

Physique – MPI

Romain Bricout

19 novembre 2023

Introduction

Ce document réunit l'ensemble de mes cours de Physique de MPI. Le professeur était M. Jacob. J'ai adapté certaines formulations me paraissant floues ou ne me plaisant pas mais le contenu pur des cours est strictement équivalent. Le document est organisé selon la hiérarchie suivante : partie, chapitre, I), 1), a). Les parties sont celles du programme : mécanique, optique, ... Leur ordre dans ce document est arbitraire et ne reflète pas l'ordre de traitement des chapitres durant l'année.

Les éléments des tables des matières initiale et présentes au début de chaque chapitre sont cliquables (amenant directement à la partie cliquée).

Code couleur des vecteurs (et flèches en général) :

- noir : légendes ou mouvements ;
- violet : champs (par exemple le champ de pesanteur \vec{g}) ;
- rouge : forces ;
- bleu : vecteurs unitaires ;
- vert : vecteurs vitesse ou accélération ;
- jaune : vecteurs rotation.

Table des matières

I	Mécanique	3
1	Référentiels non-galiléens	4
	Introduction.	4
1.1	Changement de référentiel.	5
1.1.1	Loi de composition des vitesses	5
1.1.2	Loi de composition des accélérations	8
1.2	Notion de forces d'inertie	11
1.2.1	Cas général	11
1.2.2	Cas de R en translation par rapport à R_g	12
1.2.3	Cas de R en rotation uniforme autour d'un axe fixe de R_g	14
1.3	Caractère galiléen approché du référentiel terrestre	17
1.3.1	Les référentiels d'étude	17
1.3.2	Mécanique dans le référentiel terrestre	18
2	Lois du frottement solide	24
II	Optique	25
1	Modèle scalaire des ondes lumineuses	26
2	Superposition de deux ondes lumineuses	27
3	Interféromètres par division du front d'onde	28
4	Interféromètres par division d'amplitude	29

III	Électromagnétisme	30
	Formulaire d'analyse vectorielle	31
	Calcul vectoriel	31
	Coordonnées cartésiennes	31
	Coordonnées cylindriques	32
	Coordonnées sphériques	32
	Théorèmes	32
1	Électrostatique	33
2	Topographie du champ et du potentiel électrostatiques	34
3	Dipôle électrostatique	35
4	Magnétostatique	36
5	Dipôle magnétostatique	37

Première partie

Mécanique

Chapitre 1

Référentiels non-galiléens

Sommaire

Introduction	4
1.1 Changement de référentiel	5
1.1.1 Loi de composition des vitesses	5
1.1.1.1 Cas général	5
1.1.1.2 Cas de R' en translation par rapport à R	6
1.1.1.3 Cas de R' en rotation uniforme autour d'un axe fixe de R	6
1.1.2 Loi de composition des accélérations	8
1.1.2.1 Cas général	8
1.1.2.2 Cas de R' en translation par rapport à R	8
1.1.2.3 Cas de R' en rotation uniforme autour d'un axe fixe de R	9
1.2 Notion de forces d'inertie	11
1.2.1 Cas général	11
1.2.2 Cas de R en translation par rapport à R_g	12
1.2.3 Cas de R en rotation uniforme autour d'un axe fixe de R_g	14
1.3 Caractère galiléen approché du référentiel terrestre	17
1.3.1 Les référentiels d'étude	17
1.3.1.1 Référentiel de Copernic	17
1.3.1.2 Référentiel de Kepler	17
1.3.1.3 Référentiel géocentrique	17
1.3.1.4 Référentiel terrestre local	17
1.3.2 Mécanique dans le référentiel terrestre	18
1.3.2.1 Statique terrestre, champ de pesanteur	18
1.3.2.2 Dynamique terrestre	19
Base locale	19
Mouvement horizontal, vers la droite dans l'hémisphère Nord	20
Mouvement vertical, déviation vers l'Est	21

Introduction

Rappel :

Un référentiel est un système de trois axes de coordonnées lié à un solide de référence (l'observateur) et munie d'une horloge mesurant le temps.

Un référentiel est dit galiléen (ou inertiel) si le principe d'inertie y est vérifié.

Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est galiléen. Le principe fondamental de la dynamique et le principe d'inertie y sont vérifiés.

Cependant, il est parfois judicieux d'analyser le mouvement d'un solide qui a un mouvement quelconque dans un référentiel galiléen dans un autre référentiel où le mouvement se décrit simplement.

Par exemple, dans le référentiel terrestre, la valve d'une roue de vélo qui tourne a une trajectoire cycloïdale alors que dans le référentiel de la roue, elle a une trajectoire circulaire.

1.1 Changement de référentiel

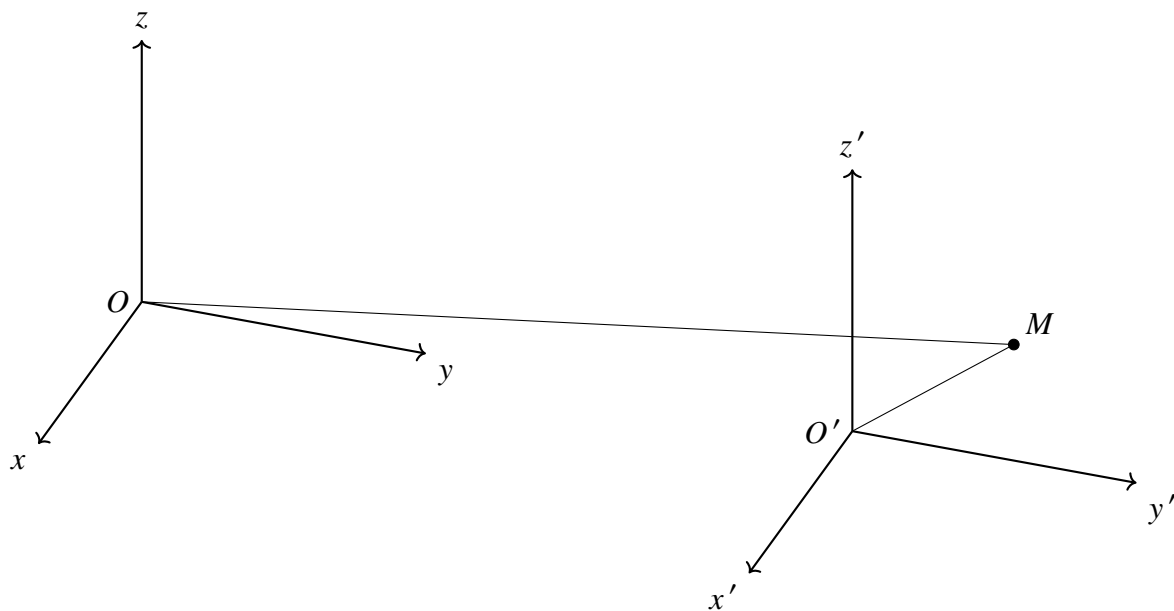
1.1.1 Loi de composition des vitesses

1.1.1.1 Cas général

Soient deux référentiels R et R' associés à deux repères (Ox, Oy, Oz) et $(O'x', O'y', O'z')$ et munis d'horloges identiques H et H' .

