Maths – MPI

Romain Bricout

25 décembre 2023

Introduction

Ce document réunit l'ensemble de mes cours de Mathématiques de MPI, ainsi que les exercices les accompagnant. Le professeur était M. Walbron. J'ai adapté certaines formulations me paraissant floues ou ne me plaisant pas mais le contenu pur des cours est strictement équivalent.

Les éléments des tables des matières initiale et présentes au début de chaque chapitre sont cliquables (amenant directement à la partie cliquée). C'est également le cas des références à des éléments antérieurs de la forme, par exemple, « Démonstration 5.22 ».

Cette version ne contient que le contenu des cours imprimés distribués au fil de l'année. Voir l'autre version pour les annotations.

Table des matières

Première partie

Cours

Chapitre 1

Espaces vectoriels normés

Sommaire

Dans ce chapitre, la lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Bornes supérieures, bornes inférieures

1.1.1 Borne supérieure d'une partie de $\mathbb{R}$

On rappelle le théorème fondamental, dit « théorème (ou axiome) de la borne supérieure ».

Théorème 1.1
Toute partie A de $\mathbb{R}$, non-vide et majorée, possède une borne supérieure, notée $\sup A$.

Toute partie A de $\mathbb{R}$, non-vide et minorée, possède une borne inférieure, notée $\inf A$.

On dispose de caractérisations équivalentes de la borne supérieure.

Proposition 1.2
Soient A une partie de $\mathbb{R}$, non-vide et majorée, et s un réel.

Alors il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- $s = \sup A$
- $\begin{cases} \forall a \in A, \quad a \leqslant s \\ \forall \varepsilon > 0, \quad \exists x \in A, \quad s - \varepsilon < x \leqslant s \end{cases}$
- $\begin{cases} \forall a \in A, \quad a \leqslant s \\ \exists\, (x_n) \in A^{\mathbb{N}}, \quad x_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} s \end{cases}$

On a évidemment les caractérisations associées à la borne inférieure.

1.1.2 Borne supérieure d'une application à valeurs dans $\mathbb{R}$

Définition 1.3
Soient X un ensemble non-vide et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

Si f est majorée sur X, alors on appelle borne supérieure de f sur X le réel $\sup f(X) = \sup\limits_{X} f = \sup\limits_{x \in X} f(x)$.

Si f est minorée sur X, alors on appelle borne inférieure de f sur X le réel $\inf f(X) = \inf\limits_{X} f = \inf\limits_{x \in X} f(x)$.

On déduit de la Proposition 1.2 les caractérisations suivantes.

Proposition 1.4
Soient X un ensemble non-vide, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ majorée sur X et s un réel.

Alors il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- $s = \sup\limits_{X} f$
- $\begin{cases} \forall x \in X, \quad f(x) \leqslant s \\ \forall \varepsilon > 0, \quad \exists x \in X, \quad s - \varepsilon < f(x) \leqslant s \end{cases}$
- $\begin{cases} \forall x \in X, \quad f(x) \leqslant s \\ \exists\,(x_n) \in X^{\mathbb{N}}, \quad f(x_n) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} s \end{cases}$

1.1.3 Règles pratiques

D'abord, des évidences auxquelles on ne pense pas toujours.

Proposition 1.5
Soit A une partie de $\mathbb{R}$, non-vide et majorée. Alors $\forall a \in A, \quad a \leqslant \sup A$.

Soient X un ensemble non-vide et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ majorée sur X. Alors $\forall x \in X, \quad f(x) \leqslant \sup\limits_{X} f$.

En pratique, on n'a pas souvent besoin de connaître la valeur exacte d'une borne supérieure, on a plus souvent besoin de la majorer.

Proposition 1.6

- *Soient A une partie de $\mathbb{R}$, non-vide et majorée, et M un réel.*
  Pour montrer $\sup A \leqslant M$, il suffit de montrer $\forall a \in A, \quad a \leqslant M$.

- *Soient X un ensemble non-vide, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ majorée sur X et M un réel.*
  Pour montrer $\sup\limits_{X} f \leqslant M$, il suffit de montrer $\forall x \in X, \quad f(x) \leqslant M$.

Multiplication par un réel positif.

Proposition 1.7
Soient X un ensemble non-vide et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ majorée sur X.

Alors pour tout $\lambda \geqslant 0$, $\sup_X (\lambda f) = \lambda \sup_X f$.

Attention ! C'est bien sûr faux si $\lambda < 0$.

1.2 Normes

1.2.1 Définition

Définition 1.8
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

On appelle norme sur E toute application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

- pour tout $x \in E$, $N(x) = 0 \iff x = 0$ (séparation)
- pour tout $x \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (homogénéité)
- pour tout $(x, y) \in E^2$, $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire).

Un espace vectoriel est dit espace vectoriel normé quand on lui associe une norme.

On déduit de l'inégalité triangulaire une inégalité classique (souvent appelée aussi inégalité triangulaire) :

$$\text{pour tout } (x, y) \in E^2, \ |N(x) - N(y)| \leqslant N(x - y).$$

Si N est une norme sur E, alors on peut définir une distance entre deux vecteurs de E : $d(u, v) = N(u - v)$.

On définit ainsi une application $d : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

- pour tout $(x, y) \in E^2$, $d(y, x) = d(x, y)$ (symétrie)
- pour tout $(x, y) \in E^2$, $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (sépration)
- pour tout $(x, y, z) \in E^3$, $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

1.2.2 Exemples fondamentaux

- La valeur absolue dans $\mathbb{R}$ et le module dans $\mathbb{C}$ sont des normes.

- La norme euclidienne habituelle en géométrie plane ou spatiale est une norme.

- Plus généralement, si $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E, la norme euclidienne associée $x \longmapsto \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$ est une norme au sens précédent.

- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On choisit une base de E $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Si v est un vecteur de E, on note $(v_1, \ldots, v_n)$ les coordonnées de v dans la base $\mathscr{B}$.
  On définit classiquement trois normes sur E :

$$\|v\|_\infty = \max_{i \in [\![1;n]\!]} |v_i| \qquad \|v\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i| \qquad \|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2}$$

  appelées respesctivement norme infinie ou norme sup, norme 1 et norme 2.
  Cas particulier : $E = \mathbb{R}^n$ muni de la base canonique.
  Cas particulier : $E = \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ muni de la base canonique. Si $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ est une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors

$$\|A\|_\infty = \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \left|a_{ij}\right| \qquad \|A\|_1 = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \left|a_{ij}\right| \qquad \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \left|a_{ij}\right|^2}$$

- Soient X un ensemble et E l'ensemble des applications bornées de X dans $\mathbb{K}$. La norme sup sur E est définie par $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.
  Cas particulier : si $X = \mathbb{N}$, E est l'ensemble des suites bornées et $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

Proposition 1.9
Soient E, F deux espaces vectoriels normés.

L'application de $E \times F$ dans $\mathbb{R}_+$ qui à (x, y) associe $\max\left(\|x\|_E, \|y\|_F\right)$ est une norme.

Autrement dit, le produit de deux espaces vectoriels normés est encore un espace vectoriel normé, résultat qui se généralise par récurrence à un nombre quelconque (fini) d'espaces vectoriels normés.

1.2.3 Normes équivalentes

Définition 1.10
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et N_1, N_2 deux normes sur E.

On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes quand il existe deux constantes strictement positives a, b telles que pour tout $v \in E$, $aN_1(v) \leqslant N_2(v) \leqslant bN_1(v)$.

Exercice 1.11
Montrez que si E est de dimension finie, les trois normes $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes.

Exercice 1.12
Soient $E = \mathbb{R}[X]$ et $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in E$. On pose $N_1(P) = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$ et $N_\infty(P) = \max_{0\leqslant i\leqslant n} |a_i|$.

Montrez que N_1 et N_∞ sont des normes sur E.

Montrez qu'elles ne sont pas équivalentes en considérant la suite des polynômes $P_n = \sum_{i=0}^{n} X^i$.

Le résultat suivant est fondamental.

Théorème 1.13
Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les normes sur E sont équivalentes.

Quand on est en dimension finie, cela signifie que tous les résultats qu'on peut démontrer pour une norme sont à facteurs près valables pour n'importe quelle norme, autrement dit cela nous permettra de choisir la norme que l'on préfère si on ne nous l'impose pas.

Dans toute la suite, E est un espace vectoriel normé par la norme $\|\cdot\|$.

1.2.4 Boules

Définition 1.14
Soient $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r l'ensemble noté $B(a, r)$ défini de la façon suivante :

$$B(a,r) = \{v \in E \mid \|v - a\| < r\}.$$

On appelle boule fermée de centre a et de rayon r l'ensemble noté (généralement) $\overline{B}(a, r)$:

$$\overline{B}(a,r) = \{v \in E \mid \|v - a\| \leqslant r\}.$$

On appelle sphère de centre a et de rayon r l'ensemble (généralement) noté $S(a, r)$:

$$S(a,r) = \{v \in E \mid \|v - a\| = r\}.$$

On appelle boule-unité la boule de centre 0 et de rayon 1, sphère-unité la sphère de centre 0 et de rayon 1.

Exercice 1.15
Que sont les boules dans $\mathbb{R}$? Que sont les sphères dans $\mathbb{R}$?

Exercice 1.16
On prend $E = \mathbb{R}^2$ et on définit les normes infinie, 1 et 2 relativement à la base canonique.

Représentez graphiquement les boules-unités pour chacune de ces trois normes.

Exercice 1.17
Montrez que toute boule ouverte est contenue dans une boule fermée et contient une boule fermée de mêmes centres.

Montrez la même chose en inversant les mots « ouverte » et « fermée ».

Définition 1.18
Soit $(x, y) \in E^2$. On note $[xy] = \{tx + (1-t)\,y \mid t \in [0\,;1]\}$, appelé segment (géométrique) d'extrémités x et y.

Une partie A de E est dite convexe quand pour tout $(x, y) \in A^2$, $[xy] \subseteq A$.

On a :
$$A \text{ est convexe} \iff \forall\,(x, y) \in A^2,\ \forall t \in [0\,;1]\,,\ tx + (1-t)\,y \in A.$$

Proposition 1.19
Les boules (ouvertes ou fermées) sont des parties convexes.

Les sphères ne sont jamais convexes.

Dans $\mathbb{R}$, les convexes sont les intervalles.

1.2.5 Parties bornées

Définition 1.20
On dit qu'une partie A de E est bornée quand il existe une boule qui la contient.

Exercice 1.21
Montrez que A est bornée ssi A est contenue dans une boule de centre 0.

Plus généralement, on choisit arbitrairement un point de E, noté x. Montrez l'équivalence A est bornée ssi A est contenue dans une boule de centre x.

Exercice 1.22
Montrez qu'en dimension finie, cette définition ne dépend pas de la norme.

Proposition 1.23
Une partie A de E n'est pas bornée ssi il existe une suite (v_n) à termes dans A telle que $\|v_n\| \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty$.

Exercice 1.24
Dans $E=\mathbb{R}^2$, on pose $A=\left\{(x,y)\;\middle|\;x^4+y^4=20\right\}$: A est-elle bornée ? Si oui, pour chacune des normes infinie, 1 et 2, donnez un rayon d'une boule centrée en 0 qui contient A.

Exercice 1.25
Même question avec $E=\mathbb{C}^2$.

Exercice 1.26
Dans $E=\mathbb{R}^3$, on pose $B=\left\{(x,y,z)\;\middle|\;x^2+3y^2+4z^2+2xy+2xz-2yz\leqslant 42\right\}$: B est-elle bornée ? Si oui, pour chacune des normes infinie, 1 et 2, donnez un rayon d'une boule centrée en 0 qui contient B.

Exercice 1.27
Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on note $\mathscr{P}$ l'ensemble des matrices de projecteurs : $\mathscr{P}$ est-il borné ?

Définition 1.28
On dit qu'une suite v à termes dans E est bornée quand l'ensemble de ses valeurs est borné, autrement dit quand il existe $M>0$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N},\quad\|v_n\|\leqslant M$.

On dit qu'une fonction f d'un ensemble X dans E est bornée quand l'ensemble de ses valeurs prises sur X est borné, autrement dit quand il existe $M>0$ tel que pour tout $x\in X,\quad\|f(x)\|\leqslant M$.

Exercice 1.29
Soit u une suite complexe arithmético-géométrique de raison a. À quelle condition est-elle bornée ?

Exercice 1.30
Soient B,B' deux boules de E. Si $(x,x')\in E^2$, on pose $f(x,x')=d(x,x')$. Montrez que f est bornée sur $B\times B'$.

1.3 Convergence des suites

Dans cette section, E désigne un espace vectoriel normé par la norme $\|\cdot\|$.

1.3.1 Définition

Définition 1.31
Soient $u = (u_n)$ une suite à termes dans E et $\ell \in E$.

On dit que la suite u converge vers ℓ quand toute boule ouverte de centre ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \ \forall n \geqslant n_0, \ \ u_n \in B(\ell, \varepsilon).$$

Proposition 1.32
Dans la définition, on peut remplacer les boules ouvertes par des boules fermées.

On peut réécrire la définition sous deux formes équivalentes :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \ \forall n \geqslant n_0, \ \ \|u_n - \ell\| < \varepsilon$$

ou

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \ \forall n \geqslant n_0, \ \ \|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon.$$

On peut donc se ramener aux suites réelles positives : la suite vectorielle u converge vers ℓ ssi la suite réelle $(\|u_n - \ell\|)$ converge vers 0.

Une suite qui ne converge vers aucun élément de E est dite divergente.

1.3.2 Propriétés usuelles

Proposition 1.33 (Unicité de la limite)
Si une suite $u \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$, elle ne peut converger vers un autre point de E.

On peut donc noter classiquement $\ell = \lim u = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n$ ou $u_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \ell$.

Proposition 1.34
Si une suite $u \in E^{\mathbb{N}}$ converge, alors elle est bornée.

Théorème 1.35 (Opérations sur les suites convergentes)
Soient $u, v \in E^{\mathbb{N}}$ *convergeant respectivement vers* ℓ *et* m *deux éléments de* E*.*

Alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{K}^2$*, la suite* $au + bv$ *converge vers* $a\ell + bm$*.*

Soit $\alpha \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *convergeant vers* $\lambda \in \mathbb{K}$*.*

Alors la suite αu *converge vers* $\lambda\ell$*.*

Proposition 1.36
Toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite.

Quasi-réciproque : si u *est une suite telle que les deux suites extraites* (u_{2n}) *et* (u_{2n+1}) *convergent vers la même limite* ℓ*, alors* u *converge vers* ℓ*.*

Proposition 1.37
Dans un produit de deux espaces vectoriels normés $E \times F$*, une suite* $(u_n) = ((a_n, b_n))$ *converge ssi les suites* (a_n) *et* (b_n) *convergent dans* E*, respectivement* F*.*

Dans ce cas, $\lim (a_n, b_n) = (\lim a_n, \lim b_n)$*.*

Ce résultat se généralise sans difficulté par récurrence à un nombre quelconque (fini) d'espaces vectoriels normés.

1.3.3 Cas particulier en dimension finie

Dans cette partie, on suppose que E est de dimension finie.

Définition 1.38
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Pour $i \in [\![1\ ;\ n]\!]$, on appelle i-ème forme coordonnée (relative à la base $\mathscr{B}$), notée souvent d_i, la forme linéaire qui à un vecteur associe sa i-ème coordonnée dans la base $\mathscr{B}$:

$$\text{pour tout } v \in E, \quad v = \sum_{i=1}^{n} d_i(v)\, e_i.$$

Théorème 1.39
Soit $\mathscr{B}$ *une base de* E*.*

Une suite $u \in E^{\mathbb{N}}$ *converge vers* $\ell \in E$ *ssi pour toute forme coordonnée* d *relative à* $\mathscr{B}$*, la suite* $(d(u_n))$ *converge vers* $d(\ell)$*.*

Autrement dit, une suite converge ssi ses suites-coordonnées dans n'importe quelle base convergent.

Dans ce cas, la limite de la suite u *est le vecteur* ℓ *tel que pour toute forme coordonnée* d*,* $d(\ell) = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} d(u_n)$*.*

Exemple 1.40

Si $M_n = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e}^{-n} \\ 1/n & n\sin(1/n) \end{pmatrix}$, alors la suite de matrices (M_n) converge vers la matrice I_2.

Corollaire 1.41
Si E est de dimension finie, la convergence d'une suite ne dépend pas du choix de la norme. On peut donc choisir la norme qu'on veut.

1.3.4 Point adhérent à une partie

Définition 1.42
Soient A une partie de E et $x \in E$.

On dit que x est un point adhérent à A quand il existe une suite $u \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x.

L'adhérence de A est l'ensemble de ses points adhérents, noté $\overline{A}$.

Intuitivement, l'adhérence d'une partie est elle-même à laquelle on ajoute tous les points qui se trouvent sur son bord.

Exercice 1.43
Quelle est l'adhérence d'une boule ouverte ?

Exercice 1.44
Quelle est l'adhérence de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$?

Proposition 1.45
Soient A une partie de E et $x \in E$.

Alors x est adhérent à A ssi toute boule centrée en x rencontre A.

De manière formalisée : $x \in \overline{A} \iff \forall r > 0,\ \exists y \in A,\ \ y \in B(x, r)$.

On peut donner la définition de la densité d'une partie.

Définition 1.46
On dit qu'une partie A est dense dans E quand $\overline{A} = E$, c'est-à-dire qu'on peut trouver des éléments de A aussi proches de n'importe quel point.

Exemple 1.47

- Dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses (*cf.* cours de première année).

- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (démonstration ultérieure).

1.4 Limites de fonctions

Dans cette section, E et F sont deux espaces vectoriels normés par les normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.

1.4.1 Définition

Définition 1.48
Soient f une fonction de E dans F, D son ensemble de définition, $a \in \overline{D}$ et $\ell \in F$.

On dit que f a pour limite ℓ en a quand

$$\forall \varepsilon > 0, \;\; \exists \eta > 0, \;\; \forall x \in D, \;\; \|x - a\|_E < \eta \implies \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon.$$

Remarque 1.49
On peut remplacer les inégalités strictes sur les normes par des inégalités larges.

On peut réécrire la définition à l'aide de boules ouvertes (ou fermées) :

$$\forall \varepsilon > 0, \;\; \exists \eta > 0, \;\; \forall x \in D \cap B(a, \eta), \;\; f(x) \in B(\ell, \varepsilon).$$

Si E et F sont de dimension finie, cette définition ne dépend pas du choix des normes.

1.4.2 Caractérisation séquentielle de la limite

Théorème 1.50
Soient f une fonction de E dans F, D son ensemble de défintion, $a \in \overline{D}$ et $\ell \in F$.

f a pour limite ℓ en a ssi pour toute suite u à termes dans D convergeant vers a, la suite $f \circ u = (f(u_n))$ converge vers ℓ.

En pratique, on utilise beaucoup plus souvent le sens direct de l'équivalence précédente.

1.4.3 Propriétés usuelles

Proposition 1.51 (Unicité de la limite)
Soient f une fonction de E dans F, D son ensemble de définition, $a \in \overline{D}$ et $\ell \in F$.

Si f a pour limite ℓ en a, alors elle ne peut avoir d'autre limite que ℓ en a.

On peut donc noter classiquement $\ell = \lim_a f = \lim_{x \longrightarrow a} f(x)$ ou $f(x) \xrightarrow[x \longrightarrow a]{} \ell$.

Proposition 1.52
Si f a pour limite ℓ en a, alors elle est bornée au voisinage de a.

Théorème 1.53 (Opérations sur les limites)
Soient f et g deux fonctions de E dans F, définies sur la même partie D et ayant respectivement pour limites ℓ et m deux éléments de F en $a \in \overline{D}$.

Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, la fonction $\lambda f + \mu g$ a pour limite $\lambda\ell + \mu m$ en a.

Soient α une fonction de E dans $\mathbb{K}$ et f une fonction définie de E dans F, définies sur la même partie D et ayant respectivement pour limites $\beta \in \mathbb{K}$ et $\ell \in F$ en $a \in \overline{D}$.

Alors αf a pour limite $\beta\ell$ en a.

Proposition 1.54
Une fonction $f = (g, h)$ à valeurs dans un produit d'espaces vectoriels normés a une limite ssi g et h ont chacune une limite.

Dans ce cas, $\lim\limits_a f = \left(\lim\limits_a g, \lim\limits_a h\right)$.

Ce résultat se généralise sans difficulté par récurrence à un nombre quelconque (fini) d'espaces vectoriels normés.

1.4.4 Cas particulier de la dimension finie

Théorème 1.55
On suppose que F est de dimension finie. Soit $\mathscr{B}$ une base de F.

Soit f une fonction de E dans F, D son ensemble de définition, $a \in \overline{D}$ et $\ell \in F$.

La fonction f a pour limite ℓ en a ssi pour toute forme coordonnée d relative à $\mathscr{B}$, la fonction $d \circ f$ a pour limite $d(\ell)$ en a.

Autrement dit, une fonction a une limite en a ssi ses fonctions-coordonnées dans n'importe quelle base ont chacune une limite en a.

Dans ce cas, la limite de la fonction f en a est le vecteur ℓ tel que pour tout forme coordonnée d, $d(\ell) = \lim\limits_{x \longrightarrow a} d(f(x))$.

1.4.5 Composition des limites

G désigne un troisième espace vectoriel normé.

Théorème 1.56
Soient f une fonction de E dans F et D_f son ensemble de définition. Soient g une fonction de F dans G et D_g son ensemble de définition. On suppose que $f\left(D_f\right) \subseteq D_g$ (condition qui permet de définir la composée $g \circ f$ sur D_f).

Soient $a \in \overline{D_f}$, $b \in \overline{D_g}$ et $\ell \in G$.

Si f a pour limite b en a et g a pour limite ℓ en b, alors $g \circ f$ a pour limite ℓ en a.

Autrement dit, si $\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \longrightarrow a]{} b \\ g(y) \xrightarrow[y \longrightarrow b]{} \ell \end{cases}$ *alors* $g \circ f(x) \xrightarrow[x \longrightarrow a]{} \ell$.

1.4.6 Extensions des définitions

D'abord les limites infinies en un point dans le cas où l'espace d'arrivée est $\mathbb{R}$.

Définition 1.57
Soient f une fonction de E dans $\mathbb{R}$, D son ensemble de définition et $a \in \overline{D}$.

On dit que f a pour limite $+\infty$ en a quand

$$\forall M > 0,\ \ \exists \eta > 0,\ \ \forall x \in D,\ \ \|x - a\|_E \leqslant \eta \implies f(x) \geqslant M.$$

On dit que f a pour limite $-\infty$ en a quand

$$\forall M < 0,\ \ \exists \eta > 0,\ \ \forall x \in D,\ \ \|x - a\|_E \leqslant \eta \implies f(x) \leqslant M.$$

Puis les limites en « l'infini ».

Définition 1.58
Soient f une application de E dans F et $\ell \in F$.

On dit que f a pour limite ℓ quand $\|x\|$ tend vers l'infini quand

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists B > 0,\ \ \forall x \in E,\ \ \|x\|_E \geqslant B \implies \|f(x) - \ell\|_F \leqslant \varepsilon.$$

Dans le cas où $F = \mathbb{R}$, on dit que $f(x)$ a pour limite $+\infty$ quand $\|x\|$ tend vers l'infini quand

$$\forall M > 0,\ \ \exists B > 0,\ \ \forall x \in E,\ \ \|x\|_E \geqslant B \implies f(x) \geqslant M.$$

(Définition semblable pour la limite $-\infty$).

Enfin, dans le cas où l'espace de départ est $\mathbb{R}$, on peut parler de limite en l'infini au sens habituel.

Définition 1.59
Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ dans F, définie sur un ouvert $]? \,;+\infty[$ et $\ell \in F$.

On dit que $f(x)$ a pour limite ℓ quand x tend vers $+\infty$ quand

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists B > 0, \quad \forall x \geqslant B, \quad \|f(x) - \ell\| \leqslant \varepsilon.$$

(Définition semblable pour la limite x tend vers $-\infty$).

1.5 Fonctions continues

Dans cette section, E et F sont des espaces vectoriels normés par les normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.

1.5.1 Continuité en un point

Proposition 1.60
Soient f une fonction de E dans F, D son ensemble de définition, $a \in \overline{D}$ et $\ell \in F$.

Si f a pour limite ℓ en a et si $a \in D$, alors $\ell = f(a)$.

Dans ce cas, on dit que la fonction f est continue en a.

Définition 1.61
Soient f une fonction de E dans F, D son ensemble de définition et $a \in D$.

On dit que f est continue en a quand f a pour limite $f(a)$ en a.

On déduit de cette définition et des théorèmes précédents

- la caractérisation séquentielle de la continuité en un point ;
- le fait qu'une fonction continue en un point est bornée au voisinage de ce point ;
- les théorèmes d'opérations et de compositions des fonctions continues en un point ;
- l'équivalence entre la continuité d'une fonction et celle de ses fonctions-coordonnées dans une certaine base de F dans le cas où F est de dimension finie.

1.5.2 Continuité sur une partie

Définition 1.62
Soient f une fonction de E dans F, D son ensemble de définition et $A \subseteq D$.

On dit que f est continue sur A quand f est continue en tout point de A.

On déduit de cette définition et des théorèmes précédents

- les théorèmes d'opérations et de compositions des fonctions continues sur une partie ;
- l'équivalence entre la continuité d'une fonction et celle de ses fonctions-coordonnées dans une certaine base de F dans le cas où F est de dimension finie.

Proposition 1.63
Soient f et g deux fonctions de E dans F définies sur D et $A \subseteq D$.

Si A est dense dans D, f et g sont continues sur D et $f = g$ sur A, alors $f = g$ sur D.

1.5.3 Cas particulier de la dimension finie

On suppose que E et F sont de dimensions finies.

Dans une base donnée, les formes coordonnées relatives à cette base sont en particulier des applications continues.

Donc toute fonction f de E dans F dont les fonctions-coordonnées $(f_1, \ldots, f_n)$ dans une base de F sont définies polynomialement à partir des formes coordonnées dans une base de E est continue.

Exemple 1.64

- La fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y) = \left(x^2 + y^2, xy - (1 + x)^3\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- Les applications trace et déterminant définies sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont continues.

Exercice 1.65
Montrez que l'application $A \longmapsto A^2$ est continue de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans lui-même.

Exercice 1.66
En admettant (momentanément) que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert, montrez que l'application $A \longmapsto A^{-1}$ est continue de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dans lui-même.

1.5.4 Fonctions lipschitziennes

Définition 1.67
Soient f une application de E dans F, A une partie de E et $K \in \mathbb{R}_+$.

On dit que f est K-lipschitzienne sur A (ou lipschitzienne de rapport K) quand

$$\forall (x, y) \in A^2, \ \ \|f(y) - f(x)\|_F \leqslant K \|y - x\|_E .$$

On dit que f est lipschitzienne sur A quand il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que f soit K-lipschitzienne sur A.

Remarque 1.68
Si f est K-lipschitzienne sur A, alors le rapport K n'est pas unique, puisque pour tout $L \geqslant K$, on a encore f L-lipschitzienne sur A.

Proposition 1.69
Toute fonction lipschitzienne est continue.

Mais la réciproque est fausse (contre-exemple : la fonction $\sqrt{\cdot}$ sur $[0\,;+\infty[$).

Un exemple fondamental : la fonction $x \longmapsto d(x, A)$.

Définition 1.70
Soit A une partie de E.

Pour $x \in E$, on appelle distance de x à A le réel $\inf\limits_{a \in A} d(x, a)$.

Proposition 1.71
Pour toute partie A de E, la fonction $x \longmapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne.

