Maths – MP2I

Romain Bricout

17 juin 2023

Introduction

Ce document réunit l'ensemble de mes cours de Mathématiques de MP2I, ainsi que les TDs (travaux dirigés) les accompagnant. Le professeur était M. Jansou. J'ai adapté certaines formulations me paraissant floues ou ne me plaisant pas mais le contenu pur des cours est strictement équivalent. Le document est organisé selon la hiérarchie suivante : chapitre, I), 1), a).

Les éléments des tables des matières initiale et présentes au début de chaque chapitre sont cliquables (amenant directement à la partie cliquée). C'est également le cas des références à des éléments antérieurs de la forme, par exemple, « Démonstration 5.22 ».

Dernier chapitre terminé : Chapitre 22 – Fonctions de deux variables réelles (trou de 16 à 20).

Dernier TD terminé : Chapitre 21 – Espaces préhilbertiens (à jour).

Dernier TD corrigé : aucun.

Table des matières

Première partie

Cours

Chapitre 0

Préliminaires

Sommaire

0.1 Logique

Définition 0.1
Une proposition est une affirmation qui peut être vraie ou fausse.

Exemples : $1 + 1 = 2$ est une proposition vraie ; $0 > 1$ est une proposition fausse.

Définition 0.2
Soient P et Q deux propositions. On définit :

- la proposition « P et Q » (notée aussi $P \wedge Q$) de table de vérité :

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

- la proposition « P ou Q » (notée aussi $P \vee Q$) de table de vérité :

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- la proposition « P implique Q » (notée aussi $P \implies Q$) de table de vérité :

P	Q	$P \implies Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exemple : Soit x un nombre réel. La proposition $x \geqslant 0 \implies x^2 \geqslant 0$ est vraie. La proposition $x = 4 \implies x = 5$ est fausse si $x = 4$ et vraie sinon.

- la proposition « P équivaut à Q » (notée aussi $P \iff Q$) de table de vérité

P	Q	$P \iff Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

- la proposition « non P » (notée aussi $\neg P$) de table de vérité

P	$\neg P$
V	F
F	V

Remarque 0.3 (Contraposition)
Soient P et Q deux propositions. Les propositions $P \implies Q$ et $\neg Q \implies \neg P$ sont équivalentes.

Démonstration 0.4 (Méthode 1)
Il suffit de remarquer que les deux propositions ont la même table de vérité :

P	Q	$P \implies Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \implies \neg Q$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

■

Démonstration 0.5 (Méthode 2)
Montrons que $(P \implies Q) \iff (\neg Q \implies \neg P)$:

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $P \implies Q$. Montrons que $\neg Q \implies \neg P$.
Supposons $\neg Q$.
Si P était vraie, Q serait vraie aussi. Donc P est fausse. Donc $\neg P$.
D'où $\neg Q \implies \neg P$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $\neg Q \implies \neg P$.
D'après $\boxed{\Longrightarrow}$ on a $\neg(\neg P) \implies \neg(\neg Q)$, c'est à dire $P \implies Q$. ■

Définition 0.6
Soient P et Q deux propositions. Démontrer l'implication $P \implies Q$ par contraposition, c'est démontrer l'implication contraposée $\neg Q \implies \neg P$, c'est à dire supposer $\neg Q$ et montrer $\neg P$.

Définition 0.7
CS : condition suffisante ; CN : condition nécessaire ; CNS : condition nécessaire et suffisante.

Exemple 0.8
CS pour avoir $x \geqslant 0$: $x = 10$; CN pour avoir $x \geqslant$: $x \geqslant -1$; CNS pour avoir $x \geqslant 0$: $x + 1 \geqslant 1$.

Remarque 0.9
Ne pas utiliser les symboles $\implies$ et $\iff$ comme des abréviations dans du texte en français.

Exemple 0.10
Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrons que $x + 1 \geqslant 1$.

Écrire « On a $x \geqslant 0 \iff x + 1 \geqslant 1$ » est faux.

Écrire « On a $x \geqslant 0$ donc $x + 1 \geqslant 1$ » est correct.

Remarque 0.11
Abréviations autorisées : CS, CN, CNS et ssi.

0.2 Quantificateurs

Notation 0.12
$\in$: « appartient »

$\exists$: « il existe ... tel que » (quantificateur existentiel)

$\forall$: « pour tout » (quantificateur universel)

$\exists!$: « il existe un unique ... tel que »

Exemple 0.13
$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \ \exists y \in \mathbb{R},\ \ x = y^2$

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \ \exists! y \in \mathbb{R}_+,\ \ x = y^2$

Remarque 0.14
Les quantificateurs se lisent de gauche à droite et leur ordre est important.

Exemple 0.15
On associe à tous réels x, y une proposition $P(x, y)$.

Alors $\exists x \in \mathbb{R},\ \ \forall y \in \mathbb{R},\ \ P(x,y) \implies \forall y \in \mathbb{R},\ \ \exists x \in \mathbb{R},\ \ P(x,y)$.

Dans la proposition de gauche, le x est valable pour tout y. Dans la proposition de droite, le x dépend du y.

L'implication réciproque est généralement fausse.

Par exemple, la proposition $\exists x \in \mathbb{R},\ \ \forall y \in \mathbb{R},\ \ y = x + 1$ est fausse mais la proposition $\forall y \in \mathbb{R},\ \ \exists x \in \mathbb{R},\ \ y = x + 1$ est vraie.

Définition 0.16 (Produit cartésien d'ensembles)
Soient A, B deux ensembles. On note $A \times B$ l'ensemble des couples de la forme (x, y) où $x \in A$ et $y \in B$.

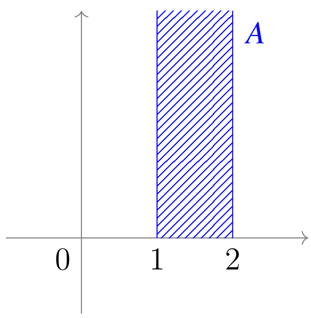
Plus généralement, soient $A_1, \dots, A_n$ des ensembles avec $n \in \mathbb{N}^*$. $A_1 \times \cdots \times A_n$ est l'ensemble des n-uplets de la forme $(x_1, \dots, x_n)$ où $x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n$.

Soient C un ensemble et $m \in \mathbb{N}^*$. On pose $C^m = \underbrace{C \times \cdots \times C}_{m \text{ facteurs}}$.

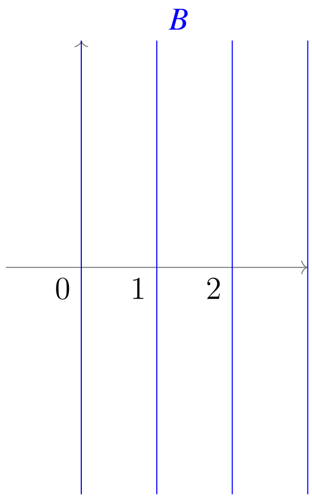
On s'autorise alors les identifications suivantes : $A \times B \times C = A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ et $(x, y, z) = (x, (y, z)) = ((x, y), z)$.

Exemple 0.17
Dessiner les ensembles $A = [1\ ;\ 2] \times \mathbb{R}_+$, $B = \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ et $C = ([0\ ;\ 1] \cup \{2\}) \times \mathbb{Z}$.

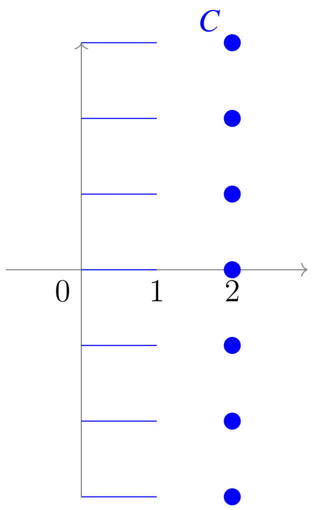
On a $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ (x, y) \in A \iff \begin{cases} x \in [1\ ;\ 2] \\ y \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$ donc :



De même, on a $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ (x, y) \in B \iff \begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$ donc :



Enfin, on a $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ (x, y) \in C \iff \begin{cases} x \in [0\ ;\ 1] \cup \{2\} \\ y \in \mathbb{Z} \end{cases}$ donc :



Remarque 0.18
Les notations « $\forall x, y \in \mathbb{R}$ » et « $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ » sont équivalentes.

En revanche, les produits cartésiens sont nécessaires pour le quantificateur $\exists!$. En effet, on a $\exists!\,(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ P(x, y) \implies \exists! x \in \mathbb{R},\ \ \exists! y \in \mathbb{R},\ \ P(x, y)$.

0.3 Raisonnements par analyse-synthèse

Ils sont utiles pour trouver toutes les solutions à un problème.

Exemple 0.19
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrons que f s'écrit de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Autrement dit, en notant E_0 l'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et E_1 l'ensemble des fonctions impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a $\exists!\,(g,h) \in E_0 \times E_1,\quad f = g + h$.

$\boxed{\text{analyse}}$

Soit $(g,h) \in E_0 \times E_1$ tel que $f = g + h$.

On a $\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(x) - h(x) \end{cases}$

Donc par somme et différence, $\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} f(x) + f(-x) = 2g(x) \\ f(x) - f(-x) = 2h(x) \end{cases}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} \\ h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \end{cases}$

$\boxed{\text{synthèse}}$

On définit les fonctions $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} \end{array}$ et $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \end{array}$.

On remarque $\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} g(-x) = \dfrac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \dfrac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x) \\ h(-x) = \dfrac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \dfrac{f(-x) - f(x)}{2} = -h(x) \end{cases}$

Donc g est paire et h est impaire.

Et $\forall x \in \mathbb{R},\ \ g(x) + h(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} + \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x)$.

$\boxed{\text{conclusion}}$

Le seul couple $(g,h) \in E_0 \times E_1$ est $\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} \end{array}, \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \end{array} \right)$.

0.4 Congruences

Définition 0.20
Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $T \in \mathbb{R}_+^*$.

On dit que x et y sont congrus modulo T si on a $\exists k \in \mathbb{Z},\ \ x = y + kT$.

On note alors $x \equiv y\ [T]$.

Remarque 0.21
Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ et $T \in \mathbb{R}_+^*$. On a

- $x \equiv y\ [T] \iff y \equiv x\ [T]$: symétrie
- $x \equiv x\ [T]$: réflexivité
- $\begin{cases} x \equiv y\ [T] \\ y \equiv z\ [T] \end{cases} \implies x \equiv z\ [T]$: transitivité

Chapitre 1

Inégalités, calculs

Sommaire

1.1 Inégalités dans $\mathbb{R}$

1.1.1 Parties de $\mathbb{R}$

Définition 1.1
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ et $m, M \in \mathbb{R}$.

On dit que M est un majorant de A et que M majore A si on a $\forall x \in A,\ \ x \leqslant M$.

On dit que m est un minorant de A et que m minore A si on a $\forall x \in A,\ \ m \leqslant x$.

On dit que la partie A est majorée si elle admet un majorant.

On dit que la partie A est minorée si elle admet un minorant.

On dit que la partie A est bornée si elle admet un majorant et un minorant.

Ainsi,

- A est majorée $\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \ \forall x \in A,\ \ x \leqslant \lambda$
- A est minorée $\iff \exists \mu \in \mathbb{R},\ \ \forall x \in A,\ \ \mu \leqslant x$
- A est bornée $\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \ \forall x \in A,\ \ \mu \leqslant x \leqslant \lambda \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+,\ \ \forall x \in A,\ \ |x| \leqslant x$

Exemple 1.2

- $[0 ; 1]$ est bornée (majorants possibles : 1, π, ... et minorants possibles : 0, -10, ...).
- $\mathbb{N}$ est minorée par 0 mais non-majorée et donc non-bornée.
- $\mathbb{Z}$ n'est ni majorée ni minorée et donc non-bornée.

Remarque 1.3
Il n'y a jamais unicité du majorant ou du minorant.

Définition 1.4
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in A$.

On dit que a est le plus grand élément de A (ou maximum de A) si on a $\forall b \in A,\ \ b \leqslant a$.

On dit que a est le plus petit élément de A (ou minimum de A) si on a $\forall b \in A,\ \ a \leqslant b$.

Proposition 1.5
S'il existe, le plus grand élément de A est unique et est noté $\max A$.

S'il existe, le plus petit élément de A est unique et est noté $\min A$.

Démonstration 1.6
Montrons l'unicité du plus grand élément de A.

Soient $a_1, a_2 \in A$ tels que $\forall b \in A,\ \begin{cases} b \leqslant a_1 \\ b \leqslant a_2 \end{cases}$

On a en particulier $\begin{cases} a_1 \leqslant a_2 \text{ avec } b = a_1 \\ a_2 \leqslant a_1 \text{ avec } b = a_2 \end{cases}$

Donc $a_1 = a_2$. Donc le plus grand élément est unique.

On montre de même l'unicité du plus petit élément. ■

Remarque 1.7 (Plus grand élément $\implies$ majorant)
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$.

x est le plus grand élément de A ssi $\begin{cases} x \in A \\ x \text{ majore } A \end{cases}$

En particulier, pour que A admette un plus grand élément, il faut que A soit majorée.

Exemple 1.8

- $[0\ ;\ 1]$ admet 1 comme plus grand élément et 0 comme plus petit élément.
- $\mathbb{R}_+$ admet 0 comme plus petit élément mais n'admet pas de plus grand élément (car $\mathbb{R}_+$ n'est pas majorée).
- $[0\ ;\ 1[$ admet 0 comme plus petit élément et est majorée (par 1) mais n'admet pas de plus grand élément.
  En effet, par l'absurde :
  Soit $a \in [0\ ;\ 1[$. Supposons que a est le plus grand élément de $[0\ ;\ 1[$.
  Comme $a \in [0\ ;\ 1[$, on a $0 \leqslant a < 1$.
  Posons $b = \dfrac{a+1}{2}$.
  On a d'une part $0 \leqslant a+1 < 2$ donc $0 \leqslant \dfrac{a+1}{2} < 1$ donc $0 \leqslant b < 1$ donc $b \in [0\ ;\ 1[$.
  D'autre part, $a + a < a + 1$ donc $\dfrac{a+a}{2} < \dfrac{a+1}{2}$ donc $a < b$.
  Donc a ne majore pas $[0\ ;\ 1[$: contradiction.

Remarque 1.9
Toute partie finie admet un plus grand élément.

Théorème 1.10
Toute partie non-vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Démonstration 1.11
⋆⋆ **ADMIS** ⋆⋆ (fait partie de la définition de $\mathbb{N}$, hors programme). ∎

Corollaire 1.12
Toute partie non-vide de $\mathbb{Z}$ minorée admet un plus petit élément.

Toute partie non-vide de $\mathbb{Z}$ majorée admet un plus grand élément.

Démonstration 1.13
Soit $A \subseteq \mathbb{Z}$ non-vide et minorée.

Soit $m \in \mathbb{R}$ un minorant de A.

Soit $m' \in \mathbb{Z}$ tel que $m' \leqslant m$.

On a $\forall x \in A,\ \ m' \leqslant m \leqslant x$.

Donc m' minore A.

Posons $B = \{x - m'\}_{x \in A}$.

On remarque $B \neq \varnothing$ car $A \neq \varnothing$ et $B \subseteq \mathbb{N}$ car $\forall x \in A,\ \begin{cases} x - m' \in \mathbb{Z} \text{ car } x, m' \in \mathbb{Z} \\ x - m' \geqslant 0 \text{ car } m' \leqslant x \end{cases}$

Ainsi, B est une partie non-vide de $\mathbb{N}$.

Donc B admet un plus petit élément $b_0 \in B$: $\forall b \in B,\ \ b_0 \leqslant b$.

Cet élément b_0 s'écrit $b_0 = a_0 - m'$ par définition de B.

On a $\forall x \in A,\ \ a_0 - m' \leqslant x - m'$ donc $\forall x \in A,\ \ a_0 \leqslant x$.

Donc $a_0 = \min A$.

On montre de même que toute partie C majorée non-vide de $\mathbb{Z}$ admet un maximum, en considérant un majorant $M \in \mathbb{Z}$ de C puis l'ensemble $D = \{M - x\}_{x \in C}$. ■

Définition 1.14 (Intervalle)
Soit $I \subseteq \mathbb{R}$.

On dit que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si on a $\forall x, y \in I,\ \ \forall z \in \mathbb{R},\ \ x \leqslant z \leqslant y \implies z \in I$.

Ie : $\forall x, y \in I,\ \ [x\ ;\ y] \subseteq I$, en notant $[x\ ;\ y] = \{z \in \mathbb{R} \mid x \leqslant z \leqslant y\}$ avec donc $[x\ ;\ y] = \varnothing$ si $x > y$.

Exemple 1.15

- $\varnothing$ et $\mathbb{R}$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$.
- $[a\ ;\ b]$, $[a\ ;\ b[$, $]a\ ;\ +\infty[$, ... sont des intervalles de $\mathbb{R}$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.
- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, ... ne sont pas des intervalles de $\mathbb{R}$. Par exemple, on a $0 \leqslant \dfrac{1}{2} \leqslant 1$ mais $\dfrac{1}{2} \notin \mathbb{N}$.

1.1.2 Manipulation d'inégalités, fonctions

Proposition 1.16
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

- *f est constante* $\iff \forall x \in I,\ \ f'(x) = 0$
- *f est croissante* $\iff \forall x \in I,\ \ f'(x) \geqslant 0$
- *f est strictement croissante* $\impliedby \forall x \in I,\ \ f'(x) > 0$

  f est strictement croissante $\iff \begin{cases} \forall x \in I,\ \ f'(x) \geqslant 0 \\ \forall x, y \in I,\ \ x < y \implies \exists z \in [x\ ;\ y],\ \ f'(z) > 0 \end{cases}$

Démonstration 1.17
⋆⋆ **ADMIS** ⋆⋆ temporairement. ■

Remarque 1.18
Il ne faut pas oublier l'hypothèse selon laquelle I est un intervalle.

Par exemple, si $I = \mathbb{R}^*$ alors I n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$ (on a par exemple $-1 \leqslant 0 \leqslant 1$ mais $0 \notin \mathbb{R}^*$) et les fonctions $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$ vérifient :

- $f' = 0$ mais f non-constante
- $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g'(x) = \dfrac{-1}{x^2} < 0$ mais g n'est pas strictement décroissante.

Remarque 1.19
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. On considère les propositions suivantes :

(1) f croissante

(2) f strictement croissante

(3) $\forall x, y \in A, \quad x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y)$

(4) $\forall x, y \in A, \quad x < y \implies f(x) < f(y)$

(5) $\forall x, y \in A, \quad x \leqslant y \iff f(x) \leqslant f(y)$

(6) $\forall x, y \in A, \quad x < y \iff f(x) < f(y)$

Les propositions (1) et (3) sont équivalentes.

Les propositions (2), (4), (5) et (6) sont équivalentes.

Remarque 1.20
Quand on rédige un raisonnement par équivalences, la façon correcte d'écrire est la suivante : « $x \leqslant y \iff f(x) \leqslant f(y)$ car f est strictement croissante ».

Démonstration 1.21
- (1) $\iff$ (3) : par définition
- (2) $\iff$ (4) : par définition
- (6) $\iff$ (5) : par contraposition
- (6) $\implies$ (4) : clair
- Il ne reste plus qu'à montrer que (4) $\implies$ (6).
  Supposons (4), montrons (6).
  Soient $x, y \in A$. Montrons que $x < y \iff f(x) < f(y)$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Ok selon (4)

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $f(x) < f(y)$. Montrons que $x < y$.
Si $x = y$ alors $f(x) = f(y)$: impossible.
Si $x > y$ alors $f(x) > f(y)$ selon (4) : impossible.
Donc $x < y$, d'où (6). ■

Proposition 1.22
Soient $a, b, c, d, \lambda \in \mathbb{R}$.

On a

(1) $\begin{cases} a \leqslant b \\ c \leqslant d \end{cases} \Longrightarrow a + c \leqslant b + d$

(2) $\begin{cases} a \leqslant b \\ \lambda \geqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow \lambda a \leqslant \lambda b$

(3) $\begin{cases} a \leqslant b \\ \lambda \leqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow \lambda a \geqslant \lambda b$

(4) $\begin{cases} 0 \leqslant a \leqslant b \\ 0 \leqslant c \leqslant d \end{cases} \Longrightarrow ac \leqslant bd$

(5) $\begin{cases} a \leqslant b \\ ab > 0 \end{cases} \Longrightarrow \dfrac{1}{a} \geqslant \dfrac{1}{b}$

Démonstration 1.23

(1) Supposons $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$.
On a $a + c \leqslant b + c$ car $x \longmapsto x + c$ croissante.
Donc $a + c \leqslant b + d$ car $c \leqslant d$.

(2) Supposons $\lambda \geqslant 0$.
La fonction $x \longmapsto \lambda x$ est de dérivée positive sur l'intervalle $\mathbb{R}$ donc elle est croissante.

(3) Idem.

(4) Idem.

(5) C'est la décroissance de la fonction inverse sur les intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ (en effet, $ab > 0 \Longleftrightarrow \big(a, b \in \mathbb{R}_+^* \text{ ou } a, b \in \mathbb{R}_-^*\big)$). ■

1.1.3 Valeur absolue

Notation 1.24
On pose $\forall x \in \mathbb{R},\ \ |x| = \max\{x\ ;\ -x\} = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Remarque 1.25
On a $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt{x}^2 = x$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{x^2} = |x|$.

Ainsi, on a $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x^2 = y^2 \iff |x| = |y| \\ x^2 \leqslant y^2 \iff |x| \leqslant |y| \text{ car } x \longmapsto \sqrt{x} \text{ strictement croissante} \end{cases}$

Proposition 1.26 (Inégalité triangulaire)
Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

On a $||x| - |y|| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|$.

Et donc $||x| - |y|| \leqslant |x - y| \leqslant |x| + |y|$ *en remplaçant y par $-y$.*

Démonstration 1.27

(1) Montrons que $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.
Si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ alors $x + y \geqslant 0$ donc $|x + y| = x + y = |x| + |y|$.
Si $x < 0$ et $y < 0$ alors $x + y < 0$ donc $|x + y| = -x - y = |x| + |y|$.
Si $x \geqslant 0$ et $y < 0$ alors $\begin{cases} x + y \leqslant x - y = |x| + |y| \text{ car } y < 0 \\ -x - y \leqslant x - y = |x| + |y| \text{ car } x \geqslant 0 \end{cases}$ donc $|x + y| = \max\{x + y \,;\, -x - y\} \leqslant |x| + |y|$.
Si $x < 0$ et $y \geqslant 0$: idem en échangeant x et y.

(2) On remarque $|x| = |x + y - y|$

$$\leqslant |x + y| + |-y| \text{ selon (1)}$$

$$= |x + y| + |y|$$

Donc $|x| - |y| \leqslant |x + y|$.
De même, $|y| = |y + x - x| \leqslant |y + x| + |x|$.
Donc $|y| - |x| \leqslant |y + x|$.
Finalement, $||x| - |y|| = \max\{|x| - |y| \,;\, |y| - |x|\} \leqslant |x + y|$. ■

Proposition 1.28
Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

On a $|xy| \leqslant \dfrac{x^2 + y^2}{2}$.

Démonstration 1.29
On a $(x - y)^2 \geqslant 0$ et $(x + y)^2 \geqslant 0$.

Donc $\begin{cases} xy \leqslant \dfrac{x^2 + y^2}{2} \\ -xy \leqslant \dfrac{x^2 + y^2}{2} \end{cases}$

D'où $|xy| = \max\{xy \,;\, -xy\} \leqslant \dfrac{x^2 + y^2}{2}$. ■

1.1.4 Partie entière d'un réel

Définition 1.30
Soit $x \in \mathbb{R}$.

On appelle partie entière de x et on note $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x$.

Un tel entier existe car $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant x\}$ est une partie non-vide et majorée de $\mathbb{Z}$.

Exemple 1.31
$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \lfloor n \rfloor = n$; $\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 1$; $\left\lfloor -\frac{1}{2} \right\rfloor = -2$.

Proposition 1.32
Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a

(1) $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$

(2) $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad n \leqslant x \iff n \leqslant \lfloor x \rfloor$

Démonstration 1.33

(1) On a $\lfloor x \rfloor \leqslant x$ par définition.
De plus, $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur à x donc $\lfloor x \rfloor + 1$ n'est pas un entier inférieur à x.

(2) Soit $n \in \mathbb{Z}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Claire car $\lfloor x \rfloor \leqslant x$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Si $n \leqslant x$ alors n est plus petit que le plus grand entier inférieur à x.
Donc $n \leqslant \lfloor x \rfloor$. ∎

1.2 Sommes et produits

Notation 1.34
On pose $\forall a, b \in \mathbb{Z}, \quad [\![a \,;\, b]\!] = \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leqslant n \leqslant b\}$.

Notation 1.35
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$.

- On pose $\displaystyle\sum_{k=a}^{b} f(k) = \begin{cases} f(a) + f(a+1) + \cdots + f(b) & \text{si } a \leqslant b \\ 0 & \text{si } a > b \end{cases}$
- On pose $\displaystyle\prod_{k=a}^{b} f(k) = \begin{cases} f(a) \times f(a+1) \times \cdots \times f(b) & \text{si } a \leqslant b \\ 1 & \text{si } a > b \end{cases}$
- Soit E un ensemble fini et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$.
  On note $\displaystyle\sum_{x \in E} f(x)$ la somme des $f(x)$ pour $x \in E$ (0 si $E = \varnothing$).
  Et $\displaystyle\prod_{x \in E} f(x)$ le produit des $f(x)$ pour $x \in E$ (1 si $E = \varnothing$).

Remarque 1.36
Les indices k et x sont des « variables locales », non définies en dehors des $\sum$ et $\prod$.

Ce sont aussi des « variables muettes », la somme ou le produit ne dépend pas du nom de la variable : $\displaystyle\sum_{k=a}^{b} f(k) = \sum_{\ell=a}^{b} f(\ell)$.

Remarque 1.37 (Changements d'indice)

- Soit $n \in [\![2\ ;+\infty[\![$.
  On a $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} 2^{k-2} \ln(k+1) = \sum_{k=0}^{n-2} 2^{k} \ln(k+3)$.
- Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de réels.
  On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

Proposition 1.38
Soient E et F deux ensembles finis. On suppose que E et F sont disjoints (ie $E \cap F = \varnothing$).

Soit $f : E \cup F \longrightarrow \mathbb{R}$.

Alors $\displaystyle\sum_{x \in E \cup F} f(x) = \sum_{x \in E} f(x) + \sum_{x \in F} f(x)$.

Et $\displaystyle\prod_{x \in E \cup F} f(x) = \prod_{x \in E} f(x) \times \prod_{x \in F} f(x)$.

Proposition 1.39 (Sommes télescopiques)
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a \leqslant b$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.

On a $\displaystyle\sum_{k=a}^{b} (u_{k+1} - u_k) = u_{b+1} - u_a.$

Démonstration 1.40

On a $\displaystyle\sum_{k=a}^{b} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=a}^{b} u_{k+1} - \sum_{k=a}^{b} u_k = \sum_{k=a+1}^{b+1} u_k - \sum_{k=a}^{b} u_k = u_{b+1} - u_a.$ ■

Exemple 1.41
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)}$.

- On a
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{k+1}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\ln\,(k+1) - \ln k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln\,(k+1) - \sum_{k=1}^{n} \ln k \\
&= \sum_{k=2}^{n+1} \ln k - \sum_{k=1}^{n} \ln k \\
&= \ln\,(n+1) - \ln 1 \\
&= \ln\,(n+1)
\end{aligned}$$

- On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1+k-k}{k(k+1)}$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1+k}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{n}{n+1}$$

Proposition 1.42 (Produits télescopiques)
Soient $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $a \leqslant b$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels non-nuls.

Alors, $\displaystyle\prod_{k=a}^{b} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{b+1}}{u_a}$.

Proposition 1.43 (Doubles sommes)
Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ et $f : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Alors, $\displaystyle\sum_{i=a}^{b} \sum_{j=c}^{d} f(i,j) = \sum_{(i,j)\in[\![a;b]\!]\times[\![c;d]\!]} f(i,j) = \sum_{j=c}^{d} \sum_{i=a}^{b} f(i,j)$.

On appelle interversion le passage du membre de gauche au membre de droite.

Proposition 1.44 (Produits doubles)
Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ et $f : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Alors, $\displaystyle\prod_{i=a}^{b} \prod_{j=c}^{d} f(i,j) = \prod_{j=c}^{d} \prod_{i=a}^{b} f(i,j)$ *(interversion).*

Exemple 1.45

On a $\displaystyle\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{2} j^i = (1+1+1)+(0+1+2)=6$ et $\displaystyle\sum_{j=0}^{2}\sum_{i=0}^{1} j^i = (1+0)+(1+1)+(1+2)=6.$

Proposition 1.46
Soient E et F deux ensembles finis et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : F \longrightarrow \mathbb{R}$.

On a $\displaystyle\sum_{x\in E} f(x) \times \sum_{y\in F} g(y) = \sum_{x\in E}\sum_{y\in F} f(x)\, g(y).$

Exemple 1.47
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

On a $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2\sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant n} x_k x_\ell.$

Remarque 1.48
La dernière somme pourrait s'écrire $\displaystyle\sum_{(k,\ell)\in E} \ldots$ où $E = \left\{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2 \;\middle|\; 1\leqslant k<\ell\leqslant n\right\}$ ou encore $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=k+1}^{n} \ldots$.

Démonstration 1.49

$$\begin{aligned}
\text{On a } \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 &= \sum_{k=1}^{n} x_k \times \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} x_k x_\ell \\
&= \sum_{1\leqslant k=\ell\leqslant n} x_k x_\ell + \sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant n} x_k x_\ell + \sum_{1\leqslant \ell<k\leqslant n} x_k x_\ell \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2\sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant n} x_k x_\ell
\end{aligned}$$

■

1.3 Factorielle, coefficients binomiaux

Définition 1.50 (Factorielle)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

On pose $n! = \prod_{k=1}^{n} k$.

Définition 1.51 (Coefficient binomial)
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$.