Dans le cadre de la cinématique classique (*i.e.* non-relativiste), $H = H'$ donc $t = t'$: le temps est absolu.

C'est valable si $v \ll c$ (en pratique, $v < 0,1c$).



On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$.

On dérive dans R :

On a

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + x'\vec{u}_{x'} + y'\vec{u}_{y'} + z'\vec{u}_{z'}$$

avec $(\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'})$ une base orthonormale directe de R' .

D'où

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_R &= \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \right)_R + \frac{dx'}{dt}\vec{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\vec{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\vec{u}_{z'} \\ &\quad + x' \left(\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} \right)_R + y' \left(\frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} \right)_R + z' \left(\frac{d\vec{u}_{z'}}{dt} \right)_R \end{aligned}$$

On obtient donc la loi de composition des vitesses :

$$\vec{v}(M)_R = \vec{v}(M)_{R'} + \vec{v}_e$$

où

$$\vec{v}_e = \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}}_{\substack{\text{déplacement} \\ \text{de } R' \\ \text{par rapport} \\ \text{à } R}} + \underbrace{x' \left(\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} \right)_R + y' \left(\frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} \right)_R + z' \left(\frac{d\vec{u}_{z'}}{dt} \right)_R}_{\text{rotation de } R' \text{ par rapport à } R}$$

est la vitesse d'entraînement.

1.1.1.2 Cas de R' en translation par rapport à R

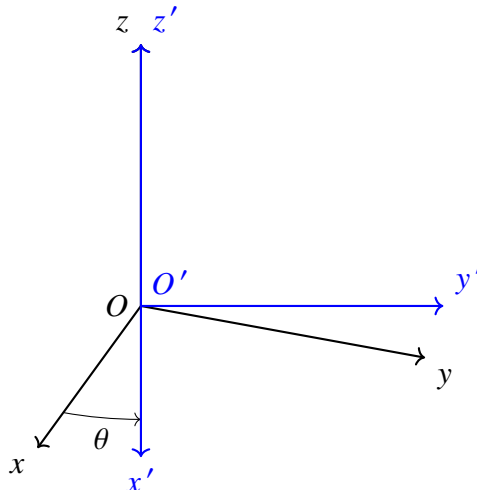
Si R' est en translation par rapport à R alors ils partagent la même base donc $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z) = (\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'})$.

Donc

$$\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$$

La vitesse d'entraînement est indépendante du point étudié (tous les points de R' sont entraînés à la même vitesse).

1.1.1.3 Cas de R' en rotation uniforme autour d'un axe fixe de R



On pose $\omega = \dot{\theta} = \text{cte}$ (rotation uniforme).

On a $\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = \vec{0}$ et comme $\vec{u}_{z'} = \vec{u}_z$ on a $\left. \frac{d\vec{u}_{z'}}{dt} \right)_R = \vec{0}$.

Déterminons $\left. \frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} \right)_R$.

On a $\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} = \underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{=\dot{\theta}=\omega} \left. \frac{d\vec{u}_{x'}}{d\theta} \right)_R$.

En projetant dans la base (\vec{u}_x, \vec{u}_y) , on obtient

$$\begin{cases} \vec{u}_{x'} = \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y \\ \vec{u}_{y'} = -\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y \end{cases}$$

Donc $\left. \frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} \right)_R = \omega \vec{u}_{y'}$.

De même : $\left. \frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} \right)_R = -\omega \vec{u}_{x'}$.

Donc

$$\begin{aligned} \vec{v}_e &= x' \left. \frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} \right)_R + y' \left. \frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} \right)_R \\ &= x' \omega \vec{u}_{y'} - y' \omega \vec{u}_{x'} \end{aligned}$$

On pose $\vec{\omega}$ le vecteur rotation de R' par rapport à R : $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$

On a alors

$$\left. \frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} \right)_R = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_{x'}, \quad \left. \frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} \right)_R = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_{y'}$$

Donc

$$\begin{aligned} \vec{v}_e &= x' (\vec{\omega} \wedge \vec{u}_{x'}) + y' (\vec{\omega} \wedge \vec{u}_{y'}) \\ &= \vec{\omega} \wedge (x' \vec{u}_{x'} + y' \vec{u}_{y'}) \\ &= \vec{\omega} \wedge \underbrace{(x' \vec{u}_{x'} + y' \vec{u}_{y'} + z \vec{u}_z)}_{=\overrightarrow{OM}} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{linéarité de } \wedge \\ \vec{\omega} \wedge \vec{u}_z = \vec{0} \end{array} \right\}$$

D'où

$$\vec{v}_e = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

1.1.2 Loi de composition des accélérations

1.1.2.1 Cas général

On a

$$\begin{aligned}
 \vec{v}(M)_R &= \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \\
 &\quad + \frac{dx'}{dt}\vec{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\vec{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\vec{u}_{z'} \\
 &\quad + x' \frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} \Big|_R + y' \frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} \Big|_R + z' \frac{d\vec{u}_{z'}}{dt} \Big|_R \quad \left(\frac{d}{dt} \Big|_R \right) \\
 \vec{a}(M)_R &= \frac{d\vec{v}(M)_R}{dt} \Big|_R = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} \Big|_R \\
 &\quad + x' \frac{d^2\vec{u}_{x'}}{dt^2} \Big|_R + y' \frac{d^2\vec{u}_{y'}}{dt^2} \Big|_R + z' \frac{d^2\vec{u}_{z'}}{dt^2} \Big|_R \\
 &\quad + 2 \frac{dx'}{dt} \frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} \Big|_R + 2 \frac{dy'}{dt} \frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} \Big|_R + 2 \frac{dz'}{dt} \frac{d\vec{u}_{z'}}{dt} \Big|_R \\
 &\quad + \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{u}_{x'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{u}_{y'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{u}_{z'}
 \end{aligned}$$

Donc

$$\vec{a}(M)_R = \vec{a}_e + \vec{a}_C + \vec{a}(M)_{R'}$$

où

\vec{a}_e est l'accélération d'entraînement

\vec{a}_C est l'accélération de Coriolis

$\vec{a}(M)_{R'}$ est l'accélération relative de M dans R' .

