

Physique – MPI

Romain Bricout

9 mai 2024

Introduction

Ce document réunit l'ensemble de mes cours de Physique de MPI. Le professeur était M. Jacob. J'ai adapté certaines formulations me paraissant floues ou ne me plaisant pas mais le contenu pur des cours est strictement équivalent. Le document est organisé selon la hiérarchie suivante : partie, chapitre, I), 1), a). Les parties sont celles du programme : mécanique, optique, ... Leur ordre dans ce document est arbitraire et ne reflète pas l'ordre de traitement des chapitres durant l'année.

Les éléments des tables des matières initiale et présentes au début de chaque chapitre sont cliquables (amenant directement à la partie cliquée).

Code couleur des vecteurs (et flèches en général) :

- noir : légendes ou mouvements ;
- violet : champs de pesanteur ;
- rouge : forces, vecteurs densité de courant volumique ;
- bleu : vecteurs unitaires, champs électriques ;
- vert : vecteurs vitesse ou accélération, champs magnétiques ;
- jaune : vecteurs rotation.

Table des matières

I	Mécanique	4
1	Référentiels non-galiléens	5
	Introduction.	5
1.1	Changement de référentiel.	6
1.1.1	Loi de composition des vitesses	6
1.1.2	Loi de composition des accélérations	9
1.2	Notion de forces d'inertie	12
1.2.1	Cas général	12
1.2.2	Cas de R en translation par rapport à R_g	13
1.2.3	Cas de R en rotation uniforme autour d'un axe fixe de R_g	15
1.3	Caractère galiléen approché du référentiel terrestre	18
1.3.1	Les référentiels d'étude	18
1.3.2	Mécanique dans le référentiel terrestre	19
2	Lois du frottement solide	25
II	Optique	26
1	Modèle scalaire des ondes lumineuses	27
2	Superposition de deux ondes lumineuses	28
3	Interféromètres par division du front d'onde	29
4	Interféromètres par division d'amplitude	30

III	Électromagnétisme	31
	Formulaire d'analyse vectorielle	32
	Calcul vectoriel	32
	Coordonnées cartésiennes	32
	Coordonnées cylindriques	33
	Coordonnées sphériques	33
	Théorèmes	33
1	Électrostatique	34
2	Topographie du champ et du potentiel électrostatiques	35
3	Dipôle électrostatique	36
4	Magnétostatique	37
5	Dipôle magnétostatique	38
6	Équations de Maxwell	39
	Introduction	39
6.1	Conservation de la charge	40
6.1.1	Première approche : 1D	40
6.1.2	Généralisation : 3D	42
6.2	Les équations de Maxwell	42
6.2.1	Énoncé	42
6.2.2	Commentaires	42
6.2.3	Compatibilité des équations de Maxwell	43
6.3	Forme intégrale des équations de Maxwell	44
6.3.1	Théorème de Gauss	44
6.3.2	Conservation du flux magnétique	44
6.3.3	Loi de Lenz-Faraday	45
6.3.4	Théorème d'Ampère généralisé	45

6.3.5	Bilan	46
6.3.6	Application : condensateur plan en régime variable	46
6.4	Propagation des champs dans un milieu vide de charges et de courants.	48
6.4.1	Couplage spatio-temporel	48
6.4.2	Équation de propagation	49
6.5	Équations locales des champs statiques	50
6.5.1	Équations de Maxwell en régime stationnaire	50
6.5.2	Conséquences	51
6.5.3	Équations de Poisson et Laplace	51
7	Énergie du champ électromagnétique	53
	Introduction.	53
7.1	Première approche : le conducteur ohmique	53
7.1.1	Modèle de Drude, loi d'Ohm locale	53
7.1.2	Loi d'Ohm intégrale	55
7.1.3	Puissance cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge	56
7.2	Bilan d'énergie électromagnétique	58
7.2.1	Équation locale de conservation	58
7.2.2	Identité de Poynting (HP)	59
7.2.3	Ordres de grandeur	60
7.3	Exemples de bilan d'énergie électromagnétique	61
7.3.1	Conducteur ohmique	61

Première partie

Mécanique

Chapitre 1

Référentiels non-galiléens

Sommaire

Introduction	5
1.1 Changement de référentiel	6
1.1.1 Loi de composition des vitesses	6
1.1.1.1 Cas général	6
1.1.1.2 Cas de R' en translation par rapport à R	7
1.1.1.3 Cas de R' en rotation uniforme autour d'un axe fixe de R	7
1.1.2 Loi de composition des accélérations	9
1.1.2.1 Cas général	9
1.1.2.2 Cas de R' en translation par rapport à R	9
1.1.2.3 Cas de R' en rotation uniforme autour d'un axe fixe de R	10
1.2 Notion de forces d'inertie	12
1.2.1 Cas général	12
1.2.2 Cas de R en translation par rapport à R_g	13
1.2.3 Cas de R en rotation uniforme autour d'un axe fixe de R_g	15
1.3 Caractère galiléen approché du référentiel terrestre	18
1.3.1 Les référentiels d'étude	18
1.3.1.1 Référentiel de Copernic	18
1.3.1.2 Référentiel de Kepler	18
1.3.1.3 Référentiel géocentrique	18
1.3.1.4 Référentiel terrestre local	18
1.3.2 Mécanique dans le référentiel terrestre	19
1.3.2.1 Statique terrestre, champ de pesanteur	19
1.3.2.2 Dynamique terrestre	20
Base locale	20
Mouvement horizontal, vers la droite dans l'hémisphère Nord	21
Mouvement vertical, déviation vers l'Est	22

Introduction

Rappel :

Un référentiel est un système de trois axes de coordonnées lié à un solide de référence (l'observateur) et munie d'une horloge mesurant le temps.

Un référentiel est dit galiléen (ou inertiel) si le principe d'inertie y est vérifié.

Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est galiléen. Le principe fondamental de la dynamique et le principe d'inertie y sont vérifiés.

Cependant, il est parfois judicieux d'analyser le mouvement d'un solide qui a un mouvement quelconque dans un référentiel galiléen dans un autre référentiel où le mouvement se décrit simplement.

Par exemple, dans le référentiel terrestre, la valve d'une roue de vélo qui tourne a une trajectoire cycloïdale alors que dans le référentiel de la roue, elle a une trajectoire circulaire.

1.1 Changement de référentiel

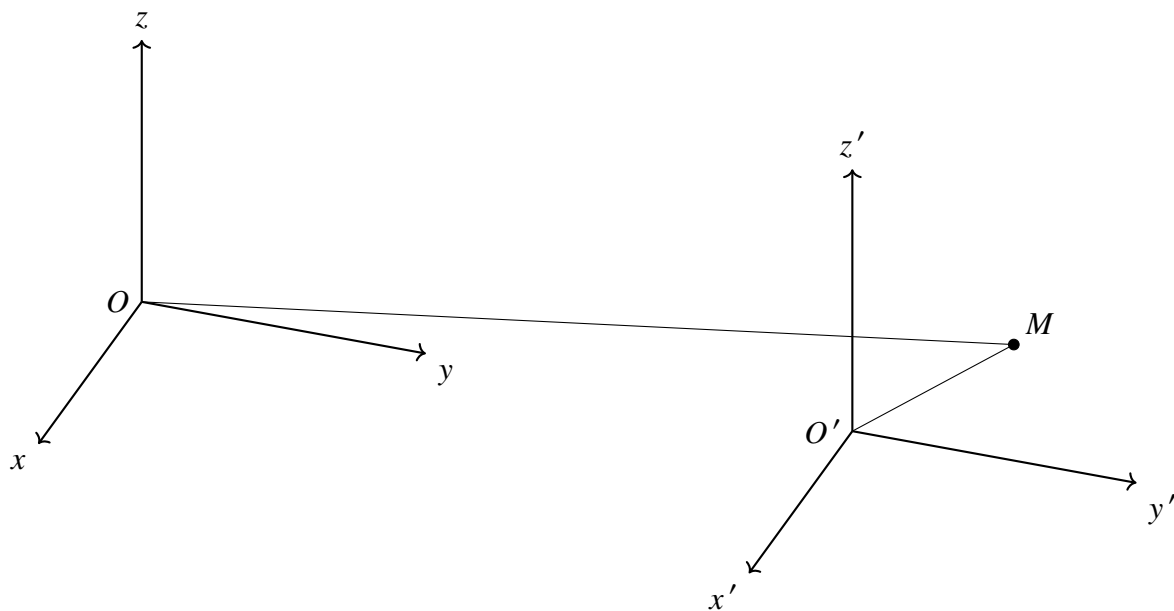
1.1.1 Loi de composition des vitesses

1.1.1.1 Cas général

Soient deux référentiels R et R' associés à deux repères (Ox, Oy, Oz) et $(O'x', O'y', O'z')$ et munis d'horloges identiques H et H' .

Dans le cadre de la cinématique classique (*i.e.* non-relativiste), $H = H'$ donc $t = t'$: le temps est absolu.

C'est valable si $v \ll c$ (en pratique, $v < 0,1c$).



On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$.

On dérive dans R :

On a

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + x'\vec{u}_{x'} + y'\vec{u}_{y'} + z'\vec{u}_{z'}$$

avec $(\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'})$ une base orthonormale directe de R' .

D'où

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_R &= \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \right)_R + \frac{dx'}{dt}\vec{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\vec{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\vec{u}_{z'} \\ &\quad + x' \left(\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} \right)_R + y' \left(\frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} \right)_R + z' \left(\frac{d\vec{u}_{z'}}{dt} \right)_R \end{aligned}$$

On obtient donc la loi de composition des vitesses :

$$\vec{v}(M)_R = \vec{v}(M)_{R'} + \vec{v}_e$$

où

$$\vec{v}_e = \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}}_{\substack{\text{déplacement} \\ \text{de } R' \\ \text{par rapport} \\ \text{à } R}} + \underbrace{x' \left(\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} \right)_R + y' \left(\frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} \right)_R + z' \left(\frac{d\vec{u}_{z'}}{dt} \right)_R}_{\text{rotation de } R' \text{ par rapport à } R}$$

est la vitesse d'entraînement.

1.1.1.2 Cas de R' en translation par rapport à R

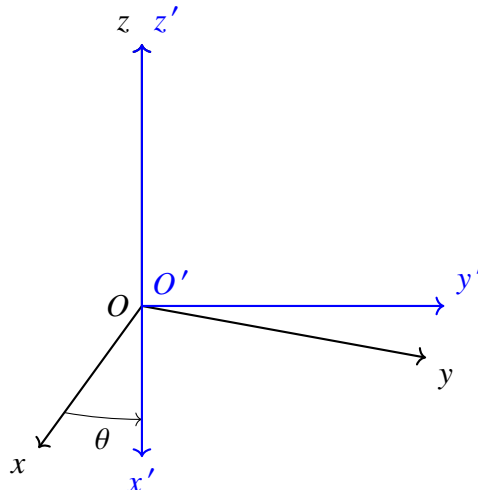
Si R' est en translation par rapport à R alors ils partagent la même base donc $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z) = (\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'})$.

Donc

$$\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$$

La vitesse d'entraînement est indépendante du point étudié (tous les points de R' sont entraînés à la même vitesse).

1.1.1.3 Cas de R' en rotation uniforme autour d'un axe fixe de R



On pose $\omega = \dot{\theta} = \text{cte}$ (rotation uniforme).

On a $\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = \vec{0}$ et comme $\vec{u}_{z'} = \vec{u}_z$ on a $\left. \frac{d\vec{u}_{z'}}{dt} \right)_R = \vec{0}$.

Déterminons $\left. \frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} \right)_R$.

On a $\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} = \underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{=\dot{\theta}=\omega} \left. \frac{d\vec{u}_{x'}}{d\theta} \right)_R$.