On pose $\binom{n}{p} = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!} & \text{si } 0 \leqslant p \leqslant n \\ 0 & \text{si } 0 > p \text{ ou } p > n \end{cases}$

$\binom{n}{p}$ est le nombre de parties de cardinal p contenues dans un ensemble de cardinal n.

Supposons $0 \leqslant p \leqslant n$. On a $\dfrac{n!}{(n-p)!} = n\,(n-1)\dots(n-p+1)$.

Donc $\binom{n}{p} = \dfrac{n\,(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}$.

On a $\binom{n}{0} = \dfrac{1}{1} = 1\,;\ \binom{n}{1} = \dfrac{n}{1} = n\,;\ \binom{n}{2} = \dfrac{n\,(n-1)}{1 \times 2} = \dfrac{n\,(n-1)}{2}$.

Proposition 1.52
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$.

On a
(1) $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
(2) $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$
(3) *Si $p \neq 0$ alors* $\binom{n}{p} = \dfrac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$

Démonstration 1.53
(1) On a $0 \leqslant p \leqslant n \iff 0 \leqslant n-p \leqslant n$.
Si $p < 0$ ou $n < p$, les deux coefficients binomiaux sont nuls.
Sinon, $\binom{n}{n-p} = \dfrac{n!}{(n-p)!\,(n-(n-p))!} = \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!} = \binom{n}{p}$.

(2) Si $p < -1$, les trois coefficients binomiaux sont nuls.
Si $p = -1$, on a bien $0 + 1 = 1$.
Si $p > n$, les trois coefficients binomiaux sont nuls.
Si $p = n$, on a bien $1 + 0 = 1$.
Supposons désormais $0 \leqslant p \leqslant n - 1$.
Les trois coefficients binomiaux sont non-nuls et on a :

$$\begin{aligned}\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{p!\ (n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!\ (n-p+1)!} \\ &= \frac{(p+1)\, n! + (n-p)\, n!}{(n-p)!\ (p+1)!} \\ &= \frac{(n+1)\, n!}{(n-p)!\ (p+1)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{((n+1)-(p+1))!\ (p+1)!} \\ &= \binom{n+1}{p+1}\end{aligned}$$

(3) Si $p < 0$, on a bien $0 = 0$.
Si $p > n$, idem.
Supposons $1 \leqslant p \leqslant n$.
On a $\binom{n}{p} = \dfrac{n\,(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \dfrac{n}{p} \times \dfrac{(n-1)\dots(n-p+1)}{(p-1)!} = \dfrac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$. ■

Remarque 1.54
Le triangle de Pascal est complété à l'aide de (2) :

$$\begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & \binom{0}{0} & & & & \\ 1 & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & \\ 2 & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \\ 3 & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \end{array} \quad \text{donnant} \quad \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \end{array}$$

Proposition 1.55 (Formule du binôme de Newton)
Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

On a $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^k x^{n-k}$

Démonstration 1.56
Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ la proposition « $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ ».

Initialisation :

On a bien $(x+y)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^k y^{0-k} = \binom{0}{0} x^0 y^0 = 1$.

D'où $P(0)$.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$. Montrons $P(n+1)$. On a :

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \\
&= (x+y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \text{ selon } P(n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \text{ car } \binom{n}{-1} = \binom{n}{n+1} = 0 \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) x^k y^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n-k+1}
\end{aligned}
$$

D'où $P(n+1)$.

Conclusion :

On a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(n)$. ■

Chapitre 2

Révisions de trigonométrie

Sommaire

2.1 Formules

2.1.1 Propriétés fondamentales

Les fonctions cos et sin sont définies sur $\mathbb{R}$ et vérifient $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

La fonctions tan est définie en tout réel x tel que $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Ces trois fonctions sont dérivables et on a : $\cos' = -\sin$; $\sin' = \cos$; $\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$.

$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \ \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

2.1.2 Conséquences

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \begin{cases} a \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \\ b \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \\ a + b \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \end{cases} \implies \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$\forall a \in \mathbb{R},\ \ \cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$ et $\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos(2a)}{2}$ et $\sin^2 a = \dfrac{1 - \cos(2a)}{2}$

$\forall a \in \mathbb{R},\ \ \sin(2a) = 2\sin a \cos a$

$\forall a \in \mathbb{R},\ \ \begin{cases} a \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \\ a \not\equiv \dfrac{\pi}{4}\ \left[\dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases} \implies \tan(2a) = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \ \cos a \cos b = \dfrac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$

$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \ \sin a \sin b = \dfrac{-\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$

$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \ \sin a \cos b = \dfrac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$

$\forall p, q \in \mathbb{R},\ \ \cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$

$\forall p, q \in \mathbb{R},\ \ \sin p + \sin q = 2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$

$\forall p, q \in \mathbb{R},\ \ \cos p - \cos q = -2\sin\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv \pi\ [2\pi]$. On pose $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$. On a $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin\theta = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}$

2.1.3 Lien avec les nombres complexes

$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \ \mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \ \cos\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2}$ (formules d'Euler)

2.2 Démonstrations et compléments

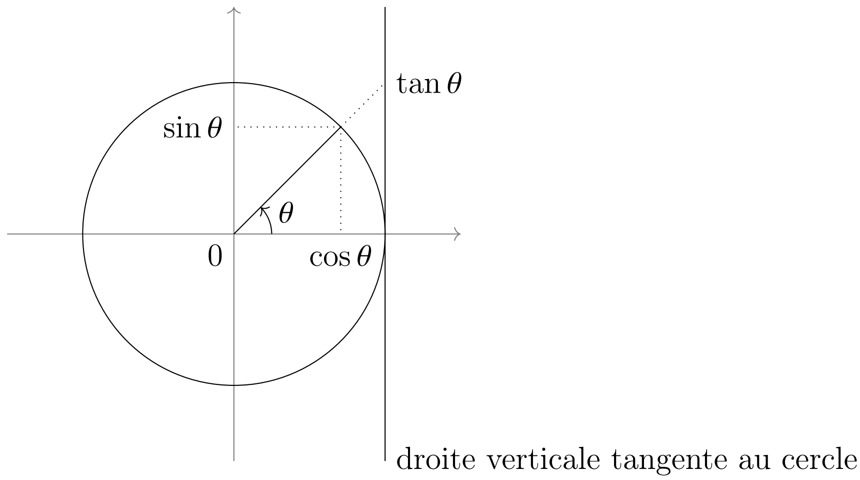
Cercle trigonométrique : $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1\right\} = \{(\cos\theta, \sin\theta)\}_{\theta\in\mathbb{R}}$.

Remarque 2.1
L'égalité des ensembles signifie :

$\boxed{\supseteq}$ $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \ \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\boxed{\subseteq}$ $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ x^2 + y^2 = 1 \implies \exists \theta \in \mathbb{R},\ \ (x, y) = (\cos\theta, \sin\theta)$

On a le cercle trigonométrique suivant :



On a $\dfrac{\tan\theta}{1} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ par le théorème de Thalès.

Valeurs remarquables :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	indéfini

On a $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\begin{cases} \cos(\theta + k\pi) = (-1)^k \cos\theta \\ \sin(\theta + k\pi) = (-1)^k \sin\theta \end{cases}$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

- On a $\tan(a+b)$ bien défini ssi $a + b \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$
  $\tan a$ bien défini ssi $a \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$
  $\tan b$ bien défini ssi $b \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$

  On a alors $\tan(a+b) = \dfrac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \dfrac{\sin a\cos b + \sin b\cos a}{\cos a\cos b - \sin a\sin b} = \dfrac{\dfrac{\sin a}{\cos a} + \dfrac{\sin b}{\cos b}}{1 - \dfrac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}} = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}$.

- On a $\tan a$ bien défini ssi $a \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$
  $\tan 2a$ bien défini ssi $2a \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ ssi $a \not\equiv \dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$

  On a alors $\tan 2a = \dfrac{\tan a + \tan a}{1 - \tan a\tan a} = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$.

- $\cos 2a = \cos a \cos a - \sin a \sin a = \cos^2 a - \left(1 - \cos^2 a\right) = 2\cos^2 a - 1$

  Donc $\cos^2 a = \dfrac{\cos 2a + 1}{2}$.

  D'où $\sin^2 a = 1 - \dfrac{\cos 2a + 1}{2} = \dfrac{1 - \cos 2a}{2}$.
- $\sin 2a = \sin a \cos a + \sin a \cos a = 2 \sin a \cos a$
- On a
  (1) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
  (2) $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
  (3) $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
  (4) $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

  D'où
  - $\cos a \cos b = \dfrac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$ selon $\dfrac{(1)+(2)}{2}$.
  - $\sin a \sin b = \dfrac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$ selon $\dfrac{(2)-(1)}{2}$.
  - $\sin a \cos b = \dfrac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$ selon $\dfrac{(3)+(4)}{2}$.
- Soient $p, q \in \mathbb{R}$.

  On remarque $\begin{cases} p = \dfrac{p+q}{2} + \dfrac{p-q}{2} \\ q = \dfrac{p+q}{2} - \dfrac{p-q}{2} \end{cases}$

  D'où
$$\begin{aligned}\cos p + \cos q &= \cos\left(\frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2}\right) + \cos\left(\frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2}\right) \\ &= \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) - \sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) + \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ &\quad + \sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\end{aligned}$$

  De même, $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$

  Et
$$\begin{aligned}\sin p + \sin q &= \sin\left(\frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2}\right) + \sin\left(\frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2}\right) \\ &= \sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) + \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) + \sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ &\quad - \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \\ &= 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\end{aligned}$$
- On a $\theta \not\equiv \pi\ [2\pi]$ donc $\dfrac{\theta}{2} \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ donc $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$ est bien défini.

$$\begin{aligned}
\text{On a } \cos\theta &= \cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right)\\
&= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\\
&= \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\\
&= \cos^2\frac{\theta}{2}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\right)\\
&= \cos^2\frac{\theta}{2}\left(1-\tan^2\frac{\theta}{2}\right)
\end{aligned}$$

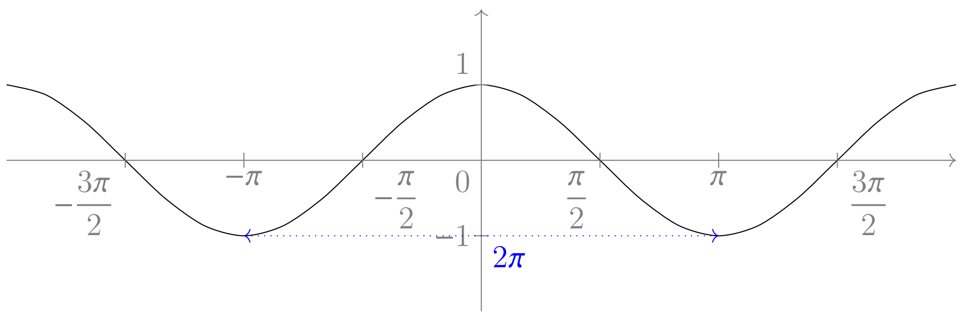
Or $1+\tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$ donc $\cos^2 = \dfrac{1}{1+\tan^2}$.

Donc $\cos\theta = \dfrac{1}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\left(1-\tan^2\frac{\theta}{2}\right) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

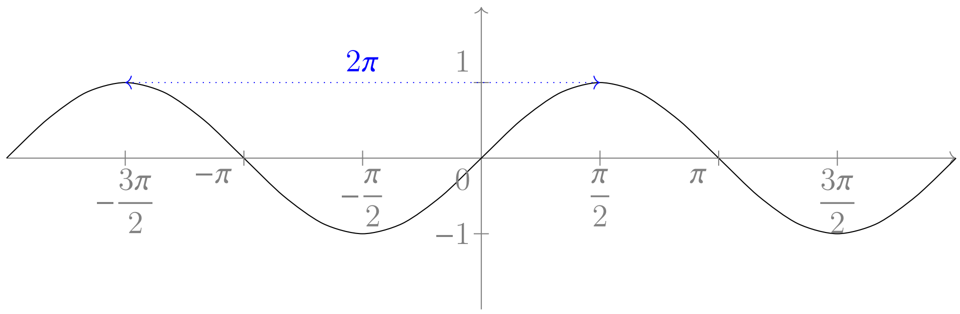
$$\begin{aligned}
\text{De même, } \sin\theta &= \sin\left(\frac{2\theta}{2}\right)\\
&= 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\\
&= 2\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\cos^2\frac{\theta}{2}\\
&= 2\tan\frac{\theta}{2}\times\frac{1}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\\
&= \frac{2t}{1+t^2}
\end{aligned}$$

Rappel 2.2
On a les courbes suivantes :

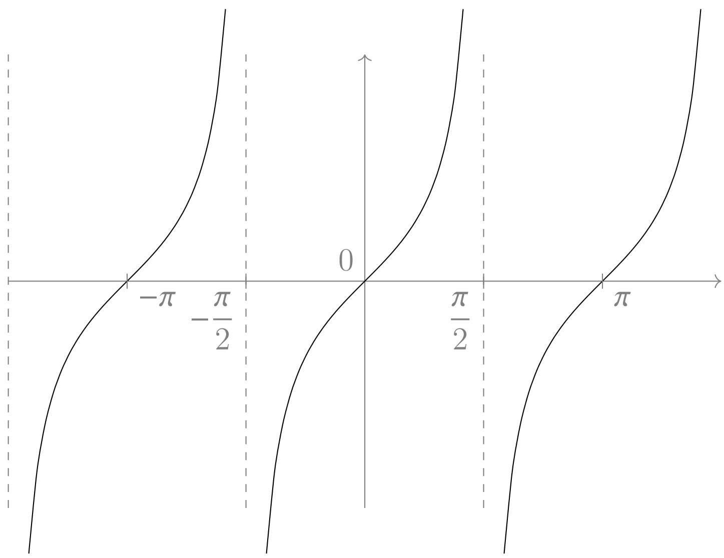
cos (2π-périodique)



sin (2π-périodique) :



tan (π-périodique) :



Proposition 2.3

On a $\forall x \in \mathbb{R}, \ \ |\sin x| \leqslant |x|$.

Démonstration 2.4

Comme les fonctions $x \longmapsto |\sin x|$ et $x \longmapsto |x|$ sont paires, il suffit de montrer l'inégalité sur $\mathbb{R}_+$.

C'est à dire $\forall x \in \mathbb{R}_+, \ \ \begin{cases} \sin x \leqslant x \\ -\sin x \leqslant x \end{cases}$

Posons $f : x \longmapsto x - \sin x$ et $g : x \longmapsto x + \sin x$.

On a $\forall x \in \mathbb{R}_+, \ \ \begin{cases} f'(x) = 1 - \cos x \geqslant 0 \\ g'(x) = 1 + \cos x \geqslant 0 \end{cases}$ car $\forall x \in \mathbb{R}_+, \ \ -1 \leqslant \cos x \leqslant 1$.

Donc f et g sont croissantes sur $\mathbb{R}_+$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+, \ \ f(x) \geqslant f(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+, \ \ g(x) \geqslant g(0) = 0$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+, \ \ \begin{cases} x - \sin x \geqslant 0 \\ x + \sin x \geqslant 0 \end{cases}$

D'où le résultat. ∎

Remarque 2.5
Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f : \theta \longmapsto a\cos\theta + b\sin\theta$.

Supposons $(a, b) \neq (0, 0)$.

On a $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \ f(\theta) = \sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta + \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta\right)$.

On remarque $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$.

Donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha \\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha \end{cases}$

On a alors $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \ f(\theta) = \sqrt{a^2+b^2}\,(\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta)$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

Chapitre 3

Nombres complexes

Sommaire

3.1 Rappels

3.1.1 Point de vue algébrique

Rappel 3.1

- On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes et $i \in \mathbb{C}$ le nombre complexe particulier vérifiant $i^2 = -1$.
- Tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de façon unique sous la forme $z = a + ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$ sont appelés respectivement partie réelle et partie imaginaire de z et notés $a = \operatorname{Re} z$ et $b = \operatorname{Im} z$. On dit que $z = a + ib$ est l'écriture algébrique de z.
- Enfin, on dit que z est un imaginaire pur si $\operatorname{Re} z = 0$.

- Opérations sur les nombres complexes :

  Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Soient $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\begin{cases} z_1 = a_1 + ib_1 \\ z_2 = a_2 + ib_2 \end{cases}$

  On pose $\begin{cases} z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + i\,(b_1 + b_2) \\ z_1 z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i\,(a_1 b_2 + a_2 b_1) \\ \overline{z_1} = a_1 - ib_1 \\ |z_1| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \end{cases}$

  On a alors $\begin{cases} \operatorname{Re} z_1 = \dfrac{z_1 + \overline{z_1}}{2} \text{ et } \operatorname{Im} z_1 = \dfrac{z_1 - \overline{z_1}}{2} \\ z_1 + \overline{z_1} = 2 \operatorname{Re} z_1 \text{ et } z_1 \overline{z_1} = |z_1|^2 \end{cases}$

  Si $z_1 \neq 0$ alors l'inverse de z_1 est l'unique nombre complexe noté z_1^{-1} vérifiant $z_1 z_1^{-1} = 1$.

  On remarque $z_1^{-1} = \dfrac{\overline{z_1}}{|z_1|^2}$ car $z_1 \dfrac{\overline{z_1}}{|z_1|^2} = 1$. Donc $z_1^{-1} = \dfrac{a_1 - ib_1}{a_1^2 + b_1^2}$.

  On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ \ z_1^n = \underbrace{z_1 \times z_1 \times \cdots \times z_1}_{n \text{ facteurs}} = \prod_{k=1}^{n} z_1$.

  Si $z_1 \neq 0$ on pose aussi $\forall n \in \mathbb{N},\ \ z_1^{-n} = \dfrac{1}{z_1^n}$.

- Propriétés :

  Soient $n \in \mathbb{N}$ et $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$.

  On a

  — $\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} z_k$

  — $\operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Im} z_k$

  — $\left|\prod_{k=1}^{n} z_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |z_k|$

  — $\overline{\sum_{k=1}^{n} z_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}$ et $\overline{\prod_{k=1}^{n} z_k} = \prod_{k=1}^{n} \overline{z_k}$

  — $\forall N \in \mathbb{N},\ \left(\prod_{k=1}^{n} z_k\right)^N = \prod_{k=1}^{n} z_k^N$

  — $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}^* \implies \forall n \in \mathbb{Z},\ \left(\prod_{k=1}^{n} z_k\right)^N = \prod_{k=1}^{n} z_k^N$

- Nombres complexes de module 1 :

  On pose $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

  Soit $z \in \mathbb{C}$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + ib$.

$$\begin{aligned}\text{On a } z \in \mathbb{U} &\iff |z| = 1\\ &\iff \sqrt{a^2+b^2} = 1\\ &\iff a^2+b^2 = 1\\ &\iff \exists \theta \in \mathbb{R}, \begin{cases} a = \cos\theta \\ b = \sin\theta \end{cases}\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{U} = \{\cos\theta + i\sin\theta\}_{\theta\in\mathbb{R}}$.
On pose $\forall\theta \in \mathbb{R},\ \ \mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
Ainsi, $\mathbb{U} = \left\{\mathrm{e}^{i\theta}\right\}_{\theta\in\mathbb{R}}$.

Remarque 3.2
On a $\operatorname{Im} z = 0 \iff z \in \mathbb{R}$.

Définition/Proposition 3.3
Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = \lambda\mathrm{e}^{i\theta}$ (écriture trigonométrique).

On a $\lambda = |z|$.

On dit que θ est un argument de z.

Si de plus on a $\theta \in \,]-\pi\,;\pi]$, on dit que θ est l'argument (principal) de z et on note $\theta = \arg z$.

Démonstration 3.4
Montrons que λ et θ existent.

On a $z \neq 0$.

Donc $\dfrac{z}{|z|}$ est bien défini et on a $\left|\dfrac{z}{|z|}\right| = 1$.

Donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{z}{|z|} = \mathrm{e}^{i\theta}$ car $z \in \mathbb{U}$.

On a bien $z = \lambda\mathrm{e}^{i\theta}$ en posant $\lambda = |z|$. ∎

Remarque 3.5
Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$.

$$\text{On a } \lambda_1\mathrm{e}^{i\theta_1} = \lambda_2\mathrm{e}^{i\theta_2} \iff \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 \\ \theta_1 \equiv \theta_2\ [2\pi] \end{cases}$$

Démonstration 3.6

$\boxed{\Longleftarrow}$ Claire.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $\lambda_1 e^{i\theta_1} = \lambda_2 e^{i\theta_2}$.

Donc $\left|\lambda_1 e^{i\theta_1}\right| = \left|\lambda_2 e^{i\theta_2}\right|$.

Donc $\lambda_1 = \lambda_2$.

Donc $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$ car $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$.

Donc $\cos\theta_1 + i\sin\theta_1 = \cos\theta_2 + i\sin\theta_2$.

Donc $\begin{cases} \cos\theta_1 = \cos\theta_2 \\ \sin\theta_1 = \sin\theta_2 \end{cases}$

Donc $\theta_1 \equiv \theta_2\ [2\pi]$. ■

Proposition 3.7
Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$.

On a

- $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg z_1 + \arg z_2\ [2\pi]$
- $\arg \dfrac{1}{z_1} \equiv -\arg z_1\ [2\pi]$
- $\arg \overline{z_1} \equiv -\arg z_1\ [2\pi]$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \quad \arg(\lambda z_1) = \lambda \arg z_1$

3.1.2 Point de vue géométrique

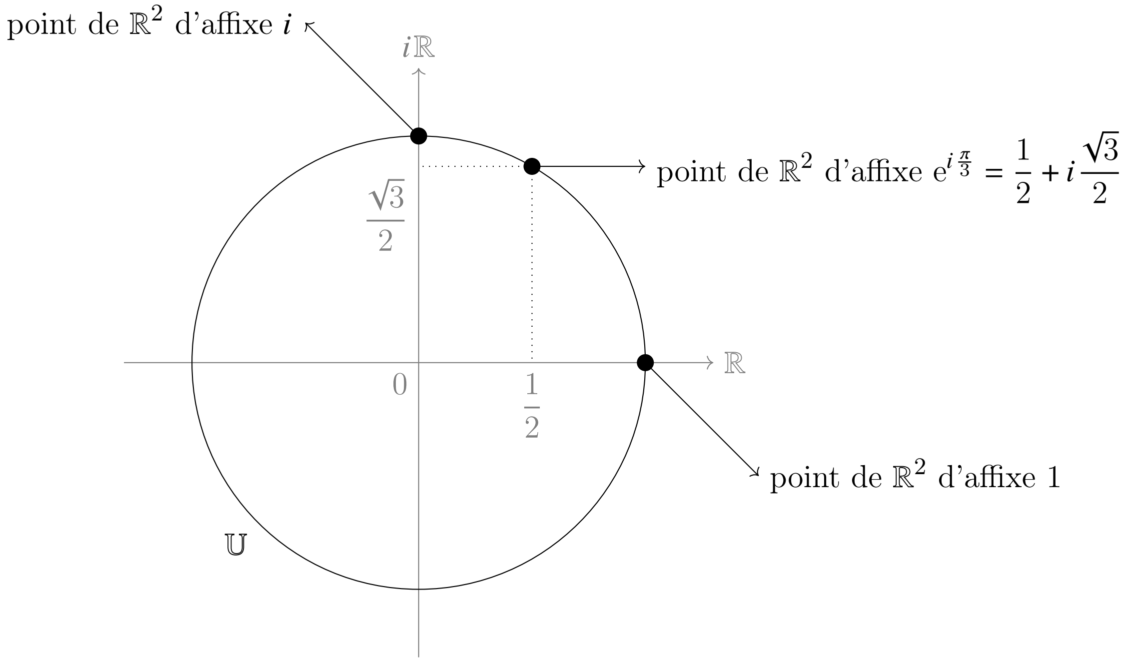
Définition 3.8 (Affixe)
Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

On a $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

On associe à ce point le nombre complexe $z = a + ib$.

Ce nombre complexe est appelé l'affixe du point.

Exemple 3.9



Proposition 3.10
Soit $M \in \mathbb{R}^2$.

On note z l'affixe de M.

Alors

- *$|z|$ est la distance de M à l'origine ;*
- *$\overline{z}$ est l'affixe du symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.*

Proposition 3.11
Soient $z, z_1 \in \mathbb{C}^*$.

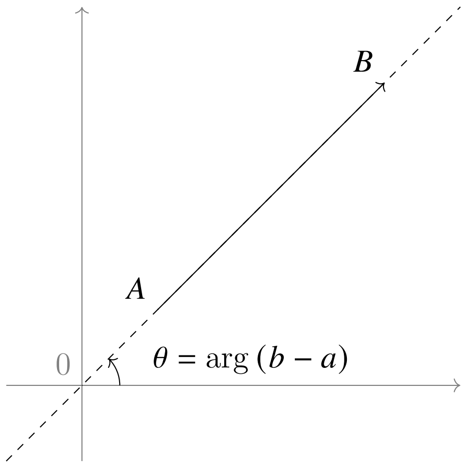
On pose $z_2 = zz_1$.

Considérons les écritures trigonométriques de ces trois complexes : $\begin{cases} z = \lambda e^{i\theta} \\ z_1 = \lambda_1 e^{i\theta_1} \\ z_2 = \lambda_2 e^{i\theta_2} = \lambda\lambda_1 e^{i(\theta+\theta_1)} \end{cases}$

Définition 3.12 (Affixe d'un vecteur)
Soient $A, B \in \mathbb{R}^2$ deux points du plan d'affixes respectives $a, b \in \mathbb{C}$.

L'affixe du vecteur $\vec{AB}$ est le nombre complexe $b - a$.

Son module $|b - a|$ est la longueur AB et son argument est l'angle :



Proposition 3.13 (Inégalité triangulaire pour les complexes)
Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

On a $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ avec égalité ssi $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+,\ \ z_1 = \lambda z_2$ ou $z_2 = \lambda z_1$.

Démonstration 3.14
On remarque qu'on a $\forall z \in \mathbb{C},\ \ \operatorname{Re} z \leqslant |z|$ avec égalité ssi $z \in \mathbb{R}_+$.

En effet, soit $z \in \mathbb{C}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + ib$.

On a $\operatorname{Re} z = a \leqslant |a| = \sqrt{a^2} \leqslant \sqrt{a^2+b^2} = |z|$.

$$\begin{aligned}
\text{Cas d'égalité : } \operatorname{Re} z = |z| &\iff \begin{cases} a = |a| \\ \sqrt{a^2} = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a \geqslant 0 \\ b = 0 \end{cases} \\
&\iff z \in \mathbb{R}_+
\end{aligned}$$

Montrons l'inégalité triangulaire.

$$\begin{aligned}
\text{On a } |z_1+z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| &\iff |z_1+z_2|^2 \leqslant (|z_1|+|z_2|)^2 \ \text{ car } t \longmapsto t^2 \text{ strictement croissante sur } \mathbb{R}_+ \\
&\iff (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) \leqslant (|z_1|+|z_2|)^2 \\
&\iff z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \leqslant |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\
&\iff 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) \leqslant 2|z_1||z_2| \\
&\iff \operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) \leqslant |z_1||z_2| = |z_1||\overline{z_2}| = |z_1\overline{z_2}| \\
&\qquad \text{ce qui est vrai (cf. ci-dessus)}
\end{aligned}$$

Cas d'égalité : montrons que $|z_1+z_2| = |z_1| + |z_2| \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+,\ \ z_1 = \lambda z_2$ ou $z_2 = \lambda z_1$.

On remarque que l'équivalence est vraie si z_1 ou z_2 est nul.

Supposons z_1 et z_2 non-nuls.

$$
\begin{aligned}
\text{On a } |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| &\iff \operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) = |z_1\overline{z_2}| \\
&\iff z_1\overline{z_2} \in \mathbb{R}_+ \\
&\iff \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2} \in \mathbb{R}_+ \text{ car } z_2 \neq 0 \\
&\iff \frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}_+ \text{ car } \frac{\overline{z_2}}{|z_2|} = \frac{\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} \\
&\iff \exists\lambda \in \mathbb{R}_+,\ \frac{z_1}{z_2} = \lambda \\
&\iff \exists\lambda \in \mathbb{R}_+,\ z_1 = \lambda z_2
\end{aligned}
$$

■

Remarque 3.15
Mêmes notations.

Comme on l'a vu pour les réels, on déduit de l'inégalité triangulaire la minoration $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2|$.

Corollaire 3.16
Soient $A, B, C \in \mathbb{R}^2$.

On a $AC \leqslant AB + BC$ avec égalité ssi $\exists\lambda \in \mathbb{R}_+, \vec{AB} = \lambda\vec{BC}$ ou $\vec{BC} = \lambda\vec{AB}$, c'est à dire ssi $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$ sont colinéaires et de même sens.

Démonstration 3.17
Découle de ce qui précède appliqué aux affixes z_1, z_2 respectives de $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$. ■

Proposition 3.18
Soient $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ trois points deux à deux distincts d'affixes $a, b, c \in \mathbb{C}$ respectivement.

Interprétation de $z = \dfrac{c-a}{b-a}$: $|z| = \dfrac{AC}{AB}$ et $\arg z \equiv \left(\vec{AB}\ ;\ \vec{AC}\right)\ [2\pi]$.

Exemple 3.19

- $$\begin{aligned} A, B, C \text{ alignés} &\iff \arg\frac{c-a}{b-a} \equiv 0\ [\pi] \\ &\iff \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \text{Le triangle } ABC \text{ est rectangle en } A &\iff \arg\frac{c-a}{b-a} \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \\ &\iff \frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R} \end{aligned}$$

Définition 3.20
Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

On définit :

- le cercle de centre z_0 et de rayon r : $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$;
- le disque ouvert de centre z_0 et de rayon r : $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$;
- le disque fermé de centre z_0 et de rayon r : $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leqslant r\}$.

