

Maths – MPI

Romain Bricout

18 mai 2025

Introduction

Ce document réunit l'ensemble de mes cours de Mathématiques de MPI, ainsi que les exercices les accompagnant. Le professeur était M. Walbron. J'ai adapté certaines formulations me paraissant floues ou ne me plaisant pas mais le contenu pur des cours est strictement équivalent.

Les éléments des tables des matières initiale et présentes au début de chaque chapitre sont cliquables (amenant directement à la partie cliquée). C'est également le cas des références à des éléments antérieurs de la forme, par exemple, « Démonstration 5.22 ».

Cette version contient, en plus des cours imprimés distribués durant l'année, toutes les démonstrations qui vont avec. Voir l'autre version pour n'avoir que les cours bruts.

Table des matières

I	Cours	11
1	Espaces vectoriels normés	12
1.1	Bornes supérieures, bornes inférieures	13
1.1.1	Borne supérieure d'une partie de \mathbb{R}	13
1.1.2	Borne supérieure d'une application à valeurs dans \mathbb{R}	15
1.1.3	Règles pratiques	15
1.2	Normes.	16
1.2.1	Définition	16
1.2.2	Exemples fondamentaux	17
1.2.3	Normes équivalentes	19
1.2.4	Boules	22
1.2.5	Parties bornées	25
1.3	Convergence des suites	30
1.3.1	Définition	30
1.3.2	Propriétés usuelles	31
1.3.3	Cas particulier en dimension finie	33
1.3.4	Point adhérent à une partie	35
1.4	Limites de fonctions	38
1.4.1	Définition	38
1.4.2	Caractérisation séquentielle de la limite	38
1.4.3	Propriétés usuelles	39
1.4.4	Cas particulier de la dimension finie	40
1.4.5	Composition des limites	41

1.4.6	Extensions des définitions	41
1.5	Fonctions continues	42
1.5.1	Continuité en un point	42
1.5.2	Continuité sur une partie	43
1.5.3	Cas particulier de la dimension finie	43
1.5.4	Fonctions lipschitziennes	44
1.5.5	Continuité des applications linéaires et n -linéaires	46
1.5.6	Norme subordonnée	53
1.6	Topologie d'un espace vectoriel normé.	57
1.6.1	Intérieur d'une partie, voisinage d'un point	57
1.6.2	Parties ouvertes	59
1.6.3	Parties fermées	60
1.6.4	Ouverts ou fermés relatifs à une partie	65
1.6.5	Image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé par une fonction continue	65
1.6.6	Frontière d'une partie	68
1.7	Compacité	68
1.7.1	Valeurs d'adhérence d'une suite	68
1.7.2	Théorème de Bolzano-Weierstrass	70
1.7.3	Parties compactes	72
1.7.4	Théorème des bornes atteintes	76
1.8	Connexité par arcs	81
1.8.1	Chemin	81
1.8.2	Parties connexes par arcs	82
1.8.3	Théorème des valeurs intermédiaires	83

2 Séries numériques et vectorielles : révisions et compléments 85

2.1	Rappels	85
2.1.1	Définitions et notations	85
2.1.2	Convergence d'une série	86
2.1.3	Lien entre convergence de suites et convergence de séries	87

2.2	Séries réelles à termes positifs	88
2.2.1	Théorème de Cesàro	92
2.2.2	Théorème de comparaison par domination de séries à termes positifs	93
2.2.3	Théorème de comparaison par équivalence de séries à termes positifs	95
2.2.4	Théorème de comparaison série - intégrale	97
2.3	Séries absolument convergentes	101
2.3.1	Lien entre absolue convergence et convergence	101
2.3.2	Un exemple fondamental : l'exponentielle de matrice	102
2.3.3	Extension des résultats par comparaison	102
2.3.4	Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes	104
2.4	Séries alternées	106
3	Familles sommables	108
3.1	Sommes finies	108
3.1.1	Définition	108
3.1.2	Propriétés	111
3.2	Conventions de calcul dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$	112
3.3	Somme d'une famille de réels positifs	113
3.3.1	Propriétés	114
3.3.2	Théorème de sommation par paquets	115
3.3.3	Théorème de Fubini	115
3.4	Familles sommables dans un espace vectoriel normé de dimension finie	116
3.4.1	Définitions	116
3.4.2	Propriétés	118
3.4.3	Théorème de sommation par paquets	119
3.4.4	Théorème de Fubini	121
3.4.5	Produit de Cauchy de deux séries	123
4	Rappels et compléments d'algèbre linéaire	125

4.1	Sommes de sous-espaces vectoriels	126
4.1.1	Généralités	126
4.1.2	Sommes directes	126
4.1.3	Sous-espaces supplémentaires	128
4.1.4	Cas particulier de deux sous-espaces	132
4.1.5	Applications linéaires et sommes directes	132
4.2	Somme de sous-espaces vectoriels en dimension finie.	133
4.2.1	Base adaptée à un sous-espace	133
4.2.2	Sommes directes et bases	134
4.2.3	Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels	134
4.2.4	Sous-espaces supplémentaires	136
4.2.5	Dimension d'une somme de deux sous-espaces vectoriels	138
4.3	Polynômes d'endomorphismes et de matrices.	138
4.3.1	\mathbb{K} -algèbres	138
4.3.2	Cas particulier des algèbres $\mathcal{L}(E)$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	140
4.3.3	Polynôme annulateur d'une matrice ou d'un endomorphisme	140
4.3.4	Utilisation pratique d'un polynôme annulateur	143
4.4	Matrices semblables, trace.	150
4.4.1	Trace d'une matrice	150
4.4.2	Matrices semblables	150
4.4.3	Trace d'un endomorphisme	151
4.5	Opérations par blocs	152
4.5.1	Cas général	152
4.5.2	Cas particuliers des matrices carrées	153
4.5.3	Interprétation des blocs	153

5 Réduction des endomorphismes 156

5.1	Éléments propres d'un endomorphisme	157
5.1.1	Valeurs propres et vecteurs propres	157
5.1.2	Lien avec les polynômes annulateurs	158

5.1.3	Sous-espaces propres	160
5.2	Polynôme caractéristique d'un endomorphisme	162
5.2.1	Caractérisation des valeurs propres en dimension finie	162
5.2.2	Définition et lien avec les valeurs propres	162
5.2.3	Ordre de multiplicité et dimension du sous-espace propre	165
5.2.4	Endomorphisme scindé	166
5.3	Éléments propres d'une matrice carrée	167
5.3.1	Valeurs propres et vecteurs propres	167
5.3.2	Lien avec les polynômes annulateurs	168
5.3.3	Sous-espaces propres	168
5.4	Polynôme caractéristique d'une matrice carrée	169
5.4.1	Définition et lien avec les valeurs propres	169
5.4.2	Ordre de multiplicité et dimension du sous-espace propre	171
5.4.3	Matrice scindée	171
5.5	Endomorphismes diagonalisables, matrices diagonalisables	172
5.5.1	Définition	172
5.5.2	Caractérisations équivalentes	173
5.5.3	Lien avec le polynôme caractéristique	175
5.6	Lien entre diagonalisabilité et polynômes annulateurs	176
5.6.1	Racines du polynôme minimal	176
5.6.2	Lemme des noyaux	177
5.6.3	Application à la diagonalisabilité	179
5.6.4	Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit	182
5.7	Quelques applications de la diagonalisation	183
5.7.1	Puissances d'une matrice, suites récurrentes linéairement	183
5.7.2	Systèmes d'équations différentielles	184
5.8	Endomorphismes trigonalisables, matrices trigonalisables	184
5.8.1	Définition et propriétés	184
5.8.2	Caractérisation équivalente	185

5.8.3	Théorème de Cayley-Hamilton	188
5.8.4	Sous-espaces caractéristiques	189
5.9	Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes	191
5.9.1	Généralités	191
5.9.2	Éléments propres d'un nilpotent	193
5.9.3	Application aux sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme	193
6	Intégrales généralisées	196
	Fonctions continues par morceaux sur un intervalle	197
6.1	Intégrales généralisées sur $[a ; +\infty[$	197
6.1.1	Définition et exemples fondamentaux	197
6.1.2	Propriétés	199
6.1.3	Cas des fonctions réelles positives	201
6.1.4	Théorème de comparaison entre fonctions positives	202
6.1.5	Lien avec les séries	205
6.2	Intégrales généralisées sur d'autres types d'intervalles	209
6.2.1	Intégrales généralisées sur $[a ; b[$	209
6.2.2	Intégrales généralisées sur $]a ; b]$	209
6.2.3	Intégrales généralisées sur $]a ; b[$	211
6.2.4	Propriétés communes à toutes ces intégrales	213
6.3	Résumé pour étudier la convergence d'une intégrale	219
6.4	Fonctions intégrables sur un intervalle.	221
6.4.1	Intégrales absolument convergentes	221
6.4.2	Fonctions intégrables	223
6.4.3	Théorème de comparaison des fonctions intégrables	224
6.5	Intégration des relations de comparaison	225
6.5.1	Théorème de comparaison par domination	226
6.5.2	Théorème de comparaison par équivalence	227
7	Intégrales à paramètre	229

7.1	Introduction	229
7.2	Convergence simple	230
7.2.1	Convergence simple d'une suite de fonctions	230
7.2.2	Convergence simple d'une série de fonctions	232
7.3	Suites et séries de fonctions intégrables	233
7.3.1	Théorème de convergence dominée	233
7.3.2	Théorème d'intégration terme à terme	236
7.4	Fonctions définies par une intégrale à paramètre	238
7.4.1	Continuité	238
7.4.2	Dérivabilité	239
7.5	Domination sur des sous-intervalles	243
7.6	Complément : la fonction Γ d'Euler.	246
8	Espaces préhilbertiens réels	248
8.1	Généralités	248
8.1.1	Produit scalaire	248
8.1.2	Exemples fondamentaux	249
8.1.3	Norme euclidienne	250
8.1.4	Vecteurs orthogonaux	253
8.2	Bases orthonormées	254
8.2.1	Familles orthonormées	254
8.2.2	Existence de bases orthonormées	255
8.2.3	Calculs en base orthonormée	257
8.3	Sous-espaces orthogonaux	257
8.3.1	Orthogonalité de deux sous-espaces vectoriels	257
8.3.2	Orthogonal d'un sous-espace vectoriel	258
8.4	Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie	260
8.4.1	Projection orthogonale	260
8.4.2	Distance à un sous-espace vectoriel	261

9	Endomorphismes dans un espace euclidien	263
9.1	Adjoint d'un endomorphisme	263
9.1.1	Représentation des formes linéaires	263
9.1.2	Adjoint	264
9.1.3	Matrice de l'adjoint	268
9.1.4	Stabilité de sous-espaces vectoriels	270
9.2	Orientation d'un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie	270
9.3	Isométries vectorielles	271
9.4	Matrices orthogonales	274
9.4.1	Déterminant d'une isométrie vectorielle	277
9.4.2	Changements de bases orthonormées	278
9.4.3	Produit mixte	279
9.4.4	Produit vectoriel en dimension 3	280
9.5	Étude en dimension 2.	281
9.6	Réduction des isométries vectorielles ou des matrices orthogonales.	283
9.6.1	Réduction des isométries vectorielles	283
9.6.2	Réduction des matrices orthogonales	288
9.6.3	Étude en dimension 3	288
9.7	Endomorphismes auto-adjoints.	294
9.7.1	Définition et propriétés	294
9.7.2	Théorème spectral	295
9.8	Endomorphismes auto-adjoints positifs, définis-positifs.	298
9.8.1	Endomorphismes auto-adjoints positifs	298
9.8.2	Matrices symétriques positives	300
10	Fonctions vectorielles	301
11	Suites et séries de fonctions	302
12	Séries entières	303

13 Probabilités	304
14 Variables aléatoires discrètes	305
15 Équations différentielles linéaires	306
16 Calcul différentiel	307
17 Structures algébriques	308
II Exercices	309
1 Espaces vectoriels normés	310
2 Séries numériques et vectorielles : révisions et compléments	311
3 Familles sommables	312
4 Rappels et compléments d'algèbre linéaire	313
5 Réduction des endomorphismes	314
6 Intégrales généralisées	315
7 Intégrales à paramètre	316
8 Espaces préhilbertiens réels	317
9 Endomorphismes dans un espace euclidien	318
10 Fonctions vectorielles	319
11 Suites et séries de fonctions	320
12 Séries entières	321
13 Probabilités	322
14 Variables aléatoires discrètes	323

15 Équations différentielles linéaires	324
16 Calcul différentiel	325
17 Structures algébriques	326

Première partie

Cours

Chapitre 1

Espaces vectoriels normés

Sommaire

1.1	Bornes supérieures, bornes inférieures	13
1.1.1	Borne supérieure d'une partie de \mathbb{R}	13
1.1.2	Borne supérieure d'une application à valeurs dans \mathbb{R}	15
1.1.3	Règles pratiques	15
1.2	Normes	16
1.2.1	Définition	16
1.2.2	Exemples fondamentaux	17
1.2.3	Normes équivalentes	19
1.2.4	Boules	22
1.2.5	Parties bornées	25
1.3	Convergence des suites	30
1.3.1	Définition	30
1.3.2	Propriétés usuelles	31
1.3.3	Cas particulier en dimension finie	33
1.3.4	Point adhérent à une partie	35
1.4	Limites de fonctions	38
1.4.1	Définition	38
1.4.2	Caractérisation séquentielle de la limite	38
1.4.3	Propriétés usuelles	39
1.4.4	Cas particulier de la dimension finie	40
1.4.5	Composition des limites	41
1.4.6	Extensions des définitions	41
1.5	Fonctions continues	42
1.5.1	Continuité en un point	42
1.5.2	Continuité sur une partie	43
1.5.3	Cas particulier de la dimension finie	43
1.5.4	Fonctions lipschitziennes	44
1.5.5	Continuité des applications linéaires et n -linéaires	46
1.5.6	Norme subordonnée	53
1.6	Topologie d'un espace vectoriel normé	57
1.6.1	Intérieur d'une partie, voisinage d'un point	57
1.6.2	Parties ouvertes	59
1.6.3	Parties fermées	60
1.6.4	Ouverts ou fermés relatifs à une partie	65

1.6.5	Image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé par une fonction continue . . .	65
1.6.6	Frontière d'une partie	68
1.7	Compacité.	68
1.7.1	Valeurs d'adhérence d'une suite	68
1.7.2	Théorème de Bolzano-Weierstrass	70
1.7.3	Parties compactes	72
1.7.4	Théorème des bornes atteintes	76
1.8	Connexité par arcs	81
1.8.1	Chemin	81
1.8.2	Parties connexes par arcs	82
1.8.3	Théorème des valeurs intermédiaires	83

Dans ce chapitre, la lettre \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

1.1 Bornes supérieures, bornes inférieures

1.1.1 Borne supérieure d'une partie de \mathbb{R}

On rappelle le théorème fondamental, dit « théorème (ou axiome) de la borne supérieure ».

Théorème 1.1

Toute partie A de \mathbb{R} , non-vide et majorée, possède une borne supérieure, notée $\sup A$.

Toute partie A de \mathbb{R} , non-vide et minorée, possède une borne inférieure, notée $\inf A$.

On dispose de caractérisations équivalentes de la borne supérieure.

Proposition 1.2

Soient A une partie de \mathbb{R} , non-vide et majorée, et s un réel.

Alors il y a équivalence entre les propositions suivantes :

$$(\alpha) \quad s = \sup A$$

$$(\beta) \quad \begin{cases} \forall a \in A, \quad a \leq s \\ \forall \varepsilon > 0, \quad \exists x \in A, \quad s - \varepsilon < x \leq s \end{cases}$$

$$(\gamma) \quad \begin{cases} \forall a \in A, \quad a \leq s \\ \exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}}, \quad x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} s \end{cases}$$

Démonstration 1.3 $((\alpha) \implies (\beta))$

► $s = \sup A$ est le plus petit majorant de A donc c'est un majorant de A :

$$\forall a \in A, \quad a \leq s.$$

► s est le plus petit majorant de A donc

$$\forall \varepsilon > 0, \quad s - \varepsilon < s$$

donc $s - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A .

Donc il existe $x \in A$ tel que $s - \varepsilon < x \leq s$. ■

Démonstration 1.4 $((\beta) \implies (\alpha))$

s est un majorant de A et tout réel strictement inférieur à s n'est pas un majorant *i.e.* tout majorant est supérieur ou égal à s .

Donc $s = \sup A$. ■

Démonstration 1.5 $((\beta) \implies (\gamma))$

On spécialise $\varepsilon \leftarrow \frac{1}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists x_n \in A, \quad s - \frac{1}{n+1} < x_n \leq s.$$

De cette façon, on construit une suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad s - \frac{1}{n+1} < x_n \leq s.$$

D'après le théorème des gendarmes, on a $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} s$. ■

Démonstration 1.6 $((\gamma) \implies (\beta))$

Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad |x_n - s| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{donc } s - \frac{\varepsilon}{2} \leq x_n.$$

Or $x_n \in A$ donc $s - \varepsilon < s - \frac{\varepsilon}{2} \leq x_n \leq s$.

D'où

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x \in A, \quad s - \varepsilon < x \leq s. \quad \blacksquare$$

On a évidemment les caractérisations associées à la borne inférieure.

1.1.2 Borne supérieure d'une application à valeurs dans \mathbb{R}

Définition 1.7

Soient X un ensemble non-vide et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

Si f est majorée sur X , alors on appelle borne supérieure de f sur X le réel $\sup f(X) = \sup_X f = \sup_{x \in X} f(x)$.

Si f est minorée sur X , alors on appelle borne inférieure de f sur X le réel $\inf f(X) = \inf_X f = \inf_{x \in X} f(x)$.

On déduit de la Proposition 1.2 les caractérisations suivantes.

Proposition 1.8

Soient X un ensemble non-vide, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ majorée sur X et s un réel.

Alors il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- ▷ $s = \sup_X f$
- ▷ $\begin{cases} \forall x \in X, f(x) \leq s \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in X, s - \varepsilon < f(x) \leq s \end{cases}$
- ▷ $\begin{cases} \forall x \in X, f(x) \leq s \\ \exists (x_n) \in X^{\mathbb{N}}, f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} s \end{cases}$

1.1.3 Règles pratiques

D'abord, des évidences auxquelles on ne pense pas toujours.

Proposition 1.9

Soit A une partie de \mathbb{R} , non-vide et majorée. Alors $\forall a \in A, a \leq \sup A$.

Soient X un ensemble non-vide et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ majorée sur X . Alors $\forall x \in X, f(x) \leq \sup_X f$.

En pratique, on n'a pas souvent besoin de connaître la valeur exacte d'une borne supérieure, on a plus souvent besoin de la majorer.

Proposition 1.10

- ▷ Soient A une partie de \mathbb{R} , non-vide et majorée, et M un réel.
Pour montrer $\sup A \leq M$, il suffit de montrer $\forall a \in A, a \leq M$.
- ▷ Soient X un ensemble non-vide, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ majorée sur X et M un réel.
Pour montrer $\sup_X f \leq M$, il suffit de montrer $\forall x \in X, f(x) \leq M$.

Multiplication par un réel positif.

Proposition 1.11

Soient X un ensemble non-vide et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ majorée sur X .

Alors pour tout $\lambda \geq 0$, $\sup_X (\lambda f) = \lambda \sup_X f$.

Démonstration 1.12

Soit $\lambda \geq 0$. On pose $s = \sup_X f$.

On veut montrer $\sup_X (\lambda f) = \lambda s$.

On a $\forall x \in X$, $f(x) \leq s$ et $\lambda \geq 0$ donc

$$\forall x \in X, \lambda f(x) \leq \lambda s.$$

Donc λs est un majorant de λf .

Comme $s = \sup_X f$, il existe $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} s$.

D'après les théorèmes d'opération sur les limites, on a

$$\lambda f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda s.$$

D'où $\lambda s = \sup_X (\lambda f)$ d'après la Proposition 1.2. ■

Attention ! C'est bien sûr faux si $\lambda < 0$.

1.2 Normes

1.2.1 Définition

Définition 1.13

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

On appelle norme sur E toute application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

- ▷ pour tout $x \in E$, $N(x) = 0 \iff x = 0$ (séparation)
- ▷ pour tout $x \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (homogénéité)
- ▷ pour tout $(x, y) \in E^2$, $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire).

Un espace vectoriel est dit espace vectoriel normé quand on lui associe une norme.

On déduit de l'inégalité triangulaire une inégalité classique (souvent appelée aussi inégalité triangulaire) :

$$\text{pour tout } (x, y) \in E^2, \quad |N(x) - N(y)| \leq N(x - y).$$

Démonstration 1.14

Soit $(x, y) \in E^2$.

D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$N(x - y + y) \leq N(x - y) + N(y)$$

$$N(x) \leq N(x - y) + N(y)$$

$$N(x) - N(y) \leq N(x - y).$$

De même, en échangeant x et y :

$$N(y) - N(x) \leq N(y - x).$$

Or

$$N(x - y) = N(-(y - x)) = |-1| N(y - x) = N(y - x).$$

D'où

$$\begin{cases} N(x) - N(y) \leq N(x - y) \\ N(y) - N(x) \leq N(x - y) \end{cases}$$

donc

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y). \quad \blacksquare$$

Si N est une norme sur E , alors on peut définir une distance entre deux vecteurs de E : $d(u, v) = N(u - v)$.

On définit ainsi une application $d : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

- ▷ pour tout $(x, y) \in E^2$, $d(y, x) = d(x, y)$ (symétrie)
- ▷ pour tout $(x, y) \in E^2$, $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (séparation)
- ▷ pour tout $(x, y, z) \in E^3$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

1.2.2 Exemples fondamentaux

- ▷ La valeur absolue dans \mathbb{R} et le module dans \mathbb{C} sont des normes.
- ▷ La norme euclidienne habituelle en géométrie plane ou spatiale est une norme.

- Plus généralement, si $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E , la norme euclidienne associée $x \mapsto \sqrt{\langle x | x \rangle}$ est une norme au sens précédent.
- Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. On choisit une base de E $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Si v est un vecteur de E , on note (v_1, \dots, v_n) les coordonnées de v dans la base \mathcal{B} . On définit classiquement trois normes sur E :

$$\|v\|_\infty = \max_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} |v_i| \quad \|v\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i| \quad \|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|^2}$$

appelées respectivement norme infinie ou norme sup, norme 1 et norme 2.

Cas particulier : $E = \mathbb{R}^n$ muni de la base canonique.

Cas particulier : $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ muni de la base canonique. Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors

$$\|A\|_\infty = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} |a_{ij}| \quad \|A\|_1 = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} |a_{ij}| \quad \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} |a_{ij}|^2}$$

- Soient X un ensemble et E l'ensemble des applications bornées de X dans \mathbb{K} . La norme sup sur E est définie par $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.
- Cas particulier : si $X = \mathbb{N}$, E est l'ensemble des suites bornées et $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

Démonstration 1.15 ($\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E)

- Si $\|v\|_\infty = 0$ alors par définition d'un maximum

$$\forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, \quad 0 \leq |v_i| \leq \|v\|_\infty = 0 \text{ donc } v_i = 0$$

donc $v = 0$.

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$\begin{aligned} \|\lambda v\|_\infty &= \sup_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} |\lambda v_i| \\ &= \sup_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} |\lambda| \times |v_i| \\ &= |\lambda| \sup_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} |v_i| \\ &= |\lambda| \|v\|_\infty. \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} |\lambda| \geq 0 \text{ (Proposition 1.11)}$$

- Soit $(v, w) \in E^2$. On veut montrer $\|v + w\|_\infty \leq \|v\|_\infty + \|w\|_\infty$.

D'après la Proposition 1.10, il suffit de montrer

$$\forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, \quad |v_i + w_i| \leq \|v\|_\infty + \|w\|_\infty.$$

Pour $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, on a

$$\begin{aligned} |v_i + w_i| &\leq |v_i| + |w_i| \\ &\leq \|v\|_\infty + \|w\|_\infty. \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{cases} |v_i| \leq \|v\|_\infty \\ |w_i| \leq \|w\|_\infty \end{cases}$$

Donc $\|v + w\|_\infty \leq \|v\|_\infty + \|w\|_\infty$. ■

Démonstration 1.16 ($\|\cdot\|_1$ est une norme sur E)

► Si $\|v\|_1 = 0$ alors $\sum_{i=1}^n |v_i| = 0$. Or une somme de réels positifs est nulle ssi tous les réels sont nuls.

Donc

$$\forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, |v_i| = 0$$

donc $v = 0$.

► Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\|\lambda v\|_1 &= \sum_{i=1}^n |\lambda v_i| \\ &= \sum_{i=1}^n |\lambda| \times |v_i| \\ &= |\lambda| \sum_{i=1}^n |v_i| \\ &= |\lambda| \|v\|_1.\end{aligned}$$

► Soit $(v, w) \in E^2$. On a

$$\begin{aligned}\|v + w\|_1 &= \sum_{i=1}^n |v_i + w_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^n (|v_i| + |w_i|) \\ &= \|v\|_1 + \|w\|_1.\end{aligned}$$

■

Proposition 1.17

Soient E, F deux espaces vectoriels normés.

L'application de $E \times F$ dans \mathbb{R}_+ qui à (x, y) associe $\max(\|x\|_E, \|y\|_F)$ est une norme.

Autrement dit, le produit de deux espaces vectoriels normés est encore un espace vectoriel normé, résultat qui se généralise par récurrence à un nombre quelconque (fini) d'espaces vectoriels normés.

1.2.3 Normes équivalentes

Définition 1.18

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et N_1, N_2 deux normes sur E .

On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes quand il existe deux constantes strictement positives a, b telles que pour tout $v \in E$, $aN_1(v) \leq N_2(v) \leq bN_1(v)$.

Proposition 1.19

On note $\mathcal{N}(E)$ l'ensemble des normes sur E et

$$\forall (N_1, N_2) \in \mathcal{N}(E)^2, N_1 \sim N_2 \iff N_1 \text{ et } N_2 \text{ sont équivalentes.}$$

La relation \sim est alors une relation d'équivalence sur $\mathcal{N}(E)$.

Démonstration 1.20

▷ Soit $N \in \mathcal{N}(E)$. On a $N \leq N \leq N$ donc $N \sim N$.

Donc \sim est réflexive.

▷ Soit $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(E)^2$ tel que $N_1 \sim N_2$.

Il existe $a, b > 0$ tels que $aN_1 \leq N_2 \leq bN_1$.

Donc $\frac{1}{b}N_2 \leq N_1 \leq \frac{1}{a}N_2$ i.e. $N_2 \sim N_1$.

Donc \sim est symétrique.

▷ Soit $(N_1, N_2, N_3) \in \mathcal{N}(E)^3$ tel que $N_1 \sim N_2$ et $N_2 \sim N_3$.

Il existe $a, b, c, d > 0$ tels que
$$\begin{cases} aN_1 \leq N_2 \leq bN_1 \\ cN_2 \leq N_3 \leq dN_2 \end{cases}$$

Donc $acN_1 \leq N_3 \leq bdN_1$ i.e. $N_1 \sim N_3$.

Donc \sim est transitive.

Finalement, \sim est une relation d'équivalence. ■

Exercice 1.21

Montrez que si E est de dimension finie, les trois normes $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes.

Correction 1.22

Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et \mathcal{B} une base de E .

Soit $v = (v_1, \dots, v_n)_{\mathcal{B}}$.

On a

$$\|v\|_\infty = \sup_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} |v_i| \quad \|v\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i| \quad \|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|^2}.$$

► On a $\|v\|_\infty \leq \|v\|_1 \leq n \|v\|_\infty$.

En effet, il existe $j \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ tel que $\|v\|_\infty = |v_j|$ donc

$$\|v\|_\infty = |v_j| \leq |v_1| + \cdots + |v_n| = \|v\|_1.$$

De plus, pour tout $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, $|v_i| \leq \|v\|_\infty$ donc en additionnant les inégalités :

$$\sum_{i=1}^n |v_i| = \|v\|_1 \leq \sum_{i=1}^n \|v\|_\infty = n \|v\|_\infty.$$

Donc $\|\cdot\|_\infty \sim \|\cdot\|_1$.

► En mettant des carrés partout on arrive à

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_2 \leq \sqrt{n} \|v\|_\infty.$$

Donc $\|\cdot\|_\infty \sim \|\cdot\|_2$.

► Par transitivité, on a $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$.

Exercice 1.23

Soient $E = \mathbb{R}[X]$ et $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in E$. On pose $N_1(P) = \sum_{i=0}^n |a_i|$ et $N_\infty(P) = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$.

Montrez que N_1 et N_∞ sont des normes sur E .

Montrez qu'elles ne sont pas équivalentes en considérant la suite des polynômes $P_n = \sum_{i=0}^n X^i$.

Correction 1.24

► N_1 et N_∞ sont clairement des normes (cf. Démonstration 1.15 et Démonstration 1.16).

► Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \sum_{i=0}^n X^i = 1 + X + \cdots + X^n$.

Par l'absurde, on suppose $N_1 \sim N_\infty$.

Il existe $a, b > 0$ tels que $a N_1 \leq N_\infty \leq b N_1$.

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \underbrace{a N_1(P_n)}_{=n+1} \leq \underbrace{N_\infty(P_n)}_{=1} \leq \underbrace{b N_1(P_n)}_{=n+1}$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a(n+1) \leq 1$$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} a(n+1) = +\infty$: contradiction.

Donc N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

Remarque 1.25

Soit $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(E)^2$. On a

$$N_1 \sim N_2 \iff v \mapsto \frac{N_1(v)}{N_2(v)} \text{ est bornée sur } E \setminus \{0\}.$$

Ainsi, pour montrer que N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes, on cherche une suite $(v_n) \in (E \setminus \{0\})^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\frac{N_1(v_n)}{N_2(v_n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{ou} \quad \frac{N_1(v_n)}{N_2(v_n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Le résultat suivant est fondamental.

Théorème 1.26

Si E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les normes sur E sont équivalentes.

Quand on est en dimension finie, cela signifie que tous les résultats qu'on peut démontrer pour une norme sont à facteurs près valables pour n'importe quelle norme, autrement dit cela nous permettra de choisir la norme que l'on préfère si on ne nous l'impose pas.

Dans toute la suite, E est un espace vectoriel normé par la norme $\|\cdot\|$.

1.2.4 Boules

Définition 1.27

Soient $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r l'ensemble noté $B(a, r)$ défini de la façon suivante :

$$B(a, r) = \{v \in E \mid \|v - a\| < r\}.$$

On appelle boule fermée de centre a et de rayon r l'ensemble noté (généralement) $\overline{B}(a, r)$:

$$\overline{B}(a, r) = \{v \in E \mid \|v - a\| \leq r\}.$$

On appelle sphère de centre a et de rayon r l'ensemble (généralement) noté $S(a, r)$:

$$S(a, r) = \{v \in E \mid \|v - a\| = r\}.$$

On appelle boule-unité la boule de centre 0 et de rayon 1, sphère-unité la sphère de centre 0 et de rayon 1.

Exercice 1.28

Que sont les boules dans \mathbb{R} ? Que sont les sphères dans \mathbb{R} ?

Correction 1.29

$|\cdot|$ est une norme sur \mathbb{R} .

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$.

On a

$$B(a, r) =]a - r ; a + r[\quad \overline{B}(a, r) = [a - r ; a + r] \quad S(a, r) = \{a - r, a + r\}.$$

Exercice 1.30

On prend $E = \mathbb{R}^2$ et on définit les normes infinie, 1 et 2 relativement à la base canonique.

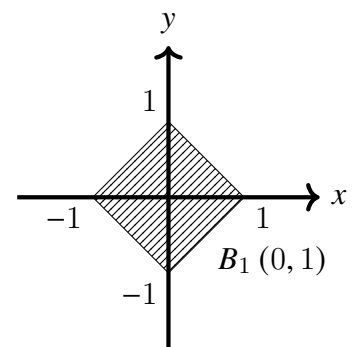
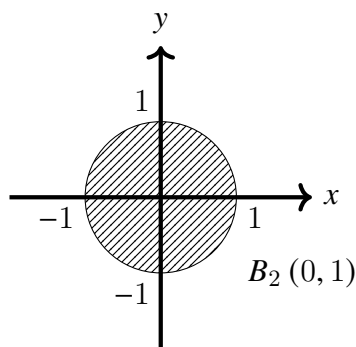
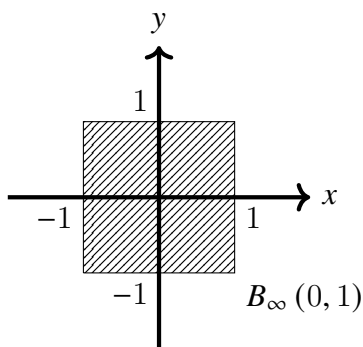
Représentez graphiquement les boules-unités pour chacune de ces trois normes.

Correction 1.31

On a

$$\|(x, y)\|_{\infty} = \max(|x|, |y|) \quad \|(x, y)\|_1 = |x| + |y| \quad \|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

On en déduit les boules suivantes :



Exercice 1.32

Montrez que toute boule ouverte est contenue dans une boule fermée et contient une boule fermée de mêmes centres.

Montrez la même chose en inversant les mots « ouverte » et « fermée ».

Correction 1.33

Soient $a \in E$ et $r > 0$.

On a

$$\overline{B}\left(a, \frac{r}{2}\right) \subseteq B(a, r) \subseteq \overline{B}(a, r)$$

et

$$B(a, r) \subseteq \overline{B}(a, r) \subseteq B(a, 2r).$$

Définition 1.34

Soit $(x, y) \in E^2$. On note $[xy] = \{tx + (1-t)y \mid t \in [0; 1]\}$, appelé segment (géométrique) d'extrémités x et y .

Une partie A de E est dite convexe quand pour tout $(x, y) \in A^2$, $[xy] \subseteq A$.

On a :

$$A \text{ est convexe} \iff \forall (x, y) \in A^2, \forall t \in [0; 1], tx + (1-t)y \in A.$$

Proposition 1.35

Les boules (ouvertes ou fermées) sont des parties convexes.

Les sphères ne sont jamais convexes.

Dans \mathbb{R} , les convexes sont les intervalles.

Démonstration 1.36 (Les boules sont convexes)

Soient $a \in E$ et $r > 0$.

Soient $(x, y) \in B(a, r)^2$ et $t \in [0; 1]$.

On veut montrer que $tx + (1-t)y \in B(a, r)$ i.e. $\|tx + (1-t)y - a\| < r$.

On a

$$\begin{aligned} \|tx + (1-t)y - a\| &= \|t(x-a) + at + (1-t)y - a\| \\ &= \|t(x-a) + (t-1)a + (1-t)y\| \\ &= \|t(x-a) + (1-t)(y-a)\| \\ &\leq \|t(x-a)\| + \|(1-t)(y-a)\| && \left. \begin{array}{l} \text{inégalité triangulaire} \\ \text{homogénéité et } t \geq 0 \text{ et} \\ 1-t \geq 0 \end{array} \right\} \\ &= t\|x-a\| + (1-t)\|y-a\| && \left. \begin{array}{l} \\ \\ x, y \in B(a, r) \end{array} \right\} \\ &< tr + (1-t)r \\ &= r. \end{aligned}$$

Ceci prouve

$$\forall (x, y) \in B(a, r), [xy] \subseteq B(a, r)$$

i.e. $B(a, r)$ est convexe.

De même, $\overline{B}(a, r)$ est convexe. ■

Démonstration 1.37 (Les sphères ne sont pas convexes)

Soient $a \in E$ et $r > 0$.

On veut montrer que $S(a, r)$ n'est pas convexe *i.e.*

$$\exists (x, y) \in S(a, r)^2, \exists t \in [0 ; 1], tx + (1 - t)y \notin S(a, r).$$

On choisit $x \in S(a, r)$ puis $y = 2a - x$ (diamétralement opposé).

On a

$$a \in [xy]$$

$$\text{car } a = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \text{ et}$$

$$a \notin S(a, r).$$

Donc $S(a, r)$ n'est pas convexe. ■

1.2.5 Parties bornées

Définition 1.38

On dit qu'une partie A de E est bornée quand il existe une boule qui la contient.

Exercice 1.39

Montrez que A est bornée ssi A est contenue dans une boule de centre 0.

Plus généralement, on choisit arbitrairement un point de E , noté x . Montrez l'équivalence A est bornée ssi A est contenue dans une boule de centre x .

Correction 1.40 (Première équivalence)

$\boxed{\Leftarrow}$ Immédiat.

$\boxed{\Rightarrow}$

Soit A une partie bornée de E .

Il existe $a \in E$ et $r > 0$ tels que $A \subseteq B(a, r)$.

On pose $r' = \|a\| + r > 0$.

Soit $x \in A$.

On a $x \in B(a, r)$ donc $\|x - a\| < r$.

Donc $r > \|\|x\| - \|a\|\|$.

Donc $r > \|x\| - \|a\|$.

Donc $r + \|a\| > \|x\|$.

Donc $A \subseteq B(0, r')$.

Correction 1.41 (Seconde équivalence)

Plus généralement, soit $x \in E$.

Avec $r'' = \|x - a\| + r$, on a de même $A \subseteq B(x, r'')$.

Exercice 1.42

Montrez qu'en dimension finie, cette définition ne dépend pas de la norme.

Correction 1.43

On veut montrer que si E est de dimension finie et N_1, N_2 sont des normes sur E , alors

$$A \text{ est bornée pour } N_1 \iff A \text{ est bornée pour } N_2.$$

Soit A une partie bornée pour N_1 .

Alors il existe $r_1 > 0$ tel que $A \subseteq B_1(0, r_1)$.

Comme E est de dimension finie, les normes N_1 et N_2 sont équivalentes.

Il existe donc $a, b > 0$ tels que $aN_2 \leq N_1 \leq bN_2$.

On pose $r_2 = \frac{r_1}{a} > 0$.

Soit $x \in A$.

Alors $x \in B_1(0, r_1)$ donc

$$\begin{aligned} N_1(x) &< r_1 \\ N_2(x) &\leq \frac{1}{a} N_1(x) < r_2. \end{aligned}$$

Donc $x \in B_2(0, r_2)$.

Donc $A \subseteq B_2(0, r_2)$.

Donc A est bornée pour N_2 .

Et réciproquement.

Proposition 1.44

Une partie A de E n'est pas bornée ssi il existe une suite (v_n) à termes dans A telle que $\|v_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Exercice 1.45

Dans $E = \mathbb{R}^2$, on pose $A = \{(x, y) \mid x^4 + y^4 = 20\}$: A est-elle bornée ? Si oui, pour chacune des normes infinie, 1 et 2, donnez un rayon d'une boule centrée en 0 qui contient A .

Correction 1.46

E est de dimension finie donc les normes sur E sont toutes équivalentes.

On choisit la norme sup.

Soit $(x, y) \in A$.

On a $x^4 + y^4 = 20$ donc $x^4 \leq x^4 + y^4 = 20$ car $x^4 \geq 0$.

Donc $|x| \leq \sqrt[4]{20}$ et, de même, $|y| \leq \sqrt[4]{20}$.

Donc $(x, y) \in \overline{B_\infty}(0, \sqrt[4]{20})$.

Donc $A \subseteq \overline{B_\infty}(0, \sqrt[4]{20})$.

D'après l'Exercice 1.21, on a

$$\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_1 \leq 2 \|\cdot\|_\infty$$

et

$$\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2 \leq \sqrt{2} \|\cdot\|_\infty.$$

Donc $A \subseteq \overline{B_1}(0, 2\sqrt[4]{20})$ et $A \subseteq \overline{B_2}(0, \sqrt{2}\sqrt[4]{20})$.

Exercice 1.47

Même question avec $E = \mathbb{C}^2$.

Correction 1.48

E est de dimension finie donc les normes sur E sont équivalentes.

x étant quelconque dans \mathbb{C} , existe-t-il $y \in \mathbb{C}$ tel que $x^4 + y^4 = 20$?

Dans \mathbb{C} , tout nombre possède une racine quatrième donc en posant y une racine quatrième de $20 - x^4$, on obtient $(x, y) \in A$.

On pose $v_n = (n, y_n)$ où y_n est une racine quatrième de $20 - n^4$.

On a $\|v_n\|_\infty = \max(n, |y_n|) \geq n$ donc

$$\|v_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Or $(v_n) \in A^{\mathbb{N}}$ donc A n'est pas bornée.

Exercice 1.49

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on pose $B = \{(x, y, z) \mid x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 2xy + 2xz - 2yz \leq 42\}$: B est-elle bornée ? Si oui, pour chacune des normes infinie, 1 et 2, donnez un rayon d'une boule centrée en 0 qui contient B .

Correction 1.50

E est de dimension finie donc les normes sur E sont équivalentes.

On a

$$\begin{aligned} \forall (x, y, z) \in E, \quad x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 2xy + 2xz - 2yz &= (x + y + z)^2 - y^2 - z^2 - 2yz + 3y^2 + 4z^2 - 2yz \\ &= (x + y + z)^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4yz \\ &= (x + y + z)^2 + 2(y - z)^2 + z^2. \end{aligned}$$

Si $(x, y, z) \in B$ alors $(x + y + z)^2 + 2(y - z)^2 + z^2 \leq 42$.

$$\text{Donc } \begin{cases} z^2 \leq 42 \\ 2(y - z)^2 \leq 42 \\ (x + y + z)^2 \leq 42 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} |z| \leq 7 \\ |y - z| \leq 5 \\ |x + y + z| \leq 7 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} |z| \leq 7 \\ |y| = |y - z + z| \leq |y - z| + |z| \leq 12 \\ |x| = |x + y + z - y - z| \leq |x + y + z| + |y| + |z| \leq 26 \end{cases}$$

Donc $\|(x, y, z)\|_\infty \leq 26$ et on a

$$B \subseteq B_\infty(0, 26) \quad B \subseteq B_1(0, 78) \quad B \subseteq B_2(0, 26\sqrt{3}).$$

Exercice 1.51

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note \mathcal{P} l'ensemble des matrices de projecteurs : \mathcal{P} est-il borné ?

Correction 1.52

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie donc les normes sont équivalentes.

On choisit la norme sup :

$$\left\| \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max(|x|, |y|, |z|, |t|).$$

On a $\mathcal{P} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid M^2 = M\}$.

On pose $M = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$ et on a

$$M = M^2 \iff \begin{cases} x^2 + yz = x \\ z(x+t) = z \\ y(x+t) = y \\ t^2 + yz = t \end{cases}$$

On impose $x+t=1$.

On a

$$t - t^2 = (1-x) - (1-x)^2 = x - x^2.$$

Donc avec $y \neq 0$, on a $M = \begin{pmatrix} x & \frac{x-x^2}{y} \\ y & 1-x \end{pmatrix}$.

On en déduit que \mathcal{P} contient les matrices $M_n = \begin{pmatrix} n & n-n^2 \\ 1 & 1-n \end{pmatrix}$ et on a $\|M_n\|_\infty \geq n$.

Donc \mathcal{P} n'est pas bornée.

Définition 1.53

On dit qu'une suite v à termes dans E est bornée quand l'ensemble de ses valeurs est borné, autrement dit quand il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|v_n\| \leq M$.

On dit qu'une fonction f d'un ensemble X dans E est bornée quand l'ensemble de ses valeurs prises sur X est borné, autrement dit quand il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in X$, $\|f(x)\| \leq M$.

Exercice 1.54

Soit u une suite complexe arithmético-géométrique de raison a . À quelle condition est-elle bornée ?

Correction 1.55

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

Si $a \neq 1$, (u_n) est de la forme $\left(\lambda a^n + \frac{b}{1-a}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ où $\lambda \in \mathbb{C}$.

Si $a = 1$, (u_n) est de la forme $(\lambda + nb)_{n \in \mathbb{N}}$ où $\lambda \in \mathbb{C}$.

On choisit $\lambda \neq 0$.

On a alors

$$(u_n) \text{ est bornée } \iff \begin{cases} |a| \leq 1 \text{ et } a \neq 1 \\ \text{ou} \\ a = 1 \text{ et } b = 0 \end{cases}$$

Exercice 1.56

Soient B, B' deux boules de E . Si $(x, x') \in E^2$, on pose $f(x, x') = d(x, x')$. Montrez que f est bornée sur $B \times B'$.

Correction 1.57

Soient $(a, b) \in E^2$ et $r, s > 0$ tels que $B = B(a, r)$ et $B' = B(b, s)$.

On a

$$\forall (x, x') \in B \times B', \quad 0 \leq f(x, x') \leq \|b - a\| + r + s$$

car

$$\begin{aligned} f(x, x') &= \|x - x'\| \\ &= \|x - a + a - b + b - x'\| \\ &\leq \|x - a\| + \|a - b\| + \|b - x'\| \\ &\leq r + s + \|b - a\|. \end{aligned}$$

1.3 Convergence des suites

Dans cette section, E désigne un espace vectoriel normé par la norme $\|\cdot\|$.

1.3.1 Définition

Définition 1.58

Soient $u = (u_n)$ une suite à termes dans E et $\ell \in E$.

On dit que la suite u converge vers ℓ quand toute boule ouverte de centre ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad u_n \in B(\ell, \varepsilon).$$

Proposition 1.59

Dans la définition, on peut remplacer les boules ouvertes par des boules fermées.

On peut réécrire la définition sous deux formes équivalentes :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad \|u_n - \ell\| < \varepsilon$$

ou

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon.$$

On peut donc se ramener aux suites réelles positives : la suite vectorielle u converge vers ℓ ssi la suite réelle $(\|u_n - \ell\|)$ converge vers 0.

Une suite qui ne converge vers aucun élément de E est dite divergente.

1.3.2 Propriétés usuelles

Proposition 1.60 (Unicité de la limite)

Si une suite $u \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$, elle ne peut converger vers un autre point de E .

On peut donc noter classiquement $\ell = \lim u = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ou $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.

Démonstration 1.61

Par l'absurde, soit $(\ell, \ell') \in E^2$ tel que u converge vers ℓ et ℓ' , et $\ell \neq \ell'$.

Soit $\varepsilon = \frac{\|\ell - \ell'\|}{2}$.

Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ et $N_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geq N_1, \quad \|u_n - \ell\| < \varepsilon$$

et

$$\forall n \geq N_2, \quad \|u_n - \ell'\| < \varepsilon.$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$.

On a alors

$$\begin{aligned} \forall n \geq N, \quad \varepsilon &= \frac{\|\ell - \ell'\|}{2} \\ &= \frac{\|\ell - u_n + u_n - \ell'\|}{2} \\ &\leq \frac{\|\ell - u_n\| + \|u_n - \ell'\|}{2} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Contradiction donc $\ell = \ell'$. ■

Proposition 1.62

Si une suite $u \in E^{\mathbb{N}}$ converge, alors elle est bornée.

Démonstration 1.63

On pose $\varepsilon = 42$.

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad \|u_n - \ell\| \leq 42$$

i.e. $\forall n \geq N, \quad u_n \in \overline{B}(\ell, 42)$.

Parmi les N premiers termes de la suite u , on détermine le plus lointain de ℓ : on pose

$$r = \max_{0 \leq k \leq N-1} \|u_k - \ell\|.$$

Puis on pose $R = \max(42, r) > 0$.

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n - \ell\| \leq R$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \overline{B}(\ell, R)$.

Donc la suite est bornée. ■

Théorème 1.64 (Opérations sur les suites convergentes)

Soient $u, v \in E^{\mathbb{N}}$ convergeant respectivement vers ℓ et m deux éléments de E .

Alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, la suite $au + bv$ converge vers $a\ell + bm$.

Soit $\alpha \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors la suite αu converge vers $\lambda\ell$.

Démonstration 1.65 (αu converge vers $\lambda\ell$)

On a

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \|\alpha_n u_n - \lambda\ell\| &= \|\alpha_n u_n - \lambda u_n + \lambda u_n - \lambda\ell\| \\ &= \|(\alpha_n - \lambda) u_n + \lambda(u_n - \ell)\| \\ &\leq \|(\alpha_n - \lambda) u_n\| + \|\lambda(u_n - \ell)\| \\ &= |\alpha_n - \lambda| \|u_n\| + |\lambda| \|u_n - \ell\| \\ &\leq |\alpha_n - \lambda| \|u_n\| + (|\lambda| + 1) \|u_n - \ell\|.\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \|u_n - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda| + 1}.$$

u converge donc est bornée : il existe $K \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\| \leq K.$$

Donc il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_1, |\alpha_n - \lambda| \leq \frac{\varepsilon}{K}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\forall n \geq \max(n_0, n_1), \|\alpha_n u_n - \lambda\ell\| &\leq K \frac{\varepsilon}{K} + (|\lambda| + 1) \frac{\varepsilon}{|\lambda| + 1} \\ &= 2\varepsilon.\end{aligned}$$

D'où $\alpha_n u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \lambda\ell$. ■

Proposition 1.66

Toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite.

Quasi-réciproque : si u est une suite telle que les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite ℓ , alors u converge vers ℓ .

Proposition 1.67

Dans un produit de deux espaces vectoriels normés $E \times F$, une suite $(u_n) = ((a_n, b_n))$ converge ssi les suites (a_n) et (b_n) convergent dans E , respectivement F .

Dans ce cas, $\lim (a_n, b_n) = (\lim a_n, \lim b_n)$.

Ce résultat se généralise sans difficulté par récurrence à un nombre quelconque (fini) d'espaces vectoriels normés.

1.3.3 Cas particulier en dimension finie

Dans cette partie, on suppose que E est de dimension finie.

Définition 1.68

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Pour $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, on appelle i -ème forme coordonnée (relative à la base \mathcal{B}), notée souvent d_i , la forme linéaire qui à un vecteur associe sa i -ème coordonnée dans la base \mathcal{B} :

$$\text{pour tout } v \in E, \quad v = \sum_{i=1}^n d_i(v) e_i.$$

Théorème 1.69

Soit \mathcal{B} une base de E .

Une suite $u \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$ ssi pour toute forme coordonnée d relative à \mathcal{B} , la suite $(d(u_n))$ converge vers $d(\ell)$.

Autrement dit, une suite converge ssi ses suites-coordonnées dans n'importe quelle base convergent.

Dans ce cas, la limite de la suite u est le vecteur ℓ tel que pour toute forme coordonnée d , $d(\ell) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(u_n)$.

Démonstration 1.70

E est de dimension finie donc toutes les normes sur E sont équivalentes. On note $p = \dim E$.

\mathcal{B} étant une base de E , on choisit la norme $\|\cdot\|_\infty$ relative à \mathcal{B} .

Il existe $a, b > 0$ tels que $a \|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\| \leq b \|\cdot\|_\infty$.

\Rightarrow

Si (u_n) converge vers ℓ , alors $\|u_n - \ell\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc d'après l'inégalité ci-dessus, on a

$$0 \leq \|u_n - \ell\|_\infty \leq \frac{1}{a} \|u_n - \ell\|_\infty.$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, on a

$$\|u_n - \ell\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

En notant $u_n = (u_{n,1}, \dots, u_{n,p})_{\mathcal{B}}$ et $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p)_{\mathcal{B}}$, on a

$$\|u_n - \ell\|_\infty = \max_{k \in \llbracket 1; p \rrbracket} |u_{n,k} - \ell_k|.$$

Donc $\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $|u_{n,k} - \ell_k| \leq \|u_n - \ell\|_\infty$ et, par théorème des gendarmes, on a

$$u_{n,k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_k.$$

\Leftarrow

Si pour tout $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $(u_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ_k , on a $\|u_n - \ell\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et d'après l'inégalité précédente, on a

$$\|u_n - \ell\| \leq b \|u_n - \ell\|_\infty$$

donc $\|u_n - \ell\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ i.e. (u_n) converge vers ℓ . ■

Exemple 1.71

Si $M_n = \begin{pmatrix} 1 & e^{-n} \\ 1/n & n \sin(1/n) \end{pmatrix}$, alors la suite de matrices (M_n) converge vers la matrice I_2 .

Corollaire 1.72

Si E est de dimension finie, la convergence d'une suite ne dépend pas du choix de la norme. On peut donc choisir la norme qu'on veut.

1.3.4 Point adhérent à une partie

Définition 1.73

Soient A une partie de E et $x \in E$.

On dit que x est un point adhérent à A quand il existe une suite $u \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x .

L'adhérence de A est l'ensemble de ses points adhérents, noté \overline{A} .

Intuitivement, l'adhérence d'une partie est elle-même à laquelle on ajoute tous les points qui se trouvent sur son bord.

Remarque 1.74

On remarque qu'on a $A \subseteq \overline{A}$ car pour tout $a \in A$, la suite constante égale à a converge vers a et est à termes dans A .

Exercice 1.75

Quelle est l'adhérence d'une boule ouverte ?

Correction 1.76

Soient $a \in E$ et $r > 0$. Montrons que $\overline{B(a, r)} = \overline{B}(a, r)$.

\subseteq

Soit $b \in \overline{B(a, r)}$.

Il existe $(u_n) \in B(a, r)^{\mathbb{N}}$ qui converge vers b .

D'après la deuxième inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned} ||u_n - a|| - ||b - a|| &\leq ||(u_n - a) - (b - a)|| \\ &= ||u_n - b||. \end{aligned}$$

Or $||u_n - b|| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc d'après le théorème d'encadrement, on a

$$||u_n - a|| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} ||b - a||.$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in B(a, r)$ donc $||u_n - a|| < r$.

Par passage à la limite, $||b - a|| \leq r$.

Donc $b \in \overline{B}(a, r)$.

\supseteq

Soit $b \in \overline{B}(a, r)$.

Alors $\|b - a\| \leq r$.

Si $\|b - a\| < r$, alors $b \in B(a, r) \subseteq \overline{B(a, r)}$.

Si $\|b - a\| = r$, on pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}a + \left(1 - \frac{1}{n}\right)b$.

La suite (u_n) converge vers b par opérations sur les limites et on a

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|u_n - a\| &= \left\| \left(\frac{1}{n} - 1\right)a + \left(1 - \frac{1}{n}\right)b \right\| \\ &= \left| 1 - \frac{1}{n} \right| \|b - a\| \\ &= \frac{n-1}{n} r \\ &< r\end{aligned}$$

donc $(u_n) \in B(a, r)^{\mathbb{N}}$.

On a ainsi trouvé une suite à termes dans $B(a, r)$ qui converge vers b donc $b \in \overline{B(a, r)}$.

Remarque 1.77

On a montré au passage que si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ alors pour tout $a \in E$, $\|u_n - a\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \|\ell - a\|$.

Exercice 1.78

Quelle est l'adhérence de \mathbb{Z} dans \mathbb{R} ?

Correction 1.79

\mathbb{R} est muni de la norme $|\cdot|$.

Montrons que $\mathbb{Z} = \overline{\mathbb{Z}}$.

$\boxed{\subseteq}$ Trivial.

$\boxed{\supseteq}$

Soit $b \in \overline{\mathbb{Z}}$.

Il existe une suite $(u_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers b .

On pose $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad |u_n - b| < \frac{1}{2}$$

$$i.e. \quad u_n \in \left] b - \frac{1}{2}; b + \frac{1}{2} \right[.$$

Or l'intervalle $\left] b - \frac{1}{2} ; b + \frac{1}{2} \right[$ est de longueur 1 et est ouvert donc il contient au plus un entier.

Or il en contient un donc il en contient un et un seul.

On en déduit que (u_n) est stationnaire en cet entier à partir de n_0 et donc $\lim u = b$ est un entier.

Donc $b \in \mathbb{Z}$.

Proposition 1.80

Soient A une partie de E et $x \in E$.

Alors x est adhérent à A ssi toute boule centrée en x rencontre A .

De manière formalisée : $x \in \overline{A} \iff \forall r > 0, \exists y \in A, y \in B(x, r)$.

Démonstration 1.81

$\boxed{\Leftarrow}$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A \neq \emptyset$.

On peut choisir $y_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A$.

On construit ainsi une suite $(y_n) \in A^{\mathbb{N}^*}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|x - y_n\| < \frac{1}{n}.$$

D'après le théorème d'encadrement, on a donc $y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$.

Donc $x \in \overline{A}$.

$\boxed{\Rightarrow}$

Soient $x \in \overline{A}$ et $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$.

Soit $r > 0$.

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \|u_n - x\| < r$$

donc $u_{n_0} \in A \cap B(x, r)$ donc $A \cap B(x, r) \neq \emptyset$. ■

On peut donner la définition de la densité d'une partie.

Définition 1.82

On dit qu'une partie A est dense dans E quand $\overline{A} = E$, c'est-à-dire qu'on peut trouver des éléments de A aussi proches de n'importe quel point.

Exemple 1.83

- ▷ Dans \mathbb{R} , \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses (*cf.* cours de première année).
- ▷ $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (démonstration ultérieure).

1.4 Limites de fonctions

Dans cette section, E et F sont deux espaces vectoriels normés par les normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.

1.4.1 Définition

Définition 1.84

Soient f une fonction de E dans F , D son ensemble de définition, $a \in \overline{D}$ et $\ell \in F$.

On dit que f a pour limite ℓ en a quand

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, \|x - a\|_E < \eta \implies \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon.$$

Remarque 1.85

On peut remplacer les inégalités strictes sur les normes par des inégalités larges.

On peut réécrire la définition à l'aide de boules ouvertes (ou fermées) :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D \cap B(a, \eta), f(x) \in B(\ell, \varepsilon).$$

Si E et F sont de dimension finie, cette définition ne dépend pas du choix des normes.

1.4.2 Caractérisation séquentielle de la limite

Théorème 1.86

Soient f une fonction de E dans F , D son ensemble de définition, $a \in \overline{D}$ et $\ell \in F$.

f a pour limite ℓ en a ssi pour toute suite u à termes dans D convergeant vers a , la suite $f \circ u = (f(u_n))$ converge vers ℓ .

Démonstration 1.87

\Rightarrow

Supposons que f a pour limite ℓ en a .

Soit $u \in D^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a .

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in D, \|x - a\|_E < \eta \implies \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon.$$

On a $\eta > 0$ et $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \|u_n - a\|_E < \eta.$$

Donc pour tout $n \geq N$, comme $u_n \in D$ et $\|u_n - a\|_E < \eta$, on a

$$\|f(u_n) - \ell\|_F < \varepsilon.$$

Donc $(f(u_n))$ converge vers ℓ .

\Leftarrow

Par contraposée, montrons que si f n'a pas pour limite ℓ en a alors il existe $u \in D^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$ et $f(u_n) \not\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.

Si f n'a pas pour limite ℓ en a , alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe $x \in D$ tel que $\|x - a\|_E < \eta$ et $\|f(x) - \ell\|_F \geq \varepsilon$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n \in D$ tel que
$$\begin{cases} \|u_n - a\|_E < \frac{1}{n+1} \\ \|f(u_n) - \ell\|_F \geq \varepsilon \end{cases}.$$

On construit ainsi une suite $(u_n) \in D^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} \|u_n - a\|_E < \frac{1}{n+1} \\ \|f(u_n) - \ell\|_F \geq \varepsilon \end{cases}$$

Par encadrement, (u_n) converge vers a mais $(f(u_n))$ ne converge pas vers ℓ . ■

En pratique, on utilise beaucoup plus souvent le sens direct de l'équivalence précédente.

1.4.3 Propriétés usuelles

Proposition 1.88 (Unicité de la limite)

Soient f une fonction de E dans F , D son ensemble de définition, $a \in \overline{D}$ et $\ell \in F$.

Si f a pour limite ℓ en a , alors elle ne peut avoir d'autre limite que ℓ en a .