En projetant dans la base (\vec{u}_x, \vec{u}_y) , on obtient

$$\begin{cases} \vec{u}_{x'} = \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y \\ \vec{u}_{y'} = -\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y \end{cases}$$

Donc $\left. \frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} \right)_R = \omega \vec{u}_{y'}$.

De même : $\left. \frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} \right)_R = -\omega \vec{u}_{x'}$.

Donc

$$\begin{aligned} \vec{v}_e &= x' \left. \frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} \right)_R + y' \left. \frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} \right)_R \\ &= x' \omega \vec{u}_{y'} - y' \omega \vec{u}_{x'} \end{aligned}$$

On pose $\vec{\omega}$ le vecteur rotation de R' par rapport à R : $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$

On a alors

$$\left. \frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} \right)_R = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_{x'}, \quad \left. \frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} \right)_R = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_{y'}$$

Donc

$$\begin{aligned} \vec{v}_e &= x' (\vec{\omega} \wedge \vec{u}_{x'}) + y' (\vec{\omega} \wedge \vec{u}_{y'}) \\ &= \vec{\omega} \wedge (x' \vec{u}_{x'} + y' \vec{u}_{y'}) \\ &= \vec{\omega} \wedge \underbrace{(x' \vec{u}_{x'} + y' \vec{u}_{y'} + z \vec{u}_z)}_{=\overrightarrow{OM}} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{linéarité de } \wedge \\ \vec{\omega} \wedge \vec{u}_z = \vec{0} \end{array} \right\}$$

D'où

$$\vec{v}_e = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

1.1.2 Loi de composition des accélérations

1.1.2.1 Cas général

On a

$$\begin{aligned}
 \vec{v}(M)_R &= \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \\
 &\quad + \frac{dx'}{dt}\vec{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\vec{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\vec{u}_{z'} \\
 &\quad + x' \left(\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} \right)_R + y' \left(\frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} \right)_R + z' \left(\frac{d\vec{u}_{z'}}{dt} \right)_R \quad \left(\frac{d}{dt} \right)_R \\
 \vec{a}(M)_R &= \frac{d\vec{v}(M)_R}{dt} \Bigg|_R = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} \Bigg|_R \\
 &\quad + x' \left(\frac{d^2\vec{u}_{x'}}{dt^2} \right)_R + y' \left(\frac{d^2\vec{u}_{y'}}{dt^2} \right)_R + z' \left(\frac{d^2\vec{u}_{z'}}{dt^2} \right)_R \\
 &\quad + 2 \frac{dx'}{dt} \left(\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} \right)_R + 2 \frac{dy'}{dt} \left(\frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} \right)_R + 2 \frac{dz'}{dt} \left(\frac{d\vec{u}_{z'}}{dt} \right)_R \\
 &\quad + \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{u}_{x'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{u}_{y'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{u}_{z'}
 \end{aligned}$$

Donc

$$\vec{a}(M)_R = \vec{a}_e + \vec{a}_C + \vec{a}(M)_{R'}$$

où

\vec{a}_e est l'accélération d'entraînement

\vec{a}_C est l'accélération de Coriolis

$\vec{a}(M)_{R'}$ est l'accélération relative de M dans R' .

1.1.2.2 Cas de R' en translation par rapport à R

On a $\vec{u}_{x'} = \vec{u}_x$, $\vec{u}_{y'} = \vec{u}_y$ et $\vec{u}_{z'} = \vec{u}_z$.

Donc $\left(\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} \right)_R = \vec{0}$ et $\left(\frac{d^2\vec{u}_{x'}}{dt^2} \right)_R = \vec{0}$. Idem pour $\vec{u}_{y'}$ et $\vec{u}_{z'}$.



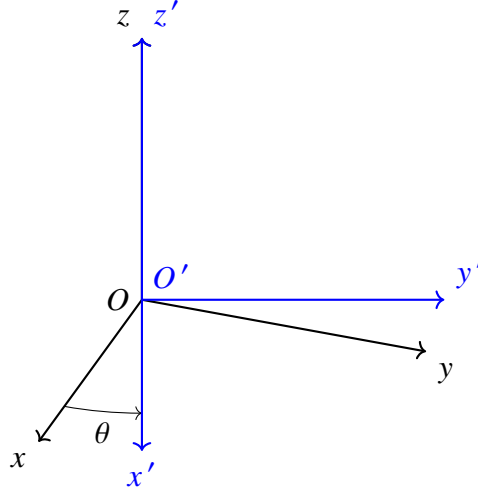
O' n'est pas nécessairement en translation par rapport à O .

On a donc $\vec{a}_C = \vec{0}$ et $\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} \Bigg|_R$ donc

$$\vec{a}(M)_R = \vec{a}(M)_{R'} + \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} \Bigg|_R$$

On remarque que l'accélération d'entraînement ne dépend pas du point de R' étudié.

1.1.2.3 Cas de R' en rotation uniforme autour d'un axe fixe de R



On pose $\omega = \dot{\theta} = \text{cte}$ et le vecteur rotation $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$.

On a

$$\vec{a}_e = \frac{d^2 \overrightarrow{OO'}}{dt^2} \Bigg|_R + x' \frac{d^2 \vec{u}_{x'}}{dt^2} \Bigg|_R + y' \frac{d^2 \vec{u}_{y'}}{dt^2} \Bigg|_R + z \frac{d^2 \vec{u}_z}{dt^2} \Bigg|_R$$

On avait $\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} \Bigg|_R = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_{x'}$, donc $\frac{d^2 \vec{u}_{x'}}{dt^2} \Bigg|_R = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{u}_{x'})$

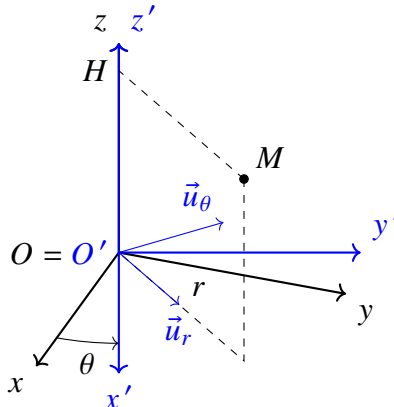
Donc

$$\begin{aligned} \vec{a}_e &= x' \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{u}_{x'}) + y' \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{u}_{y'}) \\ &= \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (x' \vec{u}_{x'} + y' \vec{u}_{y'})) \\ &= \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (x' \vec{u}_{x'} + y' \vec{u}_{y'} + z \vec{u}_z)) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{linéarité de } \wedge \\ \vec{\omega} \wedge \vec{u}_z = \vec{0} \end{array} \right\}$$

D'où

$$\vec{a}_e = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}).$$

On se place dans une base cylindrique et on note H le projeté de M sur (Oz) :



On a $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z = \overrightarrow{HM} + z\vec{u}_z$.

De plus

$$\begin{aligned}\vec{a}_e &= \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (r\vec{u}_r + z\vec{u}_z)) \\ &= \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge r\vec{u}_r) \\ &= \vec{\omega} \wedge \omega r\vec{u}_\theta \\ &= -\omega^2 r\vec{u}_r\end{aligned}$$

Donc

$$\vec{a}_e = -\omega^2 \overrightarrow{HM}$$

où H est le projeté de M sur l'axe de rotation.

Remarques :

- \vec{a}_e dépend de la position de M dans R' et de $\|\overrightarrow{HM}\|$ (distance à l'axe de rotation).
- \vec{a}_e est dirigée vers l'axe de rotation (accélération centripète).

Déterminons maintenant \vec{a}_C :

$$\begin{aligned}\vec{a}_C &= 2 \left(\frac{dx'}{dt} \frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} \right)_R + \frac{dy'}{dt} \frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} \Big|_R + \frac{dz'}{dt} \frac{d\vec{u}_{z'}}{dt} \Big|_R \Bigg) \vec{0} \\ &= 2 \left(\frac{dx'}{dt} \vec{\omega} \wedge \vec{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt} \vec{\omega} \wedge \vec{u}_{y'} \right) \\ &= 2\vec{\omega} \wedge \left(\frac{dx'}{dt} \vec{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt} \vec{u}_{y'} \right) \\ &= 2\vec{\omega} \wedge \left(\frac{dx'}{dt} \vec{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt} \vec{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt} \vec{u}_{z'} \right)\end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} \text{linéarité de } \wedge \\ \vec{\omega} \wedge \vec{u}_{z'} = \vec{0} \end{array} \right\}$

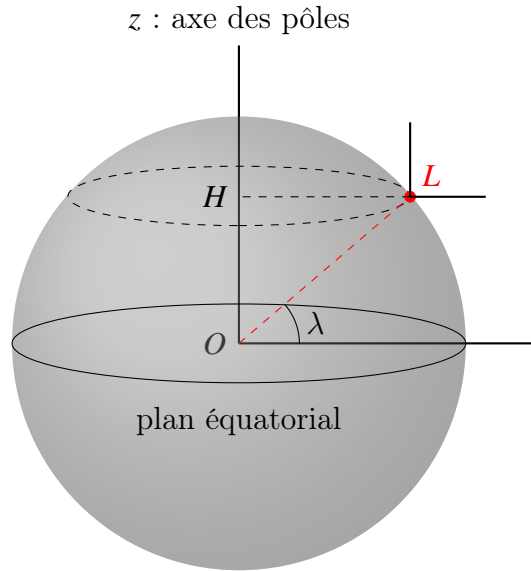
D'où

$$\vec{a}_C = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)_{R'}$$

Remarques :

- Si $\vec{v}(M)_{R'} = \vec{0}$ alors $\vec{a}_C = \vec{0}$.
- La direction de \vec{a}_C dépend de $\vec{v}(M)_{R'}$.

Exercice/exemple : calculons l'accélération d'entraînement du référentiel terrestre par rapport au référentiel géocentrique à Limoges (latitude $\lambda = 49^\circ N$).



Le référentiel terrestre est en rotation uniforme par rapport au référentiel géocentrique : $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$.

H est le projeté de L sur Oz .

On a $\vec{a}_e = -\omega^2 \overrightarrow{HL}$ donc $\|\vec{a}_e\| = \omega^2 HL$.

Or $\omega = \frac{2\pi}{T}$ avec T la durée du jour sidéral (23 h et 56 min).

Donc $\omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

On note $R_T = 6400 \text{ km}$ le rayon de la Terre.

On a $HL = R_T \cos \lambda$.

Donc $a_e = 2,7 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

On compare à $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$: $\frac{a_e}{g} = 2,7 \cdot 10^{-3} \ll 1$.

Il est donc difficile de mettre en évidence l'effet de \vec{a}_e du référentiel terrestre par rapport au référentiel géocentrique.

Remarque : l'accélération d'entraînement est nulle aux pôles et maximale à l'équateur.

1.2 Notion de forces d'inertie

1.2.1 Cas général

Soient R_g un référentiel galiléen et R un référentiel d'étude quelconque.

On a

$$\begin{cases} \vec{v}(M)_{R_g} = \vec{v}(M)_R + \vec{v}_e \\ \vec{a}(M)_{R_g} = \vec{a}(M)_R + \vec{a}_e + \vec{a}_C \end{cases}$$

Soit un point M de masse m soumis à un ensemble de forces \vec{F} dans R_g .

Comme R_g est galiléen, on applique le principe fondamental de la dynamique : $m\vec{a}(M)_{R_g} = \vec{F}$.

