sont homéomorphes (*i.e.* il existe une bijection de E dans B qui est continue et dont la réciproque est aussi continue).

Correction 3.68
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 3.69 (Oral CCMP, 2)
Soient E un espace vectoriel normé réel et C, D deux parties de E telles que $C \subseteq D \subseteq \overline{C}$ et C convexe. Montrez que D est connexe par arcs.

Correction 3.70
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 3.71 (Oral CCMP, 3)
Soient E un espace vectoriel normé réel, K un compact de E et $f : K \longrightarrow K$ telle que

$$\forall (x, y) \in K^2, \ \ x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

(1) Montrez que f possède un unique point fixe.

(2) Soit u la suite définie par u_0 quelconque dans K et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrez que u converge vers le point fixe de f.

Correction 3.72
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 3.73 (Oral CCMP, 4)
Soit u une suite réelle bornée telle que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$. Montrez que l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est un intervalle.

Correction 3.74
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 3.75 (Oral Centrale, 5)
Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ tel que pour tout $g \in G$ il existe un voisinage V de g tel que $G \cap V = \{g\}$.

(1) Montrez que pour tout compact K de $\mathbb{C}^*$, $G \cap K$ est fini.

(2) Montrez que $G \cap \mathbb{U}$ est un groupe cyclique.

(3) On suppose que G n'est pas contenu dans $\mathbb{U}$. Soit $A = \{|x| \mid x \in G \text{ et } |x| > 1\}$. Montrez que A possède un plus petit élément. Déduisez-en G.

Correction 3.76

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 3.77 (Oral Centrale, 6)

Soient E, F deux espaces vectoriels normés de dimensions finies et $f : E \longrightarrow F$. On dit que f est propre quand pour tout compact K de F, $f^{-1}(K)$ est un compact de E.

(1) Montrez que si f est propre, alors l'image d'un fermé de E est un fermé de F.

(2) Montrez que f est propre ssi $\|f(x)\| \xrightarrow[\|x\| \longrightarrow +\infty]{} +\infty$.

Correction 3.78

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 3.79 (Oral X, 7)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, U_n l'ensemble des polynômes réels unitaires de degré n et A_n l'ensemble des polynômes de U_n qui sont simplement scindés (*i.e.* ayant n racines réelles distinctes).

(1) Montrez que A_n est un ouvert de U_n.

(2) Déterminez l'adhérence de A_n.

Correction 3.80

⋆⋆ À venir ⋆⋆