Définition 3.21 (Similitude directe)
On appelle similitude directe de $\mathbb{C}$ toute fonction de la forme $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & az+b \end{array}$ avec $\begin{cases} a \in \mathbb{C}^* \\ b \in \mathbb{C} \end{cases}$

Exemple 3.22

- $\mathrm{id}_{\mathbb{C}} : z \longmapsto z$ est une similitude directe de $\mathbb{C}$ (avec $a = 1$ et $b = 0$) ;
- $\forall b \in \mathbb{C},\ \ z \longmapsto z + b$ est une similitude directe de $\mathbb{C}$ (translation) ;
- $\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \ z \longmapsto az$ est une similitude directe de $\mathbb{C}$ (homothétie de centre O), en particulier, la symétrie centrale par rapport à O est une similitude directe de $\mathbb{C}$: $z \longmapsto -z$;
- $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \ z \longmapsto \mathrm{e}^{i\theta} z$ est une similitude directe de $\mathbb{C}$ (rotation d'angle θ et de centre O).

Remarque 3.23
Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

On pose $f : z \longmapsto az + b$ une similitude directe de $\mathbb{C}$.

- Si $a = 1$ et $b = 0$ alors $\forall z \in \mathbb{C},\ \ f(z) = z$ (tout complexe z est un point fixe de f) ;
- si $a = 1$ et $b \neq 0$ alors f n'admet aucun point fixe : $\forall z \in \mathbb{C},\ \ f(z) \neq z$;
- si $a \neq 1$ alors f admet un unique point fixe.
  En effet, $f(z) = z \iff az + b = z$

$$\iff \frac{b}{1-a} = z$$

Remarque 3.24
Les fonctions $z \longmapsto \overline{z}$ (symétrie par rapport à $\mathbb{R}$) et $z \longmapsto -\overline{z}$ (symétrie par rapport à $i\mathbb{R}$) ne sont pas des similitudes directes de $\mathbb{C}$.

3.1.3 Généralisation de formules connues

La formule du binôme de Newton, la factorisation de $a^n - b^n$ et la valeur de $\sum_{k=a}^{b} z^k$ restent vraies en prenant des nombres complexes à la place des nombres réels.

3.2 Lien avec la trigonométrie

3.2.1 Formules

On rappelle qu'on a posé $\forall \theta \in \mathbb{R}, \;\; \mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Proposition 3.25
Soient $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$.

On a $\mathrm{e}^{i(\theta_1+\theta_2)} = \mathrm{e}^{i\theta_1}\mathrm{e}^{i\theta_2}$.

Démonstration 3.26
On a
$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{i(\theta_1+\theta_2)} &= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\\ &= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1)\\ &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\\ &= \mathrm{e}^{i\theta_1}\mathrm{e}^{i\theta_2}\end{aligned}$$

■

Proposition 3.27 (Formule de Moivre)

On a $\forall n \in \mathbb{N}, \;\; \forall \theta \in \mathbb{R}, \;\; \begin{cases}\cos(n\theta) = \operatorname{Re}((\cos\theta + i\sin\theta)^n)\\ \sin(n\theta) = \operatorname{Im}((\cos\theta + i\sin\theta)^n)\end{cases}$

Démonstration 3.28
Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

On déduit de la Proposition 3.25 que $\forall n \in \mathbb{N}, \;\; \mathrm{e}^{in\theta} = \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a donc $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$.

On conclut en prenant les parties réelles et imaginaires. ■

Exemple 3.29
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimons $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$.

On a $\cos(3\theta) = \mathrm{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^3\right)$

$$\begin{aligned}
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}(i\sin\theta)^k(\cos\theta)^{3-k}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\cos^3\theta + 3i\sin\theta\cos^2\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta - i\sin^3\theta\right)\\
&= \cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta\\
&= \cos^3\theta - 3\left(1-\cos^2\theta\right)\cos\theta\\
&= \cos^3\theta - 3\cos\theta + 3\cos^3\theta\\
&= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta
\end{aligned}$$

Plus tard, on écrira $\cos(3\theta) = T_3(\cos\theta)$ avec $T_3(X) = 4X^3 - 3X$.

Proposition 3.30 (Formules d'Euler)
Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

On a $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$

Remarque 3.31
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Voyons comment factoriser $e^{i\alpha} \pm e^{i\beta}$.

On remarque $\begin{cases} \alpha = \dfrac{\alpha+\beta}{2} + \dfrac{\alpha-\beta}{2} \\ \beta = \dfrac{\alpha+\beta}{2} - \dfrac{\alpha-\beta}{2} \end{cases}$

Donc $e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right) = 2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

Et $e^{i\alpha} - e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} - e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right) = 2i\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

3.2.2 Application 1 : sommes particulières

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Calculons $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)$.

Calculons d'abord $S = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}$.

On a $S = \sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^k$.

Si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$ alors $S = \sum_{k=0}^{n} 1^k = n+1$.

Sinon, $S = \dfrac{1-\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^{n+1}}{1-\mathrm{e}^{i\theta}}$.

Supposons $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$.

$$\begin{aligned}
\text{On a } S &= \frac{1-\left(\mathrm{e}^{i\theta(n+1)}\right)}{1-\mathrm{e}^{i\theta}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{i\frac{\theta(n+1)}{2}}\left(\mathrm{e}^{-i\frac{\theta(n+1)}{2}}-\mathrm{e}^{i\frac{\theta(n+1)}{2}}\right)}{\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{2}}-\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\right)} \\
&= \frac{-2i\mathrm{e}^{i\frac{\theta(n+1)}{2}}\sin\left(\frac{\theta(n+1)}{2}\right)}{-2i\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\sin\frac{\theta}{2}} \\
&= \frac{\sin\frac{\theta(n+1)}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \times \mathrm{e}^{i\theta\left(\frac{n+1-1}{2}\right)} \\
&= \mathrm{e}^{in\frac{\theta}{2}} \times \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}
\end{aligned}$$

D'où $S_1 = \operatorname{Re} S = \cos\dfrac{n\theta}{2} \times \dfrac{\sin\left(\dfrac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\dfrac{\theta}{2}}$.

Et $S_2 = \operatorname{Im} S = \sin\dfrac{n\theta}{2} \times \dfrac{\sin\left(\dfrac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\dfrac{\theta}{2}}$.

3.2.3 Application 2 : linéarisation

Soient $a, b \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Linéariser $\cos^a\theta\sin^b\theta$ c'est écrire cette expression sous la forme $\sum_{i\in I}\lambda_i\cos(\mu_i\theta)$ ou $\sum_{i\in I}\lambda_i\sin(\mu_i\theta)$ où I est un ensemble fini et $\forall i \in I,\ \ \lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$.

Exemple 3.32

On a $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \cos^2\theta = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2} \\ \sin^2\theta = \dfrac{1-\cos(2\theta)}{2} \\ \cos^3\theta = \dfrac{\cos(3\theta)+3\cos\theta}{4} \\ \cos\theta\sin\theta = \dfrac{1}{2}\sin(2\theta) \end{cases}$

Application : linéariser l'expression $\cos^a\theta\sin^b\theta$ permet de la primitiver.

Méthode : remplacer $\cos\theta$ et $\sin\theta$ avec les formules d'Euler puis développer avec le binôme de Newton.

Exemple 3.33

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto & \sin^4\theta \end{array}$.

Linéarisons $f(\theta)$.

$$\begin{aligned}
\text{On a } \sin^4\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^4 \\
&= \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}\left(\frac{e^{i\theta}}{2i}\right)^k\left(\frac{-e^{-i\theta}}{2i}\right)^{4-k} \\
&= 1\times 1\times\frac{e^{-4i\theta}}{16} + 4\times\frac{e^{i\theta}}{2i}\times\frac{-e^{-3i\theta}}{-8i} + 6\times\frac{e^{2i\theta}}{-4}\times\frac{e^{-2i\theta}}{-4} + 4\times\frac{e^{3i\theta}}{-8i}\times\frac{-e^{-i\theta}}{2i} + 1\times\frac{e^{4i\theta}}{16}\times 1 \\
&= \frac{e^{4i\theta}}{16} + \frac{e^{-4i\theta}}{16} + 4\left(\frac{-e^{-2i\theta}}{16} + \frac{-e^{2i\theta}}{16}\right) + \frac{6}{16} \\
&= \frac{1}{8}\cos(4\theta) - \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

On en déduit la primitive $F(\theta) = \dfrac{1}{32}\sin(4\theta) - \dfrac{1}{4}\sin(2\theta) + \dfrac{3\theta}{8}$.

3.3 Équations algébriques

3.3.1 Fonctions polynomiales

Définition 3.34
On appelle fonction polynomiale de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ toute fonction de la forme $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k z^k \end{array}$ où $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

Si $\lambda_n \neq 0$, on dit que la fonction polynomiale est de degré n.

Si $z_0 \in \mathbb{C}$ vérifie $f(z_0) = 0$, on dit que z_0 est une racine de f.

Proposition 3.35
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

On pose $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k z^k \end{array}$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) z_0 est racine de f

(2) il existe une fonction polynomiale $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = (z - z_0)\, g(z)$

Remarque 3.36
Cette proposition est fausse pour les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Posons par exemple $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sqrt{|t|} \end{array}$.

On a $f(0) = 0$ donc 0 racine de f donc (1) est vraie.

Pourtant si $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = (t - 0)\, g(t)$ alors $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, g(t) = \dfrac{f(t)}{t} = \dfrac{\sqrt{|t|}}{t} = \dfrac{\sqrt{t}}{t} = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$.

On a $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} g(t) = +\infty$: contradiction car g est continue en 0.

Démonstration 3.37
Montrons que (1) $\iff$ (2).

$\boxed{\Longleftarrow}$ Claire.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $f(z_0) = 0$.

On a $\forall z \in \mathbb{C},\quad f(z) = f(z) - f(z_0)$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} \lambda_k z^k - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k z_0^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \left(z^k - z_0^k \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\lambda_k (z - z_0) \sum_{\ell=0}^{k-1} z^\ell z_0^{k-1-\ell} \right) \\
&= (z - z_0) \sum_{1 \leqslant \ell < k \leqslant n} \lambda_k z_0^{k-1-\ell} z^\ell \\
&= (z - z_0) \sum_{\ell=0}^{n-1} \left(\sum_{k=\ell+1}^{n} \lambda_k z_0^{k-1-\ell} \right) z^\ell \\
&= (z - z_0) \sum_{\ell=0}^{n-1} \mu_\ell z^\ell
\end{aligned}$$

en posant $\forall \ell \in [\![0\,;\,n-1]\!],\quad \mu_\ell = \displaystyle\sum_{k=\ell+1}^{n} \lambda_k z^{k-1-\ell}$.

D'où (2) en prenant $g : z \longmapsto \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n-1} \mu_\ell z^\ell$. ∎

3.3.2 Racines nièmes

Rappel 3.38
Si $x \in \mathbb{R}_+$, on note $\sqrt{x}$ ou $x^{1/2}$ l'unique réel positif de carré x.

On a par exemple $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{2}$ est l'unique réel positif tel que $\sqrt{2}^2 = 2$.

Si $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\sqrt[n]{x}$ ou $x^{1/n}$ l'unique réel positif dont la puissance nième vaut x.

Remarque 3.39
On a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad \sqrt[n]{x} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln x}$.

En effet, $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln x} \geqslant 0$ et $\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln x}\right)^n = \mathrm{e}^{\ln x} = x$.

3.3.2.1 Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Proposition 3.40
Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

Alors $\exists!\,(q,r) \in \mathbb{Z}^2,\ \begin{cases} a = qb + r \\ 0 \leqslant r < b \end{cases}$

q et r sont respectivement appelés le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b .

Démonstration 3.41
$\boxed{\text{unicité}}$

Soient $(q_1, r_1), (q_2, r_2) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\begin{cases} a = q_1 b + r_1 \\ a = q_2 b + r_2 \\ 0 \leqslant r_1 < b \\ 0 \leqslant r_2 < b \end{cases}$

On a d'une part $q_1 b + r_1 = q_2 b + r_2$ donc $(q_1 - q_2)\, b = r_2 - r_1$.

D'autre part on a $\begin{cases} 0 \leqslant r_1 < b \text{ donc } -b < r_1 - r_2 < b \\ -b < -r_2 \leqslant 0 \text{ donc } |r_2 - r_1| < b \end{cases}$

On en déduit que $q_1 - q_2 = 0$.

En effet, par l'absurde, si $q_1 - q_2 \neq 0$ alors $|q_1 - q_2| \geqslant 1$ donc $|r_2 - r_1| = |q_1 - q_2|\, b \geqslant b$: contradiction.

Donc $q_1 = q_2$ donc $r_1 = a - q_1 b = a - q_2 b = r_2$.

D'où l'unicité.

$\boxed{\text{existence}}$

Montrons d'abord le cas où $a \in \mathbb{N}$.

On pose $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \neg\,(\exists q \in \mathbb{Z},\ \ \exists r \in [\![0\ ;\ b-1]\!],\ \ x = bq + r)\}$.

Montrons que $A = \varnothing$. Par l'absurde, supposons $A \neq \varnothing$.

Comme A est une partie non-vide de $\mathbb{N}$, elle admet un plus petit élément $m \in A$.

- On remarque que tout $x \in [\![0\ ;\ b-1]\!]$ admet une division euclidienne par b : $x = 0 \times b + x$. Donc $x \notin A$.
  Donc $m < b$.
- Considérons $m' = m - b$. On a $m' < m$.
  Donc $m' \notin A$ et $m' \in \mathbb{N}$ donc il existe $q' \in \mathbb{Z}$ et $r' \in [\![0\ ;\ r-1]\!]$ tels que $m' = q'b + r'$.
  Finalement, $m = m' + b = (q' + 1)\, b + r'$.
  Donc $m \notin A$: contradiction.

Ainsi on a montré $A = \varnothing$ donc tout $x \in \mathbb{N}$ admet une division euclidienne.

On montre ensuite le cas où $a < 0$.

Supposons $a < 0$. On a $-a \in \mathbb{N}$.

Donc il existe $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in [\![0\ ;\ b-1]\!]$ tels que $-a = qb + r$.

On a $a = -qb - r = -qb + b - b - r = (-q-1)\,b + b - r$ avec $-b < -r \leqslant 0$ donc $0 < b - r \leqslant b$.

Donc a admet une division euclidienne par b. ■

3.3.2.2 Racines nièmes d'un nombre complexe

Définition 3.42
Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Tout nombre complexe $\gamma \in \mathbb{C}$ tel que $\gamma^n = z$ est appelé une racine nième de z.

Les racines nièmes de 1 sont appelées racines nièmes de l'unité.

Leur ensemble est noté $\mathbb{U}_n$. On a $\mathbb{U}_n = \{\omega \in \mathbb{C} \mid \omega^n = 1\}$.

Exemple 3.43
- $i \in \mathbb{U}_4$ car $i^4 = 1$;
- $i \in \mathbb{U}_8$ car $i^8 = 1$;
- $1 + i$ est une racine carrée de $2i$ car $(1+i)^2 = 2i$;
- $-1 - i$ est aussi une racine carrée de $2i$ car $(-1-i)^2 = 2i$.

Théorème 3.44
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Tout nombre complexe non-nul admet exactement n racines nièmes.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Les racines nièmes du nombre complexe $z = \lambda e^{i\theta}$ sont les nombres complexes de la forme $\gamma_k = \sqrt[n]{\lambda}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ avec $k \in [\![0\ ;\ n-1]\!]$.

Démonstration 3.45
On rappelle $\forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R},\ \ r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2} \iff \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 \equiv \theta_2\ [2\pi] \end{cases}$

Soient $r \in \mathbb{R}_+$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Posons $\gamma = r e^{i\alpha}$.

On a $\gamma^n = z \iff r^n e^{in\alpha} = \lambda e^{i\theta}$

$$\iff \begin{cases} r^n = \lambda \\ n\alpha \equiv \theta \; [2\pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} r = \sqrt[n]{\lambda} \\ \alpha \equiv \dfrac{\theta}{n} \left[\dfrac{2\pi}{n}\right] \end{cases}$$

Avec $\alpha \equiv \dfrac{\theta}{n} \left[\dfrac{2\pi}{n}\right] \iff \exists \ell \in \mathbb{Z},\ \ \alpha = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2\ell\pi}{n}$

$$\iff \exists Q \in \mathbb{Z},\ \ \exists R \in [\![0\ ;\ n-1]\!],\ \ \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2\,(Qn+R)\,\pi}{n}$$

$$\iff \exists R \in [\![0\ ;\ n-1]\!],\ \ \exists Q \in \mathbb{Z},\ \ \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2R\pi}{n} + 2Q\pi$$

$$\iff \exists R \in [\![0\ ;\ n-1]\!],\ \ \alpha \equiv \frac{\theta}{n} + \frac{2R\pi}{n} \; [2\pi]$$

Ainsi $\gamma^n = z \iff \begin{cases} r = \sqrt[n]{\lambda} \\ \exists R \in [\![0\ ;\ n-1]\!],\ \ \alpha \equiv \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2R\pi}{n} \; [2\pi] \end{cases}$

Les racines nièmes de z sont donc les complexes de la forme $\sqrt[n]{\lambda} e^{i\frac{\theta+2R\pi}{n}}$ où $R \in [\![0\ ;\ n-1]\!]$. ■

Exemple 3.46
Déterminons $\mathbb{U}_2$ et $\mathbb{U}_3$.

- Les racines carrées de $1 = 1e^{0\times i}$ sont les nombres complexes de la forme $\sqrt{1}e^{i\frac{0+2k\pi}{2}}$ où $k \in [\![0\ ;\ 1]\!]$, c'est à dire 1 et $1 \times e^{i\frac{2\pi}{2}} = e^{i\pi} = -1$.
  Donc $\mathbb{U}_2 = \{-1\ ;\ 1\}$.
- Les racines cubiques de 1 sont les nombres complexes de la forme $e^{i\frac{2k\pi}{3}}$ où $k \in [\![0\ ;\ 2]\!]$, c'est à dire $e^{0\times i} = 1$, $e^{i\frac{2\pi}{3}} = j$ et $e^{i\frac{4\pi}{3}} = -j$.
  Donc $\mathbb{U}_3 = \{-\ ;\ j\ ;\ -j\}$.

Remarque 3.47
On a $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Et $j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = j^{-1} = \overline{j}$.

Et $1 + j + j^2 = 0$.

Remarque 3.48

On a $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right\}_{k \in [\![0;n-1]\!]}$

Remarque 3.49
Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$.

On dit que n divise m et on note $n \mid m$ si on a $\exists k \in \mathbb{Z},\ \ m = kn$.

On a alors $\mathbb{U}_n \subseteq \mathbb{U}_m$.

Démonstration 3.50
Supposons $n \mid m$. Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $kn = m$.

Montrons que $\mathbb{U}_n \subseteq \mathbb{U}_m$.

Soit $\omega \in \mathbb{U}_n$. On a $\omega^n = 1$.

Donc $\omega^m = \omega^{nk} = (\omega^n)^k = 1^k = 1$.

Donc $\omega \in \mathbb{U}_m$. Donc $\mathbb{U}_n \subseteq \mathbb{U}_m$. ∎

Proposition 3.51
Soient $z, \gamma \in \mathbb{C}^*$ tels que γ soit une racine nième de z.

Les racines nièmes de z sont les nombres complexes de la forme $\omega\gamma$ où $\omega \in \mathbb{U}_n$.

Démonstration 3.52
Soit $w \in \mathbb{C}$.

$$
\begin{aligned}
\text{On a } w \text{ racine nième de } z &\iff w^n = z \\
&\iff w^n = \gamma^n \\
&\iff \left(\frac{w}{\gamma}\right)^n = 1 \\
&\iff \frac{w}{\gamma} \in \mathbb{U}_n \\
&\iff \exists \omega \in \mathbb{U}_n,\ \ \frac{w}{\gamma} = \omega \\
&\iff \exists \omega \in \mathbb{U}_n,\ \ w = \omega\gamma
\end{aligned}
$$

D'où le résultat. ∎

Exemple 3.53
Déterminons les racines quatrièmes de 4 et -4.

- On a $4 = 4e^{0\times i}$ donc les racines quatrièmes de 4 sont de la forme $\sqrt[4]{4}e^{i\frac{2k\pi+0}{4}}$ avec $k \in [\![0\ ;\ 3]\!]$.
  C'est à dire
  — $\sqrt{2}e^{0\times i} = \sqrt{2}$;
  — $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}} = i\sqrt{2}$;
  — $\sqrt{2}e^{i\pi} = -\sqrt{2}$;
  — $\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i\sqrt{2}$.
- On a $-4 = 4e^{i\pi}$ donc les racines quatrièmes de -4 sont de la forme $\sqrt[4]{4}e^{i\frac{2k\pi+\pi}{4}}$ avec $k \in [\![0\ ;\ 3]\!]$.
  C'est à dire
  — $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1+i$;
  — $\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = -1+i$;
  — $\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} = -1-i$;
  — $\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}} = 1-i$.

3.3.2.3 Racines carrées sous forme algébrique

Méthode 3.54
Soit $z = a+ib \in \mathbb{C}^*$ un nombre complexe non-nul écrit sous forme algébrique avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $(a,b) \neq (0,0)$.

Pour déterminer ses racines carrées sous forme algébrique, on résout l'équation $(x+iy)^2 = a+ib$ d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
(x+iy)^2 = a+ib &\iff \begin{cases} (x+iy)^2 = a+ib \\ |x+iy|^2 = |a+ib| \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2 - y^2 + 2ixy = a+ib \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a & L_1 \\ 2xy = b & L_2 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} & L_3 \end{cases}
\end{aligned}$$

On obtient $|x|$ par $L_1 + L_3$, $|y|$ par $L_3 - L_1$ et les signes par L_2.

Exemple 3.55
Déterminons les racines carrées de $-5-12i$.

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a $(x+iy)^2 = -5-12i \iff \begin{cases} (x+iy)^2 = -5-12i \\ |x+iy|^2 = |-5-12i| \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x^2 - y^2 + 2ixy = -5-12i \\ x^2+y^2 = \sqrt{(-5)^2+(-12)^2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = -12 \\ x^2+y^2 = 13 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x^2 = 8 \\ 2y^2 = 18 \\ xy = -6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} |x| = 2 \\ |y| = 3 \\ xy = -6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ xy = -6 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \\ xy = -6 \end{cases}$$

Donc les racines carrées de $-5-12i$ sont $2-3i$ et $-2+3i$.

3.3.3 Équations polynomiales de degré 2

3.3.3.1 Résolution

Proposition 3.56
Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$.

On associe à l'équation $(E) : az^2+bz+c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ le discriminant $\Delta = b^2-4ac$.

Soit $\delta \in \mathbb{C}$ une racine carrée de Δ.

Les solutions de (E) sont $\dfrac{-b\pm\delta}{2a}$.

Elles sont distinctes ssi $\Delta \neq 0$.

Démonstration 3.57
Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
\text{On a } (E) &\iff az^2 + bz + c = 0\\
&\iff a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c = 0\\
&\iff a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = 0\\
&\iff \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0\\
&\iff \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2 = 0\\
&\iff \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\right) = 0\\
&\iff z = \frac{-b + \delta}{2a} \text{ ou } z = \frac{-b - \delta}{2a}
\end{aligned}$$

■

Exemple 3.58
Résolvons les équations $(A) : z^2 - (3 + 2i)\, z + 1 + 3i = 0$ et $(B) : z^2 - (4 + i)\, z + 4 + 2i = 0$.

- Résolvons (A).
  On a $\Delta = (-3 - 2i)^2 - 4 \times 1 \times (1 + 3i) = 9 - 2 \times (-3) \times 2i - 4 - 4 - 12i = 1$.
  Donc $\delta = 1$. Donc on a $z = \dfrac{3 + 2i \pm 1}{2} = 2 + i$ ou $1 + i$.
- Résolvons (B).
  On a $\Delta = (-4 - i)^2 - 4 \times 1 \times (4 + 2i) = 16 - 2 \times (-4) \times i - 1 - 16 - 8i = -1 = i^2$.
  Donc $\delta = i$. Donc on a $z = \dfrac{4 + i \pm i}{2} = 2 + i$ ou 2.

Remarque 3.59
Si $\Delta \in \mathbb{R}_-$ alors une racine carrée de Δ est $i\sqrt{-\Delta}$ donc les solutions sont $\dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Remarque 3.60
Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ alors $\Delta \in \mathbb{R}$. On obtient

- deux solutions complexes (non-réelles) conjuguées si $\Delta < 0$;
- une solution réelle si $\Delta = 0$;
- deux solutions réelles distinctes si $\Delta > 0$.

Proposition 3.61 (Relations coefficients/racines)
Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ *avec* $a \neq 0$.

On note $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *les racines de* $f : z \longmapsto az^2 + bz + c$ *et* Δ *le discriminant de* f.

On a vu que $\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$.

On a $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ *et* $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$.

Démonstration 3.62
On note δ une racine carrée de Δ.

On a $z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$.

On a $z_1+z_2 = \dfrac{-b-\delta-b+\delta}{2a} = -\dfrac{2b}{2a} = -\dfrac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \left(\dfrac{-b-\delta}{2a}\right)\left(\dfrac{-b+\delta}{2a}\right) = \dfrac{b^2-\delta^2}{4a^2} = \dfrac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2} = \dfrac{c}{a}$. ■

Remarque 3.63
Il est conseillé de vérifier au moins la somme des racines quand on les calcule.

Proposition 3.64
Soient $z_1, z_2, S, P \in \mathbb{C}$.

Alors $\begin{cases} z_1 + z_2 = S \\ z_1 z_2 = P \end{cases} \iff z_1, z_2$ *sont les racines de* $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^2 - Sz + P \end{array}$

Démonstration 3.65
Montrons l'équivalence :

$\boxed{\Longleftarrow}$ Déjà vue.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $z_1 + z_2 = S$ et $z_1 z_2 = P$.
Alors $\forall z \in \mathbb{C}$,
$$\begin{aligned} z^2 - Sz + P &= z^2 - (z_1 + z_2) z + z_1 z_2 \\ &= z^2 - z_1 z - z_2 z + z_1 z_2 \\ &= (z - z_1)(z - z_2) \end{aligned}$$

■

Exemple 3.66

Résolvons le système $\begin{cases} a+b=4 \\ ab=5 \end{cases}$ d'inconnues $a, b \in \mathbb{C}$.

On a $\begin{cases} a+b=4 \\ ab=5 \end{cases} \iff a, b$ sont les racines de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^2-4z+5 \end{array}$

On note Δ le discriminant de f. On a $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16 - 20 = -4$.

Donc on a $\begin{cases} a = \dfrac{4+i\sqrt{4}}{2} = 2+i \\ b = \dfrac{4-i\sqrt{4}}{2} = 2-i \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = 2-i \\ b = 2+i \end{cases}$

On a donc $\mathfrak{S}_= \{(2+i\ ;\ 2-i)\ ;\ (2-i\ ;\ 2+i)\}$.

3.4 Exponentielle complexe

Définition 3.67
Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

On pose $\exp z = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{iy}$.

On appelle exponentielle complexe la fonction $\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \mathrm{e}^z \end{array}$

Proposition 3.68
On a

- $\mathrm{e}^0 = 1$ *;*
- $\forall z \in \mathbb{C},\ \ |\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\, z}$ *;*
- $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ \ \mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z \mathrm{e}^{z'}$ *;*
- $\forall z \in \mathbb{C},\ \ \mathrm{e}^z \neq 0$ *et* $\dfrac{1}{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{-z}$ *;*
- $\forall z \in \mathbb{C},\ \ \forall n \in \mathbb{Z},\ \ (\mathrm{e}^z)^n = \mathrm{e}^{nz}$ *;*
- $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ \ \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'} \iff z \equiv z'\ [2i\pi]$ *;*
- $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$.

Démonstration 3.69
★★ **EXERCICE** ★★ ■

Remarque 3.70
La Définition 3.67 est compatible avec les précédentes définitions de l'exponentielle.

Définition 3.71
Soient $I \subseteq \mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$.

On appelle partie réelle de f la fonction $\begin{array}{rccc} \mathrm{Re}(f) : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \mathrm{Re}(f(t)) \end{array}$

On appelle partie imaginaire de f la fonction $\begin{array}{rccc} \mathrm{Im}(f) : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \mathrm{Im}(f(t)) \end{array}$

Remarque 3.72
De même que la donnée d'un nombre complexe revient à celle de deux réels (ses parties réelle et imaginaire), la donnée d'une fonction à valeurs complexes revient à celle de deux fonctions à valeurs réelles (ses parties réelle et imaginaire).

C'est à dire $\forall t \in I, \;\; f(t) = (\mathrm{Re}(f))(t) + i\,(\mathrm{Im}(f))(t)$.

Définition 3.73
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$.

On dit que f est continue en un point $a \in I$ si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues en a.

On dit que f est continue (sur I) si elle est continue en tout point de I, c'est à dire si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues sur I.

On dit que f est dérivable en un point $a \in I$ si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.

On dit que f est dérivable (sur I) si elle est dérivable en tout point de I, c'est à dire si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables sur I.

Quand f est dérivable en un point $a \in I$, on pose $f'(a) = (\mathrm{Re}(f))'(a) + i\,(\mathrm{Im}(f))'(a)$.

Théorème 3.74
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur I.

Alors la fonction $\begin{array}{rccc} \exp \circ f : & I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & \mathrm{e}^{f(t)} \end{array}$ *est dérivable et* $(\exp \circ f)' = f' \times \exp(f)$.

Démonstration 3.75
Posons $f_1 = \mathrm{Re}(f)$ et $f_2 = \mathrm{Im}(f)$.