On applique la loi de composition des accélérations et on obtient : $m(\vec{a}(M)_R + \vec{a}_e + \vec{a}_C) = \vec{F}$, c'est-à-dire :

$$m\vec{a}(M)_R = \vec{F} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_C.$$

Donc dans un référentiel non-galiléen, le principe fondamental de la dynamique s'écrit avec deux termes supplémentaires :

► $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e$: force d'inertie d'entraînement ;

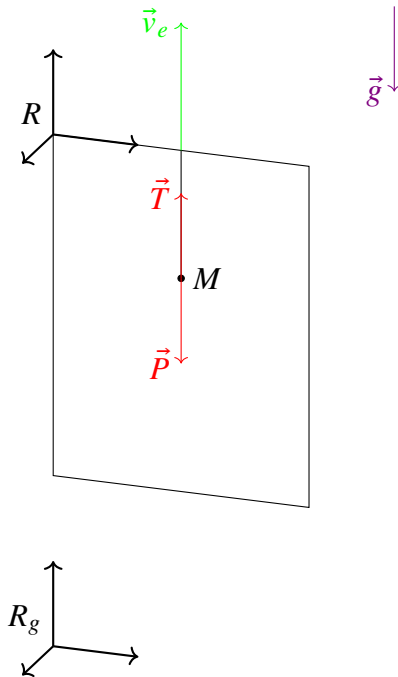
► $\vec{F}_{iC} = -m\vec{a}_C$: force d'inertie de Coriolis.

Remarque : \vec{F} sont des forces véritables, elles ont une origine physique ; \vec{F}_{ie} et \vec{F}_{iC} sont des pseudo-forces dont l'origine est le caractère non-galiléen de R .

Remarque : on a $\vec{F}_{iC} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)_R$ donc $\vec{F}_{iC} \neq \vec{0}$ si R est en rotation par rapport à R_g et si M est en mouvement dans R .

1.2.2 Cas de R en translation par rapport à R_g

Soit un point M de masse m accroché au plafond d'un ascenseur en mouvement vertical rectiligne.



Système : $M(m)$.

Référentiel : R non-galiléen.

Bilan des forces : \vec{P} et \vec{T} .

$\overrightarrow{\text{PFD}} : m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} - m\vec{a}_e \ (\vec{F}_{iC} = \vec{0})$ où

\vec{a}_e est l'accélération d'entraînement de l'ascenseur par rapport à R_g

\vec{a} est l'accélération de M dans R donc ici $\vec{a} = \vec{0}$

$$\vec{P} = m\vec{g}.$$

$$\text{Donc } \vec{0} = m\vec{g} + \vec{T} - m\vec{a}_e$$

$$\text{Donc } \vec{T} = m(\vec{a}_e - \vec{g}).$$

On définit alors le poids apparent $\vec{P}' = -\vec{T} = m(\vec{g} - \vec{a}_e) = m\vec{g}'$ où \vec{g}' est le champ de pesanteur apparent.

Si l'ascenseur accélère vers le haut alors $g' = g - a_e > g$.

Si l'ascenseur accélère vers le bas alors $g' = g - a_e < g$.

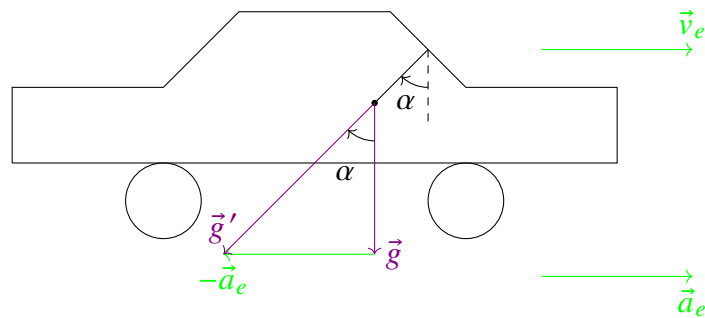
Si l'ascenseur est en chute libre alors $\vec{g} = \vec{a}_e$ donc $\vec{g}' = \vec{0}$: on est en chute libre dans l'ascenseur.

Conclusion : travailler dans un référentiel non-galiléen qui est en translation rectiligne par rapport au référentiel terrestre (galiléen) revient à remplacer \vec{g} par $\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}_e$.



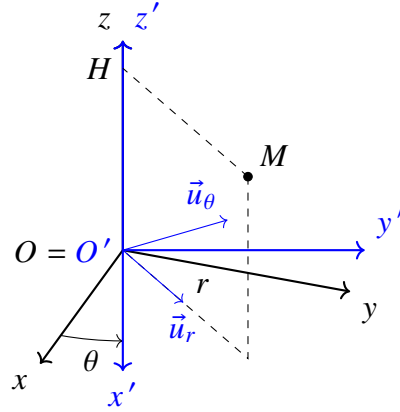
\vec{g} et \vec{a}_e ne sont pas forcément colinéaires.

Exemple : voiture qui accélère.



$$\text{Avec } \alpha = \text{Arctan} \frac{a_e}{g}.$$

1.2.3 Cas de R en rotation uniforme autour d'un axe fixe de R_g



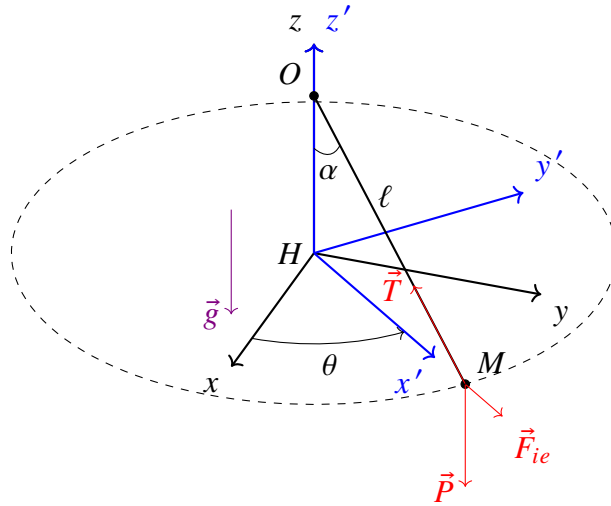
On pose $\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{u}_z$.

On a $\vec{a}_e = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}) = -\omega^2 \overrightarrow{HM}$ avec H le projeté de M sur (Oz) .

Donc $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e = m\omega^2 \overrightarrow{HM}$ (effet centrifuge).

Exemple : pendule conique.

Soit un point M de masse m attaché à un fil de longueur ℓ .



M est en rotation autour de la verticale.

Le référentiel (H, x, y, z) est galiléen et le référentiel $R = (H, x', y', z')$ est non-galiléen et en rotation autour de (Hz) .

Système : $M (m)$.

Référentiel : R non-galiléen.

Bilan des forces : $\vec{P} = m\vec{g}$ et \vec{T} .

PFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$.

Or $\vec{F}_{iC} = \vec{0}$ car $\vec{v}(M)_R = \vec{0}$ et $\vec{F}_{ie} = m\omega^2 \overrightarrow{HM}$.

De plus, on a $HM = \ell \sin \alpha$ donc $\vec{F}_{ie} = m\omega^2 \ell \sin \alpha \vec{u}_r$.

Or M est fixe dans R donc $\vec{a} = \vec{0}$.

Donc $\vec{0} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{ie}$.

On a :

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{\|\vec{F}_{ie}\|}{\|\vec{P}\|} \\ \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} &= \frac{m\omega^2 \ell \sin \alpha}{mg} \\ \omega^2 &= \frac{g}{\ell \cos \alpha} > \frac{g}{\ell} \\ \omega &> \sqrt{\frac{g}{\ell}}. \end{aligned}$$

Le pendule conique ne peut pas tourner trop lentement :

$$f_{\min} = \frac{\omega_{\min}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

Application numérique : avec $\ell = 1$ m, on a $f_{\min} = 0,5$ Hz.

Déterminons maintenant si \vec{F}_{ie} et \vec{F}_{iC} sont conservatives.

On a $\vec{F}_{ie} = m\omega^2 \overrightarrow{HM} = m\omega^2 r \vec{u}_r$ et $d\overrightarrow{OM} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$ donc

$$\begin{aligned} \delta W &= \vec{F}_{ie} \cdot d\overrightarrow{OM} \\ &= m\omega^2 r \vec{u}_r \cdot (dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z) \\ &= m\omega^2 r dr \\ &= -d\left(\frac{-1}{2} m\omega^2 r^2 + \text{cte}\right) \\ &= -dE_p \end{aligned}$$

avec $E_p = \frac{-1}{2} m\omega^2 r^2 + \text{cte}$.

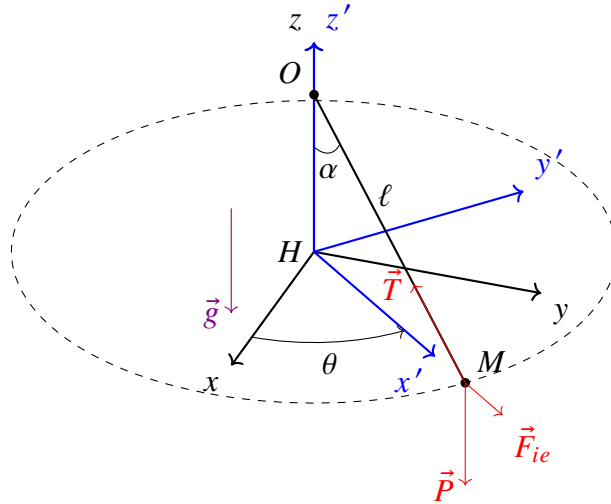
Donc \vec{F}_{ie} est conservative.

De plus, on a $\vec{F}_{iC} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)_R \perp \vec{v}(M)_R$ et $d\overrightarrow{OM} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} dt = \vec{v}(M)_R dt$ donc

$$\begin{aligned} \delta W &= \vec{F}_{iC} \cdot d\overrightarrow{OM} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc \vec{F}_{iC} ne travaille pas et n'a pas d'énergie potentielle associée.

Reprenons l'exemple du pendule conique :



\vec{P} , \vec{T} et \vec{F}_{iC} ne travaillent pas et \vec{F}_{ie} est conservative.

La variable géométrique est α .

Dans le référentiel R tournant non-galiléen, on a $E_m = E_c + E_{p_{\text{pesanteur}}} + E_{p_{\vec{F}_{ie}}}$.

Comme $v = \ell \dot{\alpha}$, on a :

$$E_c = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\alpha}^2$$

et

$$E_{p_{\text{pesanteur}}} = -mg\ell \cos \alpha$$

et

$$\begin{aligned} E_{p_{\vec{F}_{ie}}} &= \frac{-1}{2} m \omega^2 r^2 + \text{cte} \\ &= \frac{-1}{2} m \omega^2 \ell^2 \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } E_m = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\alpha}^2 - mg\ell \cos \alpha - \frac{1}{2} m \omega^2 \ell^2 \sin^2 \alpha.$$

Or comme M n'est soumis à aucune force conservative, on a $E_m = \text{cte}$.

Donc

$$\frac{dE_m}{dt} = 0$$

$$m \ell^2 \dot{\alpha} \ddot{\alpha} + mg\ell \dot{\alpha} \sin \alpha - m \ell^2 \omega^2 \dot{\alpha} \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

$$\ell \ddot{\alpha} + g \sin \alpha - \ell \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

C'est l'équation du mouvement du pendule conique dans R autour de sa position d'équilibre.

Si on considère une position d'équilibre dans R , *i.e.* $\alpha = \text{cte}$, on retrouve $\omega^2 = \frac{g}{\ell \cos \alpha}$.

1.3 Caractère galiléen approché du référentiel terrestre

1.3.1 Les référentiels d'étude

Rappel : un référentiel R' est galiléen s'il est en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen. En effet, dans ce cas, on a $\vec{F}_{ie} = \vec{0}$ et $\vec{F}_{iC} = \vec{0}$ donc d'après le $\overrightarrow{\text{PFD}}$ dans R' , on a $m\vec{a} = \vec{F}$ donc le principe d'inertie est vérifié dans R' donc R' est galiléen.

