

Maths – MPI

Romain Bricout

9 juin 2024

Introduction

Ce document réunit l'ensemble de mes cours de Mathématiques de MPI, ainsi que les exercices les accompagnant. Le professeur était M. Walbron. J'ai adapté certaines formulations me paraissant floues ou ne me plaisant pas mais le contenu pur des cours est strictement équivalent.

Les éléments des tables des matières initiale et présentes au début de chaque chapitre sont cliquables (amenant directement à la partie cliquée). C'est également le cas des références à des éléments antérieurs de la forme, par exemple, « Démonstration 5.22 ».

Cette version contient, en plus des cours imprimés distribués durant l'année, toutes les démonstrations qui vont avec. Voir l'autre version pour n'avoir que les cours bruts.

Table des matières

I	Cours	6
1	Espaces vectoriels normés	7
1.1	Bornes supérieures, bornes inférieures	8
1.1.1	Borne supérieure d'une partie de \mathbb{R}	8
1.1.2	Borne supérieure d'une application à valeurs dans \mathbb{R}	10
1.1.3	Règles pratiques	10
1.2	Normes.	11
1.2.1	Définition	11
1.2.2	Exemples fondamentaux	12
1.2.3	Normes équivalentes	14
1.2.4	Boules	17
1.2.5	Parties bornées	20
1.3	Convergence des suites	25
1.3.1	Définition	25
1.3.2	Propriétés usuelles	26
1.3.3	Cas particulier en dimension finie	28
1.3.4	Point adhérent à une partie	30
1.4	Limites de fonctions	33
1.4.1	Définition	33
1.4.2	Caractérisation séquentielle de la limite	33
1.4.3	Propriétés usuelles	34
1.4.4	Cas particulier de la dimension finie	35
1.4.5	Composition des limites	36

1.4.6	Extensions des définitions	36
1.5	Fonctions continues	37
1.5.1	Continuité en un point	37
1.5.2	Continuité sur une partie	38
1.5.3	Cas particulier de la dimension finie	38
1.5.4	Fonctions lipschitziennes	39
1.5.5	Continuité des applications linéaires et n -linéaires	41
1.5.6	Norme subordonnée	48
1.6	Topologie d'un espace vectoriel normé.	52
1.6.1	Intérieur d'une partie, voisinage d'un point	52
1.6.2	Parties ouvertes	54
1.6.3	Parties fermées	55
1.6.4	Ouverts ou fermés relatifs à une partie	60
1.6.5	Image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé par une fonction continue	60
1.6.6	Frontière d'une partie	63
1.7	Compacité	63
1.7.1	Valeurs d'adhérence d'une suite	63
1.7.2	Théorème de Bolzano-Weierstrass	65
1.7.3	Parties compactes	67
1.7.4	Théorème des bornes atteintes	72
1.8	Connexité par arcs	76
1.8.1	Chemin	76
1.8.2	Parties connexes par arcs	77
1.8.3	Théorème des valeurs intermédiaires	78
2	Séries numériques et vectorielles : révisions et compléments	80
3	Familles sommables	81
4	Rappels et compléments d'algèbre linéaire	82

5 Réduction des endomorphismes 83

5.1	Éléments propres d'un endomorphisme	84
5.1.1	Valeurs propres et vecteurs propres	84
5.1.2	Lien avec les polynômes annulateurs	85
5.1.3	Sous-espaces propres	87
5.2	Polynôme caractéristique d'un endomorphisme	89
5.2.1	Caractérisation des valeurs propres en dimension finie	89
5.2.2	Définition et lien avec les valeurs propres	89
5.2.3	Ordre de multiplicité et dimension du sous-espace propre	92
5.2.4	Endomorphisme scindé	93
5.3	Éléments propres d'une matrice carrée	94
5.3.1	Valeurs propres et vecteurs propres	94
5.3.2	Lien avec les polynômes annulateurs	95
5.3.3	Sous-espaces propres	95
5.4	Polynôme caractéristique d'une matrice carrée	96
5.4.1	Définition et lien avec les valeurs propres	96
5.4.2	Ordre de multiplicité et dimension du sous-espace propre	98
5.4.3	Matrice scindée	98
5.5	Endomorphismes diagonalisables, matrices diagonalisables	99
5.5.1	Définition	99
5.5.2	Caractérisations équivalentes	100
5.5.3	Lien avec le polynôme caractéristique	102
5.6	Lien entre diagonalisabilité et polynômes annulateurs	103
5.6.1	Racines du polynôme minimal	103
5.6.2	Lemme des noyaux	104
5.6.3	Application à la diagonalisabilité	106
5.6.4	Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit	109
5.7	Quelques applications de la diagonalisation	110
5.7.1	Puissances d'une matrice, suites récurrentes linéairement	110

5.7.2	Systèmes d'équations différentielles	111
5.8	Endomorphismes trigonalisables, matrices trigonalisables	111
5.8.1	Définition et propriétés	111
5.8.2	Caractérisation équivalente	112
5.8.3	Théorème de Cayley-Hamilton	115
5.8.4	Sous-espaces caractéristiques	116
5.9	Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes	118
5.9.1	Généralités	118
5.9.2	Éléments propres d'un nilpotent	120
5.9.3	Application aux sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme	120
6	Intégrales généralisées	123
7	Intégrales à paramètre	124
8	Espaces préhilbertiens réels	125
9	Endomorphismes dans un espace euclidien	126
10	Fonctions vectorielles	127
11	Suites et séries de fonctions	128
12	Séries entières	129
13	Probabilités	130
14	Variables aléatoires discrètes	131
15	Équations différentielles linéaires	132
16	Calcul différentiel	133
17	Structures algébriques	134

II Exercices	135
1 Espaces vectoriels normés	136
2 Séries numériques et vectorielles : révisions et compléments	137
3 Familles sommables	138
4 Rappels et compléments d’algèbre linéaire	139
5 Réduction des endomorphismes	140
6 Intégrales généralisées	141
7 Intégrales à paramètre	142
8 Espaces préhilbertiens réels	143
9 Endomorphismes dans un espace euclidien	144
10 Fonctions vectorielles	145
11 Suites et séries de fonctions	146
12 Séries entières	147
13 Probabilités	148
14 Variables aléatoires discrètes	149
15 Équations différentielles linéaires	150
16 Calcul différentiel	151
17 Structures algébriques	152

Première partie

Cours

Chapitre 1

Espaces vectoriels normés

Sommaire

1.1	Bornes supérieures, bornes inférieures	8
1.1.1	Borne supérieure d'une partie de \mathbb{R}	8
1.1.2	Borne supérieure d'une application à valeurs dans \mathbb{R}	10
1.1.3	Règles pratiques	10
1.2	Normes	11
1.2.1	Définition	11
1.2.2	Exemples fondamentaux	12
1.2.3	Normes équivalentes	14
1.2.4	Boules	17
1.2.5	Parties bornées	20
1.3	Convergence des suites	25
1.3.1	Définition	25
1.3.2	Propriétés usuelles	26
1.3.3	Cas particulier en dimension finie	28
1.3.4	Point adhérent à une partie	30
1.4	Limites de fonctions	33
1.4.1	Définition	33
1.4.2	Caractérisation séquentielle de la limite	33
1.4.3	Propriétés usuelles	34
1.4.4	Cas particulier de la dimension finie	35
1.4.5	Composition des limites	36
1.4.6	Extensions des définitions	36
1.5	Fonctions continues.	37
1.5.1	Continuité en un point	37
1.5.2	Continuité sur une partie	38
1.5.3	Cas particulier de la dimension finie	38
1.5.4	Fonctions lipschitziennes	39
1.5.5	Continuité des applications linéaires et n -linéaires	41
1.5.6	Norme subordonnée	48
1.6	Topologie d'un espace vectoriel normé	52
1.6.1	Intérieur d'une partie, voisinage d'un point	52
1.6.2	Parties ouvertes	54
1.6.3	Parties fermées	55
1.6.4	Ouverts ou fermés relatifs à une partie	60

1.6.5	Image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé par une fonction continue . . .	60
1.6.6	Frontière d'une partie	63
1.7	Compacité.	63
1.7.1	Valeurs d'adhérence d'une suite	63
1.7.2	Théorème de Bolzano-Weierstrass	65
1.7.3	Parties compactes	67
1.7.4	Théorème des bornes atteintes	72
1.8	Connexité par arcs	76
1.8.1	Chemin	76
1.8.2	Parties connexes par arcs	77
1.8.3	Théorème des valeurs intermédiaires	78

Dans ce chapitre, la lettre \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

1.1 Bornes supérieures, bornes inférieures

1.1.1 Borne supérieure d'une partie de \mathbb{R}

On rappelle le théorème fondamental, dit « théorème (ou axiome) de la borne supérieure ».

Théorème 1.1

Toute partie A de \mathbb{R} , non-vide et majorée, possède une borne supérieure, notée $\sup A$.

Toute partie A de \mathbb{R} , non-vide et minorée, possède une borne inférieure, notée $\inf A$.

On dispose de caractérisations équivalentes de la borne supérieure.

Proposition 1.2

Soient A une partie de \mathbb{R} , non-vide et majorée, et s un réel.

Alors il y a équivalence entre les propositions suivantes :

$$(\alpha) \quad s = \sup A$$

$$(\beta) \quad \begin{cases} \forall a \in A, \quad a \leq s \\ \forall \varepsilon > 0, \quad \exists x \in A, \quad s - \varepsilon < x \leq s \end{cases}$$

$$(\gamma) \quad \begin{cases} \forall a \in A, \quad a \leq s \\ \exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}}, \quad x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} s \end{cases}$$

Démonstration 1.3 $((\alpha) \implies (\beta))$

► $s = \sup A$ est le plus petit majorant de A donc c'est un majorant de A :

$$\forall a \in A, \quad a \leq s.$$

► s est le plus petit majorant de A donc

$$\forall \varepsilon > 0, \quad s - \varepsilon < s$$

donc $s - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A .

Donc il existe $x \in A$ tel que $s - \varepsilon < x \leq s$. ■

Démonstration 1.4 $((\beta) \implies (\alpha))$

s est un majorant de A et tout réel strictement inférieur à s n'est pas un majorant *i.e.* tout majorant est supérieur ou égal à s .

Donc $s = \sup A$. ■

Démonstration 1.5 $((\beta) \implies (\gamma))$

On spécialise $\varepsilon \leftarrow \frac{1}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists x_n \in A, \quad s - \frac{1}{n+1} < x_n \leq s.$$

De cette façon, on construit une suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad s - \frac{1}{n+1} < x_n \leq s.$$

D'après le théorème des gendarmes, on a $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} s$. ■

Démonstration 1.6 $((\gamma) \implies (\beta))$

Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad |x_n - s| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{donc } s - \frac{\varepsilon}{2} \leq x_n.$$

Or $x_n \in A$ donc $s - \varepsilon < s - \frac{\varepsilon}{2} \leq x_n \leq s$.

D'où

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x \in A, \quad s - \varepsilon < x \leq s. \quad \blacksquare$$

On a évidemment les caractérisations associées à la borne inférieure.

1.1.2 Borne supérieure d'une application à valeurs dans \mathbb{R}

Définition 1.7

Soient X un ensemble non-vidé et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

Si f est majorée sur X , alors on appelle borne supérieure de f sur X le réel $\sup f(X) = \sup_X f = \sup_{x \in X} f(x)$.

Si f est minorée sur X , alors on appelle borne inférieure de f sur X le réel $\inf f(X) = \inf_X f = \inf_{x \in X} f(x)$.

On déduit de la Proposition 1.2 les caractérisations suivantes.

Proposition 1.8

Soient X un ensemble non-vidé, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ majorée sur X et s un réel.

Alors il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- ▷ $s = \sup_X f$
- ▷ $\begin{cases} \forall x \in X, f(x) \leq s \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in X, s - \varepsilon < f(x) \leq s \end{cases}$
- ▷ $\begin{cases} \forall x \in X, f(x) \leq s \\ \exists (x_n) \in X^{\mathbb{N}}, f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} s \end{cases}$

1.1.3 Règles pratiques

D'abord, des évidences auxquelles on ne pense pas toujours.

Proposition 1.9

Soit A une partie de \mathbb{R} , non-vidé et majorée. Alors $\forall a \in A, a \leq \sup A$.

Soient X un ensemble non-vidé et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ majorée sur X . Alors $\forall x \in X, f(x) \leq \sup_X f$.

En pratique, on n'a pas souvent besoin de connaître la valeur exacte d'une borne supérieure, on a plus souvent besoin de la majorer.

Proposition 1.10

- ▷ Soient A une partie de \mathbb{R} , non-vidé et majorée, et M un réel.
Pour montrer $\sup A \leq M$, il suffit de montrer $\forall a \in A, a \leq M$.
- ▷ Soient X un ensemble non-vidé, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ majorée sur X et M un réel.
Pour montrer $\sup_X f \leq M$, il suffit de montrer $\forall x \in X, f(x) \leq M$.

Multiplication par un réel positif.

Proposition 1.11

Soient X un ensemble non-vide et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ majorée sur X .

Alors pour tout $\lambda \geq 0$, $\sup_X (\lambda f) = \lambda \sup_X f$.

Démonstration 1.12

Soit $\lambda \geq 0$. On pose $s = \sup_X f$.

On veut montrer $\sup_X (\lambda f) = \lambda s$.

On a $\forall x \in X$, $f(x) \leq s$ et $\lambda \geq 0$ donc

$$\forall x \in X, \lambda f(x) \leq \lambda s.$$

Donc λs est un majorant de λf .

Comme $s = \sup_X f$, il existe $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} s$.

D'après les théorèmes d'opération sur les limites, on a

$$\lambda f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda s.$$

D'où $\lambda s = \sup_X (\lambda f)$ d'après la Proposition 1.2. ■

Attention ! C'est bien sûr faux si $\lambda < 0$.

1.2 Normes

1.2.1 Définition

Définition 1.13

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

On appelle norme sur E toute application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

- pour tout $x \in E$, $N(x) = 0 \iff x = 0$ (séparation)
- pour tout $x \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (homogénéité)
- pour tout $(x, y) \in E^2$, $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire).

Un espace vectoriel est dit espace vectoriel normé quand on lui associe une norme.

On déduit de l'inégalité triangulaire une inégalité classique (souvent appelée aussi inégalité triangulaire) :

$$\text{pour tout } (x, y) \in E^2, \quad |N(x) - N(y)| \leq N(x - y).$$

Démonstration 1.14

Soit $(x, y) \in E^2$.

D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$N(x - y + y) \leq N(x - y) + N(y)$$

$$N(x) \leq N(x - y) + N(y)$$

$$N(x) - N(y) \leq N(x - y).$$

De même, en échangeant x et y :

$$N(y) - N(x) \leq N(y - x).$$

Or

$$N(x - y) = N(-(y - x)) = |-1| N(y - x) = N(y - x).$$

D'où

$$\begin{cases} N(x) - N(y) \leq N(x - y) \\ N(y) - N(x) \leq N(x - y) \end{cases}$$

donc

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y). \quad \blacksquare$$

Si N est une norme sur E , alors on peut définir une distance entre deux vecteurs de E : $d(u, v) = N(u - v)$.

On définit ainsi une application $d : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

- pour tout $(x, y) \in E^2$, $d(y, x) = d(x, y)$ (symétrie)
- pour tout $(x, y) \in E^2$, $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (séparation)
- pour tout $(x, y, z) \in E^3$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

1.2.2 Exemples fondamentaux

- La valeur absolue dans \mathbb{R} et le module dans \mathbb{C} sont des normes.
- La norme euclidienne habituelle en géométrie plane ou spatiale est une norme.

- Plus généralement, si $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E , la norme euclidienne associée $x \mapsto \sqrt{\langle x | x \rangle}$ est une norme au sens précédent.
- Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. On choisit une base de E $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Si v est un vecteur de E , on note (v_1, \dots, v_n) les coordonnées de v dans la base \mathcal{B} . On définit classiquement trois normes sur E :

$$\|v\|_\infty = \max_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} |v_i| \quad \|v\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i| \quad \|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|^2}$$

appelées respectivement norme infinie ou norme sup, norme 1 et norme 2.

Cas particulier : $E = \mathbb{R}^n$ muni de la base canonique.

Cas particulier : $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ muni de la base canonique. Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors

$$\|A\|_\infty = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} |a_{ij}| \quad \|A\|_1 = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} |a_{ij}| \quad \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} |a_{ij}|^2}$$

- Soient X un ensemble et E l'ensemble des applications bornées de X dans \mathbb{K} . La norme sup sur E est définie par $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.
- Cas particulier : si $X = \mathbb{N}$, E est l'ensemble des suites bornées et $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

Démonstration 1.15 ($\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E)

- Si $\|v\|_\infty = 0$ alors par définition d'un maximum

$$\forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, \quad 0 \leq |v_i| \leq \|v\|_\infty = 0 \text{ donc } v_i = 0$$

donc $v = 0$.

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$\begin{aligned} \|\lambda v\|_\infty &= \sup_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} |\lambda v_i| \\ &= \sup_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} |\lambda| \times |v_i| \\ &= |\lambda| \sup_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} |v_i| \\ &= |\lambda| \|v\|_\infty. \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} |\lambda| \geq 0 \text{ (Proposition 1.11)}$$

- Soit $(v, w) \in E^2$. On veut montrer $\|v + w\|_\infty \leq \|v\|_\infty + \|w\|_\infty$.

D'après la Proposition 1.10, il suffit de montrer

$$\forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, \quad |v_i + w_i| \leq \|v\|_\infty + \|w\|_\infty.$$

Pour $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, on a

$$\begin{aligned} |v_i + w_i| &\leq |v_i| + |w_i| \\ &\leq \|v\|_\infty + \|w\|_\infty. \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{cases} |v_i| \leq \|v\|_\infty \\ |w_i| \leq \|w\|_\infty \end{cases}$$

Donc $\|v + w\|_\infty \leq \|v\|_\infty + \|w\|_\infty$. ■

Démonstration 1.16 ($\|\cdot\|_1$ est une norme sur E)

- Si $\|v\|_1 = 0$ alors $\sum_{i=1}^n |v_i| = 0$. Or une somme de réels positifs est nulle ssi tous les réels sont nuls.

Donc

$$\forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, |v_i| = 0$$

donc $v = 0$.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\|\lambda v\|_1 &= \sum_{i=1}^n |\lambda v_i| \\ &= \sum_{i=1}^n |\lambda| \times |v_i| \\ &= |\lambda| \sum_{i=1}^n |v_i| \\ &= |\lambda| \|v\|_1.\end{aligned}$$

- Soit $(v, w) \in E^2$. On a

$$\begin{aligned}\|v + w\|_1 &= \sum_{i=1}^n |v_i + w_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^n (|v_i| + |w_i|) \\ &= \|v\|_1 + \|w\|_1.\end{aligned}$$

■

Proposition 1.17

Soient E, F deux espaces vectoriels normés.

L'application de $E \times F$ dans \mathbb{R}_+ qui à (x, y) associe $\max(\|x\|_E, \|y\|_F)$ est une norme.

Autrement dit, le produit de deux espaces vectoriels normés est encore un espace vectoriel normé, résultat qui se généralise par récurrence à un nombre quelconque (fini) d'espaces vectoriels normés.

1.2.3 Normes équivalentes

Définition 1.18

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et N_1, N_2 deux normes sur E .

On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes quand il existe deux constantes strictement positives a, b telles que pour tout $v \in E$, $aN_1(v) \leq N_2(v) \leq bN_1(v)$.

Proposition 1.19

On note $\mathcal{N}(E)$ l'ensemble des normes sur E et

$$\forall (N_1, N_2) \in \mathcal{N}(E)^2, N_1 \sim N_2 \iff N_1 \text{ et } N_2 \text{ sont équivalentes.}$$

La relation \sim est alors une relation d'équivalence sur $\mathcal{N}(E)$.

Démonstration 1.20

► Soit $N \in \mathcal{N}(E)$. On a $N \leq N \leq N$ donc $N \sim N$.

Donc \sim est réflexive.

► Soit $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(E)^2$ tel que $N_1 \sim N_2$.

Il existe $a, b > 0$ tels que $aN_1 \leq N_2 \leq bN_1$.

Donc $\frac{1}{b}N_2 \leq N_1 \leq \frac{1}{a}N_2$ i.e. $N_2 \sim N_1$.

Donc \sim est symétrique.

► Soit $(N_1, N_2, N_3) \in \mathcal{N}(E)^3$ tel que $N_1 \sim N_2$ et $N_2 \sim N_3$.

Il existe $a, b, c, d > 0$ tels que
$$\begin{cases} aN_1 \leq N_2 \leq bN_1 \\ cN_2 \leq N_3 \leq dN_2 \end{cases}$$

Donc $acN_1 \leq N_3 \leq bdN_1$ i.e. $N_1 \sim N_3$.

Donc \sim est transitive.

Finalement, \sim est une relation d'équivalence. ■

Exercice 1.21

Montrez que si E est de dimension finie, les trois normes $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes.

Correction 1.22

Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et \mathcal{B} une base de E .

Soit $v = (v_1, \dots, v_n)_{\mathcal{B}}$.

On a

$$\|v\|_\infty = \sup_{i \in [1; n]} |v_i| \quad \|v\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i| \quad \|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|^2}.$$

► On a $\|v\|_\infty \leq \|v\|_1 \leq n \|v\|_\infty$.

En effet, il existe $j \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ tel que $\|v\|_\infty = |v_j|$ donc

$$\|v\|_\infty = |v_j| \leq |v_1| + \cdots + |v_n| = \|v\|_1.$$

De plus, pour tout $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, $|v_i| \leq \|v\|_\infty$ donc en additionnant les inégalités :

$$\sum_{i=1}^n |v_i| = \|v\|_1 \leq \sum_{i=1}^n \|v\|_\infty = n \|v\|_\infty.$$

Donc $\|\cdot\|_\infty \sim \|\cdot\|_1$.

► En mettant des carrés partout on arrive à

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_2 \leq \sqrt{n} \|v\|_\infty.$$

Donc $\|\cdot\|_\infty \sim \|\cdot\|_2$.

► Par transitivité, on a $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$.

Exercice 1.23

Soient $E = \mathbb{R}[X]$ et $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in E$. On pose $N_1(P) = \sum_{i=0}^n |a_i|$ et $N_\infty(P) = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$.

Montrez que N_1 et N_∞ sont des normes sur E .

Montrez qu'elles ne sont pas équivalentes en considérant la suite des polynômes $P_n = \sum_{i=0}^n X^i$.

Correction 1.24

► N_1 et N_∞ sont clairement des normes (cf. Démonstration 1.15 et Démonstration 1.16).

► Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \sum_{i=0}^n X^i = 1 + X + \cdots + X^n$.

Par l'absurde, on suppose $N_1 \sim N_\infty$.

Il existe $a, b > 0$ tels que $a N_1 \leq N_\infty \leq b N_1$.

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \underbrace{a N_1(P_n)}_{=n+1} \leq \underbrace{N_\infty(P_n)}_{=1} \leq \underbrace{b N_1(P_n)}_{=n+1}$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a(n+1) \leq 1$$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} a(n+1) = +\infty$: contradiction.

Donc N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

Remarque 1.25

Soit $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(E)^2$. On a

$$N_1 \sim N_2 \iff v \mapsto \frac{N_1(v)}{N_2(v)} \text{ est bornée sur } E \setminus \{0\}.$$

Ainsi, pour montrer que N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes, on cherche une suite $(v_n) \in (E \setminus \{0\})^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\frac{N_1(v_n)}{N_2(v_n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{ou} \quad \frac{N_1(v_n)}{N_2(v_n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Le résultat suivant est fondamental.

Théorème 1.26

Si E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les normes sur E sont équivalentes.