1.1.2.2 Cas de R' en translation par rapport à R

On a $\vec{u}_{x'} = \vec{u}_x$, $\vec{u}_{y'} = \vec{u}_y$ et $\vec{u}_{z'} = \vec{u}_z$.

Donc $\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} \Big|_R = \vec{0}$ et $\frac{d^2\vec{u}_{x'}}{dt^2} \Big|_R = \vec{0}$. Idem pour $\vec{u}_{y'}$ et $\vec{u}_{z'}$.



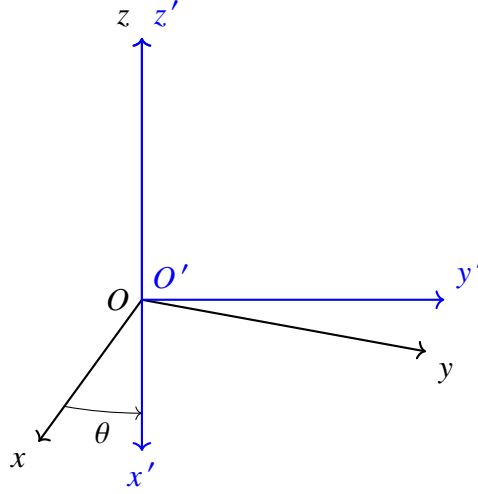
O' n'est pas nécessairement en translation par rapport à O .

On a donc $\vec{a}_C = \vec{0}$ et $\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} \Big|_R$ donc

$$\vec{a}(M)_R = \vec{a}(M)_{R'} + \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} \Big|_R$$

On remarque que l'accélération d'entraînement ne dépend pas du point de R' étudié.

1.1.2.3 Cas de R' en rotation uniforme autour d'un axe fixe de R



On pose $\omega = \dot{\theta} = \text{cte}$ et le vecteur rotation $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$.

On a

$$\vec{a}_e = \frac{d^2 \overrightarrow{OO'}}{dt^2} \Bigg|_R + x' \frac{d^2 \vec{u}_{x'}}{dt^2} \Bigg|_R + y' \frac{d^2 \vec{u}_{y'}}{dt^2} \Bigg|_R + z \frac{d^2 \vec{u}_z}{dt^2} \Bigg|_R$$

On avait $\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} \Bigg|_R = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_{x'}$, donc $\frac{d^2 \vec{u}_{x'}}{dt^2} \Bigg|_R = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{u}_{x'})$

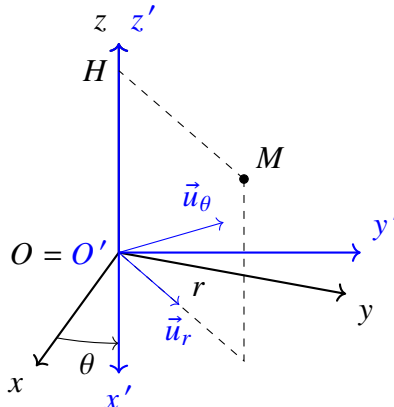
Donc

$$\begin{aligned} \vec{a}_e &= x' \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{u}_{x'}) + y' \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{u}_{y'}) \\ &= \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (x' \vec{u}_{x'} + y' \vec{u}_{y'})) \\ &= \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (x' \vec{u}_{x'} + y' \vec{u}_{y'} + z \vec{u}_z)) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{linéarité de } \wedge \\ \vec{\omega} \wedge \vec{u}_z = \vec{0} \end{array} \right\}$$

D'où

$$\vec{a}_e = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}).$$

On se place dans une base cylindrique et on note H le projeté de M sur (Oz) :



On a $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z = \overrightarrow{HM} + z\vec{u}_z$.

De plus

$$\begin{aligned}\vec{a}_e &= \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (r\vec{u}_r + z\vec{u}_z)) \\ &= \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge r\vec{u}_r) \\ &= \vec{\omega} \wedge \omega r\vec{u}_\theta \\ &= -\omega^2 r\vec{u}_r\end{aligned}$$

Donc

$$\vec{a}_e = -\omega^2 \overrightarrow{HM}$$

où H est le projeté de M sur l'axe de rotation.

Remarques :

- \vec{a}_e dépend de la position de M dans R' et de $\|\overrightarrow{HM}\|$ (distance à l'axe de rotation).
- \vec{a}_e est dirigée vers l'axe de rotation (accélération centripète).

Déterminons maintenant \vec{a}_C :

$$\begin{aligned}\vec{a}_C &= 2 \left(\frac{dx'}{dt} \frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} \right)_R + \frac{dy'}{dt} \frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} \bigg|_R + \frac{dz'}{dt} \frac{d\vec{u}_{z'}}{dt} \bigg|_R \quad \vec{0} \\ &= 2 \left(\frac{dx'}{dt} \vec{\omega} \wedge \vec{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt} \vec{\omega} \wedge \vec{u}_{y'} \right) \\ &= 2\vec{\omega} \wedge \left(\frac{dx'}{dt} \vec{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt} \vec{u}_{y'} \right) \\ &= 2\vec{\omega} \wedge \left(\frac{dx'}{dt} \vec{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt} \vec{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt} \vec{u}_{z'} \right)\end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} \text{linéarité de } \wedge \\ \vec{\omega} \wedge \vec{u}_{z'} = \vec{0} \end{array} \right\}$

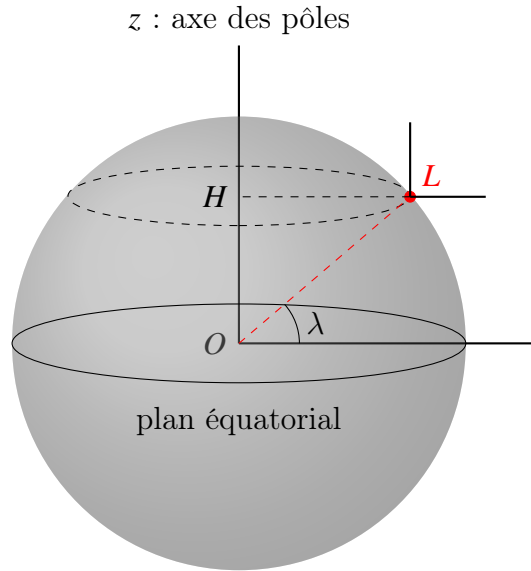
D'où

$$\vec{a}_C = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)_{R'}$$

Remarques :

- Si $\vec{v}(M)_{R'} = \vec{0}$ alors $\vec{a}_C = \vec{0}$.
- La direction de \vec{a}_C dépend de $\vec{v}(M)_{R'}$.