1.3.1.1 Référentiel de Copernic

C'est le référentiel d'origine C le centre de masse du système solaire et d'axes (Cx_g, Cy_g, Cz_g) dirigés vers trois étoiles lointaines considérées comme fixes car suffisamment éloignées du système solaire.

Le référentiel de Copernic est le référentiel galiléen de base. Les observations astronomiques ont montré qu'une météorite se déplaçant dans l'espace suffisamment éloignée des différentes planètes a bien un mouvement de translation rectiligne uniforme.

1.3.1.2 Référentiel de Kepler

C'est le référentiel d'origine S le centre de masse du soleil et d'axes (Sx_0, Sy_0, Sz_0) parallèles à (Cx_g, Cy_g, Cz_g) dirigés vers trois étoiles lointaines considérées comme fixes car suffisamment éloignées du système solaire.

En pratique, le référentiel de Kepler est quasi-galiléen et il est très difficile de mettre en évidence son caractère non-galiléen.

1.3.1.3 Référentiel géocentrique

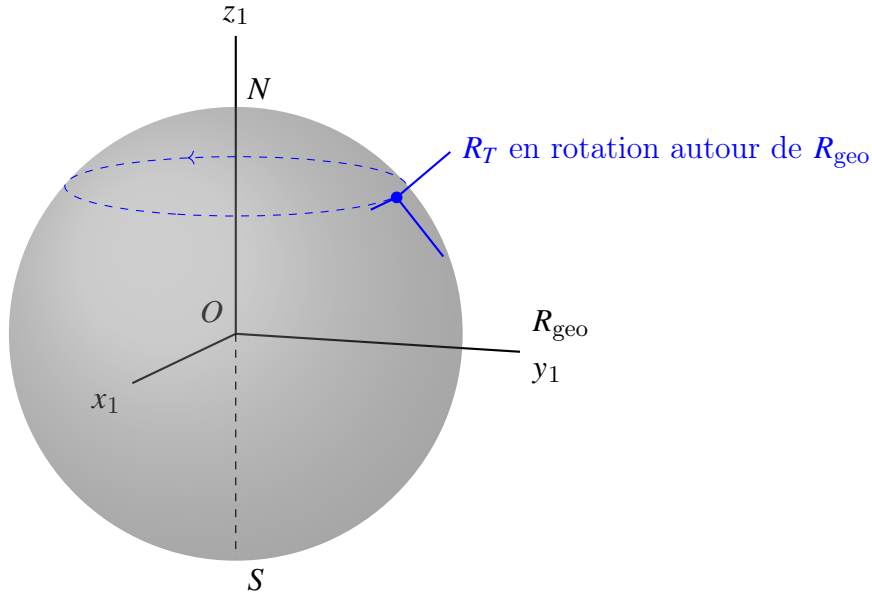
C'est le référentiel d'origine O le centre de masse de la Terre et d'axes (Ox_1, Oy_1, Oz_1) dirigés vers trois étoiles lointaines considérées comme fixes car suffisamment éloignées du système solaire.

Si une expérience dure peu de temps devant une année, on peut considérer que la Terre se déplace en ligne droite sur son orbite et donc que le référentiel géocentrique est galiléen.

1.3.1.4 Référentiel terrestre local

Le référentiel terrestre local R_T est constitué d'une origine A liée au sol et à trois axes (Ax, Ay, Az) . Il est en rotation uniforme autour de l'axe des pôles de la Terre donc n'est pas galiléen.

Si une expérience est courte devant vingt-quatre heures, on peut considérer que R_T se déplace en ligne droite par rapport au référentiel géocentrique et donc que son caractère non-galiléen est peu marqué.

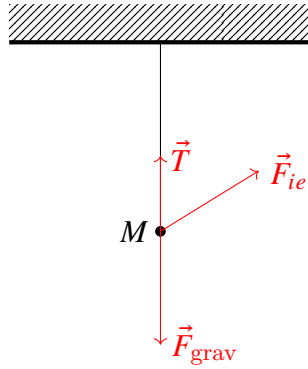


1.3.2 Mécanique dans le référentiel terrestre

1.3.2.1 Statique terrestre, champ de pesanteur

On se place dans le référentiel terrestre local non-galiléen.

Soit $M(m)$ accroché au plafond à l'équilibre.



Système : $M(m)$.

Référentiel : terrestre non-galiléen.

Bilan des forces : $\vec{F}_{\text{grav}} = -\frac{GmM_T}{R_T^2}\vec{u}$ avec $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{R_T}$, \vec{T} , $\vec{F}_{ie} = m\omega^2\overrightarrow{HM}$ et $\vec{F}_{iC} = \vec{0}$.

PFD : $\vec{F}_{\text{grav}} + \vec{T} + \vec{F}_{ie} = \vec{0}$.

On définit

$$\begin{aligned}
 \vec{P} &= -\vec{T} \\
 &= \overrightarrow{F_{\text{grav}}} + \vec{F}_{ie} \\
 &= -\frac{GmM_T}{R_T^2} + m\omega^2 \overrightarrow{HM} \\
 &= m \left(-\frac{GM_T}{R_T^2} + \omega^2 \overrightarrow{HM} \right).
 \end{aligned}$$

On pose alors le champ gravitationnel $\overrightarrow{\mathcal{G}}_{\text{grav}} = -\frac{GM_T}{R_T^2}$.

On obtient le champ de pesanteur

$$\vec{g} = \overrightarrow{\mathcal{G}}_{\text{grav}}(M) + \omega^2 \overrightarrow{HM}.$$

Ainsi, dans le référentiel terrestre local, la force d'inertie d'entraînement est prise en compte dans la définition du poids.

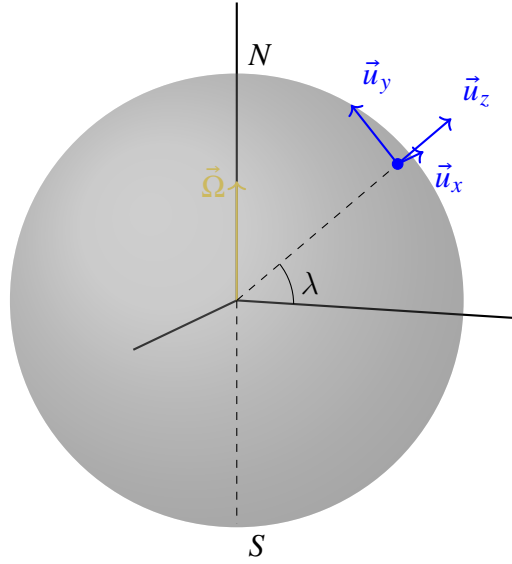
Remarques :

- \vec{g} n'est pas colinéaire à \overrightarrow{OM} .
- La direction de \vec{g} définit la verticale.
- On a $\|\vec{g}\| \neq \|\overrightarrow{\mathcal{G}}_{\text{grav}}\|$.
- On a $g_{\text{pole}} = \frac{GM_T}{R_T^2}$ (en considérant la Terre sphérique).
- On a $g_{\text{equateur}} = \frac{GM_T}{R_T^2} - \omega^2 R_T$.
- On a $\frac{\Delta g}{g_{\text{pole}}} = \frac{\omega^2 R_T}{G \frac{M_T}{R_T^2}} = 3 \cdot 10^{-3}$.

1.3.2.2 Dynamique terrestre

Base locale

Dans le référentiel terrestre local, on ne tient pas compte de $\vec{F}_{ie} = m\omega^2 \overrightarrow{HM}$ car elle est déjà contenue dans le poids.



On a la vitesse de rotation de la Terre autour de son axe $\Omega = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

On pose le vecteur rotation $\vec{\Omega} = \Omega \frac{\overrightarrow{SN}}{R_T}$.

Base locale à la surface de la Terre : \vec{u}_x vers l'Est, \vec{u}_y vers le Nord et \vec{u}_z vertical ascendant.

⚠ Base sphérique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi) = (\vec{u}_z, -\vec{u}_y, \vec{u}_x)$.

On sait que \vec{F}_{ie} est déjà contenue dans \vec{P} .

On note $\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$ la vitesse dans le référentiel terrestre local.

On a $\vec{\Omega} = \Omega (\cos(\lambda) \vec{u}_y + \sin(\lambda) \vec{u}_z)$.

Donc

$$\begin{aligned} \vec{F}_{iC} &= -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v} \\ &= -2m\Omega (\dot{x} (\cos(\lambda) \vec{u}_z - \sin(\lambda) \vec{u}_y) + \dot{y} \sin(\lambda) \vec{u}_x - \dot{z} \cos(\lambda) \vec{u}_x) \\ &= -2m\Omega ((\dot{y} \sin \lambda - \dot{z} \cos \lambda) \vec{u}_x - \dot{x} \sin(\lambda) \vec{u}_y + \dot{x} \cos(\lambda) \vec{u}_z). \end{aligned}$$

Mouvement horizontal, vers la droite dans l'hémisphère Nord

On considère un mouvement horizontal donc $z = \text{cte}$.

On a $\dot{x} \neq 0$, $\dot{y} \neq 0$ et $\dot{z} = 0$.

Donc

$$\begin{aligned} \vec{F}_{iC} &= -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v} \\ &= -2m\Omega (\cos(\lambda) \vec{u}_y + \sin(\lambda) \vec{u}_z) \wedge \vec{v} \\ &= -2m\Omega \left(\underbrace{\cos(\lambda) \vec{u}_y \wedge \vec{v}}_{\text{force portée par } \vec{u}_z} + \underbrace{\sin(\lambda) \vec{u}_z \wedge \vec{v}}_{\text{force portée par } \vec{u}_x} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, la force de Coriolis tend à pousser un mobile vers la droite du mouvement dans l'hémisphère Nord ($\lambda > 0$) et vers la gauche du mouvement dans l'hémisphère Sud ($\lambda < 0$).

Ordre de grandeur : en considérant une voiture de $m = 1000 \text{ kg}$ roulant à $v = 100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ avec $\lambda = 49^\circ$, on obtient

$$F = 2m\Omega v \sin \lambda \approx 3 \text{ N}.$$

Donc l'effet de la force de Coriolis n'est sensible que pour des objets de masse importante et de vitesse élevée.

Mouvement vertical, déviation vers l'Est

Deux expériences ont montré l'existence d'une déviation de la trajectoire d'un objet en chute libre :

- Expérience de Reich (1831) : chute de billes d'acier dans des puits de mine (sans vent). Avec $h = 158 \text{ m}$ et $\lambda = 50^\circ$, on observa une déviation de 28 mm par rapport à la verticale.
- Expérience de Flammarion (1903) : idem depuis la coupole du Panthéon. Avec $h = 68 \text{ m}$ et $\lambda = 48^\circ 51'$, on observa une déviation de 7,6 mm par rapport à la verticale.

Système : bille de masse m .

Référentiel : terrestre supposé galiléen (première approche sans \vec{F}_{iC}).

Bilan des forces : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$ (contient \vec{F}_{ie}).

$$\overrightarrow{\text{PFD}} : m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = -mg \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -gt \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Donc sans tenir compte de \vec{F}_{iC} , on obtient le mouvement non-perturbé (ou mouvement d'ordre 0) avec

$$\vec{v} = -gt\vec{u}_z.$$

On a

$$\begin{aligned} \vec{F}_{iC} &= -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v} \\ &= -2m\Omega (\cos(\lambda) \vec{u}_y + \sin(\lambda) \vec{u}_z) \wedge (-gt\vec{u}_z) \\ &= 2m\Omega \cos(\lambda) gt\vec{u}_x. \end{aligned}$$

Méthode perturbative : on sait que $\|\vec{F}_{iC}\| \ll mg$; on considère que l'ordre 0 reste vrai et on le perturbe avec \vec{F}_{iC} .