L'adhérence de A est l'ensemble des points à distance nulle de A, i.e. tels que $d(x, A) = 0$.

1.5.5 Continuité des applications linéaires et n-linéaires

Proposition 1.72
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- f *est continue en* 0 *;*
- f *est continue en un point* x *;*
- f *est continue sur* E *;*
- f *est lipschitzienne sur* E *;*
- *il existe* $K \geqslant 0$ *tel que pour tout* $x \in E, \quad \|f(x)\|_F \leqslant K \|x\|_E$ *;*
- f *est bornée sur la boule-unité ;*
- f *est bornée sur une boule.*

Exercice 1.73
On pose $E = \mathscr{C}^0([0\,;1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie.

L'application $f \longmapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ est-elle continue sur E ?

Exercice 1.74
E désigne le même espace et on pose $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

Montrez que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur E.

L'application $f \longmapsto f(1)$ est-elle continue sur E ?

Définition 1.75
On note $\mathscr{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F.

Proposition 1.76
$\mathscr{L}_c(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E, F)$, en général distinct de $\mathscr{L}(E, F)$.

Cas particulier en dimension finie.

Théorème 1.77
On suppose que E est de dimension finie.

Toute application linéaire de E dans F est lipschitzienne sur E, donc continue.

Autrement dit, si E est de dimension finie, alors $\mathscr{L}_c(E, F) = \mathscr{L}(E, F)$.

Remarque 1.78
L'hypothèse de dimension finie de E est indispensable. Dans le cas contraire, c'est faux en général.

Le résultat précédent s'étend aux applications multilinéaires.

Théorème 1.79
Soient $E_1, \ldots, E_n$ des espaces vectoriels normés de dimensions finies et $f : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ une application n-linéaire.

Il existe alors une constante $K \geqslant 0$ telle que

$$\textit{pour tout } (x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n, \ \ \|f(x_1, \ldots, x_n)\| \leqslant K \|x_1\|_{E_1} \ldots \|x_n\|_{E_n}.$$

Corollaire 1.80
Soient $E_1, \ldots, E_n$ des espaces vectoriels normés de dimensions finies.

Toute application $f : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ qui est n-linéaire est continue sur $E_1 \times \cdots \times E_n$.

Exemple 1.81
- Le produit matriciel de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{pq}(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{M}_{nq}(\mathbb{K})$ est bilinéaire, donc continu.
- Un produit scalaire dans un espace euclidien est bilinéaire, donc continu.
- Le déterminant dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est n-linéaire par rapport aux colonnes, donc il est continu.

1.5.6 Norme subordonnée

On définit sur l'espace vectoriel $\mathscr{L}_c(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F la notion de norme subordonnée (relative aux deux normes sur E et F) ou norme triple.

Définition 1.82
Soit $f \in \mathscr{L}_c(E, F)$.

On pose $|||f||| = \sup\limits_{x \in B(0,1)} \|f(x)\|$, appelée la norme subordonnée de f.

Proposition 1.83
Soit $f \in \mathscr{L}_c(E, F)$.

Alors $|||f|||$ *est*

- *égal à* $\sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|}$, *mais aussi à* $\sup\limits_{x \in S(0,1)} \|f(x)\|$ *;*
- *le plus petit réel positif* M *tel que pour tout* $x \in E$, $\|f(x)\| \leqslant M\|x\|$.

Proposition 1.84
Les normes subordonnées sont des normes sur les espaces $\mathscr{L}_c(E, F)$.

Elles sont dites sous-multiplicatives : pour toutes applications linéaires continues et composables f *et* g,

$$|||f \circ g||| \leqslant |||f||| \times |||g|||.$$

Comme en dimension finie, on peut représenter par choix de bases les applications linéaires par des matrices, on définit de manière semblable la notion de norme sous-multiplicative de matrices (relativement aux normes) ou norme triple.

Définition 1.85
Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On choisit deux normes sur $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ (espaces identifiés à ceux des matrices-colonnes).

Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$, on pose $|||A||| = \sup\limits_{\|X\|=1} \|AX\|$.

Proposition 1.86
Des normes étant choisies sur les espaces $\mathbb{K}^p$ *et* $\mathbb{K}^n$, *les normes subordonnées sont des normes sur tous les espaces* $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

Elles sont dites sous-multiplicatives : pour toutes matrices multipliables A *et* B,

$$|||AB||| \leqslant |||A||| \times |||B|||.$$

Remarque 1.87
Dans le cas où un espace vectoriel normé E est aussi une $\mathbb{K}$-algèbre, on dit qu'il est une algèbre normée quand la norme vérifie en plus la propriété de sous-multiplicativité : $\forall (x, y) \in E^2$, $\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$.

1.6 Topologie d'un espace vectoriel normé

Dans cette section, E est un espace vectoriel normé.

1.6.1 Intérieur d'une partie, voisinage d'un point

Définition 1.88
Soient A une partie de E et $a \in A$.

On dit que a est un point intérieur à A quand on peut trouver un rayon $r > 0$ tel que $B(a, r)$ soit incluse dans A. On dit aussi dans ce cas que A est un voisinage de a.

L'intérieur de A est l'ensemble de ses points intérieurs, noté $\mathring{A}$.

On a :

$$a \in \mathring{A} \iff \exists r > 0, \ \ B(a, r) \subseteq A.$$

Exercice 1.89
Dans $\mathbb{R}$, quels sont les intérieurs des parties suivantes : $[0\,;1]$, $[0\,;+\infty[$, $\mathbb{Q}$?

Exercice 1.90
Quel est l'intérieur d'une boule de centre a et de rayon $r > 0$?

Remarque 1.91
Cette notion dépend a prori de la norme utilisée. En dimension finie, ce n'est pas le cas : l'intérieur d'une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie ne dépend pas du choix de la norme (pourquoi ?).

Proposition 1.92
Soient $u \in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$.

La suite u converge vers ℓ ssi tout voisinage de ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

1.6.2 Parties ouvertes

Définition 1.93
On dit qu'une partie A de E est ouverte (ou est un ouvert) quand à tout point de $a \in A$, on peut associer un rayon $r > 0$ tel que la boule de centre a et de rayon r soit incluse dans A :

$$\forall a \in A, \ \ \exists r > 0, \ \ B(a, r) \subseteq A.$$

Autrement dit, A est ouverte quand tout point de A est intérieur à A : $A = \mathring{A}$, ou, autrement dit, quand A est un voisinage de chacun de ses points.

Proposition 1.94
L'ensemble vide et E sont des parties ouvertes. Toute boule ouverte est une partie ouverte. Tout produit (fini) de parties ouvertes est ouvert.

La topologie de E est l'ensemble de tous les ouverts de E.

Remarque 1.95
La topologie dépend a priori de la norme utilisée. En dimension finie, ce n'est pas le cas : dans un espace vectoriel normé de dimension finie, le fait d'être un ouvert ne dépend pas du choix de la norme.

1.6.3 Parties fermées

On rappelle la notion de point adhérent à une partie.

Définition 1.96
Soient A une partie de E et $x \in E$.

On dit que x est un point adhérent à A quand il existe une suite $u \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x, ou, ce qui revient au même, quand toute boule centrée en x rencontre A, ou encore quand $d(x, A) = 0$.

L'adhérence de A est l'ensemble de ses points adhérents, noté $\overline{A}$.

On a montré

Définition 1.97
On dit qu'une partie A de E est fermée (ou est un fermé) quand tout point adhérent à A est dans A, autrement dit quand la propriété suivante est vraie :

si une suite quelconque à termes dans A converge vers un point x de E, alors $x \in A$.

Ou encore : A est fermée quand $A = \overline{A}$.

Proposition 1.98
L'ensemble vide et E sont des parties fermées. Toute boule fermée est une partie fermée. Tout produit (fini) de parties fermées est fermé.

On note le lien avec les parties ouvertes.

Proposition 1.99
Soit A une partie de E.

Alors A est une partie ouverte ssi son complémentaire est une partie fermée.

Encore une fois, le fait d'être un fermé en dimension finie ne dépend pas de la norme.

Proposition 1.100

- *Toute réunion de parties ouvertes est ouverte. Toute intersection finie de parties ouvertes est ouverte.*

- *Toute intersection de parties fermées est fermée. Toute réunion finie de parties fermées est fermée.*

Exercice 1.101
Montrez que pour tout $a \in E$, $E \setminus \{a\}$ est un ouvert. Déduisez-en que si A est une partie finie de E, alors $E \setminus A$ est un ouvert.

Exercice 1.102
Quels sont les sous-espaces vectoriels de E qui sont ouverts ?

Exercice 1.103
Montrez que $F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \geqslant 0 \text{ et } xy = 1\right\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1.104
On note S l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que tous les coefficients soient positifs et sur chaque ligne la somme des coefficients vaut 1.

Montrez que S est un fermé.

NB : S est l'ensemble des matrices dites stochastiques.

Remarque 1.105
A priori, une partie de E n'est ni ouverte ni fermée : par exemple, dans $\mathbb{R}$, l'ensemble $]0\,;1]$ n'est ni ouvert ni fermé.

Donc ne pas confondre « complémentaire » et « contraire » : on peut dire qu'une partie est un fermé quand son complémentaire est un ouvert, mais pas que le contraire d'être un ouvert c'est être un fermé.

Remarque 1.106
Il est souvent assez facile de montrer qu'une partie est un fermé grâce à la caractérisation séquentielle. Donc pour montrer qu'une partie est un ouvert, on montre souvent de cette façon que son complémentaire est un fermé.

Les fermés sont souvent définis par des égalités ou des inégalités larges. Par complémentaire, les ouverts sont souvent définis par des inégalités strictes ou des différences.

1.6.4 Ouverts ou fermés relatifs à une partie

Les définitions précédentes parlent d'ouverts et de fermés de E. On peut définir ces notions relativement à une partie.

Définition 1.107
Soient A une partie de E et U un sous-ensemble de A.

On dit que U est un ouvert de A quand il existe un ouvert V de E tel que $U = A \cap V$.

On dit que U est un fermé de A quand il existe un fermé V de E tel que $U = A \cap V$.

On remarque que les fermés de A sont les complémentaires dans A des ouverts de A. On peut caractériser de même une partie U fermée de A par l'égalité entre U et l'ensemble de ses points adhérents dans A.

1.6.5 Image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé par une fonction continue

Rappel 1.108
Si f est une fonction de E dans F définie sur D_f et $B \subseteq F$, l'image réciproque de B par f est

$$f^{-1}(B) = \left\{x \in D_f \;\middle|\; f(x) \in B\right\}.$$

Théorème 1.109
Soit f une fonction de E dans F définie sur D.

Alors on a équivalence entre les propositions suivantes :

- *f est continue sur D ;*
- *pour tout fermé B de F, son image réciproque $f^{-1}(B)$ est un fermé de D ;*
- *pour tout ouvert B de F, son image réciproque $f^{-1}(B)$ est un ouvert de D.*

Ceci est valable en particulier quand f est une application continue de E dans F, auquel cas on peut se passer des notions d'ouvert ou fermé relatif.

Exemple 1.110 (Cas particuliers fondamentaux)
Si f est continue sur E et à valeurs réelles, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, les ensembles suivants sont des fermés de E :

$$\{x \in E \mid f(x) \geqslant a\} \qquad \{x \in E \mid f(x) \leqslant a\} \qquad \{x \in E \mid f(x) = a\}.$$

Exemple 1.111

- Les courbes de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont des fermés de $\mathbb{R}^2$.
- L'ensemble des matrices de trace nulle est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Par passage au complémentaire, si f est continue sur E et à valeurs réelles, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, les ensembles suivants sont des ouverts de E :

$$\{x \in E \mid f(x) < a\} \qquad \{x \in E \mid f(x) > a\} \qquad \{x \in E \mid f(x) \neq a\}.$$

Exemple 1.112

- L'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x > 0$ et $y > x$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$: si une matrice A est inversible, alors toutes les matrices proches de A le sont aussi.

1.6.6 Frontière d'une partie

Définition 1.113
Soit A une partie de E. On appelle frontière de A l'ensemble $\overline{A} \setminus \mathring{A}$.

Exemple 1.114

- Si B est une boule, alors son intérieur est la boule ouverte de même centre et de même rayon, son adhérence est la boule fermée et sa frontière est la sphère.
- L'ensemble des rationnels est d'intérieur vide, d'adhérence égale à $\mathbb{R}$ et donc de frontière $\mathbb{R}$.

1.7 Compacité

Dans cette section, E est un espace vectoriel normé.

1.7.1 Valeurs d'adhérence d'une suite

Définition 1.115
Soient $u = (u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $a \in E$.

On dit que a est une valeur d'adhérence de la suite u quand il existe une extractrice φ telle que la suite extraite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ converge vers a.

Une suite peut avoir une ou plusieurs valeurs d'adhérence ou ne pas avoir de valeur d'adhérence :

- ▹ la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de valeur d'adhérence ;
- ▹ toute suite convergente possède une seule valeur d'adhérence : sa limite ;
- ▹ la suite u définie par $u_{2n} = \dfrac{1}{n+1}$ et $u_{2n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ possède deux valeurs d'adhérence : 0 et 1 ;
- ▹ il est possible de numéroter les rationnels, autrement dit de créer une suite u qui prend exactement toutes les valeurs rationnelles dans $\mathbb{R}$: cette suite a pour valeurs d'adhérence tous les réels.

On peut donner une caractérisation équivalente sans passer par la notion de suite extraite.

Proposition 1.116
Soient $u = (u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $a \in E$.

Alors a est une valeur d'adhérence de u ssi pour tout $\varepsilon > 0$, $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in B(a, \varepsilon)\}$ est infini.

Ceci peut encore être réécrit de la façon suivante.

Proposition 1.117
Soient $u = (u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $a \in E$.

Alors a est une valeur d'adhérence de u ssi $\forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant N,\ \|u_n - a\| < \varepsilon$.

Exercice 1.118
Soit $u = (u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Montrez que l'ensemble V des valeurs d'adhérence de la suite u est un fermé de E en utilisant les ensembles $U_p = \{u_n \mid n \geqslant p\}$.

1.7.2 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 1.119
Si E est de dimension finie, alors toute suite bornée de E possède une valeur d'adhérence.

Remarque 1.120
Ce théorème est faux en dimension infinie donc il faut bien mettre en valeur la dimension finie.

On peut ajouter une précision au théorème précédent.

Proposition 1.121
Si E est de dimension finie, alors toute suite bornée de E qui ne possède qu'une seule valeur d'adhérence est convergente vers cette valeur d'adhérence.

1.7.3 Parties compactes

Définition 1.122
Soit A une partie de E.

On dit que A est une partie compacte de E (ou un compact de E) quand toute suite à termes dans A possède une valeur d'adhérence dans A (propriété dite de Bolzano-Weierstrass).

Exemple 1.123

- Tout segment $[a\ ;\ b]$ de $\mathbb{R}$ est un compact et ce sont les seuls intervalles compacts. $[0\ ;\ 1] \cup [2\ ;\ 3]$ est compact.
- Dans $\mathbb{K}^n$, tout pavé $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} [a_i\ ;\ b_i]$ est un compact. Plus généralement, un produit (fini) de compacts est compact.

Les parties compactes sont donc celles dont on peut extraire des sous-suites convergentes. Un résultat précédent se généralise alors.

Proposition 1.124
Si A est une partie compacte, alors toute suite de A qui ne possède qu'une seule valeur d'adhérence est convergente vers cette valeur d'adhérence.

Un compact étant connu, il est facile d'en construire d'autres.

Proposition 1.125
Si A est une partie compacte de E, alors toute partie B fermée dans A est aussi compacte.

Reconnaître si une partie est compacte n'est pas toujours facile. On dispose d'une condition nécessaire, qui est suffisante en dimension finie.

Proposition 1.126
Soit A une partie de E.

Si A est compacte, alors A est une partie fermée et bornée.

La réciproque est hélas fausse en général. Néanmoins, en dimension finie, elle est vraie.

Proposition 1.127
Si E est de dimension finie, alors une partie de E est compacte ssi elle est fermée et bornée.

Remarque 1.128
En fait, il n'y a qu'en dimension finie que ce résultat est vrai. Un théorème de Riesz affirme que la boule-unité fermée d'un espace vectoriel normé est compacte ssi l'espace est de dimension finie, ce qui revient à dire que l'équivalence précédente n'est valable que dans un espace de dimension finie.

En dimension infinie, il se passe des choses vraiment étranges : les compacts sont des parties très petites et plates, par exemple, un compact est forcément d'intérieur vide. Heureusement, il est plus courant de travailler à notre niveau en dimension finie.

Exemple 1.129
- L'ensemble des matrices stochastiques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un compact.

- La boule-unité fermée de $E = \mathscr{C}^0([0\,;\,1], \mathbb{R})$ pour la norme infinie n'est pas compacte, car la suite des fonctions $(x \longmapsto x^n)$ a pour seule valeur d'adhérence possible la fonction $x \longmapsto 0$ si $x \neq 1$ et $1 \longmapsto 1$, qui n'est même pas dans l'espace E.

Une application importante de la notion de compacité est le théorème suivant.

Théorème 1.130
Tout sous-espace vectoriel de dimension finie de E est fermé.

En dimension infinie, là encore il peut se passer des choses étranges : un sous-espace de E de dimension infinie peut être dense (et donc non-fermé s'il est différent de E).

1.7.4 Théorème des bornes atteintes

Le principal intérêt des compacts est de pouvoir généraliser un théorème de première année.

Théorème 1.131
Soient E, F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E et $f : A \longrightarrow F$.

Si f est continue sur A et A est compacte, alors $f(A)$ est compacte.

On résume en disant que l'image continue d'un compact est un compact.

En particulier, toute fonction continue sur un compact est donc bornée. Dans le cas des fonctions numériques (*i.e.* à valeurs dans $\mathbb{R}$), on peut même être plus précis.

Théorème 1.132
Toute fonction continue sur un compact et à valeurs réelles est bornée et atteint ses bornes.

Autrement dit, si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur A et A est une partie compacte de E, alors il existe $(a, b) \in A^2$ tel que pour tout $x \in A$, $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$, ce qui revient à dire que f possède un minimum et un maximum sur A.

Remarque 1.133
Ce théorème est à rapprocher du théorème vu en première année : toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Néanmoins, le théorème de l'an dernier donnait un résultat un peu plus précis que celui de cette année car il donnait aussi l'image du segment, en précisant qu'il s'agissait aussi d'un segment, car il faisait aussi intervenir le théorème des valeurs intermédiaires.

Ici, dans la version proposée cette année, on ne peut rien dire de plus.

Exercice 1.134
Un exercice classique, à savoir refaire ! C'est la base de nombreux exercices.

Soient E de dimension finie et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que $f(x)$ tende vers $+\infty$ quand $\|x\|$ tend vers $+\infty$. Montrez que f possède un minimum.

Exemple : dans le plan euclidien géométrique, on choisit trois points A, B, C ; montrez alors qu'il existe un point M du plan tel que la somme $AM + BM + CM$ soit minimale.

Exercice 1.135
Soit $f : (x, y) \longmapsto xy\sqrt{1 - x^2 - 2y^2}$.

Justifiez que l'ensemble de définition D de f est un compact de $\mathbb{R}^2$.

Déterminez les points critiques de f dans l'ouvert $\mathring{D}$, puis les maxima et minima de f.

On retrouve aussi le théorème de Heine en conséquence de la compacité.

Définition 1.136
Soient E, F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E et $f : A \longrightarrow F$.

On dit que f est uniformément continue sur A quand

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists \eta > 0,\ \ \forall (x, y) \in A^2,\ \ \|x - y\| \leqslant \eta \implies \|f(x) - f(y)\| \leqslant \varepsilon.$$

Théorème 1.137
Soient E, F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E et $f : A \longrightarrow F$.

Si f est continue sur A et A est compacte, alors f est uniformément continue sur A.

1.8 Connexité par arcs

Dans cette section, E est un espace vectoriel normé.

1.8.1 Chemin

Définition 1.138
Soient A une partie de E et $a, b \in A$.

On appelle chemin (ou arc) dans A de a à b toute application continue $\varphi : [0\,;1] \longrightarrow A$ telle que $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = b$. Le support du chemin est l'image de φ.

On peut définir une relation d'équivalence sur une partie de E en mettant en relation les points joignables par un chemin.

Définition 1.139
Soient A une partie de E et $a, b \in A$.

On pose $a\mathscr{R}b$ quand il existe un chemin dans A de a à b.

Proposition 1.140
Avec les notations précédentes, la relation $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur A.

1.8.2 Parties connexes par arcs

Définition 1.141
Soit A une partie de E.

On dit que A est connexe par arcs quand tout couple de points $(a, b) \in A^2$ est joignable par un chemin.

Exemple 1.142

- ▹ Les parties convexes de E sont connexes par arcs.
- ▹ Les parties étoilées de E sont connexes par arcs.
- ▹ $\mathbb{C}^*$ et $\mathbb{C} \setminus D$ où D est la demi-droite des réels négatifs sont connexes par arcs.

Les classes d'équivalences de la relation notée $\mathscr{R}$ précédemment s'appellent les composantes connexes par arcs de A : ce sont par définition des parties connexes par arcs.

Proposition 1.143
Les seules parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Remarque 1.144
Il existe une notion plus générale, celle de partie connexe : une partie A de E est dite connexe quand les seules parties de A à la fois ouvertes et fermées sont $\varnothing$ et A. Elle est plus délicate à aborder et est hors-programme, c'est pourquoi on s'en tient à la notion de connexité par arcs (toute partie connexe par arcs est connexe).

1.8.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Là encore, la notion de connexité par arcs permet de généraliser des résultats de première année.

Théorème 1.145
Soient E, F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E et $f : A \longrightarrow F$.

Si f est continue par A et A est connexe par arcs, alors $f(A)$ est connexe par arcs.

On résume en disant que l'image continue d'un connexe par arcs est un connexe par arcs.

Dans le cas des fonctions numériques (*i.e.* à valeurs dans $\mathbb{R}$), on peut même être plus précis.

Théorème 1.146
Toute fonction continue sur un connexe par arcs et à valeurs réelles vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

Autrement dit, si $f : A \longrightarrow F$ *est continue sur* A *une partie connexe par arcs de* $\boldsymbol{E}$*, alors* $f(A)$ *est un intervalle.*

Ou encore :

$$\forall (y,z) \in f(A)^2, \ \forall w \in [yz], \ \exists t \in A, \ f(t) = w.$$

Chapitre 2

Séries numériques et vectorielles : révisions et compléments

Sommaire

Dans ce chapitre, E désigne un espace vectoriel normé (qui peut être $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $\|\cdot\|$ la norme associée (qui est dans ces cas la valeur absolue ou le module).

2.1 Rappels

2.1.1 Définitions et notations

Définition 2.1 (Série vectorielle)
Soit u une suite de E.

On associe à cette suite la suite s définie de la façon suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

La suite s est appelée série de terme général u_n et notée $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ ou $\sum u$.

Chaque nombre s_n est appelé somme partielle d'indice n de la série.

L'adjectif « numérique » associé au mot « série » signifie que les termes généraux de la série sont en fait des nombres réels ou complexes.

2.1.2 Convergence d'une série

Définition 2.2
Soit u une suite de E.

On dit que la série $\sum u$ converge ssi la suite des sommes partielles $(s_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$ converge.

Dans ce cas, si $\ell = \lim_{n\longrightarrow+\infty} s_n$, alors ℓ est appelée somme de la série $\sum u$ et on note $\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

On appelle aussi reste partiel d'indice n de la série le nombre $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$, de sorte que $r_n + s_n = \ell$.

La suite des restes partiels converge donc vers 0.

Dans le cas contraire, on dit que la série $\sum u$ diverge.

Exemple 2.3

- Soit $x \in \mathbb{C}$. La série $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ converge ssi $|x| < 1$ et, dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Cette série est appelée série géométrique de raison x.
- Les séries de Riemann : $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z$.

On peut bien sûr généraliser aux séries quelques théorèmes d'opérations.

Proposition 2.4
Soient u, v deux suites de E et λ un scalaire.

Si les séries $\sum u$ et $\sum v$ convergent, alors la série $\sum (u + \lambda v)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Ceci prouve aussi que l'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel.

Remarque 2.5
La somme d'une série divergente et d'une série convergente est une série divergente.

En revanche, il n'y a rien à dire a priori à propos de la somme de deux séries divergentes.

2.1.3 Lien entre convergence de suites et convergence de séries

Proposition 2.6
Soit u une suite de E.

Si la série $\sum u$ converge, alors la suite u converge vers 0.

Remarque 2.7

- La réciproque est fausse.
- Par contraposition, si une suite u ne tend pas vers 0, alors la série associée diverge : on dit que la série $\sum u$ diverge grossièrement.

Exemple 2.8
On appelle série harmonique la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$.

Cette série diverge, pourtant son terme général tend vers 0.

Définition 2.9
Soit u une suite de E. On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$.

La série $\sum v$ est appelée la série télescopique (ou série domino, ou série différence) associée à u.

Proposition 2.10
Une suite converge ssi sa série télescopique associée converge.

Exercice 2.11

On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$. Montrez que la suite u converge.

2.2 Séries réelles à termes positifs

Dans cette section, on s'intéresse uniquement aux séries dont le terme général est un réel positif.

On appelle un premier théorème issu du cours de première année.

Théorème 2.12
Soient u et v deux suites réelles positives.

- *Si $0 \leqslant u \leqslant v$ et si la série $\sum v$ converge, alors la série $\sum u$ converge.*
- *Si $0 \leqslant u \leqslant v$ et si la série $\sum u$ diverge, alors la série $\sum v$ diverge.*
- *Si $u \sim v$, alors les séries $\sum u$ et $\sum v$ sont de même nature.*

Une application classique : la règle de d'Alembert.

Proposition 2.13
Soit u une suite réelle strictement positive telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \ell$. Alors

- *si $\ell < 1$, la série $\sum u$ converge ;*
- *si $\ell > 1$, la série $\sum u$ diverge ;*
- *si $\ell = 1$, on ne peut rien conclure.*

Exercice 2.14
Soient $x, y > 0$. Représentez graphiquement l'ensemble des couples (x, y) tels que la série $\sum \dfrac{x^n}{y^n + n^x}$ converge.

Exercice 2.15
Montrez que la suite (u_n) définie par $u_0 \in [0\ ; 1]$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + u_n^2\right)$ converge vers 0 et donnez la nature de la série $\sum u_n$.

On donne quelques versions plus élaborées du théorème de comparaison.

2.2.1 Théorème de Cesàro

Théorème 2.16
Soit u une suite numérique qui converge vers ℓ. Alors $\dfrac{u_0 + \cdots + u_n}{n} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \ell$.

Dans le cas où $\ell \neq 0$, la série $\sum u$ diverge grossièrement et $\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} n\ell$.

Dans le cas où $\ell = 0$, on peut juste dire $\sum_{k=0}^{n} u_k = o(n)$.

Exercice 2.17
Soit u la suite définie par récurrence par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{u_n + 1}{u_n + 2}$.

Étudiez la convergence ou divergence de la suite u, puis donnez un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$.

2.2.2 Théorème de comparaison par domination de séries à termes positifs

Dans le cas convergent d'abord, les restes partiels suivent la même relation de comparaison.

Théorème 2.18
Soient u, v deux suites réelles positives.

Si $u = \mathcal{O}(v)$ et la série $\sum v$ converge, alors la série $\sum u$ converge. De plus, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \mathcal{O}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.

Si $u = o(v)$ et la série $\sum v$ converge, alors la série $\sum u$ converge. De plus, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.