Exercice/exemple : calculons l'accélération d'entraînement du référentiel terrestre par rapport au référentiel géocentrique à Limoges (latitude $\lambda = 49^\circ N$).



Le référentiel terrestre est en rotation uniforme par rapport au référentiel géocentrique : $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$.

H est le projeté de L sur Oz .

On a $\vec{a}_e = -\omega^2 \overrightarrow{HL}$ donc $\|\vec{a}_e\| = \omega^2 HL$.

Or $\omega = \frac{2\pi}{T}$ avec T la durée du jour sidéral (23 h et 56 min).

Donc $\omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

On note $R_T = 6400 \text{ km}$ le rayon de la Terre.

On a $HL = R_T \cos \lambda$.

Donc $a_e = 2,7 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

On compare à $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$: $\frac{a_e}{g} = 2,7 \cdot 10^{-3} \ll 1$.

Il est donc difficile de mettre en évidence l'effet de \vec{a}_e du référentiel terrestre par rapport au référentiel géocentrique.

Remarque : l'accélération d'entraînement est nulle aux pôles et maximale à l'équateur.

1.2 Notion de forces d'inertie

1.2.1 Cas général

Soient R_g un référentiel galiléen et R un référentiel d'étude quelconque.

On a

$$\begin{cases} \vec{v}(M)_{R_g} = \vec{v}(M)_R + \vec{v}_e \\ \vec{a}(M)_{R_g} = \vec{a}(M)_R + \vec{a}_e + \vec{a}_C \end{cases}$$

Soit un point M de masse m soumis à un ensemble de forces \vec{F} dans R_g .

Comme R_g est galiléen, on applique le principe fondamental de la dynamique : $m\vec{a}(M)_{R_g} = \vec{F}$.

On applique la loi de composition des accélérations et on obtient : $m(\vec{a}(M)_R + \vec{a}_e + \vec{a}_C) = \vec{F}$, c'est-à-dire :

$$m\vec{a}(M)_R = \vec{F} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_C.$$

Donc dans un référentiel non-galiléen, le principe fondamental de la dynamique s'écrit avec deux termes supplémentaires :

► $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e$: force d'inertie d'entraînement ;

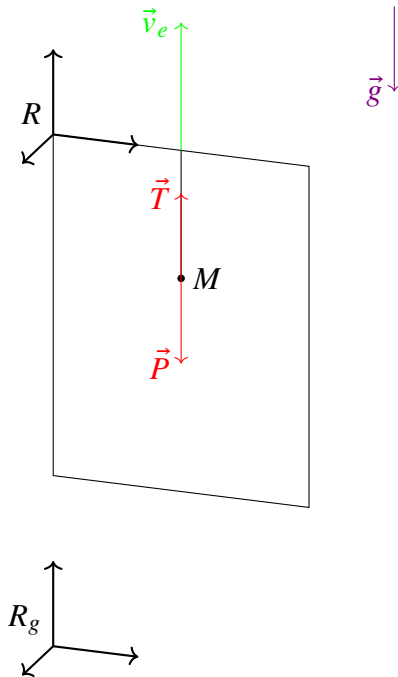
► $\vec{F}_{iC} = -m\vec{a}_C$: force d'inertie de Coriolis.

Remarque : \vec{F} sont des forces véritables, elles ont une origine physique ; \vec{F}_{ie} et \vec{F}_{iC} sont des pseudo-forces dont l'origine est le caractère non-galiléen de R .

Remarque : on a $\vec{F}_{iC} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)_R$ donc $\vec{F}_{iC} \neq \vec{0}$ si R est en rotation par rapport à R_g et si M est en mouvement dans R .

1.2.2 Cas de R en translation par rapport à R_g

Soit un point M de masse m accroché au plafond d'un ascenseur en mouvement vertical rectiligne.



Système : $M(m)$.

Référentiel : R non-galiléen.

Bilan des forces : \vec{P} et \vec{T} .

$\overrightarrow{\text{PFD}} : m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} - m\vec{a}_e \ (\vec{F}_{iC} = \vec{0})$ où

\vec{a}_e est l'accélération d'entraînement de l'ascenseur par rapport à R_g

\vec{a} est l'accélération de M dans R donc ici $\vec{a} = \vec{0}$

$$\vec{P} = m\vec{g}.$$

$$\text{Donc } \vec{0} = m\vec{g} + \vec{T} - m\vec{a}_e$$

$$\text{Donc } \vec{T} = m(\vec{a}_e - \vec{g}).$$

On définit alors le poids apparent $\vec{P}' = -\vec{T} = m(\vec{g} - \vec{a}_e) = m\vec{g}'$ où \vec{g}' est le champ de pesanteur apparent.

Si l'ascenseur accélère vers le haut alors $g' = g - a_e > g$.

Si l'ascenseur accélère vers le bas alors $g' = g - a_e < g$.

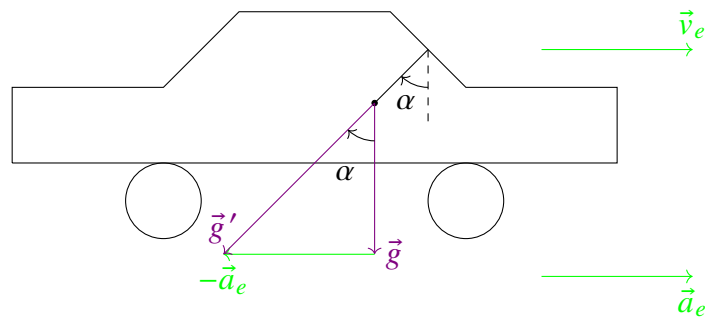
Si l'ascenseur est en chute libre alors $\vec{g} = \vec{a}_e$ donc $\vec{g}' = \vec{0}$: on est en chute libre dans l'ascenseur.