Bilan des forces : $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$ et $\vec{F}_{iC} = 2m\Omega \cos(\lambda) g t \vec{u}_x$.

$$\overrightarrow{\text{PFD}} : m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m\Omega \cos(\lambda) g t \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\Omega \cos(\lambda) g t \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{x} = \Omega \cos(\lambda) g t^2 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -gt \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{3}\Omega \cos(\lambda) t^3 \\ y = 0 \\ z = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Dans l'hémisphère Nord, on a $\lambda > 0$ donc $\cos \lambda > 0$ donc $x > 0$: déviation vers l'Est.

De plus, comme $z = h - \frac{1}{2}gt^2$, on a $t = \sqrt{\frac{2(h-z)}{g}}$.

D'où

$$x(z) = \frac{1}{3}\Omega \cos(\lambda) g \left(\frac{2(h-z)}{g} \right)^{3/2}.$$

On en déduit

$$x_{\max} = x(z=0) = \frac{1}{3}\Omega \cos(\lambda) g \left(\frac{2h}{g} \right)^{3/2}.$$

Applications numériques dans les cas des expériences de Reich et Flammarion :

$$x_{\max} = 27,5 \text{ mm} \quad \text{et} \quad x_{\max} = 8 \text{ mm}.$$

Ordre 2 :

$$\text{On a } \begin{cases} \dot{x} = \Omega \cos(\lambda) g t^2 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -gt \end{cases} \quad \text{donc}$$

$$\vec{v} = \Omega \cos(\lambda) g t^2 \vec{u}_x - gt \vec{u}_z.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \vec{F}_{iC} &= -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v} \\ &= ? \end{aligned}$$

On obtient une nouvelle expression de \vec{F}_{iC} plus précise et donc on peut calculer x, y, z à l'ordre 2.

On a appliqué la méthode des perturbations :

- on calcule le mouvement non-perturbé (à l'ordre 0) en l'absence de \vec{F}_{iC} ;
- on calcule \vec{F}_{iC} à partir de l'ordre 0 et on perturbe celui-ci pour obtenir l'ordre 1 ;

► etc...

► on s'arrête lorsque le passage de l'ordre n à $n + 1$ produit un écart négligeable.

Autre effet du caractère non-galiléen du référentiel terrestre : le pendule de Foucault.

Chapitre 2

Lois du frottement solide

★★ À venir ★★

Deuxième partie

Optique

Chapitre 1

Modèle scalaire des ondes lumineuses

★★ À venir ★★

Chapitre 2

Superposition de deux ondes lumineuses

★★ À venir ★★

Chapitre 3

Interféromètres par division du front d'onde

★★ À venir ★★

Chapitre 4

Interféromètres par division d'amplitude

★★ À venir ★★

Troisième partie

Électromagnétisme

Formulaire d'analyse vectorielle

Sommaire

Calcul vectoriel	32
Coordonnées cartésiennes	32
Coordonnées cylindriques	33
Coordonnées sphériques	33
Théorèmes	33

Calcul vectoriel

On a les formules suivantes :

- $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} V = \vec{0}$
- $\text{div} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = 0$
- $\text{div} \overrightarrow{\text{grad}} V = \Delta V$
- $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{A} - \overrightarrow{\Delta} \vec{A}$
- $\overrightarrow{\text{grad}} (V_1 V_2) = V_1 \overrightarrow{\text{grad}} V_2 + V_2 \overrightarrow{\text{grad}} V_1$
- $\overrightarrow{\text{rot}} (V \vec{A}) = V \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} V \wedge \vec{A}$
- $\text{div} (V \vec{A}) = V \text{div} \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot \vec{A}$
- $\text{div} (\vec{A}_1 \wedge \vec{A}_2) = \vec{A}_2 \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}_1 - \vec{A}_1 \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}_2$

Coordonnées cartésiennes

On a les formules suivantes :

- $\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z$

$$\begin{aligned}
\triangleright \operatorname{div} \vec{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
\triangleright \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z \\
\triangleright \Delta V &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

Coordonnées cylindriques

On a les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\triangleright \overrightarrow{\operatorname{grad}} V &= \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z \\
\triangleright \operatorname{div} \vec{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial r A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
\triangleright \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z \\
\triangleright \Delta V &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

Coordonnées sphériques

$$\begin{aligned}
\triangleright \overrightarrow{\operatorname{grad}} V &= \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi \\
\triangleright \operatorname{div} \vec{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 A_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sin(\theta) A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \\
\triangleright \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial \sin(\theta) A_\varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial r A_\varphi}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_\varphi \\
\triangleright \Delta V &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}
\end{aligned}$$

Théorèmes

Théorème d'Ostrogradski-Green : S étant une surface fermée et τ le volume intérieur à S , on a

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_\tau (\operatorname{div} \vec{A}) d\tau.$$

Théorème de Stokes-Ampère : C étant une courbe fermée bordant une surface S , on a

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A}) \cdot d\vec{S}.$$

Chapitre 1

Électrostatique

★★ À venir ★★

Chapitre 2

Topographie du champ et du potentiel électrostatiques

★★ À venir ★★

Chapitre 3

Dipôle électrostatique

★★ À venir ★★

Chapitre 4

Magnétostatique

★★ À venir ★★

Chapitre 5

Dipôle magnétostatique

★★ À venir ★★

Chapitre 6

Équations de Maxwell

Sommaire

Introduction	39
6.1 Conservation de la charge	40
6.1.1 Première approche : 1D	40
6.1.2 Généralisation : 3D	42
6.2 Les équations de Maxwell	42
6.2.1 Énoncé	42
6.2.2 Commentaires	42
6.2.3 Compatibilité des équations de Maxwell	43
6.3 Forme intégrale des équations de Maxwell	44
6.3.1 Théorème de Gauss	44
6.3.2 Conservation du flux magnétique	44
6.3.3 Loi de Lenz-Faraday	45
6.3.4 Théorème d'Ampère généralisé	45
6.3.5 Bilan	46
6.3.6 Application : condensateur plan en régime variable	46
6.4 Propagation des champs dans un milieu vide de charges et de courants	48
6.4.1 Couplage spatio-temporel	48
6.4.2 Équation de propagation	49
6.5 Équations locales des champs statiques	50
6.5.1 Équations de Maxwell en régime stationnaire	50
6.5.2 Conséquences	51
6.5.2.1 Théorèmes de Gauss et d'Ampère	51
6.5.2.2 Existence du potentiel électrostatique	51
6.5.3 Équations de Poisson et Laplace	51

Introduction

En électromagnétisme, on distingue :

- le régime statique :

- électrostatique : théorème de Gauss (1831)
- magnétostatique : théorème d'Ampère (1820)

► le régime variable :

- induction électromagnétique : loi de Lenz-Faraday (1831-1834).

Gauss constate en 1831 l'absence de monopôle magnétique.

En 1865, James Clerk Maxwell réalise l'exploit de synthétiser les résultats expérimentaux en vingt équations scalaires à vingt inconnues écrites à l'aide de quaternions.

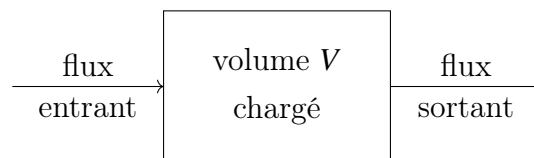
Ces équations sont reprises par Oliver Heaviside en 1884 pour aboutir aux quatre équations classiques (deux vectorielles, deux scalaires).

L'électromagnétisme (classique) devient une science aboutie jusqu'à l'arrivée des phénomènes quantiques qui amenèrent l'électrodynamique quantique (Feynman) et la théorie quantique des champs.

6.1 Conservation de la charge

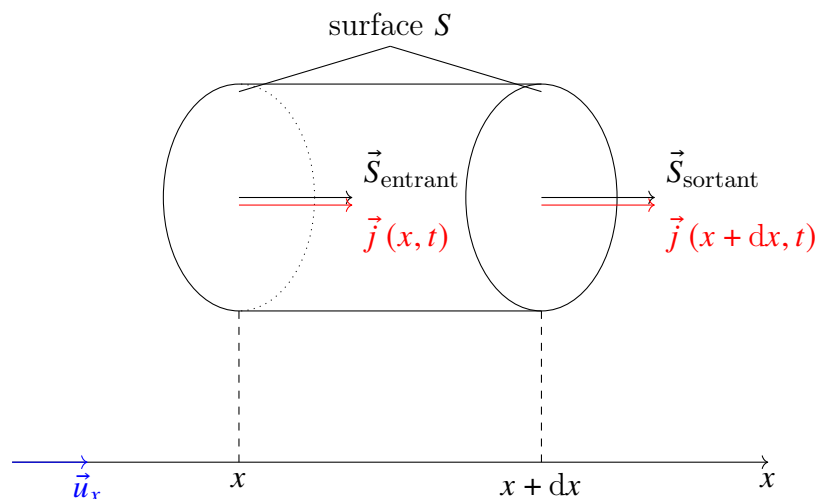
6.1.1 Première approche : 1D

La charge q est un invariant : elle ne peut être ni créée ni annihilée.



La charge au temps t est égale à la charge initiale plus la charge entrante moins la charge sortante.

À une dimension, on a :



Le cylindre de surface S et de largeur dx est traversé par la densité de courant volumique \vec{j} .

$\vec{j}(x, t)$ traverse la surface d'entrée du cylindre.

$\vec{j}(x + dx, t)$ traverse la surface de sortie du cylindre.

$\rho(x, t)$: densité volumique de charge du cylindre.

Établissons le bilan des charges dans le cylindre entre t et $t + dt$.

On note $\delta Q_{\text{entrant}}$ et $\delta Q_{\text{sortant}}$ la charge entrante (respectivement sortante) à travers la surface d'entrée (respectivement de sortie) du cylindre entre t et $t + dt$.

On a $\delta Q_{\text{entrant}} = I_{\text{entrant}} dt$.

Or $I_{\text{entrant}} = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = j(x, t) S$.

Donc $\delta Q_{\text{entrant}} = j(x, t) S dt$.

De même, on a $\delta Q_{\text{sortant}} = j(x + dx, t) S dt$.

Donc

$$\begin{aligned} \delta Q &= \delta Q_{\text{entrant}} - \delta Q_{\text{sortant}} \\ &= j(x, t) S dt - j(x + dx, t) S dt \\ &= \underbrace{(j(x, t) - j(x + dx, t))}_{-\frac{\partial j}{\partial x} dx} S dt. \end{aligned}$$

De plus, on a $Q(t) = \rho(x, t) d\tau$ avec $d\tau = S dx$ le volume du cylindre.

Pendant la durée dt , la charge $Q(t)$ a varié de

$$\begin{aligned} dQ &= Q(t + dt) - Q(t) \\ &= \underbrace{(\rho(x, t + dt) - \rho(x, t))}_{\frac{\partial \rho}{\partial t} dt} d\tau. \end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned} dQ &= \delta Q \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} dt S dx &= -\frac{\partial j}{\partial x} dx S dt \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\frac{\partial j}{\partial x} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

C'est l'équation locale de conservation de la charge à une dimension.

Remarque :

Ici, on a $\vec{j}(x, t) = j(x, t) \vec{u}_x$.

On remarque $\frac{\partial j}{\partial x} = \text{div } \vec{j}$.

Donc l'équation locale de conservation de la charge se réécrit

$$\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

6.1.2 Généralisation : 3D

On admet que la formule précédente se généralise à trois dimensions :

$$\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

On peut le démontrer avec le théorème d'Ostrogradski-Green.

6.2 Les équations de Maxwell

6.2.1 Énoncé

Équation de Maxwell-Gauss (MG) :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Équation de Maxwell-Flux ou Maxwell-Thomson (MT) :

$$\text{div } \vec{B} = 0.$$

Équation de Maxwell-Faraday ($\overrightarrow{\text{MF}}$) :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Équation de Maxwell-Ampère ($\overrightarrow{\text{MA}}$) :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

6.2.2 Commentaires

- (MG) et (MT) sont des équations scalaires.
- ($\overrightarrow{\text{MF}}$) et ($\overrightarrow{\text{MA}}$) sont des équations vectorielles.