Quand on est en dimension finie, cela signifie que tous les résultats qu'on peut démontrer pour une norme sont à facteurs près valables pour n'importe quelle norme, autrement dit cela nous permettra de choisir la norme que l'on préfère si on ne nous l'impose pas.

Dans toute la suite, E est un espace vectoriel normé par la norme $\|\cdot\|$.

1.2.4 Boules

Définition 1.27

Soient $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r l'ensemble noté $B(a, r)$ défini de la façon suivante :

$$B(a, r) = \{v \in E \mid \|v - a\| < r\}.$$

On appelle boule fermée de centre a et de rayon r l'ensemble noté (généralement) $\overline{B}(a, r)$:

$$\overline{B}(a, r) = \{v \in E \mid \|v - a\| \leq r\}.$$

On appelle sphère de centre a et de rayon r l'ensemble (généralement) noté $S(a, r)$:

$$S(a, r) = \{v \in E \mid \|v - a\| = r\}.$$

On appelle boule-unité la boule de centre 0 et de rayon 1, sphère-unité la sphère de centre 0 et de rayon 1.

Exercice 1.28

Que sont les boules dans \mathbb{R} ? Que sont les sphères dans \mathbb{R} ?

Correction 1.29

$|\cdot|$ est une norme sur \mathbb{R} .

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$.

On a

$$B(a, r) =]a - r ; a + r[\quad \overline{B}(a, r) = [a - r ; a + r] \quad S(a, r) = \{a - r, a + r\}.$$

Exercice 1.30

On prend $E = \mathbb{R}^2$ et on définit les normes infinie, 1 et 2 relativement à la base canonique.

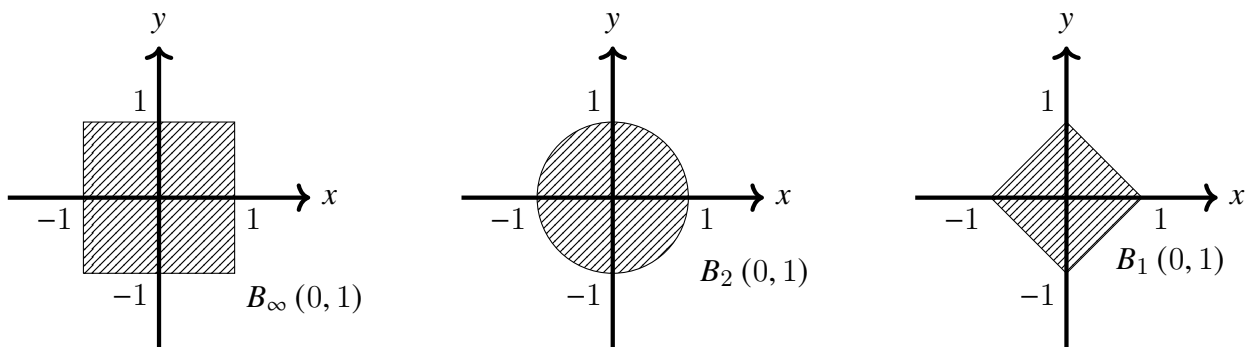
Représentez graphiquement les boules-unités pour chacune de ces trois normes.

Correction 1.31

On a

$$\|(x, y)\|_{\infty} = \max(|x|, |y|) \quad \|(x, y)\|_1 = |x| + |y| \quad \|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

On en déduit les boules suivantes :



Exercice 1.32

Montrez que toute boule ouverte est contenue dans une boule fermée et contient une boule fermée de mêmes centres.

Montrez la même chose en inversant les mots « ouverte » et « fermée ».

Correction 1.33

Soient $a \in E$ et $r > 0$.

On a

$$\overline{B}\left(a, \frac{r}{2}\right) \subseteq B(a, r) \subseteq \overline{B}(a, r)$$

et

$$B(a, r) \subseteq \overline{B}(a, r) \subseteq B(a, 2r).$$

Définition 1.34

Soit $(x, y) \in E^2$. On note $[xy] = \{tx + (1-t)y \mid t \in [0; 1]\}$, appelé segment (géométrique) d'extrémités x et y .

Une partie A de E est dite convexe quand pour tout $(x, y) \in A^2$, $[xy] \subseteq A$.

On a :

$$A \text{ est convexe} \iff \forall (x, y) \in A^2, \forall t \in [0; 1], tx + (1-t)y \in A.$$

Proposition 1.35

Les boules (ouvertes ou fermées) sont des parties convexes.

Les sphères ne sont jamais convexes.

Dans \mathbb{R} , les convexes sont les intervalles.

Démonstration 1.36 (Les boules sont convexes)

Soient $a \in E$ et $r > 0$.

Soient $(x, y) \in B(a, r)^2$ et $t \in [0; 1]$.

On veut montrer que $tx + (1-t)y \in B(a, r)$ i.e. $\|tx + (1-t)y - a\| < r$.

On a

$$\begin{aligned} \|tx + (1-t)y - a\| &= \|t(x-a) + at + (1-t)y - a\| \\ &= \|t(x-a) + (t-1)a + (1-t)y\| \\ &= \|t(x-a) + (1-t)(y-a)\| \\ &\leq \|t(x-a)\| + \|(1-t)(y-a)\| && \left. \begin{array}{l} \text{inégalité triangulaire} \\ \text{homogénéité et } t \geq 0 \text{ et} \\ 1-t \geq 0 \end{array} \right\} \\ &= t\|x-a\| + (1-t)\|y-a\| && \left. \begin{array}{l} \\ \\ x, y \in B(a, r) \end{array} \right\} \\ &< tr + (1-t)r \\ &= r. \end{aligned}$$

Ceci prouve

$$\forall (x, y) \in B(a, r), [xy] \subseteq B(a, r)$$

i.e. $B(a, r)$ est convexe.

De même, $\overline{B}(a, r)$ est convexe. ■

Démonstration 1.37 (Les sphères ne sont pas convexes)

Soient $a \in E$ et $r > 0$.

On veut montrer que $S(a, r)$ n'est pas convexe *i.e.*

$$\exists (x, y) \in S(a, r)^2, \exists t \in [0 ; 1], tx + (1 - t)y \notin S(a, r).$$

On choisit $x \in S(a, r)$ puis $y = 2a - x$ (diamétralement opposé).

On a

$$a \in [xy]$$

$$\text{car } a = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \text{ et}$$

$$a \notin S(a, r).$$

Donc $S(a, r)$ n'est pas convexe. ■

1.2.5 Parties bornées

Définition 1.38

On dit qu'une partie A de E est bornée quand il existe une boule qui la contient.

Exercice 1.39

Montrez que A est bornée ssi A est contenue dans une boule de centre 0.

Plus généralement, on choisit arbitrairement un point de E , noté x . Montrez l'équivalence A est bornée ssi A est contenue dans une boule de centre x .

Correction 1.40 (Première équivalence)

\Leftarrow Immédiat.

\Rightarrow

Soit A une partie bornée de E .

Il existe $a \in E$ et $r > 0$ tels que $A \subseteq B(a, r)$.

On pose $r' = \|a\| + r > 0$.

Soit $x \in A$.

On a $x \in B(a, r)$ donc $\|x - a\| < r$.

Donc $r > \|\|x\| - \|a\|\|$.

Donc $r > \|x\| - \|a\|$.

Donc $r + \|a\| > \|x\|$.

Donc $A \subseteq B(0, r')$.

Correction 1.41 (Seconde équivalence)

Plus généralement, soit $x \in E$.

Avec $r'' = \|x - a\| + r$, on a de même $A \subseteq B(x, r'')$.

Exercice 1.42

Montrez qu'en dimension finie, cette définition ne dépend pas de la norme.

Correction 1.43

On veut montrer que si E est de dimension finie et N_1, N_2 sont des normes sur E , alors

$$A \text{ est bornée pour } N_1 \iff A \text{ est bornée pour } N_2.$$

Soit A une partie bornée pour N_1 .

Alors il existe $r_1 > 0$ tel que $A \subseteq B_1(0, r_1)$.

Comme E est de dimension finie, les normes N_1 et N_2 sont équivalentes.

Il existe donc $a, b > 0$ tels que $aN_2 \leq N_1 \leq bN_2$.

On pose $r_2 = \frac{r_1}{a} > 0$.

Soit $x \in A$.

Alors $x \in B_1(0, r_1)$ donc

$$N_1(x) < r_1$$

$$N_2(x) \leq \frac{1}{a} N_1(x) < r_2.$$

Donc $x \in B_2(0, r_2)$.

Donc $A \subseteq B_2(0, r_2)$.

Donc A est bornée pour N_2 .

Et réciproquement.

Proposition 1.44

Une partie A de E n'est pas bornée ssi il existe une suite (v_n) à termes dans A telle que $\|v_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Exercice 1.45

Dans $E = \mathbb{R}^2$, on pose $A = \{(x, y) \mid x^4 + y^4 = 20\}$: A est-elle bornée ? Si oui, pour chacune des normes infinie, 1 et 2, donnez un rayon d'une boule centrée en 0 qui contient A .

Correction 1.46

E est de dimension finie donc les normes sur E sont toutes équivalentes.

On choisit la norme sup.

Soit $(x, y) \in A$.

On a $x^4 + y^4 = 20$ donc $x^4 \leq x^4 + y^4 = 20$ car $x^4 \geq 0$.

Donc $|x| \leq \sqrt[4]{20}$ et, de même, $|y| \leq \sqrt[4]{20}$.

Donc $(x, y) \in \overline{B_\infty}(0, \sqrt[4]{20})$.

Donc $A \subseteq \overline{B_\infty}(0, \sqrt[4]{20})$.

D'après l'Exercice 1.21, on a

$$\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_1 \leq 2 \|\cdot\|_\infty$$

et

$$\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2 \leq \sqrt{2} \|\cdot\|_\infty.$$

Donc $A \subseteq \overline{B_1}(0, 2\sqrt[4]{20})$ et $A \subseteq \overline{B_2}(0, \sqrt{2}\sqrt[4]{20})$.

Exercice 1.47

Même question avec $E = \mathbb{C}^2$.

Correction 1.48

E est de dimension finie donc les normes sur E sont équivalentes.

x étant quelconque dans \mathbb{C} , existe-t-il $y \in \mathbb{C}$ tel que $x^4 + y^4 = 20$?

Dans \mathbb{C} , tout nombre possède une racine quatrième donc en posant y une racine quatrième de $20 - x^4$, on obtient $(x, y) \in A$.

On pose $v_n = (n, y_n)$ où y_n est une racine quatrième de $20 - n^4$.

On a $\|v_n\|_\infty = \max(n, |y_n|) \geq n$ donc

$$\|v_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Or $(v_n) \in A^{\mathbb{N}}$ donc A n'est pas bornée.

Exercice 1.49

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on pose $B = \{(x, y, z) \mid x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 2xy + 2xz - 2yz \leq 42\}$: B est-elle bornée ? Si oui, pour chacune des normes infinie, 1 et 2, donnez un rayon d'une boule centrée en 0 qui contient B .

Correction 1.50

E est de dimension finie donc les normes sur E sont équivalentes.

On a

$$\begin{aligned} \forall (x, y, z) \in E, \quad x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 2xy + 2xz - 2yz &= (x + y + z)^2 - y^2 - z^2 - 2yz + 3y^2 + 4z^2 - 2yz \\ &= (x + y + z)^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4yz \\ &= (x + y + z)^2 + 2(y - z)^2 + z^2. \end{aligned}$$

Si $(x, y, z) \in B$ alors $(x + y + z)^2 + 2(y - z)^2 + z^2 \leq 42$.

$$\text{Donc } \begin{cases} z^2 \leq 42 \\ 2(y - z)^2 \leq 42 \\ (x + y + z)^2 \leq 42 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} |z| \leq 7 \\ |y - z| \leq 5 \\ |x + y + z| \leq 7 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} |z| \leq 7 \\ |y| = |y - z + z| \leq |y - z| + |z| \leq 12 \\ |x| = |x + y + z - y - z| \leq |x + y + z| + |y| + |z| \leq 26 \end{cases}$$

Donc $\|(x, y, z)\|_\infty \leq 26$ et on a

$$B \subseteq B_\infty(0, 26) \quad B \subseteq B_1(0, 78) \quad B \subseteq B_2(0, 26\sqrt{3}).$$

Exercice 1.51

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note \mathcal{P} l'ensemble des matrices de projecteurs : \mathcal{P} est-il borné ?

Correction 1.52

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie donc les normes sont équivalentes.

On choisit la norme sup :

$$\left\| \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max(|x|, |y|, |z|, |t|).$$

On a $\mathcal{P} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid M^2 = M\}$.

On pose $M = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$ et on a

$$M = M^2 \iff \begin{cases} x^2 + yz = x \\ z(x+t) = z \\ y(x+t) = y \\ t^2 + yz = t \end{cases}$$

On impose $x+t=1$.

On a

$$t - t^2 = (1-x) - (1-x)^2 = x - x^2.$$

Donc avec $y \neq 0$, on a $M = \begin{pmatrix} x & \frac{x-x^2}{y} \\ y & 1-x \end{pmatrix}$.

On en déduit que \mathcal{P} contient les matrices $M_n = \begin{pmatrix} n & n-n^2 \\ 1 & 1-n \end{pmatrix}$ et on a $\|M_n\|_\infty \geq n$.

Donc \mathcal{P} n'est pas bornée.

Définition 1.53

On dit qu'une suite v à termes dans E est bornée quand l'ensemble de ses valeurs est borné, autrement dit quand il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|v_n\| \leq M$.

On dit qu'une fonction f d'un ensemble X dans E est bornée quand l'ensemble de ses valeurs prises sur X est borné, autrement dit quand il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in X$, $\|f(x)\| \leq M$.

Exercice 1.54

Soit u une suite complexe arithmético-géométrique de raison a . À quelle condition est-elle bornée ?

Correction 1.55

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

Si $a \neq 1$, (u_n) est de la forme $\left(\lambda a^n + \frac{b}{1-a}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ où $\lambda \in \mathbb{C}$.

Si $a = 1$, (u_n) est de la forme $(\lambda + nb)_{n \in \mathbb{N}}$ où $\lambda \in \mathbb{C}$.

On choisit $\lambda \neq 0$.

On a alors

$$(u_n) \text{ est bornée} \iff \begin{cases} |a| \leq 1 \text{ et } a \neq 1 \\ \text{ou} \\ a = 1 \text{ et } b = 0 \end{cases}$$

Exercice 1.56

Soient B, B' deux boules de E . Si $(x, x') \in E^2$, on pose $f(x, x') = d(x, x')$. Montrez que f est bornée sur $B \times B'$.

Correction 1.57

Soient $(a, b) \in E^2$ et $r, s > 0$ tels que $B = B(a, r)$ et $B' = B(b, s)$.

On a

$$\forall (x, x') \in B \times B', \quad 0 \leq f(x, x') \leq \|b - a\| + r + s$$

car

$$\begin{aligned} f(x, x') &= \|x - x'\| \\ &= \|x - a + a - b + b - x'\| \\ &\leq \|x - a\| + \|a - b\| + \|b - x'\| \\ &\leq r + s + \|b - a\|. \end{aligned}$$

1.3 Convergence des suites

Dans cette section, E désigne un espace vectoriel normé par la norme $\|\cdot\|$.

1.3.1 Définition

Définition 1.58

Soient $u = (u_n)$ une suite à termes dans E et $\ell \in E$.

On dit que la suite u converge vers ℓ quand toute boule ouverte de centre ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad u_n \in B(\ell, \varepsilon).$$

Proposition 1.59

Dans la définition, on peut remplacer les boules ouvertes par des boules fermées.

On peut réécrire la définition sous deux formes équivalentes :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad \|u_n - \ell\| < \varepsilon$$

ou

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon.$$

On peut donc se ramener aux suites réelles positives : la suite vectorielle u converge vers ℓ ssi la suite réelle $(\|u_n - \ell\|)$ converge vers 0.

Une suite qui ne converge vers aucun élément de E est dite divergente.

1.3.2 Propriétés usuelles

Proposition 1.60 (Unicité de la limite)

Si une suite $u \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$, elle ne peut converger vers un autre point de E .

On peut donc noter classiquement $\ell = \lim u = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ou $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.

Démonstration 1.61

Par l'absurde, soit $(\ell, \ell') \in E^2$ tel que u converge vers ℓ et ℓ' , et $\ell \neq \ell'$.

$$\text{Soit } \varepsilon = \frac{\|\ell - \ell'\|}{2}.$$

Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ et $N_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geq N_1, \quad \|u_n - \ell\| < \varepsilon$$

et

$$\forall n \geq N_2, \quad \|u_n - \ell'\| < \varepsilon.$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$.

On a alors

$$\begin{aligned} \forall n \geq N, \quad \varepsilon &= \frac{\|\ell - \ell'\|}{2} \\ &= \frac{\|\ell - u_n + u_n - \ell'\|}{2} \\ &\leq \frac{\|\ell - u_n\| + \|u_n - \ell'\|}{2} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Contradiction donc $\ell = \ell'$. ■

Proposition 1.62

Si une suite $u \in E^{\mathbb{N}}$ converge, alors elle est bornée.

Démonstration 1.63

On pose $\varepsilon = 42$.

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad \|u_n - \ell\| \leq 42$$

i.e. $\forall n \geq N, \quad u_n \in \overline{B}(\ell, 42)$.

Parmi les N premiers termes de la suite u , on détermine le plus lointain de ℓ : on pose

$$r = \max_{0 \leq k \leq N-1} \|u_k - \ell\|.$$

Puis on pose $R = \max(42, r) > 0$.

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n - \ell\| \leq R$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \overline{B}(\ell, R)$.

Donc la suite est bornée. ■

Théorème 1.64 (Opérations sur les suites convergentes)

Soient $u, v \in E^{\mathbb{N}}$ convergeant respectivement vers ℓ et m deux éléments de E .

Alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, la suite $au + bv$ converge vers $a\ell + bm$.

Soit $\alpha \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors la suite αu converge vers $\lambda\ell$.

Démonstration 1.65 (αu converge vers $\lambda\ell$)

On a

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \|\alpha_n u_n - \lambda\ell\| &= \|\alpha_n u_n - \lambda u_n + \lambda u_n - \lambda\ell\| \\ &= \|(\alpha_n - \lambda) u_n + \lambda(u_n - \ell)\| \\ &\leq \|(\alpha_n - \lambda) u_n\| + \|\lambda(u_n - \ell)\| \\ &= |\alpha_n - \lambda| \|u_n\| + |\lambda| \|u_n - \ell\| \\ &\leq |\alpha_n - \lambda| \|u_n\| + (|\lambda| + 1) \|u_n - \ell\|.\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \|u_n - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda| + 1}.$$

u converge donc est bornée : il existe $K \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\| \leq K.$$

Donc il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_1, |\alpha_n - \lambda| \leq \frac{\varepsilon}{K}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\forall n \geq \max(n_0, n_1), \|\alpha_n u_n - \lambda\ell\| &\leq K \frac{\varepsilon}{K} + (|\lambda| + 1) \frac{\varepsilon}{|\lambda| + 1} \\ &= 2\varepsilon.\end{aligned}$$

D'où $\alpha_n u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \lambda\ell$. ■

Proposition 1.66

Toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite.

Quasi-réciproque : si u est une suite telle que les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite ℓ , alors u converge vers ℓ .

Proposition 1.67

Dans un produit de deux espaces vectoriels normés $E \times F$, une suite $(u_n) = ((a_n, b_n))$ converge ssi les suites (a_n) et (b_n) convergent dans E , respectivement F .

Dans ce cas, $\lim (a_n, b_n) = (\lim a_n, \lim b_n)$.

Ce résultat se généralise sans difficulté par récurrence à un nombre quelconque (fini) d'espaces vectoriels normés.

1.3.3 Cas particulier en dimension finie

Dans cette partie, on suppose que E est de dimension finie.

Définition 1.68

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Pour $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, on appelle i -ème forme coordonnée (relative à la base \mathcal{B}), notée souvent d_i , la forme linéaire qui à un vecteur associe sa i -ème coordonnée dans la base \mathcal{B} :

$$\text{pour tout } v \in E, \quad v = \sum_{i=1}^n d_i(v) e_i.$$

Théorème 1.69

Soit \mathcal{B} une base de E .

Une suite $u \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$ ssi pour toute forme coordonnée d relative à \mathcal{B} , la suite $(d(u_n))$ converge vers $d(\ell)$.

Autrement dit, une suite converge ssi ses suites-coordonnées dans n'importe quelle base convergent.

Dans ce cas, la limite de la suite u est le vecteur ℓ tel que pour toute forme coordonnée d , $d(\ell) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(u_n)$.

Démonstration 1.70

E est de dimension finie donc toutes les normes sur E sont équivalentes. On note $p = \dim E$.

\mathcal{B} étant une base de E , on choisit la norme $\|\cdot\|_\infty$ relative à \mathcal{B} .

Il existe $a, b > 0$ tels que $a \|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\| \leq b \|\cdot\|_\infty$.

\Rightarrow

Si (u_n) converge vers ℓ , alors $\|u_n - \ell\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc d'après l'inégalité ci-dessus, on a

$$0 \leq \|u_n - \ell\|_\infty \leq \frac{1}{a} \|u_n - \ell\|.$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, on a

$$\|u_n - \ell\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

En notant $u_n = (u_{n,1}, \dots, u_{n,p})_{\mathcal{B}}$ et $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p)_{\mathcal{B}}$, on a

$$\|u_n - \ell\|_\infty = \max_{k \in \llbracket 1; p \rrbracket} |u_{n,k} - \ell_k|.$$

Donc $\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $|u_{n,k} - \ell_k| \leq \|u_n - \ell\|_\infty$ et, par théorème des gendarmes, on a

$$u_{n,k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_k.$$

\Leftarrow

Si pour tout $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $(u_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ_k , on a $\|u_n - \ell\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et d'après l'inégalité précédente, on a

$$\|u_n - \ell\| \leq b \|u_n - \ell\|_\infty$$

donc $\|u_n - \ell\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ i.e. (u_n) converge vers ℓ . ■

Exemple 1.71

Si $M_n = \begin{pmatrix} 1 & e^{-n} \\ 1/n & n \sin(1/n) \end{pmatrix}$, alors la suite de matrices (M_n) converge vers la matrice I_2 .

Corollaire 1.72

Si E est de dimension finie, la convergence d'une suite ne dépend pas du choix de la norme. On peut donc choisir la norme qu'on veut.

1.3.4 Point adhérent à une partie

Définition 1.73

Soient A une partie de E et $x \in E$.

On dit que x est un point adhérent à A quand il existe une suite $u \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x .

L'adhérence de A est l'ensemble de ses points adhérents, noté \overline{A} .

Intuitivement, l'adhérence d'une partie est elle-même à laquelle on ajoute tous les points qui se trouvent sur son bord.

Remarque 1.74

On remarque qu'on a $A \subseteq \overline{A}$ car pour tout $a \in A$, la suite constante égale à a converge vers a et est à termes dans A .

Exercice 1.75

Quelle est l'adhérence d'une boule ouverte ?

Correction 1.76

Soient $a \in E$ et $r > 0$. Montrons que $\overline{B(a, r)} = \overline{B}(a, r)$.

\subseteq

Soit $b \in \overline{B(a, r)}$.

Il existe $(u_n) \in B(a, r)^{\mathbb{N}}$ qui converge vers b .

D'après la deuxième inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned} ||u_n - a|| - ||b - a|| &\leq ||(u_n - a) - (b - a)|| \\ &= ||u_n - b||. \end{aligned}$$

Or $||u_n - b|| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc d'après le théorème d'encadrement, on a

$$||u_n - a|| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} ||b - a||.$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in B(a, r)$ donc $||u_n - a|| < r$.

Par passage à la limite, $||b - a|| \leq r$.