On peut donc noter classiquement $\ell = \lim_a f = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

Proposition 1.89

Si f a pour limite ℓ en a , alors elle est bornée au voisinage de a .

Théorème 1.90 (Opérations sur les limites)

Soient f et g deux fonctions de E dans F , définies sur la même partie D et ayant respectivement pour limites ℓ et m deux éléments de F en $a \in \overline{D}$.

Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, la fonction $\lambda f + \mu g$ a pour limite $\lambda \ell + \mu m$ en a .

Soient α une fonction de E dans \mathbb{K} et f une fonction définie de E dans F , définies sur la même partie D et ayant respectivement pour limites $\beta \in \mathbb{K}$ et $\ell \in F$ en $a \in \overline{D}$.

Alors αf a pour limite $\beta \ell$ en a .

Proposition 1.91

Une fonction $f = (g, h)$ à valeurs dans un produit d'espaces vectoriels normés a une limite ssi g et h ont chacune une limite.

Dans ce cas, $\lim_a f = \left(\lim_a g, \lim_a h \right)$.

Ce résultat se généralise sans difficulté par récurrence à un nombre quelconque (fini) d'espaces vectoriels normés.

1.4.4 Cas particulier de la dimension finie

Théorème 1.92

On suppose que F est de dimension finie. Soit \mathcal{B} une base de F .

Soit f une fonction de E dans F , D son ensemble de définition, $a \in \overline{D}$ et $\ell \in F$.

La fonction f a pour limite ℓ en a ssi pour toute forme coordonnée d relative à \mathcal{B} , la fonction $d \circ f$ a pour limite $d(\ell)$ en a .

Autrement dit, une fonction a une limite en a ssi ses fonctions-coordonnées dans n'importe quelle base ont chacune une limite en a .

Dans ce cas, la limite de la fonction f en a est le vecteur ℓ tel que pour toute forme coordonnée d , $d(\ell) = \lim_{x \rightarrow a} d(f(x))$.

1.4.5 Composition des limites

G désigne un troisième espace vectoriel normé.

Théorème 1.93

Soient f une fonction de E dans F et D_f son ensemble de définition. Soient g une fonction de F dans G et D_g son ensemble de définition. On suppose que $f(D_f) \subseteq D_g$ (condition qui permet de définir la composée $g \circ f$ sur D_f).

Soient $a \in \overline{D_f}$, $b \in \overline{D_g}$ et $\ell \in G$.

Si f a pour limite b en a et g a pour limite ℓ en b , alors $g \circ f$ a pour limite ℓ en a .

Autrement dit, si
$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b \\ g(y) \xrightarrow{y \rightarrow b} \ell \end{cases} \text{ alors } g \circ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell.$$

1.4.6 Extensions des définitions

D'abord les limites infinies en un point dans le cas où l'espace d'arrivée est \mathbb{R} .

Définition 1.94

Soient f une fonction de E dans \mathbb{R} , D son ensemble de définition et $a \in \overline{D}$.

On dit que f a pour limite $+\infty$ en a quand

$$\forall M > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, \|x - a\|_E \leq \eta \implies f(x) \geq M.$$

On dit que f a pour limite $-\infty$ en a quand

$$\forall M < 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, \|x - a\|_E \leq \eta \implies f(x) \leq M.$$

Puis les limites en « l'infini ».

Définition 1.95

Soient f une application de E dans F et $\ell \in F$.

On dit que f a pour limite ℓ quand $\|x\|$ tend vers l'infini quand

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in E, \|x\|_E \geq B \implies \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

Dans le cas où $F = \mathbb{R}$, on dit que $f(x)$ a pour limite $+\infty$ quand $\|x\|$ tend vers l'infini quand

$$\forall M > 0, \exists B > 0, \forall x \in E, \|x\|_E \geq B \implies f(x) \geq M.$$

(Définition semblable pour la limite $-\infty$).

Enfin, dans le cas où l'espace de départ est \mathbb{R} , on peut parler de limite en l'infini au sens habituel.

Définition 1.96

Soient f une fonction de \mathbb{R} dans F , définie sur un ouvert $]a; +\infty[$ et $\ell \in F$.

On dit que $f(x)$ a pour limite ℓ quand x tend vers $+\infty$ quand

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \geq B, \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon.$$

(Définition semblable pour la limite x tend vers $-\infty$).

1.5 Fonctions continues

Dans cette section, E et F sont des espaces vectoriels normés par les normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.

1.5.1 Continuité en un point

Proposition 1.97

Soient f une fonction de E dans F , D son ensemble de définition, $a \in \overline{D}$ et $\ell \in F$.

Si f a pour limite ℓ en a et si $a \in D$, alors $\ell = f(a)$.

Dans ce cas, on dit que la fonction f est continue en a .

Définition 1.98

Soient f une fonction de E dans F , D son ensemble de définition et $a \in D$.

On dit que f est continue en a quand f a pour limite $f(a)$ en a .

On déduit de cette définition et des théorèmes précédents

- la caractérisation séquentielle de la continuité en un point ;
- le fait qu'une fonction continue en un point est bornée au voisinage de ce point ;
- les théorèmes d'opérations et de compositions des fonctions continues en un point ;
- l'équivalence entre la continuité d'une fonction et celle de ses fonctions-coordonnées dans une certaine base de F dans le cas où F est de dimension finie.

1.5.2 Continuité sur une partie

Définition 1.99

Soient f une fonction de E dans F , D son ensemble de définition et $A \subseteq D$.

On dit que f est continue sur A quand f est continue en tout point de A .

On déduit de cette définition et des théorèmes précédents

- les théorèmes d'opérations et de compositions des fonctions continues sur une partie ;
- l'équivalence entre la continuité d'une fonction et celle de ses fonctions-coordonnées dans une certaine base de F dans le cas où F est de dimension finie.

Proposition 1.100

Soient f et g deux fonctions de E dans F définies sur D et $A \subseteq D$.

Si A est dense dans D , f et g sont continues sur D et $f = g$ sur A , alors $f = g$ sur D .

Démonstration 1.101

On suppose que A est dense dans D et que f et g sont continues.

Soit $x \in D$.

Il existe $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$.

f est continue en x donc d'après la caractérisation séquentielle de la continuité, on a

$$f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x).$$

De même, on a

$$g(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} g(x).$$

Or $f = g$ sur A donc $(f(u_n)) = (g(u_n))$ donc $f(x) = g(x)$ par unicité de la limite. ■

1.5.3 Cas particulier de la dimension finie

On suppose que E et F sont de dimensions finies.

Dans une base donnée, les formes coordonnées relatives à cette base sont en particulier des applications continues.

Donc toute fonction f de E dans F dont les fonctions-coordonnées (f_1, \dots, f_n) dans une base de F sont définies polynomialement à partir des formes coordonnées dans une base de E est continue.

Exemple 1.102

- La fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y) = (x^2 + y^2, xy - (1+x)^3)$ est continue sur \mathbb{R}^2 .
- Les applications trace et déterminant définies sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont continues.

Exercice 1.103

Montrez que l'application $A \mapsto A^2$ est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans lui-même.

Correction 1.104

On a $A^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} a_{k,j} \right)_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2}$ donc $A \mapsto A^2$ est continue.

Exercice 1.105

En admettant (momentanément) que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert, montrez que l'application $A \mapsto A^{-1}$ est continue de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dans lui-même.

Correction 1.106

Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\mathrm{Com} A)^\top$.

Les coefficients de $(\mathrm{Com} A)^\top$ sont des déterminants calculés à partir des coefficients de A donc dépendent polynomialement de ces coefficients, donc $A \mapsto (\mathrm{Com} A)^\top$ est continue.

Donc $A \mapsto A^{-1}$ est le produit de deux fonctions continues et est donc continue.

1.5.4 Fonctions lipschitziennes

Définition 1.107

Soient f une application de E dans F , A une partie de E et $K \in \mathbb{R}_+$.

On dit que f est K -lipschitzienne sur A (ou lipschitzienne de rapport K) quand

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad \|f(y) - f(x)\|_F \leq K \|y - x\|_E.$$

On dit que f est lipschitzienne sur A quand il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que f soit K -lipschitzienne sur A .

Remarque 1.108

Si f est K -lipschitzienne sur A , alors le rapport K n'est pas unique, puisque pour tout $L \geq K$, on a encore f L -lipschitzienne sur A .

Proposition 1.109

Toute fonction lipschitzienne est continue.

Mais la réciproque est fautive (contre-exemple : la fonction $\sqrt{\cdot}$ sur $[0 ; +\infty[$).

Un exemple fondamental : la fonction $x \mapsto d(x, A)$.

Définition 1.110

Soit A une partie de E .

Pour $x \in E$, on appelle distance de x à A le réel $\inf_{a \in A} d(x, a)$.

Proposition 1.111

Pour toute partie A de E , la fonction $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne.

L'adhérence de A est l'ensemble des points à distance nulle de A , i.e. tels que $d(x, A) = 0$.

Démonstration 1.112 (1-lipschitzianité de la fonction)

On veut montrer

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad |d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|.$$

On montre d'abord

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad d(x, A) - d(y, A) \leq \|x - y\|$$

ce qui est équivalent à

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad d(x, A) \leq d(y, A) + \|x - y\|.$$

On a $d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$ donc pour tout $a \in A$, on a

$$d(x, A) \leq \|x - a\|.$$

Or $\|x - a\| = \|x - y + y - a\| \leq \|x - y\| + \|y - a\|$ donc

$$d(x, A) \leq \|x - y\| + \|y - a\|.$$

De plus, on a $d(y, A) = \inf_{a \in A} \|y - a\|$ donc il existe $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\|y - u_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} d(y, A).$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(x, A) \leq \|x - y\| + \|y - u_n\|$, donc par passage à la limite quand $n \rightarrow +\infty$:

$$d(x, A) \leq \|x - y\| + d(y, A)$$

donc $d(x, A) - d(y, A) \leq \|x - y\|$.

En échangeant x et y , on obtient

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad d(y, A) - d(x, A) \leq \|y - x\| = \|x - y\|.$$

D'où

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad |d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|.$$

■

Démonstration 1.113 ($x \in \overline{A} \iff d(x, A) = 0$)

\implies

Si $x \in \overline{A}$ alors il existe une suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x .

Or $x \mapsto d(x, A)$ est lipschitzienne donc continue, donc

$$d(u_n, A) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} d(x, A).$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(u_n, A) = 0$ car $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$, donc

$$d(x, A) = 0.$$

\impliedby

Si $d(x, A) = 0$, alors $\inf_{a \in A} \|x - a\| = 0$.

Donc il existe $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\|x - a_n\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ i.e. (a_n) converge vers x i.e. $x \in \overline{A}$.

■

1.5.5 Continuité des applications linéaires et n -linéaires

Proposition 1.114

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- (1) f est continue en 0 ;
- (2) f est continue en un point x ;
- (3) f est continue sur E ;

(4) f est lipschitzienne sur E ;

(5) il existe $K \geq 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq K \|x\|_E$;

(6) f est bornée sur la boule-unité ;

(7) f est bornée sur une boule.

Démonstration 1.115

On a clairement (4) \implies (3), (3) \implies (2) et (3) \implies (1). ■

Démonstration 1.116 ((1) \implies (2))

Soit $x \in E$.

f est continue en 0 donc $\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = f(0) = 0$.

Donc $f(x+h) = f(x) + f(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x)$.

Donc f est continue en x . ■

Démonstration 1.117 ((2) \implies (3))

Soit $y \in E$.

f est continue en x donc $\lim_{t \rightarrow x} f(t) = f(x)$.

Donc

$$\begin{aligned} f(t) &= f(t - y + x - x + y) \\ &= f(t - y + x) - f(x) + f(y) \\ &\xrightarrow{t \rightarrow y} f(y). \end{aligned}$$

Donc f est continue en y .

Donc f est continue sur E . ■

Démonstration 1.118 ((3) \implies (7))

Soit $x \in E$.

f est continue en x donc f est bornée au voisinage de x i.e. il existe $r > 0$ tel que f soit bornée sur $B(x, r)$. ■

Démonstration 1.119 ((7) \implies (6))

f est bornée sur $B(x, r)$: il existe $M > 0$ tel que

$$\forall t \in B(x, r), \quad \|f(t)\| \leq M.$$

Pour tout $y \in B(0, r)$, on a $x + y \in B(x, r)$.

Donc $\|f(x + y)\| \leq M$.

Donc $\|f(x) + f(y)\| \leq M$ donc $\|f(y)\| - \|f(x)\| \leq \|f(y) + f(x)\| \leq M$.

Donc $\|f(y)\| \leq M + \|f(x)\| = M'$.

Pour tout $z \in B(0, 1)$, on a $rz \in B(0, r)$.

Donc d'après ce qui précède :

$$\|f(rz)\| \leq M'$$

$$\|rf(z)\| \leq M'$$

$$r\|f(z)\| \leq M'$$

$$\|f(z)\| \leq \frac{M'}{r}.$$

Donc f est bornée sur $B(0, 1)$. ■

Démonstration 1.120 ((6) \implies (5))

Pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1$.

Donc $\frac{x}{2\|x\|} \in B(0, 1)$.

f est bornée sur $B(0, 1)$: il existe $M > 0$ tel que

$$\forall t \in B(0, 1), \quad \|f(t)\| \leq M.$$

Donc pour tout $x \neq 0$, $\left\| f\left(\frac{x}{2\|x\|}\right) \right\| \leq M$.

Donc $\left\| \frac{1}{2\|x\|} f(x) \right\| \leq M$.

Donc $\frac{1}{2\|x\|} \|f(x)\| \leq M$.

Donc $\|f(x)\| \leq 2M\|x\|$.

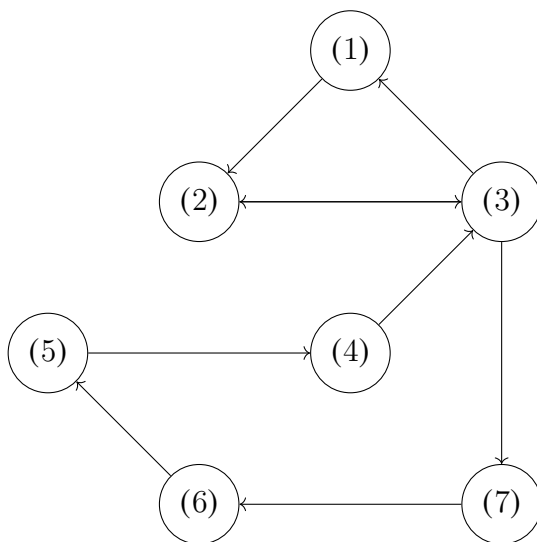
Ceci est vrai aussi pour $x = 0$: $\|f(0)\| = \|0\| = 0 \leq 2M\|0\|$. ■

Démonstration 1.121 ((5) \implies (4))

On a

$$\forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| = \|f(x - y)\| \leq K \|x - y\|.$$

On a donc montré toutes les équivalences :



■

Exercice 1.122

On pose $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie.

L'application $f \mapsto \int_0^1 f(t) dt$ est-elle continue sur E ?

Correction 1.123

Pour $f \in E$, on a $\|f\|_\infty = \sup_{[0;1]} |f| \in \mathbb{R}$ car $|f|$ est continue sur le segment $[0; 1]$.

On note $I : f \mapsto \int_0^1 f(t) dt$. I est linéaire.

Pour $f \in E$, on a $|I(f)| \leq \int_0^1 |f|$.

Or $\forall t \in [0; 1], |f(t)| \leq \|f\|_\infty$.

Donc

$$|I(f)| \leq \int_0^1 |f| \leq \int_0^1 \|f\|_\infty dt = \|f\|_\infty.$$

Donc d'après la Proposition 1.114, I est continue sur E .

Exercice 1.124

E désigne le même espace et on pose $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$.

Montrez que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur E .

L'application $f \mapsto f(1)$ est-elle continue sur E ?

Correction 1.125 ($\|\cdot\|_1$ est une norme sur E)

► Soit $f \in E$. Si $\|f\|_1 = 0$ alors $\int_0^1 |f| = 0$. Or $|f|$ est continue et positive donc d'après le théorème de stricte positivité de l'intégrale, $|f| = 0$ donc $f = 0$.

► Soient $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\|\lambda f\|_1 = \int_0^1 |\lambda f| = \int_0^1 |\lambda| |f| = |\lambda| \int_0^1 |f| = |\lambda| \|f\|_1.$$

► Soit $(f, g) \in E^2$. On a

$$\|f + g\|_1 = \int_0^1 |f + g| \leq \int_0^1 (|f| + |g|) = \int_0^1 |f| + \int_0^1 |g| = \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

► Donc $\|\cdot\|_1$ est une norme sur E .

Correction 1.126 (Continuité de l'application ?)

On pose $V : E \longrightarrow \mathbb{R}$
 $f \longmapsto f(1)$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[0 ; 1 - \frac{1}{n}\right] \\ n^2 \left(x - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) & \text{sinon} \end{cases}$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\int_0^1 |f| = \int_0^1 f_n = \frac{1}{2}$ donc $f_n \in B(0, 1)$.

Or $|V(f_n)| = |f_n(1)| = n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

On a ainsi trouvé une suite (f_n) à termes dans $B(0, 1)$ telle que $V(f_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Donc V n'est pas bornée sur $B(0, 1)$.

Donc comme V est linéaire, V n'est pas continue sur $(E, \|\cdot\|_1)$.

Remarque : on a $\forall f \in E, |V(f)| = |f(1)| \leq \|f\|_\infty$ donc V est continue sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

Définition 1.127

On note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F .

Proposition 1.128

$\mathcal{L}_c(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$, en général distinct de $\mathcal{L}(E, F)$.

Cas particulier en dimension finie.

Théorème 1.129

On suppose que E est de dimension finie.

Toute application linéaire de E dans F est lipschitzienne sur E , donc continue.

Autrement dit, si E est de dimension finie, alors $\mathcal{L}_c(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$.

Démonstration 1.130

On note $p = \dim E$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E .

Pour $x = (x_1, \dots, x_p)_{\mathcal{B}}$, on a $\|x\|_{\infty} = \sup_{1 \leq i \leq p} |x_i| = \max_{1 \leq i \leq p} |x_i|$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et N une norme sur F .

Pour $x = (x_1, \dots, x_p)_{\mathcal{B}}$, on a $x = \sum_{k=1}^p x_k e_k$.

Donc, f étant linéaire, on a $f(x) = \sum_{k=1}^p x_k f(e_k)$.

Donc

$$\begin{aligned} N(f(x)) &= N\left(\sum_{k=1}^p x_k f(e_k)\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^p N(x_k f(e_k)) \\ &= \sum_{k=1}^p |x_k| N(f(e_k)). \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 1 ; p \rrbracket, \quad |x_i| &\leq \|x\|_{\infty} \\ |x_i| N(f(e_i)) &\leq \|x\|_{\infty} N(f(e_i)). \end{aligned}$$

Donc $N(f(x)) \leq \|x\|_{\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^p N(f(e_k))}_K$.

Ceci prouve d'après la Proposition 1.114 que f est continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans (F, N) .

Soit maintenant $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur E .

Comme E est de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes, donc il existe $a, b > 0$ tels que $a \|\cdot\| \leq \|\cdot\|_\infty \leq b \|\cdot\|$.

Donc pour tout $x \in E$, $N(f(x)) \leq bK \|x\|$.

Donc f est continue de $(E, \|\cdot\|)$ dans (F, N) . ■

Remarque 1.131

L'hypothèse de dimension finie de E est indispensable. Dans le cas contraire, c'est faux en général.

Le résultat précédent s'étend aux applications multilinéaires.

Théorème 1.132

Soient E_1, \dots, E_n des espaces vectoriels normés de dimensions finies et $f : E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow F$ une application n -linéaire.

Il existe alors une constante $K \geq 0$ telle que

$$\text{pour tout } (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n, \quad \|f(x_1, \dots, x_n)\| \leq K \|x_1\|_{E_1} \dots \|x_n\|_{E_n}.$$

Démonstration 1.133

Pour tout $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, on note $p_i = \dim E_i$ et $\mathcal{B}_i = (e_{i,1}, \dots, e_{i,p_i})$ une base de E_i .

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$. Pour tout $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, on note $x_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,p_i})_{\mathcal{B}_i}$.

On a

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= f\left(\sum_{j_1=1}^{p_1} x_{1,j_1} e_{1,j_1}, \dots, \sum_{j_n=1}^{p_n} x_{n,j_n} e_{n,j_n}\right) \\ &= \sum_{j_1=1}^{p_1} \dots \sum_{j_n=1}^{p_n} x_{1,j_1} \dots x_{n,j_n} f(e_{1,j_1}, \dots, e_{n,j_n}). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} N(f(x_1, \dots, x_n)) &\leq \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq p_1 \\ \vdots \\ 1 \leq j_n \leq p_n}} |x_{1,j_1}| \dots |x_{n,j_n}| N(f(e_{1,j_1}, \dots, e_{n,j_n})) \\ &\leq \|x_1\|_{1,\infty} \dots \|x_n\|_{n,\infty} \underbrace{\sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq p_1 \\ \vdots \\ 1 \leq j_n \leq p_n}} N(f(e_{1,j_1}, \dots, e_{n,j_n}))}_{K}. \end{aligned}$$

On conclut de la même façon que dans la démonstration précédente. ■

Corollaire 1.134

Soient E_1, \dots, E_n des espaces vectoriels normés de dimensions finies.

Toute application $f : E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow F$ qui est n -linéaire est continue sur $E_1 \times \dots \times E_n$.

Exemple 1.135

- Le produit matriciel de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K})$ est bilinéaire, donc continu.
- Un produit scalaire dans un espace euclidien est bilinéaire, donc continu.
- Le déterminant dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est n -linéaire par rapport aux colonnes, donc il est continu.

1.5.6 Norme subordonnée

On définit sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}_c(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F la notion de norme subordonnée (relative aux deux normes sur E et F) ou norme triple.

Définition 1.136

Soit $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$.

On pose $\|f\| = \sup_{x \in B(0,1)} \|f(x)\|$, appelée la norme subordonnée de f .

Remarque 1.137

Cette définition a un sens car f étant linéaire de E dans F et continue, elle est bornée sur $B(0,1)$ d'après la Proposition 1.114.

Remarque 1.138

On a

$$\|f\| = \sup_{x \in B(0,1)} \|f(x)\| = \sup_{x \in S(0,1)} \|f(x)\| = \sup_{x \in \overline{B}(0,1)} \|f(x)\|.$$

Proposition 1.139

Soit $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$.

Alors $\|f\|$ est

- égal à $\sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$, mais aussi à $\sup_{x \in S(0,1)} \|f(x)\|$;
- le plus petit réel positif M tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leq M \|x\|$.

Démonstration 1.140

On note $N_1(f) = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$ et $N_2(f) = \sup_{x \in S(0,1)} \|f(x)\|$. ■

Démonstration 1.141 ($N_1(f) = N_2(f)$)

Pour tout $x \neq 0$, $\frac{x}{\|x\|} \in S(0,1)$.

Donc $\left\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq N_2(f)$.

Donc $\frac{1}{\|x\|} \|f(x)\| \leq N_2(f)$ i.e. $N_1(f) \leq N_2(f)$.

De plus, pour tout $x \in S(0,1)$, $\|x\| = 1$ donc $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \|f(x)\| \leq N_1(f)$.

Donc $N_2(f) \leq N_1(f)$.

Finalement, on a $N_1(f) = N_2(f)$. ■

Démonstration 1.142 ($N_2(f) = \|f\|$)

Pour tout $x \in B(0,1) \setminus \{0\}$, on a $\frac{x}{\|x\|} \in S(0,1)$ donc

$$\left\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq N_2(f)$$
$$\frac{1}{\|x\|} \|f(x)\| \leq N_2(f).$$

Or $\|x\| \leq 1$ donc $\|f(x)\| \leq \frac{1}{\|x\|} \|f(x)\| \leq N_2(f)$.

Ceci est encore vrai pour $x = 0$ donc $\|f\| \leq N_2(f)$.

De plus, soient $x \in S(0,1)$ et $\lambda \in [0; 1[$.

On a $\|\lambda x\| = \lambda < 1$ donc $\lambda x \in B(0,1)$.

Donc $\|f(\lambda x)\| = \lambda \|f(x)\| \leq \|f\|$.

Donc, par passage à la limite quand $\lambda \rightarrow 1$:

$$\|f(x)\| \leq \|f\|$$

i.e. $N_2(f) \leq \|f\|$.

Donc $N_2(f) = \|f\|$. ■

Démonstration 1.143 (Second point)

On a

$$\begin{aligned}\|f\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \\ &= \min \left\{ K \in \mathbb{R} \mid \forall x \neq 0, \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq K \right\} \\ &= \min \{ K \in \mathbb{R} \mid \forall x \in E, \|f(x)\| \leq K \|x\| \}.\end{aligned}$$

■

Exemple 1.144

Dans l'Exercice 1.122, on avait montré $\forall f \in E, |I(f)| \leq \|f\|_\infty$.

On a $|I(1)| = 1 = 1 \times \|1\|_\infty$.

Donc $\|I\| = 1$.

Méthode 1.145

Si

$$\forall x \in E, \|f(x)\| \leq K \|x\|$$

et s'il existe $x_0 \in E$ tel que

$$\|f(x_0)\| = K \|x_0\|$$

alors $\|f\| = K$.

Proposition 1.146

Les normes subordonnées sont des normes sur les espaces $\mathcal{L}_c(E, F)$.

Elles sont dites sous-multiplicatives : pour toutes applications linéaires continues et composables f et g ,

$$\|f \circ g\| \leq \|f\| \times \|g\|.$$

Démonstration 1.147 ($\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$)

► Soit $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$.

Si $\|f\| = 0$ alors $\forall x \in E, \|f(x)\| \leq 0 \times \|x\|$ donc $f = 0$.

► Soient $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On a

$$\|\lambda f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\lambda f(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} |\lambda| \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = |\lambda| \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = |\lambda| \|f\|.$$

► Soit $(f, g) \in \mathcal{L}_c(E, F)^2$.

On a

$$\begin{aligned} \forall x \in B(0, 1), \quad \|(f + g)(x)\| &= \|f(x) + g(x)\| \\ &\leq \|f(x)\| + \|g(x)\| \\ &\leq \|f\| + \|g\| \end{aligned}$$

donc $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$. ■

Démonstration 1.148 (Sous-multiplicativité)

On a

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \quad \|f \circ g(x)\| &= \|f(g(x))\| \\ &\leq \|f\| \|g(x)\| \\ &\leq \|f\| \|g\| \|x\|. \end{aligned}$$

Donc $\|f \circ g\| \leq \|f\| \|g\|$. ■

Comme en dimension finie, on peut représenter par choix de bases les applications linéaires par des matrices, on définit de manière semblable la notion de norme sous-multiplicative de matrices (relativement aux normes) ou norme triple.

Définition 1.149

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On choisit deux normes sur \mathbb{K}^p et \mathbb{K}^n (espaces identifiés à ceux des matrices-colonnes).

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, on pose $\|A\| = \sup_{\|X\|=1} \|AX\|$.

Proposition 1.150

Des normes étant choisies sur les espaces \mathbb{K}^p et \mathbb{K}^n , les normes subordonnées sont des normes sur tous les espaces $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.

Elles sont dites sous-multiplicatives : pour toutes matrices multipliables A et B ,

$$\|AB\| \leq \|A\| \times \|B\|.$$

Remarque 1.151

Dans le cas où un espace vectoriel normé E est aussi un \mathbb{K} -algèbre, on dit qu'il est une algèbre normée quand la norme vérifie en plus la propriété de sous-multiplicativité : $\forall (x, y) \in E^2, \quad \|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Remarque 1.152

En dimension finie, toute \mathbb{K} -algèbre A possède des normes sous-multiplicatives.

Démonstration 1.153

Soit A une \mathbb{K} -algèbre de dimension finie.

L'application $A^2 \longrightarrow A$ est bilinéaire donc continue.
 $(a, b) \longmapsto ab$

Il existe donc $K > 0$ tel que

$$\forall (a, b) \in A^2, \quad \|ab\| \leq K \|a\| \|b\|.$$

On pose $N = K \|\cdot\|$.

On a alors

$$\forall (a, b) \in A^2, \quad N(ab) \leq N(a) N(b)$$

et N est une norme sur A . ■

1.6 Topologie d'un espace vectoriel normé

Dans cette section, E est un espace vectoriel normé.

1.6.1 Intérieur d'une partie, voisinage d'un point

Définition 1.154

Soient A une partie de E et $a \in A$.

On dit que a est un point intérieur à A quand on peut trouver un rayon $r > 0$ tel que $B(a, r)$ soit incluse dans A . On dit aussi dans ce cas que A est un voisinage de a .

L'intérieur de A est l'ensemble de ses points intérieurs, noté $\overset{\circ}{A}$.

On a :

$$a \in \overset{\circ}{A} \iff \exists r > 0, \quad B(a, r) \subseteq A.$$

Exercice 1.155

Dans \mathbb{R} , quels sont les intérieurs des parties suivantes : $[0 ; 1]$, $[0 ; +\infty[$, \mathbb{Q} ?

Correction 1.156

► Si $A = [0 ; 1]$, alors $\overset{\circ}{A} =]0 ; 1[$.

En effet, pour $x \in]0 ; 1[$, on peut poser $r = \min\left(\frac{x}{2}, \frac{1-x}{2}\right) > 0$ pour avoir $B(x, r) \subseteq [0 ; 1]$.

► Si $A = [0 ; +\infty[$, alors $\overset{\circ}{A} =]0 ; +\infty[$ (même idée).

► Si $A = \mathbb{Q}$, alors $\overset{\circ}{A} = \emptyset$.

En effet, pour tout $x \in \mathbb{Q}$, pour tout $r > 0$, il existe $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $|x - y| < r$ i.e. $B(x, r) \not\subseteq \mathbb{Q}$.

Exercice 1.157

Quel est l'intérieur d'une boule de centre a et de rayon $r > 0$?

Correction 1.158

Soient $a \in E$ et $r > 0$.

Si $A = B(a, r)$, alors $\overset{\circ}{A} = A$.

En effet, pour tout $x \in B(a, r)$, on pose $p = \frac{r - \|x - a\|}{2} > 0$ et on a

$$B(x, p) \subseteq A.$$

Remarque 1.159

Cette notion dépend a priori de la norme utilisée. En dimension finie, ce n'est pas le cas : l'intérieur d'une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie ne dépend pas du choix de la norme (pourquoi ?).

Démonstration 1.160

Si N_1, N_2 sont deux normes équivalentes sur E , A est une partie de E et $a \in E$, alors a est intérieur à A pour N_1 ssi a est intérieur à A pour N_2 .

Il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha N_2 \leq N_1 \leq \beta N_2$.

Si a est intérieur à A pour N_1 , alors il existe $r > 0$ tel que $B_1(a, r) \subseteq A$.

On pose $p = \frac{r}{\beta} > 0$ et on montre $B_2(a, p) \subseteq A$.

Soit $x \in B_2(a, p)$.

On a $N_2(a - x) < p = \frac{r}{\beta}$.

Donc $N_1(a-x) \leq \beta N_2(a-x) < r$.

Donc $x \in B_1(a, r) \subseteq A$.

Donc x est intérieur à A pour N_2 .

On montre la réciproque de même, en montrant $B_1(a, ar) \subseteq B_2(a, r)$. ■

Proposition 1.161

Soient $u \in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$.

La suite u converge vers ℓ ssi tout voisinage de ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

1.6.2 Parties ouvertes

Définition 1.162

On dit qu'une partie A de E est ouverte (ou est un ouvert) quand à tout point de $a \in A$, on peut associer un rayon $r > 0$ tel que la boule de centre a et de rayon r soit incluse dans A :

$$\forall a \in A, \exists r > 0, B(a, r) \subseteq A.$$

Autrement dit, A est ouverte quand tout point de A est intérieur à A : $A = \mathring{A}$, ou, autrement dit, quand A est un voisinage de chacun de ses points.

Proposition 1.163

L'ensemble vide et E sont des parties ouvertes. Toute boule ouverte est une partie ouverte. Tout produit (fini) de parties ouvertes est ouvert.

Démonstration 1.164

Soient E, F deux espaces vectoriels normés par $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.

On pose $N(x, y) = \max(\|x\|_E, \|y\|_F)$ pour obtenir une norme N sur $E \times F$.

Montrons que si A est un ouvert de E et B un ouvert de F , alors $A \times B$ est un ouvert de $E \times F$.

Soit $(a, b) \in A \times B$.

$a \in A$ et A est un ouvert donc il existe $r > 0$ tel que $B_E(a, r) \subseteq A$.

$b \in B$ et B est un ouvert donc il existe $s > 0$ tel que $B_F(b, s) \subseteq B$.

On pose $p = \min(r, s) > 0$.

Montrons que $B_{E \times F}((a, b), p) \subseteq A \times B$.

Soit $(x, y) \in B_{E \times F}((a, b), p)$.

On a $N((x, y) - (a, b)) < p$ i.e. $N(x - a, y - b) < p$.

Donc $\|x - a\|_E < p$ et $\|y - b\|_F < p$.

Donc $x \in B_E(a, p)$ et $y \in B_F(b, p)$.

Or $p \leq r$ donc $B_E(a, p) \subseteq B_E(a, r) \subseteq A$ et $p \leq s$ donc $B_F(b, p) \subseteq B_F(b, s) \subseteq B$.

Donc $(x, y) \in A \times B$.

Donc $B_{E \times F}((a, b), p) \subseteq A \times B$.

On généralise à un produit de plusieurs ouverts par récurrence. ■

La topologie de E est l'ensemble de tous les ouverts de E .

Remarque 1.165

La topologie dépend a priori de la norme utilisée. En dimension finie, ce n'est pas le cas : dans un espace vectoriel normé de dimension finie, le fait d'être un ouvert ne dépend pas du choix de la norme.

1.6.3 Parties fermées

On rappelle la notion de point adhérent à une partie.

Définition 1.166

Soient A une partie de E et $x \in E$.

On dit que x est un point adhérent à A quand il existe une suite $u \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x , ou, ce qui revient au même, quand toute boule centrée en x rencontre A , ou encore quand $d(x, A) = 0$.

L'adhérence de A est l'ensemble de ses points adhérents, noté \overline{A} .

On a montré

Définition 1.167

On dit qu'une partie A de E est fermée (ou est un fermé) quand tout point adhérent à A est dans A , autrement dit quand la propriété suivante est vraie :

si une suite quelconque à termes dans A converge vers un point x de E , alors $x \in A$.

Ou encore : A est fermée quand $A = \overline{A}$.

Proposition 1.168

L'ensemble vide et E sont des parties fermées. Toute boule fermée est une partie fermée. Tout produit (fini) de parties fermées est fermé.

On note le lien avec les parties ouvertes.

Proposition 1.169

Soit A une partie de E .

Alors A est une partie ouverte ssi son complémentaire est une partie fermée.

Démonstration 1.170

\Rightarrow

On suppose A ouverte. On veut montrer que $E \setminus A$ est fermée.

Soit $(x_n) \in (E \setminus A)^{\mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ .

Par l'absurde, supposons $\ell \in A$.

A est ouverte donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(\ell, \varepsilon) \subseteq A$.

Or $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, x_n \in B(\ell, \varepsilon).$$

Donc pour tout $n \geq N$, $x_n \in A$: contradiction.

Donc $\ell \in E \setminus A$.

Donc $E \setminus A$ est un fermé.

\Leftarrow

Supposons que $E \setminus A$ est fermée. On veut montrer que A est ouverte.

Soit $a \in A$.

Par l'absurde, on suppose $\forall r > 0, \exists x \in B(a, r), x \notin A$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in B\left(a, \frac{1}{n+1}\right)$ tel que $x_n \notin A$.

On a construit une suite $(x_n) \in (E \setminus A)^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \|a - x_n\| < \frac{1}{n+1}$.

Par théorème d'encadrement, on a $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$.

Or $a \notin E \setminus A$: contradiction car $E \setminus A$ est un fermé.

Donc il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subseteq A$.

Donc A est un ouvert. ■

Encore une fois, le fait d'être un fermé en dimension finie ne dépend pas de la norme.

Proposition 1.171

- *Toute réunion de parties ouvertes est ouverte. Toute intersection finie de parties ouvertes est ouverte.*
 - *Toute intersection de parties fermées est fermée. Toute réunion finie de parties fermées est fermée.*
-

Démonstration 1.172 (Réunion d'ouverts)

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties ouvertes.

Montrons que $\bigcup_{i \in I} A_i$ est ouverte.

Soit $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$.

Il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i$.

Or A_i est ouverte donc il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq A_i$.

Donc $B(x, r) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$. ■

Démonstration 1.173 (Intersection finie d'ouverts)

Soient A_1, \dots, A_n des parties ouvertes.

Montrons que $\bigcap_{i=1}^n A_i$ est ouverte.

Soit $x \in \bigcap_{i=1}^n A_i$.

Pour tout $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, il existe $r_i > 0$ tel que $B(x, r_i) \subseteq A_i$.

On pose $r = \min_{1 \leq i \leq n} r_i > 0$.

Pour tout $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, $B(x, r) \subseteq B(x, r_i) \subseteq A_i$.

Donc $B(x, r) \subseteq \bigcap_{i=1}^n A_i$. ■

Remarque 1.174

Si la famille d'ouverts n'est pas finie, on ne peut rien dire sur l'intersection.

Par exemple, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose les ouverts $A_n = \left] \frac{-1}{n+1} ; \frac{1}{n+1} \right[$.

Alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{0\}$ n'est pas ouverte.

Exercice 1.175

Montrez que pour tout $a \in E$, $E \setminus \{a\}$ est un ouvert. Déduisez-en que si A est une partie finie de E , alors $E \setminus A$ est un ouvert.

Correction 1.176

Pour tout $x \in E \setminus \{a\}$, on pose $r = \frac{\|x - a\|}{2}$.

Alors $B(x, r) \subseteq E \setminus \{a\}$.

Donc $E \setminus \{a\}$ est un ouvert.

Si $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, alors $E \setminus A$ est le complémentaire de $\bigcup_{i=1}^n \{a_i\}$, qui est un fermé par union finie de fermés, et est donc un ouvert.

Exercice 1.177

Quels sont les sous-espaces vectoriels de E qui sont ouverts ?

Correction 1.178

Soit F un sous-espace vectoriel de E ouvert dans E .

$0 \in F$ et F est un ouvert donc il existe $r > 0$ tel que $B(0, r) \subseteq F$.

Soit $x \in E \setminus \{0\}$.

On a $\frac{r}{2} \frac{x}{\|x\|} \in B(0, r)$ donc

$$x = \frac{2\|x\|}{r} \left(\frac{r}{2} \frac{x}{\|x\|} \right) \in F.$$

Donc $E = F$: E est le seul sous-espace vectoriel de E ouvert dans E .

Exercice 1.179

Montrez que $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ et } xy = 1\}$ est un fermé de \mathbb{R}^2 .

Correction 1.180

Soit $((x_n, y_n)) \in F^{\mathbb{N}}$ qui converge vers (a, b) .

Montrons que $(a, b) \in F$.

On a $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$, $y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} b$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n y_n = 1$.

Donc par passage à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on a $a \geq 0$ et $ab = 1$.

Donc $(a, b) \in F$.

Donc F est un fermé.

Exercice 1.181

On note S l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que tous les coefficients soient positifs et sur chaque ligne la somme des coefficients vaut 1.

Montrez que S est un fermé.

NB : S est l'ensemble des matrices dites stochastiques.

Remarque 1.182

A priori, une partie de E n'est ni ouverte ni fermée : par exemple, dans \mathbb{R} , l'ensemble $]0 ; 1]$ n'est ni ouvert ni fermé.

Donc ne pas confondre « complémentaire » et « contraire » : on peut dire qu'une partie est un fermé quand son complémentaire est un ouvert, mais pas que le contraire d'être un ouvert c'est être un fermé.

Remarque 1.183

Il est souvent assez facile de montrer qu'une partie est un fermé grâce à la caractérisation séquentielle. Donc pour montrer qu'une partie est un ouvert, on montre souvent de cette façon que son complémentaire est un fermé.

Les fermés sont souvent définis par des égalités ou des inégalités larges. Par complémentaire, les ouverts sont souvent définis par des inégalités strictes ou des différences.

1.6.4 Ouverts ou fermés relatifs à une partie

Les définitions précédentes parlent d'ouverts et de fermés de E . On peut définir ces notions relativement à une partie.

Définition 1.184

Soient A une partie de E et U un sous-ensemble de A .

On dit que U est un ouvert de A quand il existe un ouvert V de E tel que $U = A \cap V$.

On dit que U est un fermé de A quand il existe un fermé V de E tel que $U = A \cap V$.

On remarque que les fermés de A sont les complémentaires dans A des ouverts de A . On peut caractériser de même une partie U fermée de A par l'égalité entre U et l'ensemble de ses points adhérents dans A .

1.6.5 Image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé par une fonction continue

Rappel 1.185

Si f est une fonction de E dans F définie sur D_f et $B \subseteq F$, l'image réciproque de B par f est

$$f^{-1}(B) = \{x \in D_f \mid f(x) \in B\}.$$

Théorème 1.186

Soit f une fonction de E dans F définie sur D .

Alors on a équivalence entre les propositions suivantes :

- (1) f est continue sur D ;
- (2) pour tout fermé B de F , son image réciproque $f^{-1}(B)$ est un fermé de D ;
- (3) pour tout ouvert B de F , son image réciproque $f^{-1}(B)$ est un ouvert de D .

Ceci est valable en particulier quand f est une application continue de E dans F , auquel cas on peut se passer des notions d'ouvert ou fermé relatif.

Démonstration 1.187 ((1) \implies (2))

Soient B un fermé de F et $(u_n) \in f^{-1}(B)^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in D$.

f étant continue sur D et donc en ℓ , on a $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell)$.

De plus, on a $(f(u_n)) \in B^{\mathbb{N}}$ or B est un fermé donc $f(\ell) \in B$.

Donc $\ell \in f^{-1}(B)$.

Donc $f^{-1}(B)$ est un fermé de D . ■

Démonstration 1.188 ((2) \implies (3))

Soit A un ouvert de F .

Alors $F \setminus A$ est un fermé de F .

Donc $f^{-1}(F \setminus A)$ est un fermé de D .

Or $f^{-1}(F \setminus A) = D \setminus f^{-1}(A)$.

Donc $f^{-1}(A)$ est un ouvert de D . ■

Démonstration 1.189 ((3) \implies (1))

On suppose que pour tout A ouvert de F , $f^{-1}(A)$ est un ouvert de D .

Soit $d \in D$. Montrons que f est continue en d .

Soit $\varepsilon > 0$.

La boule $B(f(d), \varepsilon)$ est un ouvert de F .

Donc $f^{-1}(B(f(d), \varepsilon))$ est un ouvert de D .

Or $f(d) \in B(f(d), \varepsilon)$ donc $d \in f^{-1}(B(f(d), \varepsilon))$.

Donc il existe $\alpha > 0$ tel que $D \cap B(d, \alpha) \subseteq f^{-1}(B(f(d), \varepsilon))$.

Donc pour tout $x \in D$ tel que $x \in B(d, \alpha)$, on a $f(x) \in B(f(d), \varepsilon)$ i.e.

$$\forall x \in D, \|x - d\| < \alpha \implies \|f(x) - f(d)\| < \varepsilon.$$

Donc f est continue en d . ■

Exemple 1.190 (Cas particuliers fondamentaux)

Si f est continue sur E et à valeurs réelles, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, les ensembles suivants sont des fermés de E :

$$\{x \in E \mid f(x) \geq a\} \quad \{x \in E \mid f(x) \leq a\} \quad \{x \in E \mid f(x) = a\}.$$

Exemple 1.191

► Les courbes de fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} sont des fermés de \mathbb{R}^2 .

► L'ensemble des matrices de trace nulle est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration 1.192 (Courbes des fonctions continues)

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, on pose $\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$.

On a alors

$$\Gamma_f = \varphi^{-1}(\{0\})$$

où $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur \mathbb{R}^2 car f est continue sur \mathbb{R} .
 $(x, y) \mapsto y - f(x)$

Or $\{0\}$ est un fermé de \mathbb{R} donc Γ_f est un fermé de \mathbb{R}^2 . ■

Démonstration 1.193 (Ensemble des matrices de trace nulle)

L'ensemble des matrices de trace nulle dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est

$$T = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \text{tr}(M) = 0\}.$$

Or $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie et tr est linéaire donc tr est continue.

Donc T est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue tr .

Donc T est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. ■

Par passage au complémentaire, si f est continue sur E et à valeurs réelles, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, les ensembles suivants sont des ouverts de E :

$$\{x \in E \mid f(x) < a\} \quad \{x \in E \mid f(x) > a\} \quad \{x \in E \mid f(x) \neq a\}.$$

Exemple 1.194

- ▷ L'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x > 0$ et $y > x$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 .
- ▷ $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: si une matrice A est inversible, alors toutes les matrices proches de A le sont aussi.

Démonstration 1.195 (Ensemble des couples susmentionnés)

On pose

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } y > x\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in]0 ; +\infty[\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x \in]0 ; +\infty[\}. \end{aligned}$$

Or $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y - x$ sont continues.

Donc A est un ouvert de \mathbb{R}^2 . ■

Démonstration 1.196 ($\text{GL}_n(\mathbb{K})$)

On a $\text{GL}_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\})$.

Or \det est continue et $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ est un ouvert de \mathbb{K} donc $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. ■

1.6.6 Frontière d'une partie

Définition 1.197

Soit A une partie de E . On appelle frontière de A l'ensemble $\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

Exemple 1.198

- Si B est une boule, alors son intérieur est la boule ouverte de même centre et de même rayon, son adhérence est la boule fermée et sa frontière est la sphère.
- L'ensemble des rationnels est d'intérieur vide, d'adhérence égale à \mathbb{R} et donc de frontière \mathbb{R} .

1.7 Compacité

Dans cette section, E est un espace vectoriel normé.

1.7.1 Valeurs d'adhérence d'une suite

Définition 1.199

Soient $u = (u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $a \in E$.

On dit que a est une valeur d'adhérence de la suite u quand il existe une extractrice φ telle que la suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers a .

Une suite peut avoir une ou plusieurs valeurs d'adhérence ou ne pas avoir de valeur d'adhérence :

- la suite $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de valeur d'adhérence ;
- toute suite convergente possède une seule valeur d'adhérence : sa limite ;
- la suite u définie par $u_{2n} = \frac{1}{n+1}$ et $u_{2n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ possède deux valeurs d'adhérence : 0 et 1 ;
- il est possible de numérotter les rationnels, autrement dit de créer une suite u qui prend exactement toutes les valeurs rationnelles dans \mathbb{R} : cette suite a pour valeurs d'adhérence tous les réels.

On peut donner une caractérisation équivalente sans passer par la notion de suite extraite.

Proposition 1.200

Soient $u = (u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $a \in E$.

Alors a est une valeur d'adhérence de u ssi pour tout $\varepsilon > 0$, $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in B(a, \varepsilon)\}$ est infini.

Démonstration 1.201



Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in B(a, \varepsilon)\}$ est infini.

On spécialise $\varepsilon \leftarrow \frac{1}{k+1}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

L'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in B(a, 1)\}$ est infini donc non-vidé. On choisit $\varphi(0)$ un élément de cet ensemble.

L'ensemble $\left\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in B\left(a, \frac{1}{2}\right)\right\}$ est infini donc il contient des entiers strictement supérieurs à $\varphi(0)$; on en choisit un, qu'on note $\varphi(1)$.

Si on suppose avoir construit $\varphi(0) < \varphi(1) < \dots < \varphi(k)$ tels que $u_{\varphi(0)} \in B(a, 1)$, $u_{\varphi(1)} \in B\left(a, \frac{1}{2}\right)$, ..., $u_{\varphi(k)} \in B\left(a, \frac{1}{k+1}\right)$, comme l'ensemble

$$\left\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in B\left(a, \frac{1}{k+2}\right)\right\}$$

est infini, on peut choisir $\varphi(k+1)$ dans cet ensemble tel que $\varphi(k+1) > \varphi(k)$.

Par récurrence, on construit une suite $(\varphi(k))_{k \in \mathbb{N}}$ strictement croissante d'entiers naturels tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_{\varphi(k)} \in B\left(a, \frac{1}{k+1}\right)$$

$$i.e. \|u_{\varphi(k)} - a\| < \frac{1}{k+1}.$$

Par théorème d'encadrement, on a $u_{\varphi(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} a$: a est une valeur d'adhérence de la suite (u_n) .



Supposons que a est une valeur d'adhérence de la suite (u_n) .

Il existe alors une extractrice φ telle que $u_{\varphi(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} a$.

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \|u_{\varphi(n)} - a\| < \varepsilon.$$

Donc $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in B(a, \varepsilon)\}$ contient $\varphi(N), \varphi(N+1), \dots$ i.e. c'est un ensemble infini. ■

Ceci peut encore être réécrit de la façon suivante.

Proposition 1.202

Soient $u = (u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $a \in E$.

Alors a est une valeur d'adhérence de u ssi $\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, \|u_n - a\| < \varepsilon$.

Démonstration 1.203

Soit I une partie de \mathbb{N} .

On a

$$\begin{aligned} I \text{ est infini} &\iff I \text{ n'est pas majorée} \\ &\iff \neg (\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in I, n \leq N) \\ &\iff \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in I, n > N. \end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $I_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in B(a, \varepsilon)\}$.

On a alors, d'après la Proposition 1.200 :

$$\begin{aligned} a \text{ est une valeur d'adhérence de } u &\iff \forall \varepsilon > 0, I_\varepsilon \text{ est infini} \\ &\iff \forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in I_\varepsilon, n > N \\ &\iff \forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N, \|u_n - a\| < \varepsilon. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Exercice 1.204

Soit $u = (u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Montrez que l'ensemble V des valeurs d'adhérence de la suite u est un fermé de E en utilisant les ensembles $U_p = \{u_n \mid n \geq p\}$.

Correction 1.205

Soit $a \in E$.

On a

$$\begin{aligned} a \in V &\iff \forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists x \in U_N, \|x - a\| < \varepsilon \\ &\iff \forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, U_N \cap B(a, \varepsilon) \neq \emptyset \\ &\iff \forall N \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, U_N \cap B(a, \varepsilon) \neq \emptyset \\ &\iff \forall N \in \mathbb{N}, a \in \overline{U_N} \\ &\iff a \in \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{U_N}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } V = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{U_N}.$$

V est donc un fermé par intersection de fermés.

1.7.2 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 1.206

Si E est de dimension finie, alors toute suite bornée de E possède une valeur d'adhérence.

Démonstration 1.207

On note $\mathcal{P}(k)$ le prédicat « si E est de dimension k , alors toute suite bornée de E possède une valeur d'adhérence ».

► Pour $k = 1$:

On pose $E = \text{Vect}(e_1)$.

Si (u_n) est une suite bornée de E , en notant $(u_n) = (\lambda_n e_1)$ où (λ_n) est une suite bornée de \mathbb{K} , d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , (λ_n) possède une valeur d'adhérence et donc (u_n) aussi.

D'où $\mathcal{P}(1)$.

► Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie.

Soit E de dimension $k + 1$.

On choisit une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{k+1})$ de E .

Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite bornée.

Alors les suites-coordonnées associées sont bornées.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = (u_{1,n}, \dots, u_{k+1,n})_{\mathcal{B}}$.

$(u_{k+1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée de \mathbb{K} donc (même théorème) il existe une extractrice φ telle que $(u_{k+1,\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = (u_{1,n}, \dots, u_{k,n}, 0)_{\mathcal{B}}$.

$(v_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de vecteurs de $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et bornée donc par hypothèse de récurrence, il existe une extractrice ψ telle que $(v_{\varphi \circ \psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

De plus, $(u_{k+1,\varphi \circ \psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge car c'est une suite extraite d'une suite convergente.

Donc $(u_{\varphi \circ \psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Donc $\mathcal{P}(k + 1)$ est vrai.

► Donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(k)$ est vrai. ■

Remarque 1.208

Ce théorème est faux en dimension infinie donc il faut bien mettre en valeur la dimension finie.

On peut ajouter une précision au théorème précédent.

Proposition 1.209

Si E est de dimension finie, alors toute suite bornée de E qui ne possède qu'une seule valeur d'adhérence est convergente vers cette valeur d'adhérence.

Démonstration 1.210

Supposons E de dimension finie.

Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite bornée qui admet une unique valeur d'adhérence ℓ .

Par l'absurde, on suppose que (u_n) ne converge pas vers ℓ .

On a

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \underbrace{\forall N \in \mathbb{N}, \quad \exists n \geq N, \quad \|u_n - \ell\| \geq \varepsilon}_{\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \notin B(\ell, \varepsilon)\} \text{ infini}}.$$

En ordonnant les éléments de cet ensemble et en les notant $\varphi(0) < \varphi(1) < \dots$, on construit une extractrice φ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{\varphi(n)} \notin B(\ell, \varepsilon).$$

Or $(u_{\varphi(n)})$ est bornée et E est de dimension finie donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une extractrice ψ et $\ell' \in E$ tels que

$$u_{\varphi \circ \psi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell'.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)}$ appartient au fermé $E \setminus B(\ell, \varepsilon)$ donc $\ell' \in E \setminus B(\ell, \varepsilon)$.

Donc $\ell' \neq \ell$.

Donc $\ell' = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi \circ \psi(n)}$ est une autre valeur d'adhérence de (u_n) : contradiction.

Donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. ■

1.7.3 Parties compactes

Définition 1.211

Soit A une partie de E .

On dit que A est une partie compacte de E (ou un compact de E) quand toute suite à termes dans A possède une valeur d'adhérence dans A (propriété dite de Bolzano-Weierstrass).

Exemple 1.212

- ▶ Tout segment $[a ; b]$ de \mathbb{R} est un compact et ce sont les seuls intervalles compacts. $[0 ; 1] \cup [2 ; 3]$ est compact.
- ▶ Dans \mathbb{K}^n , tout pavé $\prod_{i=1}^n [a_i ; b_i]$ est un compact. Plus généralement, un produit (fini) de compacts est compact.

Les parties compactes sont donc celles dont on peut extraire des sous-suites convergentes. Un résultat précédent se généralise alors.

Proposition 1.213

Si A est une partie compacte, alors toute suite de A qui ne possède qu'une seule valeur d'adhérence est convergente vers cette valeur d'adhérence.

Un compact étant connu, il est facile d'en construire d'autres.

Proposition 1.214

Si A est une partie compacte de E , alors toute partie B fermée dans A est aussi compacte.

Démonstration 1.215

Soient A une partie compacte de E , B un fermé de A et $(u_n) \in B^{\mathbb{N}}$.

Comme $B \subseteq A$, on a $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$.

A est compacte donc il existe une extractrice φ et $\ell \in A$ tels que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.

La suite $(u_{\varphi(n)})$ est à termes dans B et converge vers ℓ donc comme B est un fermé, on a $\ell \in B$.

Ainsi, toute suite de $B^{\mathbb{N}}$ possède une valeur d'adhérence dans B i.e. B est un compact. ■

Reconnaître si une partie est compacte n'est pas toujours facile. On dispose d'une condition nécessaire, qui est suffisante en dimension finie.

Proposition 1.216

Soit A une partie de E .

Si A est compacte, alors A est une partie fermée et bornée.

Démonstration 1.217

► Si A n'est pas bornée, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in A$ tel que $\|a_n\| \geq n$.

Si (a_n) possède une valeur d'adhérence dans A , alors il existe une extractrice φ et $\ell \in A$ tels que $a_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Alors $\|a_{\varphi(n)}\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|\ell\|$: contradiction.

Donc A n'est pas compacte.

► Supposons que A est compacte.

Soit $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in E$.

A étant compacte, il existe φ une extractrice et $\ell' \in A$ tels que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell'$.

La suite $(u_{\varphi(n)})$ est extraite de la suite convergente (u_n) donc $u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Donc par unicité de la limite, on a $\ell' = \ell \in A$.

Donc A est fermée. ■

La réciproque est hélas fausse en général. Néanmoins, en dimension finie, elle est vraie.

Proposition 1.218

Si E est de dimension finie, alors une partie de E est compacte ssi elle est fermée et bornée.

Remarque 1.219

En fait, il n'y a qu'en dimension finie que ce résultat est vrai. Un théorème de Riesz affirme que la boule-unité fermée d'un espace vectoriel normé est compacte ssi l'espace est de dimension finie, ce qui revient à dire que l'équivalence précédente n'est valable que dans un espace de dimension finie.

En dimension infinie, il se passe des choses vraiment étranges : les compacts sont des parties très petites et plates, par exemple, un compact est forcément d'intérieur vide. Heureusement, il est plus courant de travailler à notre niveau en dimension finie.

Exemple 1.220

► L'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un compact.

► La boule-unité fermée de $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ pour la norme infinie n'est pas compacte, car la suite des fonctions $(x \mapsto x^n)$ a pour seule valeur d'adhérence possible la fonction $x \mapsto 0$ si $x \neq 1$ et $1 \mapsto 1$, qui n'est même pas dans l'espace E .

Démonstration 1.221 (Matrices stochastiques)

On note

$$S_n = \left\{ M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall (i,j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2, m_{i,j} \geq 0 \text{ et } \forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, \sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1 \right\}.$$

Soit $M = (m_{i,j}) \in S_n$.

Pour tout $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, $\sum_{j=1}^n m_{i,j}$ est une somme de réels positifs qui vaut 1 donc pour tout $j \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, $0 \leq m_{i,j} \leq 1$.

Donc $\|M\|_\infty \leq 1$.

Donc S_n est bornée.

Soit $(M_k) = \left((m_{i,j}^k)_{i,j} \right)_k$ une suite de matrices de S_n qui converge vers $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2, m_{i,j}^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} a_{i,j}.$$

Par passage à la limite quand $k \rightarrow +\infty$ dans les deux conditions qui définissent S_n , on obtient

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2, a_{i,j} \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1.$$

Donc $A \in S_n$.

Donc S_n est fermée.

On aurait aussi pu considérer les fonctions continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$c_{i,j} : (m_{i,j}) \mapsto m_{i,j} \quad \text{et} \quad s_i : (m_{i,j}) \mapsto \sum_{j=1}^n m_{i,j}$$

et remarquer que

$$S_n = \bigcap_{1 \leq i,j \leq n} c_{i,j}^{-1}([0 ; +\infty[) \cap \bigcap_{i=1}^n s_i^{-1}(\{1\})$$

ce qui montre que S_n est un fermé par intersection de fermés.

Alors, comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, on en déduit que S_n est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. ■

Démonstration 1.222 (Deuxième point)

On pose $f_n : x \mapsto x^n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f\|_\infty = 1$.

Si (f_n) a une valeur d'adhérence $g \in \overline{B}(0, 1)$, alors il existe une extractrice φ telle que $f_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g$
i.e. $\|f_{\varphi(n)} - g\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Or pour tout $x \in [0 ; 1]$, $|f_{\varphi(n)}(x) - g(x)| \leq \|f_{\varphi(n)} - g\|_\infty$.

Donc par encadrement, on a $f_{\varphi(n)}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g(x)$.

Si $x \in [0 ; 1[$, alors $f_{\varphi(n)}(x) = x^{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Si $x = 1$, alors $f_{\varphi(n)}(x) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Donc $g : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0 ; 1[\\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

Or $g \notin E$: contradiction de la compacité. ■

Une application importante de la notion de compacité est le théorème suivant.

Théorème 1.223

Tout sous-espace vectoriel de dimension finie de E est fermé.