Conclusion : travailler dans un référentiel non-galiléen qui est en translation rectiligne par rapport au référentiel terrestre (galiléen) revient à remplacer \vec{g} par $\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}_e$.



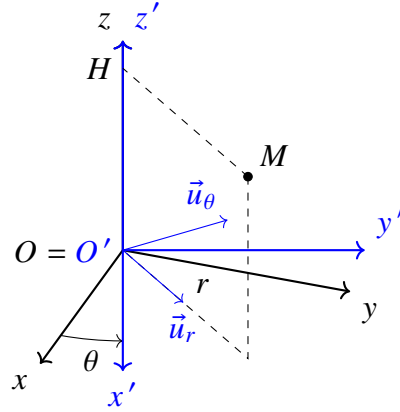
\vec{g} et \vec{a}_e ne sont pas forcément colinéaires.

Exemple : voiture qui accélère.



$$\text{Avec } \alpha = \text{Arctan} \frac{a_e}{g}.$$

1.2.3 Cas de R en rotation uniforme autour d'un axe fixe de R_g



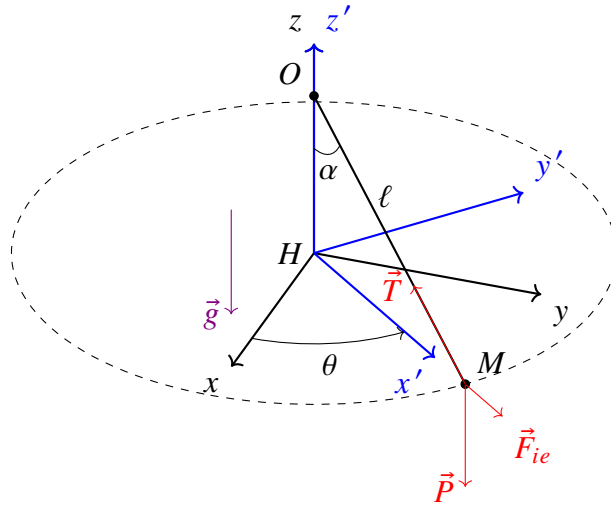
On pose $\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{u}_z$.

On a $\vec{a}_e = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}) = -\omega^2 \overrightarrow{HM}$ avec H le projeté de M sur (Oz) .

Donc $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e = m\omega^2 \overrightarrow{HM}$ (effet centrifuge).

Exemple : pendule conique.

Soit un point M de masse m attaché à un fil de longueur ℓ .



M est en rotation autour de la verticale.

Le référentiel (H, x, y, z) est galiléen et le référentiel $R = (H, x', y', z')$ est non-galiléen et en rotation autour de (Hz) .

Système : $M (m)$.

Référentiel : R non-galiléen.

Bilan des forces : $\vec{P} = m\vec{g}$ et \vec{T} .

PFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{iC}$.

Or $\vec{F}_{iC} = \vec{0}$ car $\vec{v}(M)_R = \vec{0}$ et $\vec{F}_{ie} = m\omega^2 \overrightarrow{HM}$.

De plus, on a $HM = \ell \sin \alpha$ donc $\vec{F}_{ie} = m\omega^2 \ell \sin \alpha \vec{u}_r$.

Or M est fixe dans R donc $\vec{a} = \vec{0}$.

Donc $\vec{0} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{ie}$.

On a :

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{\|\vec{F}_{ie}\|}{\|\vec{P}\|} \\ \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} &= \frac{m\omega^2 \ell \sin \alpha}{mg} \\ \omega^2 &= \frac{g}{\ell \cos \alpha} > \frac{g}{\ell} \\ \omega &> \sqrt{\frac{g}{\ell}}.\end{aligned}$$

Le pendule conique ne peut pas tourner trop lentement :

$$f_{\min} = \frac{\omega_{\min}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

Application numérique : avec $\ell = 1$ m, on a $f_{\min} = 0,5$ Hz.

Déterminons maintenant si \vec{F}_{ie} et \vec{F}_{iC} sont conservatives.

On a $\vec{F}_{ie} = m\omega^2 \overrightarrow{HM} = m\omega^2 r \vec{u}_r$ et $d\overrightarrow{OM} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$ donc

$$\begin{aligned}\delta W &= \vec{F}_{ie} \cdot d\overrightarrow{OM} \\ &= m\omega^2 r \vec{u}_r \cdot (dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z) \\ &= m\omega^2 r dr \\ &= -d\left(\frac{-1}{2} m\omega^2 r^2 + \text{cte}\right) \\ &= -dE_p\end{aligned}$$

avec $E_p = \frac{-1}{2} m\omega^2 r^2 + \text{cte}$.

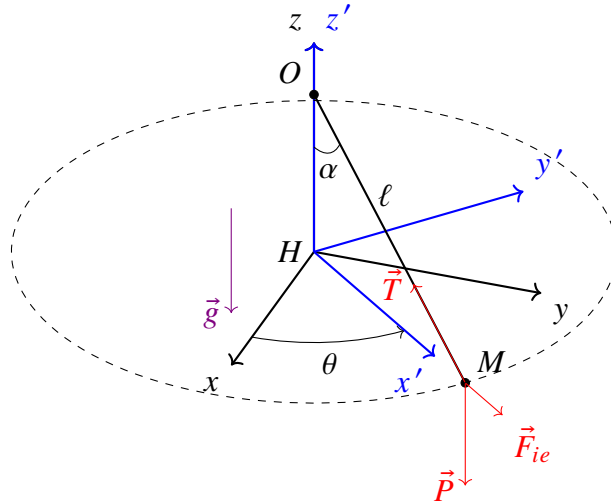
Donc \vec{F}_{ie} est conservative.

De plus, on a $\vec{F}_{iC} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)_R \perp \vec{v}(M)_R$ et $d\overrightarrow{OM} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} dt = \vec{v}(M)_R dt$ donc

$$\begin{aligned}\delta W &= \vec{F}_{iC} \cdot d\overrightarrow{OM} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc \vec{F}_{iC} ne travaille pas et n'a pas d'énergie potentielle associée.

Reprenons l'exemple du pendule conique :



\vec{P} , \vec{T} et \vec{F}_{iC} ne travaillent pas et \vec{F}_{ie} est conservative.