On a $\forall t \in I,\ $ $$\begin{aligned}(\exp \circ f)(t) &= \mathrm{e}^{f_1(t)+if_2(t)} \\ &= \mathrm{e}^{f_1(t)}\mathrm{e}^{if_2(t)} \\ &= \mathrm{e}^{f_1(t)}\left(\cos(f_2(t)) + i\sin(f_2(t))\right) \\ &= \underbrace{\mathrm{e}^{f_1(t)}\cos(f_2(t))}_{\in\mathbb{R}} + i\,\underbrace{\mathrm{e}^{f_1(t)}\sin(f_2(t))}_{\in\mathbb{R}}\end{aligned}$$

D'où $\forall t \in I,\ \begin{cases}(\mathrm{Re}(\exp\circ f))(t) = \mathrm{e}^{f_1(t)}\cos(f_2(t)) \\ (\mathrm{Im}(\exp\circ f))(t) = \mathrm{e}^{f_1(t)}\sin(f_2(t))\end{cases}$

La fonction à valeurs complexes $\exp\circ f$ est donc dérivable (car ses parties réelle et imaginaire le sont) et on a pour tout $t \in I$:

$$\begin{aligned}(\exp\circ f)'(t) = &\left(f_1'(t)\,\mathrm{e}^{f_1(t)}\cos(f_2(t)) - \mathrm{e}^{f_1(t)}f_2'(t)\sin(f_2(t))\right) \\ &+ i\left(f_1'(t)\,\mathrm{e}^{f_1(t)}\sin(f_2(t)) + \mathrm{e}^{f_1(t)}f_2'(t)\cos(f_2(t))\right) \\ = &\ \mathrm{e}^{f_1(t)}\left(f_1'(t)\left[\cos(f_2(t)) + i\sin(f_2(t))\right] + f_2'(t)\left[-\sin(f_2(t)) + i\cos(f_2(t))\right]\right) \\ = &\ \mathrm{e}^{f_1(t)}\left(f_1'(t)\,\mathrm{e}^{if_2(t)} + f_2'(t)\,i\mathrm{e}^{if_2(t)}\right) \\ = &\ \mathrm{e}^{f_1(t)}\mathrm{e}^{if_2(t)}\left(f_1'(t) + if_2'(t)\right) \\ = &\ \mathrm{e}^{f(t)} \times f'(t)\end{aligned}$$

■

Exemple 3.76
Soit $a \in \mathbb{C}$.

La fonction $g : \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \mathrm{e}^{at}\end{array}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall t \in \mathbb{R}, g'(t) = a\mathrm{e}^{at}$.

Démonstration 3.77
Cela découle du Théorème 3.74, en prenant $f : \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & at\end{array}$. ■

Théorème 3.78
Soient f, g deux fonctions de I dans $\mathbb{C}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Si f et g sont dérivables sur I, alors $f+g$ et fg le sont aussi et on a

$$(f+g)' = f' + g' \text{ et } (fg)' = f'g + fg'$$

Si, de plus, g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et on a

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Démonstration 3.79
★★ EXERCICE ★★ ■

Théorème 3.80
Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow J$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions dérivables.

Alors $g \circ f$ est dérivable et on a $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$.

Démonstration 3.81
★★ EXERCICE ★★ ■

Chapitre 4

Notions ensemblistes

Sommaire

4.1 Ensembles

4.1.1 Notations de base

Ensemble vide : $\varnothing$ ou $\{\}$.

Singletons (ensembles avec un unique élément) : $\{1\}$, $\{\sin\}$, $\{\varnothing\}$, ...

Ensembles finis : $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$, $\{0\ ;\ \varnothing\ ;\ \cos\ ;\ \mathbb{R}\}$, ...

Ensembles classiques (infinis) : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{R}_+^*$, ...

Sous-ensembles définis par une condition : $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\} = \mathbb{R}_+$, ...

Ensembles paramétrés par un autre ensemble : $\{x + iy\}_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}$, $\{\cos + \lambda \sin\}_{\lambda\in\mathbb{R}_+}$, $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax+b \end{array} \right\}_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}$, ...

Appartenance : « $x \in E$ » signifie que l'élément x appartient à l'ensemble E.

Inclusion : « $A \subseteq B$ » signifie $\forall x \in A,\ \ x \in B$.

Égalité : $A = B \iff \begin{cases} A \subseteq B \\ B \subseteq A \end{cases}$

Remarque 4.1

$$\begin{cases} A \subseteq B \\ B \subseteq C \end{cases} \implies A \subseteq C.$$

4.1.2 Opérations sur les ensembles

4.1.2.1 Réunion

Si A, B sont deux ensembles, alors leur réunion est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B.

Elle est définie par $x \in A \cup B \iff (x \in A \vee x \in B)$ pour tout élément x.

La réunion $\cup$ est une loi associative : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ pour tous ensembles A, B, C. En pratique, on note simplement $A \cup B \cup C$.

Si I est un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles indicée par I, alors on définit la réunion $\bigcup_{i\in I} A_i$ par $x \in \bigcup_{i\in I} A_i \iff \exists i \in I, x \in A_i$.

Exemple 4.2
$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{n\} = \mathbb{N}$.

4.1.2.2 Intersection

Si A, B sont deux ensembles, alors leur intersection est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et à B. Elle est définie par $x \in A \cap B \iff (x \in A \wedge x \in B)$ pour tout élément x.

L'intersection $\cap$ est une loi associative : $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ pour tous ensembles A, B, C. En pratique, on note simplement $A \cap B \cap C$.

Si I est un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles indicées par I, alors on définit l'intersection $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ par $x \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i \iff \forall i \in I, x \in A_i$.

Exemple 4.3
$\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} [n \,;\, +\infty[\; = \varnothing$

Démonstration 4.4
$\boxed{\supseteq}$ Claire.
$\boxed{\subseteq}$ Supposons $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} [n \,;\, +\infty[$.
On a $\forall n \in \mathbb{N},\ n \leqslant x$. En particulier, $\lfloor x \rfloor + 1 \leqslant x$: impossible. ■

Exemple 4.5

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-\frac{1}{n} \,;\, \frac{1}{n}\right] = \{0\}$$

Démonstration 4.6
$\boxed{\supseteq}$ Claire : on a bien $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\dfrac{1}{n} \leqslant 0 \leqslant \dfrac{1}{n}$.
$\boxed{\subseteq}$ Soit $x \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-\dfrac{1}{n} \,;\, \dfrac{1}{n}\right]$. Montrons que $x \in \{0\}$, c'est à dire $x = 0$.
On a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x \in \left[-\dfrac{1}{n} \,;\, \dfrac{1}{n}\right]$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\dfrac{1}{n} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n}$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |x| \leqslant \dfrac{1}{n}$.
Supposons $x \neq 0$. Alors on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \leqslant \dfrac{1}{|x|}$.
En particulier, $\left\lfloor \dfrac{1}{|x|} \right\rfloor + 1 \leqslant \dfrac{1}{|x|}$: contradiction.
Donc par l'absurde, $x = 0$, d'où l'inclusion. ■

Remarque 4.7
Si I est un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles indicée par I, alors $\forall j \in I,\ \bigcap\limits_{i \in I} A_i \subseteq A_j \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} A_i$.

4.1.3 Produit cartésien

Rappel 4.8
Soient $E_1, \dots, E_n$ des ensembles avec $n \in \mathbb{N}^*$. Le produit cartésien $E_1 \times \cdots \times E_n$ est l'ensemble des n-uplets $(x_1, \dots, x_n)$ tels que $\forall i \in [\![1 \,;\, n]\!],\ \ x_i \in E_i$.

Alors si $E_1, \dots, E_m, F_1, \dots, F_n$ sont des ensembles avec $m, n \in \mathbb{N}^*$, on identifie les ensembles $(E_1 \times \cdots \times E_m) \times (F_1 \times \cdots \times F_n)$ et $E_1 \times \cdots \times E_m \times F_1 \times \cdots \times F_n$. Autrement dit :

$$\forall x_1 \in E_1, \dots, \forall x_m \in E_m,\ \forall y_1 \in F_1, \dots, \forall y_n \in F_n,\ \left[(x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_n)\right] = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n).$$

4.1.4 Autres opérations

Définition 4.9
Soit E un ensemble. Une partie de E est un ensemble inclus dans E. L'ensemble des parties de E est noté $\mathscr{P}(E)$.

Définition 4.10 (Différence ensembliste)
Soient A, B deux ensembles.

On pose $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$.

Exemple 4.11
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_- = \mathbb{R}_+^*$

Définition 4.12 (Complémentaire)
Soient E un ensemble et $A \in \mathscr{P}(E)$.

Le complémentaire de A (dans E) est $E \setminus A$.

Il est noté $\complement_E A$ ou $\overline{A}$ ou A^C.

4.1.5 Partitions

Définition 4.13
Soient E un ensemble et $P \subseteq \mathscr{P}(E)$ un ensemble de parties de E.

On dit que P est un recouvrement disjoint de E si on a $\begin{cases} \displaystyle\bigcup_{A \in P} A = E \text{ (recouvrement)} \\ \forall A, B \in P,\quad A \neq B \text{ (disjoints deux à deux)} \end{cases}$

Exemple 4.14
Si $E = [\![1 ; 5]\!]$ alors $\{\{1\} ; \{2 ; 4\} ; \varnothing ; \{3 ; 5\}\}$ est un recouvrement disjoint de E.

Remarque 4.15
On note alors $E = \bigsqcup\limits_{A \in P} A$.

Définition 4.16
Soit E un ensemble et $P \subseteq \mathscr{P}(E)$. On dit que P est une partition de E si P est un recouvrement disjoint de E et $\varnothing \notin P$.

Exemple 4.17
Si $E = \varnothing$ alors $\mathscr{P}(E) = \{\varnothing\}$ et $P = \varnothing$ est l'unique partition de $\varnothing$.

Si $E = \{1\}$ alors $\mathscr{P}(E) = \{\{1\} ; \varnothing\}$ et $P = \{1\}$ est l'unique partition de E.

Si $E = \{1 ; 2\}$ alors il existe deux partitions de E : $\{\{1 ; 2\}\}$ et $\{\{1\} ; \{2\}\}$.

Si $E = \{1 ; 2 ; 3\}$ alors il existe cinq partitions de E : $\{\{1 ; 2 ; 3\}\}$, $\{\{1 ; 2\} ; \{3\}\}$, $\{\{1 ; 3\} ; \{2\}\}$, $\{\{2 ; 3\} ; \{1\}\}$ et $\{\{1\} ; \{2\} ; \{3\}\}$.

Si $E = \mathbb{R}$, on a notamment les partitions $\left\{\mathbb{R}_-^* ; \{0\} ; \mathbb{R}_+^*\right\}$ et $\{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\} \cup \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} \{\{n\}\}$.

4.1.6 Droite réelle achevée

La droite réelle achevée est l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty ; +\infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty ; +\infty\}$.

4.1.6.1 Somme de deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$

La somme $a + b$ est définie pour tout couple $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2 \setminus \{(-\infty, +\infty) ; (+\infty, -\infty)\}$.

Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ alors $a + b$ est simplement la somme des réels a et b.

Sinon, on pose $\begin{cases} (+\infty) + (+\infty) = +\infty \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad (+\infty) + x = x + (+\infty) = +\infty \\ (-\infty) + (-\infty) = -\infty \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad (-\infty) + x = x + (-\infty) = -\infty \end{cases}$

4.1.6.2 Produit de deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$

Le produit $a \times b$ est défini pour tout couple $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2 \setminus \{(-\infty, 0) ; (+\infty, 0) ; (0, -\infty) ; (0, +\infty)\}$.

Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ alors $a \times b$ est simplement le produit des réels a et b.

Sinon, on pose $\begin{cases} (+\infty) \times (+\infty) = (-\infty) \times (-\infty) = +\infty \\ (-\infty) \times (+\infty) = (+\infty) \times (-\infty) = -\infty \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \ (+\infty) \times x = x \times (+\infty) = +\infty \quad \text{et} \quad (-\infty) \times x = x \times (-\infty) = -\infty \\ \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \ \ (+\infty) \times x = x \times (+\infty) = -\infty \quad \text{et} \quad (-\infty) \times x = x \times (-\infty) = +\infty \end{cases}$

4.1.6.3 Relation d'ordre sur $\overline{\mathbb{R}}$

On munit l'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ de la relation d'ordre notée $\leqslant$ qui prolonge la relation d'ordre usuelle de $\mathbb{R}$ et pour laquelle $+\infty$ est le plus grand élément de $\overline{\mathbb{R}}$ et $-\infty$ le plus petit élément de $\overline{\mathbb{R}}$.

On a donc $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}, \ -\infty \leqslant x \leqslant +\infty$.

C'est un ordre total.

4.2 Fonctions

4.2.1 Notations de base

Les termes « fonction » et « application » sont synonymes.

Définition 4.18
Une fonction f d'un ensemble E dans un ensemble F associe à tout élément x de E un unique élément de F noté $f(x)$: $\forall x \in E, \ \exists! y \in F, \ y = f(x)$.

On dit que E et F sont respectivement l'ensemble de départ (ou de définition) et d'arrivée de f.

Définition 4.19
Soient E, F deux ensembles.

L'ensemble des fonctions de E dans F est noté $\mathscr{F}(E, F)$ ou F^E.

Définition 4.20 (Ensemble image)
Soient E, F deux ensembles et $f \in \mathscr{F}(E, F)$.

On pose $\operatorname{Im} f = \{f(x)\}_{x \in E}$.

Remarque 4.21
Il ne faut pas confondre $\operatorname{Im} f$ et F : on a $\operatorname{Im} f \subseteq F$.

Définition 4.22 (Famille d'éléments d'un ensemble)
Soient I, E deux ensembles.

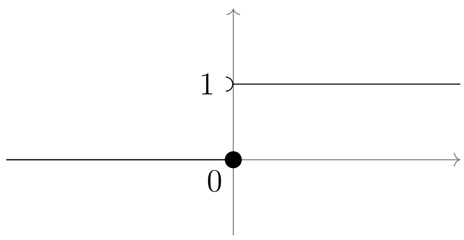
Une famille d'éléments de E indicée par I est un objet $(x_i)_{i \in I}$ où $\forall i \in I, \ \ x_i \in E$.

L'ensemble des familles d'éléments de E indicées par I est noté E^I.

Définition 4.23
Soient E un ensemble et $A \subseteq E$.

La fonction indicatrice de A est la fonction $$\mathbb{1}_A : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{0 ; 1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$$

Exemple 4.24
$\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}$:



Définition 4.25 (Image directe, image réciproque)
Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$.

Soient $A \subseteq E$ et $B \subseteq F$.

L'image directe de A par f est $f(A) = \{f(x)\}_{x \in A} \subseteq F$.

On a aussi $f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A, y = f(x)\}$.

En pratique, $f(A) \subseteq F$ et $\forall y \in F, \ \ y \in f(A) \iff \exists x \in A, \ \ f(x) = y$.

L'image réciproque de B par f est $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$.

En pratique, $f^{-1}(B) \subseteq E$ et $\forall x \in E, \ \ x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$.

Remarque 4.26
Mêmes notations.

On a $\operatorname{Im} f = f(E)$.

Soient $x \in E$ et $y \in F$. Si $y = f(x)$, on dit que y est l'image de x par f et que x est un antécédent de y par f.

$f(A)$ est l'ensemble des images des éléments de A.

$f^{-1}(B)$ est l'ensemble des antécédents des éléments de B.

Exemple 4.27
Considérons la fonction $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

On a

- $\operatorname{Im} \sin = \sin(\mathbb{R}) = [-1\ ;\ 1]$;
- $\sin(\mathbb{R}_+) = [-1\ ;\ 1]$;
- $\sin([0\ ;\ \pi]) = [0\ ;\ 1]$;
- $\sin^{-1}(\{0\}) = \{k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}} = \pi\mathbb{Z}$
  En effet, $\forall x \in \mathbb{R}, x \in \sin^{-1}(\{0\}) \iff \sin x \in \{0\}$
  $$\begin{aligned} &\iff \sin x = 0 \\ &\iff x \equiv 0\ [\pi] \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \ x = k\pi \end{aligned}$$
- $\sin^{-1}([2\ ;\ +\infty[) = \varnothing$.

Définition 4.28
Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$.

Soit $A \subseteq E$.

On appelle restriction de f à A la fonction $f\big|_A : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$

Définition 4.29
Soient E, E', F trois ensembles tels que $E \subseteq E'$.

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : E' \longrightarrow F$.

On dit que g est un prolongement de f à E' si on a $f = g\big|_E$

Définition 4.30 (Composition)
Soient E, F, G trois ensembles. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$.

On définit la composée de f et g : $g \circ f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$

Remarque 4.31
Soient E, F, G, H quatre ensembles. Soient $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow H$.

On a $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

On note $h \circ g \circ f$.

4.2.2 Injectivité, surjectivité, bijectivité

4.2.2.1 Injectivité

Définition 4.32
Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$.

On dit que f est injective ou que f est une injection si on a $\forall x, y \in E,\ \ f(x) = f(y) \implies x = y$.

Exemple 4.33
La fonction $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est injective car $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \ \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y \implies x = y$.

La fonction $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est pas injective car $\begin{cases} \sin 0 = \sin \pi \\ 0 \neq \pi \end{cases}$

Remarque 4.34
On a aussi f injective $\iff (\forall x, y \in E,\ \ f(x) = f(y) \iff x = y)$.

Proposition 4.35
Soient $I \subseteq \mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone.

Alors f est injective.

Démonstration 4.36
Soient $x, y \in I$ tels que $x \neq y$. Montrons que $f(x) \neq f(y)$.

Si f est strictement croissante et $x < y$ alors $f(x) < f(y)$ donc $f(x) \neq f(y)$.

Si f est strictement croissante et $x > y$ alors $f(x) > f(y)$ donc $f(x) \neq f(y)$.

Si f est strictement décroissante et $x < y$ alors $f(x) > f(y)$ donc $f(x) \neq f(y)$.

Si f est strictement décroissante et $x > y$ alors $f(x) < f(y)$ donc $f(x) \neq f(y)$.

Donc $f(x) \neq f(y)$.

Donc f injective. ■

Proposition 4.37 (Une composée d'injections est une injection)
Soient E, F, G trois ensembles. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux injections.

Alors $g \circ f$ est une injection.

Démonstration 4.38
Soient $x, y \in E$ tels que $g \circ f(x) = g \circ f(y)$.

Montrons que $x = y$.

Comme g injective, on a $f(x) = f(y)$.

Comme f injective, on a $x = y$.

Donc $g \circ f$ est une injection. ■

4.2.2.2 Surjectivité

Définition 4.39
Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$.

On dit que f est surjective ou que f est une surjection si on a $\operatorname{Im} f = F$, c'est à dire si $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ \ f(x) = y$.

Ces deux conditions sont équivalentes car on a $\operatorname{Im} f \subseteq F$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } \operatorname{Im} f = F &\iff F \subseteq \operatorname{Im} f \\ &\iff \forall y \in F,\ \ y \in \operatorname{Im} f \\ &\iff \forall y \in F,\ \ \exists x \in E,\ \ y = f(x) \end{aligned}$$

NB : quand on parle de la surjectivité d'une fonction, il faut que l'ensemble d'arrivée de la fonction soit clair.

Exemple 4.40
$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est pas surjective car $\operatorname{Im} \sin = [-1 ; 1] \neq \mathbb{R}$.

$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1 ; 1]$ est une surjection car $\sin(\mathbb{R}) = [-1 ; 1]$.

Proposition 4.41 (Une composée de surjections est une surjection)
Soient E, F, G trois ensembles. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux surjections.

Alors $g \circ f$ est une surjection de E dans G.

Démonstration 4.42
Montrons que $\forall z \in G, \quad \exists x \in E, \quad g \circ f(x) = z$.

Soit $z \in G$.

Comme g est une surjection, il existe $y \in F$ tel que $g(y) = z$.

Comme f est une surjection, il existe $x \in E$ tel que $g(x) = y$.

On a $z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x)$.

Donc $g \circ f$ est surjective. ■

4.2.2.3 Bijectivité

Définition 4.43
Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$.

On dit que f est bijective ou que f est une bijection de E dans F si elle est injective et surjective, c'est à dire si on a $\forall y \in F, \quad \exists! x \in E, \quad f(x) = y$.

Exemple 4.44
exp est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

ln est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

sin n'est pas une injection et donc pas une bijection.

Mais $\sin\big|_{[-\pi/2;\pi/2]}$ est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1 ; 1]$.

Remarque 4.45
Soit $f : E \longrightarrow F$ une injection avec E, F deux ensembles.

Alors f est une bijection de E dans $\operatorname{Im} f$.

Proposition 4.46 (Une composée de bijections est une bijection)
Soient E, F, G trois ensembles. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux bijections.

Alors $g \circ f : E \longrightarrow G$ est une bijection.

Démonstration 4.47
Comme g et f sont des injections, $g \circ f$ est une injection.

Comme g et f sont des surjections, $g \circ f$ est une surjection.

Donc $g \circ f$ est une bijection. ■

Définition/Proposition 4.48 (Bijection réciproque)
Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une bijection. On a $\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ f(x) = y$.

Pour tout $y \in F$, on note $f^{-1}(y)$ l'unique antécédent de y par f.

On obtient alors une fonction $f^{-1} : F \longrightarrow E$ appelée bijection réciproque de f.

La fonction $f^{-1} : F \longrightarrow E$ est une bijection et vérifie $\begin{cases} f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F \\ f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E \end{cases}$

Oubli 4.49
Soit E un ensemble.

On pose $\mathrm{id}_E : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ la « fonction identité » de E.

Remarque 4.50
Soit E un ensemble.

Ne pas confondre :
- si $A \subseteq E$, $f^{-1}(A)$ est l'image réciproque de A par f ;
- si $y \in E$ et f bijective, $f^{-1}(y)$ est l'antécédent de y par f.

Démonstration 4.51 (De la Définition/Proposition 4.48*)*

- Montrons que $f^{-1} : F \longrightarrow E$ est une bijection.

  On a f^{-1} bijection $\iff \forall x \in E,\ \exists! y \in F,\ f^{-1}(y) = x$

  $\iff \forall x \in E,\ \exists! y \in F,\ f(x) = y$

  ce qui est vrai
- Pour tout $y \in F$, $f^{-1}(y)$ est l'antécédent de y par f.

  Donc $\forall y \in F,\ f\left(f^{-1}(y)\right) = y$.

  Donc $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$.

  De même, pour tout $x \in E$, l'antécédent de $f(x)$ par f est x.

  Donc $\forall x \in E,\ f^{-1}(f(x)) = x$.

  Donc $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$. ∎

Exemple 4.52

- Déterminons la bijection réciproque de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array}$

  On a $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ f(x) = y \iff x + 1 = y$

  $\iff x = y - 1$

  Comme tout y admet un unique antécédent, f est bijective.

  De plus, on a obtenu $\forall y \in \mathbb{R},\ f^{-1}(y) = y - 1$.
- Déterminons la bijection réciproque de $\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^x \end{array}$

  On remarque $\forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \exp x = y \iff \ln(\exp x) = \ln y$

  $\iff x = \ln y$

  Ainsi, $\forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists! x \in \mathbb{R},\ \exp x = y$ donc exp est bijective.

  De plus, on a obtenu $\forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ \exp^{-1} = \ln y$.

Remarque 4.53

Soient $I, J \subseteq \mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow J$ bijective.

Le graphe de f est l'ensemble $\Gamma_f = \{(x, f(x))\}_{x \in I}$.

Autrement dit, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x,y) \in \Gamma_f \iff \begin{cases} x \in I \text{ et } y \in J \\ y = f(x) \end{cases}$

De même, $\forall (y,x) \in \mathbb{R}^2,\ (y,x) \in \Gamma_{f^{-1}} \iff \begin{cases} y \in J \text{ et } x \in I \\ x = f^{-1}(y) \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} y \in J \text{ et } x \in I \\ y = f(x) \end{cases}$$

$$\iff (x,y) \in \Gamma_f$$

Donc $\Gamma_{f^{-1}}$ est le symétrique de Γ_f par rapport à la droite $\Delta : y = x$.

En effet, la symétrie par rapport à Δ est la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (y, x) \end{array}$

Remarque 4.54
Soient E, F deux ensembles. Soit $B \subseteq F$. Soit $f : E \longrightarrow F$ bijective.

Alors $f^{-1}(B)$ peut désigner l'image réciproque de B par f ou l'image directe de B par f^{-1}.

En fait, les deux ensembles sont égaux.

Démonstration 4.55
Notons $X = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$ le premier ensemble et $Y = \left\{f^{-1}(y)\right\}_{y \in B}$ le second.

On a, $X \subseteq E$ et $Y \subseteq E$ et $\forall x \in E, x \in X \iff f(x) \in B$

$$\begin{aligned} &\iff \exists y \in B, \quad f(x) = y \\ &\iff \exists y \in B, \quad x = f^{-1}(y) \\ &\iff x \in Y \end{aligned}$$

Donc $X = Y$. ∎

Proposition 4.56
Soient E, F, G des ensembles. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$.

On a
(1) $g \circ f$ injection $\implies$ f injection ;
(2) $g \circ f$ surjection $\implies$ g surjection ;
(3) $g \circ f$ bijection $\implies$ g surjection et f injection.

Démonstration 4.57
(1) Supposons $g \circ f$ injection.
Soient $x, y \in E$. On suppose $f(x) = f(y)$.
Montrons que $x = y$.
On a $g(f(x)) = g(f(y))$.
Comme $g \circ f$ injective, on a $x = y$.
Donc f injective.
(2) Supposons $g \circ f$ surjection.
Montrons que g est surjective.
Soit $z \in G$. Montrons que $\exists y \in F, \quad g(y) = z$.
Comme $g \circ f$ surjective, il existe $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = z$.
On a $g(f(x)) = z$.
Donc $f(x)$ est un antécédent de z par g, donc g est surjective.
(3) Découle de (1) et (2). ∎

Oubli 4.58
Soient E, F deux ensembles. Soit $f : E \longrightarrow F$ bijective.

On a $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Démonstration 4.59
Soit $x \in E$.

On a $x = f^{-1}(f(x))$.

Donc $f(x) = \left(f^{-1}\right)^{-1}(x)$. ■

Proposition 4.60
Soient E, F, G trois ensembles. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ bijectives.

On a vu que $g \circ f : E \longrightarrow G$ est une bijection.

On a $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration 4.61
Soit $z \in G$.

$$\begin{aligned}\text{On a } z &= g\left(g^{-1}(z)\right) \\ &= g\left(f\left(f^{-1}\left(g^{-1}(x)\right)\right)\right) \\ &= g \circ f\left(f^{-1} \circ g^{-1}(x)\right)\end{aligned}$$

Donc $f^{-1} \circ g^{-1}(z) = (g \circ f)^{-1}(z)$. ■

4.3 Relations

4.3.1 Définition

Définition 4.62
Soit E un ensemble.

On appelle relation binaire sur E tout partie $\mathscr{R} \subseteq E \times E$.

On pose alors, $\forall (x, y) \in E^2, \ \ x\mathscr{R}y \iff (x, y) \in \mathscr{R}$.

Ainsi, une relation binaire est une proposition qui dépend de $(x, y) \in E^2$.

Exemple 4.63
Égalité : si $\mathscr{R} = \{(x,x)\}_{x\in E}$ (« diagonale » de E^2), alors on obtient $\forall (x,y) \in E^2, \;\; x\mathscr{R}y \iff x = y$.

Si $E = \mathbb{R}$ et $\mathscr{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x < y\right\}$ alors on obtient la relation binaire $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \;\; x\mathscr{R}y \iff x < y$.

Définition 4.64
Soient E un ensemble et $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E.

On dit que $\mathscr{R}$ est réflexive si $\forall x \in E, \;\; x\mathscr{R}x$.

On dit que $\mathscr{R}$ est transitive si $\forall x,y,z \in E, \;\; (x\mathscr{R}y \wedge y\mathscr{R}z) \implies x\mathscr{R}z$.

On dit que $\mathscr{R}$ est symétrique si $\forall x,y \in E, \;\; x\mathscr{R}y \iff y\mathscr{R}x$.

On dit que $\mathscr{R}$ est antisymétrique si $\forall x,y \in E, \;\; (x\mathscr{R}y \wedge y\mathscr{R}x) \implies x = y$.

Exemple 4.65
La relation $=$ sur un ensemble E fini est réflexive, transitive, symétrique et antisymétrique.

La relation $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ est réflexive, transitive et antisymétrique.

La relation $<$ sur $\mathbb{R}$ est transitive et antisymétrique.

Soit E un ensemble. La relation $\subseteq$ sur $\mathscr{P}(E)$ est réflexive, transitive et antisymétrique.

4.3.2 Relations d'équivalence

Définition 4.66
Soient E un ensemble et $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E.

On dit que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur E si elle est réflexive, transitive et symétrique.

Exemple 4.67
- Soit E un ensemble. La relation $=$ est une relation d'équivalence sur E.
- La relation $\leqslant$ n'est pas une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ (car elle n'est pas symétrique).
- Soit E un ensemble non-vide. La relation $\subseteq$ n'est pas une relation d'équivalence sur $\mathscr{P}(E)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit une relation binaire $\mathscr{R}$ sur $\mathbb{Z}$ en posant $\forall x,y \in \mathbb{Z}, \;\; x\mathscr{R}y \iff x \equiv y\,[n]$.
  $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
  En effet, $\mathscr{R}$ est
  - réflexive car $\forall x \in \mathbb{Z}, \;\; x \equiv x\,[n]$;
  - symétrique car $\forall x,y \in \mathbb{Z}, \;\; x \equiv y\,[n] \iff y \equiv x\,[n]$;

— transitive car si on a $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tels que $x \equiv y\,[n]$ et $y \equiv z\,[n]$ alors il existe $k, \ell \in \mathbb{Z}$ tels que $x = y + kn$ et $y = z + \ell n$ donc on a $x = z + (\ell + k)\, n$ où $\ell + k \in \mathbb{Z}$ donc $x \equiv z\,[n]$.

- Idem pour la relation de congruence sur $\mathbb{R}$ modulo un réel.
- Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$.
  On définit la relation binaire $\mathscr{R}$ sur E en posant $\forall x, y \in E,\ \ x\mathscr{R}y \iff f(x) = f(y)$.
  Alors $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur E.

Remarque 4.68
En général, les relations d'équivalence sont notées $\sim$, $=$, $\approx$, $\equiv$, ...

Définition/Proposition 4.69
Soient E un ensemble et $\sim$ une relation d'équivalence sur E.

On associe à tout élément sa classe d'équivalence $\tilde{x} = \{y \in E \mid y \sim x\}$.

On note ${}^{E}/_{\sim} = \{\tilde{x}\}_{x \in E}$ l'ensemble des classes d'équivalence de E.