► ε_0 est la permittivité diélectrique du vide et μ_0 est la perméabilité magnétique du vide. On a

$$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1} \quad \text{et} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}.$$

On verra que $\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$.

- (MG) , (MT) , $(\overrightarrow{\text{MF}})$ et $(\overrightarrow{\text{MA}})$ sont des équations linéaires : on peut appliquer le principe de superposition.
- (MG) , (MT) , $(\overrightarrow{\text{MF}})$ et $(\overrightarrow{\text{MA}})$ sont des équations locales, elles s'appliquent en un point M , il n'y a pas d'expression intégrale.
- (MG) et $(\overrightarrow{\text{MA}})$ relient \vec{E} et \vec{B} à leurs sources (charges et courants).
- $(\overrightarrow{\text{MF}})$ et $(\overrightarrow{\text{MA}})$ introduisent un couplage entre \vec{E} et \vec{B} en régime variable ; les champs \vec{E} et \vec{B} sont indissociables.
- (MG) et $(\overrightarrow{\text{MF}})$ montrent que pour créer un champ \vec{E} , on peut utiliser des charges (ρ) ou un champ \vec{B} variable (induction électromagnétique).
- $(\overrightarrow{\text{MA}})$ montre que pour créer un champ \vec{B} , on peut utiliser un courant (\vec{j}) ou un champ électrique variable.
- On remarque que \vec{j} est homogène à $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}_D$: courant de déplacement.

6.2.3 Compatibilité des équations de Maxwell

On a $(\overrightarrow{\text{MA}})$: $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

On applique div :

$$\begin{aligned} \text{div} \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \right) &= \text{div} \left(\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} 0 &= \mu_0 \left(\text{div} \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{E} \right) \\ &= \mu_0 \left(\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} 0 &= \mu_0 \left(\text{div} \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{E} \right) \\ &= \mu_0 \left(\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right). \end{aligned}} \right) (MG)$$

Donc $\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

Donc les équations de Maxwell sont compatibles avec l'équation locale de conservation de la charge.

6.3 Forme intégrale des équations de Maxwell

6.3.1 Théorème de Gauss

On considère une surface S fermée définissant le volume V .

Soit $\varphi_{\vec{E}}$ le flux de \vec{E} à travers S .

$$\text{On a } \varphi_{\vec{E}} = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

D'après le théorème d'Ostrogradski-Green, on a $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div } \vec{E} \, d\tau$.

$$\text{Donc } \varphi_{\vec{E}} = \iiint_V \text{div } \vec{E} \, d\tau.$$

D'après (MG) , on a $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$.

D'où

$$\varphi_{\vec{E}} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho \, d\tau$$

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}.$$

On a prouvé le théorème de Gauss.

On dit que c'est la forme intégrale de (MG) .

6.3.2 Conservation du flux magnétique

Une considère une surface S définissant le volume V .

On a

$$\begin{aligned} \varphi_{\vec{B}} &= \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ &= \iiint_V \text{div } \vec{B} \, d\tau \\ &= 0. \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Ostrogradski-Green} \\ (MT) \end{array} \right\}$$

D'où

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0.$$

On a prouvé la conservation du flux magnétique.

On dit que c'est la forme intégrale de (MT) .

6.3.3 Loi de Lenz-Faraday

Soit un contour fermé et orienté Γ s'appuyant sur la surface \vec{S} dans une zone traversée par un champ \vec{B} .

On calcule e la circulation de \vec{E} le long de Γ ; c'est la tension (ou force électromotrice) le long de Γ .

On a vu en MP2I la loi de Lenz-Faraday : $e = -\frac{d\varphi}{dt}$.

On a

$$\begin{aligned}
 e &= \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \\
 &= \iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\
 &= \iint_S \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \\
 &= -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \\
 &= -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \\
 &= -\frac{d\varphi}{dt}.
 \end{aligned}
 \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{Stokes-Ampère} \\
 \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} (\overrightarrow{\text{MF}}) \\
 \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \varphi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} : \text{flux magnétique} \\
 \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \varphi \text{ ne dépend que du temps}
 \end{array}$$

On a prouvé la loi de Lenz-Faraday.

Remarque : comme dans la loi de Lenz-Faraday, dans $(\overrightarrow{\text{MF}})$: $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, le signe « - » est dû au principe de modération.

6.3.4 Théorème d'Ampère généralisé

Soit un contour fermé et orienté Γ s'appuyant sur la surface \vec{S} dans une zone traversée par un champ \vec{B} .

On a

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C} &= \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \\
 &= \iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \cdot d\vec{S} \\
 &= \iint_S \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{S} + \iint_S \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\
 &= \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \\
 &= \mu_0 I_{\text{enl}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}.
 \end{aligned}
 \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{Stokes-Ampère} \\
 \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} (\overrightarrow{\text{MA}})
 \end{array}$$

C'est le théorème d'Ampère généralisé.

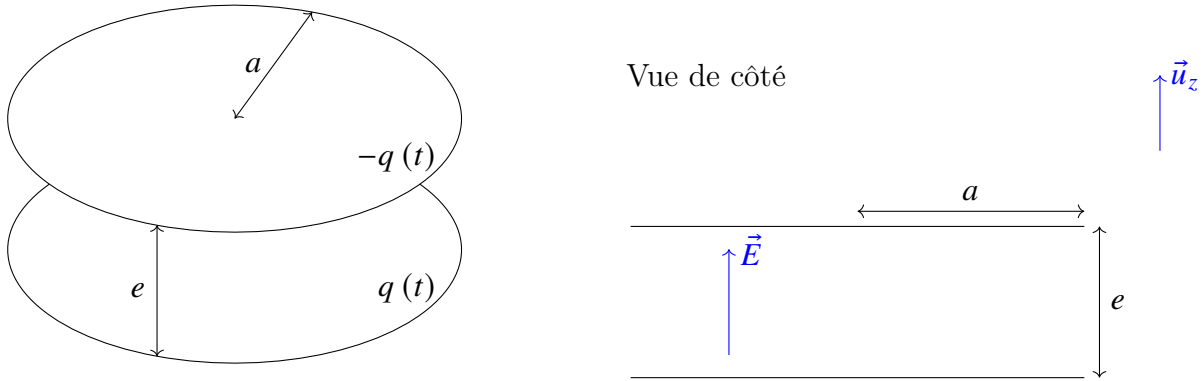
Remarque : en statique, on a $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ donc on retrouve le théorème d'Ampère $\mathcal{C} = \mu_0 I_{\text{enl}}$.

6.3.5 Bilan

Loi locale	Loi intégrale
(MG) : $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	Théorème de Gauss : $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$
(MT) : $\text{div } \vec{B} = 0$	Conservation du flux magnétique : $\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
(MF) : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Loi de Lenz-Faraday : $e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\varphi}{dt}$
(MA) : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	Théorème d'Ampère généralisé : $\mathcal{C} = \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enl}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}$

6.3.6 Application : condensateur plan en régime variable

Soit un condensateur plan constitué de deux disques de rayon a et séparés de e .



On suppose $a \gg e$: on peut négliger les effets de bord.

La charge $q(t)$ varie lentement donc le régime statique reste valable.

On définit l'intérieur du condensateur comme la zone où $r < a$ et $|z| \leq \frac{e}{2}$.

On a $\vec{E}_{\text{ext}} = \vec{0}$ et $\vec{E}_{\text{int}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$ avec $\sigma = \frac{q(t)}{S} = \frac{q(t)}{\pi a^2}$.

On suppose $q(t) = Q_0 \cos(\omega t)$.

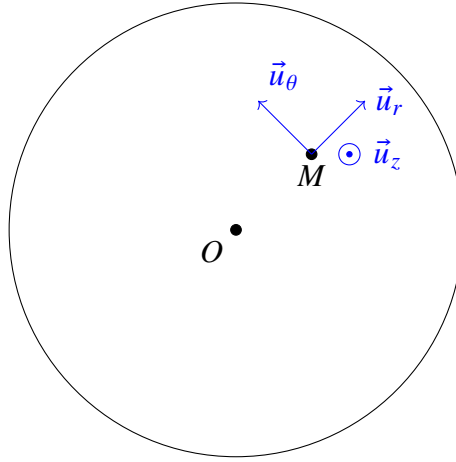
On a donc $\vec{E}_{\text{int}} = \frac{Q_0 \cos(\omega t)}{\pi a^2 \epsilon_0} \vec{u}_z$.

À l'intérieur du condensateur, on a $\vec{j} = \vec{0}$ donc $(\overrightarrow{\text{MF}}) : \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \neq \vec{0}$ donc $\vec{B} \neq \vec{0}$.

Les sources de \vec{B} sont les variations de \vec{E} .

On a $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{\omega Q_0 \sin(\omega t)}{\pi a^2 \epsilon_0} \vec{u}_z$.

Vue du dessus :



$\Pi = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie de $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ donc $\vec{B} = B(M) \vec{u}_\theta$.

On a invariance par rotation d'angle θ donc $\vec{B}(M) = \vec{B}(r, z)$.

Donc $\vec{B}(M) = B(r, z) \vec{u}_\theta$.

On applique le théorème d'Ampère généralisé sur le contour d'Ampère Γ : cercle de rayon r passant par M :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enl}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

On a $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} B(r, z) r d\theta = 2\pi r B(r, z)$.

De plus, on a $\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_S E(r, z) r dr d\theta$.

Si $|z| > \frac{e}{2}$:

Alors $E(r, z) = 0$ donc $\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$.

Donc $2\pi r B(r, z) = 0$ donc $B(r, z) = 0$.

Si $|z| \leq \frac{e}{2}$ et $r \leq a$:

On a $E(r, z) = \frac{Q_0 \cos(\omega t)}{\pi a^2 \epsilon_0}$ donc

$$\begin{aligned} \iint \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \iint \frac{Q_0 \cos(\omega t)}{\pi a^2 \epsilon_0} r \, dr \, d\theta \\ &= \frac{2Q_0 \cos(\omega t)}{a^2 \epsilon_0} \int_0^r r \, dr \\ &= \frac{Q_0 \cos(\omega t)}{a^2 \epsilon_0} r^2. \end{aligned}$$

D'où $2\pi r B(r, z) = \frac{-\mu_0 \omega Q_0 \sin(\omega t)}{a^2} r^2$ et donc

$$B(r, z) = \frac{-\mu_0 \omega Q_0 \sin(\omega t) r}{2\pi a^2}.$$

Si $|z| \leq \frac{e}{2}$ et $r \geq a$:

$$\text{On a } \iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_0 \cos(\omega t)}{\pi a^2 \epsilon_0} \pi a^2 = \frac{Q_0 \cos(\omega t)}{\epsilon_0}.$$

$$\text{Donc } B(r, z) = \frac{-\mu_0 Q_0 \omega \sin(\omega t)}{2\pi r}.$$

Ainsi, on a :

- à l'intérieur du condensateur, $\vec{E} \neq \vec{0}$ et $\vec{B} \neq \vec{0}$;
- à l'extérieur du condensateur dans les zones où $|z| \leq \frac{e}{2}$, $\vec{E} = \vec{0}$ et $\vec{B} \neq \vec{0}$;
- dans le reste de l'espace, $\vec{E} = \vec{0}$ et $\vec{B} = \vec{0}$.

6.4 Propagation des champs dans un milieu vide de charges et de courants

6.4.1 Couplage spatio-temporel

On a $(\overrightarrow{\text{MF}})$:

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

et $(\overrightarrow{\text{MA}})$:

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 I_{\text{enl}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Ces deux équations traduisent un couplage entre \vec{E} et \vec{B} mais également entre les dérivées temporelles et spatiales.