Donc $b \in \overline{B}(a, r)$.

\supseteq

Soit $b \in \overline{B}(a, r)$.

Alors $\|b - a\| \leq r$.

Si $\|b - a\| < r$, alors $b \in B(a, r) \subseteq \overline{B(a, r)}$.

Si $\|b - a\| = r$, on pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}a + \left(1 - \frac{1}{n}\right)b$.

La suite (u_n) converge vers b par opérations sur les limites et on a

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|u_n - a\| &= \left\| \left(\frac{1}{n} - 1\right)a + \left(1 - \frac{1}{n}\right)b \right\| \\ &= \left| 1 - \frac{1}{n} \right| \|b - a\| \\ &= \frac{n-1}{n} r \\ &< r\end{aligned}$$

donc $(u_n) \in B(a, r)^{\mathbb{N}}$.

On a ainsi trouvé une suite à termes dans $B(a, r)$ qui converge vers b donc $b \in \overline{B(a, r)}$.

Remarque 1.77

On a montré au passage que si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ alors pour tout $a \in E$, $\|u_n - a\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \|\ell - a\|$.

Exercice 1.78

Quelle est l'adhérence de \mathbb{Z} dans \mathbb{R} ?

Correction 1.79

\mathbb{R} est muni de la norme $|\cdot|$.

Montrons que $\mathbb{Z} = \overline{\mathbb{Z}}$.

$\boxed{\subseteq}$ Trivial.

$\boxed{\supseteq}$

Soit $b \in \overline{\mathbb{Z}}$.

Il existe une suite $(u_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers b .

On pose $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad |u_n - b| < \frac{1}{2}$$

$$i.e. \quad u_n \in \left] b - \frac{1}{2}; b + \frac{1}{2} \right[.$$

Or l'intervalle $\left] b - \frac{1}{2} ; b + \frac{1}{2} \right[$ est de longueur 1 et est ouvert donc il contient au plus un entier.

Or il en contient un donc il en contient un et un seul.

On en déduit que (u_n) est stationnaire en cet entier à partir de n_0 et donc $\lim u = b$ est un entier.

Donc $b \in \mathbb{Z}$.

Proposition 1.80

Soient A une partie de E et $x \in E$.

Alors x est adhérent à A ssi toute boule centrée en x rencontre A .

De manière formalisée : $x \in \overline{A} \iff \forall r > 0, \exists y \in A, y \in B(x, r)$.

Démonstration 1.81

$\boxed{\Leftarrow}$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A \neq \emptyset$.

On peut choisir $y_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A$.

On construit ainsi une suite $(y_n) \in A^{\mathbb{N}^*}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|x - y_n\| < \frac{1}{n}.$$

D'après le théorème d'encadrement, on a donc $y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$.

Donc $x \in \overline{A}$.

$\boxed{\Rightarrow}$

Soient $x \in \overline{A}$ et $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$.

Soit $r > 0$.

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \|u_n - x\| < r$$

donc $u_{n_0} \in A \cap B(x, r)$ donc $A \cap B(x, r) \neq \emptyset$. ■

On peut donner la définition de la densité d'une partie.

Définition 1.82

On dit qu'une partie A est dense dans E quand $\overline{A} = E$, c'est-à-dire qu'on peut trouver des éléments de A aussi proches de n'importe quel point.

Exemple 1.83

- ▷ Dans \mathbb{R} , \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses (*cf.* cours de première année).
- ▷ $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (démonstration ultérieure).

1.4 Limites de fonctions

Dans cette section, E et F sont deux espaces vectoriels normés par les normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.

1.4.1 Définition

Définition 1.84

Soient f une fonction de E dans F , D son ensemble de définition, $a \in \overline{D}$ et $\ell \in F$.

On dit que f a pour limite ℓ en a quand

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, \|x - a\|_E < \eta \implies \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon.$$

Remarque 1.85

On peut remplacer les inégalités strictes sur les normes par des inégalités larges.

On peut réécrire la définition à l'aide de boules ouvertes (ou fermées) :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D \cap B(a, \eta), f(x) \in B(\ell, \varepsilon).$$

Si E et F sont de dimension finie, cette définition ne dépend pas du choix des normes.

1.4.2 Caractérisation séquentielle de la limite

Théorème 1.86

Soient f une fonction de E dans F , D son ensemble de définition, $a \in \overline{D}$ et $\ell \in F$.

f a pour limite ℓ en a ssi pour toute suite u à termes dans D convergeant vers a , la suite $f \circ u = (f(u_n))$ converge vers ℓ .

Démonstration 1.87

\Rightarrow

Supposons que f a pour limite ℓ en a .

Soit $u \in D^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a .

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in D, \|x - a\|_E < \eta \implies \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon.$$

On a $\eta > 0$ et $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \|u_n - a\|_E < \eta.$$

Donc pour tout $n \geq N$, comme $u_n \in D$ et $\|u_n - a\|_E < \eta$, on a

$$\|f(u_n) - \ell\|_F < \varepsilon.$$

Donc $(f(u_n))$ converge vers ℓ .

\Leftarrow

Par contraposée, montrons que si f n'a pas pour limite ℓ en a alors il existe $u \in D^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$ et $f(u_n) \not\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.

Si f n'a pas pour limite ℓ en a , alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe $x \in D$ tel que $\|x - a\|_E < \eta$ et $\|f(x) - \ell\|_F \geq \varepsilon$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n \in D$ tel que
$$\begin{cases} \|u_n - a\|_E < \frac{1}{n+1} \\ \|f(u_n) - \ell\|_F \geq \varepsilon \end{cases}.$$

On construit ainsi une suite $(u_n) \in D^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} \|u_n - a\|_E < \frac{1}{n+1} \\ \|f(u_n) - \ell\|_F \geq \varepsilon \end{cases}$$

Par encadrement, (u_n) converge vers a mais $(f(u_n))$ ne converge pas vers ℓ . ■

En pratique, on utilise beaucoup plus souvent le sens direct de l'équivalence précédente.

1.4.3 Propriétés usuelles

Proposition 1.88 (Unicité de la limite)

Soient f une fonction de E dans F , D son ensemble de définition, $a \in \overline{D}$ et $\ell \in F$.

Si f a pour limite ℓ en a , alors elle ne peut avoir d'autre limite que ℓ en a .

On peut donc noter classiquement $\ell = \lim_a f = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

Proposition 1.89

Si f a pour limite ℓ en a , alors elle est bornée au voisinage de a .

Théorème 1.90 (Opérations sur les limites)

Soient f et g deux fonctions de E dans F , définies sur la même partie D et ayant respectivement pour limites ℓ et m deux éléments de F en $a \in \overline{D}$.

Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, la fonction $\lambda f + \mu g$ a pour limite $\lambda \ell + \mu m$ en a .

Soient α une fonction de E dans \mathbb{K} et f une fonction définie de E dans F , définies sur la même partie D et ayant respectivement pour limites $\beta \in \mathbb{K}$ et $\ell \in F$ en $a \in \overline{D}$.

Alors αf a pour limite $\beta \ell$ en a .

Proposition 1.91

Une fonction $f = (g, h)$ à valeurs dans un produit d'espaces vectoriels normés a une limite ssi g et h ont chacune une limite.

Dans ce cas, $\lim_a f = \left(\lim_a g, \lim_a h \right)$.

Ce résultat se généralise sans difficulté par récurrence à un nombre quelconque (fini) d'espaces vectoriels normés.

1.4.4 Cas particulier de la dimension finie

Théorème 1.92

On suppose que F est de dimension finie. Soit \mathcal{B} une base de F .

Soit f une fonction de E dans F , D son ensemble de définition, $a \in \overline{D}$ et $\ell \in F$.

La fonction f a pour limite ℓ en a ssi pour toute forme coordonnée d relative à \mathcal{B} , la fonction $d \circ f$ a pour limite $d(\ell)$ en a .

Autrement dit, une fonction a une limite en a ssi ses fonctions-coordonnées dans n'importe quelle base ont chacune une limite en a .

Dans ce cas, la limite de la fonction f en a est le vecteur ℓ tel que pour toute forme coordonnée d , $d(\ell) = \lim_{x \rightarrow a} d(f(x))$.

1.4.5 Composition des limites

G désigne un troisième espace vectoriel normé.

Théorème 1.93

Soient f une fonction de E dans F et D_f son ensemble de définition. Soient g une fonction de F dans G et D_g son ensemble de définition. On suppose que $f(D_f) \subseteq D_g$ (condition qui permet de définir la composée $g \circ f$ sur D_f).

Soient $a \in \overline{D_f}$, $b \in \overline{D_g}$ et $\ell \in G$.

Si f a pour limite b en a et g a pour limite ℓ en b , alors $g \circ f$ a pour limite ℓ en a .

Autrement dit, si $\begin{cases} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b \\ g(y) \xrightarrow{y \rightarrow b} \ell \end{cases}$ alors $g \circ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

1.4.6 Extensions des définitions

D'abord les limites infinies en un point dans le cas où l'espace d'arrivée est \mathbb{R} .

Définition 1.94

Soient f une fonction de E dans \mathbb{R} , D son ensemble de définition et $a \in \overline{D}$.

On dit que f a pour limite $+\infty$ en a quand

$$\forall M > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, \|x - a\|_E \leq \eta \implies f(x) \geq M.$$

On dit que f a pour limite $-\infty$ en a quand

$$\forall M < 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, \|x - a\|_E \leq \eta \implies f(x) \leq M.$$

Puis les limites en « l'infini ».

Définition 1.95

Soient f une application de E dans F et $\ell \in F$.

On dit que f a pour limite ℓ quand $\|x\|$ tend vers l'infini quand

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in E, \|x\|_E \geq B \implies \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

Dans le cas où $F = \mathbb{R}$, on dit que $f(x)$ a pour limite $+\infty$ quand $\|x\|$ tend vers l'infini quand

$$\forall M > 0, \exists B > 0, \forall x \in E, \|x\|_E \geq B \implies f(x) \geq M.$$

(Définition semblable pour la limite $-\infty$).

Enfin, dans le cas où l'espace de départ est \mathbb{R} , on peut parler de limite en l'infini au sens habituel.

Définition 1.96

Soient f une fonction de \mathbb{R} dans F , définie sur un ouvert $]a; +\infty[$ et $\ell \in F$.

On dit que $f(x)$ a pour limite ℓ quand x tend vers $+\infty$ quand

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \geq B, \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon.$$

(Définition semblable pour la limite x tend vers $-\infty$).

1.5 Fonctions continues

Dans cette section, E et F sont des espaces vectoriels normés par les normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.

1.5.1 Continuité en un point

Proposition 1.97

Soient f une fonction de E dans F , D son ensemble de définition, $a \in \overline{D}$ et $\ell \in F$.

Si f a pour limite ℓ en a et si $a \in D$, alors $\ell = f(a)$.

Dans ce cas, on dit que la fonction f est continue en a .

Définition 1.98

Soient f une fonction de E dans F , D son ensemble de définition et $a \in D$.

On dit que f est continue en a quand f a pour limite $f(a)$ en a .

On déduit de cette définition et des théorèmes précédents

- la caractérisation séquentielle de la continuité en un point ;
- le fait qu'une fonction continue en un point est bornée au voisinage de ce point ;
- les théorèmes d'opérations et de compositions des fonctions continues en un point ;
- l'équivalence entre la continuité d'une fonction et celle de ses fonctions-coordonnées dans une certaine base de F dans le cas où F est de dimension finie.

1.5.2 Continuité sur une partie

Définition 1.99

Soient f une fonction de E dans F , D son ensemble de définition et $A \subseteq D$.

On dit que f est continue sur A quand f est continue en tout point de A .

On déduit de cette définition et des théorèmes précédents

- les théorèmes d'opérations et de compositions des fonctions continues sur une partie ;
- l'équivalence entre la continuité d'une fonction et celle de ses fonctions-coordonnées dans une certaine base de F dans le cas où F est de dimension finie.

Proposition 1.100

Soient f et g deux fonctions de E dans F définies sur D et $A \subseteq D$.

Si A est dense dans D , f et g sont continues sur D et $f = g$ sur A , alors $f = g$ sur D .

Démonstration 1.101

On suppose que A est dense dans D et que f et g sont continues.

Soit $x \in D$.

Il existe $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.

f est continue en x donc d'après la caractérisation séquentielle de la continuité, on a

$$f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x).$$

De même, on a

$$g(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g(x).$$

Or $f = g$ sur A donc $(f(u_n)) = (g(u_n))$ donc $f(x) = g(x)$ par unicité de la limite. ■

1.5.3 Cas particulier de la dimension finie

On suppose que E et F sont de dimensions finies.

Dans une base donnée, les formes coordonnées relatives à cette base sont en particulier des applications continues.

Donc toute fonction f de E dans F dont les fonctions-coordonnées (f_1, \dots, f_n) dans une base de F sont définies polynomialement à partir des formes coordonnées dans une base de E est continue.

Exemple 1.102

- La fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y) = (x^2 + y^2, xy - (1+x)^3)$ est continue sur \mathbb{R}^2 .
- Les applications trace et déterminant définies sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont continues.

Exercice 1.103

Montrez que l'application $A \mapsto A^2$ est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans lui-même.

Correction 1.104

On a $A^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} a_{k,j} \right)_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2}$ donc $A \mapsto A^2$ est continue.

Exercice 1.105

En admettant (momentanément) que $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert, montrez que l'application $A \mapsto A^{-1}$ est continue de $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ dans lui-même.

Correction 1.106

Si $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{Com } A)^\top$.

Les coefficients de $(\text{Com } A)^\top$ sont des déterminants calculés à partir des coefficients de A donc dépendent polynomialement de ces coefficients, donc $A \mapsto (\text{Com } A)^\top$ est continue.

Donc $A \mapsto A^{-1}$ est le produit de deux fonctions continues et est donc continue.

1.5.4 Fonctions lipschitziennes

Définition 1.107

Soient f une application de E dans F , A une partie de E et $K \in \mathbb{R}_+$.

On dit que f est K -lipschitzienne sur A (ou lipschitzienne de rapport K) quand

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad \|f(y) - f(x)\|_F \leq K \|y - x\|_E.$$

On dit que f est lipschitzienne sur A quand il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que f soit K -lipschitzienne sur A .

Remarque 1.108

Si f est K -lipschitzienne sur A , alors le rapport K n'est pas unique, puisque pour tout $L \geq K$, on a encore f L -lipschitzienne sur A .

Proposition 1.109

Toute fonction lipschitzienne est continue.

Mais la réciproque est fautive (contre-exemple : la fonction $\sqrt{\cdot}$ sur $[0 ; +\infty[$).

Un exemple fondamental : la fonction $x \mapsto d(x, A)$.

Définition 1.110

Soit A une partie de E .

Pour $x \in E$, on appelle distance de x à A le réel $\inf_{a \in A} d(x, a)$.

Proposition 1.111

Pour toute partie A de E , la fonction $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne.

L'adhérence de A est l'ensemble des points à distance nulle de A , i.e. tels que $d(x, A) = 0$.

Démonstration 1.112 (1-lipschitzianité de la fonction)

On veut montrer

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad |d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|.$$

On montre d'abord

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad d(x, A) - d(y, A) \leq \|x - y\|$$

ce qui est équivalent à

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad d(x, A) \leq d(y, A) + \|x - y\|.$$

On a $d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$ donc pour tout $a \in A$, on a

$$d(x, A) \leq \|x - a\|.$$

Or $\|x - a\| = \|x - y + y - a\| \leq \|x - y\| + \|y - a\|$ donc

$$d(x, A) \leq \|x - y\| + \|y - a\|.$$

De plus, on a $d(y, A) = \inf_{a \in A} \|y - a\|$ donc il existe $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\|y - u_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} d(y, A).$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(x, A) \leq \|x - y\| + \|y - u_n\|$, donc par passage à la limite quand $n \rightarrow +\infty$:

$$d(x, A) \leq \|x - y\| + d(y, A)$$

donc $d(x, A) - d(y, A) \leq \|x - y\|$.

En échangeant x et y , on obtient

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad d(y, A) - d(x, A) \leq \|y - x\| = \|x - y\|.$$

D'où

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad |d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|.$$

■

Démonstration 1.113 ($x \in \overline{A} \iff d(x, A) = 0$)

\implies

Si $x \in \overline{A}$ alors il existe une suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x .

Or $x \mapsto d(x, A)$ est lipschitzienne donc continue, donc

$$d(u_n, A) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} d(x, A).$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(u_n, A) = 0$ car $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$, donc

$$d(x, A) = 0.$$

\impliedby

Si $d(x, A) = 0$, alors $\inf_{a \in A} \|x - a\| = 0$.

Donc il existe $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\|x - a_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ i.e. (a_n) converge vers x i.e. $x \in \overline{A}$.

■

1.5.5 Continuité des applications linéaires et n -linéaires

Proposition 1.114

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- (1) f est continue en 0 ;
- (2) f est continue en un point x ;
- (3) f est continue sur E ;

(4) f est lipschitzienne sur E ;

(5) il existe $K \geq 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq K \|x\|_E$;

(6) f est bornée sur la boule-unité ;

(7) f est bornée sur une boule.

Démonstration 1.115

On a clairement (4) \implies (3), (3) \implies (2) et (3) \implies (1). ■

Démonstration 1.116 ((1) \implies (2))

Soit $x \in E$.

f est continue en 0 donc $\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = f(0) = 0$.

Donc $f(x+h) = f(x) + f(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x)$.

Donc f est continue en x . ■

Démonstration 1.117 ((2) \implies (3))

Soit $y \in E$.

f est continue en x donc $\lim_{t \rightarrow x} f(t) = f(x)$.

Donc

$$\begin{aligned} f(t) &= f(t - y + x - x + y) \\ &= f(t - y + x) - f(x) + f(y) \\ &\xrightarrow{t \rightarrow y} f(y). \end{aligned}$$

Donc f est continue en y .

Donc f est continue sur E . ■

Démonstration 1.118 ((3) \implies (7))

Soit $x \in E$.

f est continue en x donc f est bornée au voisinage de x i.e. il existe $r > 0$ tel que f soit bornée sur $B(x, r)$. ■

Démonstration 1.119 ((7) \implies (6))

f est bornée sur $B(x, r)$: il existe $M > 0$ tel que

$$\forall t \in B(x, r), \quad \|f(t)\| \leq M.$$

Pour tout $y \in B(0, r)$, on a $x + y \in B(x, r)$.

Donc $\|f(x + y)\| \leq M$.

Donc $\|f(x) + f(y)\| \leq M$ donc $\|f(y)\| - \|f(x)\| \leq \|f(y) + f(x)\| \leq M$.

Donc $\|f(y)\| \leq M + \|f(x)\| = M'$.

Pour tout $z \in B(0, 1)$, on a $rz \in B(0, r)$.

Donc d'après ce qui précède :

$$\|f(rz)\| \leq M'$$

$$\|rf(z)\| \leq M'$$

$$r\|f(z)\| \leq M'$$

$$\|f(z)\| \leq \frac{M'}{r}.$$

Donc f est bornée sur $B(0, 1)$. ■

Démonstration 1.120 ((6) \implies (5))

Pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1$.

Donc $\frac{x}{2\|x\|} \in B(0, 1)$.

f est bornée sur $B(0, 1)$: il existe $M > 0$ tel que

$$\forall t \in B(0, 1), \quad \|f(t)\| \leq M.$$

Donc pour tout $x \neq 0$, $\left\| f\left(\frac{x}{2\|x\|}\right) \right\| \leq M$.

Donc $\left\| \frac{1}{2\|x\|} f(x) \right\| \leq M$.

Donc $\frac{1}{2\|x\|} \|f(x)\| \leq M$.

Donc $\|f(x)\| \leq 2M\|x\|$.

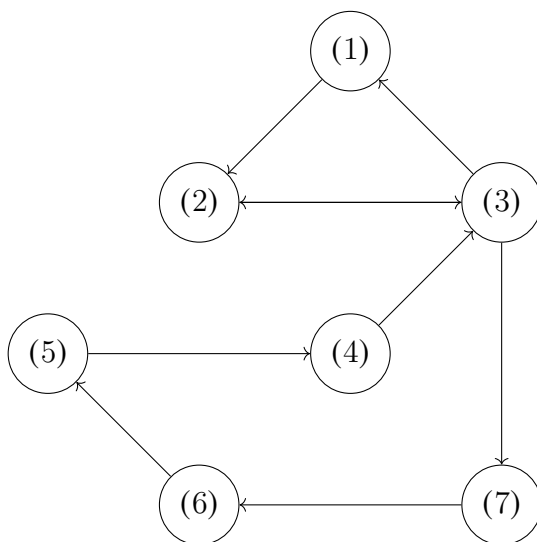
Ceci est vrai aussi pour $x = 0$: $\|f(0)\| = \|0\| = 0 \leq 2M\|0\|$. ■

Démonstration 1.121 ((5) \implies (4))

On a

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \|f(x) - f(y)\| = \|f(x - y)\| \leq K \|x - y\|.$$

On a donc montré toutes les équivalences :



■

Exercice 1.122

On pose $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie.

L'application $f \mapsto \int_0^1 f(t) dt$ est-elle continue sur E ?

Correction 1.123

Pour $f \in E$, on a $\|f\|_\infty = \sup_{[0;1]} |f| \in \mathbb{R}$ car $|f|$ est continue sur le segment $[0; 1]$.

On note $I : f \mapsto \int_0^1 f(t) dt$. I est linéaire.

Pour $f \in E$, on a $|I(f)| \leq \int_0^1 |f|$.

Or $\forall t \in [0; 1], |f(t)| \leq \|f\|_\infty$.

Donc

$$|I(f)| \leq \int_0^1 |f| \leq \int_0^1 \|f\|_\infty dt = \|f\|_\infty.$$

Donc d'après la Proposition 1.114, I est continue sur E .

Exercice 1.124

E désigne le même espace et on pose $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$.

Montrez que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur E .

L'application $f \mapsto f(1)$ est-elle continue sur E ?

Correction 1.125 ($\|\cdot\|_1$ est une norme sur E)

► Soit $f \in E$. Si $\|f\|_1 = 0$ alors $\int_0^1 |f| = 0$. Or $|f|$ est continue et positive donc d'après le théorème de stricte positivité de l'intégrale, $|f| = 0$ donc $f = 0$.

► Soient $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\|\lambda f\|_1 = \int_0^1 |\lambda f| = \int_0^1 |\lambda| |f| = |\lambda| \int_0^1 |f| = |\lambda| \|f\|_1.$$

► Soit $(f, g) \in E^2$. On a

$$\|f + g\|_1 = \int_0^1 |f + g| \leq \int_0^1 (|f| + |g|) = \int_0^1 |f| + \int_0^1 |g| = \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

► Donc $\|\cdot\|_1$ est une norme sur E .

Correction 1.126 (Continuité de l'application ?)

On pose $V : E \longrightarrow \mathbb{R}$
 $f \longmapsto f(1)$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[0 ; 1 - \frac{1}{n}\right] \\ n^2 \left(x - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) & \text{sinon} \end{cases}$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\int_0^1 |f| = \int_0^1 f_n = \frac{1}{2}$ donc $f_n \in B(0, 1)$.

Or $|V(f_n)| = |f_n(1)| = n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

On a ainsi trouvé une suite (f_n) à termes dans $B(0, 1)$ telle que $V(f_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Donc V n'est pas bornée sur $B(0, 1)$.

Donc comme V est linéaire, V n'est pas continue sur $(E, \|\cdot\|_1)$.

Remarque : on a $\forall f \in E, |V(f)| = |f(1)| \leq \|f\|_\infty$ donc V est continue sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

Définition 1.127

On note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F .

Proposition 1.128

$\mathcal{L}_c(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$, en général distinct de $\mathcal{L}(E, F)$.