On a $\forall x_1, x_2 \in E,\ \ \tilde{x_1} = \tilde{x_2} \iff x_1 \sim x_2$.

Démonstration 4.70

- Montrons que ${}^{E}/_{\sim}$ est une partition de E.
  - Chaque classe d'équivalence est non-vide. En effet, $\forall x \in E,\ \ x \in \tilde{x}$ car $\sim$ est réflexive.
  - On a $\displaystyle\bigcup_{\theta \in {}^{E}/_{\sim}} \theta = \bigcup_{x \in E} \tilde{x} = E$.

    En effet, d'une part $\forall x \in E,\ \ \tilde{x} \subseteq E$ donc $\displaystyle\bigcup_{x \in E} \tilde{x} \subseteq E$.

    Et d'autre part $\forall y \in E,\ \ y \in \tilde{y}$ donc $\forall y \in E, y \in \displaystyle\bigcup_{x \in E} \tilde{x}$.
  - Montrons que les éléments de ${}^{E}/_{\sim}$ sont deux à deux disjoints.
    Soient $\theta_1, \theta_2 \in {}^{E}/_{\sim}$.
    Supposons $\theta_1 \neq \theta_2$. Montrons que $\theta_1 \cap \theta_2 = \varnothing$.
    Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $\theta_1 = \tilde{x_1}$ et $\theta_2 = \tilde{x_2}$.
    Par l'absurde, supposons $\theta_1 \cap \theta_2 \neq \varnothing$.
    Soit $x \in \theta_1 \cap \theta_2$. On a $x \in \tilde{x_1} \cap \tilde{x_2}$.
    Donc $x \sim x_1$ et $x \sim x_2$.
    Montrons que $\theta_1 \subseteq \theta_2$.
    Soit $y \in \theta_1$. On a $y \sim x_1$.
    Or $x_1 \sim x$ et $x \sim x_2$.
    Donc $y \sim x_2$. Donc $y \in \theta_2$.
    On montre de même $\theta_2 \subseteq \theta_1$.
    Donc $\theta_1 = \theta_2$: contradiction.

  Finalement, ${}^{E}/_{\sim}$ est une partition de E.

- Montrons que $\tilde{x_1} = \tilde{x_2} \iff x_1 \sim x_2$.

$\boxed{\implies}$ Supposons $\tilde{x_1} = \tilde{x_2}$.
Comme $x_1 \in \tilde{x_1}$, on a $x_1 \in \tilde{x_2}$ donc $x_1 \sim x_2$.

$\boxed{\impliedby}$ Supposons $x_1 \sim x_2$.
Montrons que $\tilde{x_1} \subseteq \tilde{x_2}$. Soit $y \in \tilde{x_1}$.
On a $y \sim x_1$. Or $x_1 \sim x_2$.
Donc $y \sim x_2$. Donc $y \in \tilde{x_2}$. Donc $\tilde{x_1} \subseteq \tilde{x_2}$.
On montre de même $\tilde{x_2} \subseteq \tilde{x_1}$.
Donc $\tilde{x_1} = \tilde{x_2}$. ∎

Remarque 4.71
$\forall \theta \in {}^E/_\sim, \quad \forall x, y \in \theta, \quad x \sim y$

Remarque 4.72
Soient E un ensemble et $\sim$ une relation d'équivalence sur E.

On note $\pi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & {}^E/_\sim \\ x & \longmapsto & \tilde{x} \end{array}$ la surjection canonique de E vers ${}^E/_\sim$.

On a $\forall x, y \in E, \quad x \sim y \iff \pi(x) = \pi(y)$.

Démonstration 4.73
π est une surjection car tout $\theta \in {}^E/_\sim$ admet un antécédent : $\forall \theta \in {}^E/_\sim, \quad \exists x \in E, \quad \theta = \tilde{x}$.

Donc $\forall \theta \in {}^E/_\sim, \quad \exists x \in E, \quad \pi(x) = \theta$. ∎

4.3.3 Relations d'ordre

Définition 4.74
Soit E un ensemble.

On appelle relation d'ordre (partiel) tout relation binaire $\leqslant$ sur E qui est réflexive, transitive et antisymétrique.

On dit alors que $(E, \leqslant)$ est un ensemble (partiellement) ordonné.

Si la relation binaire $\leqslant$ est claire, on dit parfois que E est un ensemble ordonné.

Si, de plus, $\leqslant$ vérifie $\forall x, y \in E, \quad x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$ alors on dit que $\leqslant$ est une relation d'ordre total et que $(E, \leqslant)$ est totalement ordonné.

Exemple 4.75
Soit E un ensemble. La relation $=$ est une relation d'ordre partiel sur E.

$(\mathbb{R}, \leqslant)$ est un ensemble totalement ordonné.

Soit X un ensemble et $E = \mathscr{P}(X)$. $(E, \subseteq)$ est ordonné.

Posons $\forall a, b \in \mathbb{Z},\ \ a \mid b \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \ ak = b$.

La relation $\mid$ n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$ car elle n'est pas antisymétrique. En effet, $1 \mid -1$ et $-1 \mid 1$ mais $-1 \neq 1$.

En revanche, $\mid$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.

Définition 4.76
Soient $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné et $A \subseteq E$.

On dit que $M \in E$ est un majorant de A dans E si $\forall x \in A,\ \ x \leqslant M$.

On dit que $m \in E$ est un minorant de A dans E si $\forall x \in A,\ \ m \leqslant x$.

On dit que A est majorée (dans E) si elle admet un majorant (dans E).

On dit que A est minorée (dans E) si elle admet un minorant (dans E).

On dit que A est bornée (dans E) si elle admet un majorant et un minorant (dans E).

On dit que $M \in E$ est le plus grand élément de A ssi on a $M \in A$ et $\forall x \in A,\ \ x \leqslant M$.

On dit que $m \in E$ est le plus petit élément de A ssi on a $m \in A$ et $\forall x \in A,\ \ m \leqslant x$.

S'il existe, le plus grand élément de A est unique et est noté $\max A$.

S'il existe, le plus petit élément de A est unique et est noté $\min A$.

Démonstration 4.77
Montrons l'unicité du plus grand élément de A. Soient $M_1, M_2 \in E$.

$$\text{Supposons} \begin{cases} M_1 \in A & (1) \\ M_2 \in A & (2) \\ \forall x \in A, x \leqslant M_1 & (3) \\ \forall x \in A, x \leqslant M_2 & (4) \end{cases}$$

Montrons que $M_1 = M_2$.

Selon (1) et (4), $M_1 \leqslant M_2$ et selon (2) et (3), $M_2 \leqslant M_1$.

Donc $M_1 = M_2$ car $\leqslant$ est antisymétrique.

On montre de même l'unicité du plus petit élément. ∎

Exemple 4.78
La partie $\mathbb{R}_+$ n'est pas majorée dans $\mathbb{R}$. En revanche, elle est majorée dans $\overline{\mathbb{R}}$.

$+\infty$ est le plus grand élément de $\overline{\mathbb{R}}$.

0 est le plus grand élément de $]-\infty\ ; 0]$.

Soit X un ensemble. Dans $(\mathscr{P}(X), \subseteq)$, $\varnothing$ est le plus petit élément et X est le plus grand élément.

Dans $(\mathbb{N}, |)$, 1 est le plus petit élément et 0 est le plus grand élément.

Toute partie de $(\mathbb{N}, |)$ est bornée : minorée par 1 et majorée par 0.

La partie $\mathbb{N}^*$ admet 1 comme plus petit élément mais pas de plus grand élément.

Définition 4.79
Soient $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné et $A \subseteq E$.

Notons $\text{majorants}(A)$ l'ensemble des majorants de A : $\text{majorants}(A) = \{M \in E \mid \forall x \in A,\ \ x \leqslant M\}$ et $\text{minorants}(A)$ l'ensemble des minorants de A : $\text{minorants}(A) = \{m \in E \mid \forall x \in A,\ \ m \leqslant x\}$.

S'il existe, le plus petit élément de $\text{majorants}(A)$ est appelé la borne supérieure de A et est noté $\sup A$.

S'il existe, le plus grand élément de $\text{minorants}(A)$ est appelé la borne inférieure de A et est noté $\inf A$.

Exemple 4.80
Dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$:

- $\text{majorants}([0\ ; 1]) = [1\ ; +\infty[$ donc $\sup\ [0\ ; 1] = 1$.
- $\text{majorants}([0\ ; 1[) = [1\ ; +\infty[$ donc $\sup\ [0\ ; 1[= 1$.
- $\text{majorants}(\varnothing) = \mathbb{R}$ donc $\sup \varnothing$ n'existe pas.

Dans $\left(\overline{\mathbb{R}}, \leqslant\right)$:

- $\text{majorants}(\mathbb{R}) = \{+\infty\}$ donc $\sup \mathbb{R} = +\infty$.
- $\text{majorants}(\varnothing) = \overline{\mathbb{R}}$ donc $\sup \varnothing = -\infty$.

Dans $(\mathbb{N}, |)$:

- $\text{majorants}(\mathbb{N}^*) = \{0\}$ donc $\sup \mathbb{N}^* = 0$.
- Notons $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers. $\text{majorants}(\mathbb{P}) = \{0\}$ donc $\sup \mathbb{P} = 0$.

Proposition 4.81
Soient $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné et $A \subseteq E$.

(1) *Si A admet un plus grand élément, alors A admet une borne supérieure qui est son plus grand élément :* $\sup A = \max A$.
(2) *Pour que A admette une borne supérieure, il faut que A soit majorée.*

Démonstration 4.82

(1) Supposons que A admet un plus grand élément M : $\begin{cases} M \in A \\ \forall x \in A, \quad x \leqslant M \end{cases}$

Alors M majore A donc $M \in \text{majorants}(A)$.
De plus, $\forall M' \in \text{majorants}(A)\,, \quad M \leqslant M'$ car $M \in A$.
Donc M est le plus petit élément de $\text{majorants}(A)$.
Donc $M = \sup A$.

(2) Clair. ■

Proposition 4.83
Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné. Soient $A \subseteq E$ et $y \in E$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) y est la borne supérieure de A

(2) $\forall z \in E, \quad z$ majore $A \iff y \leqslant z$

Démonstration 4.84
Montrons que (1) $\iff$ (2).

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $y = \sup A$. Soit $z \in E$.
Montrons que z majore $A \iff y \leqslant z$.

- $\boxed{\Longrightarrow}$ Claire car y est le plus petit majorant de A.
- $\boxed{\Longleftarrow}$ Si $y \leqslant z$ alors $\forall x \in A, \quad x \leqslant y \leqslant z$ donc z majore A.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons (2).
Comme $y \leqslant y$, y majore A (selon $\boxed{\Longleftarrow}$).
De plus, tout majorant $z \in A$ vérifie $y \leqslant z$ (selon $\boxed{\Longrightarrow}$).
Donc $y = \sup A$. ■

4.4 Ensemble ordonné $(\mathbb{N}, \leqslant)$

Théorème 4.85
Toute partie non-vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Démonstration 4.86
⋆⋆ ADMIS ⋆⋆ ■

Proposition 4.87
Toute partie finie non-vide de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

Remarque 4.88
Plus généralement, tout ensemble totalement ordonné fini admet un plus petit élément et un plus grand élément.

Théorème 4.89 (Démonstration par récurrence)
Soit $P(n)$ une proposition dépendant d'un entier $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Supposons } \begin{cases} P(0) \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad P(n) \implies P(n+1) \end{cases}$$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(n)$.

Démonstration 4.90
On pose $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \neg P(n)\}$. Montrons que $A = \varnothing$.

Supposons par l'absurde $A \neq \varnothing$.

Posons $n_0 = \min A$. n_0 existe selon le Théorème 4.85. On a $n_0 \neq 0$ car $0 \notin A$ car $P(0)$ est vraie.

Donc $n_0 \geqslant 1$.

On a $n_0 - 1 \notin A$ car n_0 minore A.

Donc $P(n_0 - 1)$ est vraie. Donc $P(n_0)$ est vraie : contradiction.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(n)$. ■

Corollaire 4.91 (Démonstration par récurrence forte)
Soit $P(n)$ une proposition dépendant de $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Supposons } \begin{cases} P(0) \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (P(0) \wedge P(1) \wedge \ldots \wedge P(n)) \implies P(n+1) \end{cases}$$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(n)$.

Démonstration 4.92
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Q(n)$ la proposition « $P(0) \wedge P(1) \wedge \ldots \wedge P(n)$ », c'est à dire « $\forall k \in [\![0\,;n]\!], \quad P(k)$ ».

On a $Q(0)$ car $P(0)$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad Q(n) \implies P(n+1)$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad Q(n) \implies (Q(n) \wedge P(n+1))$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad Q(n) \implies Q(n+1)$.

D'où selon le Théorème 4.89 : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad Q(n)$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(n)$. ■

4.5 Ensemble ordonné $(\mathbb{R}, \leqslant)$

Rappel 4.93
On appelle intervalle de $\mathbb{R}$ toute partie I de $\mathbb{R}$ telle que $\forall x, y \in I,\ \ \forall z \in \mathbb{R},\ \ x \leqslant z \leqslant y \implies z \in I$.

Théorème 4.94 (Caractérisation de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$)
Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. Soit $y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Alors } y = \sup A \iff (S) : \begin{cases} \forall x \in A,\ \ y \geqslant x & (1) \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \exists x \in A,\ \ y - \varepsilon \leqslant x & (2) \end{cases}$$

Démonstration 4.95

$\boxed{\implies}$ Supposons $y = \sup A$.
Alors y majore A donc $\forall x \in A,\ \ x \leqslant y$.
De plus, on a $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \ y - \varepsilon < y$.
Donc $y - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A.
Donc $\exists x \in A,\ \ y - \varepsilon \leqslant x$.

$\boxed{\impliedby}$ Supposons (S).

- y majore A d'après (1).
- Montrons que y est le plus petit majorant de A.
  Soit z un majorant de A. Montrons que $z \geqslant y$.
  Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
  Soit $x \in A$ tel que $y - \varepsilon \leqslant x$.
  On a $y - \varepsilon \leqslant x \leqslant z$.
  Donc $y - \varepsilon \leqslant z$
  Donc $y \leqslant z$. En effet, supposons par l'absurde $z < y$.
  Posons $\varepsilon = \dfrac{y - z}{2} \in \mathbb{R}_+^*$.
  On a $y - \varepsilon \leqslant z$.
  Donc $y - \dfrac{y - z}{2} < z$.
  Donc $\dfrac{y}{2} < \dfrac{z}{2}$: contradiction.

Donc on a $y = \sup A$. ∎

Théorème 4.96 (Caractérisation de la borne inférieure dans $\mathbb{R}$)
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

$$\text{On a } y = \inf A \iff \begin{cases} \forall x \in A,\ \ y \leqslant x \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \exists x \in A,\ \ x \leqslant y + \varepsilon \end{cases}$$

Démonstration 4.97
Idem. ■

Théorème 4.98
Toute partie non-vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Toute partie non-vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Démonstration 4.99
⋆⋆ ADMIS ⋆⋆ ■

4.6 Fonctions à valeurs dans un ensemble ordonné

Définition 4.100
Soient E un ensemble, $(F, \leqslant)$ un ensemble ordonné et $f : E \longrightarrow F$.

On appelle majorant de f tout majorant de $\operatorname{Im} f$.

On appelle minorant de f tout minorant de $\operatorname{Im} f$.

$$\begin{aligned}\text{Ainsi, } M \text{ majore } f &\iff \forall y \in \operatorname{Im} f, \quad y \leqslant M \\ &\iff \forall x \in E, \quad f(x) \leqslant M\end{aligned}$$

On appelle borne supérieure de f la borne supérieure de $\operatorname{Im} f$ si elle existe.

On appelle borne inférieure de f la borne inférieure de $\operatorname{Im} f$ si elle existe.

Remarque 4.101
$\sup f = \sup\limits_{x \in E} f(x)$

Définition 4.102
Soient $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné, I un ensemble et $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E.

On appelle majorant de $(x_i)_{i \in I}$ tout majorant de $\{x_i\}_{i \in I}$.

On appelle minorant de $(x_i)_{i \in I}$ tout minorant de $\{x_i\}_{i \in I}$.

On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est majorée si on a $\exists M \in E, \quad \forall i \in I, \quad x_i \leqslant M$.

On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est minorée si on a $\exists m \in E, \quad \forall i \in I, \quad m \leqslant x_i$.

La borne supérieure de $(x_i)_{i \in I}$ est le plus petit majorant de la famille.

La borne inférieure de $(x_i)_{i \in I}$ est le plus grand minorant de la famille.

Elles sont notées $\sup\limits_{i \in I} x_i$ et $\inf\limits_{i \in I} x_i$.

Chapitre 5

Suites

Sommaire

5.1 Suites

5.1.1 Cadre

On appelle suite réelle toute famille de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ indicée par $\mathbb{N}$.

On appelle suite complexe toute famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ indicée par $\mathbb{N}$.

On note aussi abusivement $(u_n)_n$ ces suites.

Plus généralement, on peut appeler suite toute famille de la forme $(u_n)_{n\in[\![n_0;+\infty[\![}$ où $n_0 \in \mathbb{Z}$.

5.1.2 Définitions

Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On dit que u est constante si $\exists c \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = c$.

On dit que u est stationnaire (ou « constante à partir d'un certain rang ») si $\exists c \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in [\![N\ ;+\infty [\![,\ u_n = c$.

On dit que u est

- croissante si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1}$;
- décroissante si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$;
- strictement croissante si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < u_{n+1}$;
- strictement décroissante si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$;
- monotone si elle est croissante ou décroissante ;
- strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

On dit que u est

- majorée si $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$;
- minorée si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n$;
- bornée si elle est majorée et minorée, c'est à dire si $\exists K \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant K$.

On dit que u est inférieure ou égale à v et on note $u \leqslant v$ si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$.

On dit que u est positive (ou « à termes positifs ») et on note $u \geqslant 0$ si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$.

On note $u+v$ la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = u_n+v_n$. Autrement dit, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}+(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On pose de même $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \times (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On pose enfin, si $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda\,(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 5.1
Supposons $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n$ et $v_n = (-1)^{n+1}$.

On a $u + v = (0)_n$ et $uv = (-1)_n$.

5.1.3 Suite définie en itérant une fonction

Proposition 5.2
Soient $I \subseteq \mathbb{R}$, $x \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

On suppose $f(I) \subseteq I$ (I est stable par f).

Alors il existe une unique suite $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\begin{cases} u_0 = x \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Démonstration 5.3
$\boxed{\text{unicité}}$

Soient $(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $\begin{cases} u_0 = v_0 = x \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases} \end{cases}$

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n$ par récurrence sur n.

On a $u_0 = x = v_0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = v_n$. On a $f(u_n) = f(v_n)$ donc $u_{n+1} = v_{n+1}$.

$\boxed{\text{existence}}$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{\circ n} = \begin{cases} \mathrm{id}_E & \text{si } n = 0 \\ \underbrace{f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ facteurs}} & \text{sinon} \end{cases}$

On remarque que la suite $\left(f^{\circ n}(x)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ convient. ■

Exemple 5.4
Avec $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^2 \end{array}$ et $x = 2$, on a $u_0 = 2$, $u_1 = 4$, $u_2 = 16$, $u_3 = 256$, ...

Avec $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \ln t \end{array}$ et $x = \mathrm{e}$, on a $u_0 = \mathrm{e}$, $u_1 = 1$, $u_2 = 0$, $u_3 =$ problème car $\mathbb{R}_+^*$ n'est pas stable par f.

5.1.4 Suites particulières

Définition 5.5
On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique si on a $\exists r \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r$.

Un tel réel r est unique et est appelé raison de la suite.

Proposition 5.6
Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nr$.

Définition 5.7
On dit que $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une suite géométrique si on a $\exists q \in \mathbb{R},\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = qu_n$.

Un tel réel q est unique si $v_0 \neq 0$ et est alors appelé raison de la suite.

Proposition 5.8
Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$.

On a $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = u_0 \times q^n$.

Définition 5.9
On dit que $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique si on a $\exists a, b \in \mathbb{R},\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = au_n+b$.

Proposition 5.10
Soit $(u_n)_n$ une suite arithmético-géométrique. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = au_n + b$.

Si $a = 1$ alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = u_0 + nb$.

Supposons désormais $a \neq 1$. Alors la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax+b \end{array}$ admet un unique point fixe $\lambda \in \mathbb{R}$: $\exists! \lambda \in \mathbb{R},\ \ f(\lambda) = \lambda$ et la suite $(u_n - \lambda)_n$ est une suite géométrique.

Démonstration 5.11
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} x \text{ point fixe de } f &\iff f(x) = x \\ &\iff ax + b = x \\ &\iff x = \frac{b}{1-a}. \end{aligned}$$

Donc $\lambda = \dfrac{b}{1-a}$ est l'unique point fixe de f.

De plus, on a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} - \lambda &= au_n + b - \frac{b}{1-a} \\ &= au_n + b\left(1 - \frac{1}{1-a}\right) \\ &= au_n + b\frac{-a}{1-a} \\ &= a\left(u_n - \frac{b}{1-a}\right) \\ &= a\left(u_n - \lambda\right). \end{aligned}$$

Donc $(u_n - \lambda)_n$ est une suite géométrique de raison a. ∎

Exemple 5.12
Soit $(u_n)_n$ définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 5u_n + 3 \end{cases}$.

Calculons u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Résolvons l'équation $x = 5x + 3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: $x = -\dfrac{3}{4}$.

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} + \frac{3}{4} &= 5u_n + 3 + \frac{3}{4} \\ &= 5u_n + \frac{15}{4} \\ &= 5\left(u_n + \frac{3}{4}\right). \end{aligned}$$

Donc $\left(u_n + \dfrac{3}{4}\right)_n$ est géométrique de raison 5.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n + \dfrac{3}{4} = \left(u_0 + \dfrac{3}{4}\right) \times 5^n$.

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{11}{4} \times 5^n - \dfrac{3}{4}$.

5.2 Convergence

5.2.1 Définition

Définition/Proposition 5.13
Soient $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

On dit que $(u_n)_n$ converge (ou tend) vers ℓ si on a :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in [\![N\,;+\infty [\![, \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Un tel réel ℓ est unique et est appelé la limite de $(u_n)_n$. Il est noté :

$$\ell = \lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \lim_n u_n \quad \text{ou} \quad u_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \ell.$$

On dit enfin que $(u_n)_n$ est convergente. Sinon, on dit que $(u_n)_n$ est divergente.

Remarque 5.14
La notation « $\lim\limits_{n} u_n = \ell$ » signifie « la limite de $(u_n)_n$ existe et vaut ℓ ». Sa négation n'est donc pas $\lim\limits_{n} u_n \neq \ell$ mais

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \forall N \in \mathbb{N},\ \ \exists n \in [\![N\ ;+\infty [\![\,,\ \ |u_n - \ell| > \varepsilon.$$

Démonstration 5.15
Montrons que $(u_n)_n$ admet au plus une limite.

Soient $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ tels que $\begin{cases} \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \in [\![N\ ;+\infty [\![\,,\ \ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \in [\![N\ ;+\infty [\![\,,\ \ |u_n - \ell'| \leqslant \varepsilon \end{cases}$.

Supposons $\ell \neq \ell'$. Posons $\varepsilon = \dfrac{|\ell - \ell'|}{3}$. On a $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_1,\ \ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Soit $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_2,\ \ |u_n - \ell'| \leqslant \varepsilon$.

Posons $N = \max\{N_1\ ;N_2\}$. On a $\begin{cases} |u_N - \ell| \leqslant \varepsilon \\ |u_N - \ell'| \leqslant \varepsilon \end{cases}$.

Donc on a :

$$\begin{aligned} |\ell - \ell'| &\leqslant |\ell - u_N| + |u_N - \ell'| \\ &\leqslant \varepsilon + \varepsilon \\ &= 2\varepsilon \\ &= \frac{2}{3}|\ell - \ell'| \quad \text{contradiction.} \end{aligned}$$

Donc par l'absurde, $\ell = \ell'$ donc la limite est unique. ∎

Exemple 5.16
Montrons que $\lim\limits_{n} \dfrac{1}{n} = 0$, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \in [\![N\ ;+\infty [\![\,,\ \ \left|\frac{1}{n} - 0\right| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

On a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \left|\frac{1}{n}\right| \leqslant \varepsilon &\iff n \geqslant \frac{1}{\varepsilon} \\ &\Longleftarrow n \geqslant \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1. \end{aligned}$$

Donc l'entier $\left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ convient (donc N existe).

Remarque 5.17
Pour une suite, on a :

$$\text{constante} \implies \text{stationnaire} \implies \text{convergente.}$$

Remarque 5.18
Soient $(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ coïncident à partir d'un certain rang, c'est-à-dire si on a :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \ \ \forall n \geqslant N, \ \ u_n = v_n$$

alors on a :

$$(u_n)_n \text{ convergente} \iff (v_n)_n \text{ convergente}$$

et les limites sont égales.

Proposition 5.19
Soient $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

Alors on a :

$$\lim_n u_n = \ell \iff \lim_n (u_n - \ell) = 0.$$

Démonstration 5.20
On a :

$$\begin{aligned}
\lim_n u_n = \ell &\iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \ \forall n \geqslant N, \ \ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \\
&\iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \ \forall n \geqslant N, \ \ |(u_n - \ell) - 0| \leqslant \varepsilon \\
&\iff \lim_n (u_n - \ell) = 0
\end{aligned}$$

■

5.2.2 Convergence et ordre

Proposition 5.21
Toute suite convergente est bornée.

Démonstration 5.22
Soit $(u_n)_n$ une suite convergente. On note ℓ sa limite.

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, \ \ |u_n - \ell| \leqslant 1$.

On a :

$$\begin{aligned} \forall n \geqslant N, \ \ |u_n| &= |u_n - \ell + \ell| \\ &\leqslant |u_n - \ell| + |\ell| \\ &\leqslant 1 + |\ell| \,. \end{aligned}$$

Posons $M = \max\{|u_0| \ ; \ldots ; |u_{N-1}| \ ; 1 + |\ell|\}$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}, \ \ |u_n| \leqslant M$.

Donc $(u_n)_n$ est bornée. ∎

Proposition 5.23
Soit $(u_n)_n$ une suite convergente de limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Tout minorant strict de ℓ minore strictement $(u_n)_n$ à partir d'un certain rang.

Démonstration 5.24
Soit $m \in \mathbb{R}$ tel que $m < \ell$.

On a :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \ \ \forall n \geqslant N, \ \ u_n > m.$$

Posons $\varepsilon = \dfrac{\ell - m}{2}$. On a $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, \ \ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

On a :

$$\forall n \geqslant N, \ \ u_n - \ell \geqslant -\varepsilon$$

$$\forall n \geqslant N, \ \ u_n - \ell \geqslant \frac{m - \ell}{2}$$

$$\forall n \geqslant N, \ \ u_n \geqslant \frac{m + \ell}{2} > m.$$

Donc N convient. ∎

Exemple 5.25
Soient $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}_+^*$.

On a $0 < \ell$ donc $\exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geqslant N,\ \ 0 < u_n$.

En particulier, $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_n$ est bien définie à partir d'un certain rang.

Proposition 5.26
Soit $(u_n)_n$ une suite convergente de limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Tout majorant strict de ℓ majore strictement $(u_n)_n$ à partir d'un certain rang.

Démonstration 5.27
Idem. ∎

Remarque 5.28
On ne peut rien dire d'analogue concernant les minorants ou majorants larges de la limite. Par exemple, 0 majore 0 mais ne majore pas $\left(\dfrac{1}{n}\right)_n$ à partir d'un certain rang.

Proposition 5.29 (Passage à la limite dans une inégalité large)
Soit $(u_n)_n$ une suite convergente de limite $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \leqslant \lambda$ alors $\ell \leqslant \lambda$.

Si $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \geqslant \lambda$ alors $\ell \geqslant \lambda$.

Démonstration 5.30
Supposons $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \leqslant \lambda$. Montrons que $\ell \leqslant \lambda$.

Supposons $\lambda < \ell$.

Alors $\exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geqslant N,\ \ u_n > \ell$: contradiction.

Donc $\ell \leqslant \lambda$ par l'absurde.

On montre de même que si $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \geqslant \lambda$ alors $\ell \geqslant \lambda$. ∎

Remarque 5.31
C'est faux avec des inégalités strictes. Par exemple, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \frac{1}{n}$ mais on n'a pas $0 < \lim_n \frac{1}{n}$.

Théorème 5.32 (Théorème des gendarmes)
Soient $(u_n)_n, (v_n)_n, (w_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On suppose que :

- *les suites* $(u_n)_n$ *et* $(w_n)_n$ *sont convergentes et de même limite* $\ell \in \mathbb{R}$ *;*
- *l'on a* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

Alors $(v_n)_n$ *est convergente de limite* ℓ.

Démonstration 5.33
Montrons que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |v_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_1,\ \ell - \varepsilon \leqslant u_n$.

Soit $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_2,\ \ell + \varepsilon \geqslant w_n$.

Posons $N = \max\{N_1 ; N_2\}$.

On a :
$$\forall n \geqslant N,\ \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant w_n \leqslant \ell + \varepsilon.$$

D'où $\lim_n v_n = \ell$. ∎

Exemple 5.34

On a vu $\lim_n \frac{1}{n} = 0$. On admet $\lim_n -\frac{1}{n} = 0$.

Montrons que $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_n$ est convergente et tend vers 0.

On a :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\frac{1}{n} \leqslant \frac{(-1)^n}{n} \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \lim_n -\frac{1}{n} = \lim_n \frac{1}{n} = 0.$$

Donc selon le théorème des gendarmes, $\lim_n \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Corollaire 5.35
Soient $(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. *Soit* $\ell \in \mathbb{R}$.

On suppose $\begin{cases} \lim\limits_n v_n = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ |u_n - \ell| \leqslant v_n \end{cases}$

Alors $(u_n)_n$ *est convergente et* $\lim\limits_n u_n = \ell$.