D'où l'existence du phénomène de propagation.

$$\begin{array}{ccccccc} M_1 & & M_2 & & M_3 & & \dots \\ \bullet & & \bullet & & \bullet & & \end{array}$$

L'existence de $\vec{E}(M_1)$ variable implique l'existence de $\vec{B}(M_2)$ variable qui implique l'existence de $\vec{E}(M_3)$, etc...

6.4.2 Équation de propagation

Dans une région vide de charges et de courants ($\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$), on a :

► (MG) :

$$\text{div } \vec{E} = 0$$

► (MT) :

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

► ($\overrightarrow{\text{MF}}$) :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

► ($\overrightarrow{\text{MA}}$) :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Donc en appliquant $\overrightarrow{\text{rot}}$ à ($\overrightarrow{\text{MF}}$) , on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) &= -\frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad \left(\overrightarrow{\text{MA}} \right) \\ &= -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

et

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \right) = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\text{div } \vec{E} \right) - \overrightarrow{\Delta} \vec{E} = -\overrightarrow{\Delta} \vec{E}.$$

D'où

$$\overrightarrow{\Delta} \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

C'est l'équation de D'Alembert.

Remarque : en cartésien, on a $\overrightarrow{\Delta} \vec{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix}$.

De plus, en appliquant $\overrightarrow{\text{rot}}$ à $(\overrightarrow{\text{MA}})$, on obtient

$$\overrightarrow{\Delta} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}.$$

Donc \vec{B} et \vec{E} sont solutions de la même équation de D'Alembert, que l'on appelle aussi équation de propagation ou équation d'ondes.

Donc \vec{E} et \vec{B} sont des ondes qui se propagent à la célérité c .

Remarque hors-programme : il existe l'opérateur d'Alembertien $\square = \overrightarrow{\Delta} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$. On réécrit alors les équations vues ci-dessus comme suit :

$$\square \vec{E} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \square \vec{B} = \vec{0}.$$

6.5 Équations locales des champs statiques

6.5.1 Équations de Maxwell en régime stationnaire

En régime stationnaire (ou statique), on a $\frac{\partial}{\partial t} = 0$.

On a donc (MG) :

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

(MT) :

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

(MF) :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$$

(MA) :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

On observe donc un découplage des champs \vec{E} et \vec{B} : on les traite séparément.

6.5.2 Conséquences

6.5.2.1 Théorèmes de Gauss et d'Ampère

On retrouve le théorème de Gauss :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} &= \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{Ostrogradski-Green}$$

et le théorème d'Ampère :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \\ \iint_S \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} \cdot d\vec{S} &= \iint_S \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{S} \\ \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \mu_0 I_{\text{enl}}. \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{Stokes-Ampère}$$

On en déduit que les sources de champ électrostatique sont les charges et que les sources de champ magnétostatique sont les courants.

6.5.2.2 Existence du potentiel électrostatique

On a $\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = \vec{0}$.

Or pour tout champ f , on a $\overrightarrow{\operatorname{rot}} (\overrightarrow{\operatorname{grad}} f) = \vec{0}$.

Donc on peut écrire \vec{E} sous la forme

$$\vec{E} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} f$$

avec f un champ.

D'où l'existence du potentiel électrostatique V tel que

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V.$$

De plus, $\overrightarrow{\operatorname{grad}} V$ est dirigé vers les zones de fort potentiel donc \vec{E} descend les potentiels.

6.5.3 Équations de Poisson et Laplace

En régime stationnaire, on a $\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V$ et $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$.

Donc

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\left(-\overrightarrow{\operatorname{grad}} V\right) &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ -\Delta V &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} &= 0.\end{aligned}$$

C'est l'équation de Poisson (note culturelle : il entra à l'École polytechnique en 1798).

Ainsi, il suffit de connaître ρ et de résoudre l'équation de Poisson pour obtenir V puis en déduire le champ \vec{E} .

De plus, dans une zone vide de charge ($\rho = 0$), on a

$$\Delta V = 0.$$

C'est l'équation de Laplace.

Analogie gravitationnelle :

En notant $V_g = -\frac{Gm}{r}$ le potentiel gravitationnel, on a

$$\vec{\mathcal{G}} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V_g.$$

On en déduit l'équation de Poisson gravitationnelle (en notant μ la masse volumique) :

$$\Delta V_g - 4\pi\mu G = 0.$$

On en déduit également, dans une zone vide (de masse), l'équation de Laplace gravitationnelle :

$$\Delta V_g = 0.$$

Chapitre 7

Énergie du champ électromagnétique

Sommaire

Introduction	53
7.1 Première approche : le conducteur ohmique	53
7.1.1 Modèle de Drude, loi d'Ohm locale	53
7.1.2 Loi d'Ohm intégrale	55
7.1.3 Puissance cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge	56
7.1.3.1 Cas d'une particule ponctuelle	56
7.1.3.2 Expression volumique	57
7.1.3.3 Application : effet Joule	57
7.2 Bilan d'énergie électromagnétique	58
7.2.1 Équation locale de conservation	58
7.2.2 Identité de Poynting (HP)	59
7.2.3 Ordres de grandeur	60
7.3 Exemples de bilan d'énergie électromagnétique	61
7.3.1 Conducteur ohmique	61

Introduction

Ce chapitre traite des échanges d'énergie entre la matière et le champ électromagnétique.

7.1 Première approche : le conducteur ohmique

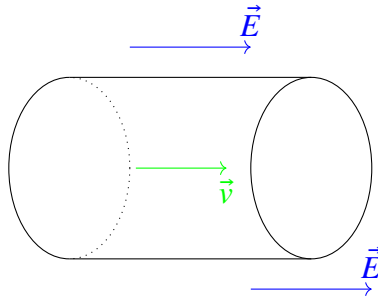
7.1.1 Modèle de Drude, loi d'Ohm locale

On cherche à construire un modèle microscopique de la conduction électrique dans un conducteur électrique. Le modèle suivant a été proposé en 1900 par Paul Drude (Allemagne) et amélioré en 1905 par Hendrik Lorentz (Pays-Bas, Prix Nobel de Physique en 1902).

Le modèle de Drude-Lorentz explique microscopiquement la loi empirique d'Ohm (1827).

Soit un conducteur électrique immobile possédant des charges mobiles (souvent des électrons) de charge q , de masse m et de densité volumique n .

Sous l'effet d'un champ \vec{E} extérieur, les porteurs de charge se mettent en mouvement à la vitesse \vec{v} .



On modélise l'interaction entre les porteurs de charge et le milieu par une force de frottement $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$.

On applique le $\overrightarrow{\text{PFD}}$ sur un porteur de charge :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} - \lambda\vec{v}$$

où $q\vec{E}$ est la composante électrique de la force de Lorentz.

On a donc $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\lambda}{m}\vec{v} = \frac{q}{m}\vec{E}$.

On pose $\tau = \frac{m}{\lambda}$ et on a

$$\vec{v}(t) = \vec{k}e^{-t/\tau} + \frac{q}{\lambda}\vec{E}.$$

On détermine \vec{k} avec les conditions initiales.

Si $t \geq 5\tau$, on a $\vec{v}(t) = \frac{q}{\lambda}\vec{E} = \vec{v}_{\text{lim}}$: le régime transitoire disparaît et on atteint le régime permanent.

Dans un conducteur classique (*i.e.* un métal), on a $\tau \approx 10^{-14}$ s donc on peut légitimement considérer que $\vec{v} = \vec{v}_{\text{lim}}$.

On note \vec{j} la densité de courant volumique dans le conducteur. On a

$$\vec{j} = nq\vec{v}.$$

Ici, $\vec{j} = nq\vec{v}_{\text{lim}} = \frac{nq^2}{\lambda}\vec{E}$.

C'est la loi d'Ohm locale :

$$\vec{j} = \frac{nq^2}{\lambda}\vec{E}.$$

On pose $\gamma = \frac{nq^2}{\lambda}$ la conductivité du milieu (en $\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$) et on a

$$\vec{j} = \gamma\vec{E}.$$

On utilise aussi parfois $\rho = \frac{1}{\gamma}$ la résistivité du milieu (en $\Omega \cdot \text{m}$).

Voici quelques ordres de grandeur de conductivité :

Milieu	γ ($\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$)	Nature
Verre	10^{-11}	Isolant
Paraffine	10^{-8}	Isolant
Eau potable	$10^{-4} \leftrightarrow 10^{-2}$	Mauvais conducteur
Fer	$9,9 \cdot 10^6$	Bon conducteur
Cuivre	$5,8 \cdot 10^7$	Excellent conducteur
Argent	$6,2 \cdot 10^7$	Excellent conducteur
Supraconducteur	$+\infty$	Conducteur parfait

Les matériaux dont la conductivité est inférieure à 10^{-4} sont appelés des isolants.

Ceux dont la conductivité est comprise entre 10^{-4} et 10^4 sont appelés des semi-conducteurs.

Ceux dont la conductivité est supérieure à 10^4 sont appelés des conducteurs.

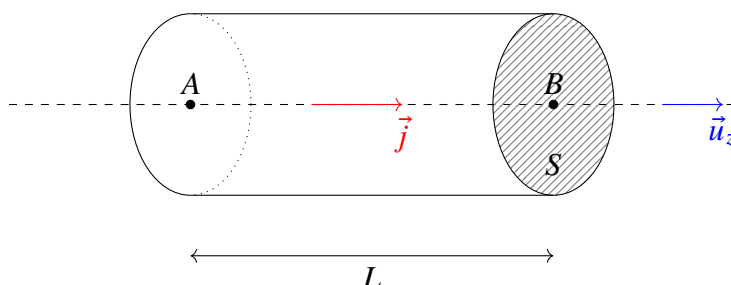
On avait $\tau = \frac{m}{\lambda}$ donc $\gamma = \frac{nq^2}{\lambda} = \frac{nq^2\tau}{m}$ donc $\tau = \frac{\gamma m}{nq^2}$.

Considérons l'exemple du cuivre. Dans le cuivre, les porteurs de charge sont les électrons donc on a $\gamma = 5,8 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$, $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, $q = -e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et $n = 10 \cdot 10^{29} \text{ m}^{-3}$ et on en déduit

$$\tau \approx \frac{10^{-30} \times 10^6}{10^{29} \times 10^{-38}} = 10^{-15} \text{ s.}$$

7.1.2 Loi d'Ohm intégrale

Soit une portion de conducteur ohmique de longueur L et de section S placée dans un champ électrique extérieur stationnaire $\vec{E} = E\vec{u}_z$ créé par un générateur extérieur.



On a $\vec{j} = \gamma \vec{E}$.

On pose I l'intensité traversant une surface d'entrée (ou sortie) du conducteur :

$$I = \iint_{\text{⊗}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{⊗}} \gamma E dS = \gamma ES.$$

On pose U la différence de potentiel entre les surfaces d'entrée et de sortie du conducteur :

$$U = V_A - V_B.$$

On a

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

$$E\vec{u}_z = -\frac{dV}{dz}\vec{u}_z$$

$$-E dz = dV$$

donc

$$\int_A^B dV = \int_A^B -E dz$$

donc

$$V(B) - V(A) = -U = -EL$$

i.e.

$$U = EL.$$

Ainsi, on a

$$I = \gamma \frac{U}{L} S$$

et donc

$$U = \frac{L}{\gamma S} I = RI$$

en posant $R = \frac{L}{\gamma S}$ la résistance du conducteur de longueur L et de section S (en Ω).

D'où la loi d'Ohm :

$$U = RI.$$

7.1.3 Puissance cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge

7.1.3.1 Cas d'une particule ponctuelle

Soit une particule ponctuelle animée de la vitesse \vec{v} portant la charge q et placée dans le champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) .