Démonstration 1.224

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

Soit $(u_n) \in F^{\mathbb{N}}$ une suite convergente vers $\ell \in E$.

Alors (u_n) est bornée : il existe $R > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \overline{B}(0, R)$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \overline{B}(0, R) \cap F = \{x \in F \mid \|x\| \leq R\} = \overline{B_F}(0, R)$.

Donc $\overline{B_F}(0, R)$ est un fermé borné de F et donc un compact de F .

Il existe donc une extractrice φ et $a \in \overline{B_F}(0, R)$ tels que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$.

Donc $\ell = a \in F$.

Donc F est fermé. ■

En dimension infinie, là encore il peut se passer des choses étranges : un sous-espace de E de dimension infinie peut être dense (et donc non-fermé s'il est différent de E).

1.7.4 Théorème des bornes atteintes

Le principal intérêt des compacts est de pouvoir généraliser un théorème de première année.

Théorème 1.225

Soient E, F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E et $f : A \longrightarrow F$.

Si f est continue sur A et A est compacte, alors $f(A)$ est compacte.

Démonstration 1.226

On suppose que f est continue et que A est compacte.

Soit $(u_n) \in f(A)^{\mathbb{N}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in f(A)$ donc il existe $v_n \in A$ tel que $u_n = f(v_n)$.

$(v_n) \in A^{\mathbb{N}}$ et A est compacte donc il existe une extractrice φ et $a \in A$ tels que $v_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$.

f est continue en a donc $u_{\varphi(n)} = f(v_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(a) \in f(A)$.

Donc $f(A)$ est compacte. ■

On résume en disant que l'image continue d'un compact est un compact.

En particulier, toute fonction continue sur un compact est donc bornée. Dans le cas des fonctions numériques (*i.e.* à valeurs dans \mathbb{R}), on peut même être plus précis.

Théorème 1.227

Toute fonction continue sur un compact et à valeurs réelles est bornée et atteint ses bornes.

Autrement dit, si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur A et A est une partie compacte de E , alors il existe $(a, b) \in A^2$ tel que pour tout $x \in A$, $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, ce qui revient à dire que f possède un minimum et un maximum sur A .

Démonstration 1.228

$f(A)$ est un fermé borné de \mathbb{R} donc possède un minimum et un maximum. ■

Remarque 1.229

Pour toute partie X bornée de \mathbb{R} non-vide, $\sup X$ et $\inf X$ sont dans l'adhérence de X .

Remarque 1.230

Ce théorème est à rapprocher du théorème vu en première année : toute fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Néanmoins, le théorème de l'an dernier donnait un résultat un peu plus précis que celui de cette année car il donnait aussi l'image du segment, en précisant qu'il s'agissait aussi d'un segment, car il faisait aussi intervenir le théorème des valeurs intermédiaires.

Ici, dans la version proposée cette année, on ne peut rien dire de plus.

Exercice 1.231

Un exercice classique, à savoir refaire ! C'est la base de nombreux exercices.

Soient E de dimension finie et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que $f(x)$ tende vers $+\infty$ quand $\|x\|$ tend vers $+\infty$. Montrez que f possède un minimum.

Exemple : dans le plan euclidien géométrique, on choisit trois points A, B, C ; montrez alors qu'il existe un point M du plan tel que la somme $AM + BM + CM$ soit minimale.

Correction 1.232 (Cas général)

On a $f(0) \in \mathbb{R}$ donc il existe $A > 0$ tel que $\forall x \in E, \|x\| > A \implies f(x) \geq f(0)$.

Sur $\overline{B}(0, A)$, fermé borné d'un espace de dimension finie donc un compact, f est continue et y admet donc un minimum en x_0 d'après le théorème des bornes atteintes.

Pour tout $x \in E$,

▷ si $x \notin \overline{B}(0, A)$, alors $f(x) \geq f(0) \geq f(x_0)$ car $0 \in \overline{B}(0, A)$

▷ si $x \in \overline{B}(0, A)$, alors $f(x) \geq f(x_0)$.

Donc $f(x_0) = \min_E f$.

Correction 1.233 (Exemple)

On note \mathcal{P} le plan considéré.

On pose $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ qui est une fonction continue.

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto AM + BM + CM$$

Par inégalité triangulaire, on a $f(M) \geq 3OM + \text{cte}$ donc

$$f(M) \xrightarrow{\|\vec{OM}\| \rightarrow +\infty} +\infty.$$

D'où l'existence d'un minimum d'après la propriété démontrée précédemment.

Exercice 1.234

Soit $f : (x, y) \mapsto xy\sqrt{1-x^2-2y^2}$.

Justifiez que l'ensemble de définition D de f est un compact de \mathbb{R}^2 .

Déterminez les points critiques de f dans l'ouvert $\overset{\circ}{D}$, puis les maxima et minima de f .

Correction 1.235

On a $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leq 1\}$.

Pour tout $(x, y) \in D$, on a

$$x^2 \leq 1 \text{ donc } |x| \leq 1$$

et

$$2y^2 \leq 1 \text{ donc } |y| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \leq 1$$

donc $\|(x, y)\|_\infty \leq 1$ donc D est borné.

De plus, $D = \varphi^{-1}([-\infty; 1])$ où $\varphi : (x, y) \mapsto x^2 + 2y^2$ continue sur \mathbb{R}^2 donc D est un fermé.

\mathbb{R}^2 est de dimension finie donc D est un compact.

f est continue sur D donc d'après le théorème des bornes atteintes, $\max_D f$ et $\min_D f$ existent.

Sur \mathring{D} , f est de classe \mathcal{C}^1 .

$$(x, y) \in \mathring{D} \text{ est un point critique de } f \text{ ssi } \nabla f(x, y) = 0 \text{ i.e. } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

Or

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} y\sqrt{1-x^2-2y^2} - xy\frac{x}{\sqrt{1-x^2-2y^2}} = 0 \\ x\sqrt{1-x^2-2y^2} - xy\frac{2y}{\sqrt{1-x^2-2y^2}} = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y(1-x^2-2y^2) - x^2y = 0 \\ x(1-x^2-2y^2) - 2xy^2 = 0 \end{cases} \\ &\iff (S) \begin{cases} y(1-x^2-2y^2) = 0 \\ x(1-x^2-4y^2) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Si $x = 0$ alors $y = 0$ donc une solution : $(0, 0)$.

Si $x \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} (S) &\iff \begin{cases} x^2 = 1 - 4y^2 \\ y(1 - 2(1 - 4y^2) - 2y^2) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 = 1 - 4y^2 \\ y = 0 \text{ ou } y^2 = \frac{1}{6} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 = \frac{1}{3} \\ y^2 = \frac{1}{6} \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit quatre autres solutions : $\left(\frac{t}{\sqrt{3}}, \frac{t}{\sqrt{6}}\right)$ où $t \in \{-1, 1\}$.

★★ À finir ★★

On retrouve aussi le théorème de Heine en conséquence de la compacité.

Définition 1.236

Soient E, F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E et $f : A \longrightarrow F$.

On dit que f est uniformément continue sur A quand

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in A^2, \|x - y\| \leq \eta \implies \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon.$$

Théorème 1.237

Soient E, F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E et $f : A \longrightarrow F$.

Si f est continue sur A et A est compacte, alors f est uniformément continue sur A .

Démonstration 1.238

Par l'absurde, on suppose

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists (x, y) \in A^2, \begin{cases} \|x - y\| \leq \eta \\ \|f(x) - f(y)\| > \varepsilon. \end{cases}$$

On spécialise $\eta \leftarrow \frac{1}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $(x_n, y_n) \in A^2$ tel que $\|x - y\| \leq \frac{1}{n+1}$ et $\|f(x) - f(y)\| > \varepsilon$.

On a ainsi construit deux suites $(x_n), (y_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad \|f(x_n) - f(y_n)\| > \varepsilon.$$

A étant compacte, (x_n) possède une valeur d'adhérence dans A donc il existe une extractrice φ et $\ell \in A$ tels que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.

On a

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \|y_{\varphi(n)} - \ell\| &\leq \|y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}\| + \|x_{\varphi(n)} - \ell\| \\ &\leq \frac{1}{\varphi(n) + 1} + \|x_{\varphi(n)} - \ell\|. \end{aligned}$$

Or $\varphi(n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ et $\|x_{\varphi(n)} - \ell\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ donc par encadrement, on a $y_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.

Par continuité de f en ℓ , on a
$$\begin{cases} f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell) \\ f(y_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell) \end{cases}$$

Donc $f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ce qui contredit l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})\| > \varepsilon.$$

■

1.8 Connexité par arcs

Dans cette section, E est un espace vectoriel normé.

1.8.1 Chemin

Définition 1.239

Soient A une partie de E et $a, b \in A$.

On appelle chemin (ou arc) dans A de a à b toute application continue $\varphi : [0 ; 1] \longrightarrow A$ telle que $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = b$. Le support du chemin est l'image de φ .

On peut définir une relation d'équivalence sur une partie de E en mettant en relation les points joignables par un chemin.

Définition 1.240

Soient A une partie de E et $a, b \in A$.

On pose $a\mathcal{R}b$ quand il existe un chemin dans A de a à b .

Proposition 1.241

Avec les notations précédentes, la relation \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur A .

Démonstration 1.242

► Soit $a \in A$.

La fonction
$$\begin{array}{ccc} \varphi : [0 ; 1] & \longrightarrow & A \\ t & \longmapsto & a \end{array}$$
 est continue sur $[0 ; 1]$ et on a $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = a$.

Donc $a\mathcal{R}a$: \mathcal{R} est réflexive.

► Soit $(a, b) \in A^2$ tel que $a\mathcal{R}b$.

Il existe une fonction continue $\varphi : [0 ; 1] \longrightarrow A$ telle que $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = b$.

On pose $\psi : [0 ; 1] \longrightarrow A$
 $t \longmapsto \varphi(1 - t)$

ψ est une fonction continue sur $[0 ; 1]$ telle que $\psi(0) = b$ et $\psi(1) = a$.

Donc $b\mathcal{R}a : \mathcal{R}$ est symétrique.

► Soit $(a, b, c) \in A^3$ tel que $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}c$.

Il existe $(\varphi, \psi) \in \mathcal{C}^0([0 ; 1], A)$ tel que $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$, $\psi(0) = b$ et $\psi(1) = c$.

On pose $\theta : [0 ; 1] \longrightarrow A$
 $x \longmapsto \begin{cases} \varphi(2x) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \psi(2x - 1) & \text{sinon} \end{cases}$

θ est une fonction continue sur $[0 ; 1]$ telle que $\theta(0) = a$ et $\theta(1) = c$.

Donc $a\mathcal{R}c : \mathcal{R}$ est transitive.

► Finalement, \mathcal{R} est une relation d'équivalence. ■

1.8.2 Parties connexes par arcs

Définition 1.243

Soit A une partie de E .

On dit que A est connexe par arcs quand tout couple de points $(a, b) \in A^2$ est joignable par un chemin.

Exemple 1.244

- Les parties convexes de E sont connexes par arcs.
- Les parties étoilées de E sont connexes par arcs.
- \mathbb{C}^* et $\mathbb{C} \setminus D$ où D est la demi-droite des réels négatifs sont connexes par arcs.

Démonstration 1.245

- Une partie convexe est une partie dont tous les points sont reliables en ligne droite donc, en particulier, est une partie connexe par arcs.

- Une partie A est dite étoilée quand il existe $c \in A$ tel que pour tout $b \in A$, $[cb] \subseteq A$. Alors A est clairement connexe par arcs. ■

Les classes d'équivalences de la relation notée \mathcal{R} précédemment s'appellent les composantes connexes par arcs de A : ce sont par définition des parties connexes par arcs.

Proposition 1.246

Les seules parties connexes par arcs de \mathbb{R} sont les intervalles.

Remarque 1.247

Il existe une notion plus générale, celle de partie connexe : une partie A de E est dite connexe quand les seules parties de A à la fois ouvertes et fermées sont \emptyset et A . Elle est plus délicate à aborder et est hors-programme, c'est pourquoi on s'en tient à la notion de connexité par arcs (toute partie connexe par arcs est connexe).

1.8.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Là encore, la notion de connexité par arcs permet de généraliser des résultats de première année.

Théorème 1.248

Soient E, F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E et $f : A \longrightarrow F$.

Si f est continue par A et A est connexe par arcs, alors $f(A)$ est connexe par arcs.

Démonstration 1.249

Supposons que A est connexe par arcs et que f est continue.

Soit $(x, y) \in f(A)^2$.

Il existe $(a, b) \in A^2$ tel que $f(a) = x$ et $f(b) = y$.

Or A est connexe par arcs donc il existe $\varphi : [0 ; 1] \longrightarrow A$ continue telle que $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = b$.

$f \circ \varphi$ est donc un chemin qui relie x et y (par composition de fonctions continues).

Donc $f(A)$ est connexe par arcs. ■

On résume en disant que l'image continue d'un connexe par arcs est un connexe par arcs.

Dans le cas des fonctions numériques (*i.e.* à valeurs dans \mathbb{R}), on peut même être plus précis.

Théorème 1.250

Toute fonction continue sur un connexe par arcs et à valeurs réelles vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

Autrement dit, si $f : A \longrightarrow F$ est continue sur A une partie connexe par arcs de E , alors $f(A)$ est un intervalle.

Ou encore :

$$\forall (y, z) \in f(A)^2, \forall w \in [yz], \exists t \in A, f(t) = w.$$

Démonstration 1.251

Évident à partir du Théorème 1.248. ■

Chapitre 2

Séries numériques et vectorielles : révisions et compléments

Sommaire

2.1	Rappels	85
2.1.1	Définitions et notations	85
2.1.2	Convergence d'une série	86
2.1.3	Lien entre convergence de suites et convergence de séries	87
2.2	Séries réelles à termes positifs.	88
2.2.1	Théorème de Cesàro	92
2.2.2	Théorème de comparaison par domination de séries à termes positifs	93
2.2.3	Théorème de comparaison par équivalence de séries à termes positifs	95
2.2.4	Théorème de comparaison série - intégrale	97
2.3	Séries absolument convergentes	101
2.3.1	Lien entre absolue convergence et convergence	101
2.3.2	Un exemple fondamental : l'exponentielle de matrice	102
2.3.3	Extension des résultats par comparaison	102
2.3.4	Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes	104
2.4	Séries alternées	106

Dans ce chapitre, E désigne un espace vectoriel normé (qui peut être \mathbb{R} ou \mathbb{C}) et $\|\cdot\|$ la norme associée (qui est dans ces cas la valeur absolue ou le module).

2.1 Rappels

2.1.1 Définitions et notations

Définition 2.1 (Série vectorielle)

Soit u une suite de E .

On associe à cette suite la suite s définie de la façon suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

La suite s est appelée série de terme général u_n et notée $\sum_{n \geq 0} u_n$ ou $\sum u$.

Chaque nombre s_n est appelé somme partielle d'indice n de la série.

L'adjectif « numérique » associé au mot « série » signifie que les termes généraux de la série sont en fait des nombres réels ou complexes.

2.1.2 Convergence d'une série

Définition 2.2

Soit u une suite de E .

On dit que la série $\sum u$ converge ssi la suite des sommes partielles $(s_n) = \left(\sum_{k=0}^n u_k \right)$ converge.

Dans ce cas, si $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$, alors ℓ est appelée somme de la série $\sum u$ et on note $\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

On appelle aussi reste partiel d'indice n de la série le nombre $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$, de sorte que $r_n + s_n = \ell$.

La suite des restes partiels converge donc vers 0.

Dans le cas contraire, on dit que la série $\sum u$ diverge.

Exemple 2.3

► Soit $x \in \mathbb{C}$. La série $\sum_{n \geq 0} x^n$ converge ssi $|x| < 1$ et, dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Cette série est appelée série géométrique de raison x .

► Les séries de Riemann : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

► Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$.

On peut bien sûr généraliser aux séries quelques théorèmes d'opérations.

Proposition 2.4

Soient u, v deux suites de E et λ un scalaire.

Si les séries $\sum u$ et $\sum v$ convergent, alors la série $\sum (u + \lambda v)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Ceci prouve aussi que l'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel.

Remarque 2.5

La somme d'une série divergente et d'une série convergente est une série divergente.

En revanche, il n'y a rien à dire a priori à propos de la somme de deux séries divergentes.

2.1.3 Lien entre convergence de suites et convergence de séries

Proposition 2.6

Soit u une suite de E .

Si la série $\sum u$ converge, alors la suite u converge vers 0.

Remarque 2.7

- La réciproque est fausse.
- Par contraposition, si une suite u ne tend pas vers 0, alors la série associée diverge : on dit que la série $\sum u$ diverge grossièrement.

Exemple 2.8

On appelle série harmonique la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$.

Cette série diverge, pourtant son terme général tend vers 0.

Définition 2.9

Soit u une suite de E . On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$.

La série $\sum v$ est appelée la série télescopique (ou série domino, ou série différence) associée à u .

Proposition 2.10

Une suite converge ssi sa série télescopique associée converge.

Exercice 2.11

On pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$. Montrez que la suite u converge.

Correction 2.12

u converge ssi $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.

On a

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n \\&= \frac{1}{n+1} + \ln \frac{n}{n+1} \\&= \frac{1}{n+1} + \ln \left(1 - \frac{1}{n+1}\right).\end{aligned}$$

Or $\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ et $\frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n+1} + \left(\frac{-1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \right) \\&\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \\&\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.\end{aligned}$$

Les séries $\sum (u_{n+1} - u_n)$ et $\sum \frac{1}{2n^2}$ sont à termes positifs à partir d'un certain rang et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge *i.e.* u converge.

Note culturelle : on appelle constante d'Euler-Mascheroni la limite de cette suite, notée γ et on a le développement asymptotique

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1).$$

On remarque que l'on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n.$$

2.2 Séries réelles à termes positifs

Dans cette section, on s'intéresse uniquement aux séries dont le terme général est un réel positif.

On appelle un premier théorème issu du cours de première année.

Théorème 2.13

Soient u et v deux suites réelles positives.

► Si $0 \leq u \leq v$ et si la série $\sum v$ converge, alors la série $\sum u$ converge.

- Si $0 \leq u \leq v$ et si la série $\sum u$ diverge, alors la série $\sum v$ diverge.
- Si $u \sim v$, alors les séries $\sum u$ et $\sum v$ sont de même nature.

Une application classique : la règle de d'Alembert.

Proposition 2.14

Soit u une suite réelle strictement positive telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. Alors

- si $\ell < 1$, la série $\sum u$ converge ;
- si $\ell > 1$, la série $\sum u$ diverge ;
- si $\ell = 1$, on ne peut rien conclure.

Démonstration 2.15

- Si $\ell < 1$, on pose $K = \frac{1+\ell}{2}$.

Comme $\ell < K < 1$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq K$.

Par récurrence, on montre $\forall n \geq N$, $u_n \leq u_N K^{n-N} = \frac{u_N}{K^N} K^n$.

Comme $0 < K < 1$, la série $\sum K^n$ converge donc d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

- Si $\ell > 1$, à partir d'un certain rang, on a $u_n \geq \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n \times \text{cte} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pm\infty$.

Donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.

- Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire. Deux exemples :

— En posant $u_n = \frac{1}{n}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ mais $\sum u_n$ diverge.

— En posant $u_n = \frac{1}{n^2}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ mais $\sum u_n$ converge. ■

Exercice 2.16

Soient $x, y > 0$. Représentez graphiquement l'ensemble des couples (x, y) tels que la série $\sum \frac{x^n}{y^n + n^x}$ converge.

Correction 2.17

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{x^n}{y^n + n^x} \geq 0$.

► Si $x = 1$, alors $u_n = \frac{1}{y^n + n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

— Si $y > 1$:

On a $n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(y^n)$ donc $y^n + n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} y^n$.

Donc $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{y^n} = \left(\frac{1}{y}\right)^n$.

Or $0 \leq \frac{1}{y} < 1$ donc la série géométrique $\sum \left(\frac{1}{y}\right)^n$ converge.

Ainsi, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

— Sinon, on a $y^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n)$ donc $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Or $\sum \frac{1}{n}$ diverge donc d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.

► Si $y < 1$, on a $n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(y^n)$ donc $y^n + n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} y^n$.

Donc $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$.

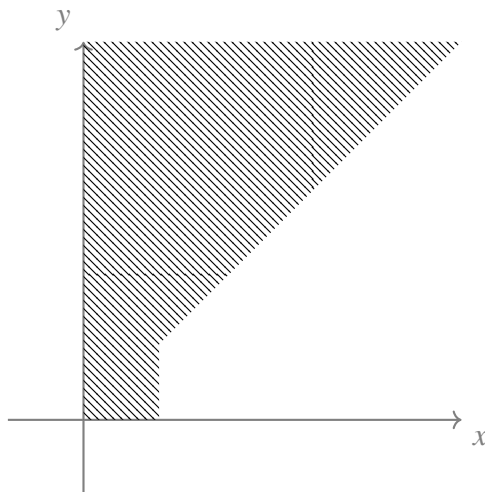
Ainsi, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge ssi $\frac{x}{y} < 1$ i.e. $x < y$.

► Si $y \leq 1$, on a $y^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n^x)$ donc $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^n}{n^x}$.

— Si $x > 1$, on a $n^x \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(x^n)$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$: $\sum u_n$ diverge grossièrement.

— Si $x < 1$, on a $0 \leq \frac{x^n}{n^x} \leq x^n$ donc, comme $0 < x < 1$, $\sum x^n$ converge et par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \frac{x^n}{n^x}$ converge, donc $\sum u_n$ converge.

Finalement, on a la représentation graphique suivante :



Exercice 2.18

Montrez que la suite (u_n) définie par $u_0 \in [0 ; 1]$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} (u_n + u_n^2)$ converge vers 0 et donnez la nature de la série $\sum u_n$.

Correction 2.19

Localisation : on montre par récurrence triviale que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0 ; 1]$.

Monotonie : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + u_n^2}{2} - u_n = \frac{u_n^2 - u_n}{2} \leq \frac{u_n(u_n - 1)}{2} \leq 0$$

donc (u_n) est décroissante.

Or (u_n) est minorée par 0 donc (u_n) converge d'après le théorème de la limite monotone.

On pose $\ell = \lim_n u_n \in [0 ; 1]$.

Par opérations sur les limites, on a

$$u_{n+1} = \frac{u_n + u_n^2}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell + \ell^2}{2}.$$

Or (u_{n+1}) est extraite de (u_n) donc $u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Par unicité de la limite, on a donc $\ell = \frac{\ell + \ell^2}{2}$.

Donc $\ell(\ell - 1) = 0$, or $\ell \in [0 ; 1]$ donc $\ell = 0$.

Enfin, on a $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, u_n^2 \leq \frac{u_n}{2}$.

Donc pour $n \geq N$, on a $u_{n+1} \leq \frac{3}{4}u_n$.

Par récurrence, on montre que pour tout $n \geq N, u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{-N} u_N \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Or la série géométrique $\sum \left(\frac{3}{4}\right)^n$ converge donc d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

On donne quelques versions plus élaborées du théorème de comparaison.

2.2.1 Théorème de Cesàro

Théorème 2.20

Soit u une suite numérique qui converge vers ℓ . Alors $\frac{u_0 + \dots + u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Démonstration 2.21

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

On a

$$\begin{aligned} \frac{u_0 + \dots + u_n}{n} - \ell &= \frac{u_0 + \dots + u_N}{n} + \frac{u_{N+1} + \dots + u_n}{n} - \ell \\ &= \frac{u_0 + \dots + u_N}{n} + \frac{u_{N+1} - \ell + \dots + u_n - \ell}{n} + \frac{(n - N)\ell}{n} - \ell \\ &= \frac{u_0 + \dots + u_N}{n} - \frac{N\ell}{n} + \frac{u_{N+1} - \ell + \dots + u_n - \ell}{n}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \left| \frac{u_0 + \dots + u_n}{n} - \ell \right| &\leq \overbrace{\left| \frac{u_0 + \dots + u_N - N\ell}{n} \right|}^K + \frac{|u_{N+1} - \ell| + \dots + |u_n - \ell|}{n} \\ &\leq \frac{K}{n} + \frac{(n - N)\varepsilon}{n} \\ &\leq \frac{K}{n} + \varepsilon. \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\frac{K}{n}} \right) \frac{n - N}{n} \leq 1$$

Or $\frac{K}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N', \frac{K}{n} \leq \varepsilon$.

On pose $N'' = \max(N, N')$.

Donc pour tout $n \geq N''$, $\left| \frac{u_0 + \dots + u_n}{n} - \ell \right| \leq 2\varepsilon$.

On a montré

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \left| \frac{u_0 + \dots + u_n}{n} - \ell \right| \leq \varepsilon$$

donc $\frac{u_0 + \dots + u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. ■

Dans le cas où $\ell \neq 0$, la série $\sum u$ diverge grossièrement et $\sum_{k=0}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n\ell$.

Dans le cas où $\ell = 0$, on peut juste dire $\sum_{k=0}^n u_k = o(n)$.

Exercice 2.22

Soit u la suite définie par récurrence par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{u_n + 1}{u_n + 2}$.

Étudiez la convergence ou divergence de la suite u , puis donnez un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Correction 2.23

Par récurrence immédiate, (u_n) est à termes strictement positifs.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 1}{u_n + 2} > 0$ donc (u_n) est croissante.

Par l'absurde, on suppose que (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}_+^*$.

De la même façon que dans l'Exercice 2.18, par passage à la limite, on obtient $\ell - \ell = \frac{\ell + 1}{\ell + 2}$ donc $\ell = -1$: contradiction.

Donc (u_n) est croissante et diverge donc elle diverge vers $+\infty$.

De plus, on a $\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k + 1}{u_k + 2}$.

Or $\frac{u_n + 1}{u_n + 2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc d'après le théorème de Cesàro, on a

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k + 1}{u_k + 2}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

i.e. $u_n - u_0 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$.

Donc $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$.

2.2.2 Théorème de comparaison par domination de séries à termes positifs

Dans le cas convergent d'abord, les restes partiels suivent la même relation de comparaison.

Théorème 2.24

Soient u, v deux suites réelles positives.

Si $u = \mathcal{O}(v)$ et la série $\sum v$ converge, alors la série $\sum u$ converge. De plus, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \mathcal{O}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.

Si $u = o(v)$ et la série $\sum v$ converge, alors la série $\sum u$ converge. De plus, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.

Démonstration 2.25

► Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$, il existe $K > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geq N, 0 \leq u_n \leq K v_n$.

La série $\sum v_n$ converge donc d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

Pour $n \geq N$, on a $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq K \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

D'où $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.

► Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, 0 \leq u_n \leq \varepsilon v_n$.

La série $\sum v_n$ converge donc d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

Pour $n \geq N$, on a $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

D'où $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$. ■

Dans le cas divergent ensuite, les sommes partielles suivent aussi la même relation de comparaison.

Théorème 2.26

Soient u, v deux suites réelles positives.

Si $u = \mathcal{O}(v)$ et la série $\sum u$ diverge, alors la série $\sum v$ diverge. De plus, $\sum_{k=0}^n u_k = \mathcal{O}\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$.

Si $u = o(v)$ et la série $\sum u$ diverge, alors la série $\sum v$ diverge. De plus, $\sum_{k=0}^n u_k = o\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$.

Démonstration 2.27

► Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$, il existe $K > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geq N, 0 \leq u_n \leq K v_n$.

Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum v_n$ diverge.

u et v étant deux suites positives telles que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, on en déduit que

$$\sum_{k=0}^n u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \text{ et } \sum_{k=0}^n v_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Pour $n \geq N$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n u_k &= \sum_{k=0}^N u_k + \sum_{k=N+1}^n u_k \\ &\leq \sum_{k=0}^N u_k + K \sum_{k=N+1}^n v_k \\ &\leq \underbrace{\sum_{k=0}^N u_k - K \sum_{k=0}^N v_k}_L + K \sum_{k=0}^n v_k. \end{aligned}$$

Or $\sum_{k=0}^n v_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N', L \leq \sum_{k=0}^n v_k$.

Alors, pour $n \geq \max(N, N')$, on a $\sum_{k=0}^n u_k \leq (K+1) \sum_{k=0}^n v_k$.

On a montré : $\sum_{k=0}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$.

► Idem. ■

2.2.3 Théorème de comparaison par équivalence de séries à termes positifs

Théorème 2.28

Soient u, v deux suites réelles positives.

Si $u \sim v$, alors les séries $\sum u$ et $\sum v$ sont de même nature ; l'une converge ssi l'autre converge.

De plus,

► si les séries convergent, alors les restes partiels sont équivalents : $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$;

► si les séries divergent, alors les sommes partielles divergent vers $+\infty$ et sont équivalentes :

$$\sum_{k=0}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^n v_k.$$

Démonstration 2.29

► Si les séries convergent, comme $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, (1 - \varepsilon) v_n \leq u_n \leq (1 + \varepsilon) v_n$$

donc

$$\forall n \geq N, (1 - \varepsilon) \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq (1 + \varepsilon) \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k.$$

$$\text{Donc } \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k.$$

► Si les séries divergent, la démonstration est similaire à la Démonstration 2.27. ■

Exercice 2.30

Soit $a > 0$. On pose $u_n = \sin \frac{a^n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Selon la valeur de a , déterminez la nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$.

Montrez que si $a = 1$, alors $\sum_{k=1}^n u_k \sim \ln n$ et si $a < 1$, $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = o(a^n)$.

Correction 2.31

► Si $a = 1$, on a $u_n = \sin \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Or $\sum \frac{1}{n}$ diverge donc par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.

► Si $a < 1$, on a $u_n = \sin \frac{a^n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a^n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(a^n)$.

Or $\sum a^n$ converge car $a < 1$ donc par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

De plus, d'après le Théorème 2.28, si $a = 1$, on a

$$\sum_{k=1}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$$

et d'après le Théorème 2.24, si $a < 1$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} a^k\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{a^{n+1}}{1-a}\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(a^n). \end{aligned}$$

2.2.4 Théorème de comparaison série - intégrale

Proposition 2.32

Soit f une fonction continue, positive et décroissante sur \mathbb{R}_+ .

Alors la série de terme général $f(n)$ et la suite de terme général $\int_0^n f$ sont de même nature.

Démonstration 2.33

f étant décroissante et continue sur \mathbb{R}_+ , pour $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in [k-1; k]$, $f(k) \leq f(t)$.

$$\text{Donc } \int_{k-1}^k f(k) dt \leq \int_{k-1}^k f(t) dt \text{ i.e. } f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt.$$

$$\text{De même, } \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k).$$

$$\text{Donc pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k f(t) dt.$$

$$\text{Donc } \int_1^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f(t) dt.$$

f étant positive, les suites $\left(\sum_{k=1}^n f(k)\right)$ et $\left(\int_0^n f(t) dt\right)$ sont croissantes.

Donc si $\left(\int_0^n f\right)$ converge, elle est majorée, donc $\left(\sum_{k=1}^n f(k)\right)$ est majorée et donc convergente, i.e. $\sum f(n)$ converge.

Réciproquement, si $\sum f(n)$ converge, $\left(\sum_{k=1}^n f(k)\right)$ est majorée donc $\left(\int_1^{n+1} f\right)$ est majorée et croissante donc convergente. Donc $\left(\int_0^n f\right)$ converge. ■

Méthode 2.34 (À retenir)

La technique d'encadrement des sommes partielles d'une série $\sum f(n)$ (ou des restes partiels) par des intégrales quand f est continue, positive et monotone.

Exemple 2.35

$$\triangleright \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n \text{ (à connaître).}$$

► Si $\alpha > 1$, un équivalent simple de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ quand $n \longrightarrow +\infty$ est $\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

Rappel 2.36

Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ et $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ ou 0, alors

$$\ln u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln v_n.$$

Démonstration 2.37 (Premier point)

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ est positive, décroissante et continue sur $[1 ; +\infty[$.

On a donc l'inégalité :

$$\underbrace{\int_2^{n+1} \frac{1}{t} dt}_{=\ln(n+1)-\ln 2} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \underbrace{\int_1^n \frac{1}{t} dt}_{=\ln n}.$$

Or on a

$$\ln(n+1) - \ln 2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$$

donc d'après le théorème d'encadrement, on a

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n. \quad \blacksquare$$

Démonstration 2.38 (Deuxième point)

Soit $\alpha > 1$.

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue, décroissante et positive sur $[1 ; +\infty[$.

On a

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \underbrace{\int_n^{+\infty} f(t) dt}_{=\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_n^X f(t) dt}.$$

Soient $X \geq n \geq 1$.

On a

$$\int_{n+1}^{X+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{k=n+1}^X \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^X \frac{1}{t^\alpha} dt.$$

Or

$$\int_n^X \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[\frac{1}{-\alpha+1} t^{-\alpha+1} \right]_n^X = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{X^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right).$$

Donc

$$\frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(X+1)^{\alpha-1}} \right) \leq \sum_{k=n+1}^X \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{X^{\alpha-1}} \right).$$

Or $\frac{1}{X^{\alpha-1}} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{1}{(X+1)^{\alpha-1}} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0$.

Donc, par passage à la limite quand $X \rightarrow +\infty$, on a

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

Or $\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ donc par encadrement, on a

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

■

Exercice 2.39

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln k}{k^2}$.

Justifiez l'existence de u_n , puis montrez la divergence de la série $\sum u_n$.

Montrez que $\sum_{k=1}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln^2 n}{2}$.

Correction 2.40

Pour $k \geq 1$, on a

$$0 \leq \frac{\ln k}{k^2} = \frac{\ln k}{k^{1/2} \times k^{3/2}} = \frac{\ln k}{k^{1/2}} \times \frac{1}{k^{3/2}}.$$

Or $\frac{\ln k}{k^{1/2}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ donc $\frac{\ln k}{k^{1/2}} \underset{k \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)$.

Or $\sum \frac{1}{k^{3/2}}$ converge donc d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \frac{\ln k}{k^2}$ converge.

Donc pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln k}{k^2}$ existe.

La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln t}{t^2}$ est de classe \mathcal{C}^∞ et positive sur $[1; +\infty[$.

On a $f' : t \mapsto \frac{t - 2t \ln t}{t^4}$.

Or, pour $t \geq 2$, on a $t \leq 2t \ln t$ et $t^4 \geq 0$ donc

$$\forall t \in [2; +\infty[, \quad f'(t) \leq 0$$

donc f est décroissante sur $[2; +\infty[$.

Soient $X \geq n \geq 3$.

On a

$$\int_n^{X+1} \frac{\ln t}{t^2} dt \leq \sum_{k=n}^X \frac{\ln k}{k^2} \leq \int_{n-1}^X \frac{\ln t}{t^2} dt.$$

Or, par intégration par parties, on a

$$\int_{n-1}^X \frac{\ln t}{t^2} dt = \frac{\ln(n-1) + 1}{n-1} - \frac{\ln X + 1}{X}.$$

Donc

$$\frac{\ln n + 1}{n} - \frac{\ln(X+1) + 1}{X+1} \leq \sum_{k=n}^X \frac{\ln k}{k^2} \leq \frac{\ln(n-1) + 1}{n-1} - \frac{\ln X + 1}{X}.$$

Donc, par passage à la limite quand $X \rightarrow +\infty$, on a

$$\frac{\ln n + 1}{n} \leq u_n \leq \frac{\ln(n-1) + 1}{n-1}.$$

Or $\ln(n-1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$ donc

$$\frac{\ln(n-1) + 1}{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln n + 1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}.$$

D'où $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$.

Pour $n \geq 3$, on a $\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n} \geq 0$.

Or $\sum \frac{1}{n}$ diverge donc d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \frac{\ln n}{n}$ diverge et donc $\sum u_n$ diverge.

De plus, d'après le Théorème 2.28, on a

$$\sum_{k=1}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k}.$$

La fonction $g : t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ est de classe \mathcal{C}^∞ , positive et décroissante sur $[3; +\infty[$.

On pose $n \geq 4$. On a

$$\int_4^{n+1} \frac{\ln t}{t} dt \leq \sum_{k=4}^n g(k) \leq \int_3^n \frac{\ln t}{t} dt.$$

Or

$$\int_3^n \frac{\ln t}{t} dt = \int_3^n \frac{1}{t} \ln t dt = \left[\frac{\ln^2 t}{2} \right]_3^n = \frac{\ln^2 n}{2} - \frac{\ln^2 3}{2}.$$

Donc

$$\underbrace{\frac{\ln^2(n+1)}{2} + K_2}_{\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln^2 n}{2}} \leq \sum_{k=4}^n \frac{\ln k}{k} \leq \underbrace{\frac{\ln^2 n}{2} + K_1}_{\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln^2 n}{2}}.$$

Par encadrement, on a $\sum_{k=4}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln^2 n}{2}$ puis $\sum_{k=1}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln^2 n}{2}$.

2.3 Séries absolument convergentes

Définition 2.41

Soit u une suite de E .

On dit que la série $\sum u$ est absolument convergente ssi la série à termes positifs $\sum \|u\|$ est convergente.

2.3.1 Lien entre absolue convergence et convergence

Théorème 2.42

Si E est de dimension finie, alors toute série absolument convergente est convergente.

Démonstration 2.43

Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie $p \in \mathbb{N}$ et \mathcal{B} une base de E .

On choisit la norme sup $\|\cdot\|_\infty$ associée à cette base.

Toutes les normes sont équivalentes sur E donc si $\|\cdot\|$ est une norme telle que $\sum \|u_n\|$ converge, alors $\sum \|u_n\|_\infty$ converge d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs.

On note $(u_{n,1}, \dots, u_{n,p})$ les coordonnées de u_n dans \mathcal{B} .

On a $\forall k \in \llbracket 1 ; p \rrbracket$, $|u_{n,k}| \leq \|u_n\|_\infty$ donc d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum_n |u_{n,k}|$ converge, donc $\sum_n u_{n,k}$ est absolument convergente et donc convergente.

Donc les suites des sommes partielles $\left(\sum_{j=0}^n u_j \right) = \left(\left(\sum_{j=0}^n u_{j,1}, \dots, \sum_{j=0}^n u_{j,p} \right) \right)$ convergent i.e. $\sum u_n$ converge. ■

Remarque 2.44

- La réciproque est fautive : la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge (on l'appelle la série harmonique alternée) mais ne converge pas absolument.
- L'hypothèse de la dimension finie est indispensable. En dimension infinie, ce résultat est faux en général.

Exercice 2.45

Soit $x > 0$. Montrez que les séries suivantes convergent :

$$\sum_{n \geq 2} \frac{\ln(n^2 + (-1)^n n)}{n^2 + (-1)^n x^n} \quad \sum_{n \geq 0} \sqrt{n} \cos(x) \sin^n(x) \quad \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n \sqrt{n+x}}{x^n + n^{2/x}}.$$

2.3.2 Un exemple fondamental : l'exponentielle de matrice

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

On choisit comme norme sur $E = \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une norme sous-multiplicative.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|A^n\| \leq \|A\|^n$, donc $\left\| \frac{A^n}{n!} \right\| \leq \frac{\|A\|^n}{n!}$.

Or la série $\sum \frac{\|A\|^n}{n!}$ converge (et sa somme vaut $\exp \|A\|$), donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \frac{A^n}{n!}$ est absolument convergente.

On pose alors $\exp A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$.

2.3.3 Extension des résultats par comparaison

Définition 2.46

Soit u une suite de E et v une suite réelle positive.

On dit que $u = \mathcal{O}(v)$ quand $\exists M > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $\|u_n\| \leq M v_n$.

On dit que $u = o(v)$ quand $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $\|u_n\| \leq \varepsilon v_n$.

Proposition 2.47

Soient u une suite de E et v une suite réelle positive.

Si E est de dimension finie, $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ quand n tend vers $+\infty$ et la série $\sum v$ converge, alors la série $\sum u$ est absolument convergente.

De plus,
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \mathcal{O}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right).$$

Démonstration 2.48

On a $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(v_n) \iff \|u_n\| \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(v_n).$

Si $\sum v_n$ converge alors $\sum \|u_n\|$ converge d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs donc, comme E est de dimension finie, $\sum u_n$ converge.

De plus, on a $\left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_k\|$ donc d'après le Théorème 2.24, on a

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_k\| \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right).$$

Donc

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right\| \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right).$$

■

Ceci est encore valable si $u_n = o(v_n)$.

Proposition 2.49

Soient u une suite de E et v une suite réelle positive.

Si E est de dimension finie, $u_n = o(v_n)$ quand n tend vers $+\infty$ et la série $\sum v$ converge, alors la série $\sum u$ est absolument convergente.

De plus,
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right).$$

Démonstration 2.50

Idem.

■

2.3.4 Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes

Définition 2.51

Une \mathbb{K} -algèbre est un \mathbb{K} -espace vectoriel muni d'un produit interne bilinéaire.

Définition 2.52

Soient E une algèbre normée de dimension finie, $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ deux séries à termes dans E .

On appelle produit de Cauchy des deux séries la série $\sum_{n \geq 0} c_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

Remarque 2.53

Quand les séries ne commencent pas à partir du rang 0, il faut se méfier ! Une idée simple est de se ramener au cas précédent en décalant les indices.

Exemple très courant : les séries commencent au rang 1. Dans ce cas, le produit de Cauchy des séries

$\sum_{n \geq 1} a_n$ et $\sum_{n \geq 1} b_n$ est la série $\sum_{n \geq 1} c_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n+1-k}$.

Théorème 2.54

Avec les mêmes hypothèses sur E .

Si les séries $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ convergent absolument, alors leur produit de Cauchy est aussi absolument convergent et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times \sum_{k=0}^{+\infty} b_k.$$

Démonstration 2.55 (Premier cas : $E = \mathbb{R}$ et $(a_n), (b_n)$ positives)

On pose $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$ et $C_n = \sum_{k=0}^n c_k$.

On a $A_n B_n = \sum_{k=0}^n a_k \times \sum_{k=0}^n b_k = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq \ell \leq n}} a_k b_\ell$.

On a $(\star) \quad C_n \leq A_n B_n \leq C_{2n}$.

Les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent donc les suites (A_n) et (B_n) convergent et sont donc majorées.

Comme ce sont des suites positives, la suite $(A_n B_n)$ est majorée (produit d'inégalités entre positifs).

Donc (C_n) , qui est croissante, est majorée donc converge *i.e.* $\sum c_n$ converge.

$$\text{Donc } A_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k, B_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} b_k, C_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \text{ et } C_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k.$$

Donc, par passage à la limite dans (\star) , on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \times \sum_{k=0}^{+\infty} b_k. \quad \blacksquare$$

Démonstration 2.56 (Cas général)

On a $\dim E \in \mathbb{N}$ donc toutes les normes sont équivalentes sur E ; on en choisit donc une qui est sous-multiplicative.

Avec les mêmes notations, on a $A_n B_n - C_n = \sum_{k=0}^n \sum_{j=n-k+1}^n c_j$, d'où

$$\begin{aligned} \|A_n B_n - C_n\| &\leq \sum_{k=0}^n \sum_{j=n-k+1}^n \|c_j\| \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=n-k+1}^n \left\| \sum_{\ell=0}^j a_{j-\ell} b_\ell \right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \sum_{j=n-k+1}^n \sum_{\ell=0}^j \|a_{j-\ell} b_\ell\| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \sum_{j=n-k+1}^n \sum_{\ell=0}^j \|a_{j-\ell}\| \times \|b_\ell\|. \end{aligned}$$

On pose $A'_n = \sum_{k=0}^n \|a_k\|$, $B'_n = \sum_{k=0}^n \|b_k\|$ et $C'_n = \sum_{k=0}^n c'_k = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \|a_{k-j}\| \times \|b_j\|$.

On a de même $\|A_n B_n - C_n\| \leq A'_n B'_n - C'_n$.

D'après le premier cas, (C'_n) converge vers $\sum_{k=0}^{+\infty} \|a_k\| \times \sum_{k=0}^{+\infty} \|b_k\| = \lim_n A'_n B'_n$.

Donc $A'_n B'_n - C'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc par encadrement $A_n B_n - C_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Or $A_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ et $B_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ donc

$$C_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \times \sum_{k=0}^{+\infty} b_k. \quad \blacksquare$$

2.4 Séries alternées

Définition 2.57

Une série alternée est une série réelle $\sum u_n$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} est de signe opposé à u_n .

En général, les séries alternées sont reconnaissables à la présence d'un facteur $(-1)^n$ dans l'expression du terme général.

On dispose d'une condition suffisante de convergence d'une série alternée qu'on appelle le critère spécial des séries alternées.

Théorème 2.58

Soit $\sum (-1)^n u_n$ une série alternée.

Si la suite u

- ▷ est positive,
- ▷ est décroissante,
- ▷ et converge vers 0,

alors la série $\sum (-1)^n u_n$ converge.

Dans ce cas, la somme de la série est positive, et si on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$ le reste partiel d'indice n , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, R_n est du signe de son premier terme (i.e. du signe de $(-1)^{n+1}$) et $|R_n| \leq u_{n+1}$.

Exemple 2.59

- ▷ La série harmonique alternée $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge.
- ▷ La série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ converge.

Remarque 2.60

- ▷ Si $\sum_{n \geq n_0} (-1)^n u_n$ est une série alternée convergente, sa somme a le signe du premier terme de la série (ici le signe de $(-1)^{n_0} u_{n_0}$).
- ▷ La condition de décroissance de la suite u est essentielle ! Contre-exemple : la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}}$ est une série alternée divergente.
De plus, cela fournit un contre-exemple au théorème de comparaison par équivalents si on ne tient pas compte de la condition sur le signe, qui doit être constant.

Exercice 2.61

Soit $\alpha > 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha + k}$.

Justifiez l'existence de u_n . Montrez que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

Correction 2.62

La suite $\left(\frac{1}{k^\alpha + k}\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et converge vers 0 donc d'après le critère spécial des séries alternées, $\sum \frac{(-1)^k}{k^\alpha + k}$ converge.

Ainsi, $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha + k}$ existe pour $n \in \mathbb{N}^*$.

De plus, on a

$$|u_n| = \left| \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha + k} \right| \leq \frac{1}{n^\alpha + n} \leq \frac{1}{n^\alpha}.$$

Or $\alpha > 1$ donc d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum |u_n|$ converge et donc $\sum u_n$ converge.

Chapitre 3

Familles sommables

Sommaire

3.1	Sommes finies108
3.1.1	Définition	108
3.1.2	Propriétés	111
3.2	Conventions de calcul dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$112
3.3	Somme d'une famille de réels positifs113
3.3.1	Propriétés	114
3.3.2	Théorème de sommation par paquets	115
3.3.3	Théorème de Fubini	115
3.4	Familles sommables dans un espace vectoriel normé de dimension finie116
3.4.1	Définitions	116
3.4.1.1	Cas réel	116
3.4.1.2	Cas complexe	116
3.4.1.3	Cas général	118
3.4.2	Propriétés	118
3.4.3	Théorème de sommation par paquets	119
3.4.4	Théorème de Fubini	121
3.4.5	Produit de Cauchy de deux séries	123

Dans ce chapitre, E désigne un espace vectoriel normé de dimension finie (qui peut être \mathbb{R} ou \mathbb{C}) et $\|\cdot\|$ la norme associée (qui est dans ce cas la valeur absolue ou le module).

Si A, B sont deux ensembles, alors on note $A \subseteq_f B$ pour indiquer que A est un sous-ensemble fini de B .

3.1 Sommes finies

3.1.1 Définition

D'abord un rappel : on définit par récurrence la somme de n éléments de E notés x_1, \dots, x_n par :

- ▷ si $n = 0$, alors $\sum_{k=1}^n x_k = 0$ (une somme vide a pour valeur 0 par convention) ;
- ▷ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n+1} x_k = x_{n+1} + \sum_{k=1}^n x_k$.

On définit de même par récurrence les sommes de la forme $\sum_{k=p}^q x_k$ quand $p - 1 \leq q$ (si $q = p - 1$, la somme est vide donc vaut 0).

Proposition 3.1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in E$.

Alors :

- (1) pour tout $(p, q) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$ tel que $p \leq q$, $\sum_{k=p}^n x_k = \sum_{k=p}^q x_k + \sum_{k=q+1}^n x_k$;
- (2) pour tout $\varphi \in \mathfrak{S}_n$, $\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n x_{\varphi(k)}$.

Démonstration 3.2 (1)

On pose $\mathcal{P}(n)$ la proposition « $\forall (p, q) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, p \leq q \implies \sum_{k=p}^n x_k = \sum_{k=p}^q x_k + \sum_{k=q+1}^n x_k$ ».

Si $n = 1$, alors pour tout $(p, q) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$, $p = q = 1$ donc $\sum_{k=p}^n x_k = x_1 + 0 = \sum_{k=p}^q x_k + \sum_{k=q+1}^n x_k$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors soient $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in E^{n+1}$ et $(p, q) \in \llbracket 1 ; n+1 \rrbracket^2$ tel que $p \leq q$:

- ▷ si $q \leq n$, alors par définition, $\sum_{k=p}^{n+1} x_k = \sum_{k=p}^n x_k + x_{n+1}$, donc d'après l'hypothèse de récurrence,
$$\sum_{k=p}^{n+1} x_k = \sum_{k=p}^q x_k + \sum_{k=q+1}^n x_k + x_{n+1} = \sum_{k=p}^q x_k + \sum_{k=q+1}^{n+1} x_k ;$$
- ▷ si $q = n+1$, alors $\sum_{k=p}^{n+1} x_k = \sum_{k=p}^q x_k + 0 = \sum_{k=p}^q x_k + \sum_{k=q+1}^{n+1} x_k$.

Dans les deux cas, on a montré $\sum_{k=p}^{n+1} x_k = \sum_{k=p}^q x_k + \sum_{k=q+1}^{n+1} x_k$. Autrement dit, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. ■

Démonstration 3.3 (2)

On pose $\mathcal{P}(n)$ la proposition « $\forall \varphi \in \mathfrak{S}_n, \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n x_{\varphi(k)}$ ».

$\mathcal{P}(1)$ est vraie car le seul élément de \mathfrak{S}_1 est l'application $1 \mapsto 1$.

Si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors soient $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in E^{n+1}$ et $\varphi \in \mathfrak{S}_{n+1}$:

- ▷ si $\varphi(n+1) = n+1$ alors φ induit une bijection de $\llbracket 1 ; n \rrbracket$ dans lui-même donc d'après l'hypothèse de récurrence, $\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n x_{\varphi(k)}$ donc $\sum_{k=1}^{n+1} x_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^n x_{\varphi(k)} + x_{\varphi(n+1)} = \sum_{k=1}^n x_k + x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} x_k$;
- ▷ si $\varphi(n+1) = m \neq n+1$, alors on pose $\psi = (m \ n+1)\varphi$ et $a = \varphi^{-1}(n+1)$. On a alors $\psi(n+1) = n+1$, $\psi(a) = m$ et pour tout $k \in \llbracket 1 ; n+1 \rrbracket \setminus \{a, n+1\}$, $\psi(k) = \varphi(k)$. D'après le cas précédent, $\sum_{k=1}^{n+1} x_k = \sum_{k=1}^{n+1} x_{\psi(k)}$, donc en utilisant le résultat précédent :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} x_k &= \sum_{k=1}^{a-1} x_{\psi(k)} + x_{\psi(a)} + \sum_{k=a+1}^n x_{\psi(k)} + x_{\psi(n+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{a-1} x_{\varphi(k)} + x_m + \sum_{k=a+1}^n x_{\varphi(k)} + x_{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{a-1} x_{\varphi(k)} + x_{\varphi(n+1)} + \sum_{k=a+1}^n x_{\varphi(k)} + x_{\varphi(a)} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} x_{\varphi(k)}. \end{aligned}$$

Dans les deux cas, on a montré $\sum_{k=1}^{n+1} x_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{n+1} x_k$. Autrement dit, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. ■

Proposition 3.4

Soient I un ensemble fini et non-vidé d'indices, n son cardinal et f, g deux bijections de $\llbracket 1 ; n \rrbracket$ dans I (des énumérations de I).

Alors pour tout $(x_i)_{i \in I} \in E^I$, $\sum_{k=1}^n x_{f(k)} = \sum_{k=1}^n x_{g(k)}$.

Démonstration 3.5

On remarque que $g^{-1} \circ f$ est une bijection de $\llbracket 1 ; n \rrbracket$ dans lui-même donc d'après la Proposition 3.1 :

$$\sum_{k=1}^n x_{g(k)} = \sum_{k=1}^n x_{g(g^{-1} \circ f(k))} = \sum_{k=1}^n x_{f(k)}.$$
■

Autrement dit, quel que soit l'ordre dans lequel on numérote les éléments de la famille $(x_i)_{i \in I}$, on obtient toujours la même somme en les additionnant.

Définition 3.6

Si I est un ensemble fini d'indices et $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E , alors on pose $\sum_{i \in I} x_i$ la valeur d'une somme $\sum_{k=1}^n x_{f(k)}$, où f est une bijection de $\llbracket 1 ; n \rrbracket$ dans I quelconque.

Cette définition est cohérente, puisque la valeur de la somme $\sum_{k=1}^n x_{f(k)}$ ne dépend pas du choix de f d'après la proposition précédente. Autrement dit, il est inutile de connaître l'énumération choisie pour additionner les éléments de la famille, on peut considérer cette somme comme une somme « en vrac » de tous les éléments.

3.1.2 Propriétés

Proposition 3.7

Soient I un ensemble fini d'indices de cardinal n et $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E .

Alors :

- (1) pour toute bijection f d'un ensemble J dans I , $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} x_{f(j)}$ (changement d'indice dans une somme) ;
- (2) pour toute bijection f de I dans lui-même, $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} x_{f(i)}$ (propriété de commutativité) ;
- (3) pour tout couple (J, J') de parties de I disjointes et de réunion I , $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in J} x_i + \sum_{i \in J'} x_i$ (propriété d'associativité) ;
- (4) plus généralement, pour toute partition $(I_k)_{k \in K}$ de l'ensemble I , $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} x_i$.

Démonstration 3.8 (1)

Soit f une bijection de J dans I . On choisit une énumération ψ de J . Alors $f \circ \psi$ est une énumération de I .

Alors, par définition, $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{k=1}^n x_{f \circ \psi(k)}$ et $\sum_{j \in J} x_{f(j)} = \sum_{k=1}^n x_{f \circ \psi(k)}$ donc $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} x_{f(j)}$. ■

Démonstration 3.9 (2)

Cas particulier $I = J$ du point précédent. ■

Démonstration 3.10 (3)

Soit (J, J') un couple de parties de I disjointes et de réunion I . On note q le cardinal de J , de sorte que $n - q$ est le cardinal de J' .

On choisit une énumération φ de J et une énumération ψ de J' . Alors l'application

$$\begin{aligned} \theta : \llbracket 1 ; n \rrbracket &\longrightarrow I \\ k &\longmapsto \begin{cases} \varphi(k) & \text{si } k \leq q \\ \psi(k - q) & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

est une énumération de I .

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} x_i &= \sum_{k=1}^n x_{\theta(k)} \\ &= \sum_{k=1}^q x_{\theta(k)} + \sum_{k=q+1}^n x_{\theta(k)} \\ &= \sum_{k=1}^q x_{\varphi(k)} + \sum_{k=q+1}^n x_{\psi(k-q)} \\ &= \sum_{k=1}^q x_{\varphi(k)} + \sum_{k=1}^{n-q} x_{\psi(k)} \\ &= \sum_{i \in J} x_i + \sum_{i \in J'} x_i. \end{aligned}$$
■

Démonstration 3.11 (4)

Si $(I_k)_{k \in K}$ est une partition de l'ensemble I , l'ensemble K est fini donc par récurrence sur le cardinal b de K , on montre $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} x_i$ en utilisant le cas $b = 2$ démontré précédemment (il suffit de choisir un élément a de K , poser $J = I_a$ et $J' = \bigsqcup_{k \in K \setminus \{a\}} I_k$ et remarquer que la famille $(I_k)_{k \in K \setminus \{a\}}$ est une partition de l'ensemble J' et que le cardinal de $K \setminus \{a\}$ est $b - 1$). ■

3.2 Conventions de calcul dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

L'ensemble $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ est muni d'une addition : pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\})^2$,

- si x et y sont réels, $x + y$ est la somme habituelle de deux réels positifs ;
- si $x = +\infty$ ou $y = +\infty$ alors on pose $x + y = +\infty$

et d'une multiplication :

- si x et y sont réels, xy est le produit habituel de deux réels positifs ;
- si $x = 0$ ou $y = 0$ alors on pose $xy = 0$;
- si $x = y = +\infty$ alors on pose $xy = +\infty$.

Il est aussi muni d'une relation d'ordre :

- si x et y sont deux réels, alors $x \leq y$ ou $x < y$ désignent les relations habituelles ;
- si x est réel et $y = +\infty$, alors on pose $x \leq +\infty$ et $x < +\infty$;
- si $x = y = +\infty$ alors $+\infty \leq +\infty$.

Proposition 3.12

L'addition dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ est associative, commutative et admet pour neutre 0.

La relation \leq est une relation d'ordre total dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

De plus, l'addition et la multiplication sont compatibles avec la relation d'ordre : on peut additionner ou multiplier deux inégalités membre à membre.

Définition 3.13

Soit A une partie non-vide de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Si A ne contient pas $+\infty$, alors :

- si A est majorée, elle possède une borne supérieure dans \mathbb{R} ;
- sinon on pose $\sup A = +\infty$.

Si A contient $+\infty$, on pose $\sup A = +\infty$.

Cette définition prolonge la notion de borne supérieure à toutes les parties de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, au sens où pour toute partie A de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, $\sup A$ est le plus petit majorant dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ de la partie A .

3.3 Somme d'une famille de réels positifs

Définition 3.14

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

On pose $\sum_{i \in I} x_i = \sup \left\{ \sum_{i \in J} x_i \mid J \subseteq_f I \right\}$.

Remarque 3.15

Cette définition est sensée, car l'ensemble $\left\{ \sum_{i \in J} x_i \mid J \subseteq_f I \right\}$ est une partie de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, donc possède toujours une borne supérieure dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Définition 3.16

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est sommable quand $\sum_{i \in I} x_i < +\infty$.

Évidemment, une famille sommable positive ne peut pas prendre la valeur $+\infty$, autrement dit, une famille sommable est nécessairement une famille de réels positifs.

3.3.1 Propriétés

Proposition 3.17

La somme d'une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ est invariante par permutation : si σ est une permutation de I , alors $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} x_{\sigma(i)}$.

En particulier, si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille sommable, toute permutation de la famille est encore une famille sommable de même somme.

En particulier, dans le cas où $I = \mathbb{N}$, si une série à termes positifs $\sum u_n$ est convergente, alors on dit qu'elle est commutativement convergente : changer l'ordre des termes change bien sûr les valeurs des sommes partielles mais ne change pas la valeur de la limite de ces sommes partielles.

Proposition 3.18

Soient $(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}$ deux familles d'éléments de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ et λ un réel positif.

Alors $\sum_{i \in I} (x_i + y_i) = \sum_{i \in I} x_i + \sum_{i \in I} y_i$ et $\sum_{i \in I} \lambda x_i = \lambda \sum_{i \in I} x_i$.

Corollaire 3.19

La somme de deux familles positives est sommable ssi les deux familles sont sommables.

Le produit par un réel strictement positif d'une famille positive est sommable ssi la famille est sommable.

Proposition 3.20

Soient $(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}$ deux familles d'éléments de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Si pour tout $i \in I$, $0 \leq x_i \leq y_i$ et si la famille $(y_i)_{i \in I}$ est sommable, alors la famille $(x_i)_{i \in I}$ l'est aussi et $\sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{i \in I} y_i$.