Démonstration 5.36
On a $\forall n \in \mathbb{N},\ \ -v_n \leqslant u_n - \ell \leqslant v_n$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \ell - v_n \leqslant u_n \leqslant \ell + v_n$.

Or $\lim\limits_n (\ell - v_n) = \lim\limits_n (\ell + v_n) = \ell$.

Donc $\lim\limits_n u_n = \ell$ d'après le théorème des gendarmes. ■

Notation 5.37
Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

La notation $\lim\limits_n u_n = \ell^+$ signifie que $(u_n)_n$ converge vers ℓ par valeurs supérieures, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \lim\limits_n u_n = \ell \\ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geqslant N,\ \ \ell < u_n \end{cases}$$

De même, la notation $\lim\limits_n u_n = \ell^-$ signifie que $(u_n)_n$ converge vers ℓ par valeurs inférieures, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \lim\limits_n u_n = \ell \\ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geqslant N,\ \ \ell > u_n \end{cases}$$

5.2.3 Opérations sur les limites

Proposition 5.38
Soient $(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. *Soient* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. *Soient* $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$.

On suppose $\lim\limits_n u_n = \ell$ *et* $\lim\limits_n v_n = \ell'$.

On a alors :

(1) $\lim\limits_n (u_n + v_n) = \ell + \ell'$

(2) $\lim\limits_n (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda\ell + \mu\ell'$

(3) $\lim\limits_n u_n v_n = \ell\ell'$

Démonstration 5.39 (1)
Montrons que $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geqslant N,\ \ |u_n + v_n - \ell - \ell'| \leqslant \varepsilon$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_1,\ \ |u_n - \ell| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Soit $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_2,\ \ |v_n - \ell'| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

On pose $N = \max\{N_1\ ;\ N_2\}$.

On a :

$$\begin{aligned}\forall n \geqslant N,\ \ |u_n + v_n - \ell - \ell'| &\leqslant |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

■

Démonstration 5.40 (2)
Montrons que $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geqslant N,\ \ |\lambda u_n + \mu v_n - \lambda\ell - \mu\ell'| \leqslant \varepsilon$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_1,\ \ |u_n - \ell| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2\,(|\lambda| + 1)}$.

Soit $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_2,\ \ |v_n - \ell'| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2\,(|\mu| + 1)}$.

On pose $N = \max\{N_1\ ;\ N_2\}$.

On a :

$$\begin{aligned}\forall n \geqslant N,\ \ |\lambda u_n + \mu v_n - \lambda\ell - \mu\ell'| &= |\lambda\,(u_n - \ell) + \mu\,(v_n - \ell')| \\ &\leqslant |\lambda|\,|u_n - \ell| + |\mu|\,|v_n - \ell'| \\ &\leqslant |\lambda|\,\frac{\varepsilon}{2\,(|\lambda| + 1)} + |\mu|\,\frac{\varepsilon}{2\,(|\mu| + 1)} \\ &= \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{|\lambda|}{|\lambda| + 1} + \frac{|\mu|}{|\mu| + 1}\right) \\ &\leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

■

Démonstration 5.41 (3)
Montrons que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \;\; \exists N \in \mathbb{N}, \;\; \forall n \geqslant N, \;\; |u_n v_n - \ell\ell'| \leqslant \varepsilon$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

On remarque :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \;\; |u_n v_n - \ell\ell'| &= |u_n v_n - u_n\ell' + u_n\ell' - \ell\ell'| \\ &\leqslant |u_n v_n - u_n\ell'| + |u_n\ell' - \ell\ell'| \\ &= |u_n|\,|v_n - \ell'| + |u_n - \ell|\,|\ell'|\,. \end{aligned}$$

Comme $(u_n)_n$ est convergente, elle est bornée. Soit $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \;\; |u_n| \leqslant M$.

Soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_1, \;\; |u_n - \ell| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2\left(|\ell'| + 1\right)}$.

Soit $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_2, \;\; |v_n - \ell'| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2M}$.

On pose $N = \max\{N_1 \,;\, N_2\}$.

On a :

$$\begin{aligned} \forall n \geqslant N, \;\; |u_n v_n - \ell\ell'| &\leqslant |u_n|\,|v_n - \ell'| + |u_n - \ell|\,|\ell'| \\ &\leqslant M\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2\left(|\ell'| + 1\right)}|\ell'| \\ &\leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Proposition 5.42
Soient $(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On suppose $\lim\limits_n u_n = 0$ *et* $(v_n)_n$ *bornée.*

Alors $\lim\limits_n u_n v_n = 0$.

Démonstration 5.43
Montrons que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \;\; \exists N \in \mathbb{N}, \;\; \forall n \geqslant N, \;\; |u_n v_n| \leqslant \varepsilon$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \;\; |v_n| \leqslant M$.

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, \;\; |u_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{M}$.

On a $\forall n \geqslant N, \;\; |u_n v_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon$.

Donc N convient.

Donc $\lim\limits_n u_n v_n = 0$. ■

Proposition 5.44
Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On suppose que $\lim_n u_n = \ell \in \mathbb{R}^*$.

Alors $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_n$ *est « bien définie à partir d'un certain rang ».*

C'est-à-dire : $\exists N_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geqslant N_0,\ \ u_n \neq 0$.

De plus, $\lim_n \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{\ell}$.

Démonstration 5.45
Supposons $\ell > 0$.

Comme 0 minore strictement $\lim_n u_n$, 0 minore strictement $(u_n)_n$ à partir d'un certain rang $N_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geqslant N_0,\ \ 0 < u_n$.

Montrons que $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n \geqslant N_0}$ converge vers $\dfrac{1}{\ell}$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

On a $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \left|\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{\ell}\right| = \dfrac{|\ell - u_n|}{u_n \ell} = \dfrac{1}{|\ell|}\dfrac{1}{|u_n|}|\ell - u_n|$.

On a $\dfrac{\ell}{2} < \lim_n u_n$.

Donc il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_1,\ \ \dfrac{\ell}{2} < u_n$.

Soit $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_2,\ \ |u_n - \ell| \leqslant \dfrac{\varepsilon \ell^2}{2}$.

On pose $N = \max\{N_1 \ ; N_2\}$.

On a $\forall n \geqslant N,\ \ \left|\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{\ell}\right| \leqslant \dfrac{1}{\ell}\dfrac{2}{\ell}\dfrac{\varepsilon \ell^2}{2} = \varepsilon$.

Donc $\lim_n \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{\ell}$.

De même si $\ell < 0$. ■

Corollaire 5.46
Soient deux suites convergentes $(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *de limites respectives* $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$.

Si $\ell' \neq 0$ *alors* $\lim_n \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\ell}{\ell'}$.

Démonstration 5.47
On a $\lim_n v_n = \ell' \neq 0$ donc $\lim_n \frac{1}{v_n} = \frac{1}{\ell'}$.

Ainsi, on a $\lim_n \frac{u_n}{v_n} = \frac{\ell}{\ell'}$ par produit. ∎

5.3 Limites infinies

Définition 5.48
Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On dit que $(u_n)_n$ tend (ou diverge) vers $+\infty$ si on a

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \ \forall n \geqslant N, \ \ u_n \geqslant \alpha.$$

On note alors $\lim_n u_n = +\infty$ et on dit que $+\infty$ est la limite de $(u_n)_n$.

De même, on dit que $(u_n)_n$ diverge (ou tend) vers $-\infty$ si on a

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \ \forall n \geqslant N, \ \ u_n \leqslant \alpha.$$

Remarque 5.49
Une suite convergente est une suite admettant une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$.

Une suite divergente est une suite admettant une limite infinie $\ell \in \{-\infty \,;\, +\infty\}$ ou n'admettant pas de limite.

Exemple 5.50
On a les limites suivantes :

- $\lim_n n = +\infty$
- $\lim_n n! = +\infty$
- $\lim_n \mathrm{e}^n = +\infty$
- $\lim_n \ln n = +\infty$

Démonstration 5.51
Montrons que $\lim_n \ln n = +\infty$, c'est-à-dire

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geqslant N,\ \ \ln n \geqslant \alpha.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

On a

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \ln n \geqslant \alpha &\iff n \geqslant \mathrm{e}^{\alpha} \\ &\impliedby n \geqslant \lfloor \mathrm{e}^{\alpha} \rfloor + 1 \end{aligned}$$

Donc l'entier $N = \lfloor \mathrm{e}^{\alpha} \rfloor + 1$ convient. ■

Proposition 5.52
Toute suite qui tend vers $+\infty$ est minorée.

Toute suite qui tend vers $-\infty$ est majorée.

Démonstration 5.53
Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de limite $+\infty$.

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ \ 0 \leqslant u_n$.

Posons $m = \min\{u_0\ ;\ \ldots\ ;\ u_{N-1}\ ;\ 0\}$.

On a $\forall n \in \mathbb{N},\ \ m \leqslant u_n$.

Donc $(u_n)_n$ est minorée.

Idem si $\lim_n u_n = -\infty$. ■

Proposition 5.54
Soient $(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Si $\begin{cases} \lim_n u_n = +\infty \\ (v_n)_n \ \ \textit{minorée} \end{cases}$ *alors* $\lim_n (u_n + v_n) = +\infty$.

Si $\begin{cases} \lim_n u_n = -\infty \\ (v_n)_n \ \ \textit{majorée} \end{cases}$ *alors* $\lim_n (u_n + v_n) = -\infty$.

Démonstration 5.55
Supposons $\lim_n u_n = +\infty$ et $(v_n)_n$ minorée.

Soit $m \in \mathbb{R}$ un minorant de $(v_n)_n$: $\forall n \in \mathbb{N},\ \ m \leqslant v_n$.

Montrons que $\lim_n (u_n + v_n) = +\infty$, c'est-à-dire

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geqslant N,\ \ \alpha \leqslant u_n + v_n.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ \ u_n \geqslant \alpha - v_n$.

On a $\forall n \geqslant N,\ \ u_n + v_n \geqslant \alpha - m + m = \alpha$.

Donc N convient.

Donc $\lim_n (u_n + v_n) = +\infty$.

Idem pour l'autre implication. ■

5.4 Suites extraites

Définition 5.56
Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On appelle suite extraite de $(u_n)_n$ toute suite de la forme $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante.

Remarque 5.57
Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante.

On a $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \varphi(n) \geqslant n$.

Démonstration 5.58
Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

On a $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ donc $\varphi(0) \geqslant 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(n) \geqslant n$.

On a $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ car φ strictement croissante.

Donc $\varphi(n+1) \geqslant \varphi(n) + 1 \geqslant n + 1$.

Ainsi, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \varphi(n) \geqslant n$. ■

Exemple 5.59
Prenons $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = (-1)^n$.

Si $\varphi : n \longmapsto 2n$ alors on obtient la suite extraite $(u_{2n})_n = \left((-1)^{2n}\right)_n = (1)_n$.

Si $\varphi : n \longmapsto 2n+1$ alors on obtient la suite extraite $(u_{2n+1})_n = \left((-1)^{2n+1}\right)_n = (-1)_n$.

Prenons maintenant $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ u_n = \dfrac{1}{n}$.

Si $\varphi : n \longmapsto 2^n$ alors $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\geqslant 1} = \left(\dfrac{1}{2^n}\right)_{n\geqslant 1}$.

Si $\varphi : n \longmapsto n^2$ alors $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\geqslant 1} = \left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$.

Théorème 5.60
Soient $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

On suppose $\lim\limits_{n} u_n = \ell$.

Alors toute suite extraite de $(u_n)_n$ tend vers ℓ.

Démonstration 5.61
Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante.

Montrons que $\lim\limits_{n} u_{\varphi(n)} = \ell$.

Supposons $\ell \in \mathbb{R}$.

Montrons que
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geqslant N,\ \ \left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geqslant N,\ \ |u_k - \ell| \leqslant \varepsilon$.

On remarque $\forall n \geqslant N,\ \ \left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$ car $\varphi(n) \geqslant n \geqslant N$.

Donc N convient.

Idem si $\ell = \pm\infty$. ■

Exemple 5.62 (Exemple d'application)
Montrons que $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.

Par l'absurde, supposons que la suite admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Alors les suites extraites $\left((-1)^{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left((-1)^{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent aussi vers ℓ.

Or, les limites respectives de ces suites sont 1 et -1.

Donc par unicité de la limite, $\ell = 1 = -1$: contradiction.

Donc $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.

5.5 Opérations sur les limites

Théorème 5.63
Soient $(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Soient $\ell, \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$.

On suppose que $\lim_n u_n = \ell$ et $\lim_n v_n = \ell'$.

(1) Si $(\ell, \ell') \notin \{(+\infty, -\infty) ; (-\infty, +\infty)\}$ alors

$$\lim_n (u_n + v_n) = \ell + \ell'.$$

(2) Si $(\ell, \ell') \notin \{(0, +\infty) ; (0, -\infty) ; (+\infty, 0) ; (-\infty, 0)\}$ alors

$$\lim_n u_n v_n = \ell\ell'.$$

(3) Si $\ell \neq 0$ alors

$$\lim_n \frac{1}{u_n} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \in \{-\infty ; +\infty\} \\ \frac{1}{\ell} & \text{sinon} \end{cases}$$

(4) Si $\lim_n u_n = 0^+$, respectivement 0^-, alors

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{u_n}\right)_n & \text{est définie à partir d'un certain rang} \\ \lim_n \frac{1}{u_n} = +\infty, & \text{respectivement } -\infty \end{cases}$$

.

Démonstration 5.64 (1)
Si $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$, voir la Démonstration 5.39.

Si $\ell = +\infty$ et $\ell' \neq -\infty$ alors

$$\begin{cases} \lim_n u_n = +\infty \\ (v_n)_n \ \text{ minorée car } \begin{cases} (v_n)_n & \text{bornée si } \ell' \in \mathbb{R} \\ (v_n)_n & \text{minorée si } \ell' = +\infty \end{cases} \end{cases}$$

Donc $\lim_n (u_n + v_n) = +\infty$.

Idem si $\ell' = +\infty$ et $\ell \neq -\infty$.

Idem si $\ell = -\infty$ ou $\ell' = -\infty$. ∎

Démonstration 5.65 (2)
Si $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$, voir la Démonstration 5.41.

Si $\ell = +\infty = \ell'$, montrons que $\lim_n u_n v_n = +\infty$, c'est-à-dire

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geqslant N, \ u_n v_n \geqslant \alpha.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_1, \ u_n \geqslant \alpha$.

Soit $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_2, \ v_n \geqslant 1$.

Posons $N = \max\{N_1 \ ; N_2\}$.

On a

$$\forall n \geqslant N, \ u_n v_n \geqslant \alpha$$

donc N convient.

Si $\ell = +\infty$ et $\ell' \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\dfrac{\ell'}{2} < \lim_n v_n$.

Donc il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_1, \ \dfrac{\ell'}{2} < v_n$.

Montrons que $\lim_n u_n v_n = +\infty$, c'est-à-dire

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geqslant N, \ u_n v_n \geqslant \alpha.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Soit $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_2, \ u_n \geqslant \dfrac{2\alpha}{\ell'}$.

On pose $N = \max\{N_1 \ ; N_2\}$.

On a $\forall n \geqslant N, \;\; u_n v_n \geqslant \dfrac{2\alpha}{\ell'} \times \dfrac{\ell'}{2} = \alpha$.

Donc $\lim\limits_n u_n v_n = +\infty = \ell\ell'$.

Idem dans les autres cas. ■

Démonstration 5.66 (3)
Si $\ell \in \mathbb{R}$, voir la Démonstration 5.45.

Si $\ell = +\infty$, montrons que $\lim\limits_n \dfrac{1}{u_n} = 0$.

La suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_n$ est bien définie à partir d'un certain rang car on a

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \;\; \forall n \geqslant N_0, \;\; u_n \geqslant 1 \neq 0.$$

Soit $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_0, \;\; u_n \neq 0$.

Montrons que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \;\; \exists N \geqslant N_0, \;\; \forall n \geqslant N, \;\; \left|\frac{1}{u_n}\right| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $N_1 \geqslant N_0$ tel que $\forall n \geqslant N_1, \;\; u_n \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$.

On a $\forall n \geqslant N_1, \;\; \left|\dfrac{1}{u_n}\right| = \dfrac{1}{u_n} \leqslant \varepsilon$.

Idem si $\ell = -\infty$ ■

Démonstration 5.67 (4)
Si $\lim\limits_n u_n = 0^+$ alors il existe un rang $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_0, \;\; u_n > 0$.

En particulier, $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n \geqslant N_0}$ est bien définie.

Montrons que $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n \geqslant N_0}$ tend vers $+\infty$, c'est-à-dire

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \;\; \exists N \geqslant N_0, \;\; \forall n \geqslant N, \;\; \frac{1}{u_n} \geqslant \alpha.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $N \geqslant N_0$ tel que $\forall n \geqslant N, \;\; u_n \leqslant \dfrac{1}{\alpha}$.

On a donc $\forall n \geqslant N,\ \ 0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{\alpha}$.

D'où $\forall n \geqslant N,\ \ \alpha \leqslant \dfrac{1}{u_n}$ car $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc $\lim\limits_n \dfrac{1}{u_n} = +\infty$.

Idem si $\lim\limits_n u_n = 0^-$. ∎

Théorème 5.68 (Théorème des gendarmes dans le cas d'une limite infinie)
Soient $(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Si $\begin{cases} \lim\limits_n u_n = +\infty \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \leqslant v_n \end{cases}$ *alors* $\lim\limits_n v_n = +\infty$.

Si $\begin{cases} \lim\limits_n v_n = -\infty \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ v_n \geqslant u_n \end{cases}$ *alors* $\lim\limits_n u_n = -\infty$.

Démonstration 5.69
Supposons $\lim\limits_n u_n = +\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \leqslant v_n$.

On a $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geqslant N,\ \ \alpha \leqslant u_n$.

Donc $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geqslant N,\ \ \alpha \leqslant v_n$.

Idem si $\lim\limits_n v_n = -\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \ v_n \geqslant u_n$. ∎

Théorème 5.70 (Passage à la limite dans les inégalités larges)
Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ *deux suites convergentes.*

On suppose $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \leqslant v_n$.

Alors $\lim\limits_n u_n \leqslant \lim\limits_n v_n$.

Démonstration 5.71
On sait que $(v_n - u_n)_n$ est convergente et de limite $\lim\limits_n v_n - \lim\limits_n u_n$.

Donc on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \ 0 \leqslant v_n - u_n$.

Donc $0 \geqslant \lim\limits_n v_n - \lim\limits_n u_n$ d'après la Proposition 5.29.

Donc $\lim\limits_n u_n \leqslant \lim\limits_n v_n$. ∎

5.6 Suites monotones

Théorème 5.72 (Théorème de la limite monotone)
Toute suite monotone admet une limite.

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *une suite monotone.*

Si $(u_n)_n$ *est croissante et non-majorée alors* $\lim\limits_n u_n = +\infty$.

Si $(u_n)_n$ *est croissante et majorée alors* $\lim\limits_n u_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Si $(u_n)_n$ *est décroissante et non-minorée alors* $\lim\limits_n u_n = -\infty$.

Si $(u_n)_n$ *est décroissante et minorée alors* $\lim\limits_n u_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Démonstration 5.73
Supposons $(u_n)_n$ croissante et non-majorée.

Montrons que $\lim\limits_n u_n = +\infty$, c'est-à-dire

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad u_n \geqslant \alpha.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Comme $(u_n)_n$ n'est pas majorée, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha < u_N$.

On a $\forall n \geqslant N, \quad u_n \geqslant u_N > \alpha$.

Donc N convient et on a $\lim\limits_n u_n = +\infty$.

Supposons maintenant $(u_n)_n$ croissante et majorée.

Comme $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une partie non-vide et majorée de $\mathbb{R}$, elle admet une borne supérieure S.

S vérifie $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant S \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad S - \varepsilon \leqslant u_N \end{cases}$

Montrons que $\lim\limits_n u_n = S$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad S - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant S + \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $S - \varepsilon \leqslant u_N$.

On a $\forall n \geqslant N, \quad S - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant S + \varepsilon$.

Donc N convient et $\lim\limits_n u_n = S$.

Idem pour les suites décroissantes. ∎

Théorème 5.74 (Théorème des suites adjacentes)
Soient $(a_n)_n, (b_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *telles que* $(a_n)_n$ *croissante,* $(b_n)_n$ *décroissante et* $\lim\limits_n (b_n - a_n) = 0$.

Deux telles suites sont dites adjacentes.

Alors $(a_n)_n$ *et* $(b_n)_n$ *sont convergentes et de même limite* ℓ.

On a alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \ a_n \leqslant \ell \leqslant b_n$.

Démonstration 5.75
La suite $(b_n - a_n)_n$ est décroissante et convergente donc décroissante et minorée.

Elle converge donc vers sa borne inférieure.

Donc $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} (b_n - a_n) = 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \ b_n - a_n \geqslant 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \ a_n \leqslant b_n$.

De plus, on a $(a_n)_n$ croissante et $(b_n)_n$ décroissante.

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \ a_0 \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_0$.

Ainsi, $(a_n)_n$ est croissante et majorée donc convergente et $(b_n)_n$ est décroissante et minorée donc convergente.

Enfin, on a $0 = \lim\limits_n (b_n - a_n) = \lim\limits_n b_n - \lim\limits_n a_n$. ■

Remarque 5.76
Toute suite décroissante et convergente est minorée par sa limite.

De même, toute suite croissante et convergente est majorée par sa limite.

5.7 Retour sur les suites extraites

Proposition 5.77
Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. *Soit* $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

On a

$$\lim_n u_n = \ell \iff \begin{cases} \lim\limits_k u_{2k} = \ell \\ \lim\limits_k u_{2k+1} = \ell \end{cases}$$

Démonstration 5.78
$\boxed{\Longrightarrow}$ Déjà vue (Théorème 5.60).

$\boxed{\Longleftarrow}$

Supposons $\lim\limits_{k} u_{2k} = \lim\limits_{k} u_{2k+1} = \ell$.

Supposons $\ell \in \mathbb{R}$.

Montrons que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geqslant N, \ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $K_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geqslant K_1, \ |u_{2k} - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Soit $K_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geqslant K_2, \ |u_{2k+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Posons $K = \max\{K_1 \ ; K_2\}$.

On a $\forall k \geqslant K, \ \begin{cases} |u_{2k} - \ell| \leqslant \varepsilon \\ |u_{2k+1} - \ell| \leqslant \varepsilon \end{cases}$

Donc $\forall n \geqslant 2K+1, \ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

En effet, si n est pair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$ et on a $2k \geqslant 2K+1$ donc $k \geqslant K$.

Si n est impair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$ et on a $2k+1 \geqslant 2K+1$ donc $k \geqslant K$.

L'entier $N = 2k+1$ convient et on a $\lim\limits_{n} u_n = \ell$. ■

Théorème 5.79 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)
De toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente.

Démonstration 5.80
Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée.

Soit $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n| \leqslant M$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \in [-M \ ; M]$.

S'il existe une infinité d'indices $n \in \mathbb{N}$ tels que $u_n \leqslant 0$, on construit par récurrence la fonction $\varphi_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} \varphi_1(0) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \leqslant 0\} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \varphi_1(n) = \min\{k \in [\![\varphi_1(n-1)+1 \ ; +\infty[\![\mid u_k \leqslant 0\} \qquad \text{(partie non-vide de } N\text{)} \end{cases}$$

On obtient ainsi une fonction φ_1 strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{\varphi_1(n)} \leqslant 0$.

Sinon, on définit de même une fonction $\varphi_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{\varphi_1(n)} \geqslant 0$.

On pose $\begin{cases} a_0 = -M \\ b_0 = M \end{cases}$

Puis, dans le premier cas $\begin{cases} a_1 = -M \\ b_1 = 0 \end{cases}$ et dans le second cas $\begin{cases} a_1 = 0 \\ b_1 = M \end{cases}$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{\varphi_1(n)} \in [a_1\ ;\ b_1]$.

De même que précédemment :

Si $\mathrm{Card}\left\{n \in \mathbb{N} \,\middle|\, u_{\varphi_1(n)} \leqslant \dfrac{a_1+b_1}{2}\right\} = +\infty$ alors on pose $\begin{cases} a_2 = a_1 \\ b_2 = \dfrac{a_1+b_1}{2} \end{cases}$

Sinon, on pose $\begin{cases} a_2 = \dfrac{a_1+b_1}{2} \\ b_2 = b_1 \end{cases}$

Dans les deux cas, on considère $\varphi_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)} \in [a_2\ ;\ b_2]\,.$$

On continue le procédé et on définit ainsi $(a_n)_n$ une suite croissante, $(b_n)_n$ une suite décroissante et (φ_k) une suite de fonctions strictement croissantes, telles que

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ \ b_n - a_n = \dfrac{2M}{2^n} \\ \forall k \in \mathbb{N},\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{\varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_k(n)} \in [a_k\ ;\ b_k] \end{cases}$$

On pose enfin $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \psi(n) = \varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_n(n)$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &\psi(0) = 0 \\ &\psi(1) = \varphi_1(1) \\ &\psi(2) = \varphi_1 \circ \varphi_2(2) \\ &\psi(3) = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_3(3) \\ &\qquad\vdots \end{aligned}$$

Montrons que ψ est strictement croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\psi(n) < \psi(n+1)$.

On a

$$\begin{aligned} \psi(n) &= \varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_n(n) \\ &< \varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_n(n+1) \\ &\leqslant \varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_n(\varphi_{n+1}(n+1)) \quad \text{car } \varphi_{n+1}(n+1) \geqslant n+1 \\ &= \psi(n+1) \end{aligned}$$

Donc la suite $\left(u_{\psi(n)}\right)_n$ est une suite extraite de $(u_n)_n$.

Appliquons le théorème des suites adjacentes à $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$:

On a $\begin{cases} (a_n)_n & \text{croissante} \\ (b_n)_n & \text{décroissante} \\ \lim\limits_n (b_n - a_n) = 0 \end{cases}$ donc $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont convergentes de même limite.

Enfin, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant u_{\psi(n)} \leqslant b_n$ donc selon le théorème des gendarmes, $\left(u_{\psi(n)}\right)_n$ est convergente. ■

Exemple 5.81
De $((-1)^n)_n$ on peut extraire une suite convergente : $\left((-1)^{2n}\right)_n$.

De $(\sin n)_n$ on peut extraire une suite convergente.

5.8 Densité

5.8.1 Rappels

Définition 5.82
On appelle nombre rationnel tout réel de la forme $\dfrac{a}{b}$ avec $\begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ b \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

L'ensemble des rationnels est noté :

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}\right\}_{(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*}$$

Tout nombre rationnel s'écrit de façon unique $\dfrac{a}{b}$ (écriture irréductible) avec $\begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ b \in \mathbb{N}^* \\ a \text{ et } b \text{ premiers entre eux} \end{cases}$

Définition 5.83
On appelle nombre décimal tout nombre réel de la forme $\dfrac{a}{10^\alpha}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $\alpha \in \mathbb{N}$.

Remarque 5.84
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a x décimal $\implies$ x rationnel.

Exemple 5.85

$\dfrac{1}{3}$ est rationnel non-décimal.

$\sqrt{2}, \pi, \mathrm{e}, \cdots \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Démonstration 5.86
Par l'absurde, supposons $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

Considérons l'écriture irréductible de $\sqrt{2}$: $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux.

On a $\sqrt{2}b = a$

donc $2b^2 = a^2$

donc a^2 pair

donc a pair

donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2k$

donc on a $2b^2 = (2k)^2$

donc $b^2 = 2k^2$

donc b est pair donc 2 divise a et b : contradiction. ■

5.8.2 Densité

Définition 5.87
Soit $A \subseteq \mathbb{R}$.

On dit que A est dense dans $\mathbb{R}$ si on a

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b \implies]a\,;b[\cap A \neq \varnothing.$$

Exemple 5.88
$\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}^*$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Proposition 5.89

(1) L'ensemble des décimaux est dense dans $\mathbb{R}$.

(2) $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

(3) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration 5.90 (1)
Notons $\mathbb{D}$ l'ensemble des décimaux.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

On a $b - a > 0$.

Donc il existe $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $10^{\alpha}(b-a) \geqslant 1$ (il suffit de prendre $\alpha = \left\lfloor \dfrac{-\ln(b-a)}{\ln 10} \right\rfloor + 1$).

Montrons que $10^{\alpha} a \leqslant \lfloor 10^{\alpha} b \rfloor \leqslant 10^{\alpha} b$.

On a $\lfloor 10^{\alpha} b \rfloor \geqslant 10^{\alpha} b - 1 \geqslant 10^{\alpha} a$, d'où l'encadrement.

Ainsi, $\dfrac{\lfloor 10^{\alpha} b \rfloor}{10^{\alpha}} \in [a\ ;\ b]$.

Donc $\mathbb{D} \cap [a\ ;\ b] \neq \varnothing$.

Montrons que $\mathbb{D} \cap\ ]a\ ;\ b[\ \neq \varnothing$.

On pose $a' = \dfrac{2}{3}a + \dfrac{1}{3}b = a + \dfrac{1}{3}(b-a)$ et $b' = \dfrac{1}{3}a + \dfrac{2}{3}b = a + \dfrac{2}{3}(b-a)$.

On a $b' - a' = \dfrac{1}{3}(b-a) > 0$.

Donc d'après ce qui précède, $\mathbb{D} \cap\ ]a'\ ;\ b'[\ \neq \varnothing$.

Donc $\mathbb{D} \cap\ ]a\ ;\ b[\ \neq \varnothing$. ■

Démonstration 5.91 (2)
Comme $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{Q}$, on en déduit que $\mathbb{Q}$ est dense aussi. ■

Démonstration 5.92 (3)
Montrons que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

On a $\dfrac{a}{\sqrt{2}} < \dfrac{b}{\sqrt{2}}$.

Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $q \in \mathbb{Q} \cap \left]\frac{a}{\sqrt{2}} \, ; \frac{b}{\sqrt{2}}\right[$.

On a $\frac{a}{\sqrt{2}} < q < \frac{b}{\sqrt{2}}$.

Donc $a < \sqrt{2}q < b$.

Si $q \neq 0$ alors $\sqrt{2}q \in \mathbb{R}$.