En notant P la puissance de la force de Lorentz, on a

$$\begin{aligned} P &= \vec{F} \cdot \vec{v} \\ &= q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) \cdot \vec{v} \\ &= q\vec{E} \cdot \vec{v} + q \underbrace{\vec{v} \wedge \vec{B} \cdot \vec{v}}_{=0} \end{aligned}$$

$$P = q\vec{E} \cdot \vec{v}.$$

La puissance de la force magnétique est nulle.

P est la puissance cédée par le champ électromagnétique au porteur de charge.

7.1.3.2 Expression volumique

On raisonne sur un élément de volume $d\tau$ qui contient des particules chargées de charge q , animées de la vitesse \vec{v} et de densité volumique n .

En notant dP la puissance élémentaire cédée par le champ aux porteurs de charge dans le volume $d\tau$, on a

$$dP = \underbrace{n d\tau}_{\substack{\text{nombre} \\ \text{de} \\ \text{porteurs}}} \underbrace{q \vec{E} \cdot \vec{v}}_{\substack{\text{puissance} \\ \text{cédée à} \\ \text{un porteur}}}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\tau} &= n q \vec{E} \cdot \vec{v} \\ &= n q \vec{v} \cdot \vec{E} \\ \frac{dP}{d\tau} &= \vec{j} \cdot \vec{E}. \end{aligned}$$

Cette grandeur est une puissance volumique (en $\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$).

Remarque : on a raisonné avec un seul type de porteur de charge. S'il y en a plusieurs, on a

$$dP = \sum_i dP_i = \sum_i n_i d\tau q_i \vec{E} \cdot \vec{v}_i$$

et

$$\frac{dP}{d\tau} = \left(\sum_i \vec{j}_i \right) \cdot \vec{E} = \vec{j} \cdot \vec{E}.$$

7.1.3.3 Application : effet Joule

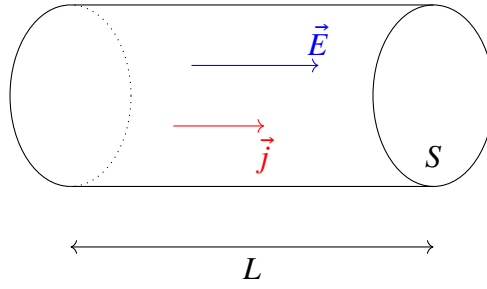
$$\text{On a } \frac{dP}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E}.$$

Avec un conducteur ohmique, d'après la loi d'Ohm, on a $\vec{j} = \gamma \vec{E}$.

Ainsi, on a la loi de Joule (locale) :

$$\frac{dP}{d\tau} = \gamma E^2.$$

Considérons l'exemple ci-dessous :



On cherche P_{tot} la puissance totale cédée par le champ aux porteurs de charge dans le conducteur ohmique de longueur L et de section S .

On a $\frac{dP}{d\tau} = \gamma E^2$ donc $dP = \gamma E^2 d\tau$. Ainsi

$$P_{\text{tot}} = \iiint_V dP = \gamma E^2 \iiint_V d\tau = \gamma E^2 V.$$

Or $V = SL$ donc

$$P_{\text{tot}} = \gamma E^2 SL = \frac{\gamma E^2}{L} SL^2.$$

Or $U = EL$, $R = \frac{L}{\gamma S}$ et $U = RI$ donc

$$P_{\text{tot}} = \frac{1}{R} U^2 = RI^2.$$

Ainsi, la puissance dissipée par effet Joule est égale à la puissance cédée par le champ aux porteurs de charge.

7.2 Bilan d'énergie électromagnétique

7.2.1 Équation locale de conservation

On considère une surface S définissant le volume V .

On note $U(t)$ l'énergie électromagnétique emmagasinée dans le volume V , δW_{sortie} l'énergie qui a traversé la surface S de l'intérieur vers l'extérieur entre t et $t + dt$ et δW_{cedee} l'énergie cédée par le champ aux porteurs de charge dans le volume V entre t et $t + dt$.

On a

$$dU = U(t + dt) - U(t) = -\delta W_{\text{sortie}} - \delta W_{\text{cedee}}.$$

On définit $u(t) = \frac{dU}{d\tau}$ la densité d'énergie électromagnétique (en $\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$).

On a

$$dU = u d\tau$$

$$U = \iiint_V u d\tau$$

et

$$\delta W_{\text{cedee}} = \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} \, d\tau \, dt.$$

On définit $\vec{\Pi}$ la densité de puissance électromagnétique surfacique (en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$) et on a

$$\delta W_{\text{sortie}} = \oiint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} \, dt.$$

De plus, on a

$$dU = \frac{\partial}{\partial t} \left(\iiint_V u \, d\tau \right) dt = \iiint_V \frac{\partial u}{\partial t} \, d\tau \, dt.$$

Donc

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial u}{\partial t} \, d\tau \, dt &= - \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} \, d\tau \, dt - \oiint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} \\ \iiint_V \frac{\partial u}{\partial t} \, d\tau \, dt &= - \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} \, d\tau \, dt - \iiint_V \text{div } \vec{\Pi} \, d\tau \, dt \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\iiint_V \frac{\partial u}{\partial t} \, d\tau \, dt} \right\} \text{Ostrogradski-Green}$$

$$\iiint_V \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{j} \cdot \vec{E} + \text{div } \vec{\Pi} \right) d\tau \, dt = 0$$

soit l'équation locale de conservation de la charge :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{j} \cdot \vec{E} + \text{div } \vec{\Pi} = 0.$$

On admet temporairement

$$u(t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

et

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}.$$

On appelle $\vec{\Pi}$ le vecteur de Poynting.

7.2.2 Identité de Poynting (HP)

D'après $(\overrightarrow{\text{M}\ddot{\text{A}}})$, on a

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \frac{1}{\mu_0} \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\ \vec{j} \cdot \vec{E} &= \frac{\vec{E}}{\mu_0} \cdot \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Or $\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} - \vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}$ donc

$$\begin{aligned} \vec{j} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\mu_0} \left(\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} - \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) - \mu_0 \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left(-\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) - \underbrace{\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}_{=\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2} \right)} - \mu_0 \varepsilon_0 \underbrace{\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{=\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2}{2} \right)} \right). \end{aligned} \quad \left(\overrightarrow{\text{MF}} \right)$$

On retrouve l'équation locale de conservation de la charge ou identité de Poynting :

$$\vec{j} \cdot \vec{E} + \text{div} \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \right) = 0.$$

Remarque : le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ est parfois noté \vec{R} .

7.2.3 Ordres de grandeur

On considère une surface $d\vec{S}$ traversée par le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ et on note θ l'angle entre $d\vec{S}$ et $\vec{\Pi}$.

En notant dP_R la puissance rayonnée par le vecteur de Poynting à travers la surface dS , on a

$$dP_R = \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \Pi dS \cos \theta.$$

On en déduit

$$P_R = \iint \Pi dS \cos \theta$$

et, si la surface est plane et $\vec{\Pi}$ est uniforme :

$$P_R = \Pi S \cos \theta.$$

Calculons par exemple la puissance surfacique rayonnée par le Soleil en haut de l'atmosphère terrestre.

On note D_{TS} la distance entre le Soleil et la Terre et R_S le rayon du Soleil.

On note $T_S = 5800 \text{ K}$ la température du Soleil.

En notant $\vec{\Pi}_S$ la puissance surfacique rayonnée par le Soleil, d'après la loi de Stefan, on a

$$\Pi_S = \sigma T_S^4$$

avec $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$, *i.e.* $\Pi_S \approx 50 \text{ MW} \cdot \text{m}^{-2}$.

On note Π_T le flux solaire au niveau de la Terre et P_S la puissance totale émise par le Soleil. On a

$$\begin{aligned} P_S &= \oint\!\!\!\oint_{\text{surface Soleil}} \vec{\Pi}_S \cdot d\vec{S} = 4\pi R_S^2 \Pi_S \\ &= \oint\!\!\!\oint_{\substack{\text{sphère} \\ \text{de} \\ \text{rayon } D_{TS}}} \vec{\Pi}_T \cdot d\vec{S} = 4\pi D_{TS}^2 \Pi_T. \end{aligned}$$

Donc $4\pi R_S^2 \Pi_S = 4\pi D_{TS}^2 \Pi_T$.

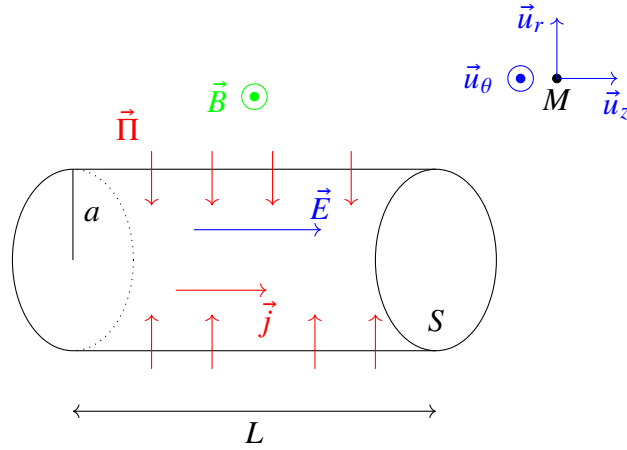
Donc $\Pi_T = \Pi_S \left(\frac{R_S}{D_{TS}} \right)^2$.

Or $D_{TS} = 150 \cdot 10^6 \text{ km}$ et $R_S = 695 \cdot 10^3 \text{ km}$ donc

$$\Pi_T = 1368 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}.$$

7.3 Exemples de bilan d'énergie électromagnétique

7.3.1 Conducteur ohmique



\vec{E} est un champ électrique extérieur.

On a $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ et $U = RI$ où $R = \frac{L}{\gamma S}$.

On a $I = jS = j\pi a^2 = \gamma E \pi a^2$.

On a donc $\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 \gamma E r}{2} \vec{u}_\theta & \text{si } r < a \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 \gamma E a^2}{2r} \vec{u}_\theta & \text{si } r > a \end{cases}$.

Alors, $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \begin{cases} \frac{E}{\mu_0} \vec{u}_z \wedge \frac{\mu_0 \gamma E r}{2} \vec{u}_\theta = -\frac{\gamma E^2 r}{2} \vec{u}_r & \text{si } r < a \\ \frac{E}{\mu_0} \vec{u}_z \wedge \frac{\mu_0 \gamma E a^2}{2r} \vec{u}_\theta = -\frac{\gamma E^2 a^2}{2r} \vec{u}_r & \text{si } r > a \end{cases}$

Ainsi, $\vec{\Pi}$ est dirigé selon $-\vec{u}_r$.

► Contrairement à l'intuition, la puissance du champ (\vec{E}, \vec{B}) entre par la surface latérale.

► Le conducteur ohmique est dissipatif donc la puissance doit y entrer, d'où $\vec{\Pi}$ selon $-\vec{u}_r$.

En notant P la puissance entrant dans le conducteur ohmique, on a

$$\begin{aligned}
 P &= \oiint \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} \\
 &= \iint_{S_g} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_d} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_\ell} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} \\
 &= \iint_{S_\ell} \Pi dS \\
 &= -\frac{\gamma E^2 a^2}{2a} 2\pi a L \\
 &= -\frac{\gamma E^2 a^2 \pi L^2}{L} \\
 &= -\frac{\gamma U^2 \pi a^2}{L} \\
 &= -\frac{U^2}{R}.
 \end{aligned}$$

Bilan de puissance :

$$\iiint \frac{\partial u}{\partial t} d\tau dt + \underbrace{\iiint \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau dt}_{=RI^2} + \underbrace{\oiint \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} dt}_{=-RI^2} = 0.$$

Or $u = \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$ donc $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$.

D'où $0 = 0$: le bilan de puissance est valide.