Cas particulier en dimension finie.

Théorème 1.129

On suppose que E est de dimension finie.

Toute application linéaire de E dans F est lipschitzienne sur E , donc continue.

Autrement dit, si E est de dimension finie, alors $\mathcal{L}_c(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$.

Démonstration 1.130

On note $p = \dim E$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E .

Pour $x = (x_1, \dots, x_p)_{\mathcal{B}}$, on a $\|x\|_{\infty} = \sup_{1 \leq i \leq p} |x_i| = \max_{1 \leq i \leq p} |x_i|$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et N une norme sur F .

Pour $x = (x_1, \dots, x_p)_{\mathcal{B}}$, on a $x = \sum_{k=1}^p x_k e_k$.

Donc, f étant linéaire, on a $f(x) = \sum_{k=1}^p x_k f(e_k)$.

Donc

$$\begin{aligned} N(f(x)) &= N\left(\sum_{k=1}^p x_k f(e_k)\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^p N(x_k f(e_k)) \\ &= \sum_{k=1}^p |x_k| N(f(e_k)). \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 1 ; p \rrbracket, \quad |x_i| &\leq \|x\|_{\infty} \\ |x_i| N(f(e_i)) &\leq \|x\|_{\infty} N(f(e_i)). \end{aligned}$$

Donc $N(f(x)) \leq \|x\|_{\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^p N(f(e_k))}_K$.

Ceci prouve d'après la Proposition 1.114 que f est continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans (F, N) .

Soit maintenant $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur E .

Comme E est de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes, donc il existe $a, b > 0$ tels que $a \|\cdot\| \leq \|\cdot\|_\infty \leq b \|\cdot\|$.

Donc pour tout $x \in E$, $N(f(x)) \leq bK \|x\|$.

Donc f est continue de $(E, \|\cdot\|)$ dans (F, N) . ■

Remarque 1.131

L'hypothèse de dimension finie de E est indispensable. Dans le cas contraire, c'est faux en général.

Le résultat précédent s'étend aux applications multilinéaires.

Théorème 1.132

Soient E_1, \dots, E_n des espaces vectoriels normés de dimensions finies et $f : E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow F$ une application n -linéaire.

Il existe alors une constante $K \geq 0$ telle que

$$\text{pour tout } (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n, \quad \|f(x_1, \dots, x_n)\| \leq K \|x_1\|_{E_1} \dots \|x_n\|_{E_n}.$$

Démonstration 1.133

Pour tout $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, on note $p_i = \dim E_i$ et $\mathcal{B}_i = (e_{i,1}, \dots, e_{i,p_i})$ une base de E_i .

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$. Pour tout $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, on note $x_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,p_i})_{\mathcal{B}_i}$.

On a

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= f\left(\sum_{j_1=1}^{p_1} x_{1,j_1} e_{1,j_1}, \dots, \sum_{j_n=1}^{p_n} x_{n,j_n} e_{n,j_n}\right) \\ &= \sum_{j_1=1}^{p_1} \dots \sum_{j_n=1}^{p_n} x_{1,j_1} \dots x_{n,j_n} f(e_{1,j_1}, \dots, e_{n,j_n}). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} N(f(x_1, \dots, x_n)) &\leq \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq p_1 \\ \vdots \\ 1 \leq j_n \leq p_n}} |x_{1,j_1}| \dots |x_{n,j_n}| N(f(e_{1,j_1}, \dots, e_{n,j_n})) \\ &\leq \|x_1\|_{1,\infty} \dots \|x_n\|_{n,\infty} \underbrace{\sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq p_1 \\ \vdots \\ 1 \leq j_n \leq p_n}} N(f(e_{1,j_1}, \dots, e_{n,j_n}))}_{K}. \end{aligned}$$

On conclut de la même façon que dans la démonstration précédente. ■

Corollaire 1.134

Soient E_1, \dots, E_n des espaces vectoriels normés de dimensions finies.

Toute application $f : E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow F$ qui est n -linéaire est continue sur $E_1 \times \dots \times E_n$.

Exemple 1.135

- Le produit matriciel de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K})$ est bilinéaire, donc continu.
- Un produit scalaire dans un espace euclidien est bilinéaire, donc continu.
- Le déterminant dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est n -linéaire par rapport aux colonnes, donc il est continu.

1.5.6 Norme subordonnée

On définit sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}_c(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F la notion de norme subordonnée (relative aux deux normes sur E et F) ou norme triple.

Définition 1.136

Soit $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$.

On pose $\|f\| = \sup_{x \in B(0,1)} \|f(x)\|$, appelée la norme subordonnée de f .

Remarque 1.137

Cette définition a un sens car f étant linéaire de E dans F et continue, elle est bornée sur $B(0,1)$ d'après la Proposition 1.114.

Remarque 1.138

On a

$$\|f\| = \sup_{x \in B(0,1)} \|f(x)\| = \sup_{x \in S(0,1)} \|f(x)\| = \sup_{x \in \overline{B}(0,1)} \|f(x)\|.$$

Proposition 1.139

Soit $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$.

Alors $\|f\|$ est

- égal à $\sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$, mais aussi à $\sup_{x \in S(0,1)} \|f(x)\|$;
- le plus petit réel positif M tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leq M \|x\|$.

Démonstration 1.140

On note $N_1(f) = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$ et $N_2(f) = \sup_{x \in S(0,1)} \|f(x)\|$. ■

Démonstration 1.141 ($N_1(f) = N_2(f)$)

Pour tout $x \neq 0$, $\frac{x}{\|x\|} \in S(0,1)$.

Donc $\left\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq N_2(f)$.

Donc $\frac{1}{\|x\|} \|f(x)\| \leq N_2(f)$ i.e. $N_1(f) \leq N_2(f)$.

De plus, pour tout $x \in S(0,1)$, $\|x\| = 1$ donc $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \|f(x)\| \leq N_1(f)$.

Donc $N_2(f) \leq N_1(f)$.

Finalement, on a $N_1(f) = N_2(f)$. ■

Démonstration 1.142 ($N_2(f) = \|f\|$)

Pour tout $x \in B(0,1) \setminus \{0\}$, on a $\frac{x}{\|x\|} \in S(0,1)$ donc

$$\left\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq N_2(f)$$
$$\frac{1}{\|x\|} \|f(x)\| \leq N_2(f).$$

Or $\|x\| \leq 1$ donc $\|f(x)\| \leq \frac{1}{\|x\|} \|f(x)\| \leq N_2(f)$.

Ceci est encore vrai pour $x = 0$ donc $\|f\| \leq N_2(f)$.

De plus, soient $x \in S(0,1)$ et $\lambda \in [0; 1[$.

On a $\|\lambda x\| = \lambda < 1$ donc $\lambda x \in B(0,1)$.

Donc $\|f(\lambda x)\| = \lambda \|f(x)\| \leq \|f\|$.

Donc, par passage à la limite quand $\lambda \rightarrow 1$:

$$\|f(x)\| \leq \|f\|$$

i.e. $N_2(f) \leq \|f\|$.

Donc $N_2(f) = \|f\|$. ■

Démonstration 1.143 (Second point)

On a

$$\begin{aligned}\|f\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \\ &= \min \left\{ K \in \mathbb{R} \mid \forall x \neq 0, \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq K \right\} \\ &= \min \{ K \in \mathbb{R} \mid \forall x \in E, \|f(x)\| \leq K \|x\| \}.\end{aligned}$$

■

Exemple 1.144

Dans l'Exercice 1.122, on avait montré $\forall f \in E, |I(f)| \leq \|f\|_\infty$.

On a $|I(1)| = 1 = 1 \times \|1\|_\infty$.

Donc $\|I\| = 1$.

Méthode 1.145

Si

$$\forall x \in E, \|f(x)\| \leq K \|x\|$$

et s'il existe $x_0 \in E$ tel que

$$\|f(x_0)\| = K \|x_0\|$$

alors $\|f\| = K$.

Proposition 1.146

Les normes subordonnées sont des normes sur les espaces $\mathcal{L}_c(E, F)$.

Elles sont dites sous-multiplicatives : pour toutes applications linéaires continues et composables f et g ,

$$\|f \circ g\| \leq \|f\| \times \|g\|.$$

Démonstration 1.147 ($\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$)

► Soit $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$.

Si $\|f\| = 0$ alors $\forall x \in E, \|f(x)\| \leq 0 \times \|x\|$ donc $f = 0$.

► Soient $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On a

$$\|\lambda f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\lambda f(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} |\lambda| \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = |\lambda| \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = |\lambda| \|f\|.$$

► Soit $(f, g) \in \mathcal{L}_c(E, F)^2$.

On a

$$\begin{aligned}\forall x \in B(0, 1), \quad \|(f + g)(x)\| &= \|f(x) + g(x)\| \\ &\leq \|f(x)\| + \|g(x)\| \\ &\leq \|f\| + \|g\|\end{aligned}$$

donc $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$. ■

Démonstration 1.148 (Sous-multiplicativité)

On a

$$\begin{aligned}\forall x \in E, \quad \|f \circ g(x)\| &= \|f(g(x))\| \\ &\leq \|f\| \|g(x)\| \\ &\leq \|f\| \|g\| \|x\|.\end{aligned}$$

Donc $\|f \circ g\| \leq \|f\| \|g\|$. ■

Comme en dimension finie, on peut représenter par choix de bases les applications linéaires par des matrices, on définit de manière semblable la notion de norme sous-multiplicative de matrices (relativement aux normes) ou norme triple.

Définition 1.149

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On choisit deux normes sur \mathbb{K}^p et \mathbb{K}^n (espaces identifiés à ceux des matrices-colonnes).

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, on pose $\|A\| = \sup_{\|X\|=1} \|AX\|$.

Proposition 1.150

Des normes étant choisies sur les espaces \mathbb{K}^p et \mathbb{K}^n , les normes subordonnées sont des normes sur tous les espaces $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.

Elles sont dites sous-multiplicatives : pour toutes matrices multipliables A et B ,

$$\|AB\| \leq \|A\| \times \|B\|.$$

Remarque 1.151

Dans le cas où un espace vectoriel normé E est aussi une \mathbb{K} -algèbre, on dit qu'il est une algèbre normée quand la norme vérifie en plus la propriété de sous-multiplicativité : $\forall (x, y) \in E^2, \quad \|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Remarque 1.152

En dimension finie, toute \mathbb{K} -algèbre A possède des normes sous-multiplicatives.

Démonstration 1.153

Soit A une \mathbb{K} -algèbre de dimension finie.

L'application $A^2 \longrightarrow A$ est bilinéaire donc continue.
 $(a, b) \longmapsto ab$

Il existe donc $K > 0$ tel que

$$\forall (a, b) \in A^2, \quad \|ab\| \leq K \|a\| \|b\|.$$

On pose $N = K \|\cdot\|$.

On a alors

$$\forall (a, b) \in A^2, \quad N(ab) \leq N(a) N(b)$$

et N est une norme sur A . ■

1.6 Topologie d'un espace vectoriel normé

Dans cette section, E est un espace vectoriel normé.

1.6.1 Intérieur d'une partie, voisinage d'un point

Définition 1.154

Soient A une partie de E et $a \in A$.

On dit que a est un point intérieur à A quand on peut trouver un rayon $r > 0$ tel que $B(a, r)$ soit incluse dans A . On dit aussi dans ce cas que A est un voisinage de a .

L'intérieur de A est l'ensemble de ses points intérieurs, noté $\overset{\circ}{A}$.

On a :

$$a \in \overset{\circ}{A} \iff \exists r > 0, \quad B(a, r) \subseteq A.$$

Exercice 1.155

Dans \mathbb{R} , quels sont les intérieurs des parties suivantes : $[0 ; 1]$, $[0 ; +\infty[$, \mathbb{Q} ?

Correction 1.156

► Si $A = [0 ; 1]$, alors $\overset{\circ}{A} =]0 ; 1[$.

En effet, pour $x \in]0 ; 1[$, on peut poser $r = \min\left(\frac{x}{2}, \frac{1-x}{2}\right) > 0$ pour avoir $B(x, r) \subseteq [0 ; 1]$.

► Si $A = [0 ; +\infty[$, alors $\overset{\circ}{A} =]0 ; +\infty[$ (même idée).

► Si $A = \mathbb{Q}$, alors $\overset{\circ}{A} = \emptyset$.

En effet, pour tout $x \in \mathbb{Q}$, pour tout $r > 0$, il existe $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $|x - y| < r$ i.e. $B(x, r) \not\subseteq \mathbb{Q}$.

Exercice 1.157

Quel est l'intérieur d'une boule de centre a et de rayon $r > 0$?

Correction 1.158

Soient $a \in E$ et $r > 0$.

Si $A = B(a, r)$, alors $\overset{\circ}{A} = A$.

En effet, pour tout $x \in B(a, r)$, on pose $p = \frac{r - \|x - a\|}{2} > 0$ et on a

$$B(x, p) \subseteq A.$$

Remarque 1.159

Cette notion dépend a priori de la norme utilisée. En dimension finie, ce n'est pas le cas : l'intérieur d'une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie ne dépend pas du choix de la norme (pourquoi?).

Démonstration 1.160

Si N_1, N_2 sont deux normes équivalentes sur E , A est une partie de E et $a \in E$, alors a est intérieur à A pour N_1 ssi a est intérieur à A pour N_2 .

Il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha N_2 \leq N_1 \leq \beta N_2$.

Si a est intérieur à A pour N_1 , alors il existe $r > 0$ tel que $B_1(a, r) \subseteq A$.

On pose $p = \frac{r}{\beta} > 0$ et on montre $B_2(a, p) \subseteq A$.

Soit $x \in B_2(a, p)$.

On a $N_2(a - x) < p = \frac{r}{\beta}$.

Donc $N_1(a-x) \leq \beta N_2(a-x) < r$.

Donc $x \in B_1(a, r) \subseteq A$.

Donc x est intérieur à A pour N_2 .

On montre la réciproque de même, en montrant $B_1(a, ar) \subseteq B_2(a, r)$. ■

Proposition 1.161

Soient $u \in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$.

La suite u converge vers ℓ ssi tout voisinage de ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

1.6.2 Parties ouvertes

Définition 1.162

On dit qu'une partie A de E est ouverte (ou est un ouvert) quand à tout point de $a \in A$, on peut associer un rayon $r > 0$ tel que la boule de centre a et de rayon r soit incluse dans A :

$$\forall a \in A, \exists r > 0, B(a, r) \subseteq A.$$

Autrement dit, A est ouverte quand tout point de A est intérieur à A : $A = \mathring{A}$, ou, autrement dit, quand A est un voisinage de chacun de ses points.

Proposition 1.163

L'ensemble vide et E sont des parties ouvertes. Toute boule ouverte est une partie ouverte. Tout produit (fini) de parties ouvertes est ouvert.

Démonstration 1.164

Soient E, F deux espaces vectoriels normés par $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.

On pose $N(x, y) = \max(\|x\|_E, \|y\|_F)$ pour obtenir une norme N sur $E \times F$.

Montrons que si A est un ouvert de E et B un ouvert de F , alors $A \times B$ est un ouvert de $E \times F$.

Soit $(a, b) \in A \times B$.

$a \in A$ et A est un ouvert donc il existe $r > 0$ tel que $B_E(a, r) \subseteq A$.

$b \in B$ et B est un ouvert donc il existe $s > 0$ tel que $B_F(b, s) \subseteq B$.

On pose $p = \min(r, s) > 0$.

Montrons que $B_{E \times F}((a, b), p) \subseteq A \times B$.

Soit $(x, y) \in B_{E \times F}((a, b), p)$.

On a $N((x, y) - (a, b)) < p$ i.e. $N(x - a, y - b) < p$.

Donc $\|x - a\|_E < p$ et $\|y - b\|_F < p$.

Donc $x \in B_E(a, p)$ et $y \in B_F(b, p)$.

Or $p \leq r$ donc $B_E(a, p) \subseteq B_E(a, r) \subseteq A$ et $p \leq s$ donc $B_F(b, p) \subseteq B_F(b, s) \subseteq B$.

Donc $(x, y) \in A \times B$.

Donc $B_{E \times F}((a, b), p) \subseteq A \times B$.

On généralise à un produit de plusieurs ouverts par récurrence. ■

La topologie de E est l'ensemble de tous les ouverts de E .

Remarque 1.165

La topologie dépend a priori de la norme utilisée. En dimension finie, ce n'est pas le cas : dans un espace vectoriel normé de dimension finie, le fait d'être un ouvert ne dépend pas du choix de la norme.

1.6.3 Parties fermées

On rappelle la notion de point adhérent à une partie.

Définition 1.166

Soient A une partie de E et $x \in E$.

On dit que x est un point adhérent à A quand il existe une suite $u \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x , ou, ce qui revient au même, quand toute boule centrée en x rencontre A , ou encore quand $d(x, A) = 0$.

L'adhérence de A est l'ensemble de ses points adhérents, noté \overline{A} .

On a montré

Définition 1.167

On dit qu'une partie A de E est fermée (ou est un fermé) quand tout point adhérent à A est dans A , autrement dit quand la propriété suivante est vraie :

si une suite quelconque à termes dans A converge vers un point x de E , alors $x \in A$.

Ou encore : A est fermée quand $A = \overline{A}$.

Proposition 1.168

L'ensemble vide et E sont des parties fermées. Toute boule fermée est une partie fermée. Tout produit (fini) de parties fermées est fermé.

On note le lien avec les parties ouvertes.

Proposition 1.169

Soit A une partie de E .

Alors A est une partie ouverte ssi son complémentaire est une partie fermée.

Démonstration 1.170

\Rightarrow

On suppose A ouverte. On veut montrer que $E \setminus A$ est fermée.

Soit $(x_n) \in (E \setminus A)^{\mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ .

Par l'absurde, supposons $\ell \in A$.

A est ouverte donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(\ell, \varepsilon) \subseteq A$.

Or $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, x_n \in B(\ell, \varepsilon).$$

Donc pour tout $n \geq N$, $x_n \in A$: contradiction.

Donc $\ell \in E \setminus A$.

Donc $E \setminus A$ est un fermé.

\Leftarrow

Supposons que $E \setminus A$ est fermée. On veut montrer que A est ouverte.

Soit $a \in A$.

Par l'absurde, on suppose $\forall r > 0, \exists x \in B(a, r), x \notin A$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in B\left(a, \frac{1}{n+1}\right)$ tel que $x_n \notin A$.

On a construit une suite $(x_n) \in (E \setminus A)^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \|a - x_n\| < \frac{1}{n+1}$.

Par théorème d'encadrement, on a $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$.

Or $a \notin E \setminus A$: contradiction car $E \setminus A$ est un fermé.

Donc il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subseteq A$.

Donc A est un ouvert. ■

Encore une fois, le fait d'être un fermé en dimension finie ne dépend pas de la norme.

Proposition 1.171

- ▷ *Toute réunion de parties ouvertes est ouverte. Toute intersection finie de parties ouvertes est ouverte.*
- ▷ *Toute intersection de parties fermées est fermée. Toute réunion finie de parties fermées est fermée.*

Démonstration 1.172 (Réunion d'ouverts)

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties ouvertes.

Montrons que $\bigcup_{i \in I} A_i$ est ouverte.

Soit $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$.

Il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i$.

Or A_i est ouverte donc il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq A_i$.

Donc $B(x, r) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$. ■

Démonstration 1.173 (Intersection finie d'ouverts)

Soient A_1, \dots, A_n des parties ouvertes.

Montrons que $\bigcap_{i=1}^n A_i$ est ouverte.

Soit $x \in \bigcap_{i=1}^n A_i$.

Pour tout $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, il existe $r_i > 0$ tel que $B(x, r_i) \subseteq A_i$.

On pose $r = \min_{1 \leq i \leq n} r_i > 0$.

Pour tout $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, $B(x, r) \subseteq B(x, r_i) \subseteq A_i$.

Donc $B(x, r) \subseteq \bigcap_{i=1}^n A_i$. ■

Remarque 1.174

Si la famille d'ouverts n'est pas finie, on ne peut rien dire sur l'intersection.

Par exemple, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose les ouverts $A_n = \left] \frac{-1}{n+1} ; \frac{1}{n+1} \right[$.

Alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{0\}$ n'est pas ouverte.

Exercice 1.175

Montrez que pour tout $a \in E$, $E \setminus \{a\}$ est un ouvert. Déduisez-en que si A est une partie finie de E , alors $E \setminus A$ est un ouvert.

Correction 1.176

Pour tout $x \in E \setminus \{a\}$, on pose $r = \frac{\|x - a\|}{2}$.

Alors $B(x, r) \subseteq E \setminus \{a\}$.

Donc $E \setminus \{a\}$ est un ouvert.

Si $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, alors $E \setminus A$ est le complémentaire de $\bigcup_{i=1}^n \{a_i\}$, qui est un fermé par union finie de fermés, et est donc un ouvert.

Exercice 1.177

Quels sont les sous-espaces vectoriels de E qui sont ouverts ?

Correction 1.178

Soit F un sous-espace vectoriel de E ouvert dans E .

$0 \in F$ et F est un ouvert donc il existe $r > 0$ tel que $B(0, r) \subseteq F$.

Soit $x \in E \setminus \{0\}$.

On a $\frac{r}{2} \frac{x}{\|x\|} \in B(0, r)$ donc

$$x = \frac{2\|x\|}{r} \left(\frac{r}{2} \frac{x}{\|x\|} \right) \in F.$$

Donc $E = F$: E est le seul sous-espace vectoriel de E ouvert dans E .

Exercice 1.179

Montrez que $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ et } xy = 1\}$ est un fermé de \mathbb{R}^2 .

Correction 1.180

Soit $((x_n, y_n)) \in F^{\mathbb{N}}$ qui converge vers (a, b) .

Montrons que $(a, b) \in F$.

On a $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$, $y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} b$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n y_n = 1$.

Donc par passage à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on a $a \geq 0$ et $ab = 1$.

Donc $(a, b) \in F$.

Donc F est un fermé.

Exercice 1.181

On note S l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que tous les coefficients soient positifs et sur chaque ligne la somme des coefficients vaut 1.

Montrez que S est un fermé.

NB : S est l'ensemble des matrices dites stochastiques.

Remarque 1.182

A priori, une partie de E n'est ni ouverte ni fermée : par exemple, dans \mathbb{R} , l'ensemble $]0 ; 1]$ n'est ni ouvert ni fermé.

Donc ne pas confondre « complémentaire » et « contraire » : on peut dire qu'une partie est un fermé quand son complémentaire est un ouvert, mais pas que le contraire d'être un ouvert c'est être un fermé.

Remarque 1.183

Il est souvent assez facile de montrer qu'une partie est un fermé grâce à la caractérisation séquentielle. Donc pour montrer qu'une partie est un ouvert, on montre souvent de cette façon que son complémentaire est un fermé.

Les fermés sont souvent définis par des égalités ou des inégalités larges. Par complémentaire, les ouverts sont souvent définis par des inégalités strictes ou des différences.

1.6.4 Ouverts ou fermés relatifs à une partie

Les définitions précédentes parlent d'ouverts et de fermés de E . On peut définir ces notions relativement à une partie.

Définition 1.184

Soient A une partie de E et U un sous-ensemble de A .

On dit que U est un ouvert de A quand il existe un ouvert V de E tel que $U = A \cap V$.

On dit que U est un fermé de A quand il existe un fermé V de E tel que $U = A \cap V$.

On remarque que les fermés de A sont les complémentaires dans A des ouverts de A . On peut caractériser de même une partie U fermée de A par l'égalité entre U et l'ensemble de ses points adhérents dans A .