En effet, par l'absurde, soient $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ et $b_1, b_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que $q = \frac{a_1}{b_1}$ et $\sqrt{2}q = \frac{a_2}{b_2}$. On a $\frac{a_1}{b_1}\sqrt{2} = \frac{a_2}{b_2}$. Comme $q \neq 0$, on a $a_1 \neq 0$ donc $\sqrt{2} = \frac{a_2 b_1}{a_1 b_2} \in \mathbb{Q}$: contradiction.

Donc $\sqrt{2}q \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap \left]a \, ; b\right[$.

Finalement, si $0 \notin \left]a \, ; b\right[$ alors $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap \left]a \, ; b\right[\neq \varnothing$.

Sinon, on a $a < 0 < b$ donc $\left]0 \, ; b\right[$ contient un irrationnel donc $\left]a \, ; b\right[$ aussi. ■

5.8.3 Caractérisation séquentielle de la densité

Proposition 5.93
Soit $A \subseteq \mathbb{R}$.

A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout réel est limite d'une suite d'éléments de A :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists\, (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, \quad \lim_n a_n = x.$$

Démonstration 5.94
$\boxed{\Longleftarrow}$

Supposons que tout réel est limite d'une suite d'éléments de A.

Montrons que A est dense.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrons que $A \cap \left]a \, ; b\right[\neq \varnothing$.

Soit $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers $\frac{a+b}{2}$.

Posons $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$.

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, \quad \left|a_n - \frac{a+b}{2}\right| \leqslant \varepsilon$.

On remarque $\begin{cases} a_N \in A \\ \left|a_N - \frac{a+b}{2}\right| < \varepsilon \end{cases}$

Donc $a = \dfrac{a+b}{2} - \varepsilon < a_N < \dfrac{a+b}{2} + \varepsilon = b$.

Ainsi, $a_N \in A \cap \,]a\,;b[$.

$\boxed{\Longrightarrow}$

Supposons A dense dans $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$A \cap \left]x - \frac{1}{n}\,;x + \frac{1}{n}\right[\neq \varnothing.$$

Donc il existe un élément $a_n \in A \cap \left]x - \dfrac{1}{n}\,;x + \dfrac{1}{n}\right[$.

On définit ainsi une suite $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} a_n \in A \\ x - \dfrac{1}{n} < a_n < x + \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

De plus, on a $\lim\limits_n \left(x - \dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_n \left(x + \dfrac{1}{n}\right) = x$.

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_n a_n = x$.

Enfin, $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}^*}$. ∎

5.9 Remarque

En général, ne jamais confondre $<$ et $\leqslant$.

Notamment :

- si deux suites convergentes vérifient $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$ alors $\lim\limits_n u_n \leqslant \lim\limits_n v_n$;
- tout majorant **strict** de la limite d'une suite convergente majore **strictement** la suite à partir d'un certain rang.

Parfois, on a le choix entre $<$ et $\leqslant$. Par exemple :

- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$;
- $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant \alpha$.

5.10 Suites de nombres complexes

On rappelle que les suites de nombres complexes (ou suites complexes) sont les familles de complexes indicées par $\mathbb{N}$ (voire par un intervalle de la forme $[\![n_0\ ;+\infty[\![$ où $n_0 \in \mathbb{Z}$).

L'ensemble des suites complexes est noté $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (ou $\mathbb{C}^{[\![n_0;+\infty[\![}$).

Définition 5.95 (Opérations algébriques sur les suites)
De manière analogue au cas réel, si $(u_n)_n, (v_n)_n$ sont deux suites complexes et λ, μ deux nombres complexes, on définit :

- la somme de $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$:
$$(u_n)_n + (v_n)_n = (u_n + v_n)_n$$

- le produit de $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$:
$$(u_n)_n \times (v_n)_n = (u_n v_n)_n$$

- la combinaison linéaire de $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$:
$$\lambda\,(u_n)_n + \mu\,(v_n)_n = (\lambda u_n + \mu v_n)_n$$

Dans le cas complexe, on définit de plus :

- la partie réelle de $(u_n)_n$:
$$\mathrm{Re}\left((u_n)_n\right) = \left(\mathrm{Re}\,(u_n)\right)_n$$

- la partie imaginaire de $(u_n)_n$:
$$\mathrm{Im}\left((u_n)_n\right) = \left(\mathrm{Im}\,(u_n)\right)_n$$

- la suite des modules :
$$(|u_n|)_n$$

- la suite conjuguée :
$$(\overline{u_n})_n$$

Définition 5.96 (Suite bornée)
Soit $(u_n)_n$ une suite complexe. On dit que $(u_n)_n$ est bornée si on a :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant M$$

c'est-à-dire si la suite $(|u_n|)_n$ est majorée.

Remarque 5.97
La notion de « suite bornée » pour les suites complexes généralise celle déjà vue pour les suites réelles. En revanche, on ne généralise pas les notions de suite majorée, minorée, croissante, décroissante ou monotone (car $\mathbb{C}$ n'est pas ordonné « canoniquement »).

Définition/Proposition 5.98 (Limite d'une suite complexe)
Soient $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$.

On dit que $(u_n)_n$ converge (ou tend) vers ℓ si l'on a :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On dit alors que ℓ est la limite de $(u_n)_n$. Elle est unique et notée

$$\ell = \lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \lim_n u_n.$$

On dit alors aussi que $(u_n)_n$ est convergente. Sinon on dit qu'elle est divergente.

Remarque 5.99
(1) On a

$$\text{constante} \implies \text{stationnaire} \implies \text{convergente.}$$

(2) Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites complexes convergentes qui coïncident à partir d'un certain rang, c'est-à-dire si l'on a :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad u_n = v_n$$

alors $(u_n)_n$ est convergente si, et seulement si, $(v_n)_n$ est convergente, et dans ce cas leurs limites sont égales.

Proposition 5.100 (Une façon de se ramener au cas réel)
Soient $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *et* $\ell \in \mathbb{C}$.

Alors la suite complexe $(u_n)_n$ *converge vers* ℓ *si, et seulement si, la suite réelle* $(|u_n - \ell|)_n$ *converge vers* 0.

Démonstration 5.101
Clair. ■

Théorème 5.102 (Une autre façon de se ramener au cas réel)
Soient $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *et* $\ell \in \mathbb{C}$.

Alors la suite complexe $(u_n)_n$ *converge vers* ℓ *si, et seulement si,*

$$\begin{cases} \textit{la suite réelle } (\operatorname{Re} u_n)_n \textit{ converge vers } \operatorname{Re} \ell \\ \textit{la suite réelle } (\operatorname{Im} u_n)_n \textit{ converge vers } \operatorname{Im} \ell \end{cases}$$

Démonstration 5.103

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_n = \operatorname{Re} u_n \\ b_n = \operatorname{Im} u_n \end{cases}$ et $\ell_1 = \operatorname{Re} \ell$ et $\ell_2 = \operatorname{Im} \ell$.

$\boxed{\Longrightarrow}$

Supposons $\lim\limits_n u_n = \ell$.

On a $\lim\limits_n |u_n - \ell| = 0$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} |a_n - \ell_1| \leqslant |u_n - \ell| \\ |b_n - \ell_2| \leqslant |u_n - \ell| \end{cases}$ car $|u_n - \ell| = \sqrt{(a_n - \ell_1)^2 + (b_n - \ell_2)^2}$.

Donc selon le théorème des gendarmes, $\lim\limits_n a_n = \ell_1$ et $\lim\limits_n b_n = \ell_2$.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Supposons $\lim\limits_n a_n = \ell_1$ et $\lim\limits_n b_n = \ell_2$.

On a $\lim\limits_n |a_n - \ell_1| = \lim\limits_n |b_n - \ell_2| = 0$.

Donc $\lim\limits_n \sqrt{(a_n - \ell_1)^2 + (b_n - \ell_2)^2} = 0$.

Donc $\lim\limits_n |u_n - \ell| = 0$.

Donc $\lim\limits_n u_n = \ell$. ■

Proposition 5.104
Toute suite convergente est bornée.

Démonstration 5.105
Voir le cas des suites réelles convergentes : Démonstration 5.22. ■

Proposition 5.106
Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites complexes convergentes et λ et μ deux nombres complexes.

On pose $\begin{cases} \ell = \lim\limits_n u_n \\ \ell' = \lim\limits_n v_n \end{cases}$

Alors :

(1) $\lim\limits_n (u_n + v_n) = \ell + \ell'$

(2) $\lim\limits_n u_n v_n = \ell \ell'$

(3) $\lim\limits_n (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \ell + \mu \ell'$

(4) $\lim\limits_n \operatorname{Re} u_n = \operatorname{Re} \ell$

(5) $\lim\limits_n \operatorname{Im} u_n = \operatorname{Im} \ell$

(6) $\lim\limits_n |u_n| = |\ell|$

(7) $\lim\limits_n \overline{u_n} = \overline{\ell}$

(8) *Si $\ell \neq 0$ alors $(u_n)_n$ est à termes non-nuls à partir d'un certain rang et on a* $\lim\limits_n \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{\ell}$.

Démonstration 5.107
⋆⋆ EXERCICE ⋆⋆ ■

Théorème 5.108 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)
De toute suite complexe bornée on peut extraire une suite convergente.

Démonstration 5.109
Soit $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_n = \operatorname{Re} u_n \\ b_n = \operatorname{Im} u_n \end{cases}$

Comme $(u_n)_n$ est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant M$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| = \sqrt{a_n^2} \leqslant \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |u_n| \leqslant M$.

Donc $(a_n)_n$ est bornée.

De même, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |b_n| \leqslant M$.

Donc $(b_n)_n$ est bornée.

Comme $(a_n)_n$ est bornée, selon le théorème de Bolzano-Weierstrass réel, il existe $\varphi_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(a_{\varphi_1(n)}\right)_n$ converge.

Comme $(b_n)_n$ est bornée, la suite $\left(b_{\varphi_1(n)}\right)_n$ est bornée.

Selon le théorème de Bolzano-Weierstrass réel, il existe $\varphi_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(b_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)}\right)_n$ converge.

Posons $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2$.

On a φ strictement croissante (composée de deux fonctions strictement croissantes).

De plus, on a $\left(b_{\varphi(n)}\right)_n$ convergente et $\left(a_{\varphi(n)}\right)_n$ convergente (car c'est une suite extraite de $\left(a_{\varphi_1(n)}\right)_n$ qui est convergente).

Donc $\left(u_{\varphi(n)}\right)_n$ converge. ∎

Chapitre 6

Algèbre générale

Sommaire

6.1 Lois de composition internes

6.1.1 Définition

Définition 6.1 (Loi de composition interne)
Soit E un ensemble.

On appelle loi de composition interne sur E toute application de $E \times E$ dans E.

Remarque 6.2
Les lois de composition internes sont en général notées avec des symboles tels que :

$$+ \quad \times \quad \cdot \quad \wedge \quad \circ \quad * \quad \oplus \quad \otimes .$$

Si $*$ est une loi de composition interne sur un ensemble E et x, y sont deux éléments de E, on préfère noter $x * y$ plutôt que $*(x, y)$ l'image du couple (x, y) par $*$.

Exemple 6.3
(1) L'addition et la multiplication sont des lois de composition internes sur $\mathbb{N}$, sur $\mathbb{Z}$, sur $\mathbb{Q}$, sur $\mathbb{R}$, sur $\mathbb{C}$, sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, sur $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$...

(2) Si E est un ensemble, alors :
- L'intersection est une loi de composition interne sur $\mathscr{P}(E)$.
- La réunion est une loi de composition interne sur $\mathscr{P}(E)$.
- La composition est une loi de composition interne sur $\mathscr{F}(E, E)$.

(3) Le produit vectoriel est une loi de composition interne sur l'ensemble des vecteurs d'un espace euclidien orienté de dimension 3.

6.1.2 Associativité, commutativité

Définition 6.4
Soit E un ensemble et $*$ une loi de composition interne sur E.

On dit que $*$ est associative si on a :

$$\forall x, y, z \in E, \quad x * (y * z) = (x * y) * z.$$

Exemple 6.5
Parmi les lois de composition internes données à l'Exemple 6.3, toutes sont associatives, excepté le produit vectoriel.

Par exemple, on a bien

$$\forall x, y, z \in \mathbb{N}, \quad (x + y) + z = x + (y + z) .$$

En revanche, si l'on considère une base orthonormée directe (i, j, k), on a :

$$\begin{cases} (i \wedge j) \wedge j = k \wedge j = -i \\ i \wedge (j \wedge j) = i \wedge 0 = 0 \end{cases}$$

Définition 6.6
Soient E un ensemble et $*$ une loi de composition interne sur E.

On dit que $*$ est commutative si on a :

$$\forall x, y \in E, \;\; x * y = y * x.$$

Exemple 6.7
Parmi les lois de composition internes données à l'Exemple 6.3, toutes sont commutatives, exceptés le produit vectoriel et la composition.

6.1.3 Élément neutre, inverse

Définition 6.8 (Élément neutre)
Soient E un ensemble, $*$ une loi de composition interne sur E et e un élément de E.

On dit que e est un élément neutre pour $*$ si on a :

$$\forall x \in E, \;\; e * x = x * e = x.$$

On dit alors que la loi $*$ admet un élément neutre (ou, par abus, que E admet un élément neutre).

Exemple 6.9
Parmi les lois de composition internes données à l'Exemple 6.3, toutes admettent un élément neutre, excepté le produit vectoriel :

(1)
- La loi $+$ admet 0 (ou $(0)_n$) comme neutre.
- La loi $\times$ admet 1 (ou $(1)_n$) comme neutre.

(2)
- La loi $\cap$ admet E comme neutre.
- La loi $\cup$ admet $\varnothing$ comme neutre.
- La loi $\circ$ admet id_E comme neutre.

(3) La loi $_\wedge$ n'admet pas de neutre. Par l'absurde, soit v un élément neutre. On a $\forall w$ vecteur, $w _\wedge v = v _\wedge w = w$. D'où, en prenant $w = v$, $0 = v$. D'où $\forall w$ vecteur, $w = w _\wedge 0 = 0$: contradiction.

Remarque 6.10
Soient E un ensemble, $*$ une loi de composition interne sur E et e un élément de E.

On dit que e est un élément neutre à droite pour $*$ si on a :

$$\forall x \in E, \ \ x * e = x.$$

Il n'est généralement pas suffisant que e soit un élément neutre à droite pour que e soit un élément neutre (cela suffit si $*$ est commutative), comme le montre l'exemple suivant :

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	0	0

$\oplus$ est bien une loi de composition interne sur $\{0\ ;\ 1\}$ et 0 est neutre à gauche mais pas à droite.

Proposition 6.11 (Unicité de l'élément neutre)
Soient E un ensemble et $*$ une loi de composition interne sur E.

Alors il existe au plus un élément neutre pour $*$.

Démonstration 6.12
Soient $e, e' \in E$ deux éléments neutres pour $*$. On a :

$$\forall x \in E, \ \ x * e = e * x = x = e' * x = x * e'.$$

Montrons que $e = e'$.

On a :

$$\begin{aligned} e &= e * e' \quad \text{car } e' \text{ neutre} \\ &= e' \qquad\quad \text{car } e \text{ neutre} \end{aligned}$$

■

Définition/Proposition 6.13 (Inverse d'un élément)
Soient E un ensemble et $*$ une loi de composition interne sur E.

On suppose que la loi $*$ est associative et qu'elle admet un élément neutre noté e.

Soit x un élément de E.

On appelle inverse de x tout élément $y \in E$ tel que :

$$y * x = x * y = e.$$

Il existe au plus un tel élément y.

S'il existe, on l'appelle donc l'inverse de x et on le note x^{-1}.

On dit alors que x est inversible.

Démonstration 6.14
Soient $y_1, y_2 \in E$ tels que $\begin{cases} y_1 * x = x * y_1 = e \\ y_2 * x = x * y_2 = e \end{cases}$

Montrons que $y_1 = y_2$.

On a

$$\begin{aligned} (y_1 * x) * y_2 &= y_1 * (x * y_2) \\ e * y_2 &= y_1 * e \\ y_2 &= y_1. \end{aligned}$$

■

Exemple 6.15
Soient E un ensemble et $*$ une loi de composition interne associative sur E et admettant un élément neutre e.

Alors e est inversible, d'inverse lui-même :

$$e^{-1} = e.$$

Démonstration 6.16
On a $e * e = e * e = e$. Donc e inversible, d'inverse e. ■

Exemple 6.17
Soient E un ensemble et $*$ une loi de composition interne associative sur E admettant un élément neutre e.

Soit a un élément inversible de E.

Alors l'inverse a^{-1} de a est inversible, d'inverse a :

$$\left(a^{-1}\right)^{-1} = a.$$

Démonstration 6.18
On a $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$. Donc a^{-1} est inversible, d'inverse a. ■

Exemple 6.19
Étudions les éléments inversibles des lois de composition internes associatives de l'Exemple 6.3 qui admettent un élément neutre :

- Pour $(\mathbb{N}, +)$, le neutre est 0 et il est le seul inversible.
- Pour $(\mathbb{N}, \times)$, le neutre est 1 et il est le seul inversible.
- Pour $(\mathbb{Z}, +)$, le neutre est 0 et tout élément admet un opposé.
- Pour $(\mathbb{Z}, \times)$, le neutre est 1 et 1 et -1 sont les seuls éléments inversibles.
- Tout élément admet un opposé dans $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +\right)$ et $\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +\right)$.
- 0 n'est pas inversible par $\times$ dans $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
- Pour $(\mathscr{P}(E), \cap)$, le neutre est E. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. On a

$$\begin{aligned} A \text{ inversible par } \cap &\iff \exists B \in \mathscr{P}(E), \quad A \cap B = B \cap A = E \\ &\iff A = E \end{aligned}$$

  donc E est le seul inversible.
- Pour $(\mathscr{P}(E), \cup)$, de même, $\varnothing$ est le seul inversible.
- Pour $(\mathscr{F}(E, E), \circ)$, le neutre est id_E. Soit $f \in \mathscr{F}(E, E)$. On a

$$\begin{aligned} f \text{ inversible par } \circ &\iff \exists g \in \mathscr{F}(E, E), \quad f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}_E \\ &\iff f \text{ est bijective} \end{aligned}$$

  donc l'inverse de f est sa bijection réciproque f^{-1}.

Proposition 6.20
Soient E un ensemble et $*$ une loi de composition interne associative sur E admettant un élément neutre e.

Si x et y sont inversibles, alors $x * y$ est aussi inversible, d'inverse :

$$(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}.$$

Démonstration 6.21
On a :

$$\begin{aligned}(x*y)*\left(y^{-1}*x^{-1}\right) &= x*\left(y*y^{-1}\right)*x^{-1}\\ &= x*e*x^{-1}\\ &= x*x^{-1}\\ &= e\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}y^{-1}*x^{-1}*x*y &= y^{-1}*y\\ &= e\end{aligned}$$

Donc $x*y$ est inversible, d'inverse $y^{-1}*x^{-1}$. ■

Proposition 6.22 (Inversible $\implies$ régulier)
Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne associative $*$ et admettant un élément neutre e.

Soient $x, y, z \in E$. On suppose que x est inversible.

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $y = z$

(2) $xy = xz$

(3) $yx = zx$

On dit que x est un élément régulier ou simplifiable.

Démonstration 6.23
(1) $\implies$ (2) et (1) $\implies$ (3) : Clair.

(2) $\implies$ (1) : on multiplie à gauche par x^{-1}.

(3) $\implies$ (1) : on multiplie à droite par x^{-1}. ■

Notation 6.24
Lorsqu'une loi de composition interne est notée $*$, $\times$, $\cdot$, $\otimes$ ou $\circ$, on dit qu'on utilise une notation multiplicative.

Au contraire, les notations telles que $+$ ou $\oplus$ sont dites additives.

L'usage est de n'employer des notations additives que pour des lois de composition commutatives.

L'usage est également :

- de réserver les notations 1 ou 1_E pour l'élément neutre aux lois notées multiplicativement. Dans le cas d'une loi notée additivement, on préfère noter l'élément neutre 0 ou 0_E.

- de réserver la notation x^{-1} pour l'inverse d'un élément x aux lois notées multiplicativement. Dans le cas d'une loi notée additivement, on préfère noter $-x$ l'inverse de x et on l'appelle alors plutôt l'opposé de x.

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne associative notée multiplicativement, par exemple $*$. Soient $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Le produit $x * \cdots * x$ de n facteurs tous égaux à x est noté x^n.

Si, de plus, $*$ admet un élément neutre 1_E, on pose $x^0 = 1_E$.

Enfin, si x est inversible, on pose $x^{-n} = \left(x^{-1}\right)^n$.

On fait de même pour les lois notées additivement, mais en utilisant encore des notations différentes :

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne associative notée additivement, par exemple $+$. Soient $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

La somme $x + \cdots + x$ de n termes tous égaux à x est notée nx (ou $n \cdot x$).

Si, de plus, $+$ admet un élément neutre 0_E, on pose $0x = 0_E$.

Enfin, si x est « inversible », on pose $(-n)\,x = n\,(-x)$.

Enfin, on utilisera pour une loi additive la notation $\sum$ pour une somme et pour une loi multiplicative la notation $\prod$ pour un produit.

Toutes ces différences entre lois notées multiplicativement et lois notées additivement ne reposent que dans la manière de noter les objets. Il n'y a aucune différence dans les concepts.

Remarque 6.25
Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne associative $*$.

Soient $x, y \in E$ et $n \in \mathbb{N}$.

Attention à ne pas écrire en général $(xy)^n = x^n y^n$.

Cette formule n'est vraie que si x et y commutent.

6.1.4 Distributivité

Définition 6.26 (Distributivité)
Soit E un ensemble muni de deux lois de composition internes $\oplus$ et $\otimes$.

On dit que la loi $\otimes$ est distributive par rapport à la loi $\oplus$ si on a :

$$\forall x, y, z \in E, \quad \begin{cases} x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y \oplus x \otimes z \\ (y \oplus z) \otimes x = y \otimes x \oplus z \otimes x \end{cases}$$

Remarque 6.27
Soit E un ensemble muni de deux lois de composition internes $\oplus$ et $\otimes$.

Si la loi $\otimes$ est commutative, alors :

$$\otimes \text{ est distributive par rapport à } \oplus \iff \forall x, y, z \in E,\ \ x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y \oplus x \otimes z.$$

Démonstration 6.28
$\boxed{\Longrightarrow}$ Claire.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Soient $x, y, z \in E$.

On a

$$\begin{aligned}(y \oplus z) \otimes x &= x \otimes (y \oplus z) \\ &= x \otimes y \oplus x \otimes z \\ &= y \otimes x \oplus z \otimes x\end{aligned}$$

■

Exemple 6.29

- Dans $\mathbb{C}$, $\times$ est distributif par rapport à $+$.
- Dans $\mathscr{P}(E)$: $\forall A, B, C \in \mathscr{P}(E)$, $\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$
  Donc $\cap$ est distributive par rapport à $\cup$ et $\cup$ est distributive par rapport à $\cap$.
- Dans $\mathbb{N}$, $+$ n'est pas distributive par rapport à $\times$:
  $$1 + (2 \times 3) \neq (1 + 2) \times (1 + 3).$$

6.1.5 Parties stables

Définition 6.30 (Partie stable)
Soient E un ensemble et $*$ une loi de composition interne sur E.

On dit qu'un partie $A \subseteq E$ est stable par la loi $*$ si on a :

$$\forall x, y \in A,\ \ x * y \in A.$$

On peut alors définir une loi de composition interne sur A :

$$\begin{array}{ccc} A \times A & \longrightarrow & A \\ (x, y) & \longmapsto & x * y \end{array}$$

qui est appelée la loi de composition interne induite par $*$ sur A.

Cette loi est souvent encore notée $*$ (abusivement).

Exemple 6.31

- $\mathbb{Z}$ est une partie stable de $\mathbb{R}$ par $+$ et $\times$.

- Soit $E' \in \mathscr{P}(E)$. Alors $\mathscr{P}(E') \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(E))$ est stable par $\cup$ et $\cap$.

- Notons $\mathscr{P}_p(\llbracket 1\,;\,10 \rrbracket)$ les parties de $\llbracket 1\,;\,10 \rrbracket$ de cardinal pair. Ce n'est une partie stable de $\mathscr{P}(\llbracket 1\,;\,10 \rrbracket)$ ni pour $\cup$ ni pour $\cap$. En effet, on a :

$$\{1\,;\,2\} \cup \{1\,;\,3\} = \{1\,;\,2\,;\,3\} \notin \mathscr{P}_p(\llbracket 1\,;\,10 \rrbracket) \quad \text{et} \quad \{1\,;\,2\} \cap \{1\,;\,3\} = \{1\} \notin \mathscr{P}_p(\llbracket 1\,;\,10 \rrbracket).$$

6.2 Groupes

6.2.1 Définition

Définition 6.32 (Groupe)
Un groupe est un couple $(G, *)$ où G est un ensemble et $*$ une loi de composition interne sur G respectant les conditions suivantes :

(1) La loi $*$ est associative.

(2) La loi $*$ admet un élément neutre.

(3) Tout élément de G possède un inverse.

On dit aussi que G est muni d'une structure de groupe, ou, par abus, que G est un groupe.

Si, de plus, la loi $*$ est commutative, on dit que le groupe est abélien ou commutatif.

Exemple 6.33 (Groupes abéliens)

$$(\mathbb{Q}^*, \times) \quad (\mathbb{R}^*, \times) \quad (\mathbb{C}^*, \times) \quad \left((\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}, \times\right) \quad \left((\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}, \times\right)$$

Exemple 6.34
Il existe une unique structure de groupe sur $\{0\}$:

$+$	0
0	0

En effet, on a $0 + (0 + 0) = (0 + 0) + 0 = 0$ donc $+$ est une loi de groupe. On a aussi 0 neutre et 0 opposé de 0.

Sur $\{0 ; 1\}$, il existe deux structures de groupe :

Si 0 neutre :

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

Si 1 neutre :

$\otimes$	0	1
0	1	0
1	0	1

Exemple 6.35
Structure de groupe sur $\{0 ; 1 ; 2\}$ dont 0 est le neutre :

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

On remarque que cette loi est commutative.

Exemple 6.36 (Produit de deux groupes)
Soient $(G_1, *_1)$ et $(G_2, *_2)$ deux groupes.

L'ensemble $G_1 \times G_2$ est naturellement muni d'une structure de groupe, de loi :

$$\begin{array}{ccc} (G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2) & \longrightarrow & G_1 \times G_2 \\ \big((g_1, g_2)\,, (g_1', g_2')\big) & \longmapsto & \big(g_1 *_1 g_1', g_2 *_2 g_2'\big) \end{array}$$

Déterminons son neutre et l'inverse d'un élément (g_1, g_2) donné.

Démonstration 6.37
On note $*$ la loi.

Montrons que $*$ est associative :

Soient $(g_1, g_2), (g_1', g_2'), (g_1'', g_2'') \in G_1 \times G_2$.

On a :

$$\begin{aligned}
(g_1, g_2) * \left((g_1', g_2') * (g_1'', g_2'')\right) &= (g_1, g_2) * \left(g_1' *_1 g_1'', g_2' *_2 g_2''\right) \\
&= \left(g_1 *_1 \left(g_1' *_1 g_1''\right), g_2 *_2 \left(g_2' *_2 g_2''\right)\right) \\
&= \left(\left(g_1 *_1 g_1'\right) *_1 g_1'', \left(g_2 *_2 g_2'\right) *_2 g_2''\right) \\
&= \left(g_1 *_1 g_1', g_2 *_2 g_2'\right) * \left(g_1'', g_2''\right) \\
&= \left((g_1, g_2) * (g_1', g_2')\right) * \left(g_1'', g_2''\right)
\end{aligned}$$

Montrons que $*$ admet un neutre :

On note e_1 le neutre de G_1 et e_2 le neutre de G_2.

On remarque :

$$\forall (g_1, g_2) \in G_1 \times G_2, \quad \begin{cases} (g_1, g_2) * (e_1, e_2) = (g_1 *_1 e_1, g_2 *_2 e_2) = (g_1, g_2) \\ (e_1, e_2) * (g_1, g_2) = (e_1 *_1 g_1, e_2 *_2 g_2) = (g_1, g_2) \end{cases}$$

Donc (e_1, e_2) est le neutre de $*$.

Montrons que tout élément admet un inverse :

Soit $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$.

On remarque :

$$\begin{cases} (g_1, g_2) * \left(g_1^{-1}, g_2^{-1}\right) = \left(g_1 *_1 g_1^{-1}, g_2 *_2 g_2^{-1}\right) = (e_1, e_2) \\ \left(g_1^{-1}, g_2^{-1}\right) * (g_1, g_2) = \left(g_1^{-1} *_1 g_1, g_2^{-1} *_2 g_2\right) = (e_1, e_2) \end{cases}$$

Donc (g_1, g_2) est inversible, d'inverse $\left(g_1^{-1}, g_2^{-1}\right)$. ■

Remarque 6.38
On a :

$$G_1 \times G_2 \text{ abélien} \iff \begin{cases} G_1 \text{ abélien} \\ G_2 \text{ abélien} \end{cases}$$

Exemple 6.39 (Produit de groupes)
Soient $(G_1, *_1), \dots, (G_n, *_n)$ des groupes.

Le produit cartésien $G_1 \times \cdots \times G_n$ est naturellement muni d'une structure de groupe, de loi :

$$\begin{array}{ccc} (G_1 \times \cdots \times G_n) \times (G_1 \times \cdots \times G_n) & \longrightarrow & G_1 \times \cdots \times G_n \\ \big((g_1, \dots, g_n), (g_1', \dots, g_n')\big) & \longmapsto & \big(g_1 *_1 g_1', \dots, g_n *_n g_n'\big) \end{array}$$

Son neutre est $(e_1, \dots, e_n)$ où $\forall i \in [\![1 \,;\, n]\!]$, e_i neutre de G_i.

L'inverse d'un élément $(g_1, \dots, g_n)$ est $(g_1, \dots, g_n)^{-1} = \left(g_1^{-1}, \dots, g_n^{-1}\right)$.