3.3.2 Théorème de sommation par paquets

Théorème 3.21

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs.

Si I est partitionné en une famille $(I_p)_{p \in P}$ de parties, alors

$$\sum_{p \in P} \sum_{i \in I_p} x_i = \sum_{i \in I} x_i.$$

3.3.3 Théorème de Fubini

Théorème 3.22

Soit $(x_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille de réels positifs. Alors

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} x_{ij} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} x_{ij} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ij}.$$

Ce résultat se généralise par récurrence dans le cas d'un produit cartésien $I_1 \times \cdots \times I_k$.

Un cas particulier courant.

Proposition 3.23

Soient $(a_i)_{i \in I}, (b_j)_{j \in J}$ deux familles de réels positifs.

Alors la famille $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est sommable ssi les familles $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ sont sommables et dans ce cas, on a

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \sum_{i \in I} a_i \times \sum_{j \in J} b_j.$$

3.4 Familles sommables dans un espace vectoriel normé de dimension finie

3.4.1 Définitions

Définition 3.24

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E .

On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est sommable quand la famille $(\|x_i\|)_{i \in I}$ est sommable, c'est-à-dire quand $\sum_{i \in I} \|x_i\| < +\infty$.

Cette définition est indépendante du choix de la norme, car en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

3.4.1.1 Cas réel

Définition 3.25

Soit x un réel.

On appelle partie positive de x le réel $x^+ = \max(0, x)$ et partie négative de x le réel $x^- = -\min(x, 0)$.

On remarque les égalités suivantes : $|x| = x^+ + x^-$ et $x = x^+ - x^-$.

Proposition 3.26

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille sommable de nombre réels.

Alors les familles positives $(x_i^+)_{i \in I}$ et $(x_i^-)_{i \in I}$ sont sommables et on a bien sûr $\sum_{i \in I} |x_i| = \sum_{i \in I} x_i^+ + \sum_{i \in I} x_i^-$.

On pose alors $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} x_i^+ - \sum_{i \in I} x_i^-$, qui est un réel tel que $\left| \sum_{i \in I} x_i \right| \leq \sum_{i \in I} |x_i|$.

3.4.1.2 Cas complexe

Proposition 3.27

Soit $(a_k)_{k \in I}$ une famille sommable de nombres complexes.

Alors les deux familles réelles $(\operatorname{Re} a_k)_{k \in I}$ et $(\operatorname{Im} a_k)_{k \in I}$ sont sommables.

On pose alors $\sum_{k \in I} a_k = \sum_{k \in I} \operatorname{Re} a_k + i \sum_{k \in I} \operatorname{Im} a_k$ qui est un complexe tel que $\left| \sum_{k \in I} a_k \right| \leq \sum_{k \in I} |a_k|$.

Exemple 3.28

- Toute famille finie est sommable et sa somme au sens des familles sommables est sa somme habituelle.
- Une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable ssi la série $\sum_n a_n$ est absolument convergente.

Exercice 3.29

Soit $\theta \in]0 ; 2\pi[$. Montrez que la famille $\left(\frac{e^{i\ell\theta}}{(k+\ell)^3} \right)_{(k,\ell) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.

Correction 3.30

On a

$$\begin{aligned} \sum_{(k,\ell) \in (\mathbb{N}^*)^2} \left| \frac{e^{i\ell\theta}}{(k+\ell)^3} \right| &= \sum_{(k,\ell) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(k+\ell)^3} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \sum_{\ell \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{(k+\ell)^3} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+\ell)^3}. \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{Fubini positif}$$

On veut donc montrer que pour $k \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{\ell \geq 1} \frac{1}{(k+\ell)^3}$ converge et que la série $\sum_{k \geq 1} \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+\ell)^3}$ converge.

Pour $k \geq 1$, on a $\frac{1}{(k+\ell)^3} \underset{\ell \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ell^3}$ donc par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{\ell \geq 1} \frac{1}{(k+\ell)^3}$ converge.

Or $\sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+\ell)^3} = \sum_{\ell=k+1}^{+\infty} \frac{1}{\ell^3} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2k^2}$ (cf. DS1).

Donc $\sum_{k \geq 1} \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+\ell)^3}$ converge par théorème de comparaison des séries à termes positifs.

Finalement, $\left(\frac{e^{i\ell\theta}}{(k+\ell)^3} \right)_{(k,\ell) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.

3.4.1.3 Cas général

Comme E est de dimension finie, on en choisit une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$.

Pour toute famille sommable $(x_i)_{i \in I} \in E^I$, on note (x_{i1}, \dots, x_{ip}) les coordonnées de x_i dans la base \mathcal{B} .

Alors pour tout $k \in \llbracket 1 ; p \rrbracket$, la famille de réels ou de complexes $(x_{ik})_{i \in I}$ est sommable.

On pose alors $\sum_{i \in I} x_i$ le vecteur qui a pour coordonnées $\left(\sum_{i \in I} x_{i1}, \dots, \sum_{i \in I} x_{ip} \right)$ dans la base \mathcal{B} .

On note $\ell^1(I, E)$ l'ensemble des familles sommables de E indicées par I .

3.4.2 Propriétés

Proposition 3.31

Toute sous-famille d'une famille sommable de E est elle-même sommable.

Toute permutation d'une famille sommable de E est encore sommable et de même somme.

En particulier, les séries absolument convergentes sont commutativement convergentes.

Les familles sommables sont celles qui sont approchables par des familles finies à ε près au sens de la proposition suivante.

Comme pour les séries, on dispose d'un théorème de comparaison entre familles sommables.

Proposition 3.32

Soient $(a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}$ deux familles d'éléments indicées par I .

Si pour tout $i \in I$, $0 \leq \|a_i\| \leq b_i$ et si la famille $(b_i)_{i \in I}$ est une famille sommable de réels positifs, alors la famille $(a_i)_{i \in I}$ est sommable et on a $\left\| \sum_{i \in I} a_i \right\| \leq \sum_{i \in I} \|a_i\| \leq \sum_{i \in I} b_i$.

La linéarité est encore vérifiée, mais n'est pas évidente au regard des définitions.

Proposition 3.33

L'ensemble $\ell^1(I, E)$ est un espace vectoriel et l'application $(a_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} a_i$ est une forme linéaire :

si $(a_i), (b_i) \in \ell^1(I, E)$ et λ est un scalaire, alors $\sum_{i \in I} (a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i$ et $\sum_{i \in I} \lambda a_i = \lambda \sum_{i \in I} a_i$.

3.4.3 Théorème de sommation par paquets

Théorème 3.34

Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille sommable de E .

Si I est partitionné en une famille $(I_p)_{p \in P}$ de parties, alors pour tout $p \in P$, $(a_i)_{i \in I_p}$ est sommable et

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{p \in P} \sum_{i \in I_p} a_i.$$

Exercice 3.35

Montrez que pour tout complexe z tel que $0 < |z| < 1$, la famille $(z^{|n|})_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable et calculez sa somme.

Correction 3.36

On a

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |z^{|n|}| &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |z|^{|n|} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} |z|^n + \sum_{n \in \mathbb{Z}_-^*} |z|^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} |z|^n + \sum_{n=1}^{+\infty} |z|^n \quad \left. \vphantom{\sum_{n=1}^{+\infty} |z|^n} \right) |z| < 1 \text{ donc } \sum |z|^n \text{ converge} \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

Donc $(z^{|n|})_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable et on a

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{|n|} &= \sum_{n \in \mathbb{N}} z^n + \sum_{n \in \mathbb{Z}_-^*} z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} z^n \\ &= \frac{1}{1-z} + \frac{z}{1-z} \\ &= \frac{1+z}{1-z}. \end{aligned}$$

Exercice 3.37

Montrez que la famille $\left(\frac{(-1)^n}{\max(m, n)^3} \right)_{m, n \geq 1}$ est sommable et calculez sa somme en fonction de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$.

On a
$$\sum_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} \left| \frac{(-1)^n}{\max(m,n)^3} \right| = \sum_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{\max(m,n)^3}.$$

On pose $I_k = \{(m, k) \mid m \in \llbracket 1 ; k \rrbracket\} \cup \{(k, n) \mid n \in \llbracket 1 ; k \rrbracket\}$.

On a bien $(\mathbb{N}^*)^2 = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}^*} I_k$.

On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{\max(m,n)^3} &= \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \sum_{(m,n) \in I_k} \frac{1}{\max(m,n)^3} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \sum_{(m,n) \in I_k} \frac{1}{k^3} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{2k-1}{k^3} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k-1}{k^3} \\ &< +\infty \end{aligned}$$

car $\frac{2k-1}{k^3} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{k^2}$ donc par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \frac{2k-1}{k^3}$ converge.

Donc $\left(\frac{(-1)^n}{\max(m,n)^3} \right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.

Donc
$$S = \sum_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{(-1)^n}{\max(m,n)^3} = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k^3} \sum_{(m,n) \in I_k} (-1)^n.$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{(m,n) \in I_k} (-1)^n &= k (-1)^k + \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n \\ &= k (-1)^k + (-1) \frac{1 - (-1)^{k-1}}{1 - (-1)} \\ &= k (-1)^k - \frac{1}{2} (1 + (-1)^k). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(-1)^k - \frac{1}{2}(1 + (-1)^k)}{k^3} \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} - \underbrace{\sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{(2\ell)^3}}_{=\frac{1}{8}\zeta(3)}.
 \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k + 1 - 1}{k^2} \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k + 1}{k^2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \\
 &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}} \frac{2}{k^2} - \zeta(2) \\
 &= \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{2}{(2\ell)^2} - \zeta(2) \\
 &= \frac{-1}{2} \zeta(2).
 \end{aligned}$$

D'où $S = -\frac{1}{8}\zeta(3) - \frac{1}{2}\zeta(2)$.

3.4.4 Théorème de Fubini

Théorème 3.39

Soit $(a_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille sommable de E .

Alors pour tout $i \in I$, la famille $(a_{ij})_{j \in J}$ est sommable; pour tout $j \in J$, la famille $(a_{ij})_{i \in I}$ est sommable et

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_{ij} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_{ij} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij}.$$

Ce résultat se généralise par récurrence dans le cas d'un produit cartésien $I_1 \times \cdots \times I_k$.

Exercice 3.40

Montrez que la famille $\left(\frac{(-1)^p}{q^p}\right)_{p,q \geq 2}$ est sommable et calculez sa somme.

Correction 3.41

On a

$$\begin{aligned}\sum_{p,q \geq 2} \left| \frac{(-1)^p}{q^p} \right| &= \sum_{p,q \geq 2} \frac{1}{q^p} \\ &= \sum_{q \geq 2} \sum_{p \geq 2} \frac{1}{q^p} \\ &= \sum_{q \geq 2} \frac{1/q^2}{1 - 1/q} \\ &= \sum_{q \geq 2} \frac{1}{q^2 - q} \\ &= \sum_{q \geq 2} \frac{1}{q(q-1)} \\ &= \sum_{q \geq 2} \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{q} \right).\end{aligned}$$

Donc $\left(\frac{(-1)^p}{q^p}\right)_{p,q \geq 2}$ est sommable.

De plus, on a

$$\begin{aligned}\sum_{p,q \geq 2} \frac{(-1)^p}{q^p} &= \sum_{p,q \geq 2} \left(\frac{-1}{q} \right)^p \\ &= \sum_{q=2}^{+\infty} \sum_{p=2}^{+\infty} \left(\frac{-1}{q} \right)^p \\ &= \sum_{q=2}^{+\infty} \frac{1/q^2}{1 + 1/q} \\ &= \sum_{q=2}^{+\infty} \frac{1}{q(q+1)} \\ &= \sum_{q=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q+1} \right) \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Un cas particulier courant.

Proposition 3.42

Soient $(a_i) \in \ell^1(I, E)$ et $(b_j) \in \ell^1(J, E)$.

Alors la famille $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est sommable et

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \sum_{i \in I} a_i \times \sum_{j \in J} b_j.$$

3.4.5 Produit de Cauchy de deux séries

Définition 3.43

Soient $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ deux séries à termes dans E .

On appelle produit de Cauchy des deux séries la série $\sum_{n \geq 0} c_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

Remarque 3.44

Quand les séries ne commencent pas à partir du rang 0, il faut se méfier ! Une idée simple est de se ramener au cas précédent en décalant les indices.

Exemple très courant : les séries commençant au rang 1. Dans ce cas, le produit de Cauchy des séries

$\sum_{n \geq 1} a_n$ et $\sum_{n \geq 1} b_n$ est la série $\sum_{n \geq 1} c_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1}$.

Théorème 3.45

Si les séries $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ sont absolument convergentes, alors leur produit de Cauchy est aussi absolument convergent et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

Un exemple fondamental.

Proposition 3.46

Soit $z \in \mathbb{C}$. La série de terme général $\frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z.$$

Remarque 3.47

L'absolue convergence des séries est indispensable ! Si on ne suppose que la convergence des séries, alors le produit de Cauchy peut très bien être une série divergente (voir exercice suivant).

Exercice 3.48

Soit $x > 0$. On pose b_n la somme partielle de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ et $c_n = \frac{b_n}{x^n}$.

Donnez une CNS sur x pour que la série $\sum_{n \geq 0} c_n$ converge. Dans le cas où elle converge, donnez la valeur de sa somme en fonction de x .

Exercice 3.49

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Montrez que la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge, mais que son produit de Cauchy avec elle-même diverge

(indication : pour tout $b > 0$, pour tout $x \in [0 ; b]$, $x(b-x) \leq \frac{b^2}{4}$).

Chapitre 4

Rappels et compléments d'algèbre linéaire

Sommaire

4.1	Sommes de sous-espaces vectoriels	126
4.1.1	Généralités	126
4.1.2	Sommes directes	126
4.1.3	Sous-espaces supplémentaires	128
4.1.4	Cas particulier de deux sous-espaces	132
4.1.5	Applications linéaires et sommes directes	132
4.2	Somme de sous-espaces vectoriels en dimension finie	133
4.2.1	Base adaptée à un sous-espace	133
4.2.2	Sommes directes et bases	134
4.2.3	Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels	134
4.2.4	Sous-espaces supplémentaires	136
4.2.5	Dimension d'une somme de deux sous-espaces vectoriels	138
4.3	Polynômes d'endomorphismes et de matrices	138
4.3.1	\mathbb{K} -algèbres	138
4.3.1.1	Définition	138
4.3.1.2	Polynômes d'éléments dans une \mathbb{K} -algèbre	139
4.3.2	Cas particulier des algèbres $\mathcal{L}(E)$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	140
4.3.3	Polynôme annulateur d'une matrice ou d'un endomorphisme	140
4.3.4	Utilisation pratique d'un polynôme annulateur	143
4.3.4.1	Calcul de l'inverse	143
4.3.4.2	Calcul de puissances	146
4.4	Matrices semblables, trace	150
4.4.1	Trace d'une matrice	150
4.4.2	Matrices semblables	150
4.4.3	Trace d'un endomorphisme	151
4.5	Opérations par blocs	152
4.5.1	Cas général	152
4.5.2	Cas particuliers des matrices carrées	153
4.5.3	Interprétation des blocs	153

Dans tout ce chapitre, \mathbb{K} désigne un sous-corps de \mathbb{C} , en général \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

4.1 Sommes de sous-espaces vectoriels

4.1.1 Généralités

Définition 4.1

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F_1, \dots, F_n des sous-espaces vectoriels de E .

On appelle somme de F_1, \dots, F_n l'ensemble noté $F_1 + \dots + F_n$:

$$F_1 + \dots + F_n = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \mid (x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n \right\}.$$

Proposition 4.2

Soit $(u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_n) \in E^n$.

Alors $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_n) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p) + \text{Vect}(u_{p+1}, \dots, u_n)$.

Proposition 4.3

Avec les mêmes notations : $F_1 + \dots + F_n$ est un sous-espace vectoriel de E .

De plus, c'est le plus petit sous-espace vectoriel qui contient F_1, \dots, F_n .

Si on connaît des familles génératrices de chacun des sous-espaces vectoriels F_1, \dots, F_n , alors en concaténant ces familles, on obtient une famille génératrice de $F_1 + \dots + F_n$.

Conséquence : en fractionnant une famille génératrice de E en sous-familles, on décompose l'espace E en une somme de sous-espaces vectoriels.

4.1.2 Sommes directes

Définition 4.4

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F_1, \dots, F_n des sous-espaces vectoriels de E .

On dit que la somme $F_1 + \dots + F_n$ est directe quand tout vecteur de $F_1 + \dots + F_n$ a une unique écriture $\sum_{i=1}^n x_i$ où $(x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n$.

On dit aussi que les sous-espaces sont en somme directe. Dans ce cas, quand on veut insister sur cette propriété, on note la somme sous la forme $F_1 \oplus \dots \oplus F_n = \bigoplus_{i=1}^n F_i$.

Proposition 4.5

Avec les mêmes hypothèses.

La somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe ssi le vecteur nul a une unique décomposition $\sum_{i=1}^n x_i$ où $(x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$, qui est la décomposition triviale.

Autrement dit, la somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe ssi la seule solution de l'équation $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ d'inconnue $(x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$ est le n -uplet nul.

Démonstration 4.6

\Rightarrow

Immédiat : le vecteur nul appartient à $F_1 + \cdots + F_n$ et a une unique écriture sous la forme $\sum_{i=1}^n x_i$ où $(x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$.

Or on en connaît une : $0 = 0 + \cdots + 0$.

Donc la seule solution à l'équation $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ d'inconnue $(x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$ est la solution triviale $(0, \dots, 0)$.

\Leftarrow

Soit $z \in F_1 + \cdots + F_n$.

On veut montrer que z a une unique écriture $z = \sum_{i=1}^n x_i$ où $(x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$.

Si $z = \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x'_i$ où $(x_1, \dots, x_n), (x'_1, \dots, x'_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$, alors $\sum_{i=1}^n (x_i - x'_i) = 0$.

Or pour tout $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, $x_i - x'_i \in F_i$ car F_i est un sous-espace vectoriel.

Ainsi, pour tout $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, $x_i - x'_i = 0$ i.e. $(x_1, \dots, x_n) = (x'_1, \dots, x'_n)$.

D'où l'unicité voulue. ■

Un exemple fondamental : si (v_1, \dots, v_n) est une famille libre, alors les droites vectorielles $\text{Vect}(v_i)$ sont en somme directe.

Proposition 4.7

Avec les mêmes hypothèses.

Si la somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe, alors en concaténant des familles libres de chacun des sous-espaces vectoriels, on obtient une famille libre.

Démonstration 4.8

Si $F_1 + \dots + F_n$ est une somme directe alors soient L_1, \dots, L_n des familles libres de F_1, \dots, F_n respectivement.

On note $L_i = (e_{i1}, \dots, e_{i\ell_i})$ où $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$.

Soit $(\lambda_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq \ell_i}}$ une famille de scalaires telle que $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq \ell_i}} \lambda_{ij} e_{ij} = 0$.

Alors $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\ell_i} \lambda_{ij} e_{ij} = 0$.

Or $F_1 + \dots + F_n$ est directe donc pour tout $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, $\sum_{j=1}^{\ell_i} \lambda_{ij} e_{ij} = 0$.

Or L_i est libre donc $\lambda_{i1} = \dots = \lambda_{i\ell_i} = 0$.

Donc la concaténation de L_1, \dots, L_n est libre. ■

4.1.3 Sous-espaces supplémentaires

Définition 4.9

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F_1, \dots, F_n des sous-espaces vectoriels de E .

On dit que les sous-espaces F_1, \dots, F_n sont supplémentaires (dans E) quand $E = \bigoplus_{i=1}^n F_i$.

On déduit des deux parties précédentes le résultat de la décomposition d'un vecteur.

Proposition 4.10

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F_1, \dots, F_n des sous-espaces vectoriels de E .

Il y a équivalence entre :

- ▷ les sous-espaces F_1, \dots, F_n sont supplémentaires
- ▷ tout vecteur de E peut s'écrire de façon unique comme somme de vecteurs des sous-espaces vectoriels F_1, \dots, F_n :

$$\forall v \in E, \exists! (v_1, \dots, v_n) \in F_1 \times \dots \times F_n, \quad v = \sum_{i=1}^n v_i.$$

Dans ce cas, soit v un vecteur de E . Il existe un unique n -uplet $(v_1, \dots, v_n) \in F_1 \times \dots \times F_n$ tel que $v = \sum_{i=1}^n v_i$.

Pour tout $j \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, on définit $p_j : E \longrightarrow E$ en posant $p_j(v) = v_j$.

Alors les applications p_j sont des projecteurs qui vérifient les propriétés :

$$\triangleright \sum_{i=1}^n p_i = \text{id}_E$$

\triangleright pour tout $(i, j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$, $p_i \circ p_j = \delta_{ij} p_i$ où δ_{xy} est le symbole de Kronecker.

La réciproque est vraie : si (p_1, \dots, p_n) sont n projecteurs vérifiant les deux propriétés précédentes, alors les sous-espaces $(\text{Im } p_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont supplémentaires.

Démonstration 4.11

Soient F_1, \dots, F_n supplémentaires dans E .

\triangleright Pour tout $j \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, p_j est un projecteur :

Soit $v \in E$. On écrit $v = v_1 + \dots + v_j + \dots + v_n$.

Par définition, on a $p_j(v) = v_j = 0 + \dots + 0 + v_j + 0 + \dots + 0$.

Donc, par définition, on a $p_j(p_j(v)) = p_j(v_j) = v_j$.

Donc $p_j^2 = p_j$.

Donc p est un projecteur (la linéarité est évidente).

\triangleright Pour tout $v \in E$, $v = v_1 + \dots + v_n = p_1(v) + \dots + p_n(v)$ donc $\sum_{i=1}^n p_i = \text{id}_E$.

\triangleright Montrons que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$, $p_i p_j = \delta_{ij} p_i$.

Si $i = j$, c'est vrai car p_i est un projecteur.

Si $i \neq j$, soit $v \in E$. On écrit $v = v_1 + \dots + v_n$.

Par définition, $p_j(v) = v_j = 0 + \dots + 0 + v_j + 0 + \dots + 0$.

D'où $p_i p_j(v) = 0$.

Réciproquement, montrons que si p_1, \dots, p_n sont des projecteurs tels que $\sum_{i=1}^n p_i = \text{id}_E$ et $\forall (i, j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$, $p_i p_j = \delta_{ij} p_i$, alors $E = \bigoplus_{i=1}^n \text{Im } p_i$.

\triangleright Montrons que $\text{Im } p_1 + \dots + \text{Im } p_n$ est directe.

Soit $(v_1, \dots, v_n) \in \text{Im } p_1 \times \dots \times \text{Im } p_n$ telle que $v_1 + \dots + v_n = 0$.

Pour $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, on a

$$\begin{aligned} p_i(0) &= 0 = p_i(v_1) + \dots + p_i(v_n) \\ &= p_i p_1(v_1) + \dots + p_i p_i(v_i) + \dots + p_i p_n(v_n) \\ &= v_i. \end{aligned}$$

Donc $v_1 = \dots = v_n = 0$.

Donc la somme est directe.

► On a $\sum_{i=1}^n p_i = \text{id}_E$ donc pour tout $v \in E$, $v = \sum_{i=1}^n p_i(v)$.

Donc $v \in \text{Im } p_1 + \dots + \text{Im } p_n$.

Finalement, $E = \bigoplus_{i=1}^n \text{Im } p_i$. ■

Exercice 4.12

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Pour $k \in \{0, 1, 2\}$, on pose $E_k = \{f \in E \mid \forall x \in \mathbb{C}, f(jx) = j^k f(x)\}$.

Montrez que E_0, E_1, E_2 sont trois sous-espaces vectoriels de E supplémentaires.

Correction 4.13

► Soit $k \in \{0, 1, 2\}$. E_k contient l'application nulle.

Soient $(f, g) \in E_k^2$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{C}$.

On a

$$\begin{aligned} (\lambda f + g)(jx) &= \lambda f(jx) + g(jx) \\ &= \lambda j^k f(x) + j^k g(x) \\ &= j^k (\lambda f(x) + g(x)) \\ &= j^k (\lambda f + g)(x). \end{aligned}$$

Donc $\lambda f + g \in E_k$ i.e. E_k est un sous-espace vectoriel de E .

► Montrons que $\forall f \in E, \exists! (f_0, f_1, f_2) \in E_0 \times E_1 \times E_2, f = f_0 + f_1 + f_2$.

analyse

Soient $f \in E$ et $(f_0, f_1, f_2) \in E_0 \times E_1 \times E_2$ telles que $f = f_0 + f_1 + f_2$.

Pour tout $x \in \mathbb{C}$, on a

$$f(jx) = f_0(jx) + f_1(jx) + f_2(jx) = f_0(x) + j f_1(x) + j^2 f_2(x)$$

et

$$f(j^2x) = f_0(x) + j^2f_1(x) + jf_2(x).$$

D'où

$$\begin{cases} f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) = f(x) \\ f_0(x) + jf_1(x) + j^2f_2(x) = f(jx) \\ f_0(x) + j^2f_1(x) + jf_2(x) = f(j^2x) \end{cases}$$

Or $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j^4 \end{vmatrix}$ est un déterminant de Vandermonde et est donc non-nul.

En faisant $L_1 + L_2 + L_3$, on obtient

$$f_0(x) = \frac{1}{3} (f(x) + f(jx) + f(j^2x)).$$

En faisant $L_1 + j^2L_2 + jL_3$, on obtient

$$f_1(x) = \frac{1}{3} (f(x) + j^2f(jx) + jf(j^2x)).$$

En faisant $L_1 + jL_2 + j^2L_3$, on obtient

$$f_2(x) = \frac{1}{3} (f(x) + jf(jx) + j^2f(j^2x)).$$

Ceci prouve l'unicité de la décomposition (si elle existe).

synthèse

On pose $f_k : x \mapsto \frac{1}{3} (f(x) + j^{2k}f(jx) + j^kf(j^2x))$ pour $k \in \{0, 1, 2\}$.

On a $\forall x \in \mathbb{C}, f(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x)$ i.e. $f = f_0 + f_1 + f_2$.

De plus, on a $f_0(jx) = \frac{1}{3} (f(jx) + f(j^2x) + f(j^3x)) = f_0(x)$ car $j^3 = 1$ donc $f_0 \in E_0$.

On montre de même que $f_1 \in E_1$ et $f_2 \in E_2$.

conclusion On a bien $E = \bigoplus_{k=0}^2 E_k$.

Proposition 4.14

Avec les mêmes hypothèses.

Si les sous-espaces F_1, \dots, F_n sont supplémentaires, alors en concaténant des bases de chacun des sous-espaces vectoriels, on obtient une base de E .

4.1.4 Cas particulier de deux sous-espaces

Proposition 4.15

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E .

La somme $F + G$ est directe ssi $F \cap G = \{0\}$.

Attention ! Il ne faut pas généraliser à trois ou plus sous-espaces. Même si $F_1 \cap F_2 \cap F_3$ est le sous-espace nul, on ne peut pas conclure que la somme $F_1 + F_2 + F_3$ est directe.

4.1.5 Applications linéaires et sommes directes

Proposition 4.16

Soient E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, E_1, \dots, E_n des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E et f_1, \dots, f_n des applications linéaires de E_1, \dots, E_n dans F respectivement.

Alors il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que pour tout $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, $f|_{E_i} = f_i$.

Autrement dit, pour définir une application linéaire sur une somme directe de sous-espaces vectoriels, il suffit de la définir sur chacun des sous-espaces vectoriels.

Démonstration 4.17

analyse

On suppose que f existe telle que $\forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, $f|_{E_i} = f_i$.

Soit $x \in E$.

Comme $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$, il existe un unique n -uplet $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$ tel que $x = \sum_{i=1}^n x_i$.

f étant linéaire, on a $f(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i)$.

Or pour tout $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, $x_i \in E_i$ et $f|_{E_i} = f_i$ donc $f(x_i) = f_i(x_i)$.

Donc $f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i)$.

L'analyse prouve l'unicité de f (si elle existe).

synthèse

Pour $x \in E$ qu'on écrit $\sum_{i=1}^n x_i$ où $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$, on pose $f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i)$.

► Montrons que pour tout $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, $f|_{E_i} = f_i$.

Pour $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, pour $x \in E_i$, on a $x = 0 + \cdots + 0 + x + 0 + \cdots + 0$.

Donc $f(x) = f_1(0) + \cdots + f_{i-1}(0) + f_i(x) + f_{i+1}(0) + \cdots + f_n(0) = f_i(x)$.

Donc $f|_{E_i} = f_i$.

► Montrons que f est linéaire.

Soient $(x, y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On écrit $x = \sum_{i=1}^n x_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i$ où $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$.

Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda x + y) &= \sum_{i=1}^n f_i(\lambda x_i + y_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (\lambda f_i(x_i) + f_i(y_i)) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n f_i(x_i) + \sum_{i=1}^n f_i(y_i) \\ &= \lambda f(x) + f(y). \end{aligned}$$

■

Exercice 4.18

Soient E_1, \dots, E_n des sous-espaces vectoriels supplémentaires. Quelles sont les applications qui induisent l'application identité sur un des E_i et l'application nulle sur les autres E_j ?

Correction 4.19

On pose $f = \text{id}_{E_i}$ sur E_i et $f = 0$ sur E_j pour $j \neq i$.

f est le projecteur sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E_j$.

4.2 Somme de sous-espaces vectoriels en dimension finie

4.2.1 Base adaptée à un sous-espace

Définition 4.20

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace vectoriel de E de dimension p .

On appelle base de E adaptée à F toute base de E qui contient une base de F . Quitte à changer l'ordre des vecteurs, on peut supposer dans une base adaptée à F que les p premiers vecteurs de la base forment une base de F .

Définition 4.21

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n et (F_1, \dots, F_p) une famille de sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E .

On appelle base adaptée à la somme $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$ la concaténation de bases de chacun des sous-espaces F_1, \dots, F_p (dans cet ordre).

Si \mathcal{B} est une base de E , alors en fractionnant la base en sous-familles, les sous-espaces vectoriels engendrés par chacune de ces sous-familles sont supplémentaires et la base est alors adaptée à la somme des sous-espaces.

4.2.2 Sommes directes et bases

On donne un moyen simple de vérifier qu'une somme est directe, voire plus.

Proposition 4.22

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n et (F_1, \dots, F_p) une famille de sous-espaces vectoriels de E .

Si en concaténant des bases de chacun des sous-espaces vectoriels F_1, \dots, F_p on obtient une famille libre, alors les sous-espaces vectoriels sont en somme directe.

Si en concaténant des bases de chacun des sous-espaces vectoriels F_1, \dots, F_p on obtient une base de E , alors les sous-espaces vectoriels sont supplémentaires.

4.2.3 Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels

Proposition 4.23

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et F_1, \dots, F_n des sous-espaces vectoriels de E .

Alors $\dim \sum_{i=1}^n F_i \leq \sum_{i=1}^n \dim F_i$.

Démonstration 4.24

On note $p_i = \dim F_i$ pour $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$.

Pour tout $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, on choisit une base \mathcal{B}_i de F_i et on a $F_i = \text{Vect}(\mathcal{B}_i)$.

Donc $F_1 + \dots + F_n = \text{Vect}(\mathcal{B}_1 \dots \mathcal{B}_n)$.

Donc

$$\begin{aligned} \dim(F_1 + \dots + F_n) &\leq \text{Card}(\mathcal{B}_1 \dots \mathcal{B}_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \dim F_i. \end{aligned}$$

■

Démonstration 4.25 (Autre méthode)

On pose l'application linéaire

$$\begin{aligned} \varphi : F_1 \times \dots \times F_n &\longrightarrow E \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \sum_{i=1}^n x_i \end{aligned}$$

On a $\text{Im } \varphi = F_1 + \dots + F_n$.

Donc

$$\begin{aligned} \dim(F_1 + \dots + F_n) &= \dim \text{Im } \varphi \\ &= \text{rg } \varphi \\ &= \dim(F_1 \times \dots \times F_n) - \dim \ker \varphi \\ &\leq \dim(F_1 \times \dots \times F_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \dim F_i. \end{aligned}$$

■

Il y a égalité quand la somme est directe.

Théorème 4.26

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et F_1, \dots, F_n des sous-espaces vectoriels de E .

Alors F_1, \dots, F_n sont en somme directe ssi $\dim \sum_{i=1}^n F_i = \sum_{i=1}^n \dim F_i$.

Démonstration 4.27

On reprend la Démonstration 4.25.

Si $\dim \sum_{i=1}^n F_i = \sum_{i=1}^n \dim F_i$, alors $\dim \ker \varphi = 0$.

$$\text{Donc } \ker \varphi = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n \left| \sum_{i=1}^n x_i = 0 \right. \right\} = \{(0, \dots, 0)\}.$$

Ainsi, $F_1 + \dots + F_n$ est directe.

Et réciproquement. ■

4.2.4 Sous-espaces supplémentaires

En dimension finie, on a une façon plus simple de prouver que des sous-espaces vectoriels sont supplémentaires.

Proposition 4.28 (Trois pour le prix de deux)

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et F_1, \dots, F_n des sous-espaces vectoriels de E .

Quand deux propriétés parmi les trois suivantes sont vraies, alors la troisième l'est aussi :

- ▷ $E = \sum_{i=1}^n F_i$
- ▷ $\dim \sum_{i=1}^n F_i = \sum_{i=1}^n \dim F_i$
- ▷ $\dim E = \sum_{i=1}^n \dim F_i$

Donc dans ce cas, les sous-espaces vectoriels F_1, \dots, F_n sont supplémentaires.

En pratique, le cas le plus utile est le suivant : si $\dim \sum_{i=1}^n F_i = \sum_{i=1}^n \dim F_i = \dim E$, alors les sous-espaces vectoriels F_1, \dots, F_n sont supplémentaires.

Démonstration 4.29

Si $\dim \sum_{i=1}^n F_i = \sum_{i=1}^n \dim F_i$ et $\dim \sum_{i=1}^n F_i = \dim E$.

Alors $F_1 + \dots + F_n$ est directe et $\sum_{i=1}^n F_i = E$.

Alors $E = \bigoplus_{i=1}^n F_i$. ■

Exercice 4.30

Dans \mathbb{R}^4 , soient $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + z + t = 0 \text{ et } x - y - z + t = 0\}$, $F = \text{Vect}((-1, 0, 1, 1))$ et $G = \text{Vect}((2, -1, 1, 0))$.

F , G et H sont-ils supplémentaires ?

Correction 4.31

H est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène :

$$S : \begin{cases} x + z + t = 0 \\ x - y - z + t = 0 \end{cases}$$

i.e. $H = \ker f$ où $f : (x, y, z, t) \mapsto (x + z + t, x - y - z + t)$.

D'après le théorème du rang, on a $\dim H = \dim \mathbb{R}^4 - \text{rg } S = 4 - 2 = 2$.

F et G sont des droites vectorielles donc $\dim F = \dim G = 1$.

On a donc $\dim \mathbb{R}^4 = \dim F + \dim G + \dim H$.

On a

$$\begin{aligned} v = (x, y, z, t) \in H &\iff \begin{cases} x + z + t = 0 \\ x - y - z + t = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -z - t \\ y = -2z \end{cases} \\ &\iff v = (-z - t, -2z, z, t) \\ &\iff v = z \underbrace{(-1, -2, 1, 0)}_{h_1} + t \underbrace{(-1, 0, 0, 1)}_{h_2}. \end{aligned}$$

Donc $H = \text{Vect}(h_1, h_2)$.

On note $f = (-1, 0, 1, 1)$ et $g = (2, -1, 1, 0)$.

On a alors $F + G + H = \text{Vect}(f, g, h_1, h_2)$.

Donc $\dim(F + G + H) = \text{rg}(f, g, h_1, h_2)$.

On note \mathcal{B}_0 la base canonique de \mathbb{R}^4 .

On a

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f, g, h_1, h_2) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_3 \leftarrow \tilde{L}_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow \tilde{L}_4 + L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_3 \leftarrow \tilde{L}_3 + 3L_2 \\ L_4 \leftarrow \tilde{L}_4 + 2L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $\text{rg } A = 4$.

Donc $\dim(F + G + H) = \dim \mathbb{R}^4 = \dim F + \dim G + \dim H$.

Finalement, on a $\mathbb{R}^4 = F \oplus G \oplus H$.

4.2.5 Dimension d'une somme de deux sous-espaces vectoriels

Rappel : la formule de Grassmann.

Proposition 4.32

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E .

Alors $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

4.3 Polynômes d'endomorphismes et de matrices

4.3.1 \mathbb{K} -algèbres

4.3.1.1 Définition

Définition 4.33

Un ensemble A est appelé \mathbb{K} -algèbre quand A est à la fois un anneau et un \mathbb{K} -espace vectoriel, dont les multiplications sont compatibles.

Il y a donc trois lois dans une \mathbb{K} -algèbre :

- une addition classique $+$;

- une multiplication externe . ;
- une multiplication interne, compatible avec la précédente :

$$\forall (\lambda, a, b) \in \mathbb{K} \times A^2, \quad \lambda.(ab) = (\lambda.a)b = a(\lambda.b).$$

On qualifie les \mathbb{K} -algèbres par du vocabulaire des anneaux (algèbres intègres, algèbres principales, etc) ou des espaces vectoriels (algèbres de dimension finie, etc).

Exemple 4.34

- \mathbb{K} est lui-même une \mathbb{K} -algèbre, où les deux multiplications sont confondues ; \mathbb{C} est aussi une \mathbb{R} -algèbre de dimension 2.
- $\mathbb{K}[X]$ est une \mathbb{K} -algèbre intègre, commutative et de dimension finie.
- Si I est un intervalle, $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ est une \mathbb{K} -algèbre commutative, non-intègre et de dimension finie.
- Si $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une \mathbb{K} -algèbre de dimension n^2 qui n'est ni intègre ni commutative.
- Si E est un \mathbb{K} -espace vectoriel, alors $\mathcal{L}(E)$ est une \mathbb{K} -algèbre de dimension finie ssi E l'est aussi qui n'est ni intègre ni commutative.

4.3.1.2 Polynômes d'éléments dans une \mathbb{K} -algèbre

Proposition 4.35

Soient A une \mathbb{K} -algèbre et $a \in A$.

Pour $P = \sum_{i=0}^n c_i X^i \in \mathbb{K}[X]$, on pose $P(a) = \sum_{i=0}^n c_i a^i$.

L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & A \\ P & \longmapsto & P(a) \end{array}$ est alors un morphisme d'algèbres :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \begin{cases} (P+Q)(a) = P(a) + Q(a) \\ (PQ)(a) = P(a)Q(a) \\ (\lambda P)(a) = \lambda P(a) \end{cases}$$

De plus, on note $\mathbb{K}[a]$ l'ensemble $\{P(a) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$: cet ensemble est stable par les lois de A , on dit que c'est une sous-algèbre de A .

4.3.2 Cas particulier des algèbres $\mathcal{L}(E)$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

E étant un \mathbb{K} -espace vectoriel, l'ensemble $\mathcal{L}(E)$ est une \mathbb{K} -algèbre. De même, n étant un entier non-nul, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une \mathbb{K} -algèbre. Dans ces algèbres, on définit naturellement la notion de polynôme d'endomorphisme ou de matrice. Bien sûr, ces notions sont liées par choix d'une base de l'espace.

Proposition 4.36

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n , \mathcal{B} une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$.

Alors pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(f)$ a pour matrice $P(A)$ dans la base \mathcal{B} .

Démonstration 4.37

Comme $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^k)$.

Donc $\forall (a_0, \dots, a_p) \in \mathbb{K}^p$, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=0}^p a_i f^i\right) = \sum_{i=0}^p a_i A^i$ c'est-à-dire

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P(f)) = P(A).$$

■

Remarque 4.38

- La « multiplication » dans $\mathcal{L}(E)$ est la composition \circ . Donc la deuxième propriété de la Proposition 4.35 doit être comprise comme suit : si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$.
- Même si les multiplications dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ou $\mathcal{L}(E)$ ne sont pas commutatives en général, on peut intervertir l'ordre des polynômes car la multiplication dans $\mathbb{K}[X]$ est commutative : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(PQ)(A) = P(A)Q(A) = Q(A)P(A)$; si $u \in \mathcal{L}(E)$, $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.
- Attention aux notations ! Si $f \in \mathcal{L}(E)$, $x \in E$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, alors l'application de $P(f)$ au vecteur x se note $P(f)(x)$ et pas $P(f(x))$, notation qui n'a aucun sens.

4.3.3 Polynôme annulateur d'une matrice ou d'un endomorphisme

Définition 4.39

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme annulateur de A tout polynôme non-nul $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(A) = 0$.

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle polynôme annulateur de u tout polynôme non-nul $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$.

Remarque 4.40

Attention à ne pas confondre les notions : si P est un polynôme annulateur de la matrice A (on dit aussi que P annule A par abus de langage), on ne dit pas que A est une racine de P !

Une racine d'un polynôme est un nombre...

De même, si $P(u) = 0$, on ne dit pas que u est une racine de P , ça n'a aucun sens.

Définition 4.41

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors l'ensemble $\text{Ann}(A) = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(A) = 0\}$ est appelé idéal annulateur de A .

Si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E , alors l'ensemble $\text{Ann}(u) = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\}$ est appelé idéal annulateur de u .

Théorème 4.42

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\text{Ann}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ stable par \times . De plus, il existe un unique polynôme unitaire μ_A tel que $\text{Ann}(A) = \mu_A \mathbb{K}[X]$.

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\text{Ann}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ stable par \times . De plus, il existe un unique polynôme unitaire μ_u tel que $\text{Ann}(u) = \mu_u \mathbb{K}[X]$.

Démonstration 4.43

► Soient $(P, Q) \in \text{Ann}(A)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On a

$$(P + Q)(A) = P(A) + Q(A) = 0 + 0 = 0$$

et

$$(PQ)(A) = P(A)Q(A) = 0 \times 0 = 0$$

et

$$(\lambda P)(A) = \lambda P(A) = \lambda \times 0 = 0.$$

Donc $P + Q \in \text{Ann}(A)$, $PQ \in \text{Ann}(A)$ et $\lambda P \in \text{Ann}(A)$.

Remarque : on a même montré que $\forall P \in \mathbb{K}[X], \forall Q \in \text{Ann}(A), PQ \in \text{Ann}(A)$.

► On montre d'abord l'existence d'un polynôme annulateur de A non-nul.

On considère la famille (I_n, A, \dots, A^{n^2}) qui contient $n^2 + 1$ éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, espace de dimension n^2 , et est donc liée : il existe $(a_0, \dots, a_{n^2}) \in \mathbb{K}^{n^2+1}$ tel que

$$(a_0, \dots, a_{n^2}) \neq (0, \dots, 0) \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{n^2} a_i A^i = 0.$$

Alors le polynôme $\sum_{i=0}^{n^2} a_i X^i$ est un polynôme annulateur de A .

► On pose $D = \{\deg P \mid P \in \text{Ann}(A) \setminus \{0\}\}$.

D'après ce qui précède, D est une partie non-vide de \mathbb{N} .

Donc D admet un minimum $d \geq 1$ d'après le principe fondamental de \mathbb{N} , associé à un polynôme $P \neq 0$ tel que $P(A) = 0$.

En notant λ le coefficient dominant de P , le polynôme $\mu = \frac{1}{\lambda}P$ est annulateur de A et unitaire.

► Montrons que $\text{Ann}(A) = \mu\mathbb{K}[X]$.

L'inclusion $\mu\mathbb{K}[X] \subseteq \text{Ann}(A)$ est triviale.

Soit $P \in \text{Ann}(A)$. On effectue la division euclidienne de P par μ : il existe $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

$$P = Q\mu + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg \mu = d.$$

Donc $P(A) = Q(A)\mu(A) + R(A)$.

Or $P(A) = \mu(A) = 0$ donc $R(A) = 0$ i.e. $R \in \text{Ann}(A)$.

Par définition de d , on a $R = 0$.

Donc P est un multiple de μ .

D'où $\text{Ann}(A) \subseteq \mu\mathbb{K}[X]$.

Donc $\text{Ann}(A) = \mu\mathbb{K}[X]$.

► Montrons maintenant l'unicité de μ .

Si ν est un polynôme annulateur de A de degré d et unitaire, alors $\text{Ann}(A) = \nu\mathbb{K}[X] = \mu\mathbb{K}[X]$.

Donc $\nu \mid \mu$ et $\mu \mid \nu$.

Or μ et ν sont unitaires donc $\mu = \nu$. ■

Remarque 4.44

Ce dernier résultat est faux en dimension infinie. Contre-exemple : l'endomorphisme $u : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$ défini par $u(P) = XP$.

Définition 4.45

On appelle polynôme minimal d'une matrice carrée A le polynôme μ_A précédent (noté aussi parfois π_A). C'est le polynôme unitaire de degré minimal qui annule A .

On appelle polynôme minimal d'un endomorphisme u en dimension finie le polynôme μ_u précédent (noté aussi parfois π_u). C'est le polynôme unitaire de degré minimal qui annule u .

Autrement dit, on a l'équivalence : pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$P(u) = 0 \iff \mu_u \mid P.$$

De même, on a l'équivalence : pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$P(A) = 0 \iff \mu_A \mid P.$$

Les polynômes annulateurs sont donc les multiples des polynômes minimaux.

On verra plus tard qu'on peut trouver des polynômes annulateurs de plus petits degrés que ceux donnés par le théorème précédent.

En général, il est souvent pénible de calculer le polynôme minimal. En pratique, on se contente de trouver des polynômes annulateurs de degrés pas trop grands (et souvent, il s'agit du polynôme minimal).

Remarque 4.46

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et \mathbb{K}' est un sous-corps de \mathbb{C} qui contient \mathbb{K} (on dit que \mathbb{K}' est une extension de \mathbb{K}), alors le polynôme minimal de A , vue comme matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}')$, est a priori différent de celui de A vue comme matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On peut seulement affirmer pour l'instant que $\mu_{A\mathbb{K}'}$ divise $\mu_{A\mathbb{K}}$.

En fait, on montre plus loin que le polynôme minimal ne dépend pas du corps \mathbb{K} .

4.3.4 Utilisation pratique d'un polynôme annulateur

4.3.4.1 Calcul de l'inverse

Proposition 4.47

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Alors A est inversible ssi A possède un polynôme annulateur P tel que 0 ne soit pas racine de P . Dans ce cas, A^{-1} est un polynôme en A .

De même, soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Alors si f possède un polynôme annulateur P tel que 0 ne soit pas racine de P , f est un automorphisme de E . Dans ce cas, f^{-1} est un polynôme en f . La réciproque est vraie si E est de dimension finie.

Démonstration 4.48

\Leftarrow

On suppose que A possède un polynôme annulateur P tel que $P(0) \neq 0$.

En notant $P = \sum_{i=0}^p a_i X^i$, on a $\sum_{i=0}^p a_i A^i = 0$ et $a_0 \neq 0$.

Donc $a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_p A^p = 0$.

Donc $a_0 I_n = -a_1 A - \cdots - a_p A^p$.

$$\text{Donc } I_n = A \underbrace{\left(\frac{-a_1}{a_0} I_n - \cdots - \frac{a_p}{a_0} A^{p-1} \right)}_B.$$

On a trouvé une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n = BA$.

Donc A est inversible et $A^{-1} = B = Q(A)$ où $Q = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{-a_{i+1}}{a_0} X^i$.

\Rightarrow

On suppose A inversible. On veut montrer que $\mu_A(0) \neq 0$.

Par l'absurde, on suppose $\mu_A(0) = 0$.

On a $\mu_A = a_1 X + \cdots + X^p$ et $\mu_A(A) = 0$.

Donc $a_1 A + \cdots + A^p = 0$.

A étant inversible, on multiplie par A^{-1} et on obtient $a_1 I_n + a_2 A + \cdots + A^{p-1} = 0$.

Donc $a_1 + a_2 X + \cdots + X^{p-1}$ est annulateur de A et de degré strictement inférieur à celui de μ_A : contradiction.

Donc $\mu_A(0) \neq 0$. ■

Exercice 4.49

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminez un polynôme annulateur de A , montrez que A est inversible et calculez A^{-1} .

Correction 4.50

$$\text{On a } A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Donc on a

$$A^3 = xA^2 + yA + zI_3 \iff \begin{cases} 1 = x + y + z \\ 8 = 4x + 2y + z \\ 7 = 3x + y \\ 11 = 4x + y \\ 3 = 2x + y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 4 \\ y = -5 \\ z = 2 \end{cases}$$

Donc $A^3 = 4A^2 - 5A + 2I_3$.

Donc $P = X^3 - 4X^2 + 5X - 2$ est un polynôme annulateur de A .

On a $P(0) \neq 0$ donc A est inversible.

On obtient

$$A^{-1} = \frac{1}{2} (A^2 - 4A + 5I_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.51

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Déterminez un polynôme annulateur de p .

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On pose $f = p - \lambda \text{id}_E$. Déterminez un polynôme annulateur de f et vérifiez que f est un automorphisme pour presque toutes les valeurs de λ ; dans ce cas, calculez son inverse.

Correction 4.52

p est un projecteur donc $p^2 = p$ donc $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de p .

Donc le polynôme annulateur minimal de p est un diviseur unitaire de $X^2 - X : X^2 - X, X$ (auquel cas $p = 0$) ou $X - 1$ (auquel cas $p = \text{id}_E$).

On a $f = p - \lambda \text{id}_E$ donc

$$\begin{aligned} f^2 &= p^2 - 2\lambda p + \lambda^2 \text{id}_E \\ &= (1 - 2\lambda) p + \lambda^2 \text{id}_E \\ &= (1 - 2\lambda) f + \lambda(1 - 2\lambda) \text{id}_E + \lambda^2 \text{id}_E \\ &= (1 - 2\lambda) f + (-\lambda^2 + \lambda) \text{id}_E. \end{aligned}$$

Donc $P = X^2 + (2\lambda - 1)X + (\lambda^2 - \lambda)$ est annulateur de f .

Si $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 1$ alors $\lambda^2 - \lambda = P(0) = 0$.

Donc d'après la Proposition 4.47, $f \in \text{GL}(E)$.

De plus, $f^{-1} = \frac{1}{\lambda - \lambda^2} (f + (2\lambda - 1) \text{id}_E)$.

Si $\lambda = 0$ alors $f = p$ est un automorphisme ssi $p = \text{id}_E$.

Si $\lambda = 1$ alors $f = p - \text{id}_E$ est un automorphisme ssi $p = 0$.

4.3.4.2 Calcul de puissances

Proposition 4.53

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On choisit un polynôme annulateur P de la matrice A .

Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^p = R_p(A)$ où R_p est le reste de la division euclidienne de X^p par P .

De même, soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ qui possède un polynôme annulateur P .

Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^p = R_p(f)$ où R_p est le reste de la division euclidienne de X^p par P .

Démonstration 4.54

On effectue la division euclidienne de X^p par P : $X^p = PQ + R_p$ et $\deg R_p < \deg P$.

Alors $A^p = P(A)Q(A) + R_p(A) = R_p(A)$ car $P(A) = 0$. ■

Conséquence :

- si A possède un polynôme annulateur de degré a , alors $\mathbb{K}[A] = \{P(A) \mid P \in \mathbb{K}_{a-1}[X]\}$;
- si f possède un polynôme annulateur de degré a , alors $\mathbb{K}[f] = \{P(f) \mid P \in \mathbb{K}_{a-1}[X]\}$.

Proposition 4.55

Si p est le degré du polynôme minimal d'une matrice A , alors $\dim \mathbb{K}[A] = p$ et (I_n, A, \dots, A^{p-1}) est une base de $\mathbb{K}[A]$.

Si p est le degré du polynôme minimal d'un endomorphisme f d'un espace vectoriel E , alors $\dim \mathbb{K}[f] = p$ et $(\text{id}_E, f, \dots, f^{p-1})$ est une base de $\mathbb{K}[f]$.

Démonstration 4.56

On note $p = \deg \mu_A$.

Soit $B \in \mathbb{K}[A]$.

Il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = P(A)$.

On effectue la division euclidienne de P par $\mu_A : P = Q\mu_A + R$ avec $\deg R < p$.

Donc $P(A) = Q(A)\mu_A(A) + R(A) = R(A) \in \text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{p-1})$.

Donc $\mathbb{K}[A] \subseteq \text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{p-1})$.

L'inclusion réciproque est immédiate.

Donc $\mathbb{K}[A] = \text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{p-1})$.

Si (I_n, A, \dots, A^{p-1}) est liée, alors il existe $(a_0, \dots, a_{p-1}) \neq (0, \dots, 0)$ tel que $\sum_{i=0}^{p-1} a_i A^i = 0$.

En posant $P = \sum_{i=0}^{p-1} a_i X^i$, on a un polynôme annulateur de A de degré strictement inférieur à $p = \deg \mu_A$: contradiction.

Donc (I_n, A, \dots, A^{p-1}) est libre et est donc une base de $\mathbb{K}[A]$ et $\dim \mathbb{K}[A] = p$. ■

Exercice 4.57

Soient E un espace vectoriel et $(p, q) \in \mathcal{L}(E)^2$ deux projecteurs tels que $p + q = \text{id}_E$. Vérifiez que $p \circ q = q \circ p = 0$. Déterminez un polynôme annulateur de $f = 2p + 3q$. Donnez une expression générale de f^k en fonction de f et k .

Correction 4.58

On a $p + q = \text{id}_E$ donc $p \circ p + p \circ q = p$ donc $p \circ q = 0$ car $p \circ p = p$.

De même, $q \circ p = 0$.

On a donc $f^2 = 4p^2 + 6pq + 6qp + 9q^2 = 4p + 9q$.

Donc

$$\begin{aligned} f^2 = xf + y\text{id}_E &\iff \begin{cases} 4 = 2x + y \\ 9 = 3x + y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 5 = x \\ -6 = y \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $P = X^2 - 5X + 6$ est un polynôme annulateur de f dont les racines sont 2 et 3.

Soit $k \in \mathbb{N}$.

On effectue la division euclidienne de X^k par P :

$$X^k = (X^2 - 5X + 6)Q + a_k X + b_k.$$

En appliquant en 2 et en 3, on obtient

$$\begin{cases} 2a_k + b_k = 2^k \\ 3a_k + b_k = 3^k \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a_k = 3^k - 2^k \\ b_k = 3 \times 2^k - 2 \times 3^k \end{cases}$$

Donc $f^k = a_k f + b_k \text{id}_E = (3^k - 2^k) f + (3 \times 2^k - 2 \times 3^k) \text{id}_E$.

Remarque 4.59

Plus généralement, si P est annulateur de f et de degré N à N racines simples $\omega_1, \dots, \omega_N$.

Alors $X^k = PQ + c_{N-1}X^{N-1} + \dots + c_1X + c_0$.

Alors on a un système linéaire à N équations et N inconnues

$$\begin{cases} c_0 + c_1\omega_1 + c_2\omega_1^2 + \dots + c_{N-1}\omega_1^{N-1} = \omega_1^k \\ \vdots \\ c_0 + c_1\omega_N + c_2\omega_N^2 + \dots + c_{N-1}\omega_N^{N-1} = \omega_N^k \end{cases}$$

Ce système a pour déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega_1 & \omega_1^2 & \dots & \omega_1^{N-1} \\ & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & \dots & \omega_N^{N-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\omega_j - \omega_i) \neq 0$$

et admet donc une unique solution.

Exercice 4.60

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -5 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Vérifiez que $P = X^3 - 2X^2 + X$ est un polynôme annulateur de A . Donnez une expression générale de A^p en fonction de A et p .

Correction 4.61

On a $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -8 \\ -2 & 4 & 5 \\ 2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 4 & -8 & -11 \\ -3 & 6 & 8 \\ 3 & -6 & -8 \end{pmatrix}$ donc $P = X^3 - 2X^2 + X = X(X-1)^2$ est annulateur de A .

Soit $k \in \mathbb{N}$.

On effectue la division euclidienne de X^k par P :

$$X^k = X(X-1)^2 Q + a_k X^2 + b_k X + c_k.$$

En évaluant en 0 et 1, on obtient

$$\begin{cases} c_k = 0^k \\ a_k + b_k + c_k = 1^k \\ 2a_k + b_k = k1^k \end{cases}$$

Or 1 est racine double donc $P'(1) = 0$ donc $2a_k + b_k = k$.

Donc, si $k \neq 0$, on a

$$\begin{cases} c_k = 0 \\ a_k + b_k = 1 \\ 2a_k + b_k = k \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a_k = k - 1 \\ b_k = 2 - k \\ c_k = 0 \end{cases}$$

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = (k - 1) A^2 + (2 - k) A$.

Corollaire 4.62

Si \mathbb{K}' est une extension de \mathbb{K} , alors pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ses polynômes minimaux relativement à \mathbb{K} et \mathbb{K}' sont égaux : $\mu_{A\mathbb{K}} = \mu_{A\mathbb{K}'}$.

Autrement dit, le polynôme minimal ne dépend pas du corps \mathbb{K} .

Démonstration 4.63

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On note $\text{Ann}_{\mathbb{K}}(A) = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(A) = 0\}$ et $\text{Ann}_{\mathbb{K}'}(A) = \{P \in \mathbb{K}'[X] \mid P(A) = 0\}$.

Soit $P \in \text{Ann}_{\mathbb{K}}(A)$.

Comme $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}'$, on a $P \in \text{Ann}_{\mathbb{K}'}(A)$.

Donc $\mu_{A\mathbb{K}}[X] = \text{Ann}_{\mathbb{K}}(A) \subseteq \text{Ann}_{\mathbb{K}'}(A) = \mu_{A\mathbb{K}'}[X]$.

Donc $\mu_{A\mathbb{K}} \in \text{Ann}_{\mathbb{K}'}(A)$ donc $\mu_{A\mathbb{K}'} \mid \mu_{A\mathbb{K}}$.

Donc $p' = \deg \mu_{A\mathbb{K}'} \leq \deg \mu_{A\mathbb{K}} = p$.

Or (I_n, A, \dots, A^{p-1}) est libre dans le \mathbb{K} -espace vectoriel $\mathbb{K}[A]$ et $(I_n, A, \dots, A^{p'-1})$ est libre dans le \mathbb{K}' -espace vectoriel $\mathbb{K}'[A]$.

On veut montrer que (I_n, A, \dots, A^{p-1}) est libre dans le \mathbb{K}' -espace vectoriel $\mathbb{K}'[A]$.

Par l'absurde, si cette famille est liée, alors il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}) \in (\mathbb{K}')^p$ tel que

$$\begin{cases} (\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}) \neq (0, \dots, 0) \\ \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i A^i = 0 \end{cases}$$

On pose $q = \max \{i \in \llbracket 0 ; p-1 \rrbracket \mid \lambda_i \neq 0\}$.

On a alors $A^q = - \sum_{i=0}^{q-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_q} A^i$.

Cette égalité est interprétable en un système linéaire à n^2 équations dont les « inconnues » sont $\frac{-\lambda_i}{\lambda_q}$ et les coefficients sont les coefficients de A^q, \dots, I_n qui sont tous dans \mathbb{K} .

En résolvant ce système linéaire, on obtient des solutions qui sont dans \mathbb{K} .

Donc on obtient une relation de dépendance linéaire entre les matrices $(I_n, \dots, A^q, \dots, A^{p-1})$ à coefficients dans \mathbb{K} : contradiction car (I_n, \dots, A^{p-1}) est libre.

Donc $p \leq \dim_{\mathbb{K}'} \mathbb{K}'[A] = p'$.