1.6.5 Image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé par une fonction continue

Rappel 1.185

Si f est une fonction de E dans F définie sur D_f et $B \subseteq F$, l'image réciproque de B par f est

$$f^{-1}(B) = \{x \in D_f \mid f(x) \in B\}.$$

Théorème 1.186

Soit f une fonction de E dans F définie sur D .

Alors on a équivalence entre les propositions suivantes :

- (1) f est continue sur D ;
- (2) pour tout fermé B de F , son image réciproque $f^{-1}(B)$ est un fermé de D ;
- (3) pour tout ouvert B de F , son image réciproque $f^{-1}(B)$ est un ouvert de D .

Ceci est valable en particulier quand f est une application continue de E dans F , auquel cas on peut se passer des notions d'ouvert ou fermé relatif.

Démonstration 1.187 ((1) \implies (2))

Soient B un fermé de F et $(u_n) \in f^{-1}(B)^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in D$.

f étant continue sur D et donc en ℓ , on a $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell)$.

De plus, on a $(f(u_n)) \in B^{\mathbb{N}}$ or B est un fermé donc $f(\ell) \in B$.

Donc $\ell \in f^{-1}(B)$.

Donc $f^{-1}(B)$ est un fermé de D . ■

Démonstration 1.188 ((2) \implies (3))

Soit A un ouvert de F .

Alors $F \setminus A$ est un fermé de F .

Donc $f^{-1}(F \setminus A)$ est un fermé de D .

Or $f^{-1}(F \setminus A) = D \setminus f^{-1}(A)$.

Donc $f^{-1}(A)$ est un ouvert de D . ■

Démonstration 1.189 ((3) \implies (1))

On suppose que pour tout A ouvert de F , $f^{-1}(A)$ est un ouvert de D .

Soit $d \in D$. Montrons que f est continue en d .

Soit $\varepsilon > 0$.

La boule $B(f(d), \varepsilon)$ est un ouvert de F .

Donc $f^{-1}(B(f(d), \varepsilon))$ est un ouvert de D .

Or $f(d) \in B(f(d), \varepsilon)$ donc $d \in f^{-1}(B(f(d), \varepsilon))$.

Donc il existe $\alpha > 0$ tel que $D \cap B(d, \alpha) \subseteq f^{-1}(B(f(d), \varepsilon))$.

Donc pour tout $x \in D$ tel que $x \in B(d, \alpha)$, on a $f(x) \in B(f(d), \varepsilon)$ i.e.

$$\forall x \in D, \|x - d\| < \alpha \implies \|f(x) - f(d)\| < \varepsilon.$$

Donc f est continue en d . ■

Exemple 1.190 (Cas particuliers fondamentaux)

Si f est continue sur E et à valeurs réelles, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, les ensembles suivants sont des fermés de E :

$$\{x \in E \mid f(x) \geq a\} \quad \{x \in E \mid f(x) \leq a\} \quad \{x \in E \mid f(x) = a\}.$$

Exemple 1.191

► Les courbes de fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} sont des fermés de \mathbb{R}^2 .

► L'ensemble des matrices de trace nulle est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration 1.192 (Courbes des fonctions continues)

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, on pose $\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$.

On a alors

$$\Gamma_f = \varphi^{-1}(\{0\})$$

où $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur \mathbb{R}^2 car f est continue sur \mathbb{R} .
 $(x, y) \mapsto y - f(x)$

Or $\{0\}$ est un fermé de \mathbb{R} donc Γ_f est un fermé de \mathbb{R}^2 . ■

Démonstration 1.193 (Ensemble des matrices de trace nulle)

L'ensemble des matrices de trace nulle dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est

$$T = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \text{tr}(M) = 0\}.$$

Or $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie et tr est linéaire donc tr est continue.

Donc T est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue tr .

Donc T est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. ■

Par passage au complémentaire, si f est continue sur E et à valeurs réelles, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, les ensembles suivants sont des ouverts de E :

$$\{x \in E \mid f(x) < a\} \quad \{x \in E \mid f(x) > a\} \quad \{x \in E \mid f(x) \neq a\}.$$

Exemple 1.194

- L'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x > 0$ et $y > x$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 .
- $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: si une matrice A est inversible, alors toutes les matrices proches de A le sont aussi.

Démonstration 1.195 (Ensemble des couples susmentionnés)

On pose

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } y > x\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in]0 ; +\infty[\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x \in]0 ; +\infty[\}. \end{aligned}$$

Or $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y - x$ sont continues.

Donc A est un ouvert de \mathbb{R}^2 . ■

Démonstration 1.196 ($\text{GL}_n(\mathbb{K})$)

On a $\text{GL}_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\})$.

Or \det est continue et $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ est un ouvert de \mathbb{K} donc $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. ■

1.6.6 Frontière d'une partie

Définition 1.197

Soit A une partie de E . On appelle frontière de A l'ensemble $\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

Exemple 1.198

- Si B est une boule, alors son intérieur est la boule ouverte de même centre et de même rayon, son adhérence est la boule fermée et sa frontière est la sphère.
- L'ensemble des rationnels est d'intérieur vide, d'adhérence égale à \mathbb{R} et donc de frontière \mathbb{R} .

1.7 Compacité

Dans cette section, E est un espace vectoriel normé.

1.7.1 Valeurs d'adhérence d'une suite

Définition 1.199

Soient $u = (u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $a \in E$.

On dit que a est une valeur d'adhérence de la suite u quand il existe une extractrice φ telle que la suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers a .

Une suite peut avoir une ou plusieurs valeurs d'adhérence ou ne pas avoir de valeur d'adhérence :

- la suite $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de valeur d'adhérence ;
- toute suite convergente possède une seule valeur d'adhérence : sa limite ;
- la suite u définie par $u_{2n} = \frac{1}{n+1}$ et $u_{2n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ possède deux valeurs d'adhérence : 0 et 1 ;
- il est possible de numéroter les rationnels, autrement dit de créer une suite u qui prend exactement toutes les valeurs rationnelles dans \mathbb{R} : cette suite a pour valeurs d'adhérence tous les réels.

On peut donner une caractérisation équivalente sans passer par la notion de suite extraite.

Proposition 1.200

Soient $u = (u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $a \in E$.

Alors a est une valeur d'adhérence de u ssi pour tout $\varepsilon > 0$, $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in B(a, \varepsilon)\}$ est infini.

Démonstration 1.201



Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in B(a, \varepsilon)\}$ est infini.

On spécialise $\varepsilon \leftarrow \frac{1}{k+1}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

L'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in B(a, 1)\}$ est infini donc non-vidé. On choisit $\varphi(0)$ un élément de cet ensemble.

L'ensemble $\left\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in B\left(a, \frac{1}{2}\right)\right\}$ est infini donc il contient des entiers strictement supérieurs à $\varphi(0)$; on en choisit un, qu'on note $\varphi(1)$.

Si on suppose avoir construit $\varphi(0) < \varphi(1) < \dots < \varphi(k)$ tels que $u_{\varphi(0)} \in B(a, 1)$, $u_{\varphi(1)} \in B\left(a, \frac{1}{2}\right)$, ..., $u_{\varphi(k)} \in B\left(a, \frac{1}{k+1}\right)$, comme l'ensemble

$$\left\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in B\left(a, \frac{1}{k+2}\right)\right\}$$

est infini, on peut choisir $\varphi(k+1)$ dans cet ensemble tel que $\varphi(k+1) > \varphi(k)$.

Par récurrence, on construit une suite $(\varphi(k))_{k \in \mathbb{N}}$ strictement croissante d'entiers naturels tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_{\varphi(k)} \in B\left(a, \frac{1}{k+1}\right)$$

$$i.e. \|u_{\varphi(k)} - a\| < \frac{1}{k+1}.$$

Par théorème d'encadrement, on a $u_{\varphi(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} a$: a est une valeur d'adhérence de la suite (u_n) .



Supposons que a est une valeur d'adhérence de la suite (u_n) .

Il existe alors une extractrice φ telle que $u_{\varphi(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} a$.

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \|u_{\varphi(n)} - a\| < \varepsilon.$$

Donc $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in B(a, \varepsilon)\}$ contient $\varphi(N), \varphi(N+1), \dots$ i.e. c'est un ensemble infini. ■

Ceci peut encore être réécrit de la façon suivante.

Proposition 1.202

Soient $u = (u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $a \in E$.

Alors a est une valeur d'adhérence de u ssi $\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, \|u_n - a\| < \varepsilon$.

Démonstration 1.203

Soit I une partie de \mathbb{N} .

On a

$$\begin{aligned} I \text{ est infini} &\iff I \text{ n'est pas majorée} \\ &\iff \neg (\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in I, n \leq N) \\ &\iff \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in I, n > N. \end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $I_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in B(a, \varepsilon)\}$.

On a alors, d'après la Proposition 1.200 :

$$\begin{aligned} a \text{ est une valeur d'adhérence de } u &\iff \forall \varepsilon > 0, I_\varepsilon \text{ est infini} \\ &\iff \forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in I_\varepsilon, n > N \\ &\iff \forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N, \|u_n - a\| < \varepsilon. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Exercice 1.204

Soit $u = (u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Montrez que l'ensemble V des valeurs d'adhérence de la suite u est un fermé de E en utilisant les ensembles $U_p = \{u_n \mid n \geq p\}$.

Correction 1.205

Soit $a \in E$.

On a

$$\begin{aligned} a \in V &\iff \forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists x \in U_N, \|x - a\| < \varepsilon \\ &\iff \forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, U_N \cap B(a, \varepsilon) \neq \emptyset \\ &\iff \forall N \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, U_N \cap B(a, \varepsilon) \neq \emptyset \\ &\iff \forall N \in \mathbb{N}, a \in \overline{U_N} \\ &\iff a \in \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{U_N}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } V = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{U_N}.$$

V est donc un fermé par intersection de fermés.

1.7.2 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 1.206

Si E est de dimension finie, alors toute suite bornée de E possède une valeur d'adhérence.

Démonstration 1.207

On note $\mathcal{P}(k)$ le prédicat « si E est de dimension k , alors toute suite bornée de E possède une valeur d'adhérence ».

► Pour $k = 1$:

On pose $E = \text{Vect}(e_1)$.

Si (u_n) est une suite bornée de E , en notant $(u_n) = (\lambda_n e_1)$ où (λ_n) est une suite bornée de \mathbb{K} , d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , (λ_n) possède une valeur d'adhérence et donc (u_n) aussi.

D'où $\mathcal{P}(1)$.

► Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie.

Soit E de dimension $k + 1$.

On choisit une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{k+1})$ de E .

Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite bornée.

Alors les suites-coordonnées associées sont bornées.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = (u_{1,n}, \dots, u_{k+1,n})_{\mathcal{B}}$.

$(u_{k+1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée de \mathbb{K} donc (même théorème) il existe une extractrice φ telle que $(u_{k+1,\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = (u_{1,n}, \dots, u_{k,n}, 0)_{\mathcal{B}}$.

$(v_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de vecteurs de $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et bornée donc par hypothèse de récurrence, il existe une extractrice ψ telle que $(v_{\varphi \circ \psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

De plus, $(u_{k+1,\varphi \circ \psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge car c'est une suite extraite d'une suite convergente.

Donc $(u_{\varphi \circ \psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Donc $\mathcal{P}(k + 1)$ est vrai.

► Donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(k)$ est vrai. ■

Remarque 1.208

Ce théorème est faux en dimension infinie donc il faut bien mettre en valeur la dimension finie.

On peut ajouter une précision au théorème précédent.

Proposition 1.209

Si E est de dimension finie, alors toute suite bornée de E qui ne possède qu'une seule valeur d'adhérence est convergente vers cette valeur d'adhérence.

Démonstration 1.210

Supposons E de dimension finie.

Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite bornée qui admet une unique valeur d'adhérence ℓ .

Par l'absurde, on suppose que (u_n) ne converge pas vers ℓ .

On a

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \underbrace{\forall N \in \mathbb{N}, \quad \exists n \geq N, \quad \|u_n - \ell\| \geq \varepsilon}_{\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \notin B(\ell, \varepsilon)\} \text{ infini}}.$$

En ordonnant les éléments de cet ensemble et en les notant $\varphi(0) < \varphi(1) < \dots$, on construit une extractrice φ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{\varphi(n)} \notin B(\ell, \varepsilon).$$

Or $(u_{\varphi(n)})$ est bornée et E est de dimension finie donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une extractrice ψ et $\ell' \in E$ tels que

$$u_{\varphi \circ \psi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell'.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)}$ appartient au fermé $E \setminus B(\ell, \varepsilon)$ donc $\ell' \in E \setminus B(\ell, \varepsilon)$.

Donc $\ell' \neq \ell$.

Donc $\ell' = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi \circ \psi(n)}$ est une autre valeur d'adhérence de (u_n) : contradiction.

Donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. ■

1.7.3 Parties compactes

Définition 1.211

Soit A une partie de E .

On dit que A est une partie compacte de E (ou un compact de E) quand toute suite à termes dans A possède une valeur d'adhérence dans A (propriété dite de Bolzano-Weierstrass).

Exemple 1.212

- Tout segment $[a ; b]$ de \mathbb{R} est un compact et ce sont les seuls intervalles compacts. $[0 ; 1] \cup [2 ; 3]$ est compact.
- Dans \mathbb{K}^n , tout pavé $\prod_{i=1}^n [a_i ; b_i]$ est un compact. Plus généralement, un produit (fini) de compacts est compact.

Les parties compactes sont donc celles dont on peut extraire des sous-suites convergentes. Un résultat précédent se généralise alors.

Proposition 1.213

Si A est une partie compacte, alors toute suite de A qui ne possède qu'une seule valeur d'adhérence est convergente vers cette valeur d'adhérence.

Un compact étant connu, il est facile d'en construire d'autres.

Proposition 1.214

Si A est une partie compacte de E , alors toute partie B fermée dans A est aussi compacte.

Démonstration 1.215

Soient A une partie compacte de E , B un fermé de A et $(u_n) \in B^{\mathbb{N}}$.

Comme $B \subseteq A$, on a $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$.

A est compacte donc il existe une extractrice φ et $\ell \in A$ tels que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.

La suite $(u_{\varphi(n)})$ est à termes dans B et converge vers ℓ donc comme B est un fermé, on a $\ell \in B$.

Ainsi, toute suite de $B^{\mathbb{N}}$ possède une valeur d'adhérence dans B i.e. B est un compact. ■

Reconnaître si une partie est compacte n'est pas toujours facile. On dispose d'une condition nécessaire, qui est suffisante en dimension finie.

Proposition 1.216

Soit A une partie de E .

Si A est compacte, alors A est une partie fermée et bornée.

Démonstration 1.217

► Si A n'est pas bornée, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in A$ tel que $\|a_n\| \geq n$.

Si (a_n) possède une valeur d'adhérence dans A , alors il existe une extractrice φ et $\ell \in A$ tels que $a_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Alors $\|a_{\varphi(n)}\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|\ell\|$: contradiction.

Donc A n'est pas compacte.

► Supposons que A est compacte.

Soit $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in E$.

A étant compacte, il existe φ une extractrice et $\ell' \in A$ tels que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell'$.

La suite $(u_{\varphi(n)})$ est extraite de la suite convergente (u_n) donc $u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Donc par unicité de la limite, on a $\ell' = \ell \in A$.

Donc A est fermée. ■

La réciproque est hélas fausse en général. Néanmoins, en dimension finie, elle est vraie.

Proposition 1.218

Si E est de dimension finie, alors une partie de E est compacte ssi elle est fermée et bornée.

Remarque 1.219

En fait, il n'y a qu'en dimension finie que ce résultat est vrai. Un théorème de Riesz affirme que la boule-unité fermée d'un espace vectoriel normé est compacte ssi l'espace est de dimension finie, ce qui revient à dire que l'équivalence précédente n'est valable que dans un espace de dimension finie.

En dimension infinie, il se passe des choses vraiment étranges : les compacts sont des parties très petites et plates, par exemple, un compact est forcément d'intérieur vide. Heureusement, il est plus courant de travailler à notre niveau en dimension finie.

Exemple 1.220

► L'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un compact.

► La boule-unité fermée de $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ pour la norme infinie n'est pas compacte, car la suite des fonctions $(x \mapsto x^n)$ a pour seule valeur d'adhérence possible la fonction $x \mapsto 0$ si $x \neq 1$ et $1 \mapsto 1$, qui n'est même pas dans l'espace E .

Démonstration 1.221 (Matrices stochastiques)

On note

$$S_n = \left\{ M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \left| \forall (i,j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2, m_{i,j} \geq 0 \text{ et } \forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, \sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1 \right. \right\}.$$

Soit $M = (m_{i,j}) \in S_n$.

Pour tout $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, $\sum_{j=1}^n m_{i,j}$ est une somme de réels positifs qui vaut 1 donc pour tout $j \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, $0 \leq m_{i,j} \leq 1$.

Donc $\|M\|_\infty \leq 1$.

Donc S_n est bornée.

Soit $(M_k) = \left((m_{i,j}^k)_{i,j} \right)_k$ une suite de matrices de S_n qui converge vers $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2, m_{i,j}^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} a_{i,j}.$$

Par passage à la limite quand $k \rightarrow +\infty$ dans les deux conditions qui définissent S_n , on obtient

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2, a_{i,j} \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1.$$

Donc $A \in S_n$.

Donc S_n est fermée.

On aurait aussi pu considérer les fonctions continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$c_{i,j} : (m_{i,j}) \mapsto m_{i,j} \quad \text{et} \quad s_i : (m_{i,j}) \mapsto \sum_{j=1}^n m_{i,j}$$

et remarquer que

$$S_n = \bigcap_{1 \leq i,j \leq n} c_{i,j}^{-1}([0 ; +\infty[) \cap \bigcap_{i=1}^n s_i^{-1}(\{1\})$$

ce qui montre que S_n est un fermé par intersection de fermés.

Alors, comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, on en déduit que S_n est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. ■

Démonstration 1.222 (Deuxième point)

On pose $f_n : x \mapsto x^n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f\|_\infty = 1$.

Si (f_n) a une valeur d'adhérence $g \in \overline{B}(0, 1)$, alors il existe une extractrice φ telle que $f_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g$
i.e. $\|f_{\varphi(n)} - g\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Or pour tout $x \in [0 ; 1]$, $|f_{\varphi(n)}(x) - g(x)| \leq \|f_{\varphi(n)} - g\|_\infty$.

Donc par encadrement, on a $f_{\varphi(n)}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g(x)$.

Si $x \in [0 ; 1[$, alors $f_{\varphi(n)}(x) = x^{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Si $x = 1$, alors $f_{\varphi(n)}(x) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Donc $g : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0 ; 1[\\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

Or $g \notin E$: contradiction de la compacité. ■

Une application importante de la notion de compacité est le théorème suivant.

Théorème 1.223

Tout sous-espace vectoriel de dimension finie de E est fermé.

Démonstration 1.224

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

Soit $(u_n) \in F^{\mathbb{N}}$ une suite convergente vers $\ell \in E$.

Alors (u_n) est bornée : il existe $R > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \overline{B}(0, R)$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \overline{B}(0, R) \cap F = \{x \in F \mid \|x\| \leq R\} = \overline{B_F}(0, R)$.

Donc $\overline{B_F}(0, R)$ est un fermé borné de F et donc un compact de F .

Il existe donc une extractrice φ et $a \in \overline{B_F}(0, R)$ tels que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$.

Donc $\ell = a \in F$.

Donc F est fermé. ■

En dimension infinie, là encore il peut se passer des choses étranges : un sous-espace de E de dimension infinie peut être dense (et donc non-fermé s'il est différent de E).

1.7.4 Théorème des bornes atteintes

Le principal intérêt des compacts est de pouvoir généraliser un théorème de première année.

Théorème 1.225

Soient E, F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E et $f : A \longrightarrow F$.

Si f est continue sur A et A est compacte, alors $f(A)$ est compacte.

Démonstration 1.226

On suppose que f est continue et que A est compacte.

Soit $(u_n) \in f(A)^{\mathbb{N}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in f(A)$ donc il existe $v_n \in A$ tel que $u_n = f(v_n)$.

$(v_n) \in A^{\mathbb{N}}$ et A est compacte donc il existe une extractrice φ et $a \in A$ tels que $v_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$.

f est continue en a donc $u_{\varphi(n)} = f(v_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a) \in f(A)$.

Donc $f(A)$ est compacte. ■

On résume en disant que l'image continue d'un compact est un compact.

En particulier, toute fonction continue sur un compact est donc bornée. Dans le cas des fonctions numériques (*i.e.* à valeurs dans \mathbb{R}), on peut même être plus précis.

Théorème 1.227

Toute fonction continue sur un compact et à valeurs réelles est bornée et atteint ses bornes.

Autrement dit, si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur A et A est une partie compacte de E , alors il existe $(a, b) \in A^2$ tel que pour tout $x \in A$, $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, ce qui revient à dire que f possède un minimum et un maximum sur A .

Démonstration 1.228

$f(A)$ est un fermé borné de \mathbb{R} donc possède un minimum et un maximum. ■

Remarque 1.229

Pour toute partie X bornée de \mathbb{R} non-vide, $\sup X$ et $\inf X$ sont dans l'adhérence de X .

Remarque 1.230

Ce théorème est à rapprocher du théorème vu en première année : toute fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Néanmoins, le théorème de l'an dernier donnait un résultat un peu plus précis que celui de cette année car il donnait aussi l'image du segment, en précisant qu'il s'agissait aussi d'un segment, car il faisait aussi intervenir le théorème des valeurs intermédiaires.

Ici, dans la version proposée cette année, on ne peut rien dire de plus.

Exercice 1.231

Un exercice classique, à savoir refaire ! C'est la base de nombreux exercices.

Soient E de dimension finie et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que $f(x)$ tende vers $+\infty$ quand $\|x\|$ tend vers $+\infty$. Montrez que f possède un minimum.

Exemple : dans le plan euclidien géométrique, on choisit trois points A, B, C ; montrez alors qu'il existe un point M du plan tel que la somme $AM + BM + CM$ soit minimale.

Correction 1.232 (Cas général)

On a $f(0) \in \mathbb{R}$ donc il existe $A > 0$ tel que $\forall x \in E, \|x\| > A \implies f(x) \geq f(0)$.

Sur $\overline{B}(0, A)$, fermé borné d'un espace de dimension finie donc un compact, f est continue et y admet donc un minimum en x_0 d'après le théorème des bornes atteintes.

Pour tout $x \in E$,

▷ si $x \notin \overline{B}(0, A)$, alors $f(x) \geq f(0) \geq f(x_0)$ car $0 \in \overline{B}(0, A)$

▷ si $x \in \overline{B}(0, A)$, alors $f(x) \geq f(x_0)$.

Donc $f(x_0) = \min_E f$.

Correction 1.233 (Exemple)

On note \mathcal{P} le plan considéré.

On pose $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ qui est une fonction continue.

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto AM + BM + CM$$

Par inégalité triangulaire, on a $f(M) \geq 3OM + \text{cte}$ donc

$$f(M) \xrightarrow{\|\overrightarrow{OM}\| \rightarrow +\infty} +\infty.$$

D'où l'existence d'un minimum d'après la propriété démontrée précédemment.

Exercice 1.234

Soit $f : (x, y) \mapsto xy\sqrt{1-x^2-2y^2}$.

Justifiez que l'ensemble de définition D de f est un compact de \mathbb{R}^2 .

Déterminez les points critiques de f dans l'ouvert \mathring{D} , puis les maxima et minima de f .

Correction 1.235

On a $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leq 1\}$.

Pour tout $(x, y) \in D$, on a

$$x^2 \leq 1 \text{ donc } |x| \leq 1$$

et

$$2y^2 \leq 1 \text{ donc } |y| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \leq 1$$

donc $\|(x, y)\|_\infty \leq 1$ donc D est borné.