Dans le cas divergent ensuite, les sommes partielles suivent aussi la même relation de comparaison.

Théorème 2.19
Soient u, v deux suites réelles positives.

Si $u = \mathcal{O}(v)$ et la série $\sum u$ diverge, alors la série $\sum v$ diverge. De plus, $\sum_{k=0}^{n} u_k = \mathcal{O}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.

Si $u = o(v)$ et la série $\sum u$ diverge, alors la série $\sum v$ diverge. De plus, $\sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.

2.2.3 Théorème de comparaison par équivalence de séries à termes positifs

Théorème 2.20
Soient u, v deux suites réelles positives.

Si $u \sim v$, alors les séries $\sum u$ et $\sum v$ sont de même nature ; l'une converge ssi l'autre converge.

De plus,

- ▹ *si les séries convergent, alors les restes partiels sont équivalents :* $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$;
- ▹ *si les séries divergent, alors les sommes partielles divergent vers $+\infty$ et sont équivalentes :* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k$.

Exercice 2.21
Soit $a > 0$. On pose $u_n = \sin \dfrac{a^n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Selon la valeur de a, déterminez la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} u_n$.

Montrez que si $a = 1$, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \sim \ln n$ et si $a < 1$, $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = o\left(a^n\right)$.

2.2.4 Théorème de comparaison série - intégrale

Proposition 2.22
Soit f une fonction continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Alors la série de terme général $f(n)$ et la suite de terme général $\displaystyle\int_0^n f$ sont de même nature.

Méthode 2.23 (À retenir)
La technique d'encadrement des sommes partielles d'une série $\sum f(n)$ (ou des restes partiels) par des intégrales quand f est continue, positive et monotone.

Exemple 2.24

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \ln n$ (à connaître).
- Si $\alpha > 1$, un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ quand $n \longrightarrow +\infty$ est $\displaystyle\frac{1}{(\alpha-1)\, n^{\alpha-1}}$.

Exercice 2.25
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln k}{k^2}$.

Justifiez l'existence de u_n, puis montrez la divergence de la série $\sum u_n$.

Montrez que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \frac{\ln^2 n}{2}$.

2.3 Séries absolument convergentes

Définition 2.26
Soit u une suite de E.

On dit que la série $\sum u$ est absolument convergente ssi la série à termes positifs $\sum \|u\|$ est convergente.

2.3.1 Lien entre absolue convergence et convergence

Théorème 2.27
Si E est de dimension finie, alors toute série absolument convergente est convergente.

Remarque 2.28

- La réciproque est fausse : la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge (on l'appelle la série harmonique alternée) mais ne converge pas absolument.
- L'hypothèse de la dimension finie est indispensable. En dimension infinie, ce résultat est faux en général.

Exercice 2.29
Soit $x > 0$. Montrez que les séries suivantes convergent :

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln\left(n^2+(-1)^n n\right)}{n^2+(-1)^n x^n} \qquad \sum_{n\geqslant 0} \sqrt{n}\cos(x)\sin^n(x) \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n\sqrt{n+x}}{x^n+n^{2/x}}.$$

2.3.2 Un exemple fondamental : l'exponentielle de matrice

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

On choisit comme norme sur $E = \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ une norme sous-multiplicative.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|A^n\| \leqslant \|A\|^n$, donc $\left\|\dfrac{A^n}{n!}\right\| \leqslant \dfrac{\|A\|^n}{n!}$.

Or la série $\sum \dfrac{\|A\|^n}{n!}$ converge (et sa somme vaut $\exp \|A\|$), donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \dfrac{A^n}{n!}$ est absolument convergente.

On pose alors $\exp A = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$.

2.3.3 Extension des résultats par comparaison

Définition 2.30
Soit u une suite de E et v une suite réelle positive.

On dit que $u = \mathcal{O}(v)$ quand $\exists M > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \|u_n\| \leqslant M v_n$.

On dit que $u = o(v)$ quand $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \|u_n\| \leqslant \varepsilon v_n$.

Proposition 2.31
Soient u une suite de E et v une suite réelle positive.

Si E est de dimension finie, $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ quand n tend vers $+\infty$ et la série $\sum v$ converge, alors la série $\sum u$ est absolument convergente.

De plus, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \mathcal{O}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.

Ceci est encore valable si $u_n = o(v_n)$.

Proposition 2.32
Soient u une suite de E et v une suite réelle positive.

Si E est de dimension finie, $u_n = o(v_n)$ quand n tend vers $+\infty$ et la série $\sum v$ converge, alors la série $\sum u$ est absolument convergente.

De plus, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.

2.3.4 Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes

Définition 2.33
Soient E une algèbre normée de dimension finie, $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ deux séries à termes dans E.

On appelle produit de Cauchy des deux séries la série $\sum_{n\geqslant 0} c_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Remarque 2.34
Quand les séries ne commencent pas à partir du rang 0, il faut se méfier ! Une idée simple est de se ramener au cas précédent en décalant les indices.

Exemple très courant : les séries commencent au rang 1. Dans ce cas, le produit de Cauchy des séries $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ est la série $\sum_{n\geqslant 1} c_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}$.

Théorème 2.35
Avec les mêmes hypothèses sur E.

Si les séries $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ convergent absolument, alors leur produit de Cauchy est aussi absolument convergent et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times \sum_{k=0}^{+\infty} b_n.$$

2.4 Séries alternées

Définition 2.36
Une série alternée est une série réelle $\sum u_n$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} est de signe opposé à u_n.

En général, les séries alternées sont reconnaissables à la présence d'un facteur $(-1)^n$ dans l'expression du terme général.

On dispose d'une condition suffisante de convergence d'une série alternée qu'on appelle le critère spécial des séries alternées.

Théorème 2.37
Soit $\sum (-1)^n u_n$ *une série alternée.*

Si la suite u

- *est positive,*
- *est décroissante,*
- *et converge vers* 0,

alors la série $\sum (-1)^n u_n$ *converge.*

Dans ce cas, la somme de la série est positive, et si on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$ *le reste partiel d'indice* n*, alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* R_n *est du signe de son premier terme (i.e. du signe de* $(-1)^{n+1}$ *) et* $|R_n| \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

Exemple 2.38

- La série harmonique alternée $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge.
- La série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ converge.

Remarque 2.39

- Si $\sum_{n\geqslant n_0} (-1)^n u_n$ est une série alternée convergente, sa somme a le signe du premier terme de la série (ici le signe de $(-1)^{n_0} u_{n_0}$).
- La condition de décroissance de la suite u est essentielle ! Contre-exemple : la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}}$ est une série alternée divergente.
  De plus, cela fournit un contre-exemple au théorème de comparaison par équivalents si on ne tient pas compte de la condition sur le signe, qui doit être constant.

Exercice 2.40
Soit $\alpha > 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha + k}$.

Justifiez l'existence de u_n. Montrez que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

Chapitre 3

Familles sommables

Sommaire

Dans ce chapitre, E désigne un espace vectoriel normé de dimension finie (qui peut être $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $\|\cdot\|$ la norme associée (qui est dans ce cas la valeur absolue ou le module).

Si A, B sont deux ensembles, alors on note $A \subseteq_f B$ pour indiquer que A est un sous-ensemble fini de B.

3.1 Sommes finies

3.1.1 Définition

D'abord un rappel : on définit par récurrence la somme de n éléments de E notés $x_1, \ldots, x_n$ par :

- si $n = 0$, alors $\sum_{k=1}^{n} x_k = 0$ (une somme vide a pour valeur 0 par convention) ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n+1} x_k = x_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} x_k$.

On définit de même par récurrence les sommes de la forme $\sum_{k=p}^{q} x_k$ quand $p-1 \leqslant q$ (si $q = p-1$, la somme est vide donc vaut 0).

Proposition 3.1
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in E$.

Alors :

(1) pour tout $(p, q) \in [\![1 \,;\, n]\!]^2$ tel que $p \leqslant q$, $\sum_{k=p}^{n} x_k = \sum_{k=p}^{q} x_k + \sum_{k=q+1}^{n} x_k$;

(2) pour tout $\varphi \in \mathfrak{S}_n$, $\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_{\varphi(k)}$.

Démonstration 3.2 (1)
On pose $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $\forall (p, q) \in [\![1 \,;\, n]\!]$, $p \leqslant q \implies \sum_{k=p}^{n} x_k = \sum_{k=p}^{q} x_k + \sum_{k=q+1}^{n} x_k$ ».

Si $n = 1$, alors pour tout $(p, q) \in [\![1 \,;\, n]\!]^2$, $p = q = 1$ donc $\sum_{k=p}^{n} x_k = x_1 + 0 = \sum_{k=p}^{q} x_k + \sum_{k=q+1}^{n} x_k$ donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors soient $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in E^{n+1}$ et $(p, q) \in [\![1 \,;\, n+1]\!]^2$ tel que $p \leqslant q$:

- si $q \leqslant n$, alors par définition, $\sum_{k=p}^{n+1} = \sum_{k=p}^{n} x_k + x_{n+1}$, donc d'après l'hypothèse de récurrence, $\sum_{k=p}^{n+1} x_k = \sum_{k=p}^{q} x_k + \sum_{k=q+1}^{n} x_k + x_{n+1} = \sum_{k=p}^{q} x_k + \sum_{k=q+1}^{n+1} x_k$;
- si $q = n+1$, alors $\sum_{k=p}^{n+1} x_k = \sum_{k=p}^{q} x_k + 0 = \sum_{k=p}^{q} x_k + \sum_{k=q+1}^{n+1} x_k$.

Dans les deux cas, on a montré $\sum_{k=p}^{n+1} x_k = \sum_{k=p}^{q} x_k + \sum_{k=q+1}^{n+1} x_k$. Autrement dit, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie. ■

Démonstration 3.3 (2)
On pose $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $\forall \varphi \in \mathfrak{S}_n, \ \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_{\varphi(k)}$ ».

$\mathscr{P}(1)$ est vraie car le seul élément de $\mathfrak{S}_1$ est l'application $1 \longmapsto 1$.

Si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors soient $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in E^{n+1}$ et $\varphi \in \mathfrak{S}_{n+1}$:

- si $\varphi(n+1) = n+1$ alors φ induit une bijection de $[\![1 ; n]\!]$ dans lui-même donc d'après l'hypothèse de récurrence, $\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_{\varphi(k)}$ donc $\sum_{k=1}^{n+1} x_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{n} x_{\varphi(k)} + x_{\varphi(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} x_k$;
- si $\varphi(n+1) = m \neq n+1$, alors on pose $\psi = \begin{pmatrix} m & n+1 \end{pmatrix} \varphi$ et $a = \varphi^{-1}(n+1)$. On a alors $\psi(n+1) = n+1$, $\psi(a) = m$ et pour tout $k \in [\![1 ; n+1]\!] \setminus \{a, n+1\}$, $\psi(k) = \varphi(k)$. D'après le cas précédent, $\sum_{k=1}^{n+1} x_k = \sum_{k=1}^{n+1} x_{\psi(k)}$, donc en utilisant le résultat précédent :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} x_k &= \sum_{k=1}^{a-1} x_{\psi(k)} + x_{\psi(a)} + \sum_{k=a+1}^{n} x_{\psi(k)} + x_{\psi(n+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{a-1} x_{\varphi(k)} + x_m + \sum_{k=a+1}^{n} x_{\varphi(k)} + x_{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{a-1} x_{\varphi(k)} + x_{\varphi(n+1)} + \sum_{k=a+1}^{n} x_{\varphi(k)} + x_{\varphi(a)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} x_{\varphi(k)}.
\end{aligned}$$

Dans les deux cas, on a montré $\sum_{k=1}^{n+1} x_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{n+1} x_k$. Autrement dit, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie. ■

Proposition 3.4
Soient I un ensemble fini et non-vide d'indices, n son cardinal et f, g deux bijections de $[\![1 ; n]\!]$ dans I (des énumérations de I).

Alors pour tout $(x_i)_{i \in I} \in E^I$, $\sum_{k=1}^{n} x_{f(k)} = \sum_{k=1}^{n} x_{g(k)}$.

Démonstration 3.5
On remarque que $g^{-1} \circ f$ est une bijection de $[\![1 ; n]\!]$ dans lui-même donc d'après la Proposition 3.1 :

$$\sum_{k=1}^{n} x_{g(k)} = \sum_{k=1}^{n} x_{g\left(g^{-1} \circ f(k)\right)} = \sum_{k=1}^{n} x_{f(k)}.$$

■

Autrement dit, quel que soit l'ordre dans lequel on numérote les éléments de la famille $(x_i)_{i\in I}$, on obtient toujours la même somme en les additionnant.

Définition 3.6
Si I est un ensemble fini d'indices et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E, alors on pose $\sum_{i\in I} x_i$ la valeur d'une somme $\sum_{k=1}^{n} x_{f(k)}$, où f est une bijection de $[\![1 ; n]\!]$ dans I quelconque.

Cette définition est cohérente, puisque la valeur de la somme $\sum_{k=1}^{n} x_{f(k)}$ ne dépend pas du choix de f d'après la proposition précédente. Autrement dit, il est inutile de connaître l'énumération choisie pour additionner les éléments de la famille, on peut considérer cette somme comme une somme « en vrac » de tous les éléments.

3.1.2 Propriétés

Proposition 3.7
Soient I un ensemble fini d'indices de cardinal n et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E.

Alors :

(1) pour toute bijection f d'un ensemble J dans I, $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{j\in J} x_{f(j)}$ (changement d'indice dans une somme) ;

(2) pour toute bijection f de I dans lui-même, $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} x_{f(i)}$ (propriété de commutativité) ;

(3) pour tout couple (J, J') de parties de I disjointes et de réunion I, $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in J} x_i + \sum_{i\in J'} x_i$ (propriété d'associativité) ;

(4) plus généralement, pour toute partition $(I_k)_{k\in K}$ de l'ensemble I, $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} x_i$.

Démonstration 3.8 (1)
Soit f une bijection de J dans I. On choisit une énumération ψ de J. Alors $f\circ\psi$ est une énumération de I.

Alors, par définition, $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k=1}^{n} x_{f\circ\psi(k)}$ et $\sum_{j\in J} x_{f(j)} = \sum_{k=1}^{n} x_{f\circ\psi(k)}$ donc $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{j\in J} x_{f(j)}$. ■

Démonstration 3.9 (2)
Cas particulier $I = J$ du point précédent. ■

Démonstration 3.10 (3)
Soit (J, J') un couple de parties de I disjointes et de réunion I. On note q le cardinal de J, de sorte que $n - q$ est le cardinal de J'.

On choisit une énumération φ de J et une énumération ψ de J'. Alors l'application

$$\theta : \begin{array}{ccc} [\![1\,;n]\!] & \longrightarrow & I \\ k & \longmapsto & \begin{cases} \varphi(k) & \text{si } k \leqslant q \\ \psi(k-q) & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

est une énumération de I.

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{i\in I} x_i &= \sum_{k=1}^{n} x_{\theta(k)} \\ &= \sum_{k=1}^{q} x_{\theta(k)} + \sum_{k=q+1}^{n} x_{\theta(k)} \\ &= \sum_{k=1}^{q} x_{\varphi(k)} + \sum_{k=q+1}^{n} x_{\psi(k-q)} \\ &= \sum_{k=1}^{q} x_{\varphi(k)} + \sum_{k=1}^{n-q} x_{\psi(k)} \\ &= \sum_{i\in J} x_i + \sum_{i\in J'} x_i. \end{aligned}$$
■

Démonstration 3.11 (4)
Si $(I_k)_{k\in K}$ est une partition de l'ensemble I, l'ensemble K est fini donc par récurrence sur le cardinal b de K, on montre $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} x_i$ en utilisant le cas $b = 2$ démontré précédemment (il suffit de choisir un élément a de K, poser $J = I_a$ et $J' = \bigsqcup_{k\in K\setminus\{a\}} I_k$ et remarquer que la famille $(I_k)_{k\in K\setminus\{a\}}$ est une partition de l'ensemble J' et que le cardinal de $K \setminus \{a\}$ est $b - 1$). ■

3.2 Conventions de calcul dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

L'ensemble $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ est muni d'une addition : pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\})^2$,

- ▹ si x et y sont réels, $x + y$ est la somme habituelle de deux réels positifs ;
- ▹ si $x = +\infty$ ou $y = +\infty$ alors on pose $x + y = +\infty$

et d'une multiplication :

- ▹ si x et y sont réels, xy est le produit habituel de deux réels positifs ;
- ▹ si $x = 0$ ou $y = 0$ alors on pose $xy = 0$;
- ▹ si $x = y = +\infty$ alors on pose $xy = +\infty$.

Il est aussi muni d'une relation d'ordre :

- ▹ si x et y sont deux réels, alors $x \leqslant y$ ou $x < y$ désignent les relations habituelles ;
- ▹ si x est réel et $y = +\infty$, alors on pose $x \leqslant +\infty$ et $x < +\infty$;
- ▹ si $x = y = +\infty$ alors $+\infty \leqslant +\infty$.

Proposition 3.12
L'addition dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ est associative, commutative et admet pour neutre 0.

La relation $\leqslant$ est une relation d'ordre total dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

De plus, l'addition et la multiplication sont compatibles avec la relation d'ordre : on peut additionner ou multiplier deux inégalités membre à membre.

Définition 3.13
Soit A une partie non-vide de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Si A ne contient pas $+\infty$, alors :

- ▹ si A est majorée, elle possède une borne supérieure dans $\mathbb{R}$;
- ▹ sinon on pose $\sup A = +\infty$.

Si A contient $+\infty$, on pose $\sup A = +\infty$.

Cette définition prolonge la notion de borne supérieure à toutes les parties de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, au sens où pour toute partie A de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, $\sup A$ est le plus petit majorant dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ de la partie A.

3.3 Somme d'une famille de réels positifs

Définition 3.14
Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

On pose $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i = \sup\left\{\sum_{i\in J} x_i \;\middle|\; J \subseteq_f I\right\}$.

Remarque 3.15
Cette définition est sensée, car l'ensemble $\left\{\displaystyle\sum_{i\in J} x_i \;\middle|\; J \subseteq_f I\right\}$ est une partie de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, donc possède toujours une borne supérieure dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Définition 3.16
Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable quand $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i < +\infty$.

Évidemment, une famille sommable positive ne peut pas prendre la valeur $+\infty$, autrement dit, une famille sommable est nécessairement une famille de réels positifs.

3.3.1 Propriétés

Proposition 3.17
La somme d'une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ est invariante par permutation : si σ est une permutation de I, alors $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} x_{\sigma(i)}$.

En particulier, si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille sommable, toute permutation de la famille est encore une famille sommable de même somme.

En particulier, dans le cas où $I = \mathbb{N}$, si une série à termes positifs $\sum u_n$ est convergente, alors on dit qu'elle est commutativement convergente : changer l'ordre des termes change bien sûr les valeurs des sommes partielles mais ne change pas la valeur de la limite de ces sommes partielles.

Proposition 3.18
Soient $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}$ deux familles d'éléments de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ et λ un réel positif.

Alors $\displaystyle\sum_{i\in I} (x_i + y_i) = \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i$ et $\displaystyle\sum_{i\in I} \lambda x_i = \lambda \sum_{i\in I} x_i$.

Corollaire 3.19
La somme de deux familles positives est sommable ssi les deux familles sont sommables.

Le produit par un réel strictement positif d'une famille positive est sommable ssi la famille est sommable.

Proposition 3.20
Soient $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}$ *deux familles d'éléments de* $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Si pour tout $i \in I$, $0 \leqslant x_i \leqslant y_i$ *et si la famille* $(y_i)_{i\in I}$ *est sommable, alors la famille* $(x_i)_{i\in I}$ *l'est aussi et* $\sum_{i\in I} x_i \leqslant \sum_{i\in I} y_i$.

3.3.2 Théorème de sommation par paquets

Théorème 3.21
Soit $(x_i)_{i\in I}$ *une famille de réels positifs.*

Si I *est partitionné en une famille* $\left(I_p\right)_{p\in P}$ *de parties, alors*

$$\sum_{p\in P} \sum_{i\in I_p} x_i = \sum_{i\in I} x_i.$$

3.3.3 Théorème de Fubini

Théorème 3.22
Soit $\left(x_{i\,j}\right)_{(i,j)\in I\times J}$ *une famille de réels positifs. Alors*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} x_{i\,j} = \sum_{j\in J} \sum_{i\in I} x_{i\,j} = \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} x_{i\,j}.$$

Ce résultat se généralise par récurrence dans le cas d'un produit cartésien $I_1 \times \cdots \times I_k$.

Un cas particulier courant.

Proposition 3.23
Soient $(a_i)_{i\in I}, \left(b_j\right)_{j\in J}$ *deux familles de réels positifs.*

Alors la famille $\left(a_i b_j\right)_{(i,j)\in I\times J}$ *est sommable ssi les familles* $(a_i)_{i\in I}$ *et* $\left(b_j\right)_{j\in J}$ *sont sommables et dans ce cas, on a*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \sum_{i\in I} a_i \times \sum_{j\in J} b_j.$$

3.4 Familles sommables dans un espace vectoriel normé de dimension finie

3.4.1 Définitions

Définition 3.24
Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.

On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable quand la famille $(\|x_i\|)_{i\in I}$ est sommable, c'est-à-dire quand $\sum_{i\in I} \|x_i\| < +\infty$.

Cette définition est indépendante du choix de la norme, car en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

3.4.1.1 Cas réel

Définition 3.25
Soit x un réel.

On appelle partie positive de x le réel $x^+ = \max(0, x)$ et partie négative de x le réel $x^- = -\min(x, 0)$.

On remarque les égalités suivantes : $|x| = x^+ + x^-$ et $x = x^+ - x^-$.

Proposition 3.26
Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombre réels.

Alors les familles positives $\left(x_i^+\right)_{i\in I}$ et $\left(x_i^-\right)_{i\in I}$ sont sommables et on a bien sûr $\sum_{i\in I} |x_i| = \sum_{i\in I} x_i^+ + \sum_{i\in I} x_i^-$.

On pose alors $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} x_i^+ - \sum_{i\in I} x_i^-$, qui est un réel tel que $\left|\sum_{i\in I} x_i\right| \leqslant \sum_{i\in I} |x_i|$.

3.4.1.2 Cas complexe

Proposition 3.27
Soit $(a_k)_{k\in I}$ une famille sommable de nombres complexes.

Alors les deux familles réelles $(\operatorname{Re} a_k)_{k\in I}$ et $(\operatorname{Im} a_k)_{k\in I}$ sont sommables.

On pose alors $\sum_{k\in I} a_k = \sum_{k\in I} \operatorname{Re} a_k + \sum_{k\in I} \operatorname{Im} a_k$ qui est un complexe tel que $\left|\sum_{k\in I} a_k\right| \leqslant \sum_{k\in I} |a_k|$.

Exemple 3.28

- Toute famille finie est sommable et sa somme au sens des familles sommables est sa somme habituelle.
- Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable ssi la série $\sum_n a_n$ est absolument convergente.

Exercice 3.29
Soit $\theta \in \,]0\,;\,2\pi[$. Montrez que la famille $\left(\dfrac{\mathrm{e}^{i\ell\theta}}{(k+\ell)^3}\right)_{(k,\ell)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.

3.4.1.3 Cas général

Comme E est de dimension finie, on en choisit une base $\mathscr{B} = \big(e_1, \ldots, e_p\big)$.

Pour toute famille sommable $(x_i)_{i\in I} \in E^I$, on note $\big(x_{i\,1}, \ldots, x_{i\,p}\big)$ les coordonnées de x_i dans la base $\mathscr{B}$.

Alors pour tout $k \in [\![1\,;\,p]\!]$, la famille de réels ou de complexes $(x_{i\,k})_{i\in I}$ est sommable.

On pose alors $\sum_{i\in I} x_i$ le vecteur qui a pour coordonnées $\left(\sum_{i\in I} x_{i\,1}, \ldots, \sum_{i\in I} x_{i\,p}\right)$ dans la base $\mathscr{B}$.

On note $\ell^1(I, E)$ l'ensemble des familles sommables de E indicées par I.

3.4.2 Propriétés

Proposition 3.30
Toute sous-famille d'une famille sommable de E est elle-même sommable.

Toute permutation d'une famille sommable de E est encore sommable et de même somme.

En particulier, les séries absolument convergentes sont commutativement convergentes.

Les familles sommables sont celles qui sont approchables par des familles finies à ε près au sens de la proposition suivante.

Comme pour les séries, on dispose d'un théorème de comparaison entre familles sommables.

Proposition 3.31
Soient $(a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I}$ deux familles d'éléments indicées par I.

Si pour tout $i \in I$, $0 \leqslant \|a_i\| \leqslant b_i$ et si la famille $(b_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de réels positifs, alors la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable et on a $\left\|\sum_{i\in I} a_i\right\| \leqslant \sum_{i\in I} \|a_i\| \leqslant \sum_{i\in I} b_i$.

La linéarité est encore vérifiée, mais n'est pas évidente au regard des définitions.

Proposition 3.32
L'ensemble $\ell^1(I,E)$ *est un espace vectoriel et l'application* $(a_i)_{i\in I} \longmapsto \sum_{i\in I} a_i$ *est une forme linéaire : si* $(a_i),(b_i) \in \ell^1(I,E)$ *et* λ *est un scalaire, alors* $\sum_{i\in I}(a_i+b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i$ *et* $\sum_{i\in I} \lambda a_i = \lambda \sum_{i\in I} a_i$.

3.4.3 Théorème de sommation par paquets

Théorème 3.33
Soit $(a_i)_{i\in I}$ *une famille sommable de* E.

Si I *est partitionné en une famille* $(I_p)_{p\in P}$ *de parties, alors pour tout* $p\in P$, $(a_i)_{i\in I_p}$ *est sommable et*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{p\in P}\sum_{i\in I_p} a_i.$$

Exercice 3.34
Montrez que pour tout complexe z tel que $0<|z|<1$, la famille $\left(z^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et calculez sa somme.

Exercice 3.35
Montrez que la famille $\left(\dfrac{(-1)^n}{\max(m,n)^3}\right)_{m,n\geqslant 1}$ est sommable et calculez sa somme en fonction de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$.

3.4.4 Théorème de Fubini

Théorème 3.36
Soit $(a_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ *une famille sommable de* E.

Alors pour tout $i\in I$, *la famille* $(a_{ij})_{j\in J}$ *est sommable ; pour tout* $j\in J$, *la famille* $(a_{ij})_{i\in I}$ *est sommable et*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{ij} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_{ij} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{ij}.$$

Ce résultat se généralise par récurrence dans le cas d'un produit cartésien $I_1\times\cdots\times I_k$.

Exercice 3.37
Montrez que la famille $\left(\dfrac{(-1)^p}{q^p}\right)_{p,q\geqslant 2}$ est sommable et calculez sa somme.

Un cas particulier courant.

Proposition 3.38
Soient $(a_i) \in \ell^1(I,E)$ *et* $(b_j) \in \ell^1(J,E)$.

Alors la famille $(a_i b_j)_{(i,j)\in I\times J}$ *est sommable et*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \sum_{i\in I} a_i \times \sum_{j\in J} b_j.$$

3.4.5 Produit de Cauchy de deux séries

Définition 3.39
Soient $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n$ deux séries à termes dans E.

On appelle produit de Cauchy des deux séries la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n$ où pour tout $n\in\mathbb{N}$, $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Remarque 3.40
Quand les séries ne commencent pas à partir du rang 0, il faut se méfier ! Une idée simple est de se ramener au cas précédent en décalant les indices.

Exemple très courant : les séries commençant au rang 1. Dans ce cas, le produit de Cauchy des séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ est la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} c_n$ où pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $c_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}$.