D'où $p = p'$.

Donc, comme $\mu_{A\mathbb{K}'} \mid \mu_{A\mathbb{K}}$ et que ces polynômes sont unitaires, on a

$$\mu_{A\mathbb{K}'} = \mu_{A\mathbb{K}}. \quad \blacksquare$$

4.4 Matrices semblables, trace

4.4.1 Trace d'une matrice

Définition 4.64

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de A la somme de ses coefficients diagonaux :

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

L'application trace vérifie de remarquables propriétés.

Proposition 4.65

- La trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\text{tr}(A^\top) = \text{tr } A$.
- Pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

4.4.2 Matrices semblables

Définition 4.66

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On dit que A et B sont semblables quand il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Proposition 4.67

La relation de similitude entre matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une relation d'équivalence.

La relation de similitude est une relation très contraignante. Il n'existe pas de caractérisation simple de la similitude entre deux matrices carrées : savoir si deux matrices sont semblables est un problème difficile.

D'après la formule de changement de base, on a immédiatement le résultat suivant.

Proposition 4.68

Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables ssi elle représentent un même endomorphisme dans des bases différentes. La matrice P est la matrice de passage d'une base à l'autre.

Corollaire 4.69

Deux matrices semblables ont même rang, même trace et même déterminant.

Mais c'est loin d'être suffisant pour être semblables.

Proposition 4.70

Si A et B sont deux matrices semblables, alors pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A)$ et $P(B)$ sont semblables avec la même matrice de passage.

Démonstration 4.71

Si A et B sont semblables, il existe $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = Q^{-1}AQ$.

Alors, par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, on a $B^k = Q^{-1}A^kQ$.

Puis, par combinaison linéaire, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(B) = Q^{-1}P(A)Q$. ■

4.4.3 Trace d'un endomorphisme

Proposition 4.72

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Toutes les matrices carrées représentant f ont la même trace. Cette trace ne dépend donc pas du choix de la base dans laquelle on écrit la matrice de f , elle ne dépend que de f : on l'appelle trace de f et on la note $\text{tr } f$.

On peut alors reformuler les résultats sur la trace d'une matrice.

Proposition 4.73

► *La trace est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$.*

► *Pour tout $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$, $\text{tr}(u \circ v) = \text{tr}(v \circ u)$.*

4.5 Opérations par blocs

4.5.1 Cas général

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On fixe deux entiers k, ℓ tels que $1 \leq k \leq n-1$ et $1 \leq \ell \leq p-1$.

À toute matrice $M \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, on associe quatre matrices obtenues en découpant la matrice en blocs :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

où $A = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq \ell}}$, $B = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq k \\ \ell+1 \leq j \leq p}}$, $C = (m_{ij})_{\substack{k+1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq \ell}}$ et $D = (m_{ij})_{\substack{k+1 \leq i \leq n \\ \ell+1 \leq j \leq p}}$.

Cette décomposition par blocs permet de faire des calculs formellement comme s'il s'agissait de nombres.

Proposition 4.74

Soient $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ deux matrices de même taille décomposées de la même façon en blocs et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors $M + M' = \begin{pmatrix} A + A' & B + B' \\ C + C' & D + D' \end{pmatrix}$ et $\lambda M = \begin{pmatrix} \lambda A & \lambda B \\ \lambda C & \lambda D \end{pmatrix}$.

Proposition 4.75

Soient $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ deux matrices telles que le produit MM' existe et décomposées en blocs.

Alors, sous réserve que les blocs soient de tailles compatibles pour la multiplication, on a

$$MM' = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}.$$

Remarque 4.76

- Comme les symboles mis en jeu ne sont pas des nombres mais des matrices, il est indispensable de respecter l'ordre dans les produits.
- On peut généraliser à un nombre quelconque de blocs, pas forcément deux en ligne ou en colonne.

4.5.2 Cas particuliers des matrices carrées

Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors avec les mêmes notations, on choisit toujours A et D carrées elles aussi. Dans ce paragraphe, on suppose que c'est le cas.

Définition 4.77

On dit que M est triangulaire supérieure par blocs quand il existe des matrices carrées A_1, \dots, A_k telles que M soit de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & ? & ? & \dots & ? \\ 0 & A_2 & ? & \dots & ? \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{k-1} & ? \\ 0 & \dots & 0 & 0 & A_k \end{pmatrix}.$$

On définit de même la notion de matrice triangulaire inférieure par blocs.

Définition 4.78

On dit que M est diagonale par blocs quand il existe des matrices carrées A_1, \dots, A_k telles que M soit de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{k-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & A_k \end{pmatrix}.$$

Les résultats sur les matrices triangulaires ou diagonales restent valables par blocs : la somme et le produit de deux matrices triangulaires supérieures par blocs de mêmes tailles l'est encore, et de même pour les matrices triangulaires inférieures par blocs et les matrices diagonales par blocs.

Une conséquence est qu'une matrice M triangulaire par blocs est inversible ssi tous les blocs diagonaux sont inversibles.

Dans ce cas, l'inverse de M est triangulaire par blocs et ses blocs diagonaux sont les inverses des blocs diagonaux de M .

En particulier, l'inverse d'une matrice M diagonale par blocs est la matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont les inverses de ceux de M .

De plus, le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants des blocs diagonaux.

4.5.3 Interprétation des blocs

Définition 4.79

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E .

On dit que F est stable par f quand $f(F) \subseteq F$, *i.e.* pour tout $x \in F$, $f(x) \in F$.

Dans ce cas, on peut définir une application φ de F dans F en posant pour tout $x \in F$, $\varphi(x) = f(x)$.

Il est facile de vérifier que φ est un endomorphisme de F , appelé endomorphisme induit par f dans F .

Exemple 4.80

Si g est un endomorphisme de E qui commute avec f (i.e. $fg = gf$), alors $\ker g$ et $\text{Im } g$ sont stables par f .

Proposition 4.81

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n , $f \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E de dimension p .

Si F est stable par f , alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure par bloc, le premier bloc étant de taille (p, p) :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \text{ et } A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}).$$

Réciproquement, si f possède une matrice de cette forme, alors le sous-espace vectoriel engendré par les p premiers vecteurs est stable par f .

Démonstration 4.82

On choisit une base de E adaptée à F : $\mathcal{B} = \left(\underbrace{e_1, \dots, e_p}_{\text{base de } F}, e_{p+1}, \dots, e_n \right)$.

Pour tout $j \in \llbracket 1 ; p \rrbracket$, en notant $f(e_j) = (a_{1j}, \dots, a_{nj})_{\mathcal{B}}$, on a

$$\begin{aligned} f(e_j) \in F &\iff f(e_j) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_p) \\ &\iff \forall i \geq p+1, a_{ij} = 0 \\ &\iff f(e_j) = (a_{1j}, \dots, a_{pj}, 0, \dots, 0)_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Alors, si F est stable par f , on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} & ? & \dots & ? \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & ? & \dots & ? \end{pmatrix}.$$

Et réciproquement. ■

Proposition 4.83

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Si F_1, \dots, F_k sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires stables par f de dimensions respectives p_1, \dots, p_k , alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs, la taille du i -ème bloc étant (p_i, p_i) :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{k-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & A_k \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, si f possède une matrice dans une certaine base qui est diagonale par blocs et contenant k blocs carrés, alors il existe k sous-espaces vectoriels F_1, \dots, F_k stables par f et supplémentaires dans E .

Chapitre 5

Réduction des endomorphismes

Sommaire

5.1	Éléments propres d'un endomorphisme	157
5.1.1	Valeurs propres et vecteurs propres	157
5.1.2	Lien avec les polynômes annulateurs	158
5.1.3	Sous-espaces propres	160
5.2	Polynôme caractéristique d'un endomorphisme	162
5.2.1	Caractérisation des valeurs propres en dimension finie	162
5.2.2	Définition et lien avec les valeurs propres	162
5.2.3	Ordre de multiplicité et dimension du sous-espace propre	165
5.2.4	Endomorphisme scindé	166
5.3	Éléments propres d'une matrice carrée.	167
5.3.1	Valeurs propres et vecteurs propres	167
5.3.2	Lien avec les polynômes annulateurs	168
5.3.3	Sous-espaces propres	168
5.4	Polynôme caractéristique d'une matrice carrée	169
5.4.1	Définition et lien avec les valeurs propres	169
5.4.2	Ordre de multiplicité et dimension du sous-espace propre	171
5.4.3	Matrice scindée	171
5.5	Endomorphismes diagonalisables, matrices diagonalisables	172
5.5.1	Définition	172
5.5.2	Caractérisations équivalentes	173
5.5.3	Lien avec le polynôme caractéristique	175
5.6	Lien entre diagonalisabilité et polynômes annulateurs	176
5.6.1	Racines du polynôme minimal	176
5.6.2	Lemme des noyaux	177
5.6.3	Application à la diagonalisabilité	179
5.6.4	Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit	182
5.7	Quelques applications de la diagonalisation	183
5.7.1	Puissances d'une matrice, suites récurrentes linéairement	183
5.7.2	Systèmes d'équations différentielles	184
5.8	Endomorphismes trigonalisables, matrices trigonalisables	184
5.8.1	Définition et propriétés	184
5.8.2	Caractérisation équivalente	185
5.8.3	Théorème de Cayley-Hamilton	188
5.8.4	Sous-espaces caractéristiques	189

5.9	Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes	191
5.9.1	Généralités	191
5.9.2	Éléments propres d'un nilpotent	193
5.9.3	Application aux sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme	193

Dans ce chapitre, \mathbb{K} désigne un sous-corps de \mathbb{C} , en général \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

5.1 Éléments propres d'un endomorphisme

Dans cette section, E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension quelconque, finie ou non.

5.1.1 Valeurs propres et vecteurs propres

Définition 5.1

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On dit que λ est une valeur propre de f quand il existe un vecteur v non-nul tel que $f(v) = \lambda v$.

Si λ est une valeur propre de f , alors tout vecteur non-nul v tel que $f(v) = \lambda v$ est appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ .

Remarque 5.2

Si $f(v) = \lambda v$ et $v \neq 0$ alors pour tout $\alpha \neq 0$, $f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha(\lambda v) = \lambda(\alpha v)$. Donc αv est un vecteur propre de f pour la valeur propre λ .

Exemple 5.3

- Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, αid_E a pour unique valeur propre α et tout vecteur non-nul de E est un vecteur propre associé.
- Si p est un projecteur non-trivial (*i.e.* $p \neq 0$ et $p \neq \text{id}_E$), alors p a pour seules valeurs propres 0 et 1.
- De même, si s est une symétrie non-triviale (*i.e.* $s \neq \text{id}_E$ et $s \neq -\text{id}_E$), alors les valeurs propres de s sont 1 et -1 .
- L'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ $P \mapsto XP$ n'a pas de valeur propre.

L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme f est appelé le spectre de f et est noté $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(f)$ ou plus simplement $\text{Sp}(f)$ (en toute rigueur, cette définition est fautive en dimension infinie, mais à notre niveau, cette approximation est acceptable).

Définition 5.4

On appelle droite propre d'un endomorphisme toute droite dirigée par un vecteur propre.

Proposition 5.5

Les droites propres d'un endomorphisme sont exactement les droites stables par cet endomorphisme.

Exercice 5.6

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ défini par : si $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on pose $f(u) = (u_{n+1})$. Quelles sont les valeurs propres de f et les vecteurs propres associés ?

Exercice 5.7

Même question avec d l'opérateur de dérivation dans $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 5.8

Même question avec D l'opérateur de dérivation dans $\mathbb{R}[X]$.

5.1.2 Lien avec les polynômes annulateurs

En dimension quelconque, il est souvent difficile de trouver les valeurs propres d'un endomorphisme. La connaissance d'un polynôme annulateur peut aider.

Lemme 5.9

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Si λ est une valeur propre de f et v un vecteur propre associé, alors $P(f)(v) = P(\lambda)v$.

Démonstration 5.10

On montre par récurrence la propriété $\mathcal{P}(k)$: « $f^k(v) = \lambda^k v$ ».

On a $f^0(v) = v = \lambda^0 v$.

Si $\mathcal{P}(k)$ est vraie, alors

$$\begin{aligned} f^{k+1}(v) &= f f^k(v) \\ &= f(\lambda^k v) \\ &= \lambda^k f(v) \\ &= \lambda^k \lambda v \\ &= \lambda^{k+1} v. \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

Par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

On écrit $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$.

Alors $P(f) = \sum_{i=0}^n a_i f^i$.

Donc

$$\begin{aligned} P(f)(v) &= \sum_{i=0}^n a_i f^i(v) \\ &= \sum_{i=0}^n a_i (\lambda^i v) \\ &= v \sum_{i=0}^n a_i \lambda^i \\ &= P(\lambda) v. \end{aligned}$$

■

Si $P \in \mathbb{K}[X]$, on note $Z_{\mathbb{K}}(P)$ l'ensemble des racines de P dans \mathbb{K} .

Proposition 5.11

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Si P est un polynôme annulateur de f , alors $\text{Sp}(f) \subseteq Z_{\mathbb{K}}(P)$.

Démonstration 5.12

Il existe $v \neq 0$ tel que $f(v) = \lambda v$.

D'après le lemme précédent, $P(f)(v) = P(\lambda) v$.

Or $P(f) = 0$ donc $P(\lambda) v = 0$.

Or $v \neq 0$ donc $P(\lambda) = 0$.

Donc $\lambda \in Z_{\mathbb{K}}(P)$.

■

Remarque 5.13

Attention ! La réciproque est fautive. Contre-exemple : le polynôme $P = X^2 - 1$ est annulateur de id_E et pourtant -1 , qui est racine de P , n'est pas valeur propre de id_E .

Exercice 5.14

Soit $n \geq 2$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $f(M) = M + M^T + \text{tr}(M) I_n$: f est clairement un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Déterminez un polynôme annulateur de f de degré 3 et déduisez-en les valeurs propres de f .

5.1.3 Sous-espaces propres

Proposition 5.15

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors λ est valeur propre de f ssi $\ker(f - \lambda \text{id}_E) \neq \{0\}$, autrement dit ssi $f - \lambda \text{id}_E$ n'est pas injectif.

Démonstration 5.16

On a

$$\begin{aligned}\lambda \in \text{Sp}(f) &\iff \exists v \in E, v \neq 0 \text{ et } f(v) = \lambda v \\ &\iff \exists v \in E, v \neq 0 \text{ et } f(v) - \lambda v = 0 \\ &\iff \exists v \in E, v \neq 0 \text{ et } (f - \lambda \text{id}_E)(v) = 0 \\ &\iff \exists v \in E, v \neq 0 \text{ et } v \in \ker(f - \lambda \text{id}_E) \\ &\iff \ker(f - \lambda \text{id}_E) \neq \{0\} \\ &\iff f - \lambda \text{id}_E \text{ non-injective.} \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Définition 5.17

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Si $\lambda \in \text{Sp}(f)$, le noyau $\ker(f - \lambda \text{id}_E)$ est appelé le sous-espace propre associé à la valeur propre λ . Il est souvent noté $\text{sep}(f, \lambda)$.

Par conséquent, $\text{sep}(f, \lambda)$ est l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ auquel on ajoute le vecteur nul.

Remarque 5.18

Un cas particulier important : 0 est valeur propre ssi f n'est pas injective.

Exercice 5.19

Soit u un endomorphisme ayant pour matrice $M = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -4 \\ 4 & -3 & 3 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ dans une certaine base \mathcal{B} .

Calculez $M^3 + 2M^2 - 3M$. Déduisez-en les valeurs propres de u puis déterminez les sous-espaces propres associés.

Proposition 5.20

Tout sous-espace propre d'un endomorphisme est stable par cet endomorphisme. L'endomorphisme induit sur un sous-espace propre est alors une homothétie.

Démonstration 5.21

Soit $v \in \text{sep}(f, \lambda)$.

On a $f(v) = \lambda v$.

Donc $f(f(v)) = \lambda f(v)$.

Donc $f(v) \in \text{sep}(f, \lambda)$.

Donc le sous-espace propre $\text{sep}(f, \lambda)$ est stable par f .

De plus, l'endomorphisme induit par f sur ce sous-espace est

$$\begin{array}{ccc} \text{sep}(f, \lambda) & \longrightarrow & \text{sep}(f, \lambda) \\ v & \longmapsto & f(v) = \lambda v \end{array}$$

i.e. l'homothétie de rapport λ . ■

Théorème 5.22

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres distinctes de f .

Alors les sous-espaces propres $(\text{sep}(f, \lambda_i))_{1 \leq i \leq p}$ sont en somme directe.

Autrement dit, toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Démonstration 5.23

Soit $(v_1, \dots, v_p) \in \prod_{i=1}^p \text{sep}(f, \lambda_i)$ tel que $v_1 + \dots + v_p = 0$ (1).

On veut montrer que $v_1 = \dots = v_p = 0$.

On applique f à (1) : $f(v_1) + \dots + f(v_p) = 0$ i.e. $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0$.

On réitère $p - 2$ fois et on obtient le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 + \dots + v_p = 0 \\ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0 \\ \lambda_1^2 v_1 + \dots + \lambda_p^2 v_p = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1^{p-1} v_1 + \dots + \lambda_p^{p-1} v_p = 0 \end{array} \right.$$

La matrice de ce système linéaire est

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \dots & \dots & \lambda_p \\ \lambda_1^2 & \dots & \dots & \dots & \lambda_p^2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \lambda_1^{p-1} & \dots & \dots & \dots & \lambda_p^{p-1} \end{pmatrix}$$

i.e. une matrice de Vandermonde inversible car les λ_i sont distincts donc le système a une unique solution $(v_1, \dots, v_p) = (0, \dots, 0)$. ■

Remarque 5.24

Quand on demande de déterminer les éléments propres d'un endomorphisme, on demande de déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres associés, *i.e.* les sous-espaces propres.

À partir de maintenant, il est toujours supposé que E est de dimension finie n

5.2 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

5.2.1 Caractérisation des valeurs propres en dimension finie

Proposition 5.25

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$\lambda \in \text{Sp}(f) \iff \text{rg}(f - \lambda \text{id}_E) < n.$$

Dans ce cas, $\dim \text{sep}(f, \lambda) = n - \text{rg}(f - \lambda \text{id}_E)$.

Démonstration 5.26

D'après le théorème du rang, on a

$$n = \underbrace{\dim \ker(f - \lambda \text{id}_E)}_{=\dim \text{sep}(f, \lambda)} + \text{rg}(f - \lambda \text{id}_E).$$

Donc $\dim \text{sep}(f, \lambda) = n - \text{rg}(f - \lambda \text{id}_E)$.

On obtient l'inégalité voulue grâce à la Proposition 5.15. ■

5.2.2 Définition et lien avec les valeurs propres

Définition 5.27

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

On appelle polynôme caractéristique de f le polynôme $\chi_f = \det(X \text{id}_E - f)$.

La notation χ_f est très courante : elle est à connaître.

Théorème 5.28

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Alors χ_f est un polynôme unitaire de degré n de $\mathbb{K}[X]$ et les valeurs propres de f sont exactement les racines dans \mathbb{K} de $\chi_f : Z_{\mathbb{K}}(\chi_f) = \text{Sp}(f)$.

Par conséquent, un endomorphisme d'un espace de dimension n a au plus n valeurs propres distinctes.

Démonstration 5.29

On choisit une base \mathcal{B} de E et on pose $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de f dans \mathcal{B} .

On a

$$\begin{aligned}
\chi_f &= \det(\text{Id}_E - f) \\
&= \det(XI_n - A) \\
&= \begin{vmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & X - a_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -a_{n-1n} \\ -a_{n1} & \dots & -a_{nn-1} & X - a_{nn} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

On pose $c_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & \text{si } i \neq j \\ X - a_{ii} & \text{sinon} \end{cases}$

Alors

$$\begin{aligned}
\chi_f &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n c_{i\sigma(i)} \\
&= \varepsilon(\text{id}) \prod_{i=1}^n c_{ii} + \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n \setminus \{\text{id}\}} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n c_{i\sigma(i)}
\end{aligned}$$

On remarque que si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ alors σ a n points fixes si $\sigma = \text{id}$ et σ a moins de $n - 2$ points fixes sinon donc si $\sigma \neq \text{id}$, il existe au moins deux entiers $i, j \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ tels que $\sigma(i) \neq i$ et $\sigma(j) \neq j$.

Donc pour toute permutation $\sigma \neq \text{id}$, parmi les facteurs du produit $\prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$, il en existe au moins

deux qui sont de la forme $a_{??}$ donc $\prod_{i=1}^n c_{i\sigma(i)}$ est un polynôme de degré au plus $n - 2$.

Donc $\deg \chi_f = n$ et χ_f est unitaire.

De plus, on a

$$\begin{aligned}
\lambda \in \text{Sp}(f) &\iff f - \lambda \text{id}_E \text{ n'est pas injectif} \\
&\iff f - \lambda \text{id}_E \text{ n'est pas bijectif} \\
&\iff \det(f - \lambda \text{id}_E) = 0 \\
&\iff \det(\lambda \text{id}_E - f) = 0 \\
&\iff \chi_f(\lambda) = 0.
\end{aligned}$$

} dimension finie

■

Exercice 5.30

Montrez que si $\dim E = 2$, alors pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, $\chi_f = X^2 - \operatorname{tr}(f)X + \det f$.

Exercice 5.31

Calculez le polynôme caractéristique d'un endomorphisme de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ et donnez ses valeurs propres.

Exercice 5.32

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , $s = \sum_{i=1}^n e_i$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $j \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, $f(e_j) = e_j + s$.

Calculez son polynôme caractéristique et ses éléments propres.

On peut noter un lien avec la trace et le déterminant.

Proposition 5.33

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Alors $\chi_f = X^n - \operatorname{tr}(f)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det f$.

Démonstration 5.34

► On a $\chi_f = \det(X\operatorname{id}_E - f)$ donc

$$\chi_f(0) = \det(-f) = (-1)^n \det f$$

est le coefficient constant de χ_f .

► On avait $\chi_f = \prod_{i=1}^n (X - a_{ii}) + Q$ avec $\deg Q \leq n - 2$ (cf. Démonstration 5.29).

Donc le coefficient d'indice $n - 1$ est celui du produit $\prod_{i=1}^n (X - a_{ii})$.

Or on a

$$\begin{aligned} (X - a_{11}) \dots (X - a_{nn}) &= X^n + (-a_{11} - \dots - a_{nn})X^{n-1} + \dots \\ &= X^n - \operatorname{tr}(f)X^{n-1} + \dots \end{aligned}$$

■

5.2.3 Ordre de multiplicité et dimension du sous-espace propre

Définition 5.35

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \text{Sp}(f)$.

On appelle ordre de multiplicité de la valeur propre λ son ordre de multiplicité en tant que racine de χ_f .

Proposition 5.36

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, F un sous-espace vectoriel de E stable par f et g l'endomorphisme induit par f dans F .

Alors χ_g divise χ_f .

Démonstration 5.37

On choisit une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E adaptée à F : (e_1, \dots, e_p) est une base de F .

Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & ? \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.

On remarque que $A = \text{Mat}_{(e_1, \dots, e_p)}(g)$.

Alors

$$\begin{aligned} \chi_f &= \begin{vmatrix} XI_p - A & -? \\ 0 & XI_{n-p} - B \end{vmatrix} \\ &= \underbrace{\det(XI_p - A)}_{=\chi_g} \det(XI_{n-p} - B). \end{aligned}$$

Donc $\chi_g \mid \chi_f$. ■

Une conséquence très importante de ce résultat est le théorème suivant.

Théorème 5.38

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \text{Sp}(f)$.

Si λ est une valeur propre d'ordre α , alors $1 \leq \dim \text{sep}(f, \lambda) \leq \alpha$.

Démonstration 5.39

Si $\lambda \in \text{Sp}(f)$ alors $\text{sep}(f, \lambda)$ est stable par f et l'endomorphisme induit par f dans $\text{sep}(f, \lambda)$ est l'homothétie de rapport $\lambda : g = \lambda \text{id}$.

On note $p = \dim \text{sep}(f, \lambda)$.

On a

$$\chi_g = \begin{vmatrix} X - \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & X - \lambda \end{vmatrix}_{[p]} = (X - \lambda)^p.$$

D'après la Proposition 5.36, $(X - \lambda)^p \mid \chi_f$ donc $p \leq \alpha$.

De plus, on a $1 \leq p$ car $\text{sep}(f, \lambda) \neq \{0\}$. ■

Exercice 5.40

Soit f un endomorphisme de matrice $\begin{pmatrix} 3 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminez les valeurs propres de f , leur multiplicité et la dimension des sous-espaces propres associés.

5.2.4 Endomorphisme scindé

Définition 5.41

On dit qu'un endomorphisme de E est scindé quand son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.

Dans le cas d'un endomorphisme scindé, on connaît alors la somme et le produit des valeurs propres.

Proposition 5.42

Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est scindé et a pour valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ avec les ordres de multiplicité $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, alors

$$\text{tr } f = \sum_{k=1}^p \alpha_k \lambda_k \quad \text{et} \quad \det f = \prod_{k=1}^p \lambda_k^{\alpha_k}.$$

Démonstration 5.43

Relations coefficients/racines. ■

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors on est dans ce cas, car tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont scindés dans $\mathbb{C}[X]$ d'après le théorème de d'Alembert-Gauss.

Mais si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors il faut se méfier des raisonnements hâtifs : comme un \mathbb{R} -endomorphisme peut ne pas avoir de valeurs propres réelles, la trace et le déterminant peuvent ne pas avoir de rapport avec les valeurs propres.

Exercice 5.44

Soit f un endomorphisme d'un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ dont la matrice dans une base est remplie par ligne de 1, ligne de 2, etc. Sans calculer le polynôme caractéristique, déterminez les valeurs propres complexes de f , leur multiplicité et la dimension des sous-espaces propres associés.

Remarque 5.45

Dans le langage courant, on dit souvent que la trace est la somme des valeurs propres. Cette phrase est correcte seulement si l'on sous-entend que l'on parle de la somme des valeurs propres comptées chacune avec son ordre de multiplicité.

On rencontre en fait deux types de résultats à propos des valeurs propres :

- ceux où l'on parle des valeurs propres distinctes (comme le Théorème 5.28) ;
- ceux où l'on parle des valeurs propres comptées selon leur multiplicité (comme la Proposition 5.42).

Il faut donc être très attentif à la façon dont on considère les valeurs propres.

5.3 Éléments propres d'une matrice carrée

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les matrices-colonnes d'ordre n sont les matrices de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$, espace souvent identifié avec \mathbb{K}^n .

5.3.1 Valeurs propres et vecteurs propres

Définition 5.46

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On dit que λ est valeur propre de A quand il existe une matrice-colonne X non-nulle telle que $AX = \lambda X$.

Si λ est une valeur propre de A , alors toute matrice-colonne non-nulle X telle que $AX = \lambda X$ est appelée vecteur propre associé à la valeur propre λ .

Exemple 5.47

- Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, αI_n a pour unique valeur propre α et toute matrice-colonne non-nulle est un vecteur propre associé.
- Si A est une matrice diagonale, alors ses valeurs propres sont les coefficients diagonaux et des vecteurs propres associés sont les colonnes remplies de 0 sauf un seul coefficient égal à 1.

L'ensemble des valeurs propres d'une matrice A est appelé le spectre de A et est noté $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ ou plus simplement $\text{Sp}(A)$.

Mais comme une matrice à coefficients réels est aussi une matrice à coefficients complexes, il vaut mieux savoir si on parle des valeurs propres réelles ou complexes. Il est donc préférable d'indiquer clairement le corps de base, comme le montre le résultat suivant.

Proposition 5.48

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et \mathbb{K}' une extension de \mathbb{K} dans \mathbb{C} .

Alors $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \subseteq \text{Sp}_{\mathbb{K}'}(A)$.

Proposition 5.49

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f \in \mathcal{L}(E)$ et \mathcal{B} une base de E .

Si $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, alors $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \text{Sp}(f)$.

Par conséquent, deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres (mais attention, pas forcément les mêmes vecteurs propres).

5.3.2 Lien avec les polynômes annulateurs

Proposition 5.50

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si P est un polynôme annulateur de A , alors $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \subseteq Z_{\mathbb{K}}(P)$.

Attention ! La réciproque est fausse. Contre-exemple : le polynôme $P = X^2 - 1$ est annulateur de I_n et pourtant -1 , qui est racine de P , n'est pas valeur propre de I_n .

5.3.3 Sous-espaces propres

Proposition 5.51

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors λ est valeur propre de A ssi $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible, autrement dit ssi $\text{rg}(A - \lambda I_n) < n$ ou $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Si $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$, le sous-espace propre associé à la valeur propre λ est l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ auquel on ajoute le vecteur nul. Il est souvent noté $\text{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda)$:

$$\text{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \lambda X\}.$$

Proposition 5.52

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \iff \text{rg}(A - \lambda I_n) < n.$$

Dans ce cas, $\dim \text{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda) = n - \text{rg}(A - \lambda I_n)$.

Attention ! Dans la relation $\dim \text{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda) = n - \text{rg}(A - \lambda I_n)$, c'est n , pas n^2 ! Il s'agit de la dimension de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, pas celle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque 5.53

Un cas particulier important : 0 est valeur propre ssi A n'est pas inversible, c'est-à-dire ssi $\text{rg } A < n$.

Théorème 5.54

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres distinctes de A .

Alors les sous-espaces propres $(\text{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda_i))_{1 \leq i \leq p}$ sont en somme directe.

Autrement dit, toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Remarque 5.55

Quand on demande de déterminer les éléments propres d'une matrice, on demande de déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres associés, *i.e.* les sous-espaces propres.

5.4 Polynôme caractéristique d'une matrice carrée

5.4.1 Définition et lien avec les valeurs propres

Définition 5.56

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme $\chi_A = \det(XI_n - A)$.

Proposition 5.57

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f \in \mathcal{L}(E)$ et \mathcal{B} une base de E .

Si $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, alors $\chi_A = \chi_f$.

Par conséquent, deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Théorème 5.58

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Alors χ_A est un polynôme unitaire de degré n de $\mathbb{K}[X]$ et les valeurs propres de A sont exactement les racines de χ_A dans \mathbb{K} .

Par conséquent, une matrice carrée de taille (n, n) a au plus n valeurs propres distinctes.

Corollaire 5.59

L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration 5.60

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On veut montrer qu'il existe une suite de matrices inversibles qui converge vers A .

Considérons la suite $\left(A + \frac{1}{k}I_n\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$.

On a $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(A + \frac{1}{k}I_n\right) = A$.

Montrons qu'à partir d'un certain rang, cette suite est constituée de matrices inversibles.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A + \frac{1}{k}I_n$ n'est pas inversible $\iff \frac{-1}{k}$ est valeur propre de A .

- ▷ Si A n'a que des valeurs propres positives ou nulles, alors comme pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{-1}{k} < 0$, $\frac{-1}{k}$ n'est pas valeur propre.
- ▷ Si A possède au moins une valeur propre strictement négative, on pose $r = \min \{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(A) \cap \mathbb{R}_-^*\} > 0$.
Dès que $\frac{1}{k} < r$, il est certain que $\frac{-1}{k}$ n'est pas valeur propre. ■

On peut noter un lien avec la trace et le déterminant.

Proposition 5.61

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Alors $\chi_A = X^n - \mathrm{tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A$.

5.4.2 Ordre de multiplicité et dimension du sous-espace propre

Définition 5.62

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$.

On appelle ordre de multiplicité de la valeur propre λ son ordre de multiplicité en tant que racine de χ_A .

Théorème 5.63

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$.

Si λ est une valeur propre d'ordre α , alors $1 \leq \dim \text{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda) \leq \alpha$.

Proposition 5.64

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f \in \mathcal{L}(E)$ et \mathcal{B} une base de E .

Si $A = \underset{\mathcal{B}}{\text{Mat}}(f)$, alors $\dim \text{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda) = \dim \text{sep}(f, \lambda)$.

Par conséquent, deux matrices semblables ont des sous-espaces propres de même dimension (mais pas les mêmes vecteurs propres).

5.4.3 Matrice scindée

Définition 5.65

On dit qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est scindée quand son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.

Dans le cas d'une matrice scindée, on connaît alors la somme et le produit des valeurs propres.

Proposition 5.66

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est scindée et a pour valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ avec les ordres de multiplicité $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, alors

$$\text{tr } A = \sum_{k=1}^p \alpha_k \lambda_k \quad \text{et} \quad \det A = \prod_{k=1}^p \lambda_k^{\alpha_k}.$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors on est dans ce cas, car tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont scindés dans $\mathbb{C}[X]$ d'après le théorème de d'Alembert-Gauss.

Mais si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors il faut se méfier des raisonnements hâtifs : comme un polynôme à coefficients réels peut ne pas avoir de racines réelles, la trace et le déterminant peuvent ne pas avoir de rapport avec les valeurs propres.

5.5 Endomorphismes diagonalisables, matrices diagonalisables

5.5.1 Définition

Définition 5.67

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On dit que f est diagonalisable quand il existe une base de E constituée de vecteurs propres de f .

On dit que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (ou \mathbb{K} -diagonalisable) quand il existe une base de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A .

D'après le lien entre les endomorphismes et les matrices carrées, un endomorphisme est diagonalisable ssi sa matrice dans n'importe quelle base est diagonalisable.

Exercice 5.68

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ est-elle \mathbb{R} -diagonalisable ? \mathbb{C} -diagonalisable ?

Exercice 5.69

Montrez que la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Exercice 5.70

Même exercice avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 5.71

La matrice $C = \begin{pmatrix} 11 & 7 & -3 \\ 11 & 7 & -3 \\ 66 & 42 & -18 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Proposition 5.72

Si un endomorphisme (une matrice) est diagonalisable, alors il (elle) est scindé(e).

Mais la réciproque est fausse.

5.5.2 Caractérisations équivalentes

On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 5.73

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

f est diagonalisable ssi il existe une base \mathcal{B} de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$. Dans ce cas, les valeurs propres de f sont les éléments diagonaux de cette matrice.

A est \mathbb{K} -diagonalisable ssi elle est \mathbb{K} -semblable à une matrice diagonale, i.e. il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = PDP^{-1}$. Dans ce cas, les valeurs propres de A sont les éléments diagonaux de D .

Démonstration 5.74

Si f est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E constituée de vecteurs propres, i.e.

$$\text{pour tout } j \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, f(e_j) = \lambda_j e_j$$

où λ_j est la valeur propre associée à e_j .

Donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}).$$

Et réciproquement. ■

Exemple 5.75

- Toute matrice diagonale est diagonalisable, car elle est semblable à elle-même.
- Les projecteurs et les symétries sont diagonalisables.

Remarque 5.76

Quitte à changer l'ordre des vecteurs dans la base, on peut ranger les valeurs propres sur la diagonale dans l'ordre qu'on veut.

Exemple 5.77

Si $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = P^{-1}AP$, alors la colonne 1 de P est un vecteur propre de A pour la valeur propre 1 et les deux autres sont des vecteurs propres pour la valeur propre 3, donc en posant $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, on a $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Lemme 5.78

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable : il existe une base de E dans laquelle la matrice D de f est diagonale.

Les valeurs propres de f sont les éléments diagonaux de D et si λ est un tel nombre, alors la dimension de $\text{sep}(f, \lambda)$ est le nombre d'occurrences de λ dans la diagonale de D .

On en déduit les théorèmes suivants.

Théorème 5.79

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- ▷ f est diagonalisable
- ▷ les sous-espaces propres de f sont supplémentaires dans E
- ▷ $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim \text{sep}(f, \lambda) = n$

Démonstration 5.80

Les sous-espaces propres d'un endomorphisme sont en somme directe donc ils sont supplémentaires ssi la somme de leurs dimensions est celle de l'espace E . ■

Et sa version matricielle.

Théorème 5.81

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- ▷ A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- ▷ les sous-espaces propres de A dans $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$
- ▷ $\sum_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} \dim \text{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda) = n$

Exercice 5.82

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. On a vu à l'Exercice 5.70 que A est diagonalisable. Diagonalisez A .

5.5.3 Lien avec le polynôme caractéristique

Théorème 5.83

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- ▷ f est diagonalisable
- ▷ f est scindé et pour tout $\lambda \in \text{Sp}(f)$, la dimension de $\text{sep}(f, \lambda)$ est égale à l'ordre de multiplicité de λ

Démonstration 5.84

Si $\lambda \in \text{Sp}(f)$, on note $\omega(\lambda)$ l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ .



Si f est diagonalisable alors $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim \text{sep}(f, \lambda) = n = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \omega(\lambda)$.

Donc $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \underbrace{(\omega(\lambda) - \dim \text{sep}(f, \lambda))}_{\geq 0 \text{ d'après le Théorème 5.38}} = 0$.

Or une somme de réels positifs est nulle ssi tous ces réels sont nuls donc

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(f), \quad \omega(\lambda) = \dim \text{sep}(f, \lambda).$$



Si f est scindé et $\forall \lambda \in \text{Sp}(f), \quad \omega(\lambda) = \dim \text{sep}(f, \lambda)$, alors χ_f est scindé.

Donc $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \omega(\lambda) = \deg \chi_f = n$.

Donc $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim \text{sep}(f, \lambda) = n$.

Donc f est diagonalisable d'après le Théorème 5.79. ■

Et sa version matricielle.

Théorème 5.85

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- ▷ A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

- A est scindée et pour tout $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$, la dimension de $\text{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda)$ est égale à l'ordre de multiplicité de λ

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la condition « être scindé » est automatiquement satisfaite.

Un cas particulier très courant.

Proposition 5.86

Si un endomorphisme de E possède exactement n valeurs propres distinctes, alors il est diagonalisable.

Si une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède exactement n valeurs propres distinctes dans \mathbb{K} , alors elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 5.87

Montrez que la matrice $\begin{pmatrix} -4 & 8 & 22 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Théorème 5.88 (Théorème spectral)

Si A est une matrice réelle symétrique, alors A est diagonalisable.

Démonstration 5.89

★★ Admis, sera démontré plus tard ★★

■

5.6 Lien entre diagonalisabilité et polynômes annulateurs

5.6.1 Racines du polynôme minimal

Proposition 5.90

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les racines de μ_f sont exactement les valeurs propres de f : $Z_{\mathbb{K}}(\mu_f) = \text{Sp}(f)$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les racines dans \mathbb{K} de μ_A sont exactement les valeurs propres dans \mathbb{K} de A : $Z_{\mathbb{K}}(\mu_A) = \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$.

Démonstration 5.91

\supseteq Cf. Proposition 5.11 car μ_f est un polynôme annulateur de f .

\subseteq

Soit $\lambda \in Z_{\mathbb{K}}(\mu_f)$.

Alors $X - \lambda \mid \mu_f$, i.e. il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\mu_f = (X - \lambda)Q$.

Alors $\mu_f(f) = 0 = (f - \lambda \text{id}_E) \circ Q(f)$.

Donc pour tout $x \in E$, $(f - \lambda \text{id}_E)(Q(f)(x)) = 0$.

Donc $\text{Im } Q(f) \subseteq \ker(f - \lambda \text{id}_E)$.

Or $\deg Q < \deg \mu_f$ donc Q n'est pas annulateur de f , i.e. $Q(f) \neq 0$, i.e. $\text{Im } Q(f) \neq \{0\}$.

Donc $\ker(f - \lambda \text{id}_E) \neq \{0\}$, i.e. $\lambda \in \text{Sp}(f)$.

Donc $Z_{\mathbb{K}}(\mu_f) \subseteq \text{Sp}(f)$. ■

5.6.2 Lemme des noyaux

Proposition 5.92

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P \wedge Q = 1$.

Alors $\ker(PQ)(f) = \ker P(f) \oplus \ker Q(f)$.

Démonstration 5.93

D'après le théorème de Bézout, il existe $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $UP + VQ = 1$.

Donc $(UP)(f) + (VQ)(f) = \text{id}_E$, i.e.

$$U(f) \circ P(f) + V(f) \circ Q(f) = \text{id}_E \quad (1)$$

Soit $x \in \ker P(f) \cap \ker Q(f)$.

On a $P(f)(x) = 0$ et $Q(f)(x) = 0$.

Donc, en appliquant (1) sur le vecteur x , on obtient

$$\begin{aligned} x &= U(f)(P(f)(x)) + V(f)(Q(f)(x)) \\ &= U(f)(0) + V(f)(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $\ker P(f)$ et $\ker Q(f)$ sont en somme directe.

□

On a $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f)$.

Donc $\ker P(f) \subseteq \ker (PQ)(f)$ et $\ker Q(f) \subseteq \ker (PQ)(f)$.

Donc $\ker P(f) \oplus \ker Q(f) \subseteq \ker (PQ)(f)$.

□

Soit $x \in \ker (PQ)(f)$.

On veut montrer qu'il existe $(a, b) \in \ker P(f) \times \ker Q(f)$ tel que $x = a + b$.

On applique (1) sur x :

$$x = U(f) \circ P(f)(x) + V(f) \circ Q(f)(x).$$

On pose $a = V(f) \circ Q(f)(x)$.

On a

$$P(f)(a) = P(f)(V(f) \circ Q(f)(x)) = (P(f) \circ V(f) \circ Q(f))(x).$$

Or $\mathbb{K}[f]$ est une algèbre commutative donc

$$\begin{aligned} P(f)(a) &= (V(f) \circ P(f) \circ Q(f))(x) \\ &= V(f)(P(f) \circ Q(f)(x)) \\ &= V(f)((PQ)(f)(x)) \\ &= V(f)(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $a \in \ker P(f)$.

De même, $b = U(f) \circ P(f)(x) \in \ker Q(f)$.

Finalement, on a

$$\ker (PQ)(f) = \ker P(f) \oplus \ker Q(f). \quad \blacksquare$$

Proposition 5.94

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux deux à deux. On pose $P = \prod_{i=1}^k P_i$.

Alors $\ker P(f) = \bigoplus_{i=1}^k \ker P_i(f)$.

Démonstration 5.95

On note $\mathcal{P}(k)$ le prédicat énoncé.

- On a clairement $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ est vraie (*cf.* Proposition 5.92).
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie.

Soient $P_1, \dots, P_{k+1} \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux deux à deux.

On a $P_1 \dots P_k \wedge P_{k+1} = 1$.

D'après $\mathcal{P}(2)$, on a

$$\ker(P_1 \dots P_{k+1})(f) = \ker(P_1 \dots P_k)(f) \oplus \ker P_{k+1}(f).$$

Puis, par hypothèse de récurrence, on a

$$\ker(P_1 \dots P_k)(f) = \bigoplus_{i=1}^k \ker P_i(f).$$

Finalement, on a

$$\ker(P_1 \dots P_{k+1})(f) = \bigoplus_{i=1}^{k+1} \ker P_i(f)$$

d'où $\mathcal{P}(k+1)$.

- D'après le principe de récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie. ■

5.6.3 Application à la diagonalisabilité

Définition 5.96

Un polynôme est dit simplement scindé quand il est scindé et à racines simples.

Théorème 5.97

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

(α) f est diagonalisable

(β) μ_f est simplement scindé

(γ) il existe un polynôme annulateur de f simplement scindé

(δ) le polynôme $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(f)} (X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de f

Démonstration 5.98 ((β) \implies (γ))

Immédiat car μ_f est annulateur de f . ■

Démonstration 5.99 ((γ) \implies (β))

Si P est simplement scindé et $P(f) = 0$ alors $\mu_f \mid P$ donc μ_f est simplement scindé. ■

Démonstration 5.100 ((β) \implies (δ))

On sait que $Z_{\mathbb{K}}(\mu_f) = \text{Sp}(f)$ donc si μ_f est simplement scindé, alors $\mu_f = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(f)} (X - \lambda)$. Or μ_f est annulateur de f . ■

Démonstration 5.101 ((δ) \implies (γ))

Immédiat. ■

Démonstration 5.102 ((α) \implies (δ))

Supposons f diagonalisable, i.e. il existe une base \mathcal{B} de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ soit diagonale :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \Lambda_k \end{pmatrix} = D$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont les valeurs propres distinctes de f et pour tout $i \in \llbracket 1 ; k \rrbracket$, $\Lambda_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$.

On pose $P = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)$.

Or on a pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, $Q(D) = \begin{pmatrix} Q(\Lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & Q(\Lambda_k) \end{pmatrix}$

et pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, pour tout $i \in \llbracket 1 ; k \rrbracket$, $Q(\Lambda_i) = \begin{pmatrix} Q(\lambda_i) & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \ddots & 0 \\ & & & Q(\lambda_i) \end{pmatrix}$.

En particulier, $P(D) = 0$ car $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} = Z_{\mathbb{K}}(P)$. ■

Démonstration 5.103 ((δ) \implies (α))

On pose $\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ et pour tout $i \in \llbracket 1 ; k \rrbracket$, $P_i = X - \lambda_i$.

Les polynômes P_1, \dots, P_k sont premiers entre eux deux à deux donc d'après le lemme des noyaux, on a

$$\underbrace{\ker(P_1 \dots P_k)(f)}_{=0} = \bigoplus_{i=1}^k \underbrace{\ker P_i(f)}_{=\text{sep}(f, \lambda_i)}.$$

D'où $E = \bigoplus_{i=1}^k \text{sep}(f, \lambda_i)$.

Donc d'après le Théorème 5.79, f est diagonalisable. ■

Et sa version matricielle.

Théorème 5.104

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- ▷ A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- ▷ μ_A est simplement scindé
- ▷ il existe un polynôme annulateur de A simplement scindé dans $\mathbb{K}[X]$
- ▷ le polynôme $\prod_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} (X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de A

Exercice 5.105

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Calculez $(A + I_3)^3$. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 5.106

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^3 = I_n$. Selon que \mathbb{K} soit égal à \mathbb{C} ou \mathbb{R} , à quelle condition A est-elle \mathbb{K} -diagonalisable ?

5.6.4 Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit

Proposition 5.107

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, F un sous-espace vectoriel de E stable par f et g l'endomorphisme induit par f dans F .

Alors μ_g divise μ_f .

Démonstration 5.108

On a $g : F \longrightarrow F$
 $x \longmapsto f(x)$

Pour tout $x \in F$, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(g)(x) = P(f)(x)$.

Or $\mu_f(f) = 0$ donc pour tout $x \in F$, $\mu_f(g)(x) = 0$, i.e. μ_f est annulateur de g .

Donc $\mu_g \mid \mu_f$. ■

Corollaire 5.109

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par f .

Si f est diagonalisable, alors l'endomorphisme induit par f dans F est aussi diagonalisable.

Démonstration 5.110

Si f est diagonalisable, d'après le Théorème 5.97, μ_f est simplement scindé.

Or $\mu_g \mid \mu_f$ donc μ_g est simplement scindé.

Donc g est diagonalisable d'après le Théorème 5.97. ■

Remarque 5.111

On a également :

► $\text{Sp}(g) = Z_{\mathbb{K}}(\mu_g) \subseteq Z_{\mathbb{K}}(\mu_f) = \text{Sp}(f)$

► si x est un vecteur propre de g pour la valeur propre λ , i.e. $\begin{cases} x \in F \\ x \neq 0 \\ g(x) = f(x) = \lambda x \end{cases}$ alors x est un vecteur propre de f dans F , et réciproquement.

On a donc $\text{sep}(g, \lambda) = \text{sep}(f, \lambda) \cap F$.

Exercice 5.112

Soit f un endomorphisme de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Déterminez les sous-espaces vectoriels de E stables par f .

Exercice 5.113 (Codiagonalisation ou diagonalisation simultanée)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisables et qui commutent.

Montez qu'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ sont diagonales.

5.7 Quelques applications de la diagonalisation

5.7.1 Puissances d'une matrice, suites récurrentes linéairement

Un petit lemme déjà rencontré.

Lemme 5.114

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PBP^{-1}$.

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PB^kP^{-1}$.

Le lemme précédent est particulièrement utile si A est diagonalisable et si on choisit $B = D$, matrice diagonale semblable à A , car calculer les puissances d'une matrice diagonale est très facile.

Grâce à la diagonalisation de A , on peut espérer exprimer la forme générale des suites récurrentes linéaires (voir le chapitre précédent, section sur les polynômes annulateurs).

Exercice 5.115

Soient u, v, w les trois suites réelles telles que $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = -4u_n + 4v_n - 6w_n \\ w_{n+1} = -3u_n + 3v_n - 4w_n \end{cases}$$

Déterminez des expressions de u_n, v_n, w_n en fonction de n .

Cette technique s'applique en particulier aux suites u vérifiant une relation de récurrence linéaire de la forme : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+d} = a_{d-1}u_{n+d-1} + \cdots + a_2u_{n+2} + a_1u_{n+1} + a_0u_n$.

On pose alors $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+d-1} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{d-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$ et on est ramené au cas précédent.

La matrice A s'appelle la matrice-compagnon du polynôme $P = X^d - a_{d-1}X^{d-1} - \dots - a_1X - a_0$: elle a la propriété remarquable que son polynôme caractéristique est P , son polynôme minimal est aussi P et donc que ses valeurs propres sont les racines de P . C'est pourquoi le polynôme P est appelé polynôme caractéristique associé à la suite u (cas déjà étudié en première année : $d = 2$).

On en déduit que A est diagonalisable ssi P est simplement scindé et dans ce cas, A possède d valeurs propres distinctes. Dans ce cas, en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes, la suite u est combinaison linéaire des suites géométriques $(\lambda_1^n), \dots, (\lambda_d^n)$.

Exercice 5.116

Explicitez l'unique suite (u_n) vérifiant

$$u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 5 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n.$$

5.7.2 Systèmes d'équations différentielles

Ce point sera traité dans le chapitre sur les équations différentielles linéaires.

5.8 Endomorphismes trigonalisables, matrices trigonalisables

5.8.1 Définition et propriétés

Définition 5.117

Un endomorphisme est dit trigonalisable quand il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.

Une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ quand elle est semblable à une matrice triangulaire dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque 5.118

- Si un endomorphisme (une matrice) est diagonalisable, alors il (elle) est trigonalisable.
- Si une matrice est trigonalisable, ses valeurs propres sont les nombres sur la diagonale de toute matrice triangulaire semblable.

Exercice 5.119

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 7 \\ 5 & 4 & -8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et f un endomorphisme de matrice M . Déterminez les éléments propres de M . Est-elle diagonalisable? En complétant une famille libre de vecteurs propres, déterminez une base \mathcal{B} de l'espace où la matrice de f est triangulaire supérieure, puis trigonalisez M .

Exercice 5.120

Soit f un endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -5 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Montrez que f n'est pas diagonalisable mais est trigonalisable et donnez une base de trigonalisation de f . Donnez une forme générale pour A^n .

Quand un endomorphisme ou une matrice n'est pas diagonalisable, on peut espérer qu'il ou elle est trigonalisable : faute de grives, on se contente de merles !

Remarque 5.121

On ne confondra pas la trigonalisation d'une matrice carrée et la transformation par lignes (ou colonnes) des matrices vue en première année ! Seule la trigonalisation fournit des matrices semblables ! La transformation par lignes ne conserve que le rang !

5.8.2 Caractérisation équivalente

La trigonalisabilité est beaucoup plus courante que la diagonalisabilité, comme on le voit grâce aux résultats suivants.

Proposition 5.122

Un endomorphisme (une matrice) est trigonalisable ssi il (elle) est scindé(e).

Démonstration 5.123

On pose $\mathcal{P}(n)$: « si f est un endomorphisme d'un espace de dimension n et si χ_f est scindé, alors f est trigonalisable ».

- ▷ $\mathcal{P}(1)$ est vraie car tout endomorphisme en dimension 1 est trigonalisable.
- ▷ Supposons $\mathcal{P}(n-1)$.

Soient E un espace de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_f soit scindé.

Comme χ_f est scindé, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que λ soit racine de χ_f et donc une valeur propre de f à laquelle on associe un vecteur propre u_1 .

Comme $u_1 \neq 0$, d'après le théorème de la base incomplète, il existe $(u_2, \dots, u_n) \in E^{n-1}$ tel que $\mathcal{B}_0 = (u_1, \dots, u_n)$ soit une base de E .

On a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & L \\ \hline 0 & B \\ \vdots & \\ 0 & \end{array} \right).$$

Donc

$$\chi_f = \left(\begin{array}{c|c} X - \lambda & -L \\ \hline 0 & XI_{n-1} - B \\ \vdots & \\ 0 & \end{array} \right) = (X - \lambda) \chi_B.$$

On pose $F = \text{Vect}(u_2, \dots, u_n)$.

Soit $g \in \mathcal{L}(F)$ tel que $\text{Mat}_{(u_2, \dots, u_n)}(g) = B$.

On a $\chi_g = \chi_B$ scindé donc par hypothèse de récurrence, g est trigonalisable : il existe une base

$$(u'_2, \dots, u'_n) \text{ de } F \text{ telle que } \text{Mat}_{(u'_2, \dots, u'_n)}(g) = \begin{pmatrix} t_{22} & t_{23} & \dots & t_{2n} \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & t_{n-1n} \\ 0 & \dots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix} = T.$$

La famille $\mathcal{B} = (u_1, u'_2, \dots, u'_n)$ est une base de E .

On veut montrer que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & & & \vdots \\ 0 & \vdots & & & t_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

On a $g = p \circ f|_F$ où p est le projecteur sur F parallèlement à $\text{Vect}(u_1)$.

Donc pour tout $x \in F$, $f(x) = \underbrace{g(x)}_{\in F} + \alpha u_1$ où $\alpha \in \mathbb{K}$.

De plus,

$$\text{pour tout } j \in \llbracket 2 ; n \rrbracket, \quad f(u'_j) = g(u'_j) + \alpha_j u_1$$

$$= \sum_{i=2}^j t_{ij} u'_i + \alpha_j u_1.$$

D'où $\mathcal{P}(n)$.

► Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. ■

En particulier, quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tous les endomorphismes sont trigonalisables, toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont trigonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

En pratique, quand on cherche à trigonaliser un endomorphisme, on peut chercher une base dans laquelle la matrice est triangulaire supérieure avec des 1 ou des 0 sur la sur-diagonale et des 0 sur les diagonales partielles encore au-dessus (c'est démontrable, mais c'est difficile à démontrer, cela s'appelle le théorème de Jordan – hors-programme –).

Théorème 5.124

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- ▷ f est trigonalisable
- ▷ χ_f est scindé
- ▷ μ_f est scindé
- ▷ il existe un polynôme annulateur de f scindé

Et sa version matricielle.

Théorème 5.125

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- ▷ A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- ▷ χ_A est scindé
- ▷ μ_A est scindé
- ▷ il existe un polynôme annulateur de A qui est scindé dans $\mathbb{K}[X]$

Exercice 5.126

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculez A^2 , puis A^3 . La matrice A est-elle diagonalisable ? trigonalisable ? Dans l'affirmative, diagonalisez ou trigonalisez la.

5.8.3 Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème 5.127

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme (d'une matrice carrée) est un polynôme annulateur.

Démonstration 5.128

On pose $\mathcal{P}(n)$: « si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $\chi_A(A) = 0$ ».

► Si $n = 1$: on pose $A = (a)$.

On a $\chi_A = X - a$ donc $\chi_A(A) = A - aI_1 = (a) - (a) = 0$.

D'où $\mathcal{P}(1)$.

► Supposons $\mathcal{P}(n-1)$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Le polynôme χ_A est scindé donc A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, i.e. il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et

$$T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{C}) \text{ telles que } A = PTP^{-1}, \text{ avec } T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & ? & \dots & ? \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & ? \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a } \chi_A = \chi_T = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i).$$

On peut écrire

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & ? & \dots & ? \\ 0 & \lambda_2 & ? & ? \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & ? \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & ? & \dots & ? \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ U \\ \\ \end{matrix}$$

où $U \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$.

$$\text{On a } \chi_U = \prod_{i=2}^n (X - \lambda_i) \text{ donc } \chi_A = \chi_T = (X - \lambda_1) \chi_U.$$

Donc

$$\begin{aligned} \chi_A(A) &= (A - \lambda_1 I_n) \chi_U(A) \\ &= (PTP^{-1} - \lambda_1 I_n) \chi_U(PTP^{-1}) \\ &= P(T - \lambda_1 I_n) \chi_U(T) P^{-1}. \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} (PTP^{-1})^k = PT^k P^{-1}$$

Or on a

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & ? & \dots & ? \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_1 & ? & ? \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{T - \lambda_1 I_n} \underbrace{\begin{pmatrix} \chi_U(\lambda_1) & ? & \dots & ? \\ 0 & & & \\ \vdots & & \chi_U(U) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}}_{\chi_U(T)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

car $\chi_U(U) = 0$.

Donc $\chi_A(A) = 0$, d'où $\mathcal{P}(n)$.

► Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. ■

Corollaire 5.129

Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique. Donc en dimension n , le polynôme minimal est de degré au plus n .

Les polynômes minimal et caractéristique partagent les mêmes racines dans \mathbb{C} (en fait dans tout corps \mathbb{K}) mais pas avec les mêmes ordres de multiplicité : si f est scindé, alors en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les k valeurs propres distinctes de f , on peut écrire

$$\chi_f = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{\alpha_i} \quad \text{et} \quad \mu_f = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{\beta_i}$$

où pour tout $i \in \llbracket 1 ; k \rrbracket$, $1 \leq \beta_i \leq \alpha_i$.

5.8.4 Sous-espaces caractéristiques

Définition 5.130

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme scindé. On écrit $\chi_f = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont les k valeurs propres distinctes de f .

Les sous-espaces caractéristiques de f sont les noyaux $\ker (f - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i}$.

Proposition 5.131

Les sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme scindé sont supplémentaires et stables par f .

Démonstration 5.132

► Soient $\lambda \in \text{Sp}(f)$ et α l'ordre de multiplicité de λ .

Soit $x \in \ker(f - \lambda \text{id}_E)^\alpha$.

On a

$$\begin{aligned}(f - \lambda \text{id}_E)^\alpha(f(x)) &= ((f - \lambda \text{id}_E)^\alpha \circ f)(x) && \left. \begin{array}{l} \text{composée de deux} \\ \text{polynômes en } f \text{ donc} \\ \text{commutative} \end{array} \right\} \\ &= (f \circ (f - \lambda \text{id}_E)^\alpha)(x) \\ &= f(0) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc $f(x) \in \ker(f - \lambda \text{id}_E)^\alpha$.

Donc $\ker(f - \lambda \text{id}_E)^\alpha$ est stable par f .

► On a $\chi_f = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$: produit de polynômes premiers entre eux deux à deux.

D'après le lemme des noyaux, on a

$$\ker \chi_f(f) = \bigoplus_{i=1}^k \ker(f - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i}.$$

Or $\chi_f(f) = 0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton donc

$$E = \bigoplus_{i=1}^k \ker(f - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i}.$$

■

Théorème 5.133

Tout endomorphisme scindé possède une base dans laquelle sa matrice est diagonale par blocs telle que :

- *il y a autant de blocs que de valeurs propres : à chaque valeur propre, on associe un unique bloc ;*
- *chaque bloc est de la forme $\lambda I_r + U$ où λ est la valeur propre associée au bloc, r est l'ordre de multiplicité de λ et U est une matrice strictement triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$*

Toute matrice scindée est semblable à une matrice diagonale par blocs vérifiant les conditions précédentes.

Démonstration 5.134

Soient $\lambda \in \text{Sp}(f)$ et α son ordre de multiplicité.

Sur $F = \ker(f - \lambda \text{id}_E)^\alpha$, f induit un endomorphisme \tilde{f} tel que $(\tilde{f} - \lambda \text{id}_F)^\alpha = 0$.