De plus, $D = \varphi^{-1}([-\infty; 1])$ où $\varphi : (x, y) \mapsto x^2 + 2y^2$ continue sur \mathbb{R}^2 donc D est un fermé.

\mathbb{R}^2 est de dimension finie donc D est un compact.

f est continue sur D donc d'après le théorème des bornes atteintes, $\max_D f$ et $\min_D f$ existent.

Sur \mathring{D} , f est de classe \mathcal{C}^1 .

$$(x, y) \in \mathring{D} \text{ est un point critique de } f \text{ ssi } \nabla f(x, y) = 0 \text{ i.e. } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

Or

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} y\sqrt{1-x^2-2y^2} - xy\frac{x}{\sqrt{1-x^2-2y^2}} = 0 \\ x\sqrt{1-x^2-2y^2} - xy\frac{2y}{\sqrt{1-x^2-2y^2}} = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y(1-x^2-2y^2) - x^2y = 0 \\ x(1-x^2-2y^2) - 2xy^2 = 0 \end{cases} \\ &\iff (S) \begin{cases} y(1-x^2-2y^2) = 0 \\ x(1-x^2-4y^2) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Si $x = 0$ alors $y = 0$ donc une solution : $(0, 0)$.

Si $x \neq 0$, alors

$$\begin{aligned}(S) &\iff \begin{cases} x^2 = 1 - 4y^2 \\ y(1 - 2(1 - 4y^2) - 2y^2) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 = 1 - 4y^2 \\ y = 0 \text{ ou } y^2 = \frac{1}{6} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 = \frac{1}{3} \\ y^2 = \frac{1}{6} \end{cases}\end{aligned}$$

On en déduit quatre autres solutions : $\left(\frac{t}{\sqrt{3}}, \frac{t}{\sqrt{6}}\right)$ où $t \in \{-1, 1\}$.

★★ À finir ★★

On retrouve aussi le théorème de Heine en conséquence de la compacité.

Définition 1.236

Soient E, F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E et $f : A \longrightarrow F$.

On dit que f est uniformément continue sur A quand

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in A^2, \|x - y\| \leq \eta \implies \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon.$$

Théorème 1.237

Soient E, F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E et $f : A \longrightarrow F$.

Si f est continue sur A et A est compacte, alors f est uniformément continue sur A .

Démonstration 1.238

Par l'absurde, on suppose

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists (x, y) \in A^2, \begin{cases} \|x - y\| \leq \eta \\ \|f(x) - f(y)\| > \varepsilon. \end{cases}$$

On spécialise $\eta \leftarrow \frac{1}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $(x_n, y_n) \in A^2$ tel que $\|x - y\| \leq \frac{1}{n+1}$ et $\|f(x) - f(y)\| > \varepsilon$.

On a ainsi construit deux suites $(x_n), (y_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad \|f(x_n) - f(y_n)\| > \varepsilon.$$

A étant compacte, (x_n) possède une valeur d'adhérence dans A donc il existe une extractrice φ et $\ell \in A$ tels que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

On a

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|y_{\varphi(n)} - \ell\| &\leq \|y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}\| + \|x_{\varphi(n)} - \ell\| \\ &\leq \frac{1}{\varphi(n) + 1} + \|x_{\varphi(n)} - \ell\|. \end{aligned}$$

Or $\varphi(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $\|x_{\varphi(n)} - \ell\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc par encadrement, on a $y_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Par continuité de f en ℓ , on a $\begin{cases} f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell) \\ f(y_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell) \end{cases}$

Donc $f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ce qui contredit l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})\| > \varepsilon. \quad \blacksquare$$

1.8 Connexité par arcs

Dans cette section, E est un espace vectoriel normé.

1.8.1 Chemin

Définition 1.239

Soient A une partie de E et $a, b \in A$.

On appelle chemin (ou arc) dans A de a à b toute application continue $\varphi : [0 ; 1] \longrightarrow A$ telle que $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = b$. Le support du chemin est l'image de φ .

On peut définir une relation d'équivalence sur une partie de E en mettant en relation les points joignables par un chemin.

Définition 1.240

Soient A une partie de E et $a, b \in A$.

On pose $a\mathcal{R}b$ quand il existe un chemin dans A de a à b .

Proposition 1.241

Avec les notations précédentes, la relation \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur A .

Démonstration 1.242

► Soit $a \in A$.

La fonction $\varphi : [0 ; 1] \longrightarrow A$ est continue sur $[0 ; 1]$ et on a $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = a$.

$$t \longmapsto a$$

Donc $a\mathcal{R}a : \mathcal{R}$ est réflexive.

► Soit $(a, b) \in A^2$ tel que $a\mathcal{R}b$.

Il existe une fonction continue $\varphi : [0 ; 1] \longrightarrow A$ telle que $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = b$.

On pose $\psi : [0 ; 1] \longrightarrow A$

$$t \longmapsto \varphi(1 - t)$$

ψ est une fonction continue sur $[0 ; 1]$ telle que $\psi(0) = b$ et $\psi(1) = a$.

Donc $b\mathcal{R}a : \mathcal{R}$ est symétrique.

► Soit $(a, b, c) \in A^3$ tel que $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}c$.

Il existe $(\varphi, \psi) \in \mathcal{C}^0([0 ; 1], A)$ tel que $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$, $\psi(0) = b$ et $\psi(1) = c$.

On pose $\theta : [0 ; 1] \longrightarrow A$

$$x \longmapsto \begin{cases} \varphi(2x) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \psi(2x - 1) & \text{sinon} \end{cases}$$

θ est une fonction continue sur $[0 ; 1]$ telle que $\theta(0) = a$ et $\theta(1) = c$.

Donc $a\mathcal{R}c : \mathcal{R}$ est transitive.

► Finalement, \mathcal{R} est une relation d'équivalence. ■

1.8.2 Parties connexes par arcs

Définition 1.243

Soit A une partie de E .

On dit que A est connexe par arcs quand tout couple de points $(a, b) \in A^2$ est joignable par un chemin.

Exemple 1.244

► Les parties convexes de E sont connexes par arcs.

► Les parties étoilées de E sont connexes par arcs.

- \mathbb{C}^* et $\mathbb{C} \setminus D$ où D est la demi-droite des réels négatifs sont connexes par arcs.

Démonstration 1.245

- Une partie convexe est une partie dont tous les points sont reliables en ligne droite donc, en particulier, est une partie connexe par arcs.
- Une partie A est dite étoilée quand il existe $c \in A$ tel que pour tout $b \in A$, $[cb] \subseteq A$. Alors A est clairement connexe par arcs. ■

Les classes d'équivalences de la relation notée \mathcal{R} précédemment s'appellent les composantes connexes par arcs de A : ce sont par définition des parties connexes par arcs.

Proposition 1.246

Les seules parties connexes par arcs de \mathbb{R} sont les intervalles.

Remarque 1.247

Il existe une notion plus générale, celle de partie connexe : une partie A de E est dite connexe quand les seules parties de A à la fois ouvertes et fermées sont \emptyset et A . Elle est plus délicate à aborder et est hors-programme, c'est pourquoi on s'en tient à la notion de connexité par arcs (toute partie connexe par arcs est connexe).

1.8.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Là encore, la notion de connexité par arcs permet de généraliser des résultats de première année.

Théorème 1.248

Soient E, F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E et $f : A \longrightarrow F$.

Si f est continue par A et A est connexe par arcs, alors $f(A)$ est connexe par arcs.

Démonstration 1.249

Supposons que A est connexe par arcs et que f est continue.

Soit $(x, y) \in f(A)^2$.

Il existe $(a, b) \in A^2$ tel que $f(a) = x$ et $f(b) = y$.

Or A est connexe par arcs donc il existe $\varphi : [0 ; 1] \longrightarrow A$ continue telle que $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = b$.

$f \circ \varphi$ est donc un chemin qui relie x et y (par composition de fonctions continues).

Donc $f(A)$ est connexe par arcs. ■

On résume en disant que l'image continue d'un connexe par arcs est un connexe par arcs.

Dans le cas des fonctions numériques (*i.e.* à valeurs dans \mathbb{R}), on peut même être plus précis.

Théorème 1.250

Toute fonction continue sur un connexe par arcs et à valeurs réelles vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

Autrement dit, si $f : A \longrightarrow F$ est continue sur A une partie connexe par arcs de E , alors $f(A)$ est un intervalle.

Ou encore :

$$\forall (y, z) \in f(A)^2, \forall w \in [yz], \exists t \in A, f(t) = w.$$

Démonstration 1.251

Évident à partir du Théorème 1.248. ■

Chapitre 2

Séries numériques et vectorielles : révisions et compléments

★★ À venir ★★

Chapitre 3

Familles sommables

★★ À venir ★★

Chapitre 4

Rappels et compléments d'algèbre linéaire

★★ À venir ★★

Chapitre 5

Réduction des endomorphismes

Sommaire

5.1	Éléments propres d'un endomorphisme	84
5.1.1	Valeurs propres et vecteurs propres	84
5.1.2	Lien avec les polynômes annulateurs	85
5.1.3	Sous-espaces propres	87
5.2	Polynôme caractéristique d'un endomorphisme	89
5.2.1	Caractérisation des valeurs propres en dimension finie	89
5.2.2	Définition et lien avec les valeurs propres	89
5.2.3	Ordre de multiplicité et dimension du sous-espace propre	92
5.2.4	Endomorphisme scindé	93
5.3	Éléments propres d'une matrice carrée	94
5.3.1	Valeurs propres et vecteurs propres	94
5.3.2	Lien avec les polynômes annulateurs	95
5.3.3	Sous-espaces propres	95
5.4	Polynôme caractéristique d'une matrice carrée	96
5.4.1	Définition et lien avec les valeurs propres	96
5.4.2	Ordre de multiplicité et dimension du sous-espace propre	98
5.4.3	Matrice scindée	98
5.5	Endomorphismes diagonalisables, matrices diagonalisables	99
5.5.1	Définition	99
5.5.2	Caractérisations équivalentes	100
5.5.3	Lien avec le polynôme caractéristique	102
5.6	Lien entre diagonalisabilité et polynômes annulateurs	103
5.6.1	Racines du polynôme minimal	103
5.6.2	Lemme des noyaux	104
5.6.3	Application à la diagonalisabilité	106
5.6.4	Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit	109
5.7	Quelques applications de la diagonalisation	110
5.7.1	Puissances d'une matrice, suites récurrentes linéairement	110
5.7.2	Systèmes d'équations différentielles	111
5.8	Endomorphismes trigonalisables, matrices trigonalisables	111
5.8.1	Définition et propriétés	111
5.8.2	Caractérisation équivalente	112
5.8.3	Théorème de Cayley-Hamilton	115
5.8.4	Sous-espaces caractéristiques	116

5.9	Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes	118
5.9.1	Généralités	118
5.9.2	Éléments propres d'un nilpotent	120
5.9.3	Application aux sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme	120

Dans ce chapitre, \mathbb{K} désigne un sous-corps de \mathbb{C} , en général \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

5.1 Éléments propres d'un endomorphisme

Dans cette section, E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension quelconque, finie ou non.

5.1.1 Valeurs propres et vecteurs propres

Définition 5.1

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On dit que λ est une valeur propre de f quand il existe un vecteur v non-nul tel que $f(v) = \lambda v$.

Si λ est une valeur propre de f , alors tout vecteur non-nul v tel que $f(v) = \lambda v$ est appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ .

Remarque 5.2

Si $f(v) = \lambda v$ et $v \neq 0$ alors pour tout $\alpha \neq 0$, $f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha(\lambda v) = \lambda(\alpha v)$. Donc αv est un vecteur propre de f pour la valeur propre λ .

Exemple 5.3

- Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, αid_E a pour unique valeur propre α et tout vecteur non-nul de E est un vecteur propre associé.
- Si p est un projecteur non-trivial (*i.e.* $p \neq 0$ et $p \neq \text{id}_E$), alors p a pour seules valeurs propres 0 et 1.
- De même, si s est une symétrie non-triviale (*i.e.* $s \neq \text{id}_E$ et $s \neq -\text{id}_E$), alors les valeurs propres de s sont 1 et -1 .
- L'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ $P \mapsto XP$ n'a pas de valeur propre.

L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme f est appelé le spectre de f et est noté $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(f)$ ou plus simplement $\text{Sp}(f)$ (en toute rigueur, cette définition est fautive en dimension infinie, mais à notre niveau, cette approximation est acceptable).

Définition 5.4

On appelle droite propre d'un endomorphisme toute droite dirigée par un vecteur propre.

Proposition 5.5

Les droites propres d'un endomorphisme sont exactement les droites stables par cet endomorphisme.

Exercice 5.6

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ défini par : si $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on pose $f(u) = (u_{n+1})$. Quelles sont les valeurs propres de f et les vecteurs propres associés ?

Exercice 5.7

Même question avec d l'opérateur de dérivation dans $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 5.8

Même question avec D l'opérateur de dérivation dans $\mathbb{R}[X]$.

5.1.2 Lien avec les polynômes annulateurs

En dimension quelconque, il est souvent difficile de trouver les valeurs propres d'un endomorphisme. La connaissance d'un polynôme annulateur peut aider.

Lemme 5.9

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Si λ est une valeur propre de f et v un vecteur propre associé, alors $P(f)(v) = P(\lambda)v$.

Démonstration 5.10

On montre par récurrence la propriété $\mathcal{P}(k)$: « $f^k(v) = \lambda^k v$ ».

On a $f^0(v) = v = \lambda^0 v$.

Si $\mathcal{P}(k)$ est vraie, alors

$$\begin{aligned} f^{k+1}(v) &= f f^k(v) \\ &= f(\lambda^k v) \\ &= \lambda^k f(v) \\ &= \lambda^k \lambda v \\ &= \lambda^{k+1} v. \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

Par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

On écrit $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$.

Alors $P(f) = \sum_{i=0}^n a_i f^i$.

Donc

$$\begin{aligned} P(f)(v) &= \sum_{i=0}^n a_i f^i(v) \\ &= \sum_{i=0}^n a_i (\lambda^i v) \\ &= v \sum_{i=0}^n a_i \lambda^i \\ &= P(\lambda) v. \end{aligned}$$

■

Si $P \in \mathbb{K}[X]$, on note $Z_{\mathbb{K}}(P)$ l'ensemble des racines de P dans \mathbb{K} .

Proposition 5.11

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Si P est un polynôme annulateur de f , alors $\text{Sp}(f) \subseteq Z_{\mathbb{K}}(P)$.

Démonstration 5.12

Il existe $v \neq 0$ tel que $f(v) = \lambda v$.

D'après le lemme précédent, $P(f)(v) = P(\lambda) v$.

Or $P(f) = 0$ donc $P(\lambda) v = 0$.

Or $v \neq 0$ donc $P(\lambda) = 0$.

Donc $\lambda \in Z_{\mathbb{K}}(P)$.

■

Remarque 5.13

Attention ! La réciproque est fautive. Contre-exemple : le polynôme $P = X^2 - 1$ est annulateur de id_E et pourtant -1 , qui est racine de P , n'est pas valeur propre de id_E .

Exercice 5.14

Soit $n \geq 2$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $f(M) = M + M^T + \text{tr}(M) I_n$: f est clairement un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Déterminez un polynôme annulateur de f de degré 3 et déduisez-en les valeurs propres de f .

5.1.3 Sous-espaces propres

Proposition 5.15

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors λ est valeur propre de f ssi $\ker(f - \lambda \text{id}_E) \neq \{0\}$, autrement dit ssi $f - \lambda \text{id}_E$ n'est pas injectif.

Démonstration 5.16

On a

$$\begin{aligned}\lambda \in \text{Sp}(f) &\iff \exists v \in E, v \neq 0 \text{ et } f(v) = \lambda v \\ &\iff \exists v \in E, v \neq 0 \text{ et } f(v) - \lambda v = 0 \\ &\iff \exists v \in E, v \neq 0 \text{ et } (f - \lambda \text{id}_E)(v) = 0 \\ &\iff \exists v \in E, v \neq 0 \text{ et } v \in \ker(f - \lambda \text{id}_E) \\ &\iff \ker(f - \lambda \text{id}_E) \neq \{0\} \\ &\iff f - \lambda \text{id}_E \text{ non-injective.} \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Définition 5.17

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Si $\lambda \in \text{Sp}(f)$, le noyau $\ker(f - \lambda \text{id}_E)$ est appelé le sous-espace propre associé à la valeur propre λ . Il est souvent noté $\text{sep}(f, \lambda)$.

Par conséquent, $\text{sep}(f, \lambda)$ est l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ auquel on ajoute le vecteur nul.

Remarque 5.18

Un cas particulier important : 0 est valeur propre ssi f n'est pas injective.

Exercice 5.19

Soit u un endomorphisme ayant pour matrice $M = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -4 \\ 4 & -3 & 3 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ dans une certaine base \mathcal{B} .

Calculez $M^3 + 2M^2 - 3M$. Déduisez-en les valeurs propres de u puis déterminez les sous-espaces propres associés.

Proposition 5.20

Tout sous-espace propre d'un endomorphisme est stable par cet endomorphisme. L'endomorphisme induit sur un sous-espace propre est alors une homothétie.

Démonstration 5.21

Soit $v \in \text{sep}(f, \lambda)$.

On a $f(v) = \lambda v$.

Donc $f(f(v)) = \lambda f(v)$.

Donc $f(v) \in \text{sep}(f, \lambda)$.

Donc le sous-espace propre $\text{sep}(f, \lambda)$ est stable par f .

De plus, l'endomorphisme induit par f sur ce sous-espace est

$$\begin{array}{ccc} \text{sep}(f, \lambda) & \longrightarrow & \text{sep}(f, \lambda) \\ v & \longmapsto & f(v) = \lambda v \end{array}$$

i.e. l'homothétie de rapport λ . ■

Théorème 5.22

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres distinctes de f .

Alors les sous-espaces propres $(\text{sep}(f, \lambda_i))_{1 \leq i \leq p}$ sont en somme directe.

Autrement dit, toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Démonstration 5.23

Soit $(v_1, \dots, v_p) \in \prod_{i=1}^p \text{sep}(f, \lambda_i)$ tel que $v_1 + \dots + v_p = 0$ (1).

On veut montrer que $v_1 = \dots = v_p = 0$.

On applique f à (1) : $f(v_1) + \dots + f(v_p) = 0$ i.e. $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0$.

On réitère $p - 2$ fois et on obtient le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 + \dots + v_p = 0 \\ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0 \\ \lambda_1^2 v_1 + \dots + \lambda_p^2 v_p = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1^{p-1} v_1 + \dots + \lambda_p^{p-1} v_p = 0 \end{array} \right.$$

La matrice de ce système linéaire est

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \dots & \lambda_p \\ \lambda_1^2 & \dots & \dots & \lambda_p^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1^{p-1} & \dots & \dots & \lambda_p^{p-1} \end{pmatrix}$$

i.e. une matrice de Vandermonde inversible car les λ_i sont distincts donc le système a une unique solution $(v_1, \dots, v_p) = (0, \dots, 0)$. ■

Remarque 5.24

Quand on demande de déterminer les éléments propres d'un endomorphisme, on demande de déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres associés, *i.e.* les sous-espaces propres.

À partir de maintenant, il est toujours supposé que E est de dimension finie n

5.2 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

5.2.1 Caractérisation des valeurs propres en dimension finie

Proposition 5.25

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$\lambda \in \text{Sp}(f) \iff \text{rg}(f - \lambda \text{id}_E) < n.$$

Dans ce cas, $\dim \text{sep}(f, \lambda) = n - \text{rg}(f - \lambda \text{id}_E)$.

Démonstration 5.26

D'après le théorème du rang, on a

$$n = \underbrace{\dim \ker(f - \lambda \text{id}_E)}_{=\dim \text{sep}(f, \lambda)} + \text{rg}(f - \lambda \text{id}_E).$$

Donc $\dim \text{sep}(f, \lambda) = n - \text{rg}(f - \lambda \text{id}_E)$.

On obtient l'inégalité voulue grâce à la Proposition 5.15. ■

5.2.2 Définition et lien avec les valeurs propres

Définition 5.27

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

On appelle polynôme caractéristique de f le polynôme $\chi_f = \det(X \text{id}_E - f)$.

La notation χ_f est très courante : elle est à connaître.

Théorème 5.28

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Alors χ_f est un polynôme unitaire de degré n de $\mathbb{K}[X]$ et les valeurs propres de f sont exactement les racines dans \mathbb{K} de $\chi_f : Z_{\mathbb{K}}(\chi_f) = \text{Sp}(f)$.

Par conséquent, un endomorphisme d'un espace de dimension n a au plus n valeurs propres distinctes.

Démonstration 5.29

On choisit une base \mathcal{B} de E et on pose $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de f dans \mathcal{B} .

On a

$$\begin{aligned}
\chi_f &= \det(\text{Id}_E - f) \\
&= \det(XI_n - A) \\
&= \begin{vmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & X - a_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -a_{n-1n} \\ -a_{n1} & \dots & -a_{nn-1} & X - a_{nn} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

On pose $c_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & \text{si } i \neq j \\ X - a_{ii} & \text{sinon} \end{cases}$

Alors

$$\begin{aligned}
\chi_f &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n c_{i\sigma(i)} \\
&= \varepsilon(\text{id}) \prod_{i=1}^n c_{ii} + \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n \setminus \{\text{id}\}} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n c_{i\sigma(i)}
\end{aligned}$$

On remarque que si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ alors σ a n points fixes si $\sigma = \text{id}$ et σ a moins de $n - 2$ points fixes sinon donc si $\sigma \neq \text{id}$, il existe au moins deux entiers $i, j \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ tels que $\sigma(i) \neq i$ et $\sigma(j) \neq j$.

Donc pour toute permutation $\sigma \neq \text{id}$, parmi les facteurs du produit $\prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$, il en existe au moins

deux qui sont de la forme $a_{??}$ donc $\prod_{i=1}^n c_{i\sigma(i)}$ est un polynôme de degré au plus $n - 2$.

Donc $\deg \chi_f = n$ et χ_f est unitaire.

De plus, on a

$$\begin{aligned}
\lambda \in \text{Sp}(f) &\iff f - \lambda \text{id}_E \text{ n'est pas injectif} \\
&\iff f - \lambda \text{id}_E \text{ n'est pas bijectif} \\
&\iff \det(f - \lambda \text{id}_E) = 0 \\
&\iff \det(\lambda \text{id}_E - f) = 0 \\
&\iff \chi_f(\lambda) = 0.
\end{aligned}$$

} dimension finie

■

Exercice 5.30

Montrez que si $\dim E = 2$, alors pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, $\chi_f = X^2 - \operatorname{tr}(f)X + \det f$.

Exercice 5.31

Calculez le polynôme caractéristique d'un endomorphisme de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ et donnez ses valeurs propres.

Exercice 5.32

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , $s = \sum_{i=1}^n e_i$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $j \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, $f(e_j) = e_j + s$.

Calculez son polynôme caractéristique et ses éléments propres.

On peut noter un lien avec la trace et le déterminant.

Proposition 5.33

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Alors $\chi_f = X^n - \operatorname{tr}(f)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det f$.

Démonstration 5.34

► On a $\chi_f = \det(X\operatorname{id}_E - f)$ donc

$$\chi_f(0) = \det(-f) = (-1)^n \det f$$

est le coefficient constant de χ_f .

► On avait $\chi_f = \prod_{i=1}^n (X - a_{ii}) + Q$ avec $\deg Q \leq n - 2$ (cf. Démonstration 5.29).

Donc le coefficient d'indice $n - 1$ est celui du produit $\prod_{i=1}^n (X - a_{ii})$.