Théorème 3.41
Si les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ *et* $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n$ *sont absolument convergentes, alors leur produit de Cauchy est aussi absolument convergent et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

Un exemple fondamental.

Proposition 3.42
Soit $z \in \mathbb{C}$. La série de terme général $\dfrac{z^n}{n!}$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z.$$

Remarque 3.43
L'absolue convergence des séries est indispensable ! Si on ne suppose que la convergence des séries, alors le produit de Cauchy peut très bien être une série divergente (voir exercice suivant).

Exercice 3.44
Soit $x > 0$. On pose b_n la somme partielle de la série $\sum_{n \geqslant 0} \dfrac{x^n}{n!}$ et $c_n = \dfrac{b_n}{x^n}$.

Donnez une CNS sur x pour que la série $\sum_{n \geqslant 0} c_n$ converge. Dans le cas où elle converge, donnez la valeur de sa somme en fonction de x.

Exercice 3.45
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Montrez que la série $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ converge, mais que son produit de Cauchy avec elle-même diverge (indication : pour tout $b > 0$, pour tout $x \in [0\,;b]$, $x(b-x) \leqslant \dfrac{b^2}{4}$).

Chapitre 4

Rappels et compléments d'algèbre linéaire

Sommaire

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$, en général $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

4.1 Sommes de sous-espaces vectoriels

4.1.1 Généralités

Définition 4.1
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.

On appelle somme de $F_1, \dots, F_n$ l'ensemble noté $F_1 + \cdots + F_n$:

$$F_1 + \cdots + F_n = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \;\middle|\; (x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n \right\}.$$

Proposition 4.2
Soit $\left(u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_n\right) \in E^n$.

Alors $\operatorname{Vect}\left(u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_n\right) = \operatorname{Vect}\left(u_1, \dots, u_p\right) + \operatorname{Vect}\left(u_{p+1}, \dots, u_n\right)$.

Proposition 4.3
Avec les mêmes notations : $F_1 + \cdots + F_n$ *est un sous-espace vectoriel de* E.

De plus, c'est le plus petit sous-espace vectoriel qui contient $F_1, \dots, F_n$.

Si on connaît des familles génératrices de chacun des sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_n$*, alors en concaténant ces familles, on obtient une famille génératrice de* $F_1 + \cdots + F_n$.

Conséquence : en fractionnant une famille génératrice de E en sous-familles, on décompose l'espace E en une somme de sous-espaces vectoriels.

4.1.2 Sommes directes

Définition 4.4
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.

On dit que la somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe quand tout vecteur de $F_1 + \cdots + F_n$ a une unique écriture $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$ où $(x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$.

On dit aussi que les sous-espaces sont en somme directe. Dans ce cas, quand on veut insister sur cette propriété, on note la somme sous la forme $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} F_i$.

Proposition 4.5
Avec les mêmes hypothèses.

La somme $F_1+\cdots+F_n$ est directe ssi le vecteur nul a une unique décomposition $\sum_{i=1}^{n} x_i$ où $(x_1,\ldots,x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$, qui est la décomposition triviale.

Autrement dit, la somme $F_1+\cdots+F_n$ est directe ssi la seule solution de l'équation $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ d'inconnue $(x_1,\ldots,x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$ est le n-uplet nul.

Un exemple fondamental : si $(v_1,\ldots,v_n)$ est une famille libre, alors les droites vectorielles $\mathrm{Vect}\,(v_i)$ sont en somme directe.

Proposition 4.6
Avec les mêmes hypothèses.

Si la somme $F_1+\cdots+F_n$ est directe, alors en concaténant des familles libres de chacun des sous-espaces vectoriels, on obtient une famille libre.

4.1.3 Sous-espaces supplémentaires

Définition 4.7
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1,\ldots,F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.

On dit que les sous-espaces $F_1,\ldots,F_n$ sont supplémentaires (dans E) quand $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$.

On déduit des deux parties précédentes le résultat de la décomposition d'un vecteur.

Proposition 4.8
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1,\ldots,F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.

Il y a équivalence entre :

- *les sous-espaces $F_1,\ldots,F_n$ sont supplémentaires*
- *tout vecteur de E peut s'écrire de façon unique comme somme de vecteurs des sous-espaces vectoriels $F_1,\ldots,F_n$:*

$$\forall v \in E,\ \ \exists!\,(v_1,\ldots,v_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n,\ \ v = \sum_{i=1}^{n} v_i.$$

Dans ce cas, soit v un vecteur de E. Il existe un unique n-uplet $(v_1, \ldots, v_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$ tel que $v = \sum_{i=1}^{n} v_i$.

Pour tout $j \in [\![1 ; n]\!]$, on définit $p_j : E \longrightarrow E$ en posant $p_j(v) = v_j$.

Alors les applications p_j sont des projecteurs qui vérifient les propriétés :

- $\sum_{i=1}^{n} p_i = \mathrm{id}_E$
- pour tout $(i, j) \in [\![1 ; n]\!]^2$, $p_i \circ p_j = \delta_{ij} p_i$ où δ_{xy} est le symbole de Kronecker.

La réciproque est vraie : si $(p_1, \ldots, p_n)$ sont n projecteurs vérifiant les deux propriétés précédentes, alors les sous-espaces $(\mathrm{Im}\, p_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont supplémentaires.

Exercice 4.9
Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Pour $k \in \{0, 1, 2\}$, on pose $E_k = \left\{ f \in E \,\middle|\, \forall x \in \mathbb{C},\ f(jx) = j^k f(x) \right\}$.

Montrez que E_0, E_1, E_2 sont trois sous-espaces vectoriels de E supplémentaires.

Proposition 4.10
Avec les mêmes hypothèses.

Si les sous-espaces $F_1, \ldots, F_n$ sont supplémentaires, alors en concaténant des bases de chacun des sous-espaces vectoriels, on obtient une base de E.

4.1.4 Cas particulier de deux sous-espaces

Proposition 4.11
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

La somme $F + G$ est directe ssi $F \cap G = \{0\}$.

Attention ! Il ne faut pas généraliser à trois ou plus sous-espaces. Même si $F_1 \cap F_2 \cap F_3$ est le sous-espace nul, on ne peut pas conclure que la somme $F_1 + F_2 + F_3$ est directe.

4.1.5 Applications linéaires et sommes directes

Proposition 4.12
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $E_1, \ldots, E_n$ des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E et $f_1, \ldots, f_n$ des applications linéaires de $E_1, \ldots, E_n$ dans F respectivement.

Alors il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $f\big|_{E_i} = f_i$.

Autrement dit, pour définir une application linéaire sur une somme directe de sous-espaces vectoriels, il suffit de la définir sur chacun des sous-espaces vectoriels.

Exercice 4.13
Soients $E_1, \ldots, E_n$ des sous-espaces vectoriels supplémentaires. Quelles sont les applications qui induisent l'application identité sur un des E_i et l'application nulle sur les autres E_j ?

4.2 Somme de sous-espaces vectoriels en dimension finie

4.2.1 Base adaptée à un sous-espace

Définition 4.14
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace vectoriel de E de dimension p.

On appelle base de E adaptée à F toute base de E qui contient une base de F. Quitte à changer l'ordre des vecteurs, on peut suppose dans une base adaptée à F que les p premiers vecteurs de la base forment une base de F.

Définition 4.15
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $(F_1, \ldots, F_p)$ une famille de sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

On appelle base adaptée à la somme $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ la concaténation de bases de chacun des sous-espaces $F_1, \ldots, F_p$ (dans cet ordre).

Si $\mathscr{B}$ est une base de E, alors en fractionnant la base en sous-familles, les sous-espaces vectoriels engendrés par chacune de ces sous-familles sont supplémentaires et la base est alors adaptée à la somme des sous-espaces.

4.2.2 Sommes directes et bases

On donne un moyen simple de vérifier qu'une somme est directe, voire plus.

Proposition 4.16
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $(F_1, \ldots, F_p)$ une famille de sous-espaces vectoriels de E.

Si en concaténant des bases de chacun des sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_p$ on obtient une famille libre, alors les sous-espaces vectoriels sont en somme directe.

Si en concaténant des bases de chacun des sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_p$ on obtient une base de E, alors les sous-espaces vectoriels sont supplémentaires.

4.2.3 Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels

Proposition 4.17
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.

Alors $\dim \sum_{i=1}^{n} F_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$.

Il y a égalité quand la somme est directe.

Théorème 4.18
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.

Alors $F_1, \ldots, F_n$ sont en somme directe ssi $\dim \sum_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$.

4.2.4 Sous-espaces supplémentaires

En dimension finie, on a une façon plus simple de prouver que des sous-espaces vectoriels sont supplémentaires.

Proposition 4.19 (Trois pour le prix de deux)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.

Quand deux propriétés parmi les trois suivantes sont vraies, alors la troisième l'est aussi :

- $E = \sum_{i=1}^{n} F_i$
- $\dim \sum_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$

- $\dim E = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dim F_i$

Donc dans ce cas, les sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_n$ sont supplémentaires.

En pratique, le cas le plus utile est le suivant : si $\dim \displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i = \dim E$, alors les sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_n$ sont supplémentaires.

Exercice 4.20
Dans $\mathbb{R}^4$, soient $H = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x + z + t = 0 \text{ et } x - y - z + t = 0\right\}$, $F = \operatorname{Vect}((-1, 0, 1, 1))$ et $G = \operatorname{Vect}((2, -1, 1, 0))$.

F, G et H sont-ils supplémentaires ?

4.2.5 Dimension d'une somme de deux sous-espaces vectoriels

Rappel : la formule de Grassmann.

Proposition 4.21
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

Alors $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

4.3 Polynômes d'endomorphismes et de matrices

4.3.1 $\mathbb{K}$-algèbres

4.3.1.1 Définition

Définition 4.22
Un ensemble A est appelé $\mathbb{K}$-algèbre quand A est à la fois un anneau et un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, dont les multiplications sont compatibles.

Il y a donc trois lois dans une $\mathbb{K}$-algèbre :

- une addition classique $+$;

- une multiplication externe $.$;

- une multiplication interne, compatible avec la précédente :

$$\forall (\lambda, a, b) \in \mathbb{K} \times A^2, \quad \lambda.(ab) = (\lambda.a)\, b = a\, (\lambda.b)\,.$$

On qualifie les $\mathbb{K}$-algèbres par du vocabulaire des anneaux (algèbres intègres, algèbres principales, etc) ou des espaces vectoriels (algèbres de dimension finie, etc).

Exemple 4.23

- $\mathbb{K}$ est lui-même une $\mathbb{K}$-algèbre, où les deux multiplications sont confondues ; $\mathbb{C}$ est aussi une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension 2.

- $\mathbb{K}[X]$ est une $\mathbb{K}$-algèbre intègre, commutative et de dimension finie.

- Si I est un intervalle, $\mathscr{F}(I, \mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative, non-intègre et de dimension finie.

- Si $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension n^2 qui n'est ni intègre ni commutative.

- Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors $\mathscr{L}(E)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension finie ssi E l'est aussi qui n'est ni intègre ni commutative.

4.3.1.2 Polynômes d'éléments dans une $\mathbb{K}$-algèbre

Proposition 4.24

Soient A une $\mathbb{K}$-algèbre et $a \in A$.

Pour $P = \sum_{i=0}^{n} c_i X^i \in \mathbb{K}[X]$, on pose $P(a) = \sum_{i=0}^{n} c_i a^i$.

L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & A \\ P & \longmapsto & P(a) \end{array}$ *est alors un morphisme d'algèbres :*

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \begin{cases} (P+Q)(a) = P(a) + Q(a) \\ (PQ)(a) = P(a)\, Q(a) \\ (\lambda P)(a) = \lambda P(a) \end{cases}$$

De plus, on note $\mathbb{K}[a]$ l'ensemble $\{P(a) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$: cet ensemble est stable par les lois de A, on dit que c'est une sous-algèbre de A.

4.3.2 Cas particulier des algèbres $\mathscr{L}(E)$ ou $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

E étant un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, l'ensemble $\mathscr{L}(E)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre. De même, n étant un entier non-nul, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre. Dans ces algèbres, on définit naturellement la notion de polynôme d'endomorphisme ou de matrice. Bien sûr, ces notions sont liées par choix d'une base de l'espace.

Proposition 4.25
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B}$ une base de E et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = A$.

Alors pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(f)$ a pour matrice $P(A)$ dans la base $\mathscr{B}$.

Remarque 4.26

- La « multiplication » dans $\mathscr{L}(E)$ est la composition $\circ$. Donc la deuxième propriété de la Proposition 4.24 doit être comprise comme suit : si $f \in \mathscr{L}(E)$, alors $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$.

- Même si les multiplications dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ou $\mathscr{L}(E)$ ne sont pas commutatives en général, on peut intervertir l'ordre des polynômes car la multiplication dans $\mathbb{K}[X]$ est commutative : si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $(PQ)(A) = P(A)Q(A) = Q(A)P(A)$; si $u \in \mathscr{L}(E)$, $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.

- Attention aux notations ! Si $f \in \mathscr{L}(E)$, $x \in E$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, alors l'application de $P(f)$ au vecteur x se note $P(f)(x)$ et pas $P(f(x))$, notation qui n'a aucun sens.

4.3.3 Polynôme annulateur d'une matrice ou d'un endomorphisme

---

Définition 4.27
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme annulateur de A tout polynôme non-nul $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(A) = 0$.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. On appelle polynôme annulateur de u tout polynôme non-nul $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$.

Remarque 4.28
Attention à ne pas confondre les notions : si P est un polynôme annulateur de la matrice A (on dit aussi que P annule A par abus de langage), on ne dit pas que A est une racine de P !

Une racine d'un polynôme est un nombre...

De même, si $P(u) = 0$, on ne dit pas que u est une racine de P, ça n'a aucun sens.

Définition 4.29
Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors l'ensemble $\text{Ann}(A) = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(A) = 0\}$ est appelé idéal annulateur de A.

Si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E, alors l'ensemble $\text{Ann}(u) = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\}$ est appelé idéal annulateur de u.

Théorème 4.30
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\text{Ann}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ stable par $\times$. De plus, il existe un unique polynôme unitaire μ_A tel que $\text{Ann}(A) = \mu_A \mathbb{K}[X]$.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors $\text{Ann}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ stable par $\times$. De plus, il existe un unique polynôme unitaire μ_u tel que $\text{Ann}(u) = \mu_u \mathbb{K}[X]$.

Remarque 4.31
Ce dernier résultat est faux en dimension infinie. Contre-exemple : l'endomorphisme $u : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$ défini par $u(P) = XP$.

Définition 4.32
On appelle polynôme minimal d'une matrice carrée A le polynôme μ_A précédent (noté aussi parfois π_A). C'est le polynôme unitaire de degré minimal qui annule A.

On appelle polynôme minimal d'un endomorphisme u en dimension finie le polynôme μ_u précédent (noté aussi parfois π_u). C'est le polynôme unitaire de degré minimal qui annule u.

Autrement dit, on a l'équivalence : pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$P(u) = 0 \iff \mu_u \mid P.$$

De même, on a l'équivalence : pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$P(A) = 0 \iff \mu_A \mid P.$$

Les polynômes annulateurs sont donc les multiples des polynômes minimaux.

On verra plus tard qu'on peut trouver des polynômes annulateurs de plus petits degrés que ceux donnés par le théorème précédent.

En général, il est souvent pénible de calculer le polynôme minimal. En pratique, on se contente de trouver des polynômes annulateurs de degrés pas trop grands (et souvent, il s'agit du polynôme minimal).

Remarque 4.33
Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}'$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ qui contient $\mathbb{K}$ (on dit que $\mathbb{K}'$ est une extension de $\mathbb{K}$), alors le polynôme minimal de A, vue comme matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}')$, est a priori différent de celui de A vue comme matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On peut seulement affirmer pour l'instant que $\mu_{A\,\mathbb{K}'}$ divise $\mu_{A\,\mathbb{K}}$.

En fait, on montre plus loin que le polynôme minimal ne dépend pas du corps $\mathbb{K}$.

4.3.4 Utilisation pratique d'un polynôme annulateur

4.3.4.1 Calcul de l'inverse

Proposition 4.34
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Alors A est inversible ssi A possède un polynôme annulateur P tel que 0 ne soit pas racine de P. Dans ce cas, A^{-1} est un polynôme en A.

De même, soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$.

Alors si f possède un polynôme annulateur P tel que 0 ne soit pas racine de P, f est un automorphisme de E. Dans ce cas, f^{-1} est un polynôme en f. La réciproque est vraie si E est de dimension finie.

Exercice 4.35

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminez un polynôme annulateur de A, montrez que A est inversible et calculez A^{-1}.

Exercice 4.36
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur. Déterminez un polynôme annulateur de p.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On pose $f = p - \lambda \mathrm{id}_E$. Déterminez un polynôme annulateur de f et vérifiez que f est un automorphisme pour presque toutes les valeurs de λ ; dans ce cas, calculez son inverse.

4.3.4.2 Calcul de puissances

Proposition 4.37
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On choisit un polynôme annulateur P de la matrice A.

Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^p = R_p(A)$ où R_p est le reste de la division euclidienne de X^p par P.

De même, soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ qui possède un polynôme annulateur P.

Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^p = R_p(f)$ où R_p est le reste de la division euclidienne de X^p par P.

Conséquence :

- si A possède un polynôme annulateur de degré a, alors $\mathbb{K}[A] = \{P(A) \mid P \in \mathbb{K}_{a-1}[X]\}$;
- si f possède un polynôme annulateur de degré a, alors $\mathbb{K}[f] = \{P(f) \mid P \in \mathbb{K}_{a-1}[X]\}$.

Proposition 4.38
Si p est le degré du polynôme minimal d'une matrice A, alors $\dim \mathbb{K}[A] = p$ *et* $\left(I_n, A, \ldots, A^{p-1}\right)$ *est une base de* $\mathbb{K}[A]$.

Si p est le degré du polynôme minimal d'un endomorphisme f d'un espace vectoriel E, alors $\dim \mathbb{K}[f] = p$ *et* $\left(\mathrm{id}_E, f, \ldots, f^{p-1}\right)$ *est une base de* $\mathbb{K}[f]$.

Exercice 4.39
Soient E un espace vectoriel et $(p, q) \in \mathscr{L}(E)^2$ deux projecteurs tels que $p + q = \mathrm{id}_E$. Vérifiez que $p \circ q = q \circ p = 0$. Déterminez un polynôme annulateur de $f = 2p + 3q$. Donnez une expression générale de f^k en fonction de f et k.

Exercice 4.40

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -5 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Vérifiez que $P = X^3 - 2X^2 + X$ est un polynôme annulateur de A. Donnez une expression générale de A^p en fonction de A et p.

Corollaire 4.41
Si $\mathbb{K}'$ est une extension de $\mathbb{K}$, alors pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, ses polynômes minimaux relativement à $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}'$ sont égaux : $\mu_{A\,\mathbb{K}} = \mu_{A\,\mathbb{K}'}$.

Autrement dit, le polynôme minimal ne dépend pas du corps $\mathbb{K}$.

4.4 Matrices semblables, trace

4.4.1 Trace d'une matrice

Définition 4.42
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de A la somme de ses coefficients diagonaux :

$$\mathrm{tr}\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{i\,i}.$$

L'application trace vérifie de remarquables propriétés.

Proposition 4.43
- *La trace est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.*
- *Pour tout* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}\left({}^tA\right) = \mathrm{tr}\, A$.
- *Pour tout* $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

4.4.2 Matrices semblables

Définition 4.44
Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On dit que A et B sont semblables quand il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Proposition 4.45
La relation de similitude entre matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une relation d'équivalence.

La relation de similitude est une relation très contraignante. Il n'existe pas de caractérisation simple de la similitude entre deux matrices carrées : savoir si deux matrices sont semblables est un problème difficile.

D'après la formule de changement de base, on a immédiatement le résultat suivant.

Proposition 4.46
Deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables ssi elle représentent un même endomorphisme dans des bases différentes. La matrice P est la matrice de passage d'une base à l'autre.

Corollaire 4.47
Deux matrices semblables ont même rang, même trace et même déterminant.

Mais c'est loin d'être suffisant pour être semblables.

Proposition 4.48
Si A et B sont deux matrices semblables, alors pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A)$ et $P(B)$ sont semblables avec la même matrice de passage.

4.4.3 Trace d'un endomorphisme

Proposition 4.49
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$.

Toutes les matrices carrées représentant f ont la même trace. Cette trace ne dépend donc pas du choix de la base dans laquelle on écrit la matrice de f, elle ne dépend que de f : on l'appelle trace de f et on la note $\mathrm{tr}\, f$.

On peut alors reformuler les résultats sur la trace d'une matrice.

Proposition 4.50
- *La trace est une forme linéaire sur $\mathscr{L}(E)$.*
- *Pour tout $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$, $\mathrm{tr}(u \circ v) = \mathrm{tr}(v \circ u)$.*

4.5 Opérations par blocs

4.5.1 Cas général

Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On fixe deux entiers k, ℓ tels que $1 \leqslant k \leqslant n-1$ et $1 \leqslant \ell \leqslant p-1$.

À toute matrice $M \in \mathscr{M}_{n\,p}(\mathbb{K})$, on associe quatre matrices obtenues en découpant la matrice en blocs :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

où $A = \left(m_{i\,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\1\leqslant j\leqslant \ell}}$, $B = \left(m_{i\,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\\ell+1\leqslant j\leqslant p}}$, $C = \left(m_{i\,j}\right)_{\substack{k+1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant \ell}}$ et $D = \left(m_{i\,j}\right)_{\substack{k+1\leqslant i\leqslant n\\\ell+1\leqslant j\leqslant p}}$.

Cette décomposition par blocs permet de faire des calculs formellement comme s'il s'agissait de nombres.

Proposition 4.51

Soient $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ *et* $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ *deux matrices de même taille décomposées de la même façon en blocs et* $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors $M + M' = \begin{pmatrix} A+A' & B+B' \\ C+C' & D+D' \end{pmatrix}$ *et* $\lambda M = \begin{pmatrix} \lambda A & \lambda B \\ \lambda C & \lambda D \end{pmatrix}$.

Proposition 4.52

Soient $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ *et* $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ *deux matrices telles que le produit* MM' *existe et décomposées en blocs.*

Alors, sous réserve que les blocs soient de tailles compatibles pour la multiplication, on a

$$MM' = \begin{pmatrix} AA'+BC' & AB'+BD' \\ CA'+DC' & CB'+DD' \end{pmatrix}.$$

Remarque 4.53

- Comme les symboles mis en jeu ne sont pas des nombres mais des matrices, il est indispensable de respecter l'ordre dans les produits.
- On peut généraliser à un nombre quelconque de blocs, pas forcément deux en ligne ou en colonne.

4.5.2 Cas particuliers des matrices carrées

Si M est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors avec les mêmes notations, on choisit toujours A et D carrées elles aussi. Dans ce paragraphe, on suppose que c'est le cas.

Définition 4.54
On dit que M est triangulaire supérieure par blocs quand il existe des matrices carrées $A_1, \dots, A_k$ telles que M soit de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & ? & ? \dots\dots\dots & ? \\ 0 & A_2 & ? \dots\dots\dots & ? \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 \dots\dots\dots & 0 & A_{k-1} & ? \\ 0 \dots\dots\dots & 0 & 0 & A_k \end{pmatrix}.$$

On définit de même la notion de matrice triangulaire inférieure par blocs.

Définition 4.55
On dit que M est diagonale par blocs quand il existe des matrices carrées $A_1, \dots, A_k$ telles que M soit de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \dots\dots\dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \dots\dots\dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 \dots\dots\dots & 0 & A_{k-1} & 0 \\ 0 \dots\dots\dots & 0 & 0 & A_k \end{pmatrix}.$$

Les résultats sur les matrices triangulaires ou diagonales restent valables par blocs : la somme et le produit de deux matrices triangulaires supérieures par blocs de mêmes tailles l'est encore, et de même pour les matrices triangulaires inférieures par blocs et les matrices diagonales par blocs.

Une conséquence est qu'une matrice M triangulaire par blocs est inversible ssi tous les blocs diagonaux sont inversibles.

Dans ce cas, l'inverse de M est triangulaire par blocs et ses blocs diagonaux sont les inverses des blocs diagonaux de M.

En particulier, l'inverse d'une matrice M diagonale par blocs est la matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont les inverses de ceux de M.

De plus, le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants des blocs diagonaux.

4.5.3 Interprétation des blocs

Définition 4.56
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathscr{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E.

On dit que F est stable par f quand $f(F) \subseteq F$, *i.e.* pour tout $x \in F$, $f(x) \in F$.

Dans ce cas, on peut définir une application φ de F dans F en posant pour tout $x \in F$, $\varphi(x) = f(x)$.

Il est facile de vérifier que φ est un endomorphisme de F, appelé endomorphisme induit par f dans F.

Exemple 4.57
Si g est un endomorphisme de E qui commute avec f (*i.e.* $fg = gf$), alors $\ker g$ et $\operatorname{Im} g$ sont stables par f.

Proposition 4.58
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $f \in \mathscr{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E de dimension p.

Si F est stable par f, alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure par bloc, le premier bloc étant de taille (p, p) :

$$\operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \text{ et } A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K}).$$

Réciproquement, si f possède une matrice de cette forme, alors le sous-espace vectoriel engendré par les p premiers vecteurs est stable par f.

Proposition 4.59
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$.

Si $F_1, \ldots, F_k$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires stables par f de dimensions respectives $p_1, \ldots, p_k$, alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs, la taille du i-ème bloc étant (p_i, p_i) :

$$\operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \ldots\ldots\ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 \ldots\ldots\ldots & 0 & A_{k-1} & 0 \\ 0 \ldots\ldots\ldots & 0 & 0 & A_k \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, si f possède une matrice dans une certaine base qui est diagonale par blocs et contenant k blocs carrés, alors il existe k sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_k$ stables par f et supplémentaires dans E.

Chapitre 5

Réduction des endomorphismes

Sommaire

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$, en général $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

5.1 Éléments propres d'un endomorphisme

Dans cette section, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque, finie ou non.

5.1.1 Valeurs propres et vecteurs propres

Définition 5.1
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On dit que λ est une valeur propre de f quand il existe un vecteur v non-nul tel que $f(v) = \lambda v$.

Si λ est une valeur propre de f, alors tout vecteur non-nul v tel que $f(v) = \lambda v$ est appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Exemple 5.2

- Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \mathrm{id}_E$ a pour unique valeur propre α et tout vecteur non-nul de E est un vecteur propre associé.
- Si p est un projecteur non-trivial (*i.e.* $p \neq 0$ et $p \neq \mathrm{id}_E$), alors p a pour seules valeurs propres 0 et 1.
- De même, si s est une symétrie non-triviale (*i.e.* $s \neq \mathrm{id}_E$ et $s \neq -\mathrm{id}_E$), alors les valeurs propres de s sont 1 et -1.
- L'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ $P \longmapsto XP$ n'a pas de valeur propre.

L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme f est appelé le spectre de f et est noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f)$ ou plus simplement $\mathrm{Sp}(f)$ (en toute rigueur, cette définition est fausse en dimension infinie, mais à notre niveau, cette approximation est acceptable).

Définition 5.3
On appelle droite propre d'un endomorphisme toute droite dirigée par un vecteur propre.

Proposition 5.4
Les droites propres d'un endomorphisme sont exactement les droites stables par cet endomorphisme.

Exercice 5.5
Soit $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$ défini par : si $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on pose $f(u) = (u_{n+1})$. Quelles sont les valeurs propres de f et les vecteurs propres associés ?