La variable géométrique est α .

Dans le référentiel R tournant non-galiléen, on a $E_m = E_c + E_{p_{\text{pesanteur}}} + E_{p_{\vec{F}_{ie}}}$.

Comme $v = \ell \dot{\alpha}$, on a :

$$E_c = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\alpha}^2$$

et

$$E_{p_{\text{pesanteur}}} = -mg\ell \cos \alpha$$

et

$$\begin{aligned} E_{p_{\vec{F}_{ie}}} &= \frac{-1}{2} m \omega^2 r^2 + \text{cte} \\ &= \frac{-1}{2} m \omega^2 \ell^2 \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } E_m = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\alpha}^2 - mg\ell \cos \alpha - \frac{1}{2} m \omega^2 \ell^2 \sin^2 \alpha.$$

Or comme M n'est soumis à aucune force conservative, on a $E_m = \text{cte}$.

Donc

$$\frac{dE_m}{dt} = 0$$

$$m \ell^2 \dot{\alpha} \ddot{\alpha} + mg\ell \dot{\alpha} \sin \alpha - m \ell^2 \omega^2 \dot{\alpha} \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

$$\ell \ddot{\alpha} + g \sin \alpha - \ell \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

C'est l'équation du mouvement du pendule conique dans R autour de sa position d'équilibre.

Si on considère une position d'équilibre dans R , *i.e.* $\alpha = \text{cte}$, on retrouve $\omega^2 = \frac{g}{\ell \cos \alpha}$.

1.3 Caractère galiléen approché du référentiel terrestre

1.3.1 Les référentiels d'étude

Rappel : un référentiel R' est galiléen s'il est en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen. En effet, dans ce cas, on a $\vec{F}_{ie} = \vec{0}$ et $\vec{F}_{iC} = \vec{0}$ donc d'après le $\overrightarrow{\text{PFD}}$ dans R' , on a $m\vec{a} = \vec{F}$ donc le principe d'inertie est vérifié dans R' donc R' est galiléen.

1.3.1.1 Référentiel de Copernic

C'est le référentiel d'origine C le centre de masse du système solaire et d'axes (Cx_g, Cy_g, Cz_g) dirigés vers trois étoiles lointaines considérées comme fixes car suffisamment éloignées du système solaire.

Le référentiel de Copernic est le référentiel galiléen de base. Les observations astronomiques ont montré qu'une météorite se déplaçant dans l'espace suffisamment éloignée des différentes planètes a bien un mouvement de translation rectiligne uniforme.

1.3.1.2 Référentiel de Kepler

C'est le référentiel d'origine S le centre de masse du soleil et d'axes (Sx_0, Sy_0, Sz_0) parallèles à (Cx_g, Cy_g, Cz_g) dirigés vers trois étoiles lointaines considérées comme fixes car suffisamment éloignées du système solaire.

En pratique, le référentiel de Kepler est quasi-galiléen et il est très difficile de mettre en évidence son caractère non-galiléen.

1.3.1.3 Référentiel géocentrique

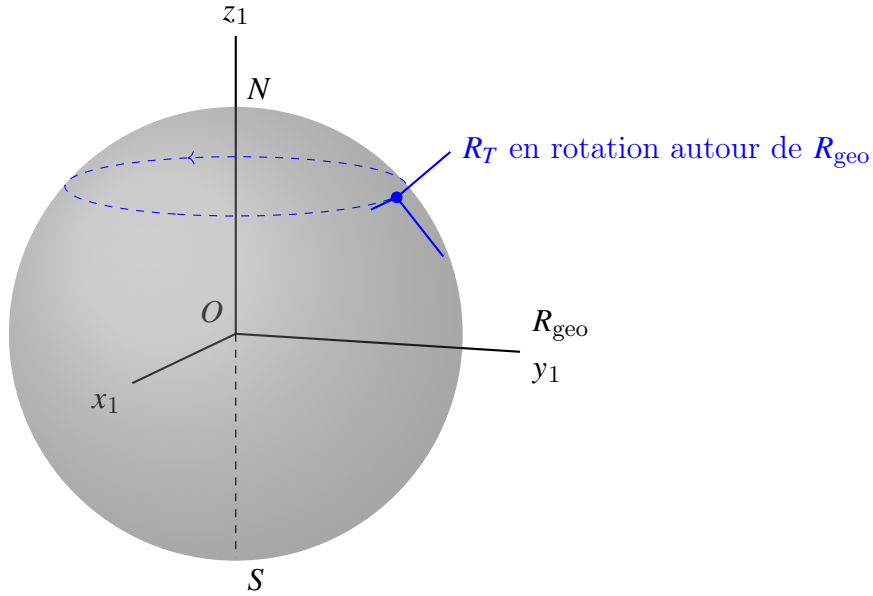
C'est le référentiel d'origine O le centre de masse de la Terre et d'axes (Ox_1, Oy_1, Oz_1) dirigés vers trois étoiles lointaines considérées comme fixes car suffisamment éloignées du système solaire.

Si une expérience dure peu de temps devant une année, on peut considérer que la Terre se déplace en ligne droite sur son orbite et donc que le référentiel géocentrique est galiléen.

1.3.1.4 Référentiel terrestre local

Le référentiel terrestre local R_T est constitué d'une origine A liée au sol et à trois axes (Ax, Ay, Az) . Il est en rotation uniforme autour de l'axe des pôles de la Terre donc n'est pas galiléen.

Si une expérience est courte devant vingt-quatre heures, on peut considérer que R_T se déplace en ligne droite par rapport au référentiel géocentrique et donc que son caractère non-galiléen est peu marqué.

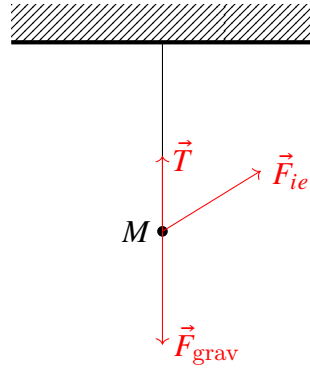


1.3.2 Mécanique dans le référentiel terrestre

1.3.2.1 Statique terrestre, champ de pesanteur

On se place dans le référentiel terrestre local non-galiléen.

Soit $M(m)$ accroché au plafond à l'équilibre.



Système : $M(m)$.

Référentiel : terrestre non-galiléen.