Donc $(X - \lambda)^\alpha$ est un polynôme annulateur de \tilde{f} qui est scindé donc \tilde{f} a pour unique valeur propre λ et est trigonalisable.

Donc il existe une base \mathcal{B}_λ de F telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_\lambda}(\tilde{f}) = \begin{pmatrix} \lambda & ? & \dots & ? \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & ? \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_\alpha + U.$$

Comme $E = \bigoplus_{i=1}^k \ker(f - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i}$, en concaténant de telles bases, on obtient une base de E dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + U_1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & \ddots & 0 \\ & & & \lambda_k I_{\alpha_k} + U_k \end{pmatrix}.$$

■

Corollaire 5.135

La dimension d'un sous-espace caractéristique est l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée.

5.9 Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes

5.9.1 Généralités

Définition 5.136

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est nilpotent quand il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est nilpotente quand il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$.

Le plus petit indice p satisfaisant à la condition précédente s'appelle l'indice de nilpotence de u (de A).

Proposition 5.137

Toute matrice strictement triangulaire (supérieure ou inférieure) est nilpotente. Par conséquent, les matrices semblables à une matrice strictement triangulaire sont nilpotentes.

Démonstration 5.138

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice strictement triangulaire :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & ? & \dots & ? \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $\chi_A = X^n$ et $\chi_A(A) = 0$ donc $A^n = 0$. ■

Dans la décomposition en sous-espaces caractéristiques, on a vu apparaître des matrices $\lambda I_r + U$: les matrices U sont nilpotentes.

L'ensemble des matrices nilpotentes n'a pas de structure particulière : en général, la somme et le produit de deux matrices nilpotentes ne sont pas nilpotents. Néanmoins, avec une condition de commutation supplémentaire, on a quelques résultats.

Proposition 5.139

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices nilpotentes.

Si A et B commutent, alors $A + B$ et AB sont nilpotentes.

Démonstration 5.140

Soit $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ tel que $A^k = 0$ et $B^\ell = 0$.

Supposons $AB = BA$.

On a

$$\begin{aligned} (AB)^{\min(k, \ell)} &= A^{\min(k, \ell)} B^{\min(k, \ell)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (A + B)^{k+\ell} &= \sum_{i=0}^{k+\ell} \binom{k+\ell}{i} A^i B^{k+\ell-i} \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k+\ell}{i} A^i \underbrace{B^{k+\ell-i}}_{=0} + \sum_{i=k+1}^{k+\ell} \binom{k+\ell}{i} \underbrace{A^i}_{=0} B^{k+\ell-i} \\ &= 0. \end{aligned}$$
■

On a bien sûr les mêmes résultats concernant les endomorphismes nilpotents.

5.9.2 Éléments propres d'un nilpotent

Proposition 5.141

Un endomorphisme en dimension n est nilpotent ssi son polynôme caractéristique est X^n , i.e. s'il est scindé et admet 0 comme unique valeur propre.

Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente ssi son polynôme caractéristique est X^n , i.e. si elle est scindée et admet 0 comme unique valeur propre.

L'indice de nilpotence dans ces deux cas est alors le degré du polynôme minimal ; il est donc inférieur ou égal à n .

Démonstration 5.142

Si f est nilpotent alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k = 0$ donc X^k est annulateur de f donc $\text{Sp}(f) = \{0\}$ donc $\chi_f = X^n$.

Réciproquement, si $\chi_f = X^n$, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $f^n = 0$ donc f est nilpotent.

Or $\mu_f \mid \chi_f$ donc μ_f est de la forme X^ℓ avec $\ell \leq n$ et par définition de μ_f , ℓ est l'indice de nilpotence de f . ■

Mis à part la matrice nulle, aucune matrice nilpotente n'est diagonalisable : c'est une idée parfois utile pour prouver qu'une matrice est nulle (diagonalisable et nilpotente implique nulle).

Proposition 5.143

Tout endomorphisme nilpotent est trigonalisable : il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure stricte. Réciproquement, si un endomorphisme est trigonalisable et n'a que 0 pour valeur propre, alors il est nilpotent.

Toute matrice nilpotente est trigonalisable : elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte. La réciproque est vraie.

5.9.3 Application aux sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme

Proposition 5.144

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Pour toute valeur propre λ de f , si α est l'ordre de multiplicité de λ dans le polynôme minimal de f , le sous-espace caractéristique associé est aussi le noyau $\ker(f - \lambda \text{id}_E)^\alpha$.

Lemme 5.145

Si $F_1, \dots, F_k, G_1, \dots, G_k$ vérifient $\bigoplus_{i=1}^k F_i = \bigoplus_{i=1}^k G_i$ et pour tout $i \in \llbracket 1 ; k \rrbracket$, $F_i \subseteq G_i$, alors pour tout $i \in \llbracket 1 ; k \rrbracket$, $F_i = G_i$.

Démonstration 5.146

Soient $i \in \llbracket 1 ; k \rrbracket$ et $x \in G_i$.

On a $x \in \bigoplus_{j=1}^k G_j = \bigoplus_{j=1}^k F_j$.

Donc il existe $(y_1, \dots, y_k) \in F_1 \times \dots \times F_k$ tel que

$$\underbrace{x}_{\in G_i} = \underbrace{y_1}_{\in F_1 \subseteq G_1} + \dots + \underbrace{y_k}_{\in F_k \subseteq G_k}.$$

Or la somme $\bigoplus_{j=1}^k G_j$ est directe donc par unicité

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = 0 \\ \vdots \\ y_{i-1} = 0 \\ y_i = x \\ y_{i+1} = 0 \\ \vdots \\ y_k = 0 \end{array} \right.$$

Donc $x = y_i \in F_i$.

Donc $F_i \subseteq G_i$.

Donc $F_i = G_i$. ■

Démonstration 5.147 (de la Proposition 5.144)

On note $\chi_f = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et $\mu_f = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{\beta_i}$ où pour tout $i \in \llbracket 1 ; k \rrbracket$, $\alpha_i \geq \beta_i \geq 1$.

On veut montrer que pour tout $i \in \llbracket 1 ; k \rrbracket$, $\ker(f - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i} = \ker(f - \lambda_i \text{id}_E)^{\beta_i}$.

Comme $\beta_i \leq \alpha_i$, on a immédiatement pour tout $i \in \llbracket 1 ; k \rrbracket$, $\ker(f - \lambda_i \text{id}_E)^{\beta_i} \subseteq \ker(f - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i}$.

Comme $\mu_f(f) = \chi_f(f) = 0$, d'après le lemme des noyaux :

$$E = \bigoplus_{i=1}^k \ker(f - \lambda_i \text{id}_E)^{\beta_i} = \bigoplus_{i=1}^k \ker(f - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i}.$$

D'après le Lemme 5.145, on en déduit

$$\forall i \in \llbracket 1 ; k \rrbracket, \ker(f - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i} = \ker(f - \lambda_i \text{id}_E)^{\beta_i}. \quad \blacksquare$$

On peut même démontrer mieux.

Proposition 5.148

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \text{Sp}(f)$ et α l'ordre de multiplicité de λ dans le polynôme minimal de f .

Alors la suite des noyaux $\left(\ker(f - \lambda \text{id}_E)^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante jusqu'au rang α , puis constante à partir du rang α :

$$\{0\} \subsetneq \ker(f - \lambda \text{id}_E) \subsetneq \ker(f - \lambda \text{id}_E)^2 \subsetneq \dots \subsetneq \ker(f - \lambda \text{id}_E)^\alpha = \ker(f - \lambda \text{id}_E)^{\alpha+1} = \dots$$

Chapitre 6

Intégrales généralisées

Sommaire

Fonctions continues par morceaux sur un intervalle197
6.1 Intégrales généralisées sur $[a ; +\infty[$197
6.1.1 Définition et exemples fondamentaux	197
6.1.2 Propriétés	199
6.1.3 Cas des fonctions réelles positives	201
6.1.4 Théorème de comparaison entre fonctions positives	202
6.1.5 Lien avec les séries	205
6.2 Intégrales généralisées sur d'autres types d'intervalles209
6.2.1 Intégrales généralisées sur $[a ; b[$	209
6.2.2 Intégrales généralisées sur $]a ; b]$	209
6.2.3 Intégrales généralisées sur $]a ; b[$	211
6.2.4 Propriétés communes à toutes ces intégrales	213
6.2.4.1 Changement de variable	213
6.2.4.2 Intégration par parties	216
6.2.4.3 Primitives	218
6.3 Résumé pour étudier la convergence d'une intégrale219
6.4 Fonctions intégrables sur un intervalle221
6.4.1 Intégrales absolument convergentes	221
6.4.2 Fonctions intégrables	223
6.4.3 Théorème de comparaison des fonctions intégrables	224
6.5 Intégration des relations de comparaison225
6.5.1 Théorème de comparaison par domination	226
6.5.2 Théorème de comparaison par équivalence	227

Dans ce chapitre, \mathbb{K} désigne l'ensemble \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Les fonctions considérées dans ce chapitre sont à valeurs dans \mathbb{K} .

On suppose connue la notion d'intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux à valeurs réelles ou complexes (*cf.* cours de première année).

Si f est une fonction continue sur un segment $[a ; b]$ (ou $[b ; a]$), on note $\int_a^b f = \int_a^b f(t) dt$ (ou toute autre lettre à la place de t) l'intégrale de f entre a et b : quand on a pas besoin de nommer la variable d'intégration, on ne la note pas, mais si on la note alors on n'oublie pas l'élément différentiel.

En préambule, on généralise la notion de fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque.

Fonctions continues par morceaux sur un intervalle

Définition 6.1

Soit I un intervalle quelconque.

On dit qu'une fonction est continue par morceaux sur I quand elle est continue par morceaux sur tout segment inclus dans I .

Exemple 6.2

- La fonction $t \mapsto \begin{cases} -\ln t & \text{si } t \in]0 ; 1] \\ e^{-t} & \text{si } t \in [1 ; +\infty[\end{cases}$ est continue par morceaux sur $]0 ; +\infty]$.
- La fonction $t \mapsto \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor$ est continue par morceaux sur $]0 ; +\infty]$.

Dans toute la suite, on note $\mathcal{C}_m^0(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I et à valeurs dans \mathbb{K} .

Proposition 6.3

L'ensemble $\mathcal{C}_m^0(I, \mathbb{K})$ est une \mathbb{K} -algèbre.

6.1 Intégrales généralisées sur $[a ; +\infty[$

Dans cette section, a est un réel.

6.1.1 Définition et exemples fondamentaux

Définition 6.4

Soit $f \in \mathcal{C}_m^0([a ; +\infty[, \mathbb{K})$.

On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge (ou qu'elle est convergente, ou simplement qu'elle existe) quand $\int_a^x f$ a une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

Dans ce cas, on pose $\int_a^{+\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f$.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty}$ diverge (ou qu'elle est divergente).

Remarque 6.5

Une intégrale généralisée $\int_a^{+\infty}$ est une limite et une limite n'existe pas toujours. Avant d'utiliser une telle intégrale dans un raisonnement ou un calcul, on doit donc toujours justifier son existence !

Les résultats ci-dessous sont à connaître.

Exemple 6.6

- Soit α un réel. L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge ssi $\alpha > 0$.
- Soit α un réel. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge ssi $\alpha > 1$ (intégrale dite de Riemann).

Démonstration 6.7

- La fonction $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est continue sur $[0 ; +\infty[$.

Pour $x \geq 0$, si $\alpha \neq 0$, on a

$$\int_0^x e^{-\alpha t} dt = \left[\frac{1}{-\alpha} e^{-\alpha t} \right]_0^x = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha x}).$$

Donc si $\alpha > 0$, on a

$$\int_0^x e^{-\alpha t} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha}$$

et si $\alpha < 0$, on a

$$\int_0^x e^{-\alpha t} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

De plus, si $\alpha = 0$, on a

$$\int_0^x e^{-\alpha t} dt = x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Donc $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge ssi $\alpha > 0$ et, dans ce cas, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}$.

- La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $[1 ; +\infty[$.

Pour $x \geq 1$, si $\alpha \neq 1$, on a

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \int_1^x t^{-\alpha} dt = \left[\frac{1}{-\alpha + 1} t^{-\alpha+1} \right]_1^x = \frac{1}{\alpha - 1} (1 - x^{-\alpha+1}).$$

Donc si $\alpha > 1$, on a

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha - 1}$$

et si $\alpha < 1$, on a

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

De plus, si $\alpha = 1$ alors

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \ln x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge ssi $\alpha > 1$ et, dans ce cas, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha - 1}$. ■

Exercice 6.8

Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$?

Correction 6.9

La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0 ; +\infty[$.

Pour $x \geq 0$, on a

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = [\operatorname{Arctan} t]_0^x = \operatorname{Arctan} x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$$

.

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 6.10

Quelle est la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t} dt$.

Correction 6.11

La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ est continue sur $[1 ; +\infty[$.

Pour $x \geq 1$, on a

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t} dt = \left[\frac{\ln^2 t}{2} \right]_1^x = \frac{\ln^2 x}{2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t} dt$ diverge.

6.1.2 Propriétés

La convergence de l'intégrale ne dépend pas de la borne a , ce qui généralise la relation de Chasles.

Proposition 6.12

Soient $f \in \mathcal{C}_m^0([a ; +\infty[, \mathbb{K})$ et $b \in [a ; +\infty[$.

Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge ssi $\int_b^{+\infty} f$ converge.

Dans ce cas, on a $\int_a^{+\infty} f = \int_a^b f + \int_b^{+\infty} f$.

Démonstration 6.13

Soit $x \geq a$.

Par relation de Chasles sur les intégrales classiques, on a

$$\int_a^x f = \underbrace{\int_a^b f}_{\in \mathbb{K}} + \int_b^x f.$$

Donc $\int_a^x f$ a une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$ ssi $\int_b^x f$ a une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$ par opération sur les limites.

Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} f &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_a^b f + \int_b^x f \right) \\ &= \int_a^b f + \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_b^x f \\ &= \int_a^b f + \int_b^{+\infty} f. \end{aligned}$$

■

Dans le cas convergent, on retrouve la linéarité.

Proposition 6.14

Soient $(f, g) \in \mathcal{C}_m^0([a; +\infty[, \mathbb{K})^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

Si les intégrales $\int_a^{+\infty} f$ et $\int_a^{+\infty} g$ convergent, alors $\int_a^{+\infty} (\lambda f + \mu g)$ converge.

Dans ce cas, on a $\int_a^{+\infty} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^{+\infty} f + \mu \int_a^{+\infty} g$.

Démonstration 6.15

Pour $x \geq 0$, on a

$$\int_a^x (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^x f + \mu \int_a^x g$$

par linéarité de l'intégrale classique.

Puis, d'après les théorèmes d'opérations sur les limites, si $\int_a^{+\infty} f$ et $\int_a^{+\infty} g$ convergent, les deux fonctions $x \mapsto \int_a^x f$ et $x \mapsto \int_a^x g$ ont des limites finies en $+\infty$ donc $x \mapsto \lambda \int_a^x f + \mu \int_a^x g$ en a une aussi, i.e. $\int_a^{+\infty} (\lambda f + \mu g)$ converge.

Dans ce cas, $\int_a^{+\infty} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^{+\infty} f + \mu \int_a^{+\infty} g$.

■

Remarque 6.16

- ▷ « La somme d'une intégrale convergente et d'une divergente est divergente ».
- ▷ Il n'y a rien à dire *a priori* sur la « somme de deux intégrales divergentes ».

Démonstration 6.17

Montrons que si $\int_a^{+\infty} f$ converge et $\int_a^{+\infty} g$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} (f + g)$ diverge.

Par l'absurde, si $\int_a^{+\infty} (f + g)$ converge alors comme $g = (f + g) - f$, d'après la proposition précédente, $\int_a^{+\infty} g$ converge : contradiction. ■

6.1.3 Cas des fonctions réelles positives

Quand une fonction f est positive et continue par morceaux, dans le cas où l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ diverge, on pose par convention $\int_a^{+\infty} f = +\infty$, ce qui permet de donner un sens à toutes les intégrales de fonctions positives.

Proposition 6.18

Soit $f \in \mathcal{C}_m^0([a ; +\infty[, \mathbb{R})$.

Si $f \geq 0$, alors $\int_a^{+\infty} f \geq 0$.

Si, de plus, f est continue et prend au moins une valeur strictement positive, alors $\int_a^{+\infty} f > 0$.

Ceci est vrai en particulier quand f est continue et strictement positive sur $[a ; +\infty[$.

Démonstration 6.19

- ▷ Si $f \geq 0$ sur $[a ; +\infty[$, alors pour tout $x \in [a ; +\infty[$, $f \geq 0$ sur $[a ; x]$.

Donc par positivité de l'intégrale classique, $\int_a^x f \geq 0$.

Donc si $\int_a^{+\infty} f$ diverge, alors

$$\int_a^{+\infty} f = +\infty \geq 0$$

et si $\int_a^{+\infty} f$ converge, on a

$$\int_a^{+\infty} f \geq 0$$

par passage à la limite quand $x \rightarrow +\infty$.

- Si f est continue, positive et prend au moins une valeur strictement positive en x_0 , pour $x \geq x_0 + 1$, on a

$$\int_a^x f = \int_a^{x_0+1} f + \int_{x_0+1}^x f.$$

D'après le théorème de stricte positivité de l'intégrale classique, comme f est continue et positive sur $[a ; x_0 + 1]$, $f(x_0) > 0$ et $x_0 \in [a ; x_0 + 1]$, on a $\int_a^{x_0+1} f > 0$.

Or $\int_{x_0+1}^x f \geq 0$ donc $\int_a^x f \geq \int_a^{x_0+1} f$.

Par passage à la limite quand $x \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\int_a^{+\infty} f \geq \int_a^{x_0+1} f > 0.$$

■

Remarque 6.20 (Contraposée)

Si f est continue et positive sur $[a ; +\infty[$ et $\int_a^{+\infty} f = 0$, alors $f = 0$ sur $[a ; +\infty[$.

On en déduit la propriété de croissance des intégrales.

Proposition 6.21

Soit $(f, g) \in \mathcal{C}_m^0([a ; +\infty[, \mathbb{R})^2$ tel que f et g soient positives.

Si $f \leq g$, alors $\int_a^{+\infty} f \leq \int_a^{+\infty} g$.

6.1.4 Théorème de comparaison entre fonctions positives

D'abord une condition nécessaire et suffisante de convergence dans le cas d'une fonction positive.

Proposition 6.22

Soit $f \in \mathcal{C}_m^0([a ; +\infty[, \mathbb{R})$.

Si $f \geq 0$, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge ssi la fonction $x \mapsto \int_a^x f$ est majorée.

Démonstration 6.23

Si $f \geq 0$ sur $[a ; +\infty[$, alors $x \mapsto \int_a^x f$ est croissante sur $[a ; +\infty[$.

Donc pour $(x, y) \in [a ; +\infty[^2$ tel que $x \geq y$, on a

$$\int_a^x f = \int_a^y f + \int_y^x f \geq \int_a^y f.$$

Donc $\int_a^{+\infty} f$ converge ssi la fonction croissante $x \mapsto \int_a^x f$ a une limite finie en $+\infty$ ssi la fonction croissante $x \mapsto \int_a^x f$ est majorée, par théorème de la limite monotone. ■

On en déduit un théorème de comparaison du même type que celui sur les séries.

Théorème 6.24

Soit $(f, g) \in \mathcal{C}_m^0([a ; +\infty[, \mathbb{R})^2$ tel que f et g soient positives.

- Si $f \leq g$ et $\int_a^{+\infty} g$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.
- Si $f \leq g$ et $\int_a^{+\infty} f$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} g$ diverge.
- Si $f \underset{+\infty}{\sim} g$ alors les intégrales $\int_a^{+\infty} f$ et $\int_a^{+\infty} g$ sont de même nature : l'une converge ssi l'autre converge.

Démonstration 6.25

- Si $0 \leq f \leq g$ sur $[a ; +\infty[$, alors pour tout $x \in [a ; +\infty[$, $\int_a^x f \leq \int_a^x g$.

Donc si $\int_a^{+\infty} g$ converge, alors $x \mapsto \int_a^x g$ est majorée d'après la Proposition 6.22.

Donc $x \mapsto \int_a^x f$ est majorée.

Donc $\int_a^{+\infty} f$ converge d'après la Proposition 6.22.

- Par contraposée, si $\int_a^{+\infty} f$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} g$ diverge.
- Si $f \underset{+\infty}{\sim} g$, il existe une fonction φ définie au voisinage de $+\infty$ telle que $f = g\varphi$ et $\varphi \xrightarrow{+\infty} 1$.

Comme $\varphi \xrightarrow{+\infty} 1$, au voisinage de $+\infty$, on a $\frac{1}{2} \leq \varphi \leq \frac{3}{2}$.

Donc, au voisinage de $+\infty$, on a $0 \leq \frac{1}{2}g \leq \varphi g = f \leq \frac{3}{2}g$.

D'après ce qui précède, si $\int_a^{+\infty} f$ converge, alors $\int_a^{+\infty} \frac{1}{2}g$ converge donc $\int_a^{+\infty} g = 2 \int_a^{+\infty} \frac{1}{2}g$ converge et si $\int_a^{+\infty} f$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} \frac{3}{2}g$ diverge donc $\int_a^{+\infty} g = \frac{2}{3} \int_a^{+\infty} \frac{3}{2}g$ diverge. ■

Remarque 6.26

- ▷ Dans ce théorème, il suffit que les inégalités soient vraies au voisinage de $+\infty$ seulement.
- ▷ Si les fonctions sont à valeurs négatives, on se ramène à ce théorème en travaillant avec les fonctions opposées. Ce qui compte est donc qu'elles soient de signe constant.
- ▷ Avec des fonctions dont le signe n'est pas constant, ce théorème est faux. Il faut donc bien s'assurer et mettre en valeur que les fonctions sont positives (ou négatives).
- ▷ On compare les fonctions, pas les intégrales ! N'écrivez pas des symboles $\int_a^{+\infty} \cdots$ partout.

Exercice 6.27

Montrez que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge.

Correction 6.28

Les fonctions $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ et $t \mapsto e^{-t}$ sont continues sur $[1 ; +\infty[$.

Pour tout $t \geq 1$, $0 \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t}$ or $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ converge donc par comparaison de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge.

Exercice 6.29

Montrez que $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln t} dt$ diverge.

Correction 6.30

La fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur $[2 ; +\infty[$.

Pour $t \geq 2$, on a $\frac{1}{\ln t} \geq \frac{1}{t} \geq 0$ car $\forall t > 0$, $\ln t \leq t - 1 \leq t$ car \ln est concave.

Or $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ diverge donc par comparaison de fonctions positives, $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln t} dt$ diverge.

Exercice 6.31

Montrez que pour tout $\alpha > 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} dt$ converge.

Correction 6.32

Pour tout $\alpha > 1$, $t \mapsto \frac{\ln t}{t^\alpha}$ est continue sur $[1; +\infty[$.

- Si $\alpha > 2$, comme on a $0 \leq \frac{\ln t}{t^\alpha} \leq \frac{t}{t^\alpha} = \frac{1}{t^{\alpha-1}}$ pour $t \in [1; +\infty[$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha-1}} dt$ converge (car $\alpha - 1 > 1$), on en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} dt$ converge.
- Il existe $a > 1$ tel que pour tout $t \in [a; +\infty[$, $0 \leq \ln t \leq t^{\alpha-1/2}$ car $\ln t \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(t^{\alpha-1/2}\right)$ car $\frac{\alpha-1}{2} > 0$.

Donc pour tout $t \in [a; +\infty[$, $0 \leq \frac{\ln t}{t^\alpha} \leq \frac{t^{\alpha-1/2}}{t^\alpha} = \frac{1}{t^{\alpha+1/2}}$.

Comme $\alpha > 1$, $\frac{\alpha+1}{2} > 1$ donc $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha+1/2}} dt$ converge.

Donc $\int_a^{+\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} dt$ converge *i.e.* $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} dt$ converge.

6.1.5 Lien avec les séries

Le théorème de comparaison série-intégrale peut se réécrire comme suit.

Proposition 6.33

Soit $f \in \mathcal{C}_m^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ positive et décroissante.

La série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ sont de même nature.

Dans le même genre, on peut étudier la convergence d'une intégrale d'une fonction positive par l'intermédiaire d'une série.

Proposition 6.34

Soient $f \in \mathcal{C}_m^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ positive et u une suite positive et strictement croissante qui diverge vers $+\infty$.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ converge ssi la série $\sum_{n \geq 0} \int_{u_n}^{u_{n+1}} f$ converge.

Démonstration 6.35

\Rightarrow

Si $f \geq 0$ sur $[0 ; +\infty[$, alors $F : x \mapsto \int_0^x f$ est croissante.

Donc si $\int_0^{+\infty} f$ converge, alors $\int_0^x f$ a une limite réelle ℓ quand $x \rightarrow +\infty$.

Donc comme $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$, on a $\int_0^{u_n} f \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.

Or $\int_0^{u_n} f = \int_0^{u_0} f + \int_{u_0}^{u_1} f + \dots + \int_{u_{n-1}}^{u_n} f$ donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} f \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell - \int_0^{u_0} f$$

i.e. la série $\sum_n \int_{u_n}^{u_{n+1}} f$ converge.

\Leftarrow

Si la série $\sum_n \int_{u_n}^{u_{n+1}} f$ converge, $\sum_{k=0}^{n-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} f = F(u_n) - F(u_0)$ a une limite réelle quand $n \rightarrow +\infty$ i.e. $(F(u_n))$ a une limite réelle.

Or F est croissante donc d'après le théorème de la limite monotone, F a une limite $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en $+\infty$.

D'après la caractérisation séquentielle de la limite, on a $F(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} L$ car $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

Donc $L \in \mathbb{R}$. Donc $\int_0^{+\infty} f$ converge. ■

Remarque 6.36

L'hypothèse de positivité de f est essentielle.

Contre-exemple si on ne suppose rien sur le signe de f :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \sin = 0$ donc $\sum \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \sin$ converge mais $\int_0^x \sin = 1 - \cos x$ n'a pas de limite quand $x \rightarrow +\infty$ i.e. $\int_0^{+\infty} \sin$ diverge.

Exercice 6.37

Montrez que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$ diverge.

Correction 6.38

La fonction $t \mapsto \frac{|\sin t|}{t}$ est continue sur $[1 ; +\infty[$.

D'après la Proposition 6.34, $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$ converge ssi la série $\sum_n \int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{|\sin t|}{t} dt$ converge, où (u_n) est une suite positive et strictement croissante.

On prend $u_n = n\pi$ pour $n \geq 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{(n+1)\pi} dt$ car

$$\begin{aligned} \forall t \in [n\pi ; (n+1)\pi], \quad n\pi \leq t \leq (n+1)\pi \text{ donc } \frac{1}{(n+1)\pi} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{n\pi} \\ \text{donc } \frac{|\sin t|}{(n+1)\pi} \leq \frac{|\sin t|}{t} \leq \frac{|\sin t|}{n\pi}. \end{aligned}$$

Donc on a

$$\begin{aligned} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt &\geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| dt \\ &= \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^\pi |\sin t| dt \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} t \mapsto |\sin t| \text{ est } \pi\text{-périodique} \\ &= \frac{2}{(n+1)\pi}. \end{aligned}$$

Or $\sum_n \frac{2}{(n+1)\pi}$ diverge donc $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$ diverge.

Exercice 6.39

En utilisant l'inégalité $\sin t \geq \frac{2}{\pi}t$, valable pour tout $t \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$, montrez que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + e^x |\sin x|} dx$ converge.

Correction 6.40

La fonction $x \mapsto \frac{1}{1 + e^x |\sin x|}$ est continue et positive sur $[0 ; +\infty[$ donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + e^x |\sin x|} dx$ converge

ssi la série $\sum_n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{1 + e^x |\sin x|} dx$ converge.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{1 + e^x |\sin x|} dx &\quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} \begin{cases} x = t + n\pi \\ dx = dt \end{cases} \\ = \int_0^\pi \frac{1}{1 + e^{t+n\pi} |\sin t|} dt. \end{aligned}$$

Or, comme on a $\forall t \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2}{\pi}t \leq \sin t$, on a

$$1 + e^{n\pi} \frac{2}{\pi} t \leq 1 + e^{t+n\pi} \frac{2}{\pi} t \leq 1 + e^{t+n\pi} \sin t$$

donc

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + e^{t+n\pi} |\sin t|} dt &\leq \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + e^{t+n\pi} \frac{2}{\pi} t} dt \\ &\leq \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + e^{n\pi} \frac{2}{\pi} t} dt \\ &= \left[\frac{\ln \left(1 + e^{n\pi} \frac{2}{\pi} t \right)}{e^{n\pi} \frac{2}{\pi}} \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{\ln (1 + e^{n\pi})}{e^{n\pi}}. \end{aligned}$$

De même, on a $\forall t \in \left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$, $\frac{2}{\pi}(\pi - t) \leq \sin t$ donc

$$\begin{aligned} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{1 + e^{t+n\pi} \sin t} dt &\leq \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{1 + e^{n\pi} \frac{2}{\pi} (\pi - t)} dt \\ &= \left[\frac{\ln \left(1 + e^{n\pi} \frac{2}{\pi} (\pi - t) \right)}{-e^{n\pi} \frac{2}{\pi}} \right]_{\pi/2}^{\pi} \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{\ln (1 + e^{n\pi})}{e^{n\pi}}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{1 + e^x |\sin x|} dx \leq \pi \frac{\ln (1 + e^{n\pi})}{e^{n\pi}} = a_n.$$

Or $1 + e^{n\pi} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{n\pi} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ donc $\ln (1 + e^{n\pi}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln (e^{n\pi}) = n\pi$.

Donc $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \pi^2 \frac{n}{e^{n\pi}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc $\sum a_n$ converge.

Donc $\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{1 + e^x |\sin x|} dx$ converge.

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + e^x |\sin x|} dx$ converge.

6.2 Intégrales généralisées sur d'autres types d'intervalles

6.2.1 Intégrales généralisées sur $[a ; b[$

Dans cette partie, a est un réel et b est un réel ou $+\infty$, de sorte que $a < b$.

Définition 6.41

Soit $f \in \mathcal{C}_m^0([a ; b[, \mathbb{K})$.

On dit que l'intégrale $\int_a^b f$ converge quand $\int_a^x f$ a une limite finie quand x tend vers b^- .

Dans ce cas, on pose $\int_a^b f = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f$.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f$ diverge (ou qu'elle est divergente).

6.2.2 Intégrales généralisées sur $]a ; b]$

Dans cette partie, a est un réel ou $-\infty$ et b un réel, de sorte que $a < b$.

Définition 6.42

Soit $f \in \mathcal{C}_m^0(]a ; b], \mathbb{K})$.

On dit que l'intégrale $\int_a^b f$ converge quand $\int_x^b f$ a une limite finie quand x tend vers a^+ .

Dans ce cas, on pose $\int_a^b f = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f$.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f$ diverge (ou qu'elle est divergente).

Les résultats suivants sont à connaître.

Exemple 6.43

▷ $\int_0^1 \ln(t) dt$ converge.

▷ Soit α un réel. L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge ssi $\alpha < 1$ (intégrale dite de Riemann).

Démonstration 6.44

► La fonction \ln est continue sur $]0 ; 1]$.

Pour $x \in]0 ; 1]$, on a

$$\int_x^1 \ln(t) dt = [t \ln t - t]_x^1 = -1 - x \ln x + x.$$

Or $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ donc $\int_x^1 \ln(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1$.

Donc $\int_0^1 \ln(t) dt$ converge et vaut -1 .

► La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $]0 ; 1]$.

Pour $x \in]0 ; 1]$, on a

$$\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = \int_x^1 t^{-\alpha} dt = \left[\frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha} \right]_x^1 = \frac{1}{1-\alpha} (1 - x^{1-\alpha}).$$

Donc

$$\begin{cases} \int_x^1 \frac{1}{t^\alpha} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1 \\ \int_x^1 \frac{1}{t^\alpha} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty & \text{si } \alpha > 1 \\ \int_x^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = -\ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Donc $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge ssi $\alpha < 1$ et vaut $\frac{1}{1-\alpha}$. ■

Exercice 6.45

Montrez que l'intégrale $\int_1^2 \frac{1}{\ln t} dt$ diverge.

À quelle condition sur α l'intégrale $\int_1^2 \frac{(t-1)^\alpha}{\ln t} dt$ converge-t-elle ?

Correction 6.46

► La fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur $]1 ; 2]$.

On veut montrer que $\int_1^2 \frac{1}{\ln t} dt$ diverge *i.e.* $\int_x^2 \frac{1}{\ln t} dt$ n'a pas de limite réelle quand $x \rightarrow 1^+$.

On effectue le changement de variable $\begin{cases} s = \ln t \\ ds = \frac{dt}{t} \end{cases} \iff \begin{cases} t = e^s \\ dt = e^s ds \end{cases}$

On a ramené le problème à la non-existence d'une limite réelle de $\int_X^{\ln 2} \frac{e^s}{s} ds$ quand $X \rightarrow 0$

i.e. à la divergence de $\int_0^{\ln 2} \frac{e^s}{s} ds$.

Or pour tout $s > 0$, $\frac{e^s}{s} \geq \frac{1}{s} \geq 0$ et $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{s} ds$ diverge.

Donc par comparaison de fonctions positives, $\int_0^{\ln 2} \frac{e^s}{s} ds$ diverge *i.e.* $\int_1^2 \frac{1}{\ln t} dt$ diverge.

► Autre méthode :

Pour tout $t > 1$, $\ln t \leq t - 1$ donc $0 \leq \frac{1}{t-1} \leq \frac{1}{\ln t}$.

Or $\int_1^2 \frac{1}{t-1} dt = \int_0^1 \frac{1}{t} dt$ diverge.

Donc par comparaison de fonctions positives, $\int_1^2 \frac{1}{\ln t} dt$ diverge.

► La fonction $t \mapsto \frac{(t-1)^\alpha}{\ln t}$ est continue et positive sur $]1; 2]$.

On a $\frac{(t-1)^\alpha}{\ln t} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} (t-1)^{\alpha-1} = \frac{1}{(t-1)^{1-\alpha}}$ car $\ln t \underset{t \rightarrow 1}{\sim} t-1$.

Donc $\int_1^2 \frac{(t-1)^\alpha}{\ln t} dt$ converge ssi $1-\alpha < 1$ *i.e.* $\alpha > 0$.

On peut remarquer que par changement de variable $x \mapsto -x$, l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est de même nature (et, dans le cas convergent, a la même valeur) que $\int_{-b}^{-a} f(-u) du$. Les résultats valables en un point réel ne dépendent donc pas du côté du point où on se place.

Exemple 6.47

► Si a est un réel, alors $\int_a^{a+1} \frac{1}{(t-a)^\alpha} dt$ converge ssi $\alpha < 1$.

► Si a est un réel, alors $\int_{a-1}^a \frac{1}{(a-t)^\alpha} dt$ converge ssi $\alpha < 1$.

► $\int_0^1 \ln(1-t) dt$ converge.

6.2.3 Intégrales généralisées sur $]a; b[$

Dans cette partie, a et b sont des réels ou des infinis tels que $a < b$.

Définition 6.48

Soit $f \in \mathcal{C}_m^0(]a; b[, \mathbb{K})$.

On dit que l'intégrale $\int_a^b f$ converge quand il existe $c \in]a; b[$ tel que $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ convergent.

Dans ce cas, on pose $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^c f + \lim_{y \rightarrow b^-} \int_c^y f$.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f$ diverge (ou qu'elle est divergente).

Remarque 6.49

Grâce à la relation de Chasles, on constate que la valeur de c n'est finalement pas importante : si ça marche pour un certain réel $c \in]a ; b[$, alors ça marche pour toute autre valeur prise dans $]a ; b[$.

Exercice 6.50

Montrez que l'intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge.

Correction 6.51

La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue et positive sur $]-\infty ; +\infty[$.

$\int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge car pour tout $t \in [1 ; +\infty[$, $t^2 \geq t$ donc $0 \leq e^{-t^2} \leq e^{-t}$ et $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ converge.

Or $t \mapsto e^{-t^2}$ est paire donc $\int_{-\infty}^{-1} e^{-t^2} dt$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt$ donc elle converge.

Finalement, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge.

Exercice 6.52

Même chose avec l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$.

Correction 6.53

La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ est continue et positive sur $]0 ; 1[$.

Pour tout $t \in \left]0 ; \frac{1}{2}\right]$, $0 \leq \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \leq \frac{2}{\sqrt{t}} = \frac{2}{t^{1/2}}$.

Or $\int_0^{1/2} \frac{1}{t^{1/2}} dt$ converge donc $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$ converge.

Pour tout $t \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right[$, $0 \leq \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \leq \frac{2}{\sqrt{1-t}} = \frac{2}{(1-t)^{1/2}}$.

Or $\int_{1/2}^1 \frac{1}{(1-t)^{1/2}} dt$ converge donc $\int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$ converge.

Finalement, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$ converge.

Exercice 6.54

Même chose avec l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$.

Correction 6.55

La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est continue et positive sur $]0 ; +\infty[$.

Pour tout $t \geq 1$, $0 \leq \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \leq e^{-t}$ et $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ converge donc $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ converge.

On a $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ et $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ converge donc $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ converge.

Finalement, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ converge.

Exercice 6.56

Montrez que pour tout $\alpha > 0$, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ diverge.

Correction 6.57

Clair.

6.2.4 Propriétés communes à toutes ces intégrales

Toutes les propriétés vues dans la première section sont préservées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.

En voici trois autres.

6.2.4.1 Changement de variable

Proposition 6.58

Soient a, b, α, β des réels ou des infinis tels que $a < b$ et $\alpha < \beta$ et $f \in \mathcal{C}_m^0(]a ; b[, \mathbb{K})$.

Si φ est une bijection de classe \mathcal{C}^1 et strictement croissante de $]a ; \beta[$ dans $]a ; b[$, alors les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_\alpha^\beta f \circ \varphi(u) \varphi'(u) du$ sont de même nature et, si elles sont convergentes, sont égales.

Démonstration 6.59

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < x \leq y < b$.

D'après la formule classique du changement de variable, on a

$$\int_x^y f(t) dt = \int_{\varphi^{-1}(x)}^{\varphi^{-1}(y)} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du.$$

On a $\varphi^{-1}(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \alpha$ et $\varphi^{-1}(y) \xrightarrow{y \rightarrow b} \beta$.

Donc

$$\begin{aligned} \int_a^b f \text{ converge} &\iff \int_x^y f \text{ a une limite finie quand } x \rightarrow a^+ \text{ et } y \rightarrow b^- \\ &\iff \int_{\varphi^{-1}(x)}^{\varphi^{-1}(y)} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du \text{ a une limite finie quand } x \rightarrow a^+ \text{ et } y \rightarrow b^- \\ &\iff \int_\lambda^\mu f(\varphi(u)) \varphi'(u) du \text{ a une limite finie quand } \lambda \rightarrow \alpha^+ \text{ et } \mu \rightarrow \beta^- \\ &\iff \int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \varphi'(u) du \text{ converge.} \end{aligned}$$

■

Remarque 6.60

On a évidemment un résultat analogue avec un changement de variable strictement décroissant et des bornes inversées.

Comme une bijection de classe \mathcal{C}^1 entre deux intervalles est forcément strictement monotone, l'hypothèse de stricte monotonie est redondante ; mais comme elle est explicitement dans le programme de MPI, il vaut mieux la préciser (de toute façon, elle sera évidente dans les cas pratiques et ne nécessitera pas de longues preuves).

Exercice 6.61

Montrez que $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan t} dt$ converge et qu'on a l'égalité $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{u}}{1+u^2} du$.

Correction 6.62

On effectue le changement de variable $u = \tan t$.

Sous réserve de convergence, on a

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{u}}{1+u^2} du.$$

Or, comme $u \mapsto \frac{\sqrt{u}}{1+u^2}$ est continue et positive sur $[0; +\infty[$ et $\frac{\sqrt{u}}{1+u^2} \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{u^{3/2}}$ et $\frac{3}{2} > 1$, $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{u}}{1+u^2} du$ converge.

Exercice 6.63

Montrez que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$ converge et vaut 0.

Déduisez-en la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2} dt$ où $a > 0$.

Correction 6.64

► La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$ est continue sur $]0 ; +\infty[$.

Sur $]0 ; 1]$, φ est négative et sur $[1 ; +\infty[$, φ est positive.

On a $\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln t$ et $\int_0^1 \ln(t) dt$ converge donc $\int_0^1 \varphi(t) dt$ converge par comparaison de fonctions à signe constant.

On a $\ln t \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(\sqrt{t})$ donc il existe $A > 0$ tel que pour tout $t \geq A$, $0 \leq \ln t \leq \sqrt{t}$ donc

$$0 \leq \frac{\ln t}{1+t^2} \leq \frac{\sqrt{t}}{1+t^2} \leq \frac{\sqrt{t}}{t^2} = \frac{1}{t^{3/2}}$$

.

Or $\frac{3}{2} > 1$ donc $\int_A^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} dt$ converge donc $\int_A^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$ converge et donc $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$ converge.

On veut montrer que $\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt = - \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$ de sorte que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt = 0$.

En effectuant le changement de variable $\begin{cases} t = \frac{1}{u} \\ dt = -\frac{1}{u^2} du \end{cases}$ (où $t \mapsto \frac{1}{t}$ est une bijection \mathcal{C}^1 strictement décroissante de $]0 ; 1]$ dans $[1 ; +\infty[$), on obtient

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt = \int_{+\infty}^1 \frac{\ln 1/u}{1+(1/u)^2} \left(-\frac{1}{u^2} \right) du = - \int_1^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2} du.$$

D'où l'égalité.

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt = 0$.

► Soit $a > 0$.

$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2} dt$ converge (idem).

On a

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2 + t^2} dt &= \frac{1}{a^2} \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1 + (t/a)^2} dt \\
 &= \frac{1}{a^2} \int_0^{+\infty} \frac{a \ln(au)}{1 + u^2} du \\
 &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{\ln a}{1 + u^2} du + \underbrace{\frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1 + u^2} du}_{=0} \\
 &= \frac{\pi \ln a}{2a}.
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\int_0^{+\infty}} \right\} \begin{cases} t = au \\ dt = a du \end{cases}$$

6.2.4.2 Intégration par parties

Si f est une fonction définie sur $]a ; b[$ et a des limites finies en a^+ et en b^- , on note $[f]_a^b = \lim_{b^-} f - \lim_{a^+} f$.

Proposition 6.65

Soient a, b des réels ou des infinis tels que $a < b$ et $(f, g) \in \mathcal{C}^1(]a ; b[, \mathbb{K})$.

Si parmi les trois quantités suivantes

$$\int_a^b f'g, \quad \int_a^b fg', \quad [fg]_a^b$$

deux existent, alors la troisième existe aussi et, dans ce cas, on a l'égalité habituelle

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

.

Démonstration 6.66

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < x \leq y < b$.

On a $\int_x^y fg' = [fg]_x^y - \int_x^y f'g$.

Si parmi les quantités $\int_x^y fg'$, $\int_x^y f'g$ et $[fg]_x^y = f(y)g(y) - f(x)g(x)$ deux ont des limites finies quand $x \rightarrow a$ et $y \rightarrow b$, alors la troisième aussi (par opération sur les limites).

Dans ce cas, les limites sont égales :

$$\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g.$$

■

En pratique, pour éviter d'écrire des choses qui n'ont pas de sens, il vaut mieux revenir à une vraie intégration par parties sur un segment $[x ; y] \subseteq]a ; b[$, s'assurer qu'on peut faire tendre x vers a et y vers b , puis le faire effectivement pour obtenir la relation entre les intégrales.

Exercice 6.67

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

Montrez que les intégrales u_n convergent, donnez une relation de récurrence simple entre u_n et u_{n+1} , puis donnez la valeur de u_n en fonction de n .

Correction 6.68

Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue sur $[0 ; +\infty[$.

Sous réserve de convergence, on pose $u_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ pour $n \in \mathbb{N}$.

On a $t^{n+2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(e^t)$ donc $t^n e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Donc il existe $a > 0$ tel que $\forall t \geq a, 0 \leq t^n e^{-t} \leq \frac{1}{t^2}$.

Or $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge donc $\int_a^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge et donc $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge.

Sous réserve de convergence, par intégration par parties, on a

$$\int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t} dt = [-t^{n+1} e^{-t}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} (n+1) t^n e^{-t} dt.$$

Les deux intégrales convergent d'après ce qui précède donc l'intégration par parties est licite.

Ainsi, comme $[-t^{n+1} e^{-t}]_0^{+\infty} = 0$, on a $u_{n+1} = (n+1) u_n$.

Or $u_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n!$ (récurrence immédiate).

Exercice 6.69

Montrez que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$ converge, puis déduisez-en que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.

Correction 6.70

► La fonction $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2}$ est continue sur $]0 ; +\infty[$.

Pour tout $t > 0$, $-1 \leq \cos t \leq 1$ donc $0 \leq 1 - \cos t \leq 2$ donc $0 \leq \frac{1 - \cos t}{t^2} \leq \frac{2}{t^2}$.

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge donc $\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$ converge.

On a $\cos t \underset{t \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ donc $1 - \cos t \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^2}{2}$ donc $\frac{1 - \cos t}{t^2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}$.

Or $\int_0^1 \frac{1}{2} dt$ converge donc $\int_0^1 \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$ converge.

Finalement, $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$ converge.

► Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < x \leq y$.

On a

$$\int_x^y \frac{1 - \cos t}{t^2} dt = \left[-\frac{1 - \cos t}{t} \right]_x^y + \int_x^y \frac{\sin t}{t} dt.$$

On sait déjà que $\int_x^y \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$ a une limite réelle quand $x \rightarrow 0$ et $y \rightarrow +\infty$.

De plus, on a $\left[-\frac{1 - \cos t}{t} \right]_x^y = \frac{1 - \cos x}{x} - \frac{1 - \cos y}{y}$.

Or $\frac{1 - \cos x}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$ et $\frac{1 - \cos y}{y} \underset{y \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{y}\right)$ donc $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos y}{y} = 0$ par encadrement.

Donc $\int_x^y \frac{\sin t}{t} dt$ a une limite réelle quand $x \rightarrow 0$ et $y \rightarrow +\infty$ i.e. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge (NB : elle se nomme intégrale de Dirichlet).

► On peut aussi montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$.

En effet, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt &= \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin^2 t/2}{t^2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin^2 u}{4u^2} du \quad \left\{ \begin{array}{l} t = 2u \\ dt = 2 du \end{array} \right. \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du. \end{aligned}$$

6.2.4.3 Primitives

Proposition 6.71

Soient $f \in \mathcal{C}_m^0(]a ; b[, \mathbb{K})$ et $c \in]a ; b[$ tel que l'intégrale $\int_a^c f$ converge.

Alors la fonction $x \mapsto \int_a^x f$ est l'unique primitive de f sur $]a ; b[$ qui a pour limite 0 en a^+ .

Démonstration 6.72

La fonction f est continue sur $]a ; b[$ donc elle possède une primitive F sur $]a ; b[$. Par exemple $F : x \mapsto \int_c^x f$ où $x \in]a ; b[$.

$\int_a^c f$ converge donc F a une limite finie en a^+ .

Donc

$$\begin{aligned}\forall x \in]a ; b[, \quad \int_a^x f &= \lim_{y \rightarrow a^+} \int_y^x f \\ &= \lim_{y \rightarrow a^+} (F(x) - F(y)) \\ &= F(x) - \underbrace{\lim_{y \rightarrow a^+} F(y)}_{\text{constante}}.\end{aligned}$$

Donc $x \mapsto \int_a^x f$ est une primitive de f sur $]a ; b[$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow a^+} \int_a^x f = \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) - \lim_{y \rightarrow a^+} F(y) = 0$. ■

Proposition 6.73

Soient $f \in \mathcal{C}_m^0(]a ; b[, \mathbb{K})$ et $c \in]a ; b[$ tel que $\int_c^b f$ converge.

Alors la fonction $x \mapsto \int_x^b f$ est l'opposée de l'unique primitive de f sur $]a ; b[$ qui a pour limite 0 en b^- .

Exemple 6.74

- La fonction $x \mapsto \int_0^x \ln(t) dt$ est la primitive de \ln qui a pour limite 0 en 0.
- La fonction $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^2} dt$ est définie sur $]0 ; +\infty[$, de classe \mathcal{C}^1 sur cet intervalle, et sa dérivée est la fonction $x \mapsto -\frac{e^{ix}}{x^2}$.

6.3 Résumé pour étudier la convergence d'une intégrale

On veut savoir si une intégrale $\int_a^b f$ existe, où a et b sont des réels ou des infinis tels que $a < b$.

D'abord, on détermine le plus grand sous-ensemble de $[a ; b]$ sur lequel f est continue par morceaux :

- si c'est $[a ; b]$, alors il n'y a aucun problème d'existence de l'intégrale : c'est une bête intégrale classique ;
- si c'est $[a ; b[$ (avec a réel) ou $]a ; b]$ (avec b réel), alors il faut étudier le comportement de f au voisinage du point ouvert ;
- si c'est $]a ; b[$, alors on choisit arbitrairement un point $c \in]a ; b[$ et on se ramène deux fois au cas précédent.

Un petit résultat qui supprime parfois le problème en un point ouvert réel : pensez à étudier la limite de la fonction : si elle est réelle, c'est réglé. On dit qu'on a une fausse singularité en ce point réel.

Proposition 6.75

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f \in \mathcal{C}_m^0(]a ; b[, \mathbb{K})$.

Si f a une limite réelle en a par valeurs supérieures, alors on peut prolonger f par continuité en a , le prolongement \bar{f} est une fonction continue par morceaux sur $[a ; b]$ et l'intégrale $\int_a^b f$ converge et vaut $\int_a^b \bar{f}$.

Remarque 6.76

Si f est continue par morceaux sur $[0 ; +\infty[$ et si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$, alors si $\ell \neq 0$, $\int_0^{+\infty} f$ diverge (grossièrement).

Exercice 6.77

Justifiez que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$ converge.

Correction 6.78

La fonction $t \mapsto \frac{\sin^2 t}{t^2}$ est continue sur $]0 ; +\infty[$.

On a $\sin t \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$ donc $\frac{\sin^2 t}{t^2} \underset{t \rightarrow 0}{\rightarrow} 1$ donc $\int_0^1 \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$ converge.

Pour tout $t \geq 1$, $0 \leq \frac{\sin^2 t}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$ or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$ converge.

Finalement, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$ converge.

Exercice 6.79

Montrez que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{1+t^3} dt$ converge.

6.4 Fonctions intégrables sur un intervalle

Dans cette section, a et b sont des réels ou des infinis tels que $a < b$. On note $I =]a ; b[$.

6.4.1 Intégrales absolument convergentes

Définition 6.80

Soit $f \in \mathcal{C}_m^0(I, \mathbb{K})$.

On dit que l'intégrale $\int_a^b f$ converge absolument (ou est absolument convergente) quand l'intégrale $\int_a^b |f|$ converge.

Le théorème suivant est primordial pour la suite du cours.

Théorème 6.81

Soit $f \in \mathcal{C}_m^0(I, \mathbb{K})$.

Si l'intégrale $\int_a^b f$ converge absolument, alors l'intégrale $\int_a^b f$ converge.

Dans ce cas, on a $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$.

Démonstration 6.82

► Si f est à valeurs réelles, on a $0 \leq f + |f| \leq 2|f|$.

Donc si $\int_a^b |f|$ converge, alors par comparaison de fonctions positives, $\int_a^b (f + |f|)$ converge.

Donc $\int_a^b f = \int_a^b (f + |f|) - \int_a^b |f|$ converge.

► Si f est à valeurs complexes, on a $|\operatorname{Re} f| \leq |f|$ et $|\operatorname{Im} f| \leq |f|$.

Donc si $\int_a^b |f|$ converge, $\int_a^b |\operatorname{Re} f|$ et $\int_a^b |\operatorname{Im} f|$ convergent par comparaison de fonctions positives.

Donc d'après ce qui précède, $\int_a^b \operatorname{Re} f$ et $\int_a^b \operatorname{Im} f$ convergent.

Donc $\int_a^b f = \int_a^b \operatorname{Re} f + i \int_a^b \operatorname{Im} f$ converge. ■

Exercice 6.83

Montrez que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^3} dt$ est absolument convergente et donc convergente.

Correction 6.84

La fonction $t \mapsto \frac{\sin^3 t}{t^3}$ est continue sur $]0 ; +\infty[$.

On a $\left| \frac{\sin^3 t}{t^3} \right| \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \left| \frac{t^3}{t^3} \right| \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$: fausse singularité en 0, donc $\int_0^1 \left| \frac{\sin^3 t}{t^3} \right| dt$ converge.

Pour tout $t \geq 1$, $\left| \frac{\sin^3 t}{t^3} \right| \leq \frac{1}{t^3}$ or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt$ converge donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^3} dt$ converge absolument par comparaison de fonctions positives.

Finalement, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^3} dt$ converge absolument et donc converge.

Exercice 6.85

Montrez que si m est un complexe de partie réelle strictement positive, alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-mt} dt$ converge et donnez sa valeur.

Déduisez-en l'existence et la valeur des intégrales $\int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-t} dt$ et $\int_0^{+\infty} \cos(t) e^{-t} dt$.

Correction 6.86

► On note $m = a + ib$ où $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Pour $t \in [0 ; +\infty[$, on a $e^{-mt} = e^{-at} e^{-ibt}$ donc $|e^{-mt}| = e^{-at}$.

Or $a > 0$ donc $\int_0^{+\infty} |e^{-mt}| dt$ converge donc $\int_0^{+\infty} e^{-mt} dt$ converge.

► Pour $X \geq 0$, on a $\int_0^X e^{-mt} dt = \left[\frac{-e^{-mt}}{m} \right]_0^X = \frac{1}{m} (1 - e^{-mX})$.

Or $|e^{-mX}| = e^{-aX} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0$.

Donc $\int_0^{+\infty} e^{-mt} dt = \frac{1}{m}$.

► Pour $t \geq 0$, on a $\begin{cases} |\sin(t) e^{-t}| \leq e^{-t} \\ |\cos(t) e^{-t}| \leq e^{-t} \end{cases}$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge donc $A = \int_0^{+\infty} \cos(t) e^{-t} dt$ et

$B = \int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-t} dt$ convergent (absolument).

On a

$$\begin{aligned} A + iB &= \int_0^{+\infty} (\cos t + i \sin t) e^{-t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{it} e^{-t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(1-i)t} dt \\ &= \frac{1}{1-i} \\ &= \frac{1+i}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } A = \operatorname{Re} \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} \text{ et } B = \operatorname{Im} \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2}.$$

Remarque 6.87

La réciproque est fautive ! On a montré que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge et qu'elle ne converge pas absolument.

6.4.2 Fonctions intégrables

Définition 6.88

Soit $f \in \mathcal{C}_m^0(I, \mathbb{K})$.

On dit que f est intégrable sur I quand l'intégrale $\int_a^b f$ converge absolument.

On note alors aussi $\int_I f = \int_I f(t) dt = \int_a^b f$.

L'ensemble des fonctions intégrables sur I est souvent noté $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$, L comme Lebesgue, mathématicien français de la fin du 19ème et début du 20ème siècle. Par abus de notation, on écrit parfois « f est \mathcal{L}^1 » pour « f est intégrable sur I ».

Exemple 6.89

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

- La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $[\varepsilon ; +\infty[$.
Plus généralement, la fonction $t \mapsto t^a e^{-t}$ est intégrable sur $[\varepsilon ; +\infty[$ (voire $[0 ; +\infty[$ si $a > -1$).
- La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[\varepsilon ; +\infty[$ ssi $\alpha > 1$ et sur $]0 ; \varepsilon]$ ssi $\alpha < 1$.
- La fonction \ln est intégrable sur $]0 ; \varepsilon]$.

Proposition 6.90

$\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Proposition 6.91 (Stricte positivité de l'intégrale)

Si f est continue, intégrable sur I et $\int_I |f| = 0$, alors $f = 0$.

Par contraposée, si f est continue, intégrable sur I et $f \neq 0$, alors $\int_I |f| > 0$.

6.4.3 Théorème de comparaison des fonctions intégrables

Rappel 6.92

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage d'un point $p \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

- $f = \mathcal{O}(g)$ au voisinage de p signifie qu'il existe $K > 0$ et V un voisinage de p tels que

$$\forall x \in V, |f(x)| \leq K |g(x)|.$$

- $f = o(g)$ au voisinage de p signifie qu'il existe une fonction $\varepsilon > 0$ et V un voisinage de p tels que

$$\forall x \in V, |f(x)| \leq \varepsilon(x) |g(x)| \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow p} \varepsilon(x) = 0.$$

Dans le cas où g ne s'annule pas (ce qui, en pratique, est toujours le cas) :

- $f = \mathcal{O}(g)$ au voisinage de p signifie que $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de p .
- $f = o(g)$ au voisinage de p signifie que $\frac{f}{g}$ a pour limite 0 en p .

Théorème 6.93

Soit $(f, g) \in \mathcal{C}_m^0(I, \mathbb{K})^2$.

- Si $|f| \leq |g|$ sur I et si g est intégrable, alors f est intégrable.
- Si $f = \mathcal{O}(g)$ au voisinage des bornes ouvertes de I et g est intégrable, alors f est intégrable. C'est vrai en particulier si $f = o(g)$.
- Si $f \sim g$ au voisinage des bornes ouvertes de I , alors il y a équivalence entre l'intégrabilité de f et l'intégrabilité de g .

Exercice 6.94

Montrez que la fonction $t \mapsto \frac{\cos t}{\sqrt{t}} e^{-t}$ est intégrable sur $]0 ; +\infty[$.

Correction 6.95

La fonction $f : t \mapsto \frac{\cos t}{\sqrt{t}} e^{-t}$ est continue sur $]0 ; +\infty[$.

On a $\frac{\cos t}{\sqrt{t}} e^{-t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ et $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0 ; 1]$ donc f aussi.

Pour tout $t \geq 1$, $\left| \frac{\cos t}{\sqrt{t}} e^{-t} \right| \leq e^{-t}$ et $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $[1 ; +\infty[$ donc f aussi.

Finalement, f est intégrable sur $]0 ; +\infty[$.

Exercice 6.96

La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{\cos t + t^2}$ est-elle intégrable sur $]0 ; +\infty[$?

Correction 6.97

Pour tout $t > 1$, $t^2 > 1 \geq -\cos t$ donc $t^2 + \cos t > 0$.

Pour tout $t \in]0 ; 1]$, $t^2 > 0$ et $\cos t > 0$ donc $t^2 + \cos t > 0$.

Donc $f : t \mapsto \frac{\ln t}{\cos t + t^2}$ est continue sur $]0 ; +\infty[$.

On a $\frac{\ln t}{\cos t + t^2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln t$ et \ln est intégrable sur $]0 ; 1]$ donc f aussi.

On a $\cos t + t^2 \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^2$ donc $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln t}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$.

Or $t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$ est intégrable sur $[1 ; +\infty[$ donc f aussi.

Finalement, f est intégrable sur $]0 ; +\infty[$.

6.5 Intégration des relations de comparaison

Les résultats présentés portent sur des fonctions intégrables sur $[a ; +\infty[$. On obtient évidemment des résultats analogues sur les autres types d'intervalles.