Exercice 5.6
Même question avec d l'opérateur de dérivation dans $\mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 5.7
Même question avec D l'opérateur de dérivation dans $\mathbb{R}[X]$.

5.1.2 Lien avec les polynômes annulateurs

En dimension quelconque, il est souvent difficile de trouver les valeurs propres d'un endomorphisme. La connaissance d'un polynôme annulateur peut aider.

Lemme 5.8
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Si λ est une valeur propre de f et v un vecteur propre associé, alors $P(f)(v) = P(\lambda)v$.

Si $P \in \mathbb{K}[X]$, on note $\mathrm{Z}_{\mathbb{K}}(P)$ l'ensemble des racines de P dans $\mathbb{K}$.

Proposition 5.9
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Si P est un polynôme annulateur de f, alors $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \mathrm{Z}_{\mathbb{K}}(P)$.

Remarque 5.10
Attention ! La réciproque est fausse. Contre-exemple : le polynôme $P = X^2 - 1$ est annulateur de id_E et pourtant -1, qui est racine de P, n'est pas valeur propre de id_E.

Exercice 5.11
Soit $n \geqslant 2$. Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $f(M) = M + {}^tM + \mathrm{tr}(M)\, I_n$: f est clairement un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Déterminez un polynôme annulateur de f de degré 3 et déduisez-en les valeurs propres de f.

5.1.3 Sous-espaces propres

Proposition 5.12
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors λ est valeur propre de f ssi $\ker(f - \lambda \mathrm{id}_E) \neq \{0\}$*, autrement dit ssi $f - \lambda \mathrm{id}_E$ n'est pas injectif.*

Définition 5.13
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, le noyau $\ker(f - \lambda \mathrm{id}_E)$ est appelé le sous-espace propre associé à la valeur propre λ. Il est souvent noté $\mathrm{sep}(f, \lambda)$.

Par conséquent, $\mathrm{sep}(f, \lambda)$ est l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ auquel on ajoute le vecteur nul.

Remarque 5.14
Un cas particulier important : 0 est valeur propre ssi f n'est pas injective.

Exercice 5.15
Soit u un endomorphisme ayant pour matrice $M = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -4 \\ 4 & -3 & 3 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ dans une certaine base $\mathscr{B}$.

Calculez $M^3 + 2M^2 - 3M$. Déduisez-en les valeurs propres de u puis déterminez les sous-espaces propres associés.

Proposition 5.16
Tout sous-espace propre d'un endomorphisme est stable par cet endomorphisme. L'endomorphisme induit sur un sous-espace propre est alors une homothétie.

Théorème 5.17
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des valeurs propres distinctes de f.

Alors les sous-espaces propres $(\mathrm{sep}(f, \lambda_i))_{1 \leqslant i \leqslant p}$ *sont en somme directe.*

Autrement dit, toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Remarque 5.18
Quand on demande de déterminer les éléments propres d'un endomorphisme, on demande de déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres associés, *i.e.* les sous-espaces propres.

À partir de maintenant, il est toujours supposé que E est de dimension finie n

5.2 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

5.2.1 Caractérisation des valeurs propres en dimension finie

Proposition 5.19
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Alors*

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(f) \iff \mathrm{rg}(f - \lambda \mathrm{id}_E) < n.$$

Dans ce cas, $\dim \mathrm{sep}(f, \lambda) = n - \mathrm{rg}(f - \lambda \mathrm{id}_E)$.

5.2.2 Définition et lien avec les valeurs propres

Définition 5.20
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

On appelle polynôme caractéristique de f le polynôme $\chi_f = \det(X\mathrm{id}_E - f)$.

La notation χ_f est très courante : elle est à connaître.

Théorème 5.21
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Alors χ_f *est un polynôme unitaire de degré* n *de* $\mathbb{K}[X]$ *et les valeurs propres de* f *sont exactement les racines dans* $\mathbb{K}$ *de* χ_f : $\mathrm{Z}_{\mathbb{K}}(\chi_f) = \mathrm{Sp}(f)$.

Par conséquent, un endomorphisme d'un espace de dimension n *a au plus* n *valeurs propres distinctes.*

Exercice 5.22
Montrez que si $\dim E = 2$, alors pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$, $\chi_f = X^2 - \mathrm{tr}(f)X + \det f$.

Exercice 5.23
Calculez le polynôme caractéristique d'un endomorphisme de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ et donnez ses valeurs propres.

Exercice 5.24
Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $s = \sum_{i=1}^{n} e_i$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que pour tout $j \in [\![1\,;\,n]\!]$, $f(e_j) = e_j + s$.

Calculez son polynôme caractéristique et ses éléments propres.

On peut noter un lien avec la trace et le déterminant.

Proposition 5.25
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Alors $\chi_f = X^n - \mathrm{tr}(f)\, X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det f$.

5.2.3 Ordre de multiplicité et dimension du sous-espace propre

Définition 5.26
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$.

On appelle ordre de multiplicité de la valeur propre λ son ordre de multiplicité en tant que racine de χ_f.

Proposition 5.27
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$, F un sous-espace vectoriel de E stable par f et g l'endomorphisme induit par f dans F.

Alors χ_g divise χ_f.

Une conséquence très importante de ce résultat est le théorème suivant.

Théorème 5.28
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$.

Si λ est une valeur propre d'ordre α, alors $1 \leqslant \dim \mathrm{sep}(f, \lambda) \leqslant \alpha$.

Exercice 5.29
Soit f un endomorphisme de matrice $\begin{pmatrix} 3 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminez les valeurs propres de f, leur multiplicité et la dimension des sous-espaces propres associés.

5.2.4 Endomorphisme scindé

Définition 5.30
On dit qu'un endomorphisme de E est scindé quand son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.

Dans le cas d'un endomorphisme scindé, on connaît alors la somme et le produit des valeurs propres.

Proposition 5.31
Si $f \in \mathscr{L}(E)$ est scindé et a pour valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ avec les ordres de multiplicité $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, alors

$$\operatorname{tr} f = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \lambda_k \qquad \textit{et} \qquad \det f = \prod_{k=1}^{p} \lambda_k^{\alpha_k}.$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors on est dans ce cas, car tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont scindés dans $\mathbb{C}[X]$ d'après le théorème de d'Alembert-Gauss.

Mais si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors il faut se méfier des raisonnements hâtifs : comme un $\mathbb{R}$-endomorphisme peut ne pas avoir de valeurs propres réelles, la trace et le déterminant peuvent ne pas avoir de rapport avec les valeurs propres.

Exercice 5.32
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ dont la matrice dans une base est remplie par ligne de 1, ligne de 2, etc. Sans calculer le polynôme caractéristique, déterminez les valeurs propres complexes de f, leur multiplicité et la dimension des sous-espaces propres associés.

Remarque 5.33
Dans le langage courant, on dit souvent que la trace est la somme des valeurs propres. Cette phrase est correcte seulement si l'on sous-entend que l'on parle de la somme des valeurs propres comptées chacune avec son ordre de multiplicité.

On rencontre en fait deux types de résultats à propos des valeurs propres :

- ceux où l'on parle des valeurs propres distinctes (comme le Théorème 5.21) ;
- ceux où l'on parle des valeurs propres comptées selon leur multiplicité (comme la Proposition 5.31).

Il faut donc être très attentif à la façon dont on considère les valeurs propres.

5.3 Éléments propres d'une matrice carrée

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les matrices-colonnes d'ordre n sont les matrices de $\mathscr{M}_{n\,1}(\mathbb{K})$, espace souvent identifié avec $\mathbb{K}^n$.

5.3.1 Valeurs propres et vecteurs propres

Définition 5.34
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On dit que λ est valeur propre de A quand il existe une matrice-colonne X non-nulle telle que $AX = \lambda X$.

Si λ est une valeur propre de A, alors toute matrice-colonne non-nulle X telle que $AX = \lambda X$ est appelée vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Exemple 5.35

- Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, αI_n a pour unique valeur propre α et toute matrice-colonne non-nulle est un vecteur propre associé.
- Si A est une matrice diagonale, alors ses valeurs propres sont les coefficients diagonaux et des vecteurs propres associés sont les colonnes remplies de 0 sauf un seul coefficient égal à 1.

L'ensemble des valeurs propres d'une matrice A est appelé le spectre de A et est noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ ou plus simplement $\mathrm{Sp}(A)$.

Mais comme une matrice à coefficients réels est aussi une matrice à coefficients complexes, il vaut mieux savoir si on parle des valeurs propres réelles ou complexes. Il est donc préférable d'indiquer clairement le corps de base, comme le montre le résultat suivant.

Proposition 5.36
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}'$ une extension de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{C}$.

Alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \subseteq \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}'}(A)$.

Proposition 5.37
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ une base de E.

Si $A = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f)$, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \mathrm{Sp}(f)$.

Par conséquent, deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres (mais attention, pas forcément les mêmes vecteurs propres).

5.3.2 Lien avec les polynômes annulateurs

Proposition 5.38
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Si P est un polynôme annulateur de A, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \subseteq \mathrm{Z}_{\mathbb{K}}(P)$.

Attention ! La réciproque est fausse. Contre-exemple : le polynôme $P = X^2 - 1$ est annulateur de I_n et pourtant -1, qui est racine de P, n'est pas valeur propre de I_n.

5.3.3 Sous-espaces propres

Proposition 5.39
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors λ *est valeur propre de* A *ssi* $A - \lambda I_n$ *n'est pas inversible, autrement dit ssi* $\operatorname{rg}(A - \lambda I_n) < n$ *ou* $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Si $\lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$, le sous-espace propre associé à la valeur propre λ est l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ auquel on ajoute le vecteur nul. Il est souvent noté $\operatorname{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda)$:

$$\operatorname{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda) = \{X \in \mathscr{M}_{n\,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \lambda X\}.$$

Proposition 5.40
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Alors*

$$\lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \iff \operatorname{rg}(A - \lambda I_n) < n.$$

Dans ce cas, $\dim \operatorname{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda) = n - \operatorname{rg}(A - \lambda I_n)$.

Attention ! Dans la relation $\dim \operatorname{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda) = n - \operatorname{rg}(A - \lambda I_n)$, c'est n, pas n^2 ! Il s'agit de la dimension de $\mathscr{M}_{n\,1}(\mathbb{K})$, pas celle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque 5.41
Un cas particulier important : 0 est valeur propre ssi A n'est pas inversible, c'est-à-dire ssi $\operatorname{rg} A < n$.

Théorème 5.42
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ *des valeurs propres distinctes de* A.

Alors les sous-espaces propres $(\operatorname{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda_i))_{1 \leqslant i \leqslant p}$ *sont en somme directe.*

Autrement dit, toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Remarque 5.43
Quand on demande de déterminer les éléments propres d'une matrice, on demande de déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres associés, *i.e.* les sous-espaces propres.

5.4 Polynôme caractéristique d'une matrice carrée

5.4.1 Définition et lien avec les valeurs propres

Définition 5.44
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme $\chi_A = \det(XI_n - A)$.

Proposition 5.45
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ une base de E.

Si $A = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f)$, alors $\chi_A = \chi_f$.

Par conséquent, deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Théorème 5.46
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Alors χ_A est un polynôme unitaire de degré n de $\mathbb{K}[X]$ et les valeurs propres de A sont exactement les racines de χ_A dans $\mathbb{K}$.

Par conséquent, une matrice carrée de taille (n, n) a au plus n valeurs propres distinctes.

Corollaire 5.47
L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On peut noter un lien avec la trace et le déterminant.

Proposition 5.48
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Alors $\chi_A = X^n - \mathrm{tr}(A)\, X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A$.

5.4.2 Ordre de multiplicité et dimension du sous-espace propre

Définition 5.49
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$.

On appelle ordre de multiplicité de la valeur propre λ son ordre de multiplicité en tant que racine de χ_A.

Théorème 5.50
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$*.*

Si λ *est une valeur propre d'ordre* α*, alors* $1 \leqslant \dim \mathrm{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda) \leqslant \alpha$*.*

Proposition 5.51
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*,* $f \in \mathscr{L}(E)$ *et* $\mathscr{B}$ *une base de* E*.*

Si $A = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f)$*, alors* $\dim \mathrm{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda) = \dim \mathrm{sep}(f, \lambda)$*.*

Par conséquent, deux matrices semblables ont des sous-espaces propres de même dimension (mais pas les mêmes vecteurs propres).

5.4.3 Matrice scindée

Définition 5.52
On dit qu'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est scindée quand son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.

Dans le cas d'une matrice scindée, on connaît alors la somme et le produit des valeurs propres.

Proposition 5.53
Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *est scindée et a pour valeurs propres* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ *avec les ordres de multiplicité* $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$*, alors*

$$\operatorname{tr} A = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \lambda_k \qquad \textit{et} \qquad \det A = \prod_{k=1}^{p} \lambda_k^{\alpha_k}.$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors on est dans ce cas, car tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont scindés dans $\mathbb{C}[X]$ d'après le théorème de d'Alembert-Gauss.

Mais si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors il faut se méfier des raisonnements hâtifs : comme un polynôme à coefficients réels peut ne pas avoir de racines réelles, la trace et le déterminant peuvent ne pas avoir de rapport avec les valeurs propres.

5.5 Endomorphismes diagonalisables, matrices diagonalisables

5.5.1 Définition

Définition 5.54
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On dit que f est diagonalisable quand il existe une base de E constituée de vecteurs propres de f.

On dit que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (ou $\mathbb{K}$-diagonalisable) quand il existe une base de $\mathscr{M}_{n\,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A.

D'après le lien entre les endomorphismes et les matrices carrées, un endomorphisme est diagonalisable ssi sa matrice dans n'importe quelle base est diagonalisable.

Exercice 5.55

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ est-elle $\mathbb{R}$-diagonalisable ? $\mathbb{C}$-diagonalisable ?

Exercice 5.56
Montrez que la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Exercice 5.57
Même exercice avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 5.58
La matrice $C = \begin{pmatrix} 11 & 7 & -3 \\ 11 & 7 & -3 \\ 66 & 42 & -18 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Proposition 5.59
Si un endomorphisme (une matrice) est diagonalisable, alors il (elle) est scindé(e).

Mais la réciproque est fausse.

5.5.2 Caractérisations équivalentes

On note $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 5.60
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

f est diagonalisable ssi il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f) \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$. Dans ce cas, les valeurs propres de f sont les éléments diagonaux de cette matrice.

A est $\mathbb{K}$-diagonalisable ssi elle est $\mathbb{K}$-semblable à une matrice diagonale, i.e. il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = PDP^{-1}$. Dans ce cas, les valeurs propres de A sont les éléments diagonaux de D.

Exemple 5.61

- ▹ Toute matrice diagonale est diagonalisable, car elle est semblable à elle-même.
- ▹ Les projecteurs et les symétries sont diagonalisables.

Remarque 5.62
Quitte à changer l'ordre des vecteurs dans la base, on peut ranger les valeurs propres sur la diagonale dans l'ordre qu'on veut.

Exemple 5.63

Si $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = P^{-1}AP$, alors la colonne 1 de P est un vecteur propre de A pour la valeur propre 1 et les deux autres sont des vecteurs propres pour la valeur propre 3, donc en posant $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, on a $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Lemme 5.64
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable : il existe une base de E dans laquelle la matrice D de f est diagonale.

Les valeurs propres de f sont les éléments diagonaux de D et si λ est un tel nombre, alors la dimension de $\mathrm{sep}(f, \lambda)$ est le nombre d'occurrences de λ dans la diagonale de D.

On en déduit les théorèmes suivants.

Théorème 5.65
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- ▹ f *est diagonalisable*
- ▹ *les sous-espaces propres de* f *sont supplémentaires dans* E
- ▹ $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim \mathrm{sep}(f, \lambda) = n$

Et sa version matricielle.

Théorème 5.66
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- ▹ A *est diagonalisable dans* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$
- ▹ *les sous-espaces propres de* A *dans* $\mathscr{M}_{n\,1}(\mathbb{K})$ *sont supplémentaires dans* $\mathscr{M}_{n\,1}(\mathbb{K})$
- ▹ $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} \dim \mathrm{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda) = n$

Exercice 5.67

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. On a vu à l'Exercice 5.57 que A est diagonalisable. Diagonalisez A.

5.5.3 Lien avec le polynôme caractéristique

Théorème 5.68
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- ▹ f *est diagonalisable*
- ▹ f *est scindé et pour tout* $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, *la dimension de* $\mathrm{sep}(f, \lambda)$ *est égale à l'ordre de multiplicité de* λ

Et sa version matricielle.

Théorème 5.69
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- *A est diagonalisable dans* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$
- *A est scindée et pour tout* $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$*, la dimension de* $\mathrm{sep}_{\mathbb{K}}(A, \lambda)$ *est égale à l'ordre de multiplicité de* λ

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la condition « être scindé » est automatiquement satisfaite.

Un cas particulier très courant.

Proposition 5.70
Si un endomorphisme de E *possède exactement* n *valeurs propres distinctes, alors il est diagonalisable.*

Si une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *possède exactement* n *valeurs propres distinctes dans* $\mathbb{K}$*, alors elle est diagonalisable dans* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 5.71
Montrez que la matrice $\begin{pmatrix} -4 & 8 & 22 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

5.6 Lien entre diagonalisabilité et polynômes annulateurs

5.6.1 Racines du polynôme minimal

Proposition 5.72
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$*. Les racines de* μ_f *sont exactement les valeurs propres de* f : $\mathrm{Z}_{\mathbb{K}}(\mu_f) = \mathrm{Sp}(f)$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*. Les racines dans* $\mathbb{K}$ *de* μ_A *sont exactement les valeurs propres dans* $\mathbb{K}$ *de* A : $\mathrm{Z}_{\mathbb{K}}(\mu_A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$.

5.6.2 Lemme des noyaux

Proposition 5.73
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ *et* $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ *tels que* $P \wedge Q = 1$.

Alors $\ker (PQ)(f) = \ker P(f) \oplus \ker Q(f)$.

Proposition 5.74
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ *et* $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{K}[X]$ *premiers entre eux deux à deux. On pose* $P = \prod_{i=1}^{k} P_i$.

Alors $\ker P(f) = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker P_i(f)$.

5.6.3 Application à la diagonalisabilité

Définition 5.75
Un polynôme est dit simplement scindé quand il est scindé et à racines simples.

Théorème 5.76
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- f *est diagonalisable*
- μ_f *est simplement scindé*
- *il existe un polynôme annulateur de* f *simplement scindé*
- *le polynôme* $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} (X - \lambda)$ *est un polynôme annulateur de* f

Et sa version matricielle.

Théorème 5.77
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- A *est diagonalisable dans* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

- ▹ *μ_A est simplement scindé*

- ▹ *il existe un polynôme annulateur de A simplement scindé dans $\mathbb{K}[X]$*

- ▹ *le polynôme $\displaystyle\prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} (X-\lambda)$ est un polynôme annulateur de A*

Exercice 5.78

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Calculez $(A+I_3)^3$. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 5.79
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^3 = I_n$. Selon que $\mathbb{K}$ soit égal à $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$, à quelle condition A est-elle $\mathbb{K}$-diagonalisable ?

5.6.4 Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit

Proposition 5.80
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$, F un sous-espace vectoriel de E stable par f et g l'endomorphisme induit par f dans F.

Alors μ_g divise μ_f.

Corollaire 5.81
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par f.

Si f est diagonalisable, alors l'endomorphisme induit par f dans F est aussi diagonalisable.

Exercice 5.82
Soit f un endomorphisme de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Déterminez les sous-espaces vectoriels de E stables par f.

Exercice 5.83 (Codiagonalisation ou diagonalisation simultanée)
Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisables et qui commutent.

Montez qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ sont diagonales.

5.7 Quelques applications de la diagonalisation

5.7.1 Puissances d'une matrice, suites récurrentes linéairement

Un petit lemme déjà rencontré.

Lemme 5.84
Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PBP^{-1}$.

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PB^kP^{-1}$.

Le lemme précédent est particulièrement utile si A est diagonalisable et si on choisit $B = D$, matrice diagonale semblable à A, car calculer les puissances d'une matrice diagonale est très facile.

Grâce à la diagonalisation de A, on peut espérer exprimer la forme générale des suites récurrentes linéaires (voir le chapitre précédent, section sur les polynômes annulateurs).

Exercice 5.85
Soient u, v, w les trois suites réelles telles que $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = -4u_n + 4v_n - 6w_n \\ w_{n+1} = -3u_n + 3v_n - 4w_n \end{cases}$$

Déterminez des expressions de u_n, v_n, w_n en fonction de n.

Cette technique s'applique en particulier aux suites u vérifiant une relation de récurrence linéaire de la forme : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+d} = a_{d-1}u_{n+d-1} + \cdots + a_2u_{n+2} + a_1u_{n+1} + a_0u_n$.

$$\text{On pose alors } X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n+d-1} \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{d-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_d(\mathbb{K}).$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$ et on est ramené au cas précédent.

La matrice A s'appelle la matrice-compagnon du polynôme $P = X^d - a_{d-1}X^{d-1} - \cdots - a_1X - a_0$: elle a la propriété remarquable que son polynôme caractéristique est P, son polynôme minimal est aussi P et donc que ses valeurs propres sont les racines de P. C'est pourquoi le polynôme P est appelé polynôme caractéristique associé à la suite u (cas déjà étudié en première année : $d = 2$).

On en déduit que A est diagonalisable ssi P est simplement scindé et dans ce cas, A possède d valeurs propres distinctes. Dans ce cas, en notant $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes, la suite u est combinaison linéaire des suites géométriques $(\lambda_1^n), \ldots, (\lambda_d^n)$.

Exercice 5.86
Explicitez l'unique suite (u_n) vérifiant

$$u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 5 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n.$$

5.7.2 Systèmes d'équations différentielles

Ce point sera traité dans le chapitre sur les équations différentielles linéaires.

5.8 Endomorphismes trigonalisables, matrices trigonalisables

5.8.1 Définition et propriétés

Définition 5.87
Un endomorphisme est dit trigonalisable quand il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.

Une matrice carrée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ quand elle est semblable à une matrice triangulaire dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque 5.88

- Si un endomorphisme (une matrice) est diagonalisable, alors il (elle) est trigonalisable.
- Si une matrice est trigonalisable, ses valeurs propres sont les nombres sur la diagonale de toute matrice triangulaire semblable.

Exercice 5.89
On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 7 \\ 5 & 4 & -8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et f un endomorphisme de matrice M. Déterminez les éléments propres de M. Est-elle diagonalisable ? En complétant une famille libre de vecteurs propres, déterminez une base $\mathscr{B}$ de l'espace où la matrice de f est triangulaire supérieure, puis trigonalisez M.

Exercice 5.90
Soit f un endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -5 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Montrez que f n'est pas diagonalisable mais est trigonalisable et donnez une base de trigonalisation de f. Donnez une forme générale pour A^n.

Quand un endomorphisme ou une matrice n'est pas diagonalisable, on peut espérer qu'il ou elle est trigonalisable : faute de grives, on se contente de merles !

Remarque 5.91
On ne confondra pas la trigonalisation d'une matrice carrée et la transformation par lignes (ou colonnes) des matrices vue en première année ! Seule la trigonalisation fournit des matrices semblables ! La transformation par lignes ne conserve que le rang !

5.8.2 Caractérisation équivalente

La trigonalisabilité est beaucoup plus courante que la diagonalisabilité, comme on le voit grâce aux résultats suivants.

Proposition 5.92
Un endomorphisme (une matrice) est trigonalisable ssi il (elle) est scindé(e).

En particulier, quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tous les endomorphismes sont trigonalisables, toutes les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ sont trigonalisables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

En pratique, quand on cherche à trigonaliser un endomorphisme, on peut chercher une base dans laquelle la matrice est triangulaire supérieure avec des 1 ou des 0 sur la sur-diagonale et des 0 sur les diagonales partielles encore au-dessus (c'est démontrable, mais c'est difficile à démontrer, cela s'appelle le théorème de Jordan – hors-programme –).

Théorème 5.93
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- ▹ *f est trigonalisable*
- ▹ *χ_f est scindé*
- ▹ *μ_f est scindé*
- ▹ *il existe un polynôme annulateur de f scindé*

Et sa version matricielle.

Théorème 5.94
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- ▹ *A est trigonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*
- ▹ *χ_A est scindé*
- ▹ *μ_A est scindé*
- ▹ *il existe un polynôme annulateur de A qui est scindé dans $\mathbb{K}[X]$*

Exercice 5.95

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculez A^2, puis A^3. La matrice A est-elle diagonalisable ? trigonalisable ? Dans l'affirmative, diagonalisez ou trigonalisez la.

5.8.3 Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème 5.96
Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme (d'une matrice carrée) est un polynôme annulateur.

Corollaire 5.97
Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique. Donc en dimension n, le polynôme minimal est de degré au plus n.

Les polynômes minimal et caractéristique partagent les mêmes racines dans $\mathbb{C}$ (en fait dans tout corps $\mathbb{K}$) mais pas avec les mêmes ordres de multiplicité : si f est scindé, alors en notant $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les k valeurs propres distinctes de f, on peut écrire

$$\chi_f = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{\alpha_i} \qquad \text{et} \qquad \mu_f = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{\beta_i}$$

où pour tout $i \in [\![1 \,;\, k]\!]$, $1 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$.

5.8.4 Sous-espaces caractéristiques

Définition 5.98
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme scindé. On écrit $\chi_f = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont les k valeurs propres distinctes de f.

Les sous-espaces caractéristiques de f sont les noyaux $\ker (f - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{\alpha_i}$.

Proposition 5.99
Les sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme scindé sont supplémentaires et stables par f.

Théorème 5.100
Tout endomorphisme scindé possède une base dans laquelle sa matrice est diagonale par blocs telle que :

- *il y a autant de blocs que de valeurs propres : à chaque valeur propre, on associe un unique bloc ;*
- *chaque bloc est de la forme $\lambda I_r + U$ où λ est la valeur propre associée au bloc, r est l'ordre de multiplicité de λ et U est une matrice strictement triangulaire supérieure de $\mathscr{M}_r(\mathbb{K})$*

Toute matrice scindée est semblable à une matrice diagonale par blocs vérifiant les conditions précédentes.

Corollaire 5.101
La dimension d'un sous-espace caractéristique est l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée.

5.9 Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes

5.9.1 Généralités

Définition 5.102
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On dit que u est nilpotent quand il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est nilpotente quand il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$.

Le plus petit indice p satisfaisant à la condition précédente s'appelle l'indice de nilpotence de u (de A).

Proposition 5.103
Toute matrice strictement triangulaire (supérieure ou inférieure) est nilpotente. Par conséquent, les matrices semblables à une matrice strictement triangulaire sont nilpotentes.

Dans la décomposition en sous-espaces caractéristiques, on a vu apparaître des matrices $\lambda I_r + U$: les matrices U sont nilpotentes.

L'ensemble des matrices nilpotentes n'a pas de structure particulière : en général, la somme et le produit de deux matrices nilpotentes ne sont pas nilpotents. Néanmoins, avec une condition de commutation supplémentaire, on a quelques résultats.

Proposition 5.104
Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices nilpotentes.

Si A et B commutent, alors $A + B$ et AB sont nilpotentes.

On a bien sûr les mêmes résultats concernant les endomorphismes nilpotents.

5.9.2 Éléments propres d'un nilpotent

Proposition 5.105
Un endomorphisme en dimension n est nilpotent ssi son polynôme caractéristique est X^n, i.e. s'il est scindé et admet 0 comme unique valeur propre.

Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente ssi son polynôme caractéristique est X^n, i.e. si elle est scindée et admet 0 comme unique valeur propre.