Bilan des forces : $\vec{F}_{\text{grav}} = -\frac{GmM_T}{R_T^2}\vec{u}$ avec $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{R_T}$, \vec{T} , $\vec{F}_{ie} = m\omega^2\overrightarrow{HM}$ et $\vec{F}_{iC} = \vec{0}$.

PFD : $\vec{F}_{\text{grav}} + \vec{T} + \vec{F}_{ie} = \vec{0}$.

On définit

$$\begin{aligned}
 \vec{P} &= -\vec{T} \\
 &= \overrightarrow{F_{\text{grav}}} + \vec{F}_{ie} \\
 &= -\frac{GmM_T}{R_T^2} + m\omega^2 \overrightarrow{HM} \\
 &= m \left(-\frac{GM_T}{R_T^2} + \omega^2 \overrightarrow{HM} \right).
 \end{aligned}$$

On pose alors le champ gravitationnel $\overrightarrow{\mathcal{G}}_{\text{grav}} = -\frac{GM_T}{R_T^2}$.

On obtient le champ de pesanteur

$$\vec{g} = \overrightarrow{\mathcal{G}}_{\text{grav}}(M) + \omega^2 \overrightarrow{HM}.$$

Ainsi, dans le référentiel terrestre local, la force d'inertie d'entraînement est prise en compte dans la définition du poids.

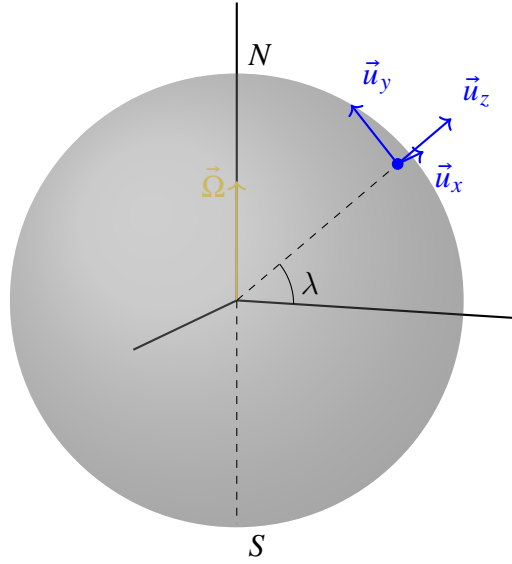
Remarques :

- \vec{g} n'est pas colinéaire à \overrightarrow{OM} .
- La direction de \vec{g} définit la verticale.
- On a $\|\vec{g}\| \neq \|\overrightarrow{\mathcal{G}}_{\text{grav}}\|$.
- On a $g_{\text{pole}} = \frac{GM_T}{R_T^2}$ (en considérant la Terre sphérique).
- On a $g_{\text{equateur}} = \frac{GM_T}{R_T^2} - \omega^2 R_T$.
- On a $\frac{\Delta g}{g_{\text{pole}}} = \frac{\omega^2 R_T}{G \frac{M_T}{R_T^2}} = 3 \cdot 10^{-3}$.

1.3.2.2 Dynamique terrestre

Base locale

Dans le référentiel terrestre local, on ne tient pas compte de $\vec{F}_{ie} = m\omega^2 \overrightarrow{HM}$ car elle est déjà contenue dans le poids.



On a la vitesse de rotation de la Terre autour de son axe $\Omega = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

On pose le vecteur rotation $\vec{\Omega} = \Omega \frac{\overrightarrow{SN}}{R_T}$.

Base locale à la surface de la Terre : \vec{u}_x vers l'Est, \vec{u}_y vers le Nord et \vec{u}_z vertical ascendant.

⚠ Base sphérique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi) = (\vec{u}_z, -\vec{u}_y, \vec{u}_x)$.

On sait que \vec{F}_{ie} est déjà contenue dans \vec{P} .

On note $\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$ la vitesse dans le référentiel terrestre local.

On a $\vec{\Omega} = \Omega (\cos(\lambda) \vec{u}_y + \sin(\lambda) \vec{u}_z)$.

Donc

$$\begin{aligned} \vec{F}_{iC} &= -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v} \\ &= -2m\Omega (\dot{x} (\cos(\lambda) \vec{u}_z - \sin(\lambda) \vec{u}_y) + \dot{y} \sin(\lambda) \vec{u}_x - \dot{z} \cos(\lambda) \vec{u}_x) \\ &= -2m\Omega ((\dot{y} \sin \lambda - \dot{z} \cos \lambda) \vec{u}_x - \dot{x} \sin(\lambda) \vec{u}_y + \dot{x} \cos(\lambda) \vec{u}_z). \end{aligned}$$

Mouvement horizontal, vers la droite dans l'hémisphère Nord

On considère un mouvement horizontal donc $z = \text{cte}$.

On a $\dot{x} \neq 0$, $\dot{y} \neq 0$ et $\dot{z} = 0$.

Donc

$$\begin{aligned} \vec{F}_{iC} &= -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v} \\ &= -2m\Omega (\cos(\lambda) \vec{u}_y + \sin(\lambda) \vec{u}_z) \wedge \vec{v} \\ &= -2m\Omega \left(\underbrace{\cos(\lambda) \vec{u}_y \wedge \vec{v}}_{\text{force portée par } \vec{u}_z} + \underbrace{\sin(\lambda) \vec{u}_z \wedge \vec{v}}_{\text{force portée par } \vec{u}_x} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, la force de Coriolis tend à pousser un mobile vers la droite du mouvement dans l'hémisphère Nord ($\lambda > 0$) et vers la gauche du mouvement dans l'hémisphère Sud ($\lambda < 0$).

Ordre de grandeur : en considérant une voiture de $m = 1000 \text{ kg}$ roulant à $v = 100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ avec $\lambda = 49^\circ$, on obtient

$$F = 2m\Omega v \sin \lambda \approx 3 \text{ N}.$$

Donc l'effet de la force de Coriolis n'est sensible que pour des objets de masse importante et de vitesse élevée.

Mouvement vertical, déviation vers l'Est

Deux expériences ont montré l'existence d'une déviation de la trajectoire d'un objet en chute libre :

- Expérience de Reich (1831) : chute de billes d'acier dans des puits de mine (sans vent). Avec $h = 158 \text{ m}$ et $\lambda = 50^\circ$, on observa une déviation de 28 mm par rapport à la verticale.
- Expérience de Flammarion (1903) : idem depuis la coupole du Panthéon. Avec $h = 68 \text{ m}$ et $\lambda = 48^\circ 51'$, on observa une déviation de 7,6 mm par rapport à la verticale.