6.5.1 Théorème de comparaison par domination

Dans le cas convergent d'abord, les « restes partiels » suivent la même relation de comparaison.

Théorème 6.98

Soient f, g deux fonctions définies sur $[a ; +\infty[$ avec g à valeurs dans \mathbb{R}_+ .

Si $f = \mathcal{O}(g)$ et g est intégrable sur $[a ; +\infty[$, alors f est intégrable sur $[a ; +\infty[$.

De plus, $\int_x^{+\infty} f = \mathcal{O}\left(\int_x^{+\infty} g\right)$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Si $f = o(g)$ et g est intégrable sur $[a ; +\infty[$, alors f est intégrable sur $[a ; +\infty[$.

De plus, $\int_x^{+\infty} f = o\left(\int_x^{+\infty} g\right)$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Démonstration 6.99

► Si $f = \mathcal{O}(g)$, alors il existe $K > 0$ et $A \geq a$ tels que $\forall x \geq A, |f(x)| \leq Kg(x)$.

Donc si g est \mathcal{L}^1 alors $|f|$ est \mathcal{L}^1 et donc f est \mathcal{L}^1 .

De plus,

$$\forall x \geq A, \forall t \geq x, |f(t)| \leq Kg(t)$$

$$\text{donc } \int_x^{+\infty} |f(t)| dt \leq K \int_x^{+\infty} g(t) dt$$

$$\text{donc } \left| \int_x^{+\infty} f(t) dt \right| \leq \int_x^{+\infty} |f(t)| dt \leq K \int_x^{+\infty} g(t) dt$$

$$\text{i.e. } \int_x^{+\infty} f(t) dt = \mathcal{O}\left(\int_x^{+\infty} g(t) dt\right).$$

► Idem avec un « pour tout » devant K et un o à la fin pour le cas $f = o(g)$. ■

Dans le cas divergent ensuite, les « intégrales partielles » suivent aussi la même relation de comparaison.

Théorème 6.100

Soient f, g deux fonctions définies sur $[a ; +\infty[$ avec g à valeurs dans \mathbb{R}_+ .

Si $f = \mathcal{O}(g)$ et f n'est pas intégrable sur $[a ; +\infty[$, alors g n'est pas intégrable sur $[a ; +\infty[$.

De plus, $\int_a^x f = \mathcal{O}\left(\int_a^x g\right)$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Si $f = o(g)$ et f n'est pas intégrable sur $[a ; +\infty[$, alors g n'est pas intégrable sur $[a ; +\infty[$.

De plus, $\int_a^x f = o\left(\int_a^x g\right)$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Démonstration 6.101

► Si $f = \mathcal{O}(g)$ alors il existe $K > 0$ et $A \geq a$ tels que $\forall x \geq A, |f(x)| \leq Kg(x)$.

Donc si f n'est pas \mathcal{L}^1 , $\int_a^{+\infty} |f|$ diverge donc $\int_a^{+\infty} g$ diverge.

Pour $x \geq A$, pour $t \in [A; x]$, on a $\int_A^x |f| \leq K \int_A^x g$ donc

$$\int_a^x |f| = \int_a^A |f| + \int_A^x |f| \leq \int_a^A |f| + K \int_A^x g.$$

Or $\int_A^x g \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Donc il existe $B \geq a$ tel que $\forall x \geq B, \int_a^A |f| \leq K \int_A^x g$.

Pour $x \geq \max(A, B)$, on a $\int_a^x |f| \leq 2K \int_A^x g \leq 2K \int_a^x g$.

Donc $\left| \int_a^x f \right| \leq \int_a^x |f| \leq 2K \int_a^x g$.

Donc $\int_a^x f \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O} \left(\int_a^x g \right)$.

► Idem avec un « pour tout » devant le K et un o à la fin dans le cas $f = o(g)$. ■

6.5.2 Théorème de comparaison par équivalence

Théorème 6.102

Soient f, g deux fonctions définies sur $[a; +\infty[$ avec g à valeurs dans \mathbb{R}_+ .

Si $f \sim g$, alors l'intégrabilité de f est équivalente à l'intégrabilité de g .

De plus :

► si les fonctions sont intégrables, alors les restes partiels sont équivalents :

$$\int_x^{+\infty} f \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} g$$

► si les fonctions ne sont pas intégrables, alors les intégrales partielles divergent et sont équivalentes :

$$\int_a^x f \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_a^x g.$$

Démonstration 6.103

On a $f \underset{+\infty}{\sim} g \iff f - g \underset{+\infty}{=} o(g)$.

Si g est \mathcal{L}^1 alors d'après le Théorème 6.98, on a

$$\begin{aligned}\int_x^{+\infty} (f - g) &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} g\right) \\ \int_x^{+\infty} f - \int_x^{+\infty} g &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} g\right) \\ \int_x^{+\infty} f &\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} g.\end{aligned}$$

Si g n'est pas \mathcal{L}^1 , d'après le Théorème 6.100, on a

$$\begin{aligned}\int_a^x (f - g) &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_a^x g\right) \\ \int_a^x f - \int_a^x g &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_a^x g\right) \\ \int_a^x f &\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_a^x g.\end{aligned}$$

■

Chapitre 7

Intégrales à paramètre

Sommaire

7.1	Introduction229
7.2	Convergence simple230
7.2.1	Convergence simple d'une suite de fonctions	230
7.2.2	Convergence simple d'une série de fonctions	232
7.3	Suites et séries de fonctions intégrables233
7.3.1	Théorème de convergence dominée	233
7.3.2	Théorème d'intégration terme à terme	236
7.4	Fonctions définies par une intégrale à paramètre238
7.4.1	Continuité	238
7.4.2	Dérivabilité	239
7.5	Domination sur des sous-intervalles243
7.6	Complément : la fonction Γ d'Euler246

Dans ce chapitre, \mathbb{K} désigne l'ensemble \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Les fonctions dans ce chapitre sont à valeurs dans \mathbb{K} .

On considère dans ce chapitre des intégrales de la forme $\int_a^b f(p, t) dt$ où $f(p, t)$ est une expression qui dépend de deux variables p et t , p pouvant être de n'importe quel type mais t bien sûr réelle. Par habitude, on distingue dans le vocabulaire ces deux variables : t est appelée la variable d'intégration (notez le dt qui le signale) et p est appelée le paramètre.

L'intégrale $\int_a^b f(p, t) dt$ est donc une intégrale qui dépend du paramètre p (mais qui ne dépend bien entendu pas de t) et l'objet de ce chapitre est d'étudier des résultats concernant cette dépendance vis-à-vis de p ; en somme, d'étudier des propriétés de l'application $p \mapsto \int_a^b f(p, t) dt$.

Les sections 2 et 3 étudient surtout le cas où p est un paramètre entier naturel, les suivantes le cas où p est un paramètre réel.

7.1 Introduction

Pour commencer, un exercice d'intervention de symboles, qui marque le début de l'étude de ce problème général et qui va nous occuper durant quelques chapitres.

Exercice 7.1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = n^2 e^{-nx} (1 - e^{-x})$.

Pour $x \geq 0$, que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$?

Montrez la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ et donnez sa valeur en fonction de n .

Comparez $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ et $\int_0^{+\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) dx$.

Quelle conclusion peut-on en tirer ?

Correction 7.2

► Si $x = 0$, alors $f_n(x) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Si $x > 0$, alors $0 < e^{-x} < 1$ donc $e^{-nx} = (e^{-x})^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ car $n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o((e^x)^n)$.

Finalement, $\forall x \geq 0, f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

► f_n est \mathcal{C}^0 sur $[0 ; +\infty[$.

Pour $x \geq 0$, $0 \leq f_n(x) \leq n^2 e^{-nx}$ or $x \mapsto e^{-nx}$ est \mathcal{L}^1 sur $[0 ; +\infty[$ donc f_n aussi.

On a

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} n^2 e^{-nx} (1 - e^{-x}) dx &= n^2 \left(\int_0^{+\infty} e^{-nx} dx - \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)x} dx \right) \\ &= n^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

► On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = 1$ et $\int_0^{+\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) dx = \int_0^{+\infty} 0 dx = 0$.

Or $1 \neq 0$.

► Conclusion : on ne peut pas intervertir les symboles \lim et \int *a priori*.

7.2 Convergence simple

7.2.1 Convergence simple d'une suite de fonctions

Définition 7.3

Soient A une partie de \mathbb{R} et (f_n) une suite de fonctions définies sur A .

On dit que la suite (f_n) converge simplement sur A quand pour tout $x \in A$, la suite numérique $(f_n(x))$ converge.

Dans ce cas, on peut définir une fonction f sur A en posant, pour tout $x \in A$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

La fonction f est alors appelée limite simple sur A de la suite (f_n) et on dit que la suite (f_n) converge simplement vers f sur A .

Exercice 7.4

Étudiez, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la convergence simple de la suite de fonctions $f_n : x \mapsto \frac{ne^{-x} + x^2}{n+x}$ sur $[0 ; +\infty[$

Correction 7.5

Les fonctions f_n sont toutes définies sur $[0 ; +\infty[$.

Pour $x \geq 0$, on a $f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n+x} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{ne^{-x}}{n} = e^{-x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-x}$.

Donc (f_n) converge simplement vers $x \mapsto e^{-x}$ sur $[0 ; +\infty[$.

Exercice 7.6

Même question avec la suite de fonctions $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{1+x^n}$ sur $[0 ; +\infty[$.

Correction 7.7

Les fonctions f_n sont toutes définies sur $[0 ; +\infty[$.

Pour $x \geq 0$, on a $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$.

Si $x \in [0 ; 1[$, on a $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Si $x = 1$, on a $f_n(x) = \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$.

Si $x \in]1 ; +\infty[$, on a $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Donc (f_n) converge simplement vers $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1/2 & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ sur $[0 ; +\infty[$.

Exercice 7.8

Même question avec la suite de fonctions $f_n : x \mapsto n^\alpha x^n (1 - x)$ où α est un réel strictement positif.

Correction 7.9

Si $x = 0$ ou $x = 1$, on a $f_n(x) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Si $x \in]0 ; 1[$, on a $n^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\left(\frac{1}{x}\right)^n\right)$ donc $n^\alpha x^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0 ; 1]$.

7.2.2 Convergence simple d'une série de fonctions

Définition 7.10

Soient A une partie de \mathbb{R} et (f_n) une suite de fonctions définies sur A .

On dit que la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur A quand pour tout $x \in A$, la série numérique $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge.

Autrement dit, la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur A quand la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^n f_k\right)$ converge simplement sur A .

Dans ce cas, on peut définir une fonction f sur A en posant, pour tout $x \in A$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

La fonction f est alors appelée (fonction) somme sur A de la série $\sum_{n \geq 0} f_n$.

Exercice 7.11

Étudiez, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la convergence simple de la série de fonctions $f_n : x \mapsto \frac{nx^2}{n^3 + x^2}$ sur $[0 ; +\infty[$.

Correction 7.12

Si $x = 0$, on a $f_n(x) = 0$ donc $\sum f_n(0)$ converge.

Si $x > 0$, on a $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{nx^2}{n^3} = \frac{x^2}{n^2}$.

Donc par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0 ; +\infty[$.

Exercice 7.13

Même question avec la série de fonctions $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{1+x^n}$ sur $[0 ; +\infty[$.

Correction 7.14

Si $x \geq 1$, la suite $(f_n(x))_n$ converge vers $\frac{1}{2}$ ou 1.

Si $0 \leq x < 1$, $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} x^n$ or $\sum x^n$ converge donc par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge.

Donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0 ; 1[$.

Exercice 7.15

Même question avec la série de fonctions $f_n : x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n^3 + x^3}$ sur $[0 ; +\infty[$.

Correction 7.16

Pour $x \geq 0$, on a $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^3}$ donc $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge (absolument) sur $[0 ; +\infty[$.

7.3 Suites et séries de fonctions intégrables

Dans cette section, tous les théorèmes sont admis (démonstrations très difficiles!).

7.3.1 Théorème de convergence dominée

Théorème 7.17

Soient I un intervalle et (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux sur I .

Si

- ▷ la suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f qui est continue par morceaux sur I
- ▷ il existe une fonction φ , intégrable sur I et à valeurs positives, telle que
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq \varphi$ sur I (hypothèse de domination)

alors les fonctions f et f_n sont toutes intégrables sur I et $\int_I f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f$.

L'hypothèse de domination est essentielle ! Il s'agit donc de trouver une fonction φ (dont on dit qu'elle domine la suite (f_n)) intégrable et, surtout, qui ne dépend pas de n !

Exercice 7.18

Montrez que la suite d'intégrales $\left(\int_0^{+\infty} \cos(t) e^{-nt^2} dt \right)_{n \geq 1}$ est bien définie et qu'elle converge vers 0.

Correction 7.19

On pose $f_n : t \mapsto \cos(t) e^{-nt^2}$ sur $[0 ; +\infty[$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est \mathcal{C}^0 sur $[0 ; +\infty[$.

Si $t = 0$, $f_n(t) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Sinon, $f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc (f_n) converge simplement vers $f : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ sur $[0 ; +\infty[$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0 ; +\infty[$, on a

$$|f_n(t)| \leq e^{-t^2}.$$

Or $t \mapsto e^{-t^2}$ est \mathcal{L}^1 sur $[0 ; +\infty[$ donc d'après le théorème de convergence dominée, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est \mathcal{L}^1 sur $[0 ; +\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f = 0.$$

Exercice 7.20

Montrez que la suite d'intégrales $\left(\int_0^{\pi/2} \sin^n t dt \right)$ converge vers 0.

Correction 7.21

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : t \mapsto \sin^n t$ sur $[0 ; \pi/2]$.

(f_n) est une suite de fonctions \mathcal{C}^0 sur le segment $[0 ; \pi/2]$ donc \mathcal{L}^1 sur $[0 ; \pi/2]$.

Pour $t \in [0 ; \pi/2]$, $f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ car $0 \leq \sin^n t < 1$.

Si $t = \frac{\pi}{2}$, $f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Donc (f_n) converge simplement vers $f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0 ; \pi/2[\\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ sur $[0 ; \pi/2]$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0 ; \pi/2]$, on a

$$|f_n(t)| \leq 1.$$

Or $t \mapsto 1$ est \mathcal{L}^1 sur $[0 ; \pi/2]$.

Donc d'après le théorème de convergence dominée, on a

$$\int_0^{\pi/2} f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} f = 0.$$

Exercice 7.22

Montrez que pour tout $n \geq 2$, $t \mapsto \frac{1}{1+t^n}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$, puis donnez la limite des intégrales quand $n \rightarrow +\infty$.

Correction 7.23

Pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on pose $f_n : t \mapsto \frac{1}{1+t^n}$ sur $[0; +\infty[$.

Pour $0 \leq t < 1$, $f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Pour $t = 1$, $f_n(t) = \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$.

Pour $t > 1$, $f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc (f_n) converge simplement vers $f : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1/2 & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ sur $[0; +\infty[$.

Pour $n \geq 2$ et $t \in [0; +\infty[$, on a

$$|f_n(t)| \leq \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq 1 \\ 1/t^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Or $t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq 1 \\ 1/t^2 & \text{sinon} \end{cases}$ est \mathcal{L}^1 sur $[0; +\infty[$ donc par théorème de convergence dominée, $(f_n)_{n \geq 2}$ est une suite de fonctions \mathcal{L}^1 sur $[0; +\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f = 1.$$

Quitte à utiliser la caractérisation séquentielle de la limite, on peut étendre le théorème précédent à des fonctions paramétrées par un réel.

Théorème 7.24

Soient I, A deux intervalles, $\alpha \in \overline{A}$ et $(f_a)_{a \in A}$ une famille de fonctions continues par morceaux sur I .

Si

► pour tout $x \in I$, $f_a(x) \xrightarrow{a \rightarrow \alpha} f(x)$ où f est une fonction continue par morceaux sur I

► il existe une fonction φ intégrable sur I et à valeurs positives, telle que

pour tout $a \in A$, $|f_a| \leq \varphi$ sur I (hypothèse de domination)

alors les fonctions f et f_a sont toutes intégrables sur I et $\int_I f_a \xrightarrow{a \rightarrow \alpha} \int_I f$.

Démonstration 7.25

Si pour $x \in I$, $f_a(x) \xrightarrow{a \rightarrow \alpha} f(x)$, d'après la caractérisation séquentielle de la limite, pour toute suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers α , on a $f_{a_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$.

La suite de fonctions $(f_{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f .

Or, pour $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, $|f_{a_n}(x)| \leq \varphi(x)$ et φ est \mathcal{L}^1 sur I .

Donc d'après le théorème de convergence dominée, $\int_I f_{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f$.

Ceci est vrai pour toute suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers α donc d'après la caractérisation séquentielle de la limite, $\int_I f_a \xrightarrow{a \rightarrow \alpha} \int_I f$. ■

7.3.2 Théorème d'intégration terme à terme

Théorème 7.26

Soient I un intervalle et (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux sur I .

Si

- ▷ la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur I vers une fonction continue par morceaux sur I
- ▷ pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur I
- ▷ la série numérique $\sum_{n \geq 0} \int_I |f_n|$ converge

alors la fonction somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et $\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$.

L'hypothèse de convergence de la série des intégrales est essentielle, mais hélas très contraignante. Il arrive souvent qu'il soit plus facile d'utiliser le théorème de convergence dominée sur les sommes partielles de la série de fonctions.

Exercice 7.27

Justifiez l'existence et calculez $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt$.

Correction 7.28

On pose $f : t \mapsto \frac{t}{e^t - 1}$ sur $]0 ; +\infty[$.

On a $e^t - 1 \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$ donc $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 1 \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$: fausse singularité, donc $\int_0^1 f$ converge.

On a $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t}{e^t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $\int_1^{+\infty} f$ converge.

Donc $\int_0^{+\infty} f$ converge.

Pour $t > 0$, $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} ?$

On a $f(t) = \frac{te^{-t}}{e^{-t}(e^t - 1)} = \frac{te^{-t}}{1 - e^{-t}}$.

Or $0 < e^{-t} < 1$ donc $f(t) = te^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-t})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} te^{-(n+1)t}$.

On pose $f_n : t \mapsto te^{-(n+1)t}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0 ; +\infty[$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n = f$.

Donc $\int_0^{+\infty} f = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, f_n est \mathcal{C}^0 sur $[0 ; +\infty[$ et $f_n(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Donc pour $n \in \mathbb{N}$, f_n est \mathcal{L}^1 sur $[0 ; +\infty[$ donc sur $]0 ; +\infty[$.

Étudions la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$.

On a

$$\int_0^{+\infty} |f_n| = \int_0^{+\infty} te^{-(n+1)t} dt = \left[\frac{-1}{n+1} te^{-(n+1)t} \right]_0^{+\infty} - \frac{-1}{n+1} \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t} dt = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Donc la série $\sum_{n \geq 0} \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge.

D'après le théorème d'intégration terme à terme, on a donc

$$\int_0^{+\infty} f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Remarque 7.29

Si on ajoute l'hypothèse « les fonctions f_n sont positives » alors f est intégrable sur I ssi $\sum \int_I f_n$ converge et, dans ce cas, $\int_I f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$.

7.4 Fonctions définies par une intégrale à paramètre

On s'intéresse aux propriétés des fonctions définies par des intégrales du type $x \mapsto \int_I f(x, t) dt$. On dit que x est un paramètre de l'intégrale $\int_I f(x, t) dt$.

7.4.1 Continuité

Théorème 7.30 (Théorème de continuité sous le signe intégrale)

Soient A, I deux intervalles de \mathbb{R} et $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$ une fonction définie sur $A \times I$.

Si

- ▷ pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I
- ▷ pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur A
- ▷ il existe une fonction φ intégrable sur I et à valeurs positives, telle que
pour tout $(x, t) \in A \times I$, $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$ (hypothèse de domination)

alors pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur I et la fonction $x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est continue sur A .

Démonstration 7.31

Soit $x_0 \in A$.

On a $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, t) = f(x_0, t)$ pour tout $t \in I$.

De plus, on a $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$ pour tout $t \in I$, $x \in A$.

Donc d'après le Théorème 7.24, on a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_I f(x, t) dt = \int_I \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, t) \right) dt = \int_I f(x_0, t) dt.$$

Donc $x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est continue en x_0 . ■

Exercice 7.32

Montrez que la fonction $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt^2)}{1+t^2} dt$ est définie et continue sur \mathbb{R} .

Correction 7.33

On pose $f : (x, t) \mapsto \frac{\cos(xt^2)}{1+t^2}$ sur $\mathbb{R} \times [0 ; +\infty[$.

f est continue sur $\mathbb{R} \times [0 ; +\infty[$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x, t)$ est \mathcal{C}^0 sur $[0 ; +\infty[$ et pour tout $t \in [0 ; +\infty[$, $x \mapsto f(x, t)$ est \mathcal{C}^0 sur \mathbb{R} .

Pour $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0 ; +\infty[$, on a $|f(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$.

Or $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est \mathcal{L}^1 sur $[0 ; +\infty[$.

Donc d'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, g est continue sur \mathbb{R} et $t \mapsto f(x, t)$ est \mathcal{L}^1 sur $[0 ; +\infty[$.

Exercice 7.34

Montrez que la fonction $h : u \mapsto \int_0^1 \text{Arctan}(u + x \ln x) dx$ est définie et continue sur \mathbb{R} .

Correction 7.35

On pose $f : (u, x) \mapsto \text{Arctan}(u + x \ln x)$ sur $\mathbb{R} \times]0 ; 1]$.

f est continue sur $\mathbb{R} \times]0 ; 1]$.

Pour $u \in \mathbb{R}$, $x \in]0 ; 1]$, on a $|f(u, x)| \leq \frac{\pi}{2}$.

Or $x \mapsto \frac{\pi}{2}$ est \mathcal{L}^1 sur $]0 ; 1]$.

Donc d'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, $x \mapsto f(u, x)$ est \mathcal{L}^1 sur $]0 ; 1]$ et h est continue sur \mathbb{R} .

7.4.2 Dérivabilité

Théorème 7.36 (Théorème de dérivation sous le signe intégrale)

Soient A, I deux intervalles de \mathbb{R} et $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$ une fonction définie sur $A \times I$.

Si

- ▷ pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I

- ▷ pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur A
- ▷ pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur I
- ▷ il existe une fonction φ intégrable et à valeurs positives, telle que

$$\text{pour tout } (x, t) \in A \times I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t) \text{ (hypothèse de domination)}$$

alors la fonction $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur A et pour tout $x \in A$, $g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.

Démonstration 7.37

La fonction $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est bien définie sur A d'après la première hypothèse.

Soient $x_0 \in A$ et $x \neq x_0$.

On veut montrer que g est dérivable en x_0 et $g'(x_0) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt$, i.e.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt.$$

L'hypothèse de domination justifie la convergence de cette intégrale.

$$\text{On a } \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \int_I \frac{f(x, t) - f(x_0, t)}{x - x_0} dt.$$

On veut intervertir $\lim_{x \rightarrow x_0}$ et \int_I .

Pour $t \in I$, $x \mapsto f(x, t)$ est \mathcal{C}^1 donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_{x,t} \in]x_0; x[$ tel que

$$\frac{f(x, t) - f(x_0, t)}{x - x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(c_{x,t}, t).$$

Par théorème d'encadrement, pour $t \in I$, $\lim_{x \rightarrow x_0} c_{x,t} = x_0$.

Or $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur A donc par composition des limites,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\partial f}{\partial x}(c_{x,t}, t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t).$$

Or par hypothèse de domination, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(c_{x,t}, t) \right| \leq \varphi(t)$.

Donc d'après le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(c_{x,t}, t) dt = \int_I \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\partial f}{\partial x}(c_{x,t}, t) \right) dt = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt.$$

On a donc montré que g est dérivable sur A et

$$\forall x \in A, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Avec les hypothèses $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ continue sur A et $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(c_{x,t}, t) \right| \leq \varphi(t)$ et le Théorème 7.30, g' est en plus continue sur A , i.e. g est de classe \mathcal{C}^1 sur A . ■

Exercice 7.38

Montrez que la fonction $g : x \mapsto \int_0^\pi \cos(x \sin t) dt$ est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Correction 7.39

On pose $f : (x, t) \mapsto \cos(x \sin t)$ sur $\mathbb{R} \times [0 ; \pi]$.

f est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R} \times [0 ; \pi]$ (par opérations et compositions de fonctions \mathcal{C}^1).

Pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \cos(x \sin t)$ est \mathcal{C}^0 sur le segment $[0 ; \pi]$ donc y est intégrable.

On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\sin(t) \sin(x \sin t)$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0 ; \pi]$, on a $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq 1$.

Or $t \mapsto 1$ est \mathcal{L}^1 sur $[0 ; \pi]$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, g est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et, pour $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -\int_0^\pi \sin(t) \sin(x \sin t) dt$.

Exercice 7.40

Montrez que la fonction $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \cos(xt^2) e^{-t} dt$ est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Correction 7.41

On pose $f : (x, t) \mapsto \cos(xt^2) e^{-t}$ sur $\mathbb{R} \times [0 ; +\infty[$.

f est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R} \times [0 ; +\infty[$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0 ; +\infty[$, $|f(x, t)| \leq e^{-t}$ or $t \mapsto e^{-t}$ est \mathcal{L}^1 sur $[0 ; +\infty[$ donc $t \mapsto f(x, t)$ l'est aussi.

On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -t^2 e^{-t} \sin(xt^2)$.

Donc $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq t^2 e^{-t}$.

Or $t \mapsto t^2 e^{-t}$ est \mathcal{L}^1 sur $[0 ; +\infty[$ (car $t^2 e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{7/2}}\right)$).

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, g est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et, pour $x \in \mathbb{R}$,
 $g'(x) = - \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} \sin(xt^2) dt$.

Ce théorème est généralisable pour des dérivations d'ordre plus élevé.

Théorème 7.42

Soient A, I deux intervalles de \mathbb{R} et $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$ une fonction définie sur $A \times I$.

Si

- ▷ pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I
- ▷ pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^k sur A
- ▷ pour tout $x \in A$, pour tout $j \in \llbracket 1 ; k-1 \rrbracket$, $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I
- ▷ il existe une fonction φ intégrable sur I et à valeurs positives, telle que

$$\text{pour tout } (x, t) \in A \times I, \quad \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi(t) \quad (\text{hypothèse de domination})$$

alors la fonction $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe \mathcal{C}^k sur A et pour tout $x \in A$, pour tout $j \in \llbracket 1 ; k \rrbracket$, $g^{(j)}(x) = \int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t) dt$.

Exercice 7.43

Montrez que la fonction $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \cos(xt^2) e^{-t} dt$ est définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

Correction 7.44

On reprend les notations de la Correction 7.41.

f est \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R} \times [0 ; +\infty[$.

Pour montrer que g est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , il suffit de donner une domination pour toutes les dérivées partielles : pour $k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0 ; +\infty[$,

$$\left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi_k(t)$$

où φ_k est \mathcal{L}^1 sur $[0 ; +\infty[$.

On a $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ donc

$$\frac{d^k}{dx^k} e^{ix} = \cos^{(k)} x + i \sin^{(k)} x = i^k e^{ix}$$

donc

$$\cos^{(k)} x = \operatorname{Re} \left(e^{ik\pi/2} e^{ix} \right) = \cos \left(x + k \frac{\pi}{2} \right)$$

donc

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k} (x, t) = t^{2k} e^{-t} \cos \left(xt^2 + k \frac{\pi}{2} \right).$$

Donc $\left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k} (x, t) \right| \leq t^{2k} e^{-t}$ et $t \mapsto t^{2k} e^{-t}$ est \mathcal{L}^1 sur $[0; +\infty[$.

Donc d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, g est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et, pour $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$,
 $g^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{2k} e^{-t} \cos \left(xt^2 + k \frac{\pi}{2} \right) dt.$

7.5 Domination sur des sous-intervalles

La continuité étant une propriété locale, il est souvent inutile d'avoir une domination globale sur A pour conclure. En général, on peut se contenter de domination sur des parties plus petites que A , en général les segments inclus dans A , ou toute famille recouvrante de parties de A .

Définition 7.45

Soit A un intervalle.

Une famille \mathcal{F} de parties de A est dite recouvrante quand sa réunion est A : $A = \bigcup_{X \in \mathcal{F}} X$.

Proposition 7.46

Soit A un intervalle.

La famille des segments inclus dans A est recouvrante : $A = \bigcup_{(a,b) \in A^2} [a; b]$.

Démonstration 7.47

Tout intervalle est convexe.

Si $x \in A$, il existe $(a, b) \in A^2$ tel que $a \leq x \leq b$.

Donc $x \in [a; b]$.

Donc $x \in \bigcup_{(a,b) \in A^2} [a; b]$.

Donc $A \subseteq \bigcup_{(a,b) \in A^2} [a; b] \subseteq A$. ■

On en déduit alors le théorème suivant, dont il vaut mieux à mon avis, sur chaque exercice, présenter le détail des idées.

Théorème 7.48

Soient A, I deux intervalles de \mathbb{R} et $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$ une fonction définie sur $A \times I$.

Soit \mathcal{F} une famille recouvrante de parties de A .

Si

- ▷ pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I
- ▷ pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur A
- ▷ pour toute partie F de \mathcal{F} , il existe une fonction φ_F intégrable sur I et à valeurs positives, telle que

$$\text{pour tout } (x, t) \in F \times I, |f(x, t)| \leq \varphi_F(t) \text{ (hypothèse de domination)}$$

alors pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur I et la fonction $x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est continue sur A .

On a de même une version locale des théorèmes de dérivation sous le signe intégrale.

Autrement dit, au lieu de chercher à appliquer les théorèmes précédents directement sur A , on trouve une famille recouvrante de sous-intervalles sur chacun desquels on peut appliquer les théorèmes précédents, conclure à la continuité ou dérivabilité sur chaque sous-intervalle, puis signaler que par réunion, la propriété reste valable sur A .

Exercice 7.49

Montrez que la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt$ est définie et continue sur $]0 ; +\infty[$.

Correction 7.50

On pose $\varphi : (x, t) \mapsto \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}$ sur $]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[$.

φ est continue sur $]0 ; +\infty[^2$.

Pour $t \in]0 ; +\infty[$, $x \in]0 ; +\infty[$, $|\varphi(x, t)| \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$ est la meilleure majoration possible valable pour $x > 0$.

Soit $a > 0$.

Pour $t > 0$, $x \in [a ; +\infty[$, $|\varphi(x, t)| \leq \frac{e^{-at}}{\sqrt{t}}$.

Or $\frac{e^{-at}}{\sqrt{t}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1/2}}$ donc $t \mapsto \frac{e^{-at}}{\sqrt{t}}$ est \mathcal{L}^1 sur $]0 ; 1]$.

De plus, $\frac{e^{-at}}{\sqrt{t}} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $t \mapsto \frac{e^{-at}}{\sqrt{t}}$ est \mathcal{L}^1 sur $[1 ; +\infty[$.

D'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, f est continue sur $[a ; +\infty[$.

Donc f est continue sur $]0 ; +\infty[= \bigcup_{a>0} [a ; +\infty[$.

Exercice 7.51

Montrez que la fonction $f : x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+xt)}{t^2} dt$ est définie et continue sur $[0 ; +\infty[$ et qu'elle est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0 ; +\infty[$. Donnez une expression simple de $f'(x)$ pour tout $x > 0$.

Correction 7.52

On pose $\varphi : (x, t) \mapsto \frac{\ln(1+xt)}{t^2}$ sur $[0 ; +\infty[\times [1 ; +\infty[$.

φ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $[0 ; +\infty[\times [1 ; +\infty[$.

Soit $a > 0$.

Pour $x \in [0 ; a]$, $t \in [1 ; +\infty[$, $\left| \frac{\ln(1+xt)}{t^2} \right| \leq \frac{\ln(1+at)}{t^2}$.

Or $t \mapsto \frac{\ln(1+at)}{t^2}$ est continue sur $[1 ; +\infty[$ et $\frac{\ln(1+at)}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln t}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$.

Donc $t \mapsto \frac{\ln(1+at)}{t^2}$ est \mathcal{L}^1 sur $[1 ; +\infty[$.

Donc f est continue sur $[0 ; a]$ et donc sur $[0 ; +\infty[= \bigcup_{a>0} [0 ; a]$.

On a $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) = \frac{t}{t^2(1+xt)} = \frac{1}{t(1+xt)}$.

Soit $a > 0$.

Pour $x \in [a ; +\infty[$, $t \in [1 ; +\infty[$, $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{1}{at^2}$.

Or $t \mapsto \frac{1}{at^2}$ est \mathcal{L}^1 sur $[1 ; +\infty[$.

Donc f est \mathcal{C}^1 sur $[a ; +\infty[$ et donc sur $]0 ; +\infty[= \bigcup_{a>0} [a ; +\infty[$.

Pour $x > 0$, calculons $f'(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+xt)} dt$.

On a $\frac{1}{t(1+xt)} = \frac{1}{t} - \frac{x}{1+xt}$.

Donc

$$\begin{aligned}
 \int_1^X \frac{1}{t(1+xt)} dt &= \int_1^X \frac{1}{t} dt - x \int_1^X \frac{1}{1+xt} dt \\
 &= \ln X - \ln(1+xX) + \ln(1+x) \\
 &= \ln X - \ln X - \ln\left(x + \frac{1}{x}\right) + \ln(1+x) \\
 &= \ln \frac{1+x}{x}.
 \end{aligned}$$

Donc

$$f'(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+xt)} dt = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{x} = \frac{1+x}{x}.$$

7.6 Complément : la fonction Γ d'Euler

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose, quand cela a un sens

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Cette fonction très courante a les propriétés suivantes :

- Γ est définie sur $]0 ; +\infty[$
- Γ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0 ; +\infty[$
- pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
- il existe un unique $\alpha \in]1 ; 2[$ tel que $\Gamma'(\alpha) = 0$ et Γ est strictement décroissante sur $]0 ; \alpha]$ et strictement croissante sur $]\alpha ; +\infty[$
- Γ est convexe sur $]0 ; +\infty[$
- Γ a des limites infinies en 0 et en $+\infty$.

Démonstration 7.53

On pose $f : (x, t) \mapsto e^{(x-1)\ln t} e^{-t}$ sur $]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[$.

f est \mathcal{C}^∞ sur $]0 ; +\infty[^2$.

Soient $b > a > 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $x \in [a ; b]$, $t \in]0 ; +\infty[$, on a

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) = \ln^n(t) e^{(x-1)\ln t} e^{-t} = \ln^n(t) \frac{1}{t^{1-x}} e^{-t}.$$

$$\text{Donc } \left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \right| = |\ln^n t| e^{(x-1)\ln t} e^{-t}.$$

On a $a - 1 \leq x - 1 \leq b - 1$.

$$\text{Donc } \begin{cases} (x - 1) \ln t \leq (b - 1) \ln t & \text{si } t \geq 1 \\ (x - 1) \ln t \leq (a - 1) \ln t & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \right| \leq \varphi(t) \text{ où } \varphi : t \mapsto \begin{cases} |\ln^n t| t^{b-1} e^{-t} & \text{si } t \geq 1 \\ |\ln^n t| t^{a-1} e^{-t} & \text{sinon} \end{cases}$$

Quand $t \rightarrow +\infty$, $|\ln^n t| t^{b-1} e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc φ est \mathcal{L}^1 sur $[1 ; +\infty[$.

Quand $t \rightarrow 0$, $\varphi(t) \sim \frac{|\ln^n t|}{t^{1-a}} = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ où $1 - a < \alpha < 1$ donc φ est \mathcal{L}^1 sur $]0 ; 1]$.

Donc φ est \mathcal{L}^1 sur $]0 ; +\infty[$.

Donc Γ est \mathcal{C}^∞ sur $[a ; b]$.

Donc Γ est \mathcal{C}^∞ sur $]0 ; +\infty[= \bigcup_{0 < a < b} [a ; b]$. ■

Chapitre 8

Espaces préhilbertiens réels

Sommaire

8.1	Généralités	248
8.1.1	Produit scalaire	248
8.1.2	Exemples fondamentaux	249
8.1.3	Norme euclidienne	250
8.1.4	Vecteurs orthogonaux	253
8.2	Bases orthonormées	254
8.2.1	Familles orthonormées	254
8.2.2	Existence de bases orthonormées	255
8.2.3	Calculs en base orthonormée	257
8.3	Sous-espaces orthogonaux.	257
8.3.1	Orthogonalité de deux sous-espaces vectoriels	257
8.3.2	Orthogonal d'un sous-espace vectoriel	258
8.4	Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie	260
8.4.1	Projection orthogonale	260
8.4.2	Distance à un sous-espace vectoriel	261

Dans tout ce chapitre, E désigne un \mathbb{R} -espace vectoriel.

8.1 Généralités

8.1.1 Produit scalaire

Définition 8.1

On appelle produit scalaire sur E toute application φ de E^2 dans \mathbb{R} qui est

- ▷ bilinéaire (linéaire par rapport à chacune de ses deux variables)
- ▷ symétrique : pour tout $(x, y) \in E^2$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$
- ▷ définie-positive : pour tout $x \in E$, $\varphi(x, x) \geq 0$ et $\varphi(x, x) = 0 \iff x = 0$.

Remarque 8.2

Pour montrer que φ est un produit scalaire, on montre en général d'abord que φ est symétrique, puis qu'elle est linéaire à gauche, la linéarité à droite découlant alors de la symétrie.

Définition 8.3

Quand E est muni d'un produit scalaire, on dit que E est un espace préhilbertien. Quand, de plus, E est de dimension finie, on dit que E est un espace euclidien.

En général, on note $\langle \cdot | \cdot \rangle$ les produits scalaires.

8.1.2 Exemples fondamentaux

(1) Le produit scalaire de la géométrie vérifie toutes ces propriétés.

(2) Si $E = \mathbb{R}^n$, soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, on pose $\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$: φ est appelé le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n .

(3) Plus généralement, si E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n , alors à toute base \mathcal{B} de E , on peut associer un produit scalaire : si x et y sont deux vecteurs de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, on pose $\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. L'expression matricielle du produit scalaire est alors $\varphi(x, y) = X^T Y$.

(4) Si a, b sont deux réels tels que $a < b$, $I = [a ; b]$ et $E = \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, alors pour f, g deux éléments de E , on pose $\varphi(f, g) = \int_a^b fg$: φ est un produit scalaire sur E .

(5) Si I est un intervalle et $E = \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(I, \mathbb{R})$, ensemble des fonctions f à valeurs réelles, continues sur I et telles que f^2 soit intégrables sur I , alors pour f, g deux éléments de E , on pose $\varphi(f, g) = \int_I fg$: φ est un produit scalaire sur E .

(6) Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'application $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^T B)$ est un produit scalaire, c'est même le produit scalaire canonique.

Démonstration 8.4 (5)

Montrons que si $f, g \in \mathcal{L}^2(I, \mathbb{R})$ alors $fg \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$.

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$.

Donc pour $x \in I$, on a $0 \leq |f(x)g(x)| \leq \frac{f^2(x) + g^2(x)}{2}$.

Or f^2 et g^2 sont intégrables sur I donc par comparaison de fonctions positives, $|fg|$ est intégrable sur I et donc fg est intégrable sur I .

La fonction $\varphi : (f, g) \mapsto \int_I fg$ est donc bien définie sur E^2 .

La symétrie et la bilinéarité de φ sont évidentes.

Pour tout $f \in E$, $\varphi(f, f) = \int_I f^2 \geq 0$ et comme f^2 est positive et continue sur I , on a

$$\begin{aligned} \int_I f^2 = 0 &\iff f^2 = 0 \\ &\iff f = 0. \end{aligned}$$

Donc φ est un produit scalaire sur E . ■

Démonstration 8.5 (6)

Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on a

$$\text{tr}(B^T A) = \text{tr}\left((A^T B)^T\right) = \text{tr}(A^T B)$$

donc on a la symétrie.

La bilinéarité est évidente par linéarité de la trace et de la transposition et par la bilinéarité du produit matriciel.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\text{tr}(A^T A) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2$ donc il est clair que $\text{tr}(A^T A) = 0 \iff A = 0_n$. ■

8.1.3 Norme euclidienne

Définition 8.6

Soit E un espace préhilbertien. On note $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire sur E .

On appelle norme euclidienne associée au produit scalaire l'application de E dans \mathbb{R}_+ définie par

$$\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}.$$

Remarque 8.7

Cette définition a bien un sens, car d'après les propriétés d'un produit scalaire, pour tout $x \in E$, $\langle x | x \rangle \geq 0$ donc $\sqrt{\langle x | x \rangle}$ existe.

On vérifie alors les résultats suivants, inspirés par la géométrie habituelle dans un triangle ou un parallélogramme.

Proposition 8.8

Avec les mêmes notations, pour tout $(x, y) \in E^2$,

- ▷ $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x | y \rangle$ (égalité d'Al-Kashi)
- ▷ $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 \langle x | y \rangle$ (égalité d'Al-Kashi)
- ▷ $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 \|x\|^2 + 2 \|y\|^2$ (identité du parallélogramme)
- ▷ $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4 \langle x | y \rangle$ (identité de polarisation).

Et encore

Proposition 8.9

Avec les mêmes notations,

- ▷ $|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ (inégalité de Cauchy-Schwarz)
- ▷ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)
- ▷ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- ▷ $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

Remarque 8.10

Il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz ssi x et y sont colinéaires.

Il y a égalité dans l'inégalité triangulaire ssi x et y sont colinéaires de même sens.

Démonstration 8.11 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit $(x, y) \in E^2$.

Si l'un des deux vecteurs est nul, l'inégalité est vraie.

Supposons $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

On pose $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $t \longmapsto \|tx + y\|^2$

p est à valeurs positives et, pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} p(t) &= \|tx\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle tx | y \rangle \\ &= t^2 \langle x | x \rangle + \|y\|^2 + 2t \langle x | y \rangle. \end{aligned}$$

Or $\langle x | x \rangle > 0$ car $x \neq 0$.

Donc p est un polynôme du second degré de signe constant, donc son discriminant est négatif ou nul, *i.e.*

$$(2 \langle x | y \rangle)^2 - 4 \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0.$$

Donc $|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$.

Il y a égalité ssi le trinôme p possède une unique racine réelle t_0 .

Dans ce cas, $p(t_0) = 0 = \|t_0x + y\|^2 = \langle t_0x + y | t_0x + y \rangle$.

Par définie-positivité de $\langle \cdot | \cdot \rangle$, $t_0x + y = 0$ donc $y = -t_0x$ donc x et y sont colinéaires.

Et réciproquement. ■

Démonstration 8.12 (Inégalité triangulaire)

Pour $(x, y) \in E^2$, on a

$$\begin{aligned} \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| &\iff \|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \|x\| \|y\| \\ &\iff \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x | y \rangle \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \|x\| \|y\| \\ &\iff \langle x | y \rangle \leq \|x\| \|y\| \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|} \right\} \text{Al-Kashi}$$

ce qui est vrai d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Il y a égalité ssi $\langle x | y \rangle = \|x\| \|y\|$, ce qui implique le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donc x et y sont colinéaires.

Or $\langle x | y \rangle = \|x\| \|y\| \geq 0$ donc x et y sont positivement colinéaires.

Et réciproquement. ■

On dit qu'un vecteur de E est unitaire (ou normalisé) si sa norme vaut 1. À tout vecteur $x \in E \setminus \{0\}$, on associe deux vecteurs unitaires : $\frac{x}{\|x\|}$ et $-\frac{x}{\|x\|}$.

Exercice 8.13

Soit $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Donnez une inégalité liant $\sum_{k=1}^n a_k b_k$, $\sum_{k=1}^n a_k^2$ et $\sum_{k=1}^n b_k^2$.

Correction 8.14

On pose $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.

On note $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n .

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $|\langle a | b \rangle| \leq \|a\| \|b\|$ donc

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2}.$$

Exercice 8.15

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R}_+^*)$. Montrez que

$$(b-a)^2 \leq \left(\int_a^b f \right) \left(\int_a^b \frac{1}{f} \right).$$

Correction 8.16

On pose $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R}_+^*)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
 $(f, g) \longmapsto \int_a^b fg$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \sqrt{f} \mid \sqrt{\frac{1}{f}} \right\rangle \right| &\leq \left\| \sqrt{f} \right\| \left\| \sqrt{\frac{1}{f}} \right\| \\ |b-a| &\leq \sqrt{\int_a^b f} \sqrt{\int_a^b \frac{1}{f}} \\ (b-a)^2 &\leq \left(\int_a^b f \right) \left(\int_a^b \frac{1}{f} \right). \end{aligned}$$

8.1.4 Vecteurs orthogonaux

Définition 8.17

Soit E un espace préhilbertien. On note $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire sur E .

On dit que deux vecteurs x, y sont orthogonaux (pour ce produit scalaire) quand $\langle x | y \rangle = 0$.

On peut alors noter $x \perp y$ pour signifier que x et y sont orthogonaux.

Plus généralement, si x_1, \dots, x_n sont n vecteurs de E , on dit que la famille (x_1, \dots, x_n) est une famille orthogonale quand

$$\text{pour tout } (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \text{ tel que } i \neq j, \quad \langle x_i | x_j \rangle = 0.$$

On retrouve alors le célèbre théorème de Pythagore.

Proposition 8.18

Avec les mêmes notations,

$$x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Exercice 8.19

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension au moins 2 et u, v deux vecteurs non-colinéaires de E .

Montrez qu'il existe un produit scalaire sur E pour lequel u et v sont orthogonaux.

Correction 8.20

On pose $n \geq 2$ la dimension de E .

Comme u et v ne sont pas colinéaires, (u, v) est libre.

Donc d'après le théorème de la base incomplète, il existe une base (u, v, e_3, \dots, e_n) de E .

En posant φ le produit scalaire associé à cette base, on a

$$\varphi(u, v) = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 0 + \dots + 0 \times 0 = 0.$$

Donc $u \perp v$ pour le produit scalaire φ .

8.2 Bases orthonormées

8.2.1 Familles orthonormées

Définition 8.21

Soit E un espace préhilbertien.

Une famille de vecteurs de E est dite orthonormée (ou orthonormale) quand elle est orthogonale et ses vecteurs sont unitaires.

Proposition 8.22

Une famille orthogonale sans vecteur nul est libre. En particulier, une famille orthonormée est libre.

Une famille orthonormée génératrice de E est donc une base orthonormée de E .

Démonstration 8.23

Soit $(v_1, \dots, v_p) \in E^p$ une famille orthogonale sans vecteur nul.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0$.

Soit $j \in \llbracket 1 ; p \rrbracket$.

On a $\langle \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p \mid v_j \rangle = \langle 0 \mid v_j \rangle = 0$, or

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p \mid v_j \rangle &= \lambda_1 \langle v_1 \mid v_j \rangle + \dots + \lambda_p \langle v_p \mid v_j \rangle \\ &= \lambda_j \langle v_j \mid v_j \rangle. \end{aligned}$$

Or $v_j \neq 0$ donc $\langle v_j | v_j \rangle \neq 0$ donc $\lambda_j = 0$.

Donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$.

Donc (v_1, \dots, v_p) est libre. ■

Exercice 8.24

Généralisez l'exercice précédent.

Correction 8.25

Pour toute famille libre, il existe un produit scalaire tel que cette famille soit orthogonale.

8.2.2 Existence de bases orthonormées

Théorème 8.26

Soit E un espace euclidien.

Il existe dans E des bases orthonormées.

De plus, pour toute base (v_1, \dots, v_n) de E , il existe une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) de E telle que

$$\text{pour tout } k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, \text{ Vect}(v_1, \dots, v_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k).$$

La démonstration repose sur l'algorithme d'orthogonalisation/orthonormalisation de Schmidt.

Démonstration 8.27

Soit (v_1, \dots, v_n) une base de E .

(1) On pose $u_1 = v_1$.

(2) On choisit $u_2 = v_2 - \lambda_1 u_1$ où λ_1 est bien choisi pour que

$$u_1 \perp u_2 \text{ i.e. } \langle u_1 | u_2 \rangle = 0$$

$$\text{i.e. } \langle u_1 | v_2 - \lambda_1 u_1 \rangle = 0$$

$$\text{i.e. } \langle u_1 | v_2 \rangle - \lambda_1 \langle u_1 | u_1 \rangle = 0$$

$$\text{i.e. } \lambda_1 = \frac{\langle u_1 | v_2 \rangle}{\langle u_1 | u_1 \rangle}.$$

Par suite, si on a construit (u_1, \dots, u_k) une famille orthogonale telle que

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k) :$$

On pose $u_{k+1} = v_{k+1} - \alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2 - \dots - \alpha_k u_k$ où $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sont bien choisis pour obtenir $u_{k+1} \perp u_i$ pour $i \in \llbracket 1 ; k \rrbracket$.

Alors

$$\begin{aligned}\langle u_{k+1} \mid u_i \rangle &= \langle v_{k+1} \mid u_i \rangle - \sum_{j=1}^k \alpha_j \langle u_j \mid u_i \rangle \\ &= \langle v_{k+1} \mid u_i \rangle - \alpha_i \langle u_i \mid u_i \rangle.\end{aligned}$$

Donc $\alpha_i = \frac{\langle v_{k+1} \mid u_i \rangle}{\langle u_i \mid u_i \rangle}$.

u_{k+1} ainsi construit est orthogonal à u_1, \dots, u_k donc (u_1, \dots, u_{k+1}) est orthogonale et $u_{k+1} \in \text{Vect}(u_{k+1}, u_1, \dots, u_k) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_{k+1})$.

Ainsi, (u_1, \dots, u_n) est une base orthogonale de E . ■

Remarque 8.28

Si l'on souhaite obtenir une base orthonormée, on divise par les normes.

On en déduit le théorème de la base orthonormée incomplète.

Théorème 8.29

Soit E un espace euclidien.

Toute famille orthonormée de E peut être complétée en une base orthonormée de E .

Exercice 8.30

Dans \mathbb{R}^n muni du produit scalaire canonique, on pose $u = (1, \dots, n)$.

Complétez la famille u en une base orthonormée de \mathbb{R}^n .

Correction 8.31

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 0 & \dots & 0 & \\ 2 & -1 & 0 & & \vdots & \\ \vdots & 0 & 4 & & \vdots & \\ \vdots & \vdots & -3 & & \vdots & \text{puis Gram-Schmidt.} \\ \vdots & \vdots & 0 & & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & n & \\ n & 0 & 0 & \dots & n-1 & \end{array}$$

8.2.3 Calculs en base orthonormée

Soient E un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .

Soient $x, y \in E$, de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Alors

$$\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = X^\top Y \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{X^\top X} \quad \forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, \quad x_i = \langle x | e_i \rangle.$$

Démonstration 8.32

On a

$$\begin{aligned} \langle x | y \rangle &= \sum_{i=1}^n x_i \langle e_i | y \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n y_j \langle e_i | e_j \rangle \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j \langle e_i | e_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i. \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} \langle e_i | e_j \rangle = \delta_{i,j} \text{ car } \mathcal{B} \text{ est orthonormée$$

De même, on a $\langle x | e_j \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \langle e_i | e_j \rangle = x_j$. ■

8.3 Sous-espaces orthogonaux

8.3.1 Orthogonalité de deux sous-espaces vectoriels

Définition 8.33

Soient E un espace préhilbertien, F, G deux sous-espaces vectoriels de E et $u \in E$.

On dit que u est orthogonal (ou normal) à F quand u est orthogonal à tous les vecteurs de F .

On dit que F et G sont orthogonaux quand tout vecteur de F et tout vecteur de G sont orthogonaux, autrement dit quand

$$\text{pour tout } (x, y) \in F \times G, \quad \langle x | y \rangle = 0.$$

Proposition 8.34

Si F est de dimension finie et a pour famille génératrice (v_1, \dots, v_k) , alors u est orthogonal à F ssi pour tout $i \in \llbracket 1 ; k \rrbracket$, $\langle u \mid v_i \rangle = 0$.

Proposition 8.35

Si F et G sont orthogonaux, alors ils sont en somme directe : $F \cap G = \{0\}$.

Démonstration 8.36

Supposons $F \perp G$.

Soit $x \in F \cap G$.

Comme $x \in F$ et $x \in G$, on a $x \perp x$ i.e. $\langle x \mid x \rangle = 0$ i.e. $x = 0$.

D'où $F \cap G = \{0\}$.

On peut généraliser à k sous-espaces vectoriels deux à deux orthogonaux F_1, \dots, F_k .

Soit $(x_1, \dots, x_k) \in F_1 \times \dots \times F_k$ tel que $x_1 + \dots + x_k = 0$.

Pour $i \in \llbracket 1 ; k \rrbracket$, on a

$$\begin{aligned} \langle x_1 + \dots + x_k \mid x_i \rangle &= \langle x_1 \mid x_i \rangle + \dots + \langle x_k \mid x_i \rangle \\ &= \langle x_i \mid x_i \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $x_i = 0$.

Donc F_1, \dots, F_k sont en somme directe orthogonale. ■

8.3.2 Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Définition 8.37

Soient E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E .

On note F^\perp l'ensemble des vecteurs normaux à F :

$$F^\perp = \{v \in E \mid \forall x \in F, \langle v \mid x \rangle = 0\}.$$

Avec cette notation, on a clairement l'équivalence :

$$F \text{ et } G \text{ sont orthogonaux} \iff F \subseteq G^\perp \text{ ou, ce qui revient au même, } G \subseteq F^\perp.$$

Théorème 8.38

Soient E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E .

Alors F^\perp est un sous-espace vectoriel de E , orthogonal à F et donc en somme directe avec F .

Démonstration 8.39

Pour $x \in E$, on pose $\varphi_x : E \longrightarrow \mathbb{R}$
 $y \longmapsto \langle x \mid y \rangle$

Pour $x \neq 0$, on a $\varphi_x \neq 0$ (car $\varphi_x(x) = \langle x \mid x \rangle = \|x\|^2 > 0$).

Alors

$$\begin{aligned} F^\perp &= \{v \in E \mid \forall x \in F, \langle x \mid v \rangle = 0\} \\ &= \{v \in E \mid \forall x \in F, v \in \ker \varphi_x\} \\ &= \bigcap_{x \in F} \ker \varphi_x. \end{aligned}$$

Donc F^\perp est un sous-espace vectoriel de E .

De plus, par définition de F^\perp , on a $\forall x \in F, \forall y \in F^\perp, \langle x \mid y \rangle = 0$.

Donc F et F^\perp sont orthogonaux (et donc en somme directe). ■

Proposition 8.40

Soient E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E .

Alors $F \subseteq (F^\perp)^\perp$.

Remarque 8.41

En général, F^\perp n'est pas supplémentaire à F et F n'est pas égal à $(F^\perp)^\perp$.

Remarque 8.42

Dans le cas où F est une droite vectorielle dirigée par un vecteur u , on note plutôt $G = u^\perp$ l'orthogonal de F . Dans ce cas, u^\perp est un hyperplan et on dit alors que u est un vecteur normal à G .

Exercice 8.43

Montrez que si F est un sous-espace vectoriel de E , alors \overline{F} est un sous-espace vectoriel de E , que $F^\perp = \overline{F}^\perp$ et que F^\perp est fermé.

8.4 Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

8.4.1 Projection orthogonale

Définition 8.44

Soient E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

Alors F^\perp est un supplémentaire de F , appelé le supplémentaire orthogonal de F .

Le projecteur sur F parallèlement à F^\perp est appelé le projecteur orthogonal sur F .

La symétrie orthogonale par rapport à F est la symétrie par rapport à F parallèlement à F^\perp .

Si on connaît une base orthonormée (e_1, \dots, e_p) de F , alors il est facile de calculer la projection orthogonale de x sur F :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle x | e_i \rangle e_i.$$

Démonstration 8.45

On a $\dim F = p$.

F possède une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$.

Soit $x \in E$. On cherche $y \in F$ tel que $x - y \perp F$.

analyse

Si y existe alors $y \in F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ donc $y = \sum_{i=1}^p y_i e_i$.

On a $x - y \perp F$ donc pour $j \in \llbracket 1 ; p \rrbracket$, $x - y \perp e_j$, i.e.

$$\begin{aligned} \langle x - y | e_j \rangle &= 0 \\ \langle x | e_j \rangle - \langle y | e_j \rangle &= 0 \\ \langle x | e_j \rangle - y_j &= 0 \\ y_j &= \langle x | e_j \rangle. \end{aligned}$$

L'analyse prouve l'unicité de y .

synthèse

On pose $y = \sum_{i=1}^p \underbrace{\langle x | e_i \rangle}_{y_i} e_i$.

On a $y \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = F$.

Pour $j \in \llbracket 1 ; p \rrbracket$, on a

$$\begin{aligned}\langle x - y \mid e_j \rangle &= \langle x \mid e_j \rangle - \langle y \mid e_j \rangle \\ &= \langle x \mid e_j \rangle - y_j \\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc $x - y \perp F$.

conclusion

On a montré

$$\forall x \in E, \exists ! y \in F, x - y \in F^\perp$$

i.e.

$$\forall x \in E, \exists ! (y, z) \in F \times F^\perp, x = y + z$$

i.e.

$$E = F \oplus F^\perp. \quad \blacksquare$$

On en déduit l'inégalité de Bessel.

Proposition 8.46

Soient E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

Si p est le projecteur orthogonal sur F , alors pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

Démonstration 8.47

Soit $x \in E$.

On pose $y = p_F(x)$.

On a $x - y \perp F$ donc $x - y \perp y$ donc

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \|(x - y) + y\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 + \|y\|^2 \quad \left. \vphantom{\|x\|^2} \right\} \text{Pythagore} \\ &\geq \|y\|^2.\end{aligned}$$

D'où $\forall x \in E, \|p_F(x)\| \leq \|x\|$.

NB : on en déduit que p_F est continu. ■

8.4.2 Distance à un sous-espace vectoriel

Proposition 8.48

Soient E un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et $x \in E$.

Soit y la projection orthogonale de x sur F .

Pour tout $z \in F$, $\|x - y\| \leq \|x - z\|$, avec égalité ssi $z = y$.

Autrement dit, le projeté orthogonal de x sur F est l'unique vecteur de F qui minimise la distance entre x et un point de F .

$\|x - y\|$ est appelé la distance de x à F , c'est la plus petite des distances entre x et un élément de F , notée $d(x, F)$.

Démonstration 8.49

Pour $z \in F$, $z - y \in F$ et $y - x \in F^\perp$ donc $z - y \perp y - x$, donc

$$\begin{aligned} \|z - x\|^2 &= \|(z - y) + (y - x)\|^2 \\ &= \|z - y\|^2 + \|y - x\|^2 \quad \left. \vphantom{\|z - y\|^2} \right\} \text{Pythagore} \\ &\geq \|y - x\|^2. \end{aligned}$$

Si (e_1, \dots, e_p) est une base orthonormée de F , on a $y = \sum_{i=1}^p \langle x | e_i \rangle e_i$.

De plus, on a $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|x - y\|^2$ donc $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2$.

Or $\|y\|^2 = \sum_{i=1}^p \langle x | e_i \rangle^2$.

Donc $d(x, F) = \|x - y\| = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{i=1}^p \langle x | e_i \rangle^2}$. ■

Remarque 8.50

Tout ce qui précède est évidemment valable si E est de dimension finie.

Dans ce cas, pour tout sous-espace vectoriel F de E , F^\perp est un supplémentaire de F dans E .

Par conséquent, $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$.