L'indice de nilpotence dans ces deux cas est alors le degré du polynôme minimal ; il est donc inférieur ou égal à n.

Mis à part la matrice nulle, aucune matrice nilpotente n'est diagonalisable : c'est une idée parfois utile pour prouver qu'une matrice est nulle (diagonalisable et nilpotente implique nulle).

Proposition 5.106
Tout endomorphisme nilpotent est trigonalisable : il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure stricte. Réciproquement, si un endomorphisme est trigonalisable et n'a que 0 *pour valeur propre, alors il est nilpotent.*

Toute matrice nilpotente est trigonalisable : elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte. La réciproque est vraie.

5.9.3 Application aux sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme

Proposition 5.107
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Pour toute valeur propre λ de f, si α est l'ordre de multiplicité de λ dans le polynôme minimal de f, le sous-espace caractéristique associé est aussi le noyau $\ker(f - \lambda \mathrm{id}_E)^\alpha$.

On peut même démontrer mieux.

Proposition 5.108
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$, $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$ et α l'ordre de multiplicité de λ dans le polynôme minimal de f.

Alors la suite des noyaux $\left(\ker(f - \lambda \mathrm{id}_E)^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante jusqu'au rang α, puis constante à partir du rang α :

$$\{0\} \subsetneq \ker(f - \lambda \mathrm{id}_E) \subsetneq \ker(f - \lambda \mathrm{id}_E)^2 \subsetneq \ldots \subsetneq \ker(f - \lambda \mathrm{id}_E)^\alpha = \ker(f - \lambda \mathrm{id}_E)^{\alpha+1} = \ldots$$

Chapitre 6

Intégrales généralisées

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Chapitre 7

Intégrales à paramètre

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Chapitre 8

Espaces préhilbertiens réels

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Chapitre 9

Endomorphismes dans un espace euclidien

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Chapitre 10

Fonctions vectorielles

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Deuxième partie

Exercices

Chapitre 1

Espaces vectoriels normés

⋆ Exercice proche du cours
⋆⋆ Exercice de difficulté normale
⋆ ⋆ ⋆ Exercice difficile (voire très difficile)
+ Exercice à faire en priorité

+ ⋆ ⋆ Exercice 1.1 (Exercice 1)
Soit u une suite réelle bornée. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \left\{u_p \mid p \geqslant n\right\}$, $a_n = \inf U_n$ et $b_n = \sup U_n$.

(1) Justifiez l'existence des suites a et b et étudiez leur monotonie, ainsi que leur convergence.

(2) Montrez que u converge ssi a et b ont la même limite.

Note culturelle : la limite de a s'appelle la limite inférieure de u, notée $\underline{\lim}\, u$ et celle de b est la limite supérieure, notée $\overline{\lim}\, u$.

+⋆ Exercice 1.2 (Exercice 2)
Montrez que les applications N introduites ci-dessous sont des normes :

(1) si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, l'application N définie sur $\mathbb{R}^n$ par $N(X) = \|AX\|_2$;

(2) sur $E = \mathscr{C}^1([a\,;\,b], \mathbb{K})$, $N(f) = |f(a)| + \displaystyle\int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t$;

(3) pour des réels $\alpha_0 < \cdots < \alpha_n$ fixés, l'application N définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $N(P) = \max\limits_{k \in [\![0;n]\!]} |P(\alpha_k)|$.

⋆ Exercice 1.3 (Exercice 3)
Sur $E = \mathbb{R}^2$, on définit

$$\|(x, y)\| = \max(|x|, |x + 2y|).$$

Démontrez que $\|\cdot\|$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$. Représentez graphiquement la boule-unité.

+ ★ ★ Exercice 1.4 (Exercice 4)
Les normes définies dans l'exercice 2 sont-elles équivalentes à la norme $\|\cdot\|_\infty$, la norme $\|\cdot\|_1$, la norme $\|\cdot\|_2$?

+★ Exercice 1.5 (Exercice 5)
Soit $\theta \not\equiv 0\,[\pi]$. Montrez que $(\sin(n\theta))$ et $(\cos(n\theta))$ divergent.

+★ Exercice 1.6 (Exercice 6)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que la suite $\left(A^k\right)$ converge. Montrez que sa limite est la matrice d'un projecteur.

★★ Exercice 1.7 (Exercice 7)
Cet exercice prolonge le premier.

Soit u une suite vérifiant la propriété

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ \ p \geqslant n \geqslant N \implies \left|u_n - u_p\right| \leqslant \varepsilon.$$

Montrez que u est bornée, puis en vous servant des suites a et b définies comme ci-dessus, montrez que u converge.

Note culturelle : on dit que u est une suite de Cauchy et on a donc montré que toute suite de Cauchy converge.

+ ★ ★ Exercice 1.8 (Exercice 8)
On note ℓ_1 l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que la série $\sum u_k$ soit absolument convergente, et on pose :

$$\forall u = (u_k) \in \ell_1,\ \ N(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|\,.$$

(1) Justifiez que ℓ_1 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(2) Montrez que N est une norme sur ℓ_1. On notera désormais $\|u\|_1$ pour $N(u)$.

(3) Justifiez que, si $\left(u^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de ℓ_1 convergeant vers la suite $a \in \ell_1$ pour la norme 1, alors

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \ u_k^{(n)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} a_k.$$

(4) Montrez que la réciproque est fausse.
Indication : on pourra étudier l'exemple où, pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, $u_k^{(n)} = \exp\left(\dfrac{-k}{n+1}\right)$.

+★ Exercice 1.9 (Exercice 9)
Soit E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites bornées muni de la norme infinie.

Montrez que les applications $u \longmapsto (u_{n+1} - u_n)$ et $u \longmapsto \dfrac{u_0 + \cdots + u_n}{n+1}$ sont des applications continues de E dans E.

+ ★ ★ Exercice 1.10 (Exercice 10)
Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $A = (a_{ij})$ on pose $\|A\| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

(1) Montrez que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.

(2) Montrez que l'application $A \longmapsto {}^t A$ est un endomorphisme continu et déterminez sa norme subordonnée.

★★ Exercice 1.11 (Exercice 11)
Soit $E = \mathscr{C}^0([0\,;1], \mathbb{R})$. On pose $A = \{f \in E \mid f \geqslant 0\}$ et pour $f \in E$, $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f|$.

(1) Montrez que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur E.

(2) Déterminez $\mathring{A}$ dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$, puis dans $(E, \|\cdot\|_1)$.

(3) On pose $D = \mathscr{D}^1([0\,;1], \mathbb{R})$ le sous-espace des fonctions dérivables et P le sous-espace des fonctions polynômes.
Déterminez les intérieurs de P et D dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

★★ Exercice 1.12 (Exercice 12)
Cet exercice prolonge le précédent, les notations sont reprises.

Soit $u : E \longrightarrow E$ qui à toute fonction f de E associe sa primitive qui s'annule en 0. Vérifiez que u est un endomorphisme de E.

Est-il continu de $(E, \|\cdot\|_?)$ dans $(E, \|\cdot\|_?)$ (vous étudierez les quatre possibilités) ? Quand c'est le cas, déterminez la norme subordonnée de u.

+ ★ ★ Exercice 1.13 (Exercice 13)
Soit $E = \left\{f \in \mathscr{C}^1([0\,;1], \mathbb{R}) \,\middle|\, f(0) = f(1) = 0\right\}$. Pour $f \in E$, on pose $\|f\| = \sup\limits_{[0;1]} |f'|$.

(1) Montrez que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.

(2) Soit $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 f$. Montrez que φ est continue et déterminez $|||f|||$.

$+\star\star$ Exercice 1.14 (Exercice 14)
Soient E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.

(1) Montrez que si $F \neq E$, alors $\mathring{F} = \varnothing$ et $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.

(2) Montrez que si F est un hyperplan, alors F est fermé ou dense dans E.

$+\star$ Exercice 1.15 (Exercice 15)
Soient E un espace vectoriel normé et A une partie de E.

Montrez que $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A et $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A. Montrez que la frontière de A est un fermé d'intérieur vide.

$\star$ Exercice 1.16 (Exercice 16)
Une intersection d'ouverts est-elle toujours un ouvert ? Une réunion de fermés est-elle toujours un fermé ?

$+\star$ Exercice 1.17 (Exercice 17)
Montrez que si A est une partie convexe d'un espace vectoriel normé E, alors il en est de même pour $\overline{A}$ et $\mathring{A}$.

$\star\star$ Exercice 1.18 (Exercice 18)
Soient E un espace vectoriel normé, A une partie de E et $x \in E$. On dit que x est un point d'accumulation de A quand il existe une suite injective de $A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x. On dit que x est un point isolé de A quand il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \cap A = \{x\}$.

(1) Exemples. On pose $A = \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ dans $\mathbb{R}$: montrez que tous les points de A sont isolés, que le seul point d'accumulation de A est 0 et que A n'est pas fermé. On pose $B = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \,\middle|\, (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$: quels sont les points d'accumulation de B ?

(2) Montrez que x est un point d'accumulation ssi pour tout $r > 0$, $B(x, r) \cap A$ est un ensemble infini.

(3) On note A' l'ensemble des points d'accumulation de A et A^d l'ensemble des points isolés dans A. Montrez que $\overline{A} = A' \sqcup A^d$.

(4) Montrez que A' est un fermé.

★★ Exercice 1.19 (Exercice 19)
Soient E, F deux espaces vectoriels normés et $f : E \longrightarrow F$. Montrez l'équivalence entre les propositions :

(1) f est continue

(2) $\forall A \in \mathscr{P}(E),\ \ f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$

(3) $\forall B \in \mathscr{P}(F),\ \ f^{-1}\left(\mathring{B}\right) \subseteq \overbrace{f^{-1}(B)}^{\circ}$

+★★ Exercice 1.20 (Exercice 20)
Soient A, B deux fermés disjoints d'un espace vectoriel normé E.

(1) Montrez que $\{x \in E \mid d(x, A) > d(x, B)\}$ est un ouvert.

(2) Montrez qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $A \subseteq U$ et $B \subseteq V$.

+★★ Exercice 1.21 (Exercice 21)
Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Pour $r > 0$, on pose $V(A, r) = \{x \in E \mid d(x, A) < r\}$.

Montrez que $V(A, r)$ est un ouvert de E et $\bigcap_{r>0} V(A, r) = \overline{A}$.

+★★ Exercice 1.22 (Exercice 22)
Soient E un espace vectoriel normé, K un compact de E, $k \in [0\ ;1[$ et $f : K \longrightarrow K$ telle que

$$\forall (x, y) \in K^2,\ \ \|f(x) - f(y)\| \leqslant k\,\|x - y\|\,.$$

Soit u la suite définie par u_0 quelconque dans K et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Montrez que u converge et que sa limite est l'unique point fixe de f.

★★ Exercice 1.23 (Exercice 23)
Soient E un espace vectoriel normé et A une partie non-vide de E. On appelle diamètre de A, noté $\delta(A)$, la borne supérieure dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ des $\|x - y\|$ quand $(x, y) \in A^2$.

(1) Montrez que $\delta(A) < +\infty$ ssi A est bornée.

(2) Quel est le diamètre d'une boule ?

(3) Montrez que si A est compacte, alors il existe $(a, b) \in A^2$ tel que $\delta(A) = \|a - b\|$. Est-ce encore vrai si on suppose seulement A bornée ? A fermée ?

$+\star\star$ Exercice 1.24 (Exercice 24)
Soient E un espace vectoriel normé et A, B deux parties non-vides de E. On pose $d(A, B) = \inf_{(a,b)\in A\times B} \|a-b\|$, appelé distance de A à B.

(1) Montrez que si $d(A, B) > 0$, alors A et B sont disjointes, mais que la réciproque est fausse.

(2) Montrez que si A et B sont compactes, alors $d(A, B)$ est en fait un minimum plutôt qu'une borne inférieure.

(3) Montrez que ce résultat reste vrai si E est de dimension finie, l'une des deux parties est compacte et l'autre fermée.

(4) Est-ce encore vrai si on suppose seulement A et B fermées ?

$+\star\star$ Exercice 1.25 (Exercice 25)
Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et $\left(B_n = \overline{B}(a_n, r_n)\right)$ une suite de boules fermées, décroissantes pour l'inclusion, telle que $r_n \longrightarrow 0$.

(1) Montrez que la suite (a_n) admet une sous-suite convergeant vers un vecteur a.

(2) Montrez que $a_n \longrightarrow a$.

(3) Montrez que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \{a\}$.

$\star\star$ Exercice 1.26 (Exercice 26)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrez que l'ensemble des projecteurs est fermé dans $\mathscr{L}(E)$. Est-il borné ? Compact ? Connexe par arcs ?

$\star\star$ Exercice 1.27 (Exercice 27)
Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $\varepsilon > 0$. On pose $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |f(x) - y| \leqslant \varepsilon\right\}$.

(1) Montrez que E est connexe par arcs.

(2) Montrez que si f est une fonction affine, alors E est une partie convexe.

(3) Montrez que la réciproque est vraie.

★★ Exercice 1.28 (Exercice 28)
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et H un hyperplan de E.

(1) Montrez que $E \setminus H$ possède deux composantes connexes par arcs qui sont ouvertes.

(2) Soit B une partie de H telle que $H \neq B$. Montrez que $E \setminus B$ est connexe par arcs.

★★ Exercice 1.29 (Exercice 29)
Soient E un espace vectoriel normé et A, B deux parties de E telles que B est connexe par arcs et B rencontre à la fois A et $E \setminus A$.

Montrez que B rencontre la frontière de A.

★★ Exercice 1.30 (Exercice 30)
Deux parties d'un espace vectoriel normé sont dites homéomorphes quand il existe une bijection continue de l'une dans l'autre telle que la réciproque soit aussi continue.

(1) Montrez que tout intervalle ouvert est homéomorphe à $\mathbb{R}$.

(2) Montrez qu'un intervalle qui contient l'une de ses bornes réelles ne peut pas être homéomorphe à $\mathbb{R}$.

(3) Montrez que toute boule ouverte d'un espace vectoriel normé E est homéomorphe à E.

(4) Montrez qu'aucune boule fermée de E n'est homéomorphe à E.

★★★ Exercice 1.31 (Exercice 31)
Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, autre que $\{0\}$.

(1) Montrez que $a = \inf G \cap \mathbb{R}_+^*$ existe.

(2) Montrez que $G = a\mathbb{Z}$ si $a > 0$ ou G est dense dans $\mathbb{R}$ si $a = 0$.

(3) On pose $G = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ (G est le sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ engendré par 1 et $\sqrt{2}$) et $r = \sqrt{2} - 1$. En considérant la suite (r^n), montrez que G est dense dans $\mathbb{R}$.
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et périodique de périodes 1 et $\sqrt{2}$. Que peut-on dire de f ?

(4) Soient a, b deux réels distincts et non-nuls, on pose $G = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$. Montrez que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, puis que G est dense dans $\mathbb{R}$ ssi $\dfrac{a}{b}$ est un rationnel.
Application : montrez que les ensembles $\{\cos n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $\{\sin n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sont denses dans $[-1\,;\,1]$.

★★★ Exercice 1.32 (Exercice 32)
Soit $E = \mathscr{C}^0([0\,;\,1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie $\|f\| = \sup\limits_{[0;1]} |f|$. On note $\overline{B}(0,1)$ la boule-unité fermée.

Soit (t_n) une suite injective à valeurs dans $[0\,;\,1]$. Pour $f \in E$, on pose $L(f) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{f(t_n)}{2^n}$.

(1) Montrez que L est une forme linéaire continue sur E.

(2) Déterminez $K = \sup\limits_{f \in \overline{B}(0,1)} |L(f)|$.

(3) Montrez que si la suite (t_n) converge ou si elle est dense dans $[0\,;\,1]$, K n'est pas atteinte.

(4) Donnez un exemple de suite (t_n) pour laquelle K est atteinte. Donnez une condition nécessaire et suffisante sur la suite t pour que K soit atteinte.

★★★ Exercice 1.33 (Exercice 33)
Soient E un espace vectoriel normé et u une forme linéaire non-nulle et continue sur E. On pose $H = \ker u$ et $K = \sup\limits_{x \in E \setminus \{0\}} \dfrac{|u(x)|}{\|x\|}$.

(1) Justifiez l'existence de K.

(2) Montrez que pour tout $a \in E$, $d(a, H) = \dfrac{|u(a)|}{K}$.

Exercice 1.34 (Oral CCMP, 1)
Soient E un espace vectoriel normé réel et B sa boule-unité ouverte. Montrez que E et B sont homéomorphes (*i.e.* il existe une bijection de E dans B qui est continue et dont la réciproque est aussi continue).

Exercice 1.35 (Oral CCMP, 2)
Soient E un espace vectoriel normé réel et C, D deux parties de E telles que $C \subseteq D \subseteq \overline{C}$ et C convexe. Montrez que D est connexe par arcs.

Exercice 1.36 (Oral CCMP, 3)
Soient E un espace vectoriel normé réel, K un compact de E et $f : K \longrightarrow K$ telle que

$$\forall (x, y) \in K^2,\ x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

(1) Montrez que f possède un unique point fixe.

(2) Soit u la suite définie par u_0 quelconque dans K et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrez que u converge vers le point fixe de f.

Exercice 1.37 (Oral CCMP, 4)
Soit u une suite réelle bornée telle que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$. Montrez que l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est un intervalle.

Exercice 1.38 (Oral Centrale, 5)
Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ tel que pour tout $g \in G$ il existe un voisinage V de g tel que $G \cap V = \{g\}$.

(1) Montrez que pour tout compact K de $\mathbb{C}^*$, $G \cap K$ est fini.

(2) Montrez que $G \cap \mathbb{U}$ est un groupe cyclique.

(3) On suppose que G n'est pas contenu dans $\mathbb{U}$. Soit $A = \{|x| \mid x \in G \text{ et } |x| > 1\}$. Montrez que A possède un plus petit élément. Déduisez-en G.

Exercice 1.39 (Oral Centrale, 6)
Soient E, F deux espaces vectoriels normés de dimensions finies et $f : E \longrightarrow F$. On dit que f est propre quand pour tout compact K de F, $f^{-1}(K)$ est un compact de E.

(1) Montrez que si f est propre, alors l'image d'un fermé de E est un fermé de F.

(2) Montrez que f est propre ssi $\|f(x)\| \xrightarrow[\|x\| \longrightarrow +\infty]{} +\infty$.

Exercice 1.40 (Oral X, 7)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, U_n l'ensemble des polynômes réels unitaires de degré n et A_n l'ensemble des polynômes de U_n qui sont simplement scindés (*i.e.* ayant n racines réelles distinctes).

(1) Montrez que A_n est un ouvert de U_n.

(2) Déterminez l'adhérence de A_n.

Chapitre 2

Séries numériques et vectorielles : révisions et compléments

⋆ Exercice proche du cours
⋆⋆ Exercice de difficulté normale
⋆ ⋆ ⋆ Exercice difficile (voire très difficile)
+ Exercice à faire en priorité

⋆ Exercice 2.1 (Exercice 1)

(1) Montrez que la série de terme général $u_n = \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{2n^2}$ est convergente.

(2) Montrez que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \operatorname{Arctan} \dfrac{n}{n+1} - \operatorname{Arctan} \dfrac{n-1}{n}$.

(3) Déduisez-en la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

⋆ Exercice 2.2 (Exercice 2)

Justifiez que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{2n-1}{n^3-n}$ converge et déterminez sa somme (indication : décomposition en éléments simples).

⋆⋆ Exercice 2.3 (Exercice 3)

Donnez la nature des séries suivantes (α désigne une constante strictement positive, x un réel dans $]-1\,;1[$) :

(1) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln^n n}{n^{\ln n}}$

(2) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

(3) $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$

(4) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n \, n^\alpha}{n!}$

(5) $\sum \frac{(-1)^n \ln n}{n^\alpha}$

(6) $\sum \ln\left(1+x^n\right)$

(7) $\sum \frac{\sin n}{2^n}$

(8) $\sum 2\ln\left(n^3+1\right) - 3\ln\left(n^2+1\right)$

(9) $\sum \frac{\sin n \sin \frac{1}{n}}{n}$

(10) $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{(-1)^n+n}$

(11) $\sum_{n\geqslant 0} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$

(12) $\sum \sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}$

(13) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\ln n + \sin \frac{2\pi n}{3}}$

(14) $\sum_{n\geqslant 1} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e}\right)$

(15) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\ln n \ln\left(\operatorname{ch} n\right)}$

(16) $\sum \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 t}{n^2+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$

★★ Exercice 2.4 (Exercice 4)
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

(1) Déterminez a et b pour que la série de terme général $\ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$ converge. Dans ce cas, donnez la valeur de sa somme.

(2) Faites de même avec la série de terme général $\sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$.

★★ Exercice 2.5 (Exercice 5)
Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la série de terme général $u_n = \operatorname{ch}^\alpha n - \operatorname{sh}^\alpha n$ converge-t-elle ? Dans ce cas, donnez un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k$.

★★ Exercice 2.6 (Exercice 6)

On pose $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n} k^{3/2}$. Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge-t-elle ? Dans ce cas, donnez un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

★★ Exercice 2.7 (Exercice 7, séries associées à des suites définies par récurrence)

(1) Soit u la suite définie par récurrence par $u_1 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{n\mathrm{e}^{u_n}}$.
Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$?

(2) Soit u la suite définie par récurrence par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$.
Quelle est la nature de la série $\sum \left(\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}\right)$? Puis celle de $\sum u_n$? Donnez un équivalent de $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

(3) Soit u la suite définie par récurrence par $u_0 \in \left]0\,;\pi\right[$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \sin u_n$.
Quelle est la nature de la série $\sum \left(\dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}\right)$? Puis celle de $\sum u_n$? Donnez un équivalent de $\sum_{k=0}^{n}$.

★★ Exercice 2.8 (Exercice 8)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $P(x) \geqslant 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{\mathrm{e}^k + P(k)}$.

(1) Justifiez l'existence de u_n.

(2) Montrez que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

★★ Exercice 2.9 (Exercice 9)

Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.

(1) Justifiez l'existence de u_n.

(2) Montrez que $\dfrac{u_n + u_{n+1}}{2}$ est le reste d'une série alternée absolument convergente.

(3) Déduisez-en la nature de la série $\sum u_n$.

★★ Exercice 2.10 (Exercice 10, utilisation de développements limités ou asymptotiques)

(1) Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$ converge.

(2) Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge.

(3) Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{1+(-1)^n\, n}$ converge.

(4) Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$ converge.

(5) Déterminez la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} (-1)^n \frac{\ln\left(n+(-1)^n\sqrt{n}\right)}{n}$.

(6) Déterminez la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{1+(-1)^n\sqrt{n}}$.

★★ Exercice 2.11 (Exercice 11)
Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{(-1)^n + n^\alpha}}$ converge-t-elle ?

★★ Exercice 2.12 (Exercice 12, formule de Stirling)

Montrez que la suite de terme général $\dfrac{n!}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{\mathrm{e}}{n}\right)^n$ converge vers un réel strictement positif L (indication : passer au logarithme et penser à une série).

Soit $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t \,\mathrm{d}t$. On montre que $u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ et que $u_{2n} = \dfrac{\pi\,(2n)!}{2^{2n+1}\,(n!)^2}$. En admettant ces résultats, montrez la formule de Stirling :

$$n! \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

★★ Exercice 2.13 (Exercice 13)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $u_n = \dfrac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^a}$.

(1) Dans le cas où $a \leqslant 0$ ou $a > 1$, quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$?

(2) On suppose désormais que $0 < a \leqslant 1$ et on pose $v_n = u_{2n-1} + u_{2n}$. Montrez que la série $\sum v_n$ converge. Déduisez-en la nature de la série $\sum u_n$.

★★ Exercice 2.14 (Exercice 14)

Soient u une suite strictement positive et $\alpha > 0$.

Montrez que les séries de termes généraux u_n, $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$, $w_n = \ln(1+u_n)$ et $x_n = \displaystyle\int_0^{u_n} \frac{1}{1+x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ sont de même nature.

★★ Exercice 2.15 (Exercice 15)

Soit u une suite réelle qui ne s'annule pas telle que $\dfrac{u_{2n+1}}{u_{2n}} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} a$ et $\dfrac{u_{2n}}{u_{2n-1}} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} b$.

Montrez que si $|ab| < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.

★★ Exercice 2.16 (Exercice 16)

Soit u une suite réelle positive décroissante.

Montrez que si $\sum u_n$ converge, alors $u_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

La réciproque est-elle vraie ?

★★ Exercice 2.17 (Exercice 17)

Soit $(u_n)_{n \geqslant 1}$ une suite réelle strictement positive et bornée telle que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ diverge. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose S_n la somme partielle d'indice n de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$.

(1) Montrez que $\dfrac{u_n}{S_n} \sim \ln \dfrac{S_n}{S_{n+1}}$. Déduisez-en la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{u_n}{S_n}$.

(2) Étudiez la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ quand $\alpha \in \,]0\,;1[$.

(3) Soit $\alpha > 1$. Montrez que $\dfrac{u_n}{S_n^\alpha} \leqslant \displaystyle\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$. Déduisez-en la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$.

★★ Exercice 2.18 (Exercice 18)
Soit u une suite strictement positive. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

On suppose que $u_n s_n$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Déterminez un équivalent simple de u_n.

★★ Exercice 2.19 (Exercice 19)
Soit u la suite définie par récurrence par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + u_n^2$. On pose $v_n = \frac{1}{2^n} \ln u_n$, puis $w_n = v_{n+1} - v_n$.

(1) Montrez que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

(2) Montrez que la suite (v_n) converge vers un réel $\ell > 0$. On pose alors $A = \mathrm{e}^{\ell} > 1$.

(3) Montrez que $u_n \sim A^{2^n}$.

★★★ Exercice 2.20 (Exercice 20, transformation d'Abel)
Soient u une suite réelle et v une suite complexe. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

On suppose que la suite u est positive et décroissante de limite nulle et que la suite V est bornée.

(1) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = u_n V_n - \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) V_k$.

(2) Déduisez-en que la série $\sum u_n v_n$ converge.

Applications :

(3) Soit w une suite complexe telle que $\sum w_n$ converge. Montrez que pour tout $a > 0$, $\sum \frac{w_n}{n^a}$ converge aussi.

(4) Soient $a > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Donnez la nature des séries $\sum \frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^a}$, $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n^a}$ et $\sum \frac{\sin(n\theta)}{n^a}$.

(5) Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \geqslant \frac{1 - \cos(2x)}{2}$. Déterminez la nature des séries $\sum \frac{|\cos(n\theta)|}{n^a}$ et $\sum \frac{|\sin(n\theta)|}{n^a}$.

⋆⋆⋆ Exercice 2.21 (Exercice 21)
Soit u une suite positive de limite nulle. On appelle U_n la somme partielle d'indice n de la série $\sum u_n$ et on suppose qu'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n - nu_n| \leqslant M$.

(1) Montrez que pour tout $n \geqslant 2$, $\left|\dfrac{U_n}{n} - \dfrac{U_{n-1}}{n-1}\right| \leqslant M\left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}\right)$.

(2) Montrez que la série $\sum u_n$ converge.

⋆⋆⋆ Exercice 2.22 (Exercice 22)
Soit $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ une série convergente à termes positifs.

(1) Montrez que $\dfrac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

(2) Montrez que la série $\sum \dfrac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n\,(n+1)}$ converge et montrez que sa somme est la même que celle de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.

Exercice 2.23 (Oral Saint-Cyr, 1)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$. Déterminez la nature de la série $\sum u_n$. Donnez un équivalent de $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Exercice 2.24 (Oral IMT, 2)
Soit $\alpha > 0$. Donnez un équivalent de $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln^\alpha k$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Exercice 2.25 (Oral CCINP, 3)
Soit u la suite définie par récurrence par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n}$.