Or on a

$$\begin{aligned} (X - a_{11}) \dots (X - a_{nn}) &= X^n + (-a_{11} - \dots - a_{nn})X^{n-1} + \dots \\ &= X^n - \operatorname{tr}(f)X^{n-1} + \dots \end{aligned}$$

■

5.2.3 Ordre de multiplicité et dimension du sous-espace propre

Définition 5.35

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \text{Sp}(f)$.

On appelle ordre de multiplicité de la valeur propre λ son ordre de multiplicité en tant que racine de χ_f .

Proposition 5.36

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, F un sous-espace vectoriel de E stable par f et g l'endomorphisme induit par f dans F .

Alors χ_g divise χ_f .

Démonstration 5.37

On choisit une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E adaptée à F : (e_1, \dots, e_p) est une base de F .

Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & ? \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.

On remarque que $A = \text{Mat}_{(e_1, \dots, e_p)}(g)$.

Alors

$$\begin{aligned} \chi_f &= \begin{vmatrix} XI_p - A & -? \\ 0 & XI_{n-p} - B \end{vmatrix} \\ &= \underbrace{\det(XI_p - A)}_{=\chi_g} \det(XI_{n-p} - B). \end{aligned}$$

Donc $\chi_g \mid \chi_f$. ■

Une conséquence très importante de ce résultat est le théorème suivant.

Théorème 5.38

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \text{Sp}(f)$.

Si λ est une valeur propre d'ordre α , alors $1 \leq \dim \text{sep}(f, \lambda) \leq \alpha$.

Démonstration 5.39

Si $\lambda \in \text{Sp}(f)$ alors $\text{sep}(f, \lambda)$ est stable par f et l'endomorphisme induit par f dans $\text{sep}(f, \lambda)$ est l'homothétie de rapport $\lambda : g = \lambda \text{id}$.

On note $p = \dim \text{sep}(f, \lambda)$.

On a

$$\chi_g = \begin{vmatrix} X - \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & X - \lambda \end{vmatrix}_{[p]} = (X - \lambda)^p.$$

D'après la Proposition 5.36, $(X - \lambda)^p \mid \chi_f$ donc $p \leq \alpha$.

De plus, on a $1 \leq p$ car $\text{sep}(f, \lambda) \neq \{0\}$. ■

Exercice 5.40

Soit f un endomorphisme de matrice $\begin{pmatrix} 3 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminez les valeurs propres de f , leur multiplicité et la dimension des sous-espaces propres associés.

5.2.4 Endomorphisme scindé

Définition 5.41

On dit qu'un endomorphisme de E est scindé quand son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.

Dans le cas d'un endomorphisme scindé, on connaît alors la somme et le produit des valeurs propres.

Proposition 5.42

Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est scindé et a pour valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ avec les ordres de multiplicité $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, alors

$$\text{tr } f = \sum_{k=1}^p \alpha_k \lambda_k \quad \text{et} \quad \det f = \prod_{k=1}^p \lambda_k^{\alpha_k}.$$

Démonstration 5.43

Relations coefficients/racines. ■

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors on est dans ce cas, car tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont scindés dans $\mathbb{C}[X]$ d'après le théorème de d'Alembert-Gauss.

Mais si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors il faut se méfier des raisonnements hâtifs : comme un \mathbb{R} -endomorphisme peut ne pas avoir de valeurs propres réelles, la trace et le déterminant peuvent ne pas avoir de rapport avec les valeurs propres.

Exercice 5.44

Soit f un endomorphisme d'un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ dont la matrice dans une base est remplie par ligne de 1, ligne de 2, etc. Sans calculer le polynôme caractéristique, déterminez les valeurs propres complexes de f , leur multiplicité et la dimension des sous-espaces propres associés.

Remarque 5.45

Dans le langage courant, on dit souvent que la trace est la somme des valeurs propres. Cette phrase est correcte seulement si l'on sous-entend que l'on parle de la somme des valeurs propres comptées chacune avec son ordre de multiplicité.

On rencontre en fait deux types de résultats à propos des valeurs propres :

- ceux où l'on parle des valeurs propres distinctes (comme le Théorème 5.28) ;
- ceux où l'on parle des valeurs propres comptées selon leur multiplicité (comme la Proposition 5.42).

Il faut donc être très attentif à la façon dont on considère les valeurs propres.

5.3 Éléments propres d'une matrice carrée

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les matrices-colonnes d'ordre n sont les matrices de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$, espace souvent identifié avec \mathbb{K}^n .

5.3.1 Valeurs propres et vecteurs propres

Définition 5.46

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On dit que λ est valeur propre de A quand il existe une matrice-colonne X non-nulle telle que $AX = \lambda X$.

Si λ est une valeur propre de A , alors toute matrice-colonne non-nulle X telle que $AX = \lambda X$ est appelée vecteur propre associé à la valeur propre λ .

Exemple 5.47

- Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, αI_n a pour unique valeur propre α et toute matrice-colonne non-nulle est un vecteur propre associé.
- Si A est une matrice diagonale, alors ses valeurs propres sont les coefficients diagonaux et des vecteurs propres associés sont les colonnes remplies de 0 sauf un seul coefficient égal à 1.

L'ensemble des valeurs propres d'une matrice A est appelé le spectre de A et est noté $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ ou plus simplement $\text{Sp}(A)$.

Mais comme une matrice à coefficients réels est aussi une matrice à coefficients complexes, il vaut mieux savoir si on parle des valeurs propres réelles ou complexes. Il est donc préférable d'indiquer clairement le corps de base, comme le montre le résultat suivant.

Proposition 5.48

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et \mathbb{K}' une extension de \mathbb{K} dans \mathbb{C} .

Alors $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \subseteq \text{Sp}_{\mathbb{K}'}(A)$.

Proposition 5.49

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f \in \mathcal{L}(E)$ et \mathcal{B} une base de E .

Si $A = \underset{\mathcal{B}}{\text{Mat}}(f)$, alors $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \text{Sp}(f)$.

Par conséquent, deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres (mais attention, pas forcément les mêmes vecteurs propres).

5.3.2 Lien avec les polynômes annulateurs

Proposition 5.50

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si P est un polynôme annulateur de A , alors $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \subseteq Z_{\mathbb{K}}(P)$.

Attention! La réciproque est fausse. Contre-exemple : le polynôme $P = X^2 - 1$ est annulateur de I_n et pourtant -1 , qui est racine de P , n'est pas valeur propre de I_n .

5.3.3 Sous-espaces propres

Proposition 5.51

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors λ est valeur propre de A ssi $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible, autrement dit ssi $\text{rg}(A - \lambda I_n) < n$ ou $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Si $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$, le sous-espace propre associé à la valeur propre λ est l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ auquel on ajoute le vecteur nul. Il est souvent noté $\text{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda)$:

$$\text{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \lambda X\}.$$

Proposition 5.52

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \iff \text{rg}(A - \lambda I_n) < n.$$

Dans ce cas, $\dim \text{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda) = n - \text{rg}(A - \lambda I_n)$.

Attention ! Dans la relation $\dim \text{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda) = n - \text{rg}(A - \lambda I_n)$, c'est n , pas n^2 ! Il s'agit de la dimension de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, pas celle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque 5.53

Un cas particulier important : 0 est valeur propre ssi A n'est pas inversible, c'est-à-dire ssi $\text{rg } A < n$.

Théorème 5.54

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres distinctes de A .

Alors les sous-espaces propres $(\text{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda_i))_{1 \leq i \leq p}$ sont en somme directe.

Autrement dit, toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Remarque 5.55

Quand on demande de déterminer les éléments propres d'une matrice, on demande de déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres associés, i.e. les sous-espaces propres.

5.4 Polynôme caractéristique d'une matrice carrée

5.4.1 Définition et lien avec les valeurs propres

Définition 5.56

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme $\chi_A = \det(XI_n - A)$.

Proposition 5.57

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f \in \mathcal{L}(E)$ et \mathcal{B} une base de E .

Si $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, alors $\chi_A = \chi_f$.

Par conséquent, deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Théorème 5.58

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Alors χ_A est un polynôme unitaire de degré n de $\mathbb{K}[X]$ et les valeurs propres de A sont exactement les racines de χ_A dans \mathbb{K} .

Par conséquent, une matrice carrée de taille (n, n) a au plus n valeurs propres distinctes.

Corollaire 5.59

L'ensemble $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration 5.60

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On veut montrer qu'il existe une suite de matrices inversibles qui converge vers A .

Considérons la suite $\left(A + \frac{1}{k}I_n\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$.

On a $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(A + \frac{1}{k}I_n\right) = A$.

Montrons qu'à partir d'un certain rang, cette suite est constituée de matrices inversibles.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A + \frac{1}{k}I_n$ n'est pas inversible $\iff \frac{-1}{k}$ est valeur propre de A .

- Si A n'a que des valeurs propres positives ou nulles, alors comme pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{-1}{k} < 0$, $\frac{-1}{k}$ n'est pas valeur propre.
- Si A possède au moins une valeur propre strictement négative, on pose $r = \min \{|\lambda| \mid \lambda \in \text{Sp}(A) \cap \mathbb{R}_-^*\} > 0$.
Dès que $\frac{1}{k} < r$, il est certain que $\frac{-1}{k}$ n'est pas valeur propre. ■

On peut noter un lien avec la trace et le déterminant.

Proposition 5.61

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Alors $\chi_A = X^n - \text{tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A$.

5.4.2 Ordre de multiplicité et dimension du sous-espace propre

Définition 5.62

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$.

On appelle ordre de multiplicité de la valeur propre λ son ordre de multiplicité en tant que racine de χ_A .

Théorème 5.63

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$.

Si λ est une valeur propre d'ordre α , alors $1 \leq \dim \text{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda) \leq \alpha$.

Proposition 5.64

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f \in \mathcal{L}(E)$ et \mathcal{B} une base de E .

Si $A = \underset{\mathcal{B}}{\text{Mat}}(f)$, alors $\dim \text{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda) = \dim \text{sep}(f, \lambda)$.

Par conséquent, deux matrices semblables ont des sous-espaces propres de même dimension (mais pas les mêmes vecteurs propres).

5.4.3 Matrice scindée

Définition 5.65

On dit qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est scindée quand son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.

Dans le cas d'une matrice scindée, on connaît alors la somme et le produit des valeurs propres.

Proposition 5.66

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est scindée et a pour valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ avec les ordres de multiplicité $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, alors

$$\text{tr } A = \sum_{k=1}^p \alpha_k \lambda_k \quad \text{et} \quad \det A = \prod_{k=1}^p \lambda_k^{\alpha_k}.$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors on est dans ce cas, car tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont scindés dans $\mathbb{C}[X]$ d'après le théorème de d'Alembert-Gauss.

Mais si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors il faut se méfier des raisonnements hâtifs : comme un polynôme à coefficients réels peut ne pas avoir de racines réelles, la trace et le déterminant peuvent ne pas avoir de rapport avec les valeurs propres.

5.5 Endomorphismes diagonalisables, matrices diagonalisables

5.5.1 Définition

Définition 5.67

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On dit que f est diagonalisable quand il existe une base de E constituée de vecteurs propres de f .

On dit que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (ou \mathbb{K} -diagonalisable) quand il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A .

D'après le lien entre les endomorphismes et les matrices carrées, un endomorphisme est diagonalisable ssi sa matrice dans n'importe quelle base est diagonalisable.

Exercice 5.68

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ est-elle \mathbb{R} -diagonalisable ? \mathbb{C} -diagonalisable ?

Exercice 5.69

Montrez que la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Exercice 5.70

Même exercice avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 5.71

La matrice $C = \begin{pmatrix} 11 & 7 & -3 \\ 11 & 7 & -3 \\ 66 & 42 & -18 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Proposition 5.72

Si un endomorphisme (une matrice) est diagonalisable, alors il (elle) est scindé(e).

Mais la réciproque est fausse.

5.5.2 Caractérisations équivalentes

On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 5.73

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

f est diagonalisable ssi il existe une base \mathcal{B} de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$. Dans ce cas, les valeurs propres de f sont les éléments diagonaux de cette matrice.

A est \mathbb{K} -diagonalisable ssi elle est \mathbb{K} -semblable à une matrice diagonale, i.e. il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = PDP^{-1}$. Dans ce cas, les valeurs propres de A sont les éléments diagonaux de D .

Démonstration 5.74

Si f est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E constituée de vecteurs propres, i.e.

$$\text{pour tout } j \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, f(e_j) = \lambda_j e_j$$

où λ_j est la valeur propre associée à e_j .

Donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}).$$

Et réciproquement. ■

Exemple 5.75

- Toute matrice diagonale est diagonalisable, car elle est semblable à elle-même.
- Les projecteurs et les symétries sont diagonalisables.

Remarque 5.76

Quitte à changer l'ordre des vecteurs dans la base, on peut ranger les valeurs propres sur la diagonale dans l'ordre qu'on veut.

Exemple 5.77

Si $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = P^{-1}AP$, alors la colonne 1 de P est un vecteur propre de A pour la valeur propre 1 et les deux autres sont des vecteurs propres pour la valeur propre 3, donc en posant $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, on a $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Lemme 5.78

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable : il existe une base de E dans laquelle la matrice D de f est diagonale.

Les valeurs propres de f sont les éléments diagonaux de D et si λ est un tel nombre, alors la dimension de $\text{sep}(f, \lambda)$ est le nombre d'occurrences de λ dans la diagonale de D .

On en déduit les théorèmes suivants.

Théorème 5.79

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- ▷ f est diagonalisable
- ▷ les sous-espaces propres de f sont supplémentaires dans E
- ▷ $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim \text{sep}(f, \lambda) = n$

Démonstration 5.80

Les sous-espaces propres d'un endomorphisme sont en somme directe donc ils sont supplémentaires ssi la somme de leurs dimensions est celle de l'espace E . ■

Et sa version matricielle.

Théorème 5.81

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- ▷ A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- ▷ les sous-espaces propres de A dans $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$
- ▷ $\sum_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} \dim \text{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda) = n$

Exercice 5.82

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. On a vu à l'Exercice 5.70 que A est diagonalisable. Diagonalisez A .

5.5.3 Lien avec le polynôme caractéristique

Théorème 5.83

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- ▷ f est diagonalisable
- ▷ f est scindé et pour tout $\lambda \in \text{Sp}(f)$, la dimension de $\text{sep}(f, \lambda)$ est égale à l'ordre de multiplicité de λ

Démonstration 5.84

Si $\lambda \in \text{Sp}(f)$, on note $\omega(\lambda)$ l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ .

\Rightarrow

Si f est diagonalisable alors $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim \text{sep}(f, \lambda) = n = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \omega(\lambda)$.

Donc $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \underbrace{(\omega(\lambda) - \dim \text{sep}(f, \lambda))}_{\geq 0 \text{ d'après le Théorème 5.38}} = 0$.

Or une somme de réels positifs est nulle ssi tous ces réels sont nuls donc

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(f), \quad \omega(\lambda) = \dim \text{sep}(f, \lambda).$$

\Leftarrow

Si f est scindé et $\forall \lambda \in \text{Sp}(f), \quad \omega(\lambda) = \dim \text{sep}(f, \lambda)$, alors χ_f est scindé.

Donc $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \omega(\lambda) = \deg \chi_f = n$.

Donc $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim \text{sep}(f, \lambda) = n$.

Donc f est diagonalisable d'après le Théorème 5.79. ■

Et sa version matricielle.

Théorème 5.85

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- ▷ A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

- A est scindée et pour tout $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$, la dimension de $\text{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda)$ est égale à l'ordre de multiplicité de λ

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la condition « être scindé » est automatiquement satisfaite.

Un cas particulier très courant.

Proposition 5.86

Si un endomorphisme de E possède exactement n valeurs propres distinctes, alors il est diagonalisable.

Si une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède exactement n valeurs propres distinctes dans \mathbb{K} , alors elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 5.87

Montrez que la matrice $\begin{pmatrix} -4 & 8 & 22 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Théorème 5.88 (Théorème spectral)

Si A est une matrice réelle symétrique, alors A est diagonalisable.

Démonstration 5.89

★★ Admis, sera démontré plus tard ★★

■

5.6 Lien entre diagonalisabilité et polynômes annulateurs

5.6.1 Racines du polynôme minimal

Proposition 5.90

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les racines de μ_f sont exactement les valeurs propres de $f : Z_{\mathbb{K}}(\mu_f) = \text{Sp}(f)$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les racines dans \mathbb{K} de μ_A sont exactement les valeurs propres dans \mathbb{K} de $A : Z_{\mathbb{K}}(\mu_A) = \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$.

Démonstration 5.91

\supseteq Cf. Proposition 5.11 car μ_f est un polynôme annulateur de f .

\subseteq

Soit $\lambda \in Z_{\mathbb{K}}(\mu_f)$.

Alors $X - \lambda \mid \mu_f$, i.e. il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\mu_f = (X - \lambda)Q$.

Alors $\mu_f(f) = 0 = (f - \lambda \text{id}_E) \circ Q(f)$.

Donc pour tout $x \in E$, $(f - \lambda \text{id}_E)(Q(f)(x)) = 0$.

Donc $\text{Im } Q(f) \subseteq \ker(f - \lambda \text{id}_E)$.

Or $\deg Q < \deg \mu_f$ donc Q n'est pas annulateur de f , i.e. $Q(f) \neq 0$, i.e. $\text{Im } Q(f) \neq \{0\}$.

Donc $\ker(f - \lambda \text{id}_E) \neq \{0\}$, i.e. $\lambda \in \text{Sp}(f)$.

Donc $Z_{\mathbb{K}}(\mu_f) \subseteq \text{Sp}(f)$. ■

5.6.2 Lemme des noyaux

Proposition 5.92

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P \wedge Q = 1$.

Alors $\ker(PQ)(f) = \ker P(f) \oplus \ker Q(f)$.

Démonstration 5.93

D'après le théorème de Bézout, il existe $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $UP + VQ = 1$.

Donc $(UP)(f) + (VQ)(f) = \text{id}_E$, i.e.

$$U(f) \circ P(f) + V(f) \circ Q(f) = \text{id}_E \quad (1)$$

Soit $x \in \ker P(f) \cap \ker Q(f)$.

On a $P(f)(x) = 0$ et $Q(f)(x) = 0$.

Donc, en appliquant (1) sur le vecteur x , on obtient

$$\begin{aligned} x &= U(f)(P(f)(x)) + V(f)(Q(f)(x)) \\ &= U(f)(0) + V(f)(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $\ker P(f)$ et $\ker Q(f)$ sont en somme directe.

⊇

On a $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f)$.

Donc $\ker P(f) \subseteq \ker (PQ)(f)$ et $\ker Q(f) \subseteq \ker (PQ)(f)$.

Donc $\ker P(f) \oplus \ker Q(f) \subseteq \ker (PQ)(f)$.

⊆

Soit $x \in \ker (PQ)(f)$.

On veut montrer qu'il existe $(a, b) \in \ker P(f) \times \ker Q(f)$ tel que $x = a + b$.

On applique (1) sur x :

$$x = U(f) \circ P(f)(x) + V(f) \circ Q(f)(x).$$

On pose $a = V(f) \circ Q(f)(x)$.

On a

$$P(f)(a) = P(f)(V(f) \circ Q(f)(x)) = (P(f) \circ V(f) \circ Q(f))(x).$$

Or $\mathbb{K}[f]$ est une algèbre commutative donc

$$\begin{aligned} P(f)(a) &= (V(f) \circ P(f) \circ Q(f))(x) \\ &= V(f)(P(f) \circ Q(f)(x)) \\ &= V(f)((PQ)(f)(x)) \\ &= V(f)(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $a \in \ker P(f)$.

De même, $b = U(f) \circ P(f)(x) \in \ker Q(f)$.

Finalement, on a

$$\ker (PQ)(f) = \ker P(f) \oplus \ker Q(f). \quad \blacksquare$$

Proposition 5.94

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux deux à deux. On pose $P = \prod_{i=1}^k P_i$.

Alors $\ker P(f) = \bigoplus_{i=1}^k \ker P_i(f)$.

Démonstration 5.95

On note $\mathcal{P}(k)$ le prédicat énoncé.

- On a clairement $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ est vraie (*cf.* Proposition 5.92).
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie.

Soient $P_1, \dots, P_{k+1} \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux deux à deux.

On a $P_1 \dots P_k \wedge P_{k+1} = 1$.

D'après $\mathcal{P}(2)$, on a

$$\ker(P_1 \dots P_{k+1})(f) = \ker(P_1 \dots P_k)(f) \oplus \ker P_{k+1}(f).$$

Puis, par hypothèse de récurrence, on a

$$\ker(P_1 \dots P_k)(f) = \bigoplus_{i=1}^k \ker P_i(f).$$

Finalement, on a

$$\ker(P_1 \dots P_{k+1})(f) = \bigoplus_{i=1}^{k+1} \ker P_i(f)$$

d'où $\mathcal{P}(k+1)$.

- D'après le principe de récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie. ■

5.6.3 Application à la diagonalisabilité

Définition 5.96

Un polynôme est dit simplement scindé quand il est scindé et à racines simples.

Théorème 5.97

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

(α) f est diagonalisable

(β) μ_f est simplement scindé

(γ) il existe un polynôme annulateur de f simplement scindé

(δ) le polynôme $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(f)} (X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de f

Démonstration 5.98 ((β) \implies (γ))

Immédiat car μ_f est annulateur de f . ■

Démonstration 5.99 ((γ) \implies (β))

Si P est simplement scindé et $P(f) = 0$ alors $\mu_f \mid P$ donc μ_f est simplement scindé. ■

Démonstration 5.100 ((β) \implies (δ))

On sait que $Z_{\mathbb{K}}(\mu_f) = \text{Sp}(f)$ donc si μ_f est simplement scindé, alors $\mu_f = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(f)} (X - \lambda)$. Or μ_f est annulateur de f . ■

Démonstration 5.101 ((δ) \implies (γ))

Immédiat. ■

Démonstration 5.102 ((α) \implies (δ))

Supposons f diagonalisable, i.e. il existe une base \mathcal{B} de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ soit diagonale :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \Lambda_k \end{pmatrix} = D$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont les valeurs propres distinctes de f et pour tout $i \in \llbracket 1 ; k \rrbracket$, $\Lambda_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$.

On pose $P = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)$.

$$\text{Or on a pour tout } Q \in \mathbb{K}[X], \quad Q(D) = \begin{pmatrix} Q(\Lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & Q(\Lambda_k) \end{pmatrix}$$

et pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, pour tout $i \in \llbracket 1 ; k \rrbracket$, $Q(\Lambda_i) = \begin{pmatrix} Q(\lambda_i) & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & 0 \\ & & & Q(\lambda_i) \end{pmatrix}$.

En particulier, $P(D) = 0$ car $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} = Z_{\mathbb{K}}(P)$. ■

Démonstration 5.103 ((δ) \implies (α))

On pose $\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ et pour tout $i \in \llbracket 1 ; k \rrbracket$, $P_i = X - \lambda_i$.

Les polynômes P_1, \dots, P_k sont premiers entre eux deux à deux donc d'après le lemme des noyaux, on a

$$\ker \underbrace{(P_1 \dots P_k)(f)}_{=0} = \bigoplus_{i=1}^k \underbrace{\ker P_i(f)}_{=\text{sep}(f, \lambda_i)}.$$

D'où $E = \bigoplus_{i=1}^k \text{sep}(f, \lambda_i)$.

Donc d'après le Théorème 5.79, f est diagonalisable. ■

Et sa version matricielle.

Théorème 5.104

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- ▷ A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- ▷ μ_A est simplement scindé
- ▷ il existe un polynôme annulateur de A simplement scindé dans $\mathbb{K}[X]$
- ▷ le polynôme $\prod_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} (X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de A

Exercice 5.105

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Calculez $(A + I_3)^3$. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 5.106

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^3 = I_n$. Selon que \mathbb{K} soit égal à \mathbb{C} ou \mathbb{R} , à quelle condition A est-elle \mathbb{K} -diagonalisable ?