Système : bille de masse m .

Référentiel : terrestre supposé galiléen (première approche sans \vec{F}_{iC}).

Bilan des forces : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$ (contient \vec{F}_{ie}).

$$\overrightarrow{\text{PFD}} : m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = -mg \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -gt \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Donc sans tenir compte de \vec{F}_{iC} , on obtient le mouvement non-perturbé (ou mouvement d'ordre 0) avec

$$\vec{v} = -gt\vec{u}_z.$$

On a

$$\begin{aligned} \vec{F}_{iC} &= -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v} \\ &= -2m\Omega (\cos(\lambda) \vec{u}_y + \sin(\lambda) \vec{u}_z) \wedge (-gt\vec{u}_z) \\ &= 2m\Omega \cos(\lambda) gt\vec{u}_x. \end{aligned}$$

Méthode perturbative : on sait que $\|\vec{F}_{iC}\| \ll mg$; on considère que l'ordre 0 reste vrai et on le perturbe avec \vec{F}_{iC} .

Bilan des forces : $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$ et $\vec{F}_{iC} = 2m\Omega \cos(\lambda) gt\vec{u}_x$.

$$\overrightarrow{\text{PFD}} : m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m\Omega \cos(\lambda) gt \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\Omega \cos(\lambda) gt \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{x} = \Omega \cos(\lambda) gt^2 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -gt \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{3}\Omega \cos(\lambda) t^3 \\ y = 0 \\ z = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Dans l'hémisphère Nord, on a $\lambda > 0$ donc $\cos \lambda > 0$ donc $x > 0$: déviation vers l'Est.

De plus, comme $z = h - \frac{1}{2}gt^2$, on a $t = \sqrt{\frac{2(h-z)}{g}}$.

D'où

$$x(z) = \frac{1}{3}\Omega \cos(\lambda) g \left(\frac{2(h-z)}{g} \right)^{3/2}.$$

On en déduit

$$x_{\max} = x(z=0) = \frac{1}{3}\Omega \cos(\lambda) g \left(\frac{2h}{g} \right)^{3/2}.$$

Applications numériques dans les cas des expériences de Reich et Flammarion :

$$x_{\max} = 27,5 \text{ mm} \quad \text{et} \quad x_{\max} = 8 \text{ mm}.$$

Ordre 2 :

$$\text{On a } \begin{cases} \dot{x} = \Omega \cos(\lambda) gt^2 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -gt \end{cases} \quad \text{donc}$$

$$\vec{v} = \Omega \cos(\lambda) gt^2\vec{u}_x - gt\vec{u}_z.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \vec{F}_{iC} &= -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v} \\ &= ? \end{aligned}$$

On obtient une nouvelle expression de \vec{F}_{iC} plus précise et donc on peut calculer x, y, z à l'ordre 2.

On a appliqué la méthode des perturbations :

- on calcule le mouvement non-perturbé (à l'ordre 0) en l'absence de \vec{F}_{iC} ;
- on calcule \vec{F}_{iC} à partir de l'ordre 0 et on perturbe celui-ci pour obtenir l'ordre 1 ;

▷ etc...

▷ on s'arrête lorsque le passage de l'ordre n à $n + 1$ produit un écart négligeable.

Autre effet du caractère non-galiléen du référentiel terrestre : le pendule de Foucault.

Chapitre 2

Lois du frottement solide

★★ À venir ★★

Deuxième partie

Optique

Chapitre 1

Modèle scalaire des ondes lumineuses

★★ À venir ★★

Chapitre 2

Superposition de deux ondes lumineuses

★★ À venir ★★

Chapitre 3

Interféromètres par division du front d'onde

★★ À venir ★★

Chapitre 4

Interféromètres par division d'amplitude

★★ À venir ★★

Troisième partie

Électromagnétisme

Formulaire d'analyse vectorielle

Calcul vectoriel

On a les formules suivantes :

- $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} V = \vec{0}$
- $\text{div} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = 0$
- $\text{div} \overrightarrow{\text{grad}} V = \Delta V$
- $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}$
- $\overrightarrow{\text{grad}} (V_1 V_2) = V_1 \overrightarrow{\text{grad}} V_2 + V_2 \overrightarrow{\text{grad}} V_1$
- $\overrightarrow{\text{rot}} (V \vec{A}) = V \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} V \wedge \vec{A}$
- $\text{div} (V \vec{A}) = V \text{div} \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot \vec{A}$
- $\text{div} (\vec{A}_1 \wedge \vec{A}_2) = \vec{A}_2 \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}_1 - \vec{A}_1 \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}_2$

Coordonnées cartésiennes

On a les formules suivantes :

- $\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z$
- $\text{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
- $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z$
- $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

Coordonnées cylindriques

On a les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
 \triangleright \overrightarrow{\text{grad}} V &= \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z \\
 \triangleright \text{div } \vec{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial r A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
 \triangleright \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z \\
 \triangleright \Delta V &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}
 \end{aligned}$$

Coordonnées sphériques

$$\begin{aligned}
 \triangleright \overrightarrow{\text{grad}} V &= \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi \\
 \triangleright \text{div } \vec{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 A_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sin(\theta) A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \\
 \triangleright \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial \sin(\theta) A_\varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial r A_\varphi}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_\varphi \\
 \triangleright \Delta V &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}
 \end{aligned}$$

Théorèmes

Théorème d'Ostrogradsky-Green : S étant une surface fermée et τ le volume intérieur à S , on a

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_\tau (\text{div } \vec{A}) d\tau.$$

Théorème de Stokes-Ampère : C étant une courbe fermée bordant une surface S , on a

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) \cdot d\vec{S}.$$

Chapitre 1

Électrostatique

Sommaire

Calcul vectoriel	31
Coordonnées cartésiennes	31
Coordonnées cylindriques	32
Coordonnées sphériques	32
Théorèmes	32

★★ À venir ★★

Chapitre 2

Topographie du champ et du potentiel électrostatiques

★★ À venir ★★

Chapitre 3

Dipôle électrostatique

★★ À venir ★★

Chapitre 4

Magnétostatique

★★ À venir ★★

Chapitre 5

Dipôle magnétostatique

★★ À venir ★★