(1) Montrez que (u_n) converge et déterminez sa limite.

(2) Déterminez la limite de $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$. Déduisez-en un équivalent de u_n.

Exercice 2.26 (Oral CCINP, 4)
Montrez que pour $n \geqslant 1$, l'équation $x^n + \sqrt{n}x - 1 = 0$ admet une unique solution x_n dans $[0\,;1]$.

Étudiez la suite (x_n) et montrez qu'elle converge vers 0.

Trouvez un équivalent de x_n et étudiez la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_n$.

Exercice 2.27 (Oral CCINP, 5)
Montrez que la suite (u_n) définie par $u_0 \in [0\,;1[$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + u_n^2\right)$ converge vers 0 et donnez la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 2.28 (Oral CCINP, 6)
Quelle est la nature de la série de terme général $\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n\,(n+1)}}\right)$?

Exercice 2.29 (Oral CCINP, 7)
Soient $x, y > 0$. Représentez graphiquement l'ensemble des couples (x, y) tels que la série $\sum \dfrac{x^n}{y^n + n^x}$ converge.

Exercice 2.30 (Oral CCMP, 8)
Étudiez la convergence de la suite (a_n) définie par $a_0 > 0$ et $a_{n+1} = 1 - \mathrm{e}^{-a_n}$.

Déterminez la nature des séries $\sum (-1)^n a_n$ et $\sum a_n^2$.

Déterminez la nature de la série $\sum a_n$ (on pourra étudier la série $\sum \ln \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$).

Exercice 2.31 (Oral CCINP, 9)
Soient (a_n) une suite positive et (u_n) définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2}}{2}$.

(1) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leqslant \dfrac{a_n}{2}$.

(2) Montrez que si la série $\sum a_n$ converge, alors la suite (u_n) converge.

(3) La réciproque est-elle vraie ? Indication : considérer $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Exercice 2.32 (Oral IMT, 10)
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+3} u_n$. On pose $(v_n) = \left(n^2 u_n\right)$.

(1) Déterminez la nature de la série de terme général $\ln \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

(2) Déduisez-en la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 2.33 (Oral Centrale, 11)

Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^2 - 1}$ converge et donnez la valeur de sa somme.

Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{n^2}{\left(n^2 + 1\right)^2}$ converge et donnez une valeur de n pour que sa somme partielle soit une valeur approchée de sa somme à 10^{-4} près.

Exercice 2.34 (Oral Centrale, 12)

(1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrez que la suite $(H_n - \ln n)_{n \geqslant 1}$ converge.

(2) Déduisez de la question précédente la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

(3) Pour $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$. Calculez $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n) - 1}{n}$.

Exercice 2.35 (Oral Centrale, 13)
Si (u_n) est une suite réelle telle que $u_0 = 0$, on pose alors $(v_n)_{n \geqslant 1}$ la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n(u_n - u_{n-1})$.

On note P_1 la propriété « la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} v_n$ converge » et P_2 la propriété « il existe ℓ tel que $u_n \longrightarrow \ell$ et $\sum (\ell - u_n)$ converge ».

(1) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u_n = \operatorname{Arctan} n^\alpha$ pour $n \geqslant 1$, étudiez la véracité des propositions P_1 et P_2.

(2) Soit $(a_n)_{n \geqslant 1}$ une suite réelle telle que $\sum a_n$ converge. Montrez que $\sum \dfrac{a_n}{n}$ converge et que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k}{k} = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

(3) Comparez les propriétés P_1 et P_2.

Exercice 2.36 (Oral CCMP, 14)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n\, n^{\alpha}}$ converge-t-elle ?

Exercice 2.37 (Oral CCMP, 15)

Soient $\alpha > 0$ et $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^{\alpha}}$.

(1) On suppose $\alpha > 1$. Montrez que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} R_k = (n+1)\, R_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^{\alpha-1}}$. Déduisez-en la convergence de la série $\sum R_n$.

(2) Étudiez le cas $\alpha \leqslant 1$.

Exercice 2.38 (Oral CCMP, 16)

Soit $(a_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}^*}$.

(1) On suppose que la série $\sum a_n^{1-1/n}$ converge. Montrez que la série $\sum a_n$ converge.

(2) On suppose que la série $\sum a_n$ converge. Montrez que la série $\sum a_n^{1-1/n}$ converge.
Vous introduirez, pour $\lambda > 1$, l'ensemble $\left\{n \in \mathbb{N}^* \;\middle|\; a_n^{1-1/n} \leqslant \lambda a_n\right\}$ et son complémentaire.

(3) Généralisez en remplaçant $a_n^{1-1/n}$ par $a_n^{1-b_n}$ avec une hypothèse adéquate sur la suite (b_n).

Exercice 2.39 (Oral CCMP, 17)

Soit f une permutation de $\mathbb{N}^*$. On pose $E(f) = \left\{\alpha \in \mathbb{R} \;\middle|\; \sum \frac{f(n)}{n^{\alpha}} \text{ converge}\right\}$.

(1) Montrez que $E(f)$ peut être vide. Montrez dans le cas contraire que $E(f)$ est un intervalle minoré par 2 et non-majoré.

(2) Soit $B \geqslant 2$. Montrez l'existence de f telle que $E(f) =]B\,;+\infty[$.

Exercice 2.40 (Oral X, 18)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$.

(1) Montrez que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge. On note ℓ sa limite.

(2) Montrez que $\ell = -\left(1+\sqrt{2}\right) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$.

Exercice 2.41 (Oral X, 19)

Soit $\sum x_n$ une série absolument convergente de réels.

(1) Montrez que pour tout réel $p \geqslant 1$, la série $\sum |x_n|^p$ converge.

(2) Déterminez la limite de $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p$ quand $p \longrightarrow +\infty$.

Exercice 2.42 (Oral X, 20)

Soient $\alpha > 0$ et (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Étudiez la convergence de la série $\sum u_n$.

Chapitre 3

Familles sommables

$\star$ Exercice proche du cours
$\star\star$ Exercice de difficulté normale
$\star\star\star$ Exercice difficile (voire très difficile)
+ Exercice à faire en priorité

$\star\star$ Exercice 3.1 (Exercice 23)

La famille $\left(\dfrac{1}{pq\,(p+q)}\right)_{p,q\geqslant 1}$ est-elle sommable ?

$\star\star$ Exercice 3.2 (Exercice 24)

(1) Soit $\alpha > 0$. Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^\alpha}{2^n}$ est convergente. On note $S(\alpha)$ sa somme.

(2) Dans cette question, on pose $\alpha = 1$ et on note $s = S(1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$. En effectuant le changement d'indice $m = n-1$, montrez que $s = 2\left(s - \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^m}\right)$ et donnez la valeur de $S(1)$.

(3) En vous inspirant de ce qui précède, donnez une expression de $S(2)$ en fonction de $S(1)$ et $S(0)$, puis sa valeur.

(4) Montrez que la famille $\left(\dfrac{(-1)^{m+n}\,m}{2^{m+n}}\right)_{m,n\geqslant 0}$ est sommable et calculez sa somme.

$\star\star$ Exercice 3.3 (Exercice 25)
Soit a un complexe tel que $|a| < 1$.

En utilisant un produit de Cauchy, montrez que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\,a^n = \left(\frac{1}{1-a}\right)^2$.

★★ Exercice 3.4 (Exercice 26)

(1) Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$ et $N \in \mathbb{N}$, que vaut $\displaystyle\sum_{n=N}^{+\infty} z^n$?

(2) Soit $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| < 1$. Montrez que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{1-x^{2p+1}}$.

★★ Exercice 3.5 (Exercice 27)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On rappelle que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

(1) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrez que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+m)} \underset{m \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln m}{m}$.

(2) Montrez que la famille $\left(\dfrac{(-1)^m}{m(m+n^2)}\right)_{m,n \geqslant 1}$ est sommable.

(3) Montrez que la famille $\left(\dfrac{(-1)^m}{(m+n)(m+n-1)}\right)_{m,n \geqslant 1}$ est sommable et donnez la valeur de sa somme.

★★ Exercice 3.6 (Exercice 28)

Pour $n \geqslant 2$, on note $P(n)$ le plus grand diviseur premier de n. On note $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, ... la suite croissante des nombres premiers.

(1) Montrez que pour tout $k \geqslant 3$, $p_{k-1} \leqslant p_k - 2$, puis $\dfrac{p_k}{p_k - 1} \leqslant \sqrt{\dfrac{p_k}{p_{k-1}}}$.

(2) Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{nP(n)}$ converge (indication : pensez à une sommation par paquets).

★★ Exercice 3.7 (Exercice 29)

Soit u une suite complexe.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $H_x = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > x\}$, son adhérence est $\overline{H_x} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geqslant x\}$.

(1) Montrez que s'il existe $s_0 \in \mathbb{C}$ tel que la famille $\left(\dfrac{u_n}{n^{s_0}}\right)_{n \geqslant 1}$ est sommable, alors pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$, la famille $\left(\dfrac{u_n}{n^s}\right)_{n \geqslant 1}$ est sommable.

(2) Quand la famille $\left(\dfrac{u_n}{n^s}\right)_{n \geqslant 1}$ est sommable, on pose $f_u(s) = \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{u_n}{n^s}$.
Montrez que l'ensemble de définition de f_u est, s'il est non-vide, $\mathbb{C}$, un ensemble H_x ou un ensemble $\overline{H_x}$.

(3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $D_n = \left\{(d, d') \in (\mathbb{N}^*)^2 \;\middle|\; dd' = n\right\}$. Montrez que $(\mathbb{N}^*)^2 = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} D_n$.

(4) Soient $(a_n), (b_n)$ deux suites complexes et $s \in \mathbb{C}$ tels que les familles $\left(\dfrac{a_n}{n^s}\right)_{n \geqslant 1}$ et $\left(\dfrac{b_n}{n^s}\right)_{n \geqslant 1}$ soient sommables.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \sum_{d \mid n} a_d b_{n/d}$. Montrez que la famille $\left(\dfrac{c_n}{n^s}\right)_{n \geqslant 1}$ est sommable et que $f_c(s) = f_a(s) \times f_b(s)$.

★★ Exercice 3.8 (Exercice 30)
Cet exercice prolonge le précédent.

On rappelle la définition de l'indicatrice d'Euler : pour $n \in \mathbb{N}^*$, φ_n est le cardinal de l'ensemble $\{k \in [\![1\,;n]\!] \mid k \wedge n = 1\}$.

On définit par récurrence la suite de Möbius : $\mu_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 2$, $\mu_n = -\sum_{\substack{d \mid n \\ d < n}} \mu_d$.

Enfin, on note δ_n le nombre de diviseurs de n et σ_n la somme des diviseurs de n.

On pose $\zeta = f_1$, $\xi = f_\varphi$ et $M(s) = f_\mu$.

(1) Montrez que l'ensemble de définition (au sens précédent) de ζ est H_1. Montrez que ξ est définie sur H_2.

(2) On admet la relation suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n = \sum_{d \mid n} \varphi_d$. Donnez une relation valable sur H_2 liant les fonctions ξ et ζ. Justifiez alors que l'ensemble de définition de ξ est H_2.

(3) On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\mu_n| \leqslant 1$. Donnez une relation entre M et ζ et précisez l'ensemble de définition de M.

(4) Déduisez-en la relation : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\varphi_n}{n} = \sum_{d \mid n} \dfrac{\mu_d}{d}$ en admettant l'unicité des coefficients u_n d'une fonction f_u.

(5) Exprimez f_δ et f_σ en fonction de ζ et précisez leurs ensembles de définition.

Chapitre 4

Rappels et compléments d'algèbre linéaire

⋆ Exercice proche du cours
⋆⋆ Exercice de difficulté normale
⋆ ⋆ ⋆ Exercice difficile (voire très difficile)
+ Exercice à faire en priorité

+ ⋆ ⋆ Exercice 4.1 (Exercice 1)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille libre de E.

(1) Pour $i \in [\![1 ; n]\!]$, on pose $c_i = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq i}} u_k$. Montrez que la famille $(c_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre.

(2) Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. On pose $s = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ et pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $v_i = s + u_i$. Montrez que la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est liée ssi $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = -1$.

(3) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On pose $s = \sum_{i=1}^{n} u_i$ et pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $v_i = s + \lambda u_i$. Montrez qu'il existe exactement deux valeurs de λ pour lesquelles la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est liée.

+ ⋆ ⋆ Exercice 4.2 (Exercice 2)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in [\![0 ; n]\!]$, on pose $P_k = X^k (1 - X)^{n-k}$. Montrez que la famille $\mathscr{F}_n = (P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n [X]$.

+ ⋆ ⋆ Exercice 4.3 (Exercice 3)
Soit f une application d'un ensemble Ω dans $\mathbb{C}$ qui prend une infinité de valeurs.

Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\left(1, f, f^2, \ldots, f^n\right)$ est libre dans l'espace $\mathscr{F}(\Omega, \mathbb{C})$.

+ ★ ★ Exercice 4.4 (Exercice 4)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in [\![0\,;n]\!]$, on pose $P_k = (X+k)^n$. Montrez que la famille $\mathscr{F}_n = (P_0, \ldots, P_n)$ est libre.

★ Exercice 4.5 (Exercice 5)
Soit $a \in \mathbb{C}^*$. $\mathbb{C}$ est vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à z associe $z + a\bar{z}$.

(1) Montrez que f est linéaire.

(2) Montrez que si $|a| \neq 1$, alors f est un automorphisme de $\mathbb{C}$.

(3) Déterminez le noyau et l'image de f dans le cas où $a = \mathrm{e}^{i\alpha}$ (on pourra utiliser l'écriture trigonométrique des complexes).

+★ Exercice 4.6 (Exercice 6)
Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ qui conserve le degré : pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg f(P) = \deg P$.

Montrez que f est un automorphisme de $\mathbb{K}[X]$ (on pourra étudier les restrictions de f à $\mathbb{K}_n[X]$).

+ ★ ★ Exercice 4.7 (Exercice 7)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $P \in \mathbb{K}_n[X]$, on pose $f(P) = \left(X^2-1\right)P' - nXP$.

(1) Montrez que f est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

(2) Montrez que si $P \in \ker f$, alors $X^2 - 1$ divise P, puis justifiez qu'il existe $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P = \left(X^2-1\right)^\alpha Q$ et $(Q(1) \neq 0$ ou $Q(-1) \neq 0)$.

(3) Montrez que si n est impair, alors f est un automorphisme.

(4) Montrez que si n est pair, alors $\ker f$ est une droite vectorielle. Déduisez-en la dimension de $\operatorname{Im} f$.

★★ Exercice 4.8 (Exercice 8)
On pose $E = \mathbb{C}[X]$. Pour $P \in E$, on pose $f(P) = \left(X^2-1\right)P' - 2XP(X)$.

(1) Montrez que $f \in \mathscr{L}(E)$.

(2) Déterminez $\ker f$.

(3) Montrez que $\operatorname{Im} f = \{Q \in C[X] \mid Q'(1) = Q(1) \text{ et } Q'(-1) = -Q(-1)\}$. Indication : restreindre à $\mathbb{C}_n[X]$.

★ Exercice 4.9 (Exercice 9)
Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$.

Montrez que $f(\ker(g \circ f)) = \ker g \cap \operatorname{Im} f$.

+★★ Exercice 4.10 (Exercice 10)
Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $(f, g) \in \mathscr{L}(E, F) \times \mathscr{L}(F, G)$.

(1) Montrez que $\ker(g \circ f) = \ker f \iff \ker g \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

(2) Montrez que $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g \iff \ker g + \operatorname{Im} f = F$.

★★★ Exercice 4.11 (Exercice 11)
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On dit que $g \in \mathscr{L}(F, E)$ est un inverse à droite de f quand $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

(1) Montrez que si f possède deux inverses à droite différents, alors f en possède une infinité.

(2) Montrez que si f possède un unique inverse à droite, alors f est un isomorphisme (vous admettrez l'existence d'un supplémentaire de tout sous-espace vectoriel).

+★★ Exercice 4.12 (Exercice 12)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E.

(1) Montrez que $p + q$ est un projecteur ssi $p \circ q = q \circ p = 0$.

(2) Dans ce cas, montrez alors que $\operatorname{Im}(p + q) = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$ et $\ker(p + q) = \ker p \cap \ker q$.

★★ Exercice 4.13 (Exercice 13)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E tels que $p \circ q = 0$. Soit $r = p + q - q \circ p$.

Montrez que r est un projecteur et précisez ses éléments caractéristiques.

★★ Exercice 4.14 (Exercice 14)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On suppose qu'il existe $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$ tel que $f \circ g - g \circ f = \mathrm{id}_E$.

(1) Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f \circ g^n - g^n \circ f = n g^{n-1}$.

(2) Déduisez-en que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $\left(g^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est libre dans $\mathscr{L}(E)$.

(3) Si E est de dimension finie $p \geqslant 1$, que pouvez-vous conclure ?

★★ Exercice 4.15 (Exercice 15)
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = \mathrm{id}_E$. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $u \in E$, on veut résoudre l'équation $x + af(x) = u$ d'inconnue $x \in E$.

(1) Montrez que pour toutes les valeurs de a, sauf une seule a_0, l'équation a une unique solution que vous calculerez.

(2) Dans le cas où $a = a_0$, donnez une condition nécessaire sur u pour qu'il existe une solution, puis si cette condition est satisfaite, déterminez une solution particulière de l'équation qui soit combinaison linéaire de u et $f(u)$. Concluez.

+★★ Exercice 4.16 (Exercice 16)
Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(E)$.

(1) Montrez que $\mathrm{Im}\, f = \ker f$ et, ssi n est pair, $\mathrm{rg}\, f = \dfrac{n}{2}$ et $f^2 = 0$.

(2) Donnez un exemple d'une telle application linéaire f.

(3) Si les conditions de la question (1) sont satisfaites, alors on pose $r = \dfrac{n}{2}$: montrez qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_r & 0 \end{pmatrix}$ (matrice par blocs).

+★★ Exercice 4.17 (Exercice 17)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrez l'équivalence

$$E = \ker f \oplus \mathrm{Im}\, f \iff \ker f^2 = \ker f \iff \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2.$$

★ Exercice 4.18 (Exercice 18)
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $(f,g) \in \mathscr{L}(E,F)^2$. Montrez que $|\mathrm{rg}\, f - \mathrm{rg}\, g| \leqslant \mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g$.

★★ Exercice 4.19 (Exercice 19)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(u,v) \in \mathscr{L}(E)^2$. On suppose que $u \circ v = 0$ et $u + v \in \mathrm{GL}(E)$. Démontrez que $\mathrm{rg}\, u + \mathrm{rg}\, v = \dim E$.

★★ Exercice 4.20 (Exercice 20)
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.

(1) Soit U un sous-espace vectoriel de E. On pose $\mathscr{A} = \{u \in \mathscr{L}(E,F) \mid U \subseteq \ker u\}$. Montrez que $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E,F)$ tel que pour tout $(f,u) \in \mathscr{L}(E) \times \mathscr{A},\ fu \in \mathscr{A}$ et calculez sa dimension.

(2) Montrez que la réciproque est vraie : si $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E,F)$ tel que pour tout $(f,u) \in \mathscr{L}(E) \times \mathscr{A},\ fu \in \mathscr{A}$, alors il existe U un sous-espace vectoriel de E tel que $\mathscr{A} = \{u \in \mathscr{L}(E,F) \mid U \subseteq \ker u\}$.

+★ Exercice 4.21 (Exercice 21)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1. Montrez que A peut s'écrire comme le produit d'une matrice colonne par une matrice ligne. Déduisez-en $A^2 = \operatorname{tr}(A)\, A$.

+★★ Exercice 4.22 (Exercice 22)
Soit f une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2,\ f(AB) = f(BA)$. Montrez que f est proportionnelle à la trace (indication : faire intervenir la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$).

★★★ Exercice 4.23 (Exercice 23)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et G un sous-groupe de cardinal n de $\mathrm{GL}(E)$.

On pose $F = \{x \in E \mid \forall g \in G,\ g(x) = x\}$.

Montrez que $\dim F = \dfrac{1}{n} \sum_{g \in G} \operatorname{tr} g$. Indication : on pourra utiliser $p = \dfrac{1}{n} \sum_{g \in G} g$.

★ Exercice 4.24 (Exercice 24)
Montrez qu'il n'existe pas de couple de matrices $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ tels que $AB - BA = I_n$.

+★ Exercice 4.25 (Exercice 25)
Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n. On suppose que pour tout $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \operatorname{tr}(AX) = \operatorname{tr}(BX)$. Montrez que $A = B$.

★ Exercice 4.26 (Exercice 26)
Soient u, v les deux suites réelles telles que $u_0 = 1$, $v_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -3u_n + 10v_n$ et $v_{n+1} = -3u_n + 8v_n$.

Donnez des expressions de u_n et v_n en fonction de n.

★★ Exercice 4.27 (Exercice 27)
Soient u, v, w les trois suites réelles telles que $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{3}{2}u_n - \dfrac{1}{2}v_n + \dfrac{1}{2}w_n \\ v_{n+1} = 5u_n - \dfrac{5}{2}v_n + 2w_n \\ w_{n+1} = 4u_n - \dfrac{5}{2}v_n + 2w_n \end{cases}$$

Donnez des expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n et leurs limites quand n tend vers $+\infty$.

+★★ Exercice 4.28 (Exercice 28)
Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$. On suppose connaître P un polynôme annulateur de A et Q un polynôme annulateur de B.

On pose $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{K})$.

(1) Montrez que PQ est un polynôme annulateur de M dans le cas où $C = 0$.

(2) Montrez que ce résultat reste vrai même si C n'est pas nulle. Indication : penser à un produit par blocs.

+★★ Exercice 4.29 (Exercice 29)
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et P un polynôme annulateur de A. On définit $B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ par blocs : $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

(1) Calculez pour $k \in \mathbb{N}$ la matrice B^k en distinguant les cas k pair et k impair.

(2) On pose $Q(X) = P\left(X^2\right)$. Montrez que Q est un polynôme annulateur de B.

+★★ Exercice 4.30 (Exercice 30)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit $B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ par blocs : $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$.

(1) Calculez pour $k \in \mathbb{N}$ la matrice B^k.

(2) Déterminez un polynôme annulateur de B.

+ ★ ★ Exercice 4.31 (Exercice 31)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{K}_n[X]$. On pose $d : P \longmapsto P'$, endomorphisme de E, et $f : P \longmapsto P + P'$.

(1) Donnez un polynôme annulateur de d. Déduisez-en un polynôme annulateur de f.

(2) Montrez que f est un automorphisme, puis exprimez son inverse à l'aide de f.

(3) Vérifiez que $f^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k d^k$.

+ ★ ★ Exercice 4.32 (Exercice 32)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $f(M) = M + \operatorname{tr}(M) A$.

(1) Montrez que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

(2) Déterminez un polynôme annulateur de f de degré 2.

(3) Dans quels cas f est-il un automorphisme ? Calculez f^{-1} quand c'est possible.

(4) Dans le cas contraire, vérifiez que f est un projecteur et déterminez ses éléments caractéristiques.

+ ★ ★ Exercice 4.33 (Exercice 33)
Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$.

On suppose que f possède un polynôme annulateur P vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.

Montrez qu'on a alors $\operatorname{Im} f \oplus \ker f = E$.

Exercice 4.34 (Oral CCINP, 1)
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et p, q deux endomorphismes de E.

On suppose que $p + q = \mathrm{id}_E$ et $\operatorname{rg} p + \operatorname{rg} q \leqslant \dim E$.

Montrez que p et q sont deux projecteurs.

Exercice 4.35 (Oral IMT, 2)
Soient E un espace vectoriel de dimension supérieure à 2 et f, g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g \circ f = f$.

(1) Montrez que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des projecteurs.

(2) Que peut-on dire des rangs de f, $f \circ g$ et $g \circ f$?

(3) Montrez que $f \circ g$ est un projecteur sur $\operatorname{Im} f$, parallèlement à un sous-espace contenant $\ker g$.

(4) On suppose désormais qu'on a aussi $g \circ f \circ g = g$. Que dire des rangs de f et g ?

(5) Montrez que $E = \operatorname{Im} f \oplus \ker g$.

Exercice 4.36 (Oral TPE, 3)
Soient E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$.

(1) Montrez que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Im} f^{k+1} \subseteq \operatorname{Im} f^k$.

(2) Montrez que s'il existe un entier p tel que $\operatorname{Im} f^{p+1} = \operatorname{Im} f^p$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Im} f^{p+k} \subseteq \operatorname{Im} f^p$.

(3) Déduisez-en que $\operatorname{Im} f^{n+1} = \operatorname{Im} f^n$.

Exercice 4.37 (Oral TPE, 4)
Montrez que $P \longmapsto P - P'$ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et donnez son endomorphisme réciproque.

Exercice 4.38 (Oral Centrale, 5)
Soient E un espace vectoriel de dimension finie non-nulle et u, v deux endomorphismes de E.

(1) Montrez que $|\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v| \leqslant \operatorname{rg}(u+v) \leqslant \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v$.

(2) Soient F un sous-espace de E et G, H deux supplémentaires de F dans E. On pose p le projecteur sur F parallèlement à G et q celui sur H parallèlement à F. Montrez que $\operatorname{rg}(p+q) = \operatorname{rg} p + \operatorname{rg} q$.

Exercice 4.39 (Oral Centrale, 6)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ une famille libre de E^* (note : E^* est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des formes linéaires sur E) et $\psi \in E^*$.

(1) Montrez que $\psi \in \operatorname{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_p) \iff \displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} \ker \varphi_i \subseteq \ker \psi$.

(2) On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrez que les conditions de la question précédente sont encore équivalentes à l'existence d'un réel $M > 0$ tel que $\forall x \in E,\ |\psi(x)| \leqslant M \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} |\varphi_i(x)|$.

Exercice 4.40 (Oral CCMP, 7)
Soient n, k deux entiers tels que $2 \leqslant k \leqslant n$. On pose $A_k = \left(a_{i\,j}^{(k)}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i\,j}^{(k)} = 1$ si $i - j = k - 1$, les autres coefficients étant nuls.

(1) Calculez ${}^t A_k A_k$.

Soit p un projecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que $p \neq \mathrm{id}$.

(2) Justifiez que $\mathrm{rg}\, p < n$.

(3) Montrez que p est la composée de deux endomorphismes nilpotents.

Exercice 4.41 (Oral CCMP, 8)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f, g deux endomorphismes de E.

On suppose f inversible et g de rang 1.

Montrez que $f + g$ est inversible ssi $\mathrm{tr}\left(g \circ f^{-1}\right) \neq -1$.

Exercice 4.42 (Oral CCMP, 9)
Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{pn}(\mathbb{R})$.

Montrez que $p + \mathrm{rg}\,(I_n + AB) = n + \mathrm{rg}\,(I_p + BA)$.

Exercice 4.43 (Oral CCMP, 10)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $E = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid AMB = 0\}$.

Montrez que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et donnez sa dimension.

Exercice 4.44 (Oral CCMP, 11)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résolvez dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ l'équation $M = \mathrm{Com}\, M$.

Chapitre 5

Réduction des endomorphismes

Sommaire

Exercices

⋆ Exercice proche du cours
⋆⋆ Exercice de difficulté normale
⋆ ⋆ ⋆ Exercice difficile (voire très difficile)
+ Exercice à faire en priorité

⋆⋆ Exercice 5.1 (Exercice 1)

(1) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que P ne soit pas constant. On note $a_1, \ldots, a_m$ les racines distinctes de P et $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ leurs ordres de multiplicité. Rappelez la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.