5.6.4 Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit

Proposition 5.107

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, F un sous-espace vectoriel de E stable par f et g l'endomorphisme induit par f dans F .

Alors μ_g divise μ_f .

Démonstration 5.108

$$\begin{aligned} \text{On a } g : F &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Pour tout $x \in F$, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(g)(x) = P(f)(x)$.

Or $\mu_f(f) = 0$ donc pour tout $x \in F$, $\mu_f(g)(x) = 0$, i.e. μ_f est annulateur de g .

Donc $\mu_g \mid \mu_f$. ■

Corollaire 5.109

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par f .

Si f est diagonalisable, alors l'endomorphisme induit par f dans F est aussi diagonalisable.

Démonstration 5.110

Si f est diagonalisable, d'après le Théorème 5.97, μ_f est simplement scindé.

Or $\mu_g \mid \mu_f$ donc μ_g est simplement scindé.

Donc g est diagonalisable d'après le Théorème 5.97. ■

Remarque 5.111

On a également :

$$\triangleright \text{Sp}(g) = Z_{\mathbb{K}}(\mu_g) \subseteq Z_{\mathbb{K}}(\mu_f) = \text{Sp}(f)$$

$$\triangleright \text{si } x \text{ est un vecteur propre de } g \text{ pour la valeur propre } \lambda, \text{ i.e. } \begin{cases} x \in F \\ x \neq 0 \\ g(x) = f(x) = \lambda x \end{cases} \quad \text{alors } x \text{ est un}$$

vecteur propre de f dans F , et réciproquement.

On a donc $\text{sep}(g, \lambda) = \text{sep}(f, \lambda) \cap F$.

Exercice 5.112

Soit f un endomorphisme de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Déterminez les sous-espaces vectoriels de E stables par f .

Exercice 5.113 (Codiagonalisation ou diagonalisation simultanée)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisables et qui commutent.

Montez qu'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ sont diagonales.

5.7 Quelques applications de la diagonalisation

5.7.1 Puissances d'une matrice, suites récurrentes linéairement

Un petit lemme déjà rencontré.

Lemme 5.114

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PBP^{-1}$.

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PB^kP^{-1}$.

Le lemme précédent est particulièrement utile si A est diagonalisable et si on choisit $B = D$, matrice diagonale semblable à A , car calculer les puissances d'une matrice diagonale est très facile.

Grâce à la diagonalisation de A , on peut espérer exprimer la forme générale des suites récurrentes linéaires (voir le chapitre précédent, section sur les polynômes annulateurs).

Exercice 5.115

Soient u, v, w les trois suites réelles telles que $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = -4u_n + 4v_n - 6w_n \\ w_{n+1} = -3u_n + 3v_n - 4w_n \end{cases}$$

Déterminez des expressions de u_n, v_n, w_n en fonction de n .

Cette technique s'applique en particulier aux suites u vérifiant une relation de récurrence linéaire de la forme : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+d} = a_{d-1}u_{n+d-1} + \cdots + a_2u_{n+2} + a_1u_{n+1} + a_0u_n$.

On pose alors $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+d-1} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{d-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$ et on est ramené au cas précédent.

La matrice A s'appelle la matrice-compagnon du polynôme $P = X^d - a_{d-1}X^{d-1} - \dots - a_1X - a_0$: elle a la propriété remarquable que son polynôme caractéristique est P , son polynôme minimal est aussi P et donc que ses valeurs propres sont les racines de P . C'est pourquoi le polynôme P est appelé polynôme caractéristique associé à la suite u (cas déjà étudié en première année : $d = 2$).

On en déduit que A est diagonalisable ssi P est simplement scindé et dans ce cas, A possède d valeurs propres distinctes. Dans ce cas, en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes, la suite u est combinaison linéaire des suites géométriques $(\lambda_1^n), \dots, (\lambda_d^n)$.

Exercice 5.116

Explicitez l'unique suite (u_n) vérifiant

$$u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 5 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n.$$

5.7.2 Systèmes d'équations différentielles

Ce point sera traité dans le chapitre sur les équations différentielles linéaires.

5.8 Endomorphismes trigonalisables, matrices trigonalisables

5.8.1 Définition et propriétés

Définition 5.117

Un endomorphisme est dit trigonalisable quand il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.

Une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ quand elle est semblable à une matrice triangulaire dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque 5.118

- Si un endomorphisme (une matrice) est diagonalisable, alors il (elle) est trigonalisable.
- Si une matrice est trigonalisable, ses valeurs propres sont les nombres sur la diagonale de toute matrice triangulaire semblable.

Exercice 5.119

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 7 \\ 5 & 4 & -8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et f un endomorphisme de matrice M . Déterminez les éléments propres de M . Est-elle diagonalisable? En complétant une famille libre de vecteurs propres, déterminez une base \mathcal{B} de l'espace où la matrice de f est triangulaire supérieure, puis trigonalisez M .

Exercice 5.120

Soit f un endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -5 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Montrez que f n'est pas diagonalisable mais est trigonalisable et donnez une base de trigonalisation de f . Donnez une forme générale pour A^n .

Quand un endomorphisme ou une matrice n'est pas diagonalisable, on peut espérer qu'il ou elle est trigonalisable : faute de grives, on se contente de merles!

Remarque 5.121

On ne confondra pas la trigonalisation d'une matrice carrée et la transformation par lignes (ou colonnes) des matrices vue en première année! Seule la trigonalisation fournit des matrices semblables! La transformation par lignes ne conserve que le rang!

5.8.2 Caractérisation équivalente

La trigonalisabilité est beaucoup plus courante que la diagonalisabilité, comme on le voit grâce aux résultats suivants.

Proposition 5.122

Un endomorphisme (une matrice) est trigonalisable ssi il (elle) est scindé(e).

Démonstration 5.123

On pose $\mathcal{P}(n)$: « si f est un endomorphisme d'un espace de dimension n et si χ_f est scindé, alors f est trigonalisable ».

► $\mathcal{P}(1)$ est vraie car tout endomorphisme en dimension 1 est trigonalisable.

► Supposons $\mathcal{P}(n-1)$.

Soient E un espace de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_f soit scindé.

Comme χ_f est scindé, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que λ soit racine de χ_f et donc une valeur propre de f à laquelle on associe un vecteur propre u_1 .

Comme $u_1 \neq 0$, d'après le théorème de la base incomplète, il existe $(u_2, \dots, u_n) \in E^{n-1}$ tel que $\mathcal{B}_0 = (u_1, \dots, u_n)$ soit une base de E .

On a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & L \\ \hline 0 & B \\ \vdots & \\ 0 & \end{array} \right).$$

Donc

$$\chi_f = \left| \begin{array}{c|c} X - \lambda & -L \\ \hline 0 & XI_{n-1} - B \\ \vdots & \\ 0 & \end{array} \right| = (X - \lambda) \chi_B.$$

On pose $F = \text{Vect}(u_2, \dots, u_n)$.

Soit $g \in \mathcal{L}(F)$ tel que $\text{Mat}_{(u_2, \dots, u_n)}(g) = B$.

On a $\chi_g = \chi_B$ scindé donc par hypothèse de récurrence, g est trigonalisable : il existe une base

$$(u'_2, \dots, u'_n) \text{ de } F \text{ telle que } \text{Mat}_{(u'_2, \dots, u'_n)}(g) = \begin{pmatrix} t_{22} & t_{23} & \dots & t_{2n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & t_{n-1n} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix} = T.$$

La famille $\mathcal{B} = (u_1, u'_2, \dots, u'_n)$ est une base de E .

On veut montrer que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & t_{n-1n} & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

On a $g = p \circ f|_F$ où p est le projecteur sur F parallèlement à $\text{Vect}(u_1)$.

Donc pour tout $x \in F$, $f(x) = \underbrace{g(x)}_{\in F} + \alpha u_1$ où $\alpha \in \mathbb{K}$.

De plus,

$$\text{pour tout } j \in \llbracket 2 ; n \rrbracket, \quad f(u'_j) = g(u'_j) + \alpha_j u_1$$

$$= \sum_{i=2}^j t_{ij} u'_i + \alpha_j u_1.$$

D'où $\mathcal{P}(n)$.

► Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. ■

En particulier, quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tous les endomorphismes sont trigonalisables, toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont trigonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

En pratique, quand on cherche à trigonaliser un endomorphisme, on peut chercher une base dans laquelle la matrice est triangulaire supérieure avec des 1 ou des 0 sur la sur-diagonale et des 0 sur les diagonales partielles encore au-dessus (c'est démontrable, mais c'est difficile à démontrer, cela s'appelle le théorème de Jordan – hors-programme –).

Théorème 5.124

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- ▷ f est trigonalisable
- ▷ χ_f est scindé
- ▷ μ_f est scindé
- ▷ il existe un polynôme annulateur de f scindé

Et sa version matricielle.

Théorème 5.125

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- ▷ A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- ▷ χ_A est scindé
- ▷ μ_A est scindé
- ▷ il existe un polynôme annulateur de A qui est scindé dans $\mathbb{K}[X]$

Exercice 5.126

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculez A^2 , puis A^3 . La matrice A est-elle diagonalisable ? trigonalisable ? Dans l'affirmative, diagonalisez ou trigonalisez la.

5.8.3 Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème 5.127

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme (d'une matrice carrée) est un polynôme annulateur.

Démonstration 5.128

On pose $\mathcal{P}(n)$: « si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $\chi_A(A) = 0$ ».

► Si $n = 1$: on pose $A = (a)$.

On a $\chi_A = X - a$ donc $\chi_A(A) = A - aI_1 = (a) - (a) = 0$.

D'où $\mathcal{P}(1)$.

► Supposons $\mathcal{P}(n-1)$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Le polynôme χ_A est scindé donc A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, i.e. il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et

$T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{C})$ telles que $A = PTP^{-1}$, avec $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & ? & \dots & ? \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & ? \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

On a $\chi_A = \chi_T = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$.

On peut écrire

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & ? & \dots & ? \\ 0 & \lambda_2 & ? & ? \\ \vdots & 0 & \ddots & ? \\ \vdots & \vdots & \ddots & ? \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & ? & \dots & ? \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ U \\ \\ \end{matrix}$$

où $U \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$.

On a $\chi_U = \prod_{i=2}^n (X - \lambda_i)$ donc $\chi_A = \chi_T = (X - \lambda_1) \chi_U$.

Donc

$$\begin{aligned} \chi_A(A) &= (A - \lambda_1 I_n) \chi_U(A) \\ &= (PTP^{-1} - \lambda_1 I_n) \chi_U(PTP^{-1}) \\ &= P(T - \lambda_1 I_n) \chi_U(T) P^{-1}. \end{aligned} \quad \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right) (PTP^{-1})^k = PT^k P^{-1}$$

Or on a

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & ? & \dots & \dots & ? \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_1 & ? & \dots & ? \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_n - \lambda_1 \end{pmatrix}}_{T - \lambda_1 I_n} \underbrace{\begin{pmatrix} \chi_U(\lambda_1) & ? & \dots & ? \\ 0 & & & \\ \vdots & & \chi_U(U) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}}_{\chi_U(T)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

car $\chi_U(U) = 0$.

Donc $\chi_A(A) = 0$, d'où $\mathcal{P}(n)$.

► Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. ■

Corollaire 5.129

Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique. Donc en dimension n , le polynôme minimal est de degré au plus n .

Les polynômes minimal et caractéristique partagent les mêmes racines dans \mathbb{C} (en fait dans tout corps \mathbb{K}) mais pas avec les mêmes ordres de multiplicité : si f est scindé, alors en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les k valeurs propres distinctes de f , on peut écrire

$$\chi_f = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{\alpha_i} \quad \text{et} \quad \mu_f = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{\beta_i}$$

où pour tout $i \in \llbracket 1 ; k \rrbracket$, $1 \leq \beta_i \leq \alpha_i$.

5.8.4 Sous-espaces caractéristiques

Définition 5.130

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme scindé. On écrit $\chi_f = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont les k valeurs propres distinctes de f .

Les sous-espaces caractéristiques de f sont les noyaux $\ker (f - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i}$.

Proposition 5.131

Les sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme scindé sont supplémentaires et stables par f .

Démonstration 5.132

► Soient $\lambda \in \text{Sp}(f)$ et α l'ordre de multiplicité de λ .

Soit $x \in \ker(f - \lambda \text{id}_E)^\alpha$.

On a

$$\begin{aligned}(f - \lambda \text{id}_E)^\alpha(f(x)) &= ((f - \lambda \text{id}_E)^\alpha \circ f)(x) && \left. \begin{array}{l} \text{composée de deux} \\ \text{polynômes en } f \text{ donc} \\ \text{commutative} \end{array} \right\} \\ &= (f \circ (f - \lambda \text{id}_E)^\alpha)(x) \\ &= f(0) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc $f(x) \in \ker(f - \lambda \text{id}_E)^\alpha$.

Donc $\ker(f - \lambda \text{id}_E)^\alpha$ est stable par f .

► On a $\chi_f = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$: produit de polynômes premiers entre eux deux à deux.

D'après le lemme des noyaux, on a

$$\ker \chi_f(f) = \bigoplus_{i=1}^k \ker(f - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i}.$$

Or $\chi_f(f) = 0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton donc

$$E = \bigoplus_{i=1}^k \ker(f - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i}.$$

■

Théorème 5.133

Tout endomorphisme scindé possède une base dans laquelle sa matrice est diagonale par blocs telle que :

- *il y a autant de blocs que de valeurs propres : à chaque valeur propre, on associe un unique bloc ;*
- *chaque bloc est de la forme $\lambda I_r + U$ où λ est la valeur propre associée au bloc, r est l'ordre de multiplicité de λ et U est une matrice strictement triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$*

Toute matrice scindée est semblable à une matrice diagonale par blocs vérifiant les conditions précédentes.

Démonstration 5.134

Soient $\lambda \in \text{Sp}(f)$ et α son ordre de multiplicité.

Sur $F = \ker(f - \lambda \text{id}_E)^\alpha$, f induit un endomorphisme \tilde{f} tel que $(\tilde{f} - \lambda \text{id}_F)^\alpha = 0$.

Donc $(X - \lambda)^\alpha$ est un polynôme annulateur de \tilde{f} qui est scindé donc \tilde{f} a pour unique valeur propre λ et est trigonalisable.

Donc il existe une base \mathcal{B}_λ de F telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_\lambda}(\tilde{f}) = \begin{pmatrix} \lambda & ? & \dots & ? \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & ? \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_\alpha + U.$$

Comme $E = \bigoplus_{i=1}^k \ker(f - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i}$, en concaténant de telles bases, on obtient une base de E dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + U_1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & \ddots & 0 \\ & & & \lambda_k I_{\alpha_k} + U_k \end{pmatrix}.$$

■

Corollaire 5.135

La dimension d'un sous-espace caractéristique est l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée.

5.9 Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes

5.9.1 Généralités

Définition 5.136

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est nilpotent quand il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est nilpotente quand il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$.

Le plus petit indice p satisfaisant à la condition précédente s'appelle l'indice de nilpotence de u (de A).

Proposition 5.137

Toute matrice strictement triangulaire (supérieure ou inférieure) est nilpotente. Par conséquent, les matrices semblables à une matrice strictement triangulaire sont nilpotentes.

Démonstration 5.138

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice strictement triangulaire :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & ? & \dots & ? \\ & 0 & \dots & ? \\ & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $\chi_A = X^n$ et $\chi_A(A) = 0$ donc $A^n = 0$. ■

Dans la décomposition en sous-espaces caractéristiques, on a vu apparaître des matrices $\lambda I_r + U$: les matrices U sont nilpotentes.

L'ensemble des matrices nilpotentes n'a pas de structure particulière : en général, la somme et le produit de deux matrices nilpotentes ne sont pas nilpotents. Néanmoins, avec une condition de commutation supplémentaire, on a quelques résultats.

Proposition 5.139

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices nilpotentes.

Si A et B commutent, alors $A + B$ et AB sont nilpotentes.

Démonstration 5.140

Soit $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ tel que $A^k = 0$ et $B^\ell = 0$.

Supposons $AB = BA$.

On a

$$\begin{aligned} (AB)^{\min(k, \ell)} &= A^{\min(k, \ell)} B^{\min(k, \ell)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (A + B)^{k+\ell} &= \sum_{i=0}^{k+\ell} \binom{k+\ell}{i} A^i B^{k+\ell-i} \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k+\ell}{i} A^i \underbrace{B^{k+\ell-i}}_{=0} + \sum_{i=k+1}^{k+\ell} \binom{k+\ell}{i} \underbrace{A^i}_{=0} B^{k+\ell-i} \\ &= 0. \end{aligned}$$
■

On a bien sûr les mêmes résultats concernant les endomorphismes nilpotents.

5.9.2 Éléments propres d'un nilpotent

Proposition 5.141

Un endomorphisme en dimension n est nilpotent ssi son polynôme caractéristique est X^n , i.e. s'il est scindé et admet 0 comme unique valeur propre.

Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente ssi son polynôme caractéristique est X^n , i.e. si elle est scindée et admet 0 comme unique valeur propre.

L'indice de nilpotence dans ces deux cas est alors le degré du polynôme minimal; il est donc inférieur ou égal à n .

Démonstration 5.142

Si f est nilpotent alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k = 0$ donc X^k est annulateur de f donc $\text{Sp}(f) = \{0\}$ donc $\chi_f = X^n$.

Réciproquement, si $\chi_f = X^n$, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $f^n = 0$ donc f est nilpotent.

Or $\mu_f \mid \chi_f$ donc μ_f est de la forme X^ℓ avec $\ell \leq n$ et par définition de μ_f , ℓ est l'indice de nilpotence de f . ■

Mis à part la matrice nulle, aucune matrice nilpotente n'est diagonalisable : c'est une idée parfois utile pour prouver qu'une matrice est nulle (diagonalisable et nilpotente implique nulle).

Proposition 5.143

Tout endomorphisme nilpotent est trigonalisable : il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure stricte. Réciproquement, si un endomorphisme est trigonalisable et n'a que 0 pour valeur propre, alors il est nilpotent.

Toute matrice nilpotente est trigonalisable : elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte. La réciproque est vraie.

5.9.3 Application aux sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme

Proposition 5.144

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Pour toute valeur propre λ de f , si α est l'ordre de multiplicité de λ dans le polynôme minimal de f , le sous-espace caractéristique associé est aussi le noyau $\ker(f - \lambda \text{id}_E)^\alpha$.

Lemme 5.145

Si $F_1, \dots, F_k, G_1, \dots, G_k$ vérifient $\bigoplus_{i=1}^k F_i = \bigoplus_{i=1}^k G_i$ et pour tout $i \in \llbracket 1 ; k \rrbracket$, $F_i \subseteq G_i$, alors pour tout $i \in \llbracket 1 ; k \rrbracket$, $F_i = G_i$.

Démonstration 5.146

Soient $i \in \llbracket 1 ; k \rrbracket$ et $x \in G_i$.

On a $x \in \bigoplus_{j=1}^k G_j = \bigoplus_{j=1}^k F_j$.

Donc il existe $(y_1, \dots, y_k) \in F_1 \times \dots \times F_k$ tel que

$$\underbrace{x}_{\in G_i} = \underbrace{y_1}_{\in F_1 \subseteq G_1} + \dots + \underbrace{y_k}_{\in F_k \subseteq G_k}.$$

Or la somme $\bigoplus_{j=1}^k G_j$ est directe donc par unicité

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = 0 \\ \vdots \\ y_{i-1} = 0 \\ y_i = x \\ y_{i+1} = 0 \\ \vdots \\ y_k = 0 \end{array} \right.$$

Donc $x = y_i \in F_i$.

Donc $F_i \subseteq G_i$.

Donc $F_i = G_i$. ■

Démonstration 5.147 (de la Proposition 5.144)

On note $\chi_f = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et $\mu_f = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{\beta_i}$ où pour tout $i \in \llbracket 1 ; k \rrbracket$, $\alpha_i \geq \beta_i \geq 1$.

On veut montrer que pour tout $i \in \llbracket 1 ; k \rrbracket$, $\ker(f - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i} = \ker(f - \lambda_i \text{id}_E)^{\beta_i}$.

Comme $\beta_i \leq \alpha_i$, on a immédiatement pour tout $i \in \llbracket 1 ; k \rrbracket$, $\ker(f - \lambda_i \text{id}_E)^{\beta_i} \subseteq \ker(f - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i}$.

Comme $\mu_f(f) = \chi_f(f) = 0$, d'après le lemme des noyaux :

$$E = \bigoplus_{i=1}^k \ker(f - \lambda_i \text{id}_E)^{\beta_i} = \bigoplus_{i=1}^k \ker(f - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i}.$$

D'après le Lemme 5.145, on en déduit

$$\forall i \in \llbracket 1 ; k \rrbracket, \ker(f - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i} = \ker(f - \lambda_i \text{id}_E)^{\beta_i}. \quad \blacksquare$$

On peut même démontrer mieux.

Proposition 5.148

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \text{Sp}(f)$ et α l'ordre de multiplicité de λ dans le polynôme minimal de f .

Alors la suite des noyaux $\left(\ker(f - \lambda \text{id}_E)^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante jusqu'au rang α , puis constante à partir du rang α :

$$\{0\} \subsetneq \ker(f - \lambda \text{id}_E) \subsetneq \ker(f - \lambda \text{id}_E)^2 \subsetneq \dots \subsetneq \ker(f - \lambda \text{id}_E)^\alpha = \ker(f - \lambda \text{id}_E)^{\alpha+1} = \dots$$

Chapitre 6

Intégrales généralisées

★★ À venir ★★

Chapitre 7

Intégrales à paramètre

★★ À venir ★★

Chapitre 8

Espaces préhilbertiens réels

★★ À venir ★★

Chapitre 9

Endomorphismes dans un espace euclidien

★★ À venir ★★

Chapitre 10

Fonctions vectorielles

★★ À venir ★★

Chapitre 11

Suites et séries de fonctions

★★ À venir ★★

Chapitre 12

Séries entières

★★ À venir ★★

Chapitre 13

Probabilités

★★ À venir ★★

Chapitre 14

Variables aléatoires discrètes

★★ À venir ★★

Chapitre 15

Équations différentielles linéaires

★★ À venir ★★

Chapitre 16

Calcul différentiel

★★ À venir ★★

Chapitre 17

Structures algébriques

★★ À venir ★★

Deuxième partie

Exercices

Chapitre 1

Espaces vectoriels normés

★★ À venir ★★

Chapitre 2

Séries numériques et vectorielles : révisions et compléments

★★ À venir ★★

Chapitre 3

Familles sommables

★★ À venir ★★

Chapitre 4

Rappels et compléments d'algèbre linéaire

★★ À venir ★★

Chapitre 5

Réduction des endomorphismes

★★ À venir ★★

Chapitre 6

Intégrales généralisées

★★ À venir ★★

Chapitre 7

Intégrales à paramètre

★★ À venir ★★

Chapitre 8

Espaces préhilbertiens réels

★★ À venir ★★

Chapitre 9

Endomorphismes dans un espace euclidien

★★ À venir ★★

Chapitre 10

Fonctions vectorielles

★★ À venir ★★

Chapitre 11

Suites et séries de fonctions

★★ À venir ★★

Chapitre 12

Séries entières

★★ À venir ★★

Chapitre 13

Probabilités

★★ À venir ★★

Chapitre 14

Variables aléatoires discrètes

★★ À venir ★★

Chapitre 15

Équations différentielles linéaires

★★ À venir ★★

Chapitre 16

Calcul différentiel

★★ À venir ★★

Chapitre 17

Structures algébriques

★★ À venir ★★