Chapitre 9

Endomorphismes dans un espace euclidien

Sommaire

9.1	Adjoint d'un endomorphisme	263
9.1.1	Représentation des formes linéaires	263
9.1.2	Adjoint	264
9.1.3	Matrice de l'adjoint	268
9.1.4	Stabilité de sous-espaces vectoriels	270
9.2	Orientation d'un \mathbb{R}-espace vectoriel de dimension finie.	270
9.3	Isométries vectorielles	271
9.4	Matrices orthogonales	274
9.4.1	Déterminant d'une isométrie vectorielle	277
9.4.2	Changements de bases orthonormées	278
9.4.3	Produit mixte	279
9.4.4	Produit vectoriel en dimension 3	280
9.5	Étude en dimension 2	281
9.6	Réduction des isométries vectorielles ou des matrices orthogonales .	283
9.6.1	Réduction des isométries vectorielles	283
9.6.2	Réduction des matrices orthogonales	288
9.6.3	Étude en dimension 3	288
9.7	Endomorphismes auto-adjoints	294
9.7.1	Définition et propriétés	294
9.7.2	Théorème spectral	295
9.8	Endomorphismes auto-adjoints positifs, définis-positifs	298
9.8.1	Endomorphismes auto-adjoints positifs	298
9.8.2	Matrices symétriques positives	300

Dans tout ce chapitre, E désigne un espace euclidien de dimension n , muni du produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

9.1 Adjoint d'un endomorphisme

9.1.1 Représentation des formes linéaires

Le théorème suivant est parfois appelé théorème de représentation de Riesz.

Proposition 9.1

Soit φ une forme linéaire sur E .

Il existe un unique vecteur $v \in E$ tel que pour tout $x \in E$, $\varphi(x) = \langle v | x \rangle$.

Démonstration 9.2

On choisit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .

Soit $x \in E$ tel que $x = (x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{B}}$.

$$\text{On a } \varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i).$$

On pose alors $v = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))_{\mathcal{B}}$ de sorte que $\varphi(x) = \langle v | x \rangle$.

On a unicité par unicité des coordonnées d'un vecteur. ■

9.1.2 Adjoint

Lemme 9.3

Pour $a, b \in E$, on a

$$a = b \iff \forall x \in E, \langle a | x \rangle = \langle b | x \rangle.$$

Démonstration 9.4



Pour $x \in E$, on a $\langle a - b | x \rangle = 0$ donc $\langle a - b | a - b \rangle = 0$ donc $a - b = 0$ donc $a = b$.



Clair. ■

Proposition 9.5

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Il existe un unique endomorphisme $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle f(x) | y \rangle = \langle x | g(y) \rangle$.

Démonstration 9.6

Pour tout $y \in E$, l'application $E \longrightarrow \mathbb{R}$ est linéaire.
$$x \longmapsto \langle f(x) \mid y \rangle$$

D'après la Proposition 9.1, il existe un unique vecteur $g(y)$ tel que

$$\forall x \in E, \quad \langle f(x) \mid y \rangle = \langle g(y) \mid x \rangle.$$

On a donc construit une application $g : E \longrightarrow E$.

Soient $(y, z) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} \langle g(\lambda y + z) \mid x \rangle &= \langle f(x) \mid \lambda y + z \rangle \\ &= \lambda \langle f(x) \mid y \rangle + \langle f(x) \mid z \rangle \\ &= \lambda \langle g(y) \mid x \rangle + \langle g(z) \mid x \rangle \\ &= \langle \lambda g(y) + g(z) \mid x \rangle. \end{aligned}$$

On en déduit $g(\lambda y + z) = \lambda g(y) + g(z)$ d'après le Lemme 9.3. ■

Définition 9.7

L'endomorphisme g est appelé l'adjoint de f est noté f^* .

Par bilinéarité et symétrie du produit scalaire, on en déduit les propriétés élémentaires de l'adjonction.

Proposition 9.8

- (1) L'application $f \longmapsto f^*$ est linéaire.
- (2) Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, $f^{**} = f$.
- (3) Pour tout $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$, $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

Démonstration 9.9 (2)

Pour $(x, y) \in E^2$, on a

$$\langle f(x) \mid y \rangle = \langle x \mid f^*(y) \rangle = \langle f^{**}(x) \mid y \rangle.$$

D'après le Lemme 9.3, on a $f(x) = f^{**}(x)$.

Donc $f = f^{**}$. ■

Démonstration 9.10 (3)

Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a

$$\begin{aligned}\langle f \circ g(x) \mid y \rangle &= \langle f(g(x)) \mid y \rangle \\ &= \langle g(x) \mid f^*(y) \rangle \\ &= \langle x \mid g^*(f^*(x)) \rangle \\ &= \langle x \mid g^* \circ f^*(y) \rangle.\end{aligned}$$

Par unicité de l'adjoint, $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$. ■

Démonstration 9.11 (1)

Soient $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a

$$\begin{aligned}\langle (\lambda f + g)(x) \mid y \rangle &= \langle \lambda f(x) + g(x) \mid y \rangle \\ &= \lambda \langle f(x) \mid y \rangle + \langle g(x) \mid y \rangle \\ &= \lambda \langle x \mid f^*(y) \rangle + \langle x \mid g^*(y) \rangle \\ &= \langle x \mid \lambda f^*(y) + g^*(y) \rangle \\ &= \langle x \mid (\lambda f^* + g^*)(y) \rangle.\end{aligned}$$

Par unicité de l'adjoint, $(\lambda f + g)^* = \lambda f^* + g^*$. ■

Exercice 9.12

Montrez que si f est un projecteur orthogonal, alors $f^* = f$.

Correction 9.13

Soit f un projecteur orthogonal.

Comme E est de dimension finie, on a $E = \text{Im } f \oplus \ker f$.

On choisit une base orthonormée de $\ker f$ et de $\text{Im } f$: en les concaténant, on obtient une base orthonormée de E

$$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n).$$

Soit $(x, y) \in E^2$. On a

$$f(x) = \sum_{i=1}^r \langle x \mid e_i \rangle e_i \quad \text{et} \quad f(y) = \sum_{i=1}^r \langle y \mid e_i \rangle e_i.$$

Alors

$$\begin{aligned}\langle f(x) | y \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^r \langle x | e_i \rangle e_i \mid y \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^r \langle x | e_i \rangle \langle e_i | y \rangle \\ &= \left\langle x \mid \sum_{i=1}^r \langle e_i | y \rangle e_i \right\rangle \\ &= \langle x | f(y) \rangle.\end{aligned}$$

Donc $f = f^*$.

Exercice 9.14

Premièrement,

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Montrez que $\text{Im } f^* = (\ker f)^\perp$ et $\ker f^* = (\text{Im } f)^\perp$.

Comparez $\text{rg } f$ et $\text{rg } f^*$.

Correction 9.15

Soit $y \in \text{Im } f^*$. Il existe $a \in E$ tel que $f^*(a) = y$.

Alors pour $x \in \ker f$, on a

$$\langle x | y \rangle = \langle x | f^*(a) \rangle = \langle a | f(x) \rangle = 0.$$

Donc $x \perp y$ et donc $y \in (\ker f)^\perp$.

Donc $\text{Im } f^* \subseteq (\ker f)^\perp$.

Deuxièmement,

Soient $x \in \ker f^*$ et $y \in \text{Im } f$.

Il existe $a \in E$ tel que $f(a) = y$.

Donc

$$\langle x | y \rangle = \langle x | f(a) \rangle = \langle f^*(x) | a \rangle = 0.$$

Donc $x \perp y$, donc $x \in (\text{Im } f)^\perp$ et donc $\ker f^* \subseteq (\text{Im } f)^\perp$.

De plus, on a

$$\dim \text{Im } f^* \leq \dim (\ker f)^\perp = n - \dim \ker f = \dim \text{Im } f$$

et

$$\dim \ker f^* \leq \dim (\text{Im } f)^\perp = n - \dim \text{Im } f = \dim \ker f.$$

Or $\dim \ker f^* = n - \dim \operatorname{Im} f^* \leq n - \dim \operatorname{Im} f$ donc

$$\dim \operatorname{Im} f^* \geq \dim \operatorname{Im} f.$$

D'où

$$\dim \operatorname{Im} f^* = \dim \operatorname{Im} f = n - \dim \ker f = \dim (\ker f)^\perp$$

et

$$\dim \ker f^* = \dim \ker f = n - \dim \operatorname{Im} f = \dim (\operatorname{Im} f)^\perp.$$

Donc on a

$$\operatorname{Im} f^* = (\ker f)^\perp$$

et

$$\ker f^* = (\operatorname{Im} f)^\perp$$

et

$$\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f^*.$$

Exercice 9.16

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Montrez que $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} (f^* \circ f)$.

Correction 9.17

Pour tout $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$, on a

$$\begin{cases} \operatorname{rg} (g \circ f) \leq \operatorname{rg} f & (1) \\ \operatorname{rg} (f \circ g) \leq \operatorname{rg} f & (2) \end{cases}$$

En effet, on a $\operatorname{Im} (f \circ g) \subseteq \operatorname{Im} f$ donc (2) et on a $\ker f \subseteq \ker (f \circ g)$ et le théorème du rang donc (1).

Pour avoir $\operatorname{rg} (f^* \circ f) = \operatorname{rg} f$, il suffit donc de montrer que $\ker f = \ker (f^* \circ f)$.

On a clairement $\ker f \subseteq \ker (f^* \circ f)$.

Soit $x \in \ker (f^* \circ f)$.

On a $f^* \circ f(x) = 0$ donc $\langle f^* \circ f(x) | x \rangle = 0$ donc $\langle f(x) | f(x) \rangle = 0$ donc $\|f(x)\| = 0$ donc $f(x) = 0$.

Donc $x \in \ker f$ et donc $\ker (f^* \circ f) \subseteq \ker f$.

9.1.3 Matrice de l'adjoint

Proposition 9.18

Soient \mathcal{B} une base orthonormée de E et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$.

$$\text{On a } g = f^* \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \left(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \right)^{\top}.$$

Démonstration 9.19

Soit \mathcal{B} une base orthonormée de E .

Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, et x, y de coordonnées X, Y dans \mathcal{B} .

On pose $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

$f(x)$ a pour coordonnées AX dans \mathcal{B} .

Donc

$$\begin{aligned} \langle f(x) | y \rangle &= (AX)^{\top} Y \\ &= X^{\top} A^{\top} Y \\ &= \langle x | f^*(y) \rangle \\ &= X^{\top} (BY) \end{aligned}$$

où $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*)$.

Donc $\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$, $X^{\top} A^{\top} Y = X^{\top} B Y$.

Donc $B = A^{\top}$.

Et réciproquement. ■

Remarque 9.20

Attention, ceci n'est valable qu'en base orthonormée. En base quelconque, c'est plus compliqué.

Exercice 9.21

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable.

Montrez l'équivalence

$$f^* = f^2 \iff f \text{ est un projecteur orthogonal.}$$

Correction 9.22

\Leftarrow Si f est un projecteur orthogonal, alors $f = f^*$ (cf. Exercice 9.12) et $f = f^2$ donc $f^* = f^2$.

\Rightarrow

En base orthonormée, la matrice A de f vérifie $A^\top = A^2$.

Donc $A = (A^2)^\top = (A^\top)^2 = (A^2)^2 = A^4$.

Donc $X^4 - X$ est un polynôme annulateur de A .

Donc μ_A , polynôme minimal de A , divise $X^4 - X$ et est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$.

Or $X^4 - X = X(X-1)(X^2 + X + 1)$.

Donc $\mu_A = X$ ou $\mu_A = X - 1$ ou $\mu_A = X(X-1)$ i.e. $f = 0$ ou $f = \text{id}_E$ ou $f^2 = f$.

Dans tous les cas, f est projecteur.

9.1.4 Stabilité de sous-espaces vectoriels

Une propriété remarquable et utile pour la suite du cours.

Proposition 9.23

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E .

Si F est stable par f , alors F^\perp est stable par f^* .

Démonstration 9.24

On veut montrer que pour tout $x \in F^\perp$, $f^*(x) \in F^\perp$.

Soient $x \in F^\perp$ et $y \in F$.

On a $\langle f^*(x) | y \rangle = \langle x | f(y) \rangle$.

Or $y \in F$ et F est stable par f donc $f(y) \in F$.

Or $x \in F^\perp$ donc $\langle x | f(y) \rangle = 0$.

Donc $f^*(x) \perp y$ donc $f^*(x) \in F^\perp$. ■

9.2 Orientation d'un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

Définition 9.25

On dit que deux bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de E ont la même orientation quand $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' > 0$, sinon on dit qu'elles sont d'orientations contraires.

Orienter E , c'est choisir une base de référence et déclarer directes toutes les bases qui ont la même orientation que cette base de référence. Les bases de l'autre classe d'équivalence sont dites indirectes (ou rétrogrades).

En géométrie classique, dans le plan ou l'espace, on convient systématiquement d'une orientation.

Dans toute la suite, E désigne un espace euclidien de dimension n . On suppose aussi que E est orienté.

9.3 Isométries vectorielles

Définition 9.26

On appelle isométrie vectorielle (ou automorphisme orthogonal) tout endomorphisme de E qui conserve la norme : pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$.

Remarque 9.27

L'appellation « automorphisme » n'est pas usurpée.

Démonstration 9.28

Si f est une isométrie vectorielle, alors $\ker f = \{0\}$ car si $f(x) = 0$, alors $\|f(x)\| = 0$ donc $\|x\| = 0$ donc $x = 0$.

Comme E est de dimension finie, f est un automorphisme. ■

L'ensemble des isométries vectorielles de E est noté $\mathcal{O}(E)$.

Proposition 9.29

$\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $(\text{GL}(E), \circ)$.

Démonstration 9.30

On vient de montrer que $\mathcal{O}(E) \subseteq \text{GL}(E)$.

De plus, $\text{id}_E \in \mathcal{O}(E)$.

Enfin, pour $(f, g) \in \mathcal{O}(E)$ et $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} \|g \circ f(x)\| &= \|g(f(x))\| \\ &= \|f(x)\| \\ &= \|x\|. \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} g \text{ conserve la norme} \\ \left. \right\} f \text{ conserve la norme} \end{array}$$

Donc $g \circ f \in \mathcal{O}(E)$.

De plus, pour $f \in \mathcal{O}(E)$, on a

$$\|f^{-1}(x)\| = \|f(f^{-1}(x))\| = \|x\|$$

donc $f^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.

Donc $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$. ■

Les symétries orthogonales sont des isométries vectorielles. Parmi celles-ci, on distingue les symétries orthogonales par rapport à un hyperplan : on les appelle les réflexions.

On peut caractériser les isométries vectorielles de diverses façons.

Proposition 9.31

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) f est une isométrie vectorielle
- (2) f conserve le produit scalaire : pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle f(x) | f(y) \rangle = \langle x | y \rangle$
- (3) f transforme toute base orthonormée en base orthonormée
- (4) f est un automorphisme et $f^* = f^{-1}$, ou, ce qui revient au même : $f^* \circ f = \text{id}_E$.

Démonstration 9.32 ((1) \implies (2))

Soient $f \in \mathcal{O}(E)$ et $(x, y) \in E^2$.

On a, d'après Al-Kashi

$$\begin{aligned} \langle f(x) | f(y) \rangle &= \frac{\|f(x) + f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2}{2} \\ &= \frac{\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2} \\ &= \langle x | y \rangle. \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \downarrow f \text{ conserve la norme} \\ \downarrow \text{Al-Kashi} \end{array} \right\} \quad \text{■}$$

Démonstration 9.33 ((2) \implies (1))

On a $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle f(x) | f(y) \rangle = \langle x | y \rangle$.

Donc $\forall x \in E$, $\langle f(x) | f(x) \rangle = \langle x | x \rangle$.

Donc $\forall x \in E$, $\|f(x)\|^2 = \|x\|^2$.

Donc $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$.

Donc f est une isométrie vectorielle. ■

Démonstration 9.34 ((1) \implies (3))

Soient $f \in \mathcal{O}(E)$ et (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée de E .

f conserve la norme donc pour tout $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, $\|f(e_i)\| = \|e_i\| = 1$.

f conserve le produit scalaire donc pour tout $(i, j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$, si $i \neq j$, alors $\langle f(e_i) | f(e_j) \rangle = \langle e_i | e_j \rangle = 0$.

Donc $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille orthonormée de E , espace de dimension n , donc une base orthonormée de E . ■

Démonstration 9.35 ((3) \implies (1))

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E telle que $\mathcal{B}' = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ soit aussi une base orthonormée de E .

Soit $x \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$. On a $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ car \mathcal{B} est orthonormée.

Or $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ donc $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i)$.

Donc $f(x) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$.

Or \mathcal{B}' est orthonormée donc

$$\|f(x)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \|x\|.$$

Donc $f \in \mathcal{O}(E)$. ■

Démonstration 9.36 ((1) \iff (4))

On a

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{O}(E) &\iff \forall (x, y) \in E^2, \langle f(x) | f(y) \rangle = \langle x | y \rangle \\ &\iff \forall (x, y) \in E^2, \langle x | f^* \circ f(y) \rangle = \langle x | y \rangle \\ &\iff \forall y \in E, f^* \circ f(y) = y && \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{Lemme 9.3} \\ &\iff f^* \circ f = \text{id}_E \\ &\iff f^* = f^{-1}. \end{aligned}$$

■

Exercice 9.37

Soient E un espace euclidien, $a \in E \setminus \{0\}$ et $k \in \mathbb{R}$. On pose $f : x \mapsto x + k \langle x | a \rangle a$.

Montrez que f est linéaire, puis déterminez les conditions sur a et k pour que f soit une isométrie vectorielle.

Dans ce cas, reconnaissez-la.

Correction 9.38

Soient $(x, y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a

$$\begin{aligned} f(\lambda x + y) &= \lambda x + y + k \langle \lambda x + y | a \rangle a \\ &= \lambda(x + k \langle x | a \rangle a) + y + k \langle y | a \rangle a \\ &= \lambda f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Si $k = 0$, alors $f = \text{id}_E \in \mathcal{O}(E)$.

Supposons $k \neq 0$.

Pour tout $x \in a^\perp$, on a $f(x) = x$.

On a $f(a) = a + k \|a\|^2 a = (1 + k \|a\|^2) a$.

Si f conserve la norme, alors $\|f(a)\| = \|a\|$ donc $1 + k \|a\|^2 = -1$ donc $k = \frac{-2}{\|a\|^2}$.

Réciproquement, si $k = \frac{-2}{\|a\|^2}$ alors $\begin{cases} \forall x \in a^\perp, f(x) = x \\ f(a) = -a \end{cases}$ donc f est la réflexion par rapport à a^\perp .

9.4 Matrices orthogonales

Proposition 9.39

Soient \mathcal{B} une base orthonormée de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

On a $f \in \mathcal{O}(E) \iff A^\top A = I_n$.

Attention ! Ceci n'est valable que si la base \mathcal{B} est orthonormée.

Définition 9.40

Une matrice carrée A est dite orthogonale quand $A^\top A = I_n$, ce qui est équivalent à $AA^\top = I_n$ ou A est inversible et $A^{-1} = A^\top$.

Proposition 9.41

Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale quand ses colonnes sont de norme 1 et deux à deux orthogonales pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Cela est également valable pour les lignes de la matrice.

Démonstration 9.42

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On pose $A^T A = (b_{i,j})$, où $\forall (i, j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$, $b_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j}$.

Alors A est orthogonale ssi $A^T A = I_n$, i.e.

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2, \quad b_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Or

$$\begin{aligned} b_{i,i} = 1 &\iff \sum_{k=1}^n a_{k,i}^2 = 1 \\ &\iff \text{la norme de la } i\text{-ème colonne est } 1. \end{aligned}$$

Pour $i \neq j$, $b_{i,j} = 0$ ssi le produit scalaire canonique des colonnes i et j est nul. ■

Exercice 9.43

Vérifiez que la matrice $M = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale, puis montrez qu'elle est la matrice d'une symétrie orthogonale donc vous préciserez les éléments caractéristiques.

Correction 9.44

On a

$$\frac{1}{7} \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| = 1 \quad \frac{1}{7} \left\| \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = 1 \quad \frac{1}{7} \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\| = 1$$

et

$$\left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = -12 + 18 - 6 = 0 \quad \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle = 6 + 12 - 18 = 0 \quad \left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle = -18 + 6 + 12 = 0.$$

Donc M est orthogonale : on a $M^T = M^{-1}$.

On remarque que M est symétrique : $M^T = M$.

Donc $M = M^{-1}$ i.e. $M^2 = I_3$.

Si on note f l'endomorphisme de matrice M dans une base orthonormée, f est une isométrie vectorielle et une symétrie, donc f est une symétrie orthogonale.

Les valeurs propres de f sont 1 et -1 .

f est la symétrie orthogonale par rapport à $\text{sep}(f, 1)$.

Or $n = 3$ et $\text{tr } f = 1$ donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

f est donc une réflexion par rapport au plan d'équation $3x - 2y + z = 0$.

Exercice 9.45

Déterminez les réels a et b tels que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ soit orthogonale. Reconnaissez la nature de l'isométrie vectorielle de matrice A dans une base orthonormée \mathcal{B} .

Correction 9.46

La matrice A est orthogonale ssi

$$\begin{cases} a^2 + 2b^2 = 1 \\ 2ab + b^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 + 2b^2 = 1 \\ b(b + 2a) = 0 \end{cases}$$

Les solutions sont les couples $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(1/3, -2/3)$ et $(-1/3, 2/3)$.

On a donc $A = I_3$ ou $A = -I_3$ ou (1) $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ ou (2) $A = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Dans le cas (1), on a $AX = X \iff x + y + z = 0$ donc A est la matrice de la réflexion par rapport au plan d'équation $x + y + z = 0$.

Dans le cas (2), on a $AX = X \iff \begin{cases} y = x \\ z = x \end{cases}$ donc A est la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\text{Vect}((1, 1, 1))$.

L'ensemble des matrices orthogonales est noté $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 9.47

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact de $(\text{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$.

Démonstration 9.48

Soient E un espace euclidien de dimension n , \mathcal{B} une base orthonormée de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans la base \mathcal{B} .

On a $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \iff f \in \mathcal{O}(E)$.

Comme $\mathcal{O}(E)$ est un groupe pour \circ , $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe pour \times via l'isomorphisme de groupes

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{O}(E), \circ) & \xrightarrow{\sim} & (\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times) \\ f & \mapsto & A \end{array}$$

Si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\forall j \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, \sum_{i=1}^n a_{i,j}^2 = 1$$

donc

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2, 0 \leq a_{i,j}^2 \leq 1 \text{ i.e. } |a_{i,j}| \leq 1$$

donc $\|A\|_\infty \leq 1$, donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est borné.

De plus, on a $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^\top M = I_n\}$.

On pose $\varphi : M \mapsto M^\top M$ continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Or $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(\{I_n\})$ et $\{I_n\}$ fermé donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ fermé.

Enfin, comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. ■

9.4.1 Déterminant d'une isométrie vectorielle

Proposition 9.49

Si $f \in \mathcal{O}(E)$, alors $\det f \in \{-1, 1\}$.

Démonstration 9.50

Soit $f \in \mathcal{O}(E)$.

Dans une base orthonormée \mathcal{B} de E , $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est orthogonale.

Donc $A^\top A = I_n$.

Or $\det A^\top = \det A$ donc

$$\det(A^\top A) = \det A^\top \times \det A = (\det A)^2 = 1.$$

Donc $\det A \in \{-1, 1\}$. ■

La réciproque est bien sûr fausse.

Les isométries vectorielles de déterminant 1 sont celles qui conservent l'orientation : les transforment les bases orthonormées directes en bases orthonormées directes. On les appelle les isométries vectorielles directes ou positives.

On note $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1 et $\mathcal{SO}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles positives.

Proposition 9.51

$\mathcal{SO}(E)$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$, appelé groupe spécial orthogonal de E .

$\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, appelé groupe spécial orthogonal d'ordre n .

Les réflexions sont des isométries négatives.

9.4.2 Changements de bases orthonormées

Proposition 9.52

Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases orthonormées de E .

La matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' est une matrice orthogonale.

Démonstration 9.53

On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$.

On note $\mathcal{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = (p_{i,j})$.

Pour tout $j \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, on a $e'_j = \sum_{i=1}^n p_{i,j} e_i$.

Les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' étant orthonormées, on a

$$\forall j \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, \quad \|e'_j\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n p_{i,j}^2} = 1$$

et

$$\forall (j, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2, \quad j \neq k \implies \langle e'_j | e'_k \rangle = \sum_{i=1}^n p_{i,j} p_{i,k} = 0.$$

Donc $\mathcal{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. ■

Remarque 9.54

De plus, si \mathcal{B} et \mathcal{B}' ont la même orientation, alors $\det \mathcal{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} > 0$ donc $\det \mathcal{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = 1$.

Si elles sont de sens contraires, alors $\det \mathcal{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} < 0$ donc $\det \mathcal{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = -1$.

L'intérêt de ce genre de changement de bases est que la difficulté liée au calcul de l'inverse de la matrice de passage disparaît :

$X = PX'$ est équivalent à $X' = P^\top X$ donc $A' = P^{-1}AP$ devient $A' = P^\top AP$.

9.4.3 Produit mixte

Proposition 9.55

Soit (v_1, \dots, v_n) une famille de n vecteurs de E .

Le déterminant de (v_1, \dots, v_n) dans une base orthonormée directe ne dépend pas du choix de cette base.

Démonstration 9.56

Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases orthonormées directes de E .

D'après la Remarque 9.54, on a $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' = 1$.

Donc

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) &= \det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' \times \det_{\mathcal{B}'}(v_1, \dots, v_n) \\ &= \det_{\mathcal{B}'}(v_1, \dots, v_n). \end{aligned}$$

■

Dans ce cas, on appelle produit mixte de (v_1, \dots, v_n) le déterminant de cette famille dans n'importe quelle base orthonormée directe : il est noté habituellement $\text{Det}(v_1, \dots, v_n)$ ou $[v_1, \dots, v_n]$.

Une conséquence directe de la définition du produit mixte est la caractérisation des bases directes.

Proposition 9.57

Soit (v_1, \dots, v_n) une famille de n vecteurs de E .

La famille (v_1, \dots, v_n) est une base directe de E ssi $[v_1, \dots, v_n] > 0$.

9.4.4 Produit vectoriel en dimension 3

Dans ce paragraphe, $n = 3$.

Proposition 9.58

Soit $(u, v) \in E^2$.

Il existe un unique vecteur $w \in E$ tel que pour tout $x \in E$, $[u, v, x] = \langle w | x \rangle$.

Ce vecteur est appelé le produit vectoriel de u et v et est noté $u \wedge v$ ou $u \times v$.

Démonstration 9.59

Pour $(u, v) \in E^2$, l'application $x \mapsto [u, v, x]$ est une forme linéaire sur E .

Ainsi, d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique vecteur w tel que

$$\forall x \in E, [u, v, x] = \langle w | x \rangle.$$

■

En base orthonormée directe, les coordonnées du produit vectoriel se calculent facilement. En base quelconque, c'est beaucoup plus pénible.

Notons quelques propriétés algébriques et géométriques du produit vectoriel.

Proposition 9.60

- ▷ L'application \wedge est bilinéaire et antisymétrique.
- ▷ $u \wedge v = 0$ ssi u et v sont colinéaires.
- ▷ Si u et v ne sont pas colinéaires, alors $u \wedge v$ est un vecteur normal au plan $\text{Vect}(u, v)$ et la famille $(u, v, u \wedge v)$ est une base directe de E .
- ▷ Si u et v sont unitaires et orthogonaux, alors la famille $(u, v, u \wedge v)$ est une base orthonormée directe de E .

Démonstration 9.61

On reprend les mêmes notations.

- ▷ L'application \wedge est bilinéaire antisymétrique car le produit mixte est trilinéaire alterné.
- ▷ Si u et v sont colinéaires, on a $\forall x \in E, [u, v, x] = 0$ donc $u \wedge v = 0$.

Réciproquement, si u et v ne sont pas colinéaires alors $\text{Vect}(u, v)$ est un plan.

On choisit $x \in E$ normal à ce plan et on obtient une base de E : (u, v, x) .

Alors $[u, v, x] \neq 0$, donc $\langle u \wedge v | x \rangle \neq 0$ donc $u \wedge v \neq 0$.

► Si u et v ne sont pas colinéaires, on a

$$\langle u \wedge v \mid u \rangle = [u, v, u] = 0 \text{ donc } u \wedge v \perp u$$

et

$$\langle u \wedge v \mid v \rangle = [u, v, v] = 0 \text{ donc } u \wedge v \perp v$$

donc $u \wedge v \perp \text{Vect}(u, v)$.

De plus, on a

$$[u, v, u \wedge v] = \langle u \wedge v \mid u \wedge v \rangle = \|u \wedge v\|^2 > 0$$

donc $(u, v, u \wedge v)$ est une base directe de E .

► Pour tout $(u, v) \in E^2$, $\|u \wedge v\|^2 + \langle u \mid v \rangle^2 = \|u\|^2 \|v\|^2$.

On choisit une base orthonormée directe \mathcal{B} de E .

On note $u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $v \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

En posant $X = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}$, $Y = -\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}$ et $Z = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$, on a alors $u \wedge v \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et

$$\begin{aligned} \|u \wedge v\|^2 + \langle u \mid v \rangle^2 &= (yz' - y'z)^2 + (xz' - x'z)^2 + (xy' - x'y)^2 + (xx' + yy' + zz')^2 \\ &= (x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2). \end{aligned}$$

■

9.5 Étude en dimension 2

Proposition 9.62

$\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ contient exclusivement les matrices suivantes :

► les matrices de rotation $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

► les matrices de réflexions $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$

où θ est un réel quelconque.

Démonstration 9.63

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ de déterminant 1. On a

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \\ ad - bc = 1 \end{cases}$$

donc il existe $\theta, \alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} a = \cos \theta \\ b = \sin \theta \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} c = \cos \alpha \\ d = \sin \alpha \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{cases} ac + bd = 0 = \cos(\alpha - \theta) \\ ad - bc = 1 = \sin(\alpha - \theta) \end{cases}$$

Donc $\alpha - \theta \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi]$ i.e. $\alpha \equiv \frac{-\pi}{2} + \theta [2\pi]$, d'où

$$\begin{cases} c = -\sin \theta \\ d = \cos \theta \end{cases}$$

$$\text{i.e. } A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

De même, si $\det A = -1$, on obtient $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$.

Et réciproquement. ■

L'ensemble des matrices de rotation forme le sous-groupe $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$: c'est l'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1.

Il est remarquable que ce groupe est commutatif, car en dimension $n \geq 3$, ce n'est plus le cas. En effet, il est facile de constater que l'application $\theta \mapsto R(\theta)$ est un morphisme surjectif de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$ (dont le noyau est le sous-groupe $2\pi\mathbb{Z}$ de $(\mathbb{R}, +)$).

Autrement dit, l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{U} & \longrightarrow & \mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) \\ e^{i\theta} & \longmapsto & R(\theta) \end{array}$ est un isomorphisme de groupes.

Démonstration 9.64

On a donc bien

$$\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{ R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

et on remarque

$$\begin{cases} R(\theta + \theta') = R(\theta) R(\theta') = R(\theta') R(\theta) \\ R(-\theta) = R(\theta)^{-1} \end{cases}$$

■

Proposition 9.65

En dimension 2, les isométries vectorielles sont :

- ▷ les rotations vectorielles
- ▷ les réflexions vectorielles.

Remarque 9.66

On pose, pour $\theta \in \mathbb{R}$, $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$.

$S(\theta)$ est orthogonale et symétrique donc $S(\theta)^2 = I_2$, donc $S(\theta)$ est la matrice d'une symétrie orthogonale.

Donc comme $S(\theta)$ n'est ni I_2 ni $-I_2$, il s'agit de la matrice d'une réflexion.

Or on a

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ \sin \theta/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta - \theta/2) \\ \sin(\theta - \theta/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos \theta)/2 \\ (\sin \theta)/2 \end{pmatrix}.$$

9.6 Réduction des isométries vectorielles ou des matrices orthogonales

9.6.1 Réduction des isométries vectorielles

D'abord, deux résultats généraux sur les isométries vectorielles.

Proposition 9.67

Soit $f \in \mathcal{O}(E)$. On a :

- ▷ $\text{Sp}(f) \subseteq \{-1, 1\}$
- ▷ Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f , alors F^\perp est aussi un sous-espace vectoriel de E stable par f .

Démonstration 9.68

► Soient λ une valeur propre de f (s'il en existe) et x un vecteur propre associé.

On a $f(x) = \lambda x$ donc

$$\|f(x)\| = |\lambda| \|x\| = \|x\| \neq 0.$$

Donc $|\lambda| = 1$ i.e. $\lambda \in \{-1, 1\}$.

► Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f .

D'après la Proposition 9.23, F^\perp est stable par f^* .

Or $f \in \mathcal{O}(E)$ donc $f^* = f^{-1}$, donc $f^{-1}(F^\perp) \subseteq F^\perp$.

Or f^{-1} est un automorphisme de E donc f^{-1} conserve la dimension, donc $\dim f^{-1}(F^\perp) = \dim F^\perp$.

D'où $f^{-1}(F^\perp) = F^\perp$ et donc $F^\perp = f(F^\perp)$. ■

Lemme 9.69

Si E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$, alors il existe une droite ou un plan de E stable par f .

Démonstration 9.70

Si f possède une valeur propre réelle, la droite vectorielle dirigée par n'importe quel vecteur propre associé est stable par f .

Sinon, on choisit une base \mathcal{B} de E et on pose $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

A ne possède aucune valeur propre réelle mais a au moins une valeur propre complexe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

On choisit $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de A associé à λ .

On a $Z = X + iY$ où $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$.

On pose $x, y \in E$ tels que x et y aient pour coordonnées X et Y dans la base \mathcal{B} .

On veut montrer que $\text{Vect}(x, y)$ est stable par f et est un plan de E .

On note $\lambda = a + ib$ où $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

On a $AZ = \lambda Z$ donc

$$A(X + iY) = (a + ib)(X + iY)$$

$$AX + iAY = aX - bY + i(aY + bX)$$

donc

$$\begin{cases} AX = aX - bY \\ AY = bX + aY \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} f(x) = ax - by \in \text{Vect}(x, y) \\ f(y) = bx + ay \in \text{Vect}(x, y) \end{cases}$$

Donc $\text{Vect}(x, y)$ est stable par f .

Supposons maintenant par l'absurde que x et y sont colinéaires.

Comme $Z \neq 0$, x ou y est non-nul.

Supposons, par exemple, que $y = \alpha x$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$.

On a $AZ = \lambda Z$ donc

$$\begin{aligned} A(X + iY) &= A(X + i\alpha X) \\ &= (a + ib)(X + i\alpha X) \end{aligned}$$

donc

$$(1 + i\alpha)AX = (1 + i\alpha)(a + ib)X$$

$$AX = (a + ib)X$$

$$\text{donc } AX + 0i = AX + ibX \text{ donc } \begin{cases} AX = aX \\ 0 = bX \end{cases}$$

Or $b \neq 0$ et $x \neq 0$: contradiction.

De même si $x = \alpha y$ avec $y \neq 0$.

Donc x et y ne sont pas colinéaires *i.e.* $\text{Vect}(x, y)$ est un plan. ■

De ces propriétés découlent le théorème suivant.

Théorème 9.71

Soit $f \in \mathcal{O}(E)$.

Il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs, les blocs étant des scalaires 1 ou -1 ou des matrices $(2, 2)$ de rotation.

Les matrices diagonales par blocs sont donc du type suivant :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ & & & & & & \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \\ & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & \cos \theta_k & -\sin \theta_k \\ & & & & & & & & \sin \theta_k & \cos \theta_k \end{pmatrix}.$$

Démonstration 9.72

On raisonne par récurrence sur $n = \dim E$.

On pose $\mathcal{P}(n)$: « si E est de dimension n et si $f \in \mathcal{O}(E)$, alors il existe une base orthonormée ... »

► $n = 1$

Si $f \in \mathcal{O}(E)$ alors $f = \text{id}_E$ ou $f = -\text{id}_E$ donc dans n'importe quelle base \mathcal{B} , $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = (1)$ ou (-1) .

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

► $n = 2$

Si $f \in \mathcal{O}(E)$, d'après la Proposition 9.62, f est une rotation et il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que dans n'importe quelle base orthonormée directe, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = R(\theta)$; ou f est une réflexion, *i.e.* une symétrie orthogonale par rapport à une droite donc il existe une base orthonormée dans laquelle $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

► Pour $n \geq 3$, supposons que $\mathcal{P}(n-2)$ et $\mathcal{P}(n-1)$ sont vraies, que $\dim E = n$ et que $f \in \mathcal{O}(E)$.

D'après le Lemme 9.69, f possède une droite stable ou un plan stable et d'après la Proposition 9.67, l'orthogonal de ce sous-espace vectoriel stable est aussi stable par f .

— Si f possède une droite stable D :

Alors D est une droite propre associée à une valeur propre 1 ou -1 de f .

g , l'endomorphisme induit par f dans l'hyperplan D^\perp , est une isométrie vectorielle de D^\perp .

Or $\dim D^\perp = n-1$ donc d'après $\mathcal{P}(n-1)$, il existe une base orthonormée \mathcal{B}^\perp de D^\perp dans laquelle

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}^\perp}(g) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \\ & & & & & & R(\theta_1) & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & R(\theta_k) \end{pmatrix}.$$

En choisissant un vecteur directeur unitaire u de D , on obtient $\mathcal{B} = (u, \mathcal{B}^\perp)$ une base

orthonormée de E telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \pm 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & -1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & -1 \\ & & & & & & & R(\theta_1) & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & R(\theta_k) \end{pmatrix}.$$

— Si f possède un plan stable P :

Alors P^\perp est stable par f .

L'endomorphisme induit par f dans P est une isométrie vectorielle de P .

Or $\dim P = 2$ donc il existe une base orthonormée de P dans laquelle l'endomorphisme induit par f dans P a pour matrice $R(\theta)$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

L'endomorphisme induit par f dans P^\perp est une isométrie vectorielle de P^\perp , or $\dim P^\perp = n-2$.

D'après $\mathcal{P}(n-2)$, ...

En concaténant deux bases orthonormées de P et P^\perp , on obtient une base \mathcal{B} dans laquelle

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} R(\theta) & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & -1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & -1 \\ & & & & & & & R(\theta_1) & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & R(\theta_k) \end{pmatrix}$$

ou

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & -1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & -1 & \\ & & & & & & & & R(\theta_1) & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & R(\theta_k) \end{pmatrix}$$

Dans les deux cas, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. ■

9.6.2 Réduction des matrices orthogonales

Définition 9.73

Soient A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit que A et B sont orthogonalement semblables (ou orthosemblables) quand il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP = P^{\top}AP$.

Deux matrices sont orthosemblables quand elles représentent le même endomorphisme dans des bases orthonormées différentes.

Le théorème de réduction précédent a une traduction matricielle.

Théorème 9.74

Toute matrice orthogonale est orthosemblable à une matrice diagonale par blocs du type ci-dessus.

Pour tout $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale par blocs comme ci-dessus telles que $A = P^{\top}DP$.

9.6.3 Étude en dimension 3

À l'aide de ce résultat, on peut classer les isométries vectorielles de E en dimension 3. Seule la réduction des rotations est au programme.

Dans la suite de cette section, E est un espace euclidien de dimension 3 et orienté.

Proposition 9.75

Soit $f \in \mathcal{O}(E)$. On pose $F = \ker(f - \text{id}_E)$. Alors

- si $\dim F = 3$, alors $f = \text{id}_E$
- si $\dim F = 2$, alors f est la réflexion par rapport à F
- si $\dim F = 1$, alors f est une rotation d'axe F
- si $\dim F = 0$, alors f est une antirotation, c'est-à-dire la composée d'une rotation et d'une réflexion dont l'axe et le plan de base respectifs sont orthogonaux.

Démonstration 9.76

Si $\dim F = 1$, d'après le Théorème 9.71, il existe une base orthonormée \mathcal{B} telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ? \end{pmatrix}$$

où le bloc $?$ est $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = R(\pi)$ ou $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = R(\theta)$.

On pose $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

On a $f(e_1) = e_1$.

Dans le plan F^\perp , stable par f , l'endomorphisme induit par f est une rotation « d'angle θ » (ou $-\theta$ selon l'orientation choisie de F^\perp).

On choisit l'orientation de F^\perp de sorte que \mathcal{B} soit directe.

Ce qui caractérise f , c'est le couple (e_1, θ) : e_1 dirige F et θ est l'angle associé.

Pour déterminer e_1 , on résout $f(e_1) = e_1$ et on choisit une solution de norme 1.

Pour déterminer l'angle θ associé, on choisit un vecteur $v \neq 0$ orthogonal à e_1 puis on calcule $f(v)$ et $e_1 \wedge v$.

Comme $\|e_1\| = 1$, on a $\|e_1 \wedge v\| = \|v\| = \|f(v)\|$.

Alors $f(v) = \cos(\theta)v + \sin(\theta)(e_1 \wedge v)$.

On en déduit $\cos \theta$ et $\sin \theta$ et enfin θ (modulo 2π). ■

En étudiant les différents cas, on constate un lien entre le type de f et son déterminant.

Proposition 9.77

Soit $f \in \mathcal{O}(E)$ telle que $f \neq \text{id}_E$.

f est une rotation ssi $\det f = 1$.

Dans le cas où $\det f = -1$, cette information ne suffit pas à connaître le type de f . Cependant, si on connaît la matrice A de f dans une base orthonormée, alors on peut distinguer les cas 1 et 3.

Proposition 9.78

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et A la matrice de f dans une base orthonormée.

Si A est une matrice orthogonale et symétrique, alors f est une symétrie orthogonale.

- Si $\det f = 1$, alors A est un demi-tour (une rotation d'angle π).
- Si $\det f = -1$, alors A est une réflexion.

Donc, si A est orthogonale de déterminant -1 et non-symétrique, alors f est une antirotation.

Exercice 9.79

Reconnaissez la nature de l'endomorphisme dont la matrice dans une base orthonormée \mathcal{B} est

$$\frac{1}{15} \begin{pmatrix} -11 & 10 & 2 \\ -2 & -5 & 14 \\ 10 & 10 & 5 \end{pmatrix} \text{ et précisez ses éléments caractéristiques.}$$

Correction 9.80

On note A la matrice donnée et C_1, C_2, C_3 ses colonnes.

On a

$$\|C_1\|^2 = \frac{1}{15^2} \left((-11)^2 + (-2)^2 + 10^2 \right) = 1 = \|C_2\|^2 = \|C_3\|^2$$

et

$$\langle C_1 | C_2 \rangle = \langle C_1 | C_3 \rangle = \langle C_2 | C_3 \rangle = 0$$

donc $A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$.

Or \mathcal{B} est orthonormée donc $f \in \mathcal{O}(E)$.

On note $u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \in E$ et on a

$$\begin{aligned} f(u) = u &\iff \begin{cases} -11x + 10y + 2z = 15x \\ -2x - 5y + 14z = 15y \\ 10x + 10y + 5z = 15z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -13x + 5y + z = 0 \\ -x - 10y + 7z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -9y + 6z = 0 \\ 18y - 12z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \frac{1}{3}z \\ y = \frac{2}{3}z \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $\ker(f - \text{id}_E)$ est la droite vectorielle dirigée par $e_1 \begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ 3/\sqrt{14} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ de norme 1, donc f est une rotation.

On pose $v \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ de sorte que $v \perp e_1$.

On a $f(v) \begin{pmatrix} 32/15 \\ -1/15 \\ -10/15 \end{pmatrix}$ et $e_1 \wedge v \begin{pmatrix} -3/\sqrt{14} \\ -6/\sqrt{14} \\ 5/\sqrt{14} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Alors

$$\begin{aligned} f(v) = \cos(\theta) v + \sin(\theta) (e_1 \wedge v) &\iff \begin{cases} -2 \cos \theta - \frac{3}{\sqrt{14}} \sin \theta = \frac{32}{15} \\ \cos \theta - \frac{6}{\sqrt{14}} \sin \theta = \frac{-1}{15} \\ \frac{5}{\sqrt{14}} \sin \theta = \frac{-10}{15} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \sin \theta = \frac{-2\sqrt{14}}{15} \\ \cos \theta = \frac{-1}{15} + \frac{6}{\sqrt{14}} \sin \theta = \frac{-13}{15} \end{cases} \end{aligned}$$

Enfin, on obtient

$$\theta \equiv \pi + \text{Arctan} \frac{2\sqrt{14}}{15} [2\pi].$$

Exercice 9.81

Même exercice avec la matrice $\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ 3 & 6 & 2 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

Correction 9.82

On note A la matrice donnée et on vérifie aisément que A est orthogonale.

On a $\det A = 1$ donc f est une rotation.

On pose $u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et on a

$$f(u) = u \iff \begin{cases} 6x - 2y - 3z = 7x \\ 3x + 6y + 2z = 7y \\ 2x - 3y + 6z = 7z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x - 2y - 3z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ 2x - 3y - z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -7y - 7z = 0 \\ -7y - 7z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -z \\ x = y \end{cases}$$

$$\text{Donc } \ker(f - \text{id}_E) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \right) = \text{Vect}(e_1).$$

On pose $v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \perp e_1$ et on a

$$f(v) \begin{pmatrix} -5/7 \\ 8/7 \\ 3/7 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{et} \quad e_1 \wedge v \begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Alors

$$f(v) = \cos(\theta)v + \sin(\theta)(e_1 \wedge v) \iff \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \theta = \frac{-5}{7} \\ \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta = \frac{8}{7} \\ \cos \theta + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta = \frac{3}{7} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \sin \theta = \frac{-5\sqrt{3}}{14} \\ \cos \theta = \frac{8}{7} + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{-5\sqrt{3}}{14} \right) = \frac{8}{7} - \frac{5}{14} = \frac{11}{14} \end{cases}$$

Donc f est la rotation d'axe orienté par e_1 et d'angle associé $\theta = \text{Arctan} \frac{-5\sqrt{3}}{11}$.

Exercice 9.83

Même exercice avec la matrice $\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 3 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$.

Correction 9.84

On note A la matrice donnée. Comme ses colonnes sont de norme 1 et leurs produits scalaires deux à deux tous nuls, A est orthogonale et donc f est une isométrie vectorielle.

On a $\det A = -1$ donc f est une antirotation.

Exercice 9.85

Soit $\mathcal{B} = (i, j, k)$ une base orthonormée directe de E de dimension 3.

Déterminez la matrice dans la base \mathcal{B} de la rotation d'axe orienté par $i + j + k$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Correction 9.86

f est la rotation d'axe orienté par $i + j + k$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$ donc il existe une base orthonormée $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ telle que

$$A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \pi/3 & -\sin \pi/3 \\ 0 & \sin \pi/3 & \cos \pi/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

En notant $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$, on a $A' = P^{-1}AP$ donc

$$A = PA'P^{-1} = PA'P^{\top}.$$

On a $e_1 = \frac{i+j+k}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ donc $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & ? & ? \\ 1/\sqrt{3} & ? & ? \\ 1/\sqrt{3} & ? & ? \end{pmatrix}$.

On a $e_2 \perp e_1$ et $\|e_2\| = 1$, par exemple $e_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & ? \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & ? \\ 1/\sqrt{3} & 0 & ? \end{pmatrix}$.

Puis $e_3 = e_1 \wedge e_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ donc $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$.

On en déduit A .

9.7 Endomorphismes auto-adjoints

9.7.1 Définition et propriétés

Définition 9.87

On dit qu'un endomorphisme f de E est auto-adjoint quand $f^* = f$, autrement dit quand

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x) | y \rangle = \langle x | f(y) \rangle.$$

On rencontre encore très souvent le mot « symétrique » pour « auto-adjoint ».

Exemple 9.88

- Les projecteurs orthogonaux sont des endomorphismes auto-adjoints (mais pas des endomorphismes orthogonaux!).
- Les symétries orthogonales sont aussi des endomorphismes auto-adjoints.

Démonstration 9.89

Soit s une symétrie orthogonale. On lui associe un projecteur p tel que $s = 2p - \text{id}_E$.

p est un projecteur orthogonal donc auto-adjoint.

Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a

$$\begin{aligned} \langle s(x) | y \rangle &= \langle 2p(x) - x | y \rangle \\ &= 2 \langle p(x) | y \rangle - \langle x | y \rangle \\ &= 2 \langle x | p(y) \rangle - \langle x | y \rangle \\ &= \langle x | 2p(y) - y \rangle \\ &= \langle x | s(y) \rangle. \end{aligned}$$

Donc s est auto-adjoint. ■

Proposition 9.90

Soient \mathcal{B} une base orthonormée de E et $f \in \mathcal{L}(E)$.

f est un endomorphisme auto-adjoint ssi sa matrice dans la base \mathcal{B} est symétrique.

Corollaire 9.91

L'ensemble des endomorphismes auto-adjoints est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

Il est noté $\mathcal{S}(E)$.

9.7.2 Théorème spectral

Il y a essentiellement un seul résultat à connaître sur les endomorphismes auto-adjoints ! On commence par deux lemmes.

Lemme 9.92

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme auto-adjoint est scindé sur \mathbb{R} .

Démonstration 9.93

Soient $f \in \mathcal{S}(E)$ et \mathcal{B} une base orthonormée de E .

Comme f est auto-adjoint, on a $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

χ_A est scindé sur \mathbb{C} donc pour montrer que χ_A est scindé sur \mathbb{R} , on montre que toutes les valeurs propres complexes de A sont en fait réelles.

Soient $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et Z un vecteur propre associé.

Comme $A^T = A$, on a $(AZ)^T = Z^T A^T = Z^T A = (\lambda Z)^T = \lambda Z^T$.

Alors

$$\begin{aligned} \overline{Z}^T AZ &= (\overline{Z}^T A) Z \\ &= \overline{Z^T A} Z \\ &= \overline{\lambda Z^T} Z \\ &= \overline{\lambda} \times \overline{Z^T} Z \end{aligned}$$

et $\overline{Z}^T AZ = \overline{Z}^T (AZ) = \lambda \overline{Z}^T Z$ donc

$$\lambda \overline{Z}^T Z = \overline{\lambda} \times \overline{Z}^T Z.$$

Or, avec $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$, on a $\overline{Z}^T Z = \sum_{i=1}^n z_i \overline{z_i} = \sum_{i=1}^n |z_i|^2 > 0$.

Donc $\overline{Z}^T Z \neq 0$ donc $\lambda = \overline{\lambda}$ donc $\lambda \in \mathbb{R}$. ■

Lemme 9.94

Si un sous-espace vectoriel F est stable par un endomorphisme auto-adjoint, alors F^\perp l'est aussi.

Théorème 9.95

Les sous-espaces propres d'un endomorphisme auto-adjoint sont deux à deux orthogonaux et leur somme directe est E .

Autrement dit, tout endomorphisme auto-adjoint est diagonalisable en base orthonormée, c'est-à-dire qu'il existe une base orthonormée de vecteurs propres.

Démonstration 9.96

On pose $\mathcal{P}(n)$: l'énoncé du Théorème 9.95 avec $\dim E = n$.

▷ $n = 1$

On a $\mathcal{P}(1)$ car tout endomorphisme est auto-adjoint et tout vecteur non-nul est propre.

▷ Supposons $\mathcal{P}(n-1)$ et soit $f \in \mathcal{S}(E)$ où $\dim E = n$.

D'après le Lemme 9.92, f possède au moins une valeur propre λ et un vecteur propre associé u .

$D = \text{Vect}(u)$ est stable par f (c'est une droite propre) donc d'après le Lemme 9.94, D^\perp est stable par f .

Or $\dim D^\perp = n - 1$ donc par hypothèse de récurrence, l'endomorphisme induit par f dans D^\perp est auto-adjoint et on peut donc trouver dans D^\perp une base orthonormée de vecteurs propres pour cet endomorphisme : (e_2, \dots, e_n) .

$\mathcal{B} = \left(\frac{u}{\|u\|}, e_2, \dots, e_n \right)$ est alors une base orthonormée de E dont tous les vecteurs sont propres pour f .

Donc $\mathcal{P}(n)$ est vraie. ■

On dit que les endomorphismes auto-adjoints sont orthodiagonalisables.

Remarque 9.97

La réciproque est vraie et presque évidente : si un endomorphisme est orthodiagonalisable, alors il est auto-adjoint.

Exercice 9.98 (Un grand classique à savoir refaire)

Soit u un endomorphisme auto-adjoint de E , B la boule-unité fermée de E et S la sphère-unité de E .

On pose α la plus petite des valeurs propres de u et β la plus grande.

Montrez que $\inf_{x \in S} \langle x | u(x) \rangle = \alpha$ et $\sup_{x \in B} \langle x | u(x) \rangle = \sup_{x \in S} \langle x | u(x) \rangle = \beta$.

Correction 9.99

u est auto-adjoint donc orthodagonalisable : il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale.

On pose $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

On peut choisir d'ordonner les valeurs propres par ordre croissant :

$$\alpha = \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n = \beta.$$

Soit $x \in E$ de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

On a $\langle x | u(x) \rangle = X^T D X = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$.

Si $x \in B$, alors $\|x\| \leq 1$.

Pour tout $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, on a $\lambda_i \leq \beta$ donc $\lambda_i x_i^2 \leq \beta x_i^2$, et donc

$$\begin{aligned} \langle x | u(x) \rangle &= \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n \beta x_i^2 \\ &= \beta \|x\|^2 \\ &\leq \beta. \end{aligned}$$

On a montré $\forall x \in B, \langle x | u(x) \rangle \leq \beta$.

Pour $x = e_n$, on a $u(e_n) = \lambda_n e_n = \beta e_n$ donc

$$\langle e_n | u(e_n) \rangle = \langle e_n | \beta e_n \rangle = \beta \|e_n\|^2 = \beta.$$

Ceci prouve $\max_{x \in B} \langle x | u(x) \rangle = \beta$.

Si on remplace B par S , idem.

De même, soit $x \in S$.

Pour tout $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, on a $\lambda_i \geq \alpha$ donc $\lambda_i x_i^2 \geq \alpha x_i^2$.

Donc

$$\langle x | u(x) \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \geq \alpha \sum_{i=1}^n x_i^2 = \alpha \|x\|^2 = \alpha.$$

On a montré $\forall x \in S, \langle x | u(x) \rangle \geq \alpha$, avec égalité en $x = e_1$.

Donc $\alpha = \min_{x \in S} \langle x | u(x) \rangle$.

Exercice 9.100 (Un prolongement de l'exercice précédent)

Montrez que l'application $N : \mathcal{S}(E) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $N(u) = \sup_{x \in B} |\langle x | u(x) \rangle|$ est une norme sur $\mathcal{S}(E)$.

Le théorème précédent a une version matricielle.

Théorème 9.101

Une matrice réelle est orthosemblable à une matrice diagonale ssi elle est symétrique.

On dit que les matrices symétriques réelles sont orthodiagonalisables.

Exercice 9.102

Orthodiagonalisez la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque 9.103

La condition « réelle » est indispensable dans le théorème spectral !

9.8 Endomorphismes auto-adjoints positifs, définis-positifs

9.8.1 Endomorphismes auto-adjoints positifs

Définition 9.104

Soit $f \in \mathcal{S}(E)$.

On dit que f est un endomorphisme auto-adjoint positif quand pour tout $x \in E$, $\langle f(x) | x \rangle \geq 0$.

On dit que f est un endomorphisme auto-adjoint défini-positif quand pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $\langle f(x) | x \rangle > 0$.

On note $\mathcal{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints positifs et $\mathcal{S}^{++}(E)$ celui des endomorphismes auto-adjoints définis positifs. Attention, ces deux ensembles ne sont pas des espaces vectoriels et ne sont pas stables par composition.

Ces endomorphismes sont couramment présents dans les théories physiques et sont l'objet de propriétés spécifiques.

Remarque 9.105

Si $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$, $(x, y) \mapsto \langle x | f(y) \rangle$ est aussi un produit scalaire.

On donne par exemple une caractérisation simple à l'aide de valeurs propres.

Proposition 9.106

Soit $f \in \mathcal{S}(E)$.

On a $f \in \mathcal{S}^+(E)$ ssi les valeurs propres de f sont positives.

De même, $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$ ssi les valeurs propres de f sont strictement positives.

Démonstration 9.107

Supposons $f \in \mathcal{S}^+(E)$.

Soient $\lambda \in \text{Sp}(f)$ et x un vecteur propre associé.

Alors $\langle x | f(x) \rangle = \langle x | \lambda x \rangle = \lambda \|x\|^2 \geq 0$.

Or $\|x\|^2 > 0$ donc $\lambda \geq 0$.

Réciproquement, si $f \in \mathcal{S}(E)$ et $\text{Sp}(f) \subseteq [0 ; +\infty[$, on choisit une base \mathcal{B} orthonormée de diagonalisation de f telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Avec $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, on a $\langle x | f(x) \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \geq 0$.

Idem pour $\mathcal{S}^{++}(E)$ en mettant des inégalités strictes. ■

En particulier, $\mathcal{S}^{++}(E) = \mathcal{S}^+(E) \cap \text{GL}(E)$.

9.8.2 Matrices symétriques positives

Définition 9.108

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

On dit que A est une matrice symétrique positive quand pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $X^\top A X \geq 0$.

On dit que A est une matrice symétrique définie-positive quand pour tout $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $X^\top A X > 0$.

Les matrices symétriques positives (respectivement définies-positives) sont donc les matrices dans des bases orthonormées des endomorphismes auto-adjoints positifs (respectivement définis-positifs).

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ celui des matrices symétriques définies-positives. Attention, ces deux ensembles ne sont pas des espaces vectoriels et ne sont pas stables par produit.

Proposition 9.109

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

On a $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ ssi les valeurs propres de A sont positives.

De même, $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ssi les valeurs propres de A sont strictement positives.

Chapitre 10

Fonctions vectorielles

★★ À venir ★★

Chapitre 11

Suites et séries de fonctions

★★ À venir ★★

Chapitre 12

Séries entières

★★ À venir ★★

Chapitre 13

Probabilités

★★ À venir ★★

Chapitre 14

Variables aléatoires discrètes

★★ À venir ★★

Chapitre 15

Équations différentielles linéaires

★★ À venir ★★

Chapitre 16

Calcul différentiel

★★ À venir ★★

Chapitre 17

Structures algébriques

★★ À venir ★★

Deuxième partie

Exercices

Chapitre 1

Espaces vectoriels normés

★★ À venir ★★

Chapitre 2

Séries numériques et vectorielles : révisions et compléments

★★ À venir ★★

Chapitre 3

Familles sommables

★★ À venir ★★

Chapitre 4

Rappels et compléments d'algèbre linéaire

★★ À venir ★★

Chapitre 5

Réduction des endomorphismes

★★ À venir ★★

Chapitre 6

Intégrales généralisées

★★ À venir ★★

Chapitre 7

Intégrales à paramètre

★★ À venir ★★

Chapitre 8

Espaces préhilbertiens réels

★★ À venir ★★

Chapitre 9

Endomorphismes dans un espace euclidien

★★ À venir ★★

Chapitre 10

Fonctions vectorielles

★★ À venir ★★

Chapitre 11

Suites et séries de fonctions

★★ À venir ★★

Chapitre 12

Séries entières

★★ À venir ★★

Chapitre 13

Probabilités

★★ À venir ★★

Chapitre 14

Variables aléatoires discrètes

★★ À venir ★★

Chapitre 15

Équations différentielles linéaires

★★ À venir ★★

Chapitre 16

Calcul différentiel

★★ À venir ★★

Chapitre 17

Structures algébriques

★★ À venir ★★