(2) Application : déterminez les éléments propres de l'endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$ défini par $f(P) = (2X+1)P - \left(X^2-1\right)P'$. On rappelle que la décomposition en éléments simples est unique.

(3) Même question avec $f(P) = \left(X^3+X\right)P' - \left(3X^2-1\right)P$.

⋆⋆ Exercice 5.2 (Exercice 2)

Soit $E = \mathscr{C}^0([0\,;1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on définit l'application $\varphi(f) : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de la façon suivante : $\varphi(f)(0) = f(0)$ et pour tout $x \in]0\,;1]$, $\varphi(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

(1) Montrez que φ est un endomorphisme de E.

(2) Montrez que 0 n'est pas valeur propre de φ.

(3) Montrez que 1 est valeur propre de φ et donnez le sous-espace propre associé.

(4) Déterminez les autres valeurs propres de φ.

★★ Exercice 5.3 (Exercice 3)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $f(M) = \lambda M + \operatorname{tr}(M) A$.

(1) Justifiez rapidement que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

(2) Déterminez un polynôme annulateur de f de degré 2.

(3) Déduisez-en les éléments propres de f.

(4) À quelle condition l'endomorphisme f est-il inversible ?

★★ Exercice 5.4 (Exercice 4)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $f(M) = AM$.

Montrez que $\operatorname{Sp}(f) = \operatorname{Sp}(A)$. Pour tout λ valeur propre de f, donnez une relation entre les dimensions des sous-espaces propres $\operatorname{sep}(f, \lambda)$ et $\operatorname{sep}(A, \lambda)$.

★★ Exercice 5.5 (Exercice 5, matrices stochastiques)
Soit $A = (a_{i\,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall (i, j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2,\ \ a_{i\,j} \geqslant 0 \text{ et } \forall i \in [\![1\,;\,n]\!],\ \ \sum_{j=1}^{n} a_{i\,j} = 1.$$

(1) Montrez que 1 est valeur propre de A.

(2) Montrez que toutes les valeurs propres complexes de A sont de module inférieur ou égal à 1.

(3) On suppose que A est strictement stochastique, c'est-à-dire que A est stochastique et que ses coefficients sont strictement positifs. Montrez que 1 est la seule valeur propre de A de module 1.

★★ Exercice 5.6 (Exercice 6)
Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a\neq b$ et $A=\begin{pmatrix} 0 & a & \cdots & a \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & 0 \end{pmatrix}$.

(1) On pose J la matrice remplie de 1. Montrez que $t\longmapsto \det(XI_n-A-tJ)$ est une fonction polynôme en t de degré au plus 1, puis calculez $\det(XI_n-A-tJ)$ en fonction de t.

(2) Montrez que le polynôme caractéristique de A est $\dfrac{1}{b-a}\left(b\,(X+a)^n-a\,(X+b)^n\right)$.

(3) Montrez que si $b=-a$, alors les images dans $\mathbb{C}$ des valeurs propres de A sont sur une droite que vous préciserez, sinon elles sont sur un cercle.

★★ Exercice 5.7 (Exercice 7)
Soient $n\geqslant 2$, $U\in\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$ et $A=U\,{}^tU$. On note ${}^tUU=\left(s\right)$ qui est une matrice carrée à un seul élément.

(1) Montrez que le polynôme X^2-sX est annulateur de A. Déduisez-en que A a au plus deux valeurs propres.

(2) Quel est le rang de A ? Précisez les valeurs propres de A.

(3) Déterminez le polynôme caractéristique de A.

(4) Déterminez les sous-espaces propres de A.

★ Exercice 5.8 (Exercice 8)

Soit $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.

(1) Déterminez le polynôme caractéristique de A.

(2) Déduisez-en sans calcul supplémentaire que A est diagonalisable.

(3) Déterminez les sous-espaces propres de A.

(4) Diagonalisez A, c'est-à-dire explicitez une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A=PDP^{-1}$.

(5) Calculez A^n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

★ Exercice 5.9 (Exercice 9, réduction en élégance)

Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 4 & 8 & -12 \end{pmatrix}$.

(1) Calculez efficacement le rang de B. Déduisez-en une valeur propre de B ainsi que la dimension du sous-espace propre associé.

(2) Démontrez sans calculer le polynôme caractéristique que B admet une autre valeur propre et qu'elle est simple.

(3) Déduisez-en le polynôme caractéristique de B. Vérifiez le résultat en le calculant grâce à sa définition.

(4) La matrice B est-elle diagonalisable ?

★ Exercice 5.10 (Exercice 10)
Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 7 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

★ Exercice 5.11 (Exercice 11)
Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

★ Exercice 5.12 (Exercice 12)
Déterminez une condition nécessaire et suffisante sur le triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pour que la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

⋆ Exercice 5.13 (Exercice 13)

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui n'est pas de la forme λI_2.

Montrez que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ ssi $(a-d)^2 + 4bc \neq 0$.

À quelle condition A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$?

⋆⋆ Exercice 5.14 (Exercice 14)

Soit $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & -5 \\ -5 & 3 & 3 \\ -5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. On recherche les éventuelles racines carrées de A, c'est-à-dire les matrices $R \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $R^2 = A$.

(1) Montrez que A est diagonalisable et déterminez une matrice D diagonale semblable à A avec le moins de calculs possible.

(2) Soit $S \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ une racine carrée de D. Montrez que S et D commutent puis montrez que S est diagonale.

(3) Déterminez les racines carrées S de D.

(4) Déduisez-en toutes les racines carrées R de A. Combien y en a-t-il ? Pourquoi ?

(5) Énoncez des conjectures quant au nombre de racines carrées d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ plus générale, en discutant selon la nature de ses éléments propres.

⋆⋆ Exercice 5.15 (Exercice 15)

Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(1) Diagonalisez la matrice A.

(2) On suppose que F est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ stable par u. Montrez que F est engendré par une famille de vecteurs propres de u.

(3) Déterminez tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par u.

⋆ Exercice 5.16 (Exercice 16)

Même exercice avec $A = \begin{pmatrix} -1 & -6 & -2 \\ 2 & 7 & 2 \\ -6 & -18 & -5 \end{pmatrix}$.

⋆ Exercice 5.17 (Exercice 17)

Montrez que les suites $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence suivante sont combinaisons linéaires de trois suites géométriques réelles (α^n), (β^n) et (γ^n) : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+3} = -\frac{5}{12}u_{n+2} + \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{12}u_n$.

Déterminez à quelle condition sur (u_0, u_1, u_2) ces suites sont convergentes.

⋆ Exercice 5.18 (Exercice 18)

Même exercice avec $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+3} = \frac{3}{2}u_{n+2} - \frac{3}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n$ en prenant des suites géométriques complexes.

Montrez que les suites (u_n) sont combinaisons linéaires de trois suites réelles simples que l'on précisera. Déterminez à quelle condition sur (u_0, u_1, u_2) ces suites sont convergentes.

⋆ Exercice 5.19 (Exercice 19)

Les matrices suivantes sont-elles trigonalisables ? Donnez alors, quand c'est possible, une matrice triangulaire supérieure semblable.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

⋆ Exercice 5.20 (Exercice 20)

Soient $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) Déterminez le polynôme caractéristique de C. Est-elle diagonalisable ? Trigonalisable ?

(2) Déterminez les éléments propres de C.

(3) Montrez que la matrice C est semblable à la matrice T. On pourra considérer l'endomorphisme u canoniquement associé à C et construire, par analyse-synthèse, une base $\mathscr{B}$ où la matrice de u est T.

(4) Montrez que T peut s'écrire $D+N$ où D est diagonale, N est nilpotente et D et N commutent. Déduisez-en, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T^n puis C^n.

(5) On considère trois suites $(x_n), (y_n), (z_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - 3y_n - z_n \\ y_{n+1} = x_n - 2y_n - z_n \\ z_{n+1} = -2x_n + 6y_n + 3z_n \end{cases}$$

Explicitez x_n, y_n, z_n en fonction de n et de x_0, y_0, z_0.

★★ Exercice 5.21 (Exercice 21)
Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $u^2 + u + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} = 0$.

(1) Soient F un sous-espace stable par u et $x \notin F$. Montrez que $\Pi_x = \mathrm{Vect}(x, u(x))$ est un plan, qu'il est stable par u et qu'il est en somme directe avec F.

(2) Montrez qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, de blocs $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Qu'en déduisez-vous concernant n ?

(3) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de u dans la base canonique. Réduisez A dans $\mathbb{C}$.

(4) Retrouvez que A est $\mathbb{R}$-semblable à une matrice diagonale par blocs, de blocs R.

★★ Exercice 5.22 (Exercice 22)
Soient $p \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathrm{GL}(E)$.

Montrez que f est diagonalisable ssi f^p est diagonalisable.

Est-ce encore vrai si on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$?

★★ Exercice 5.23 (Exercice 23)
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$.

(1) Montrez que si f est diagonalisable, alors f^2 est diagonalisable et $\mathrm{rg}\, f^2 = \mathrm{rg}\, f$.

(2) Montrez que si λ est une valeur propre de f^2 non-nulle et μ est une racine carrée de λ, alors $\mathrm{sep}\left(f^2, \lambda\right) = \ker(f - \mu \mathrm{id}) \oplus \ker(f + \mu \mathrm{id})$.

(3) Montrez que la réciproque de la proposition de la question (1) est vraie.

$\star\star$ Exercice 5.24 (Exercice 24, spectre du polynôme d'une matrice)
Soient $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable et $Q \in \mathbb{K}[X]$.

(1) Montrez que la matrice $Q(M)$ est également diagonalisable. Exprimez le spectre de $Q(M)$ en fonction des valeurs propres de M.

(2) Précisez les sous-espaces propres de $Q(M)$.

(3) Ces résultats restent-ils valables si M est seulement trigonalisable ? Sans hypothèse sur M ?

$\star\star\star$ Exercice 5.25 (Exercice 25)
Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = I_2$. Montrez que $A^{12} = I_2$.

$\star\star$ Exercice 5.26 (Exercice 26)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrez que A est nilpotente ssi pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{tr} A^k = 0$.

$\star\star$ Exercice 5.27 (Exercice 27)
Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. On note $C(f)$ le sous-espace vectoriel des endomorphismes de E qui commutent avec f.

(1) Démontrez que $g \in C(f)$ ssi les sous-espaces propres de f sont stables par g.

(2) Déduisez-en que $\dim C(f) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \omega_\lambda^2$ où ω_λ désigne la multiplicité de la valeur propre λ.

(3) On suppose que les valeurs propres de f sont simples. Démontrez que $\left(\mathrm{id}, f, \ldots, f^{n-1}\right)$ est une base de $C(f)$.

$\star\star$ Exercice 5.28 (Exercice 28)

(1) Montrez que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

(2) Montrez que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs et que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ne l'est pas. Déterminez alors les composantes connexes par arcs de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

(3) Montrez que l'ensemble $D_n(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrez la même chose avec l'ensemble $D_n^+(\mathbb{C})$ des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dont toutes les valeurs propres sont distinctes. Montrez que l'intérieur de $D_n(\mathbb{C})$ est $D_n^+(\mathbb{C})$.

(4) Montrez que $D_2(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(5) Montrez que l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un fermé et qu'il est l'adhérence de $D_n(\mathbb{R})$.

(6) Soit $r \in [\![1 ; n]\!]$. Montrez que l'ensemble des matrices de rang inférieur à r est un fermé et qu'il est l'adhérence de l'ensemble des matrices de rang r.

★★★ Exercice 5.29 (Exercice 29)
Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

(1) Montrez que si l'une des deux matrices est inversible, alors AB et BA ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes ordres de multiplicité.

(2) Montrez que ce résultat reste vrai même sans suppose l'une des deux matrices inversible.

Exercice 5.30 (Oral IMT, 1)
Soient u, v, w trois suites vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 4u_n - 3v_n - 3w_n \\ v_{n+1} = 3u_n - 2v_n - 3w_n \\ w_{n+1} = 3u_n - 3v_n - 2w_n \end{cases}$$

Exprimez u_n, v_n, w_n en fonction de n, u_0, v_0, w_0.

Exercice 5.31 (Oral IMT, 2)
Déterminez les matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5.32 (Oral St-Cyr, 3)

Montrez que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a+b & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$ est diagonalisable et donnez ses éléments propres.

Exercice 5.33 (Oral TPE, 4)

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$.

(1) Déterminez un polynôme annulateur de degré 3 de A.

(2) La matrice A est-elle inversible ?

(3) Est-elle diagonalisable ?

(4) Montrez que les valeurs propres de A^2 sont négatives ou nulles.

Exercice 5.34 (Oral TPE, 5)
Montrez de deux façons différentes que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice 5.35 (Oral IMT, 6)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminez la limite quand $n \longrightarrow +\infty$ de $\begin{pmatrix} \cos \alpha/n & \sin \alpha/n \\ \sin \alpha/n & \cos \alpha/n \end{pmatrix}^n$.

Exercice 5.36 (Oral IMT, 7)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^2 - 2A$ soit diagonalisable et 1 n'est pas valeur propre de A.

Montrez que A est diagonalisable.

Exercice 5.37 (Oral CCINP, 8)

(1) Soient $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres. Montrez que $\operatorname{tr} M^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$.

(2) Pour $n \geqslant 3$, on pose A la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux situés sur les quatre bords, égaux à 1. Déterminez les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

Exercice 5.38 (Oral CCINP, 9)
Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et $A = \left(\alpha^{i+j-2}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

(1) Calculez le rang de A. Déduisez-en ses valeurs propres.

(2) À quelle condition sur α la matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 5.39 (Oral CCINP, 10)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $f(M) = M + 2\,{}^tM$.

(1) Déterminez les valeurs et vecteurs propres de f.

(2) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Calculez sa trace et son déterminant.

Exercice 5.40 (Oral Navale, 11)
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrez que 1 est la seule valeur propre de M ssi pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{tr} M^k = n$.

Exercice 5.41 (Oral Navale, 12)

(1) Diagonalisez la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $B = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$. Montrez que B et C sont semblables.

Exercice 5.42 (Oral CCINP, 13)

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

(1) Exprimez le rang de B en fonction du rang de A.

(2) Trouvez une relation entre χ_A et χ_B. Déduisez-en le spectre de B en fonction de celui de A.

(3) Déterminez les dimensions des sous-espaces propres de B en fonction de celles des sous-espaces propres de A.

(4) Montrez que B est diagonalisable ssi A est diagonalisable et inversible.

Exercice 5.43 (Oral IMT, 14)
Soient E un espace muni d'une base $(e_1, \dots, e_n)$, v un vecteur de E et f l'endomorphisme de E tel que $f(e_1) = \dots = f(e_n) = v$.

(1) Quel est le rang de f ?

(2) Discutez de la diagonalisabilité de f en fonction du vecteur v.

Exercice 5.44 (Oral CCINP, 15)

(1) Montrez que si deux matrices U et V sont semblables, alors pour tout polynôme R, $R(U)$ et $R(V)$ sont semblables.

Soient A, B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$. On pose $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

(2) Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, exprimez $P(M)$ en fonction de $P(A)$, $P'(A)$ et B.

(3) Montrez que si A est diagonalisable et B est nulle, alors M est diagonalisable.

(4) Montrez la réciproque.

Exercice 5.45 (Oral CCMP, 16)

(1) Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = B^2 = 0$ et $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$. Montrez que A et B sont semblables.

(2) Le résultat subsiste-t-il avec les hypothèses $A^3 = B^3 = 0$ et $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$?

Exercice 5.46 (Oral CCMP, 17)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $(AB)^n = 0$. Montrez que $(BA)^n = 0$.

Exercice 5.47 (Oral CCMP, 18)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathscr{L}(E)$.

(1) On suppose que $\operatorname{Vect}(u, v)$ contient un élément inversible. Montrez que $\ker u \cap \ker v = \{0\}$.

(2) Montrez que la réciproque est fausse.

(3) Montrez que si u et v commutent, alors la réciproque est vraie.

Exercice 5.48 (Oral CCMP, 19)

Soient $u \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ non-nul tel que $u^3 = u^2$ et $C(u) = \left\{v \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right) \;\middle|\; u \circ v = v \circ u\right\}$.

Montrez que $C(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ et déterminez sa dimension.

Exercice 5.49 (Oral CCMP, 20)

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et φ l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $\varphi : M \longmapsto M + \operatorname{tr}(AM) A$.

(1) Étudiez la diagonalisabilité de φ.

(2) Calculez $\operatorname{tr} \varphi$ et $\det \varphi$.

Exercice 5.50 (Oral CCMP, 21)

Pour $c \in \mathbb{R}$, on pose $A(c) = \begin{pmatrix} -c & -1 & c \\ -1 & 1-c & 1 \\ c & -1 & -c \end{pmatrix}$.

(1) Déterminez les réels c tels que $A(c)$ ne pas diagonalisable.

(2) Soit d la plus petite de ces valeurs. Trouvez P inversible telle que $P^{-1}A(d)P$ soit triangulaire.

Exercice 5.51 (Oral CCMP, 22)

(1) Soit $x = \cos\dfrac{2\pi}{5}$. Déterminez une équation du second degré à coefficients rationnels dont x est racine, puis donnez les valeurs de x et $\cos\dfrac{4\pi}{5}$.

(2) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 + A^3 + A^2 + A + I_n = 0$. On suppose que la trace de A est un rationnel. Montrez que 4 divise n.

Exercice 5.52 (Oral CCMP, 23)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Montrez que $\det A > 0$.

Exercice 5.53 (Oral CCMP, 24)

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$. Déterminez une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

Exercice 5.54 (Oral CCMP, 25)

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & A \end{pmatrix}$. On suppose que B est diagonalisable. Montrez que A est diagonalisable et que $I_n - A$ est inversible.

Exercice 5.55 (Oral CCMP, 26)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(A)$ est diagonalisable et $P'(A)$ est inversible. Montrez que A est diagonalisable.

Exercice 5.56 (Oral CCMP, 27)
Soit $A = \left(a_{i\,j}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i\,i} = 0$ et $a_{i\,j} = i$ si $i \neq j$.

(1) Montrez qu'un réel λ est valeur propre de A ssi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+\lambda} = 1$.

(2) Montrez que A est diagonalisable. Listez ses valeurs propres avec un encadrement le plus précis possible.

(3) Déterminez la somme des valeurs propres de A. On note μ_n la plus grande d'entre elles. Trouvez $C \in \mathbb{R}$ tel que $\mu_n \sim Cn^2$ quand n tend vers l'infini.

Exercice 5.57 (Oral Centrale, 28)

À quelles conditions $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 2 & 0 \\ d & e & f & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Le cas échéant, diagonalisez A.

Exercice 5.58 (Oral Centrale, 29)

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{pmatrix}$.

(1) Donnez un vecteur propre évident de A.

(2) Calculez le polynôme caractéristique de A et donnez son spectre. Justifiez que A est diagonalisable.

(3) Exprimez, lorsqu'elle existe, la matrice inverse A^{-1} en fonction de I_4, A, A^2 et A^3.

Exercice 5.59 (Oral Centrale, 30)
Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_{AM+B} = \chi_{AM}$.

(1) Montrez qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $B^p = 0$.

(2) Montrez que $BA = 0$.

(3) Réciproquement, soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $B^n = BA = 0$. Montrez que pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_{AM+B} = \chi_{AM}$.

Exercice 5.60 (Oral Centrale, 31)
Soient $\theta_1, \ldots, \theta_p$ des réels distincts modulo 2π et $m_1, \ldots, m_p$ des complexes non-nuls. Le but de l'exercice est de montrer que la suite $\left(m_1 e^{i\theta_1 n} + \cdots + m_p e^{i\theta_p n}\right)$ ne converge pas vers 0.

Par l'absurde, on suppose que $m_1 e^{i\theta_1 n} + \cdots + m_p e^{i\theta_p n} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$.

(1) On note $M_n = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1 n} & \ldots\ldots\ldots & e^{i\theta_p n} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{i\theta_1 (n+p-1)} & \ldots\ldots & e^{i\theta_p (n+p-1)} \end{pmatrix}$. Montrez que $Y_n = M_n \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_p \end{pmatrix} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$.

(2) Montrez que $|\det M_n|$ est une constante non-nulle.

(3) À l'aide du théorème de Cayley-Hamilton, exprimez M^{-1} et trouvez une contradiction.

Exercice 5.61 (Oral ENS, 32)
On considère un automorphisme α de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ qui conserve le produit matriciel, c'est-à-dire tel que pour tout $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\alpha(AB) = \alpha(A)\alpha(B)$.

(1) Montrez que $\alpha(I_n) = I_n$.

(2) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Montrez que $\alpha(A)$ l'est aussi.

(3) On suppose que A est semblable à une matrice diagonale D à coefficients diagonaux tous distincts. Montrez que $\alpha(A)$ est, elle aussi, semblable à D.

(4) Justifiez l'existence de $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\alpha(D) = PDP^{-1}$ puis montrez que $\alpha(E) = PEP^{-1}$ pour toute matrice diagonale E.

(5) Déterminer α.

Problème – Matrices réelles sans valeur propre réelle

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non-nul. Pour alléger les notations, on pose $E_n = \mathscr{M}_{n\,1}(\mathbb{C})$. La lettre X est utilisée ici pour désigner une matrice-colonne, on évitera donc de l'utiliser pour désigner l'indéterminée des polynômes qui sera pour une fois notée x.

Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $S(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Toute matrice Z à coefficients complexes de $\mathscr{M}_{p\,q}(\mathbb{C})$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $X + iY$ où X, Y sont deux matrices réelles de $\mathscr{M}_{p\,q}(\mathbb{R})$. On appelle conjuguée de Z la matrice $\overline{Z} = X - iY$.

D'après les propriétés de la conjugaison dans $\mathbb{C}$, on en déduit que les règles de calcul sont les mêmes : $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$, $\overline{\lambda Z} = \lambda \overline{Z}$ et $\overline{Z_1 . Z_2} = \overline{Z_1} . \overline{Z_2}$.

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On veut montrer l'équivalence entre les propositions suivante :

(α) il existe $(a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m) \in \mathbb{R}^{2m}$ tel que M soit semblable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à la matrice diagonale par blocs

$$\operatorname{diag}(S(a_1,b_1), \ldots, S(a_m,b_m)) = \begin{pmatrix} S(a_1,b_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & S(a_m,b_m) \end{pmatrix}$$

(β) il existe un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ annulateur de M à racines simples non-réelles.

Un cas particulier simple

Soit ω un complexe non-réel. On pose $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \omega z$.

Vérifiez que f est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, que f a un polynôme annulateur réel à racines simples non-réelles et que sa matrice dans une base de $\mathbb{C}$ bien choisie est une matrice $S(a,b)$.

$(\beta) \implies (\alpha)$

Question 1
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $b \neq 0$. Montrez qu'il existe un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ annulateur de $S(a,b)$ à racines simples non-réelles.

Question 2
Montrez l'implication $(\beta) \implies (\alpha)$.

$(\alpha) \implies (\beta)$

Dans cette partie, M est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui annule un polynôme réel à racines simples non-réelles. On appelle f l'endomorphisme de E_n de matrice M dans la base canonique de E_n (autrement dit, pour tout $Z \in E_n$, $f(Z) = MZ$).

Question 3
Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\overline{z} = \lambda z$. Montrez qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda = e^{2i\theta}$ et $e^{i\theta} z$ est un réel.

Question 4
Montrez que n est pair. On note $n = 2m$.

Question 5
Montrez que si λ est une valeur propre de M, alors $\overline{\lambda}$ en est une aussi, puis que les sous-espaces propres $\text{sep}(M, \lambda)$ et $\text{sep}\left(M, \overline{\lambda}\right)$ ont la même dimension.

Question 6
Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de M et Z un vecteur propre de M.

(a) Montrez que $\text{Vect}\left(Z, \overline{Z}\right)$ est un plan stable par f.

(b) On pose $Z = X + iY$ où X, Y sont des matrices réelles. Montrez que (X, Y) est une base de ce plan.

(c) Montrez qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $b \neq 0$ et l'endomorphisme induit par f dans ce plan a pour matrice $S(a, b)$ dans la base (X, Y).

Question 7
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de M. On choisit une base $\left(Z_1, \ldots, Z_p\right)$ de $\text{sep}(M, \lambda)$ et on écrit chaque vecteur sous la forme $Z_k = X_k + iY_k$ où X_k, Y_k sont réelles.

Montrez que les plans $(\text{Vect}(X_k, Y_k))_{1 \leqslant k \leqslant p}$ sont en somme directe et que $\text{sep}(M, \lambda) \oplus \text{sep}\left(M, \overline{\lambda}\right) = \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{p} \text{Vect}(X_k, Y_k)$.

Question 8
Montrez qu'il existe une base de E_n constituée de vecteurs réels dans laquelle la matrice de f est égale à une matrice diagonale par blocs $D = \text{diag}(S(a_1, b_1), \ldots, S(a_m, b_m))$.

Montrez enfin qu'il existe une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = PDP^{-1}$.

Un exemple

On pose $M = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Question 9
On écrit $xI_4 - M$ par blocs $(2,2)$: $xI_4 - M = \begin{pmatrix} A & -4I_2 \\ 2I_2 & B \end{pmatrix}$.

(1) Calculez le produit par blocs $\begin{pmatrix} -4I_2 & A \\ B & 2I_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2I_2 & 0 \\ B & I_2 \end{pmatrix}$. Déduisez-en que $\det(xI_4 - M) = \det(AB + 8I_2)$.

(2) Explicitez le polynôme caractéristique de M. Déterminez ses racines imaginaires pures, puis les autres racines.

Question 10
Montrez que M annule un polynôme réel à racines simples non-réelles.

Vérifiez que les vecteurs-colonnes $\begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \\ 2 \\ 1+i \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 \\ 2-2i \\ 2 \\ 1-i \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de M, puis donnez une matrice $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et une matrice réelle diagonale par blocs D telle que $M = PDP^{-1}$.

Application

Dans cette partie, on suppose que $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ annule un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ à racines simples dans $\mathbb{C}$. On garde les notations introduites précédemment.

On note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$ l'ensemble des valeurs propres réelles et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}(M)$ l'ensemble des valeurs propres complexes non-réelles de M.

Question 11
On pose $G = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M)} \mathrm{sep}(M, \lambda)$ et $H = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}(M)} \mathrm{sep}(M, \lambda)$. Par convention, si M n'a pas de valeur propre réelle, alors $G = \{0\}$ et si M n'a que des valeurs propres réelles, alors $H = \{0\}$.

Montrez que G et H sont supplémentaires dans E_n et qu'ils sont stables par f.

On note g et h les endomorphismes induits par f dans G et H respectivement.

Question 12
Montrez qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E_n telle que $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f) = R = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$ où D est une matrice diagonale réelle et S une matrice diagonale par blocs $\mathrm{diag}(S(a_1, b_1), \ldots, S(a_m, b_m))$. On remarque que R est une matrice réelle.

Question 13

Un exercice classique : soit $(U, V) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$.

(1) Justifiez que la fonction $x \longmapsto \det(U + xV)$ est une fonction polynôme.

(2) Montrez que s'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $\det(U + zV) \neq 0$, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\det(U + xV) \neq 0$.

Application : soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que A et B soient semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$; montrez qu'elles sont alors semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Question 14

Montrez finalement que M et R sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Chapitre 6

Intégrales généralisées

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Chapitre 7

Intégrales à paramètre

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Chapitre 8

Espaces préhilbertiens réels

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Chapitre 9

Endomorphismes dans un espace euclidien

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Chapitre 10

Fonctions vectorielles

⋆⋆ À venir ⋆⋆