Démonstration 6.40
Idem. ■

Exemple 6.41
Soit I un ensemble et G un groupe.

L'ensemble $\mathscr{F}(I, G)$ est naturellement muni d'une structure de groupe.

Notons $\times$ la loi de G et e son neutre.

On pose

$$* : \begin{array}{ccc} \mathscr{F}(I, G)^2 & \longrightarrow & \mathscr{F}(I, G) \\ (f, g) & \longmapsto & \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & G \\ t & \longmapsto & f(t) \times g(t) \end{array} \end{array}$$

Montrons que $*$ est associative :

Soient $f, g, h \in \mathscr{F}(I, G)$.

On a :

$$\begin{aligned} \forall t \in I, \quad f * (g * h)(t) &= f(t) \times (g * h)(t) \\ &= f(t) \times (g(t) \times h(t)) \\ &= (f(t) \times g(t)) \times h(t) \\ &= (f * g)(t) \times h(t) \\ &= (f * g) * h(t) \end{aligned}$$

car $\times$ est associative

Donc $*$ est associative.

Montrons que $*$ admet un élément neutre :

On pose $f_1 : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & G \\ t & \longmapsto & e \end{array}$. Montrons que f_1 est l'élément neutre de $*$.

Soit $f \in \mathscr{F}(I, G)$. Montrons que $f_1 * f = f * f_1 = f$.

On a

$$\forall t \in I, \quad \begin{cases} (f_1 * f)(t) = f_1(t) \times f(t) = e \times f(t) = f(t) \\ (f * f_1)(t) = f(t) \times f_1(t) = f(t) \times e = f(t) \end{cases}$$

Donc f_1 est l'élément neutre de $*$.

Montrons que tout élément de $\mathscr{F}(I, G)$ est inversible.

Soit $f \in \mathscr{F}(I, G)$. On pose $g : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & G \\ t & \longmapsto & f(t)^{-1} \end{array}$.

Montrons que $f * g = g * f = f_1$.

On a :

$$\forall t \in I, \quad \begin{cases} (f * g)(t) = f(t) \times g(t) = f(t) \times f(t)^{-1} = e = f_1(t) \\ (g * f)(t) = g(t) \times f(t) = f(t)^{-1} \times f(t) = e = f_1(t) \end{cases}$$

Donc tout élément de $\mathscr{F}(I, G)$ est inversible, d'inverse g.

Remarque 6.42
On a :

$$\mathscr{F}(I, G) \text{ abélien} \iff \left| \begin{array}{l} G \text{ abélien} \\ \text{ou} \\ I = \varnothing \end{array} \right.$$

6.2.2 Sous-groupes

Définition 6.43 (Sous-groupe)
Soit $(G, *)$ un groupe. On note e son élément neutre.

Un sous-groupe de $(G, *)$ (ou, par abus, de G) est une partie H de G telle que :

(1) L'élément neutre e appartient à H.

(2) La partie H est stable par produit : $\forall h_1, h_2 \in H, \quad h_1 * h_2 \in H$.

(3) La partie H est stable par passage à l'inverse : $\forall h \in H, \quad h^{-1} \in H$.

Proposition 6.44
Tout sous-groupe d'un groupe G est naturellement un groupe. Sa loi est la loi induite par celle de G.

Démonstration 6.45
On note $*$ la loi de G.

Soit H un sous-groupe de G.

Comme H est stable par $*$, on peut définir : $*_H : \begin{array}{ccc} H^2 & \longrightarrow & H \\ (h_1, h_2) & \longmapsto & h_1 * h_2 \end{array}$

Montrons que $*_H$ est associative :

On a bien

$$\forall h_1, h_2, h_3 \in H, \quad h_1 *_H (h_2 *_H h_3) = h_1 * (h_2 * h_3) = (h_1 * h_2) * h_3 = (h_1 *_H h_2) *_H h_3.$$

Montrons que $*_H$ admet un élément neutre :

On a $e \in H$ et

$$\forall h \in H, \quad \begin{cases} e *_H h = e * h = h \\ h *_H e = h * e = h \end{cases}$$

donc e est le neutre de $*_H$.

Montrons que tout élément de H est inversible par $*_H$:

Soit $h \in H$. On note h^{-1} son inverse dans G.

On a

$$\begin{cases} h^{-1} \in H \\ h *_H h^{-1} = h^{-1} *_H h = e \end{cases}$$

Donc $(H, *_H)$ est un groupe. ∎

Remarque 6.46
On a

$$H \text{ abélien} \Longleftarrow G \text{ abélien}$$

Remarque 6.47
En pratique, on note également $*$ la loi $*_H$ de H.

Proposition 6.48
Soit $(G, *)$ un groupe. On note e son élément neutre.

Soit H une partie de G.

Alors H est un sous-groupe de G si, et seulement si, les conditions suivantes sont vérifiées :

(4) $e \in H$

(5) $\forall h_1, h_2 \in H, \quad h_1 * h_2^{-1} \in H$

Démonstration 6.49
$\boxed{\Longrightarrow}$

Supposons H sous-groupe de G.

On a clairement (4) selon (1).

Montrons (5).

Soient $h_1, h_2 \in H$.

On a $h_2^{-1} \in H$ selon (3) donc $h_1 * h_2^{-1} \in H$ selon (2).

$\boxed{\Longleftarrow}$

Supposons (4) et (5).

On a (1) selon (4).

Montrons (3).

Soit $h \in H$.

On a $e \in H$ selon (4) donc selon (5), $e * h^{-1} \in H$ donc $h^{-1} \in H$.

Montrons (2).

Soient $h_1, h_2 \in H$.

On a $h_2^{-1} \in H$ selon (3) donc $h_1 * \left(h_2^{-1}\right)^{-1} \in H$ donc $h_1 * h_2 \in H$. ■

Exemple 6.50
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

L'ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$.

L'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité est un sous-groupe de $\mathbb{U}$.

Démonstration 6.51
On sait que $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe. Montrons que $\mathbb{U}$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$.

On a $1 \in \mathbb{U}$ et $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{U}, \quad z_1 \times z_2^{-1} \in \mathbb{U}$ (car $\left|z_1 \times z_2^{-1}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} = \dfrac{1}{1} = 1$).

Donc $\mathbb{U}$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$. Donc $\mathbb{U}$ est un groupe.

Montrons que $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe de $\mathbb{U}$.

On a $\mathbb{U}_n \subseteq \mathbb{U}$ et $1 \in \mathbb{U}_n$ et $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{U}_n,\ \ z_1 \times z_2^{-1} \in \mathbb{U}_n$ car $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^n = \dfrac{z_1^n}{z_2^n} = \dfrac{1}{1} = 1$.

Donc $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe de $\mathbb{U}$. Donc c'est un groupe. ■

6.2.3 Morphismes de groupe

Définition 6.52 (Morphisme de groupes)
Soient $(G_1, *_1)$ et $(G_2, *_2)$ deux groupes.

On appelle morphisme de groupes de $(G_1, *_1)$ vers $(G_2, *_2)$ (ou, par abus, de G_1 vers G_2) toute application $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ telle que :

$$\forall g, g' \in G_1,\ \ \varphi(g *_1 g') = \varphi(g) *_2 \varphi(g').$$

L'ensemble des morphismes de groupes de G_1 vers G_2 est noté :

$$\mathrm{Hom}(G_1, G_2).$$

Proposition 6.53
Soient $(G_1, *_1)$ et $(G_2, *_2)$ deux groupes et $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ un morphisme de groupes de $(G_1, *_1)$ vers $(G_2, *_2)$. On note e_1 et e_2 les éléments neutres respectifs de G_1 et G_2.

On a alors :

$$\varphi(e_1) = e_2$$

et :

$$\forall g \in G,\ \ \varphi\left(g^{-1}\right) = \varphi(g)^{-1}.$$

Démonstration 6.54
On a $e_1 *_1 e_1 = e_1$ donc :

$$\varphi(e_1 *_1 e_1) = \varphi(e_1)$$
$$\varphi(e_1) *_2 \varphi(e_1) = \varphi(e_1)$$
$$\varphi(e_1)^{-1} *_2 \varphi(e_1) *_2 \varphi(e_1) = \varphi(e_1)^{-1} *_2 \varphi(e_1)$$
$$e_2 *_2 \varphi(e_1) = e_2$$
$$\varphi(e_1) = e_2$$

Soit $g \in G_1$.

On a $g *_1 g^{-1} = e_1$ donc :

$$\begin{aligned}\varphi\left(g *_1 g^{-1}\right) &= \varphi(e_1)\\ \varphi(g) *_2 \varphi\left(g^{-1}\right) &= e_2\\ \varphi(g)^{-1} *_2 \varphi(g) *_2 \varphi\left(g^{-1}\right) &= \varphi(g)^{-1} *_2 e_2\\ \varphi\left(g^{-1}\right) &= \varphi(g)^{-1}\end{aligned}$$

■

Proposition 6.55
Soient $(G_1, *_1)$ et $(G_2, *_2)$ deux groupes et $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ un morphisme de groupes de $(G_1, *_1)$ vers $(G_2, *_2)$.

Soient H_1 un sous-groupe de G_1 et H_2 un sous-groupe de G_2.

Alors :

(1) L'image directe $\varphi(H_1)$ est un sous-groupe de G_2.

(2) L'image réciproque $\varphi^{-1}(H_2)$ est un sous-groupe de G_1.

Démonstration 6.56 (1)
Montrons que $\varphi(H_1)$ est un sous-groupe de G_2.

On a $\varphi(H_1) \subseteq G_2$.

On note e_1 l'élément neutre de G_1 et e_2 l'élément neutre de G_2.

On a $e_1 \in H_1$ donc $\varphi(e_1) \in \varphi(H_1)$ donc $e_2 \in \varphi(H_1)$.

Montrons que $\forall y_1, y_2 \in \varphi(H_1),\ \ y_1 *_2 y_2^{-1} \in \varphi(H_1)$.

Soient $y_1, y_2 \in \varphi(H_1)$. Soient $x_1, x_2 \in H_1$ tels que $\begin{cases}\varphi(x_1) = y_1\\ \varphi(x_2) = y_2\end{cases}$

On a $x_1 *_1 x_2^{-1} \in H_1$ donc $\varphi\left(x_1 *_1 x_2^{-1}\right) \in \varphi(H_1)$.

Or $\varphi\left(x_1 *_1 x_2^{-1}\right) = \varphi(x_1) *_2 \varphi\left(x_2^{-1}\right) = \varphi(x_1) *_2 \varphi(x_2)^{-1} = y_1 *_2 y_2^{-1}$.

Donc $y_1 *_2 y_2^{-1} \in \varphi(H_1)$.

Donc $\varphi(H_1)$ est un sous-groupe de G_2. ■

Démonstration 6.57 (2)
Montrons que $\varphi^{-1}(H_2)$ est un sous-groupe de G_1.

On a $\varphi^{-1}(H_2) \subseteq G_1$.

On note e_1 l'élément neutre de G_1 et e_2 l'élément neutre de G_2.

On a $e_1 \in \varphi^{-1}(H_2)$ car $\varphi(e_1) = e_2 \in H_2$.

Enfin, on a $\forall x_1, x_2 \in \varphi^{-1}(H_2),\ \ \varphi\left(x_1 *_1 x_2^{-1}\right) = \varphi(x_1) *_2 \varphi\left(x_2^{-1}\right) = \varphi(x_1) *_2 \varphi(x_2)^{-1} \in H_2$ car H_2 est un groupe.

Donc $\forall x_1, x_2 \in \varphi^{-1}(H_2),\ \ x_1 *_1 x_2^{-1} \in \varphi^{-1}(H_2)$.

Donc $\varphi^{-1}(H_2)$ est un sous-groupe de G_1. ■

Proposition 6.58
Soit G un groupe et H un sous-groupe de G.

L'application

$$i : \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & G \\ h & \longmapsto & h \end{array}$$

est un morphisme de groupes.

Démonstration 6.59
On note $*$ la loi de G et $*_H$ la loi de H (induite).

On remarque :

$$\forall h_1, h_2 \in H,\ \ i(h_1 *_H h_2) = h_1 *_H h_2 = h_1 * h_2.$$ ■

Exemple 6.60
Soit I un ensemble, J une partie de I et G un groupe.

Alors l'application de restriction

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F}(I,G) & \longrightarrow & \mathscr{F}(J,G) \\ f & \longmapsto & f\big|_J \end{array}$$

est un morphisme de groupes.

Exemple 6.61
La fonction $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ \theta & \longmapsto & \mathrm{e}^{i\theta} \end{array}$ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R},+)$ vers $(\mathbb{U},\times)$.

Démonstration 6.62
On a :

$$\forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}, \quad \varphi(\theta_1 + \theta_2) = \mathrm{e}^{i(\theta_1+\theta_2)} = \mathrm{e}^{i\theta_1}\mathrm{e}^{i\theta_2} = \varphi(\theta_1)\varphi(\theta_2).$$

■

Proposition 6.63 (Composition de morphismes de groupes)
Soient G_1, G_2 et G_3 des groupes et $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ et $\psi : G_2 \longrightarrow G_3$ des morphismes de groupes.

Alors

$$\psi \circ \varphi : G_1 \longrightarrow G_3$$

est un morphisme de groupes.

Démonstration 6.64
On note $*_1$ la loi de G_1, $*_2$ la loi de G_2 et $*_3$ la loi de G_3.

On a :

$$\begin{aligned}\forall g, g' \in G_1, \quad \psi \circ \varphi(g *_1 g') &= \psi(\varphi(g *_1 g')) \\ &= \psi(\varphi(g) *_2 \varphi(g')) \\ &= \psi(\varphi(g)) *_3 \psi(\varphi(g')) \\ &= \psi \circ \varphi(g) *_3 \psi \circ \varphi(g')\end{aligned}$$

Donc $\psi \circ \varphi$ est un morphisme de groupes. ■

Définition 6.65 (Noyau et image d'un morphisme)
Soient G_1 et G_2 deux groupes et $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ un morphisme de groupes.

On note e_2 le neutre de G_2.

L'image du morphisme φ est l'ensemble image de l'application φ :

$$\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(g_1)\}_{g_1 \in G_1} = \{g_2 \in G_2 \mid \exists g_1 \in G_1, \ \varphi(g_1) = g_2\}.$$

Le noyau du morphisme φ est l'ensemble des éléments de G_1 dont l'image par φ est le neutre de G_2 :

$$\ker\varphi = \varphi^{-1}(\{e_2\}) = \{g_1 \in G_1 \mid \varphi(g_1) = e_2\}.$$

Proposition 6.66
Soient G_1 et G_2 deux groupes et $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ un morphisme de groupes.

Alors $\ker\varphi$ *est un sous-groupe de G_1 et* $\operatorname{Im}\varphi$ *est un sous-groupe de G_2.*

Démonstration 6.67
On a $\operatorname{Im}\varphi = \varphi(G_1)$ donc $\operatorname{Im}\varphi$ est l'image directe de G_2 par φ.

Donc $\operatorname{Im}\varphi$ est un sous-groupe de G_2 selon la Proposition 6.55 car φ est un morphisme de groupes et G_1 est un sous-groupe de G_1.

$\ker\varphi$ est l'image réciproque de $\{e_2\}$ par φ.

Donc $\ker\varphi$ est un sous-groupe de G_1 selon la Proposition 6.55 car φ est un morphisme de groupes et $\{e_2\}$ est un sous-groupe de G_2. ■

Théorème 6.68
Soit $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ un morphisme de groupes.

On note e_1 le neutre de G_1.

Alors φ est une application injective si, et seulement si, son noyau est « nul », c'est-à-dire :

$$\ker\varphi = \{e_1\}.$$

Démonstration 6.69
On note e_2 le neutre de G_2.

$\boxed{\Longrightarrow}$

Supposons φ injectif.

Montrons que $\ker\varphi = \{e_1\}$.

$\boxed{\supseteq}$ On a $\varphi(e_1) = e_2$ donc $e_1 \in \varphi^{-1}(\{e_2\})$ donc $\{e_1\} \subseteq \ker\varphi$.

$\boxed{\subseteq}$ Soit $x \in \ker\varphi$. On a $\varphi(x) = e_2 = \varphi(e_1)$. Donc $x = e_1$ car φ est injectif. Donc $\ker\varphi \subseteq \{e_1\}$.

Finalement, on a $\ker\varphi = \{e_1\}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Supposons $\ker\varphi = \{e_1\}$.

Montrons que φ est injectif.

Soient $x, y \in G_1$ tels que $\varphi(x) = \varphi(y)$. Montrons que $x = y$.

On a :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(y) \\ \varphi(x)\varphi(y)^{-1} &= e_2 \\ \varphi(x)\varphi\left(y^{-1}\right) &= e_2 \\ \varphi\left(xy^{-1}\right) &= e_2 \end{aligned}$$

Donc $xy^{-1} \in \ker \varphi$ donc $xy^{-1} = e_1$ car $\ker \varphi = \{e_1\}$.

Donc $x = y$.

Donc φ est injectif. ■

6.2.4 Isomorphismes, endomorphismes, automorphismes

Définition 6.70 (Isomorphisme)
Soient G_1 et G_2 deux groupes.

Un isomorphisme de groupes de G_1 vers G_2 est un morphisme de groupes $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ bijectif.

Théorème 6.71
Soient G_1, G_2 et G_3 des groupes.

Soient $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ et $\varphi : G_2 \longrightarrow G_3$ deux isomorphismes de groupes.

Alors $\psi \circ \varphi : G_1 \longrightarrow G_3$ est un isomorphisme de groupes.

Démonstration 6.72
Comme ψ et φ sont des morphismes de groupes, d'après la Proposition 6.63, $\psi \circ \varphi$ est un morphisme de groupes.

Comme ψ et φ sont des bijections, d'après la Proposition 4.46, $\psi \circ \varphi$ est une bijection.

Donc $\psi \circ \varphi$ est un isomorphisme de groupes. ■

Théorème 6.73
Soit $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ un isomorphisme de groupes.

Alors la bijection réciproque $\varphi^{-1} : G_2 \longrightarrow G_1$ est un isomorphisme de groupes.

Démonstration 6.74
On note $*_1$ la loi de G_1 et $*_2$ la loi de G_2.

On sait déjà que φ^{-1} est une bijection (Définition/Proposition 4.48).

Montrons que $\varphi^{-1} : G_2 \longrightarrow G_1$ est un morphisme de groupes.

Soient $y, y' \in G_2$.

On a $\varphi \circ \varphi^{-1}(y) = y$ et $\varphi \circ \varphi^{-1}(y') = y'$.

Donc, comme φ est un morphisme de groupes, on a $\varphi\left(\varphi^{-1}(y) *_1 \varphi^{-1}(y')\right) = y *_2 y'$.

Donc $\varphi^{-1}(y) *_1 \varphi^{-1}(y')$ est l'antécédent de $y *_2 y'$ par φ, c'est-à-dire $\varphi^{-1}(y) *_1 \varphi^{-1}(y') = \varphi^{-1}(y *_2 y')$.

Donc φ^{-1} est un morphisme de groupes.

Donc φ^{-1} est un isomorphisme de groupes. ■

Définition 6.75 (Endomorphisme)
Soit G un groupe.

Un endomorphisme de groupe de G est un morphisme de groupes $\varphi : G \longrightarrow G$.

Définition 6.76 (Automorphisme)
Soit G un groupe.

Un automorphisme de groupe de G est un isomorphisme de groupes $\varphi : G \longrightarrow G$, c'est-à-dire un endomorphisme de G bijectif.

L'ensemble des automorphismes de groupe de G est noté $\mathrm{Aut}(G)$.

Exemple 6.77
Soit G un groupe.

Alors $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$ est un groupe appelé le groupe des automorphismes de G.

Démonstration 6.78
⋆⋆ EXERCICE ⋆⋆ ■

6.3 Anneaux

6.3.1 Définition

Définition 6.79 (Anneau)
Un anneau est un triplet $(A, +, \times)$ où A est un ensemble et $+$ et $\times$ sont deux lois de composition internes sur A tels que les conditions suivantes soient vérifiées :

(1) $(A, +)$ est un groupe commutatif.

(2) La loi $\times$ est associative et admet un élément neutre.

(3) La loi $\times$ est distributive par rapport à la loi $+$, c'est-à-dire :

$$\forall a,b,c \in A,\ \ a\times(b+c) = a\times b + a\times c \quad \text{et} \quad (b+c)\times a = b\times a + c\times a.$$

On dit aussi que A est muni d'une structure d'anneau, ou, par abus, que A est un anneau.

Si, de plus, la loi $\times$ est commutative, on dit que A est un anneau commutatif.

Remarque 6.80
La loi $+$ est appelée l'addition de l'anneau.

La loi $\times$ est appelée sa multiplication. On s'autorise à ne pas écrire son symbole (c'est-à-dire écrire ab au lieu de $a\times b$).

L'élément neutre de $+$ est généralement noté 0 ou 0_A ; celui de $\times$ est noté 1 ou 1_A.

Si a est un élément de A, son « élément inverse » pour $+$ est appelé son opposé et est noté $-a$ (il existe car $(A,+)$ est un groupe commutatif) ; son élément inverse pour $\times$ est appelé son inverse et est noté a^{-1} (s'il existe.)

Exemple 6.81
On vérifie facilement que $(\mathbb{Z},+,\times)$, $(\mathbb{Q},+,\times)$, $(\mathbb{R},+,\times)$, $(\mathbb{C},+,\times)$, $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+,\times\right)$ et $\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}},+,\times\right)$ sont des anneaux commutatifs.

Exemple 6.82
Soient $(A_1,+_1,\times_1)$ et $(A_2,+_2,\times_2)$ deux anneaux de neutres $0_1, 1_1$ et $0_2, 1_2$ respectivement.

L'ensemble $A_1\times A_2$ est naturellement muni d'une structure d'anneau, de lois

$$\begin{array}{ccc} (A_1\times A_2)\times(A_1\times A_2) & \longrightarrow & A_1\times A_2 \\ \left((a_1,a_2),(a_1',a_2')\right) & \longmapsto & \left(a_1 +_1 a_1', a_2 +_2 a_2'\right) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} (A_1\times A_2)\times(A_1\times A_2) & \longrightarrow & A_1\times A_2 \\ \left((a_1,a_2),(a_1',a_2')\right) & \longmapsto & \left(a_1 \times_1 a_1', a_2 \times_2 a_2'\right) \end{array}$$

Ses éléments neutres sont $(0_1,0_2)$ et $(1_1,1_2)$.

Exemple 6.83
Soient I un ensemble et A un anneau.

$\mathscr{F}(I,A)$ est naturellement muni d'une structure d'anneau.

On note $\begin{cases} + \text{ et } \times \text{ les lois de } A \\ 0 \text{ et } 1 \text{ les lois de } A \end{cases}$

Comme $(A,+)$ est un groupe commutatif, on sait que $\mathscr{F}(I,A)$ est un groupe commutatif pour la loi

$$\begin{array}{rccccc} \oplus : & \mathscr{F}(I,A)^2 & \longrightarrow & & \mathscr{F}(I,A) & \\ & (f,g) & \longmapsto & I & \longrightarrow & A \\ & & & x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array}$$

dont le neutre est $\begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & 0 \end{array}$ (*cf.* Exemple 6.41).

On pose d'autre part

$$\begin{array}{rccccc} \otimes : & \mathscr{F}(I,A)^2 & \longrightarrow & & \mathscr{F}(I,A) & \\ & (f,g) & \longmapsto & I & \longrightarrow & A \\ & & & x & \longmapsto & f(x)\times g(x) \end{array}$$

On vérifie facilement que $\otimes$ est associative et qu'elle admet pour neutre $\begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & 1 \end{array}$.

Vérifions maintenant que $\otimes$ est distributive par rapport à $\oplus$.

Soient $f,g,h \in \mathscr{F}(I,A)$.

Montrons que $\begin{cases} f\otimes(g\oplus h) = f\otimes g\oplus f\otimes h & (1) \\ (g\oplus h)\otimes f = g\otimes f\oplus h\otimes f & (2) \end{cases}$

Soit $x \in I$.

On a :

$$\begin{aligned} [f\otimes(g\oplus h)](x) &= f(x)\times(g\oplus h)(x) && \textit{par définition de } \oplus \\ &= f(x)\times(g(x)+h(x)) && \textit{car } A \textit{ est un anneau} \\ &= f(x)\times g(x)+f(x)\times h(x) && \textit{par définition de } \otimes \\ &= [f\otimes g](x)+[f\otimes h](x) && \textit{par définition de } \oplus \\ &= [(f\otimes g)\oplus(f\otimes h)](x) \end{aligned}$$

D'où (1).

On montre de même (2).

Donc $\otimes$ est distributive par rapport à $\oplus$.

Donc $(\mathscr{F}(I,A),+,\times)$ est un anneau.

6.3.2 Calculs dans un anneau

Proposition 6.84
Soit $(A,+,\times)$ *un anneau.*

On note 0 *son neutre pour* $+$.

On a, pour tout élément a de A :

$$0 \times a = a \times 0 = 0.$$

On dit que l'élément 0 est absorbant pour le produit.

Démonstration 6.85
Soit $a \in A$.

On a :

$$\begin{aligned}
1 + 0 &= 1 \\
&\quad \textit{on multiplie à gauche par } a \\
a\,(1+0) &= a \times 1 \\
&\quad \textit{car } \times \textit{ est distributive par rapport à } + \\
a \times 1 + a \times 0 &= a \times 1 \\
a + a \times 0 &= a \\
&\quad \textit{on ajoute } -a \textit{ de chaque côté} \\
a \times 0 &= 0
\end{aligned}$$

■

Proposition 6.86
Soit $(A, +, \times)$ un anneau.

On a :

$$\forall a, b \in A, \quad -(a \times b) = (-a) \times b = a \times (-b) \quad \textit{et} \quad (-a) \times (-b) = ab.$$

Démonstration 6.87
Soient $a, b \in A$.

On a d'une part $a\,(b-b) = a \times 0 = 0$ et d'autre part $a\,(b-b) = ab + a\,(-b)$.

Ainsi, on a $ab + a\,(-b) = 0$.

D'où, en ajoutant l'opposé de ab de chaque côté : $a\,(-b) = -ab$.

De même, on a : $(-a)\,b + ab = (-a+a)\,b = 0 \times b = 0$ donc $(-a)\,b = -ab$.

Enfin, selon ce qui précède : $(-a)\,(-b) = -a\,(-b) = -(-ab) = ab$. ■

Définition 6.88 (Anneau nul)
Un anneau $(A, +, \times)$ est dit nul si A est un singleton.

Proposition 6.89
Un anneau $(A, +, \times)$ d'éléments neutres 0 et 1 est nul si, et seulement si, on a : $0 = 1$.

Démonstration 6.90
$\boxed{\Longrightarrow}$ Si A est nul alors $0 = 1$.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Supposons $0 = 1$. Montrons que A est nul.

On a $\forall a \in A, \quad a = a \times 1 = a \times 0 = 0$.

Donc $\operatorname{Card} A = 1$. ∎

Proposition 6.91
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient A un anneau et a et b deux éléments de A tels que :

$$ab = ba$$

(on dit que les éléments a et b commutent).

On a :

(1) La formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

(2) La factorisation de $a^n - b^n$:

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}$$

Démonstration 6.92 (1)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $\mathscr{P}(n) : (a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Si $n = 0$, on a : $(a+b)^0 = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} = \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$. Montrons $\mathscr{P}(n+1)$:

On a :

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)\,(a+b)^n \\
&\qquad\qquad \textit{selon } \mathscr{P}(n) \\
&= (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}ba^k b^{n-k} \\
&\qquad\qquad \textit{car } ba = ab \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} \\
&\qquad\qquad \textit{car } \binom{n}{-1} = \binom{n}{n+1} = 0 \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n-k+1}
\end{aligned}
$$

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathscr{P}(n)$ par récurrence. ■

Démonstration 6.93 (2)
On a :

$$
\begin{aligned}
(a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^k b^{n-k-1} &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(a^{k+1}b^{n-k-1} - ba^k b^{n-k-1}\right) \\
&\qquad\qquad \textit{car } ba = ab \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(a^{k+1}b^{n-k-1} - a^k b^{n-k}\right) \\
&\qquad\qquad \textit{somme téléscopique} \\
&= a^n b^0 - a^0 b^n \\
&= a^n - b^n
\end{aligned}
$$

■

Exemple 6.94
Déterminons toutes les structures d'anneau sur $\{0\}$, puis sur $\{0\ ;\ 1\}$.

L'unique structure d'anneau sur $\{0\}$ est la suivante :

$+$	0
0	0

$\times$	0
0	0

On obtient bien une structure d'anneau :

- $(\{0\}, +)$ est bien un groupe commutatif (le groupe nul).

- $\times$ est associative et possède un neutre.

- $\times$ est bien distributive par rapport à + car

$$\forall a, b, c \in \{0\}, \quad a\,(b + c) = 0 = 0 + 0 = ab + ac.$$

Déterminons maintenant les structures d'anneau sur $A = \{0\,;\,1\}$.

$\boxed{\text{analyse}}$

Comme $\operatorname{Card} A = 2$, les lois + et $\times$ n'admettent pas le même élément neutre.

Si le neutre de + est 0 et celui de $\times$ est 1 :

+	0	1
0	0	1
1	1	0

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

Si le neutre de + est 1 et celui de $\times$ est 0 :

+	0	1
0	1	0
1	0	1

$\times$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\boxed{\text{synthèse}}$

On admet qu'on obtient bien deux structures d'anneau (on obtient deux anneaux isomorphes à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

Définition 6.95 (Élément inversible d'un anneau)
Soient $(A, +, \times)$ un anneau et a un élément de A.

On dit que a est inversible dans l'anneau A s'il est inversible pour la loi $\times$.

L'ensemble des éléments inversibles est souvent noté $A^{\times}$.

Définition/Proposition 6.96 (Groupe des inversibles d'un anneau)
Soit $(A, +, \times)$ un anneau.

On appelle groupe des inversibles de l'anneau A l'ensemble des éléments inversibles de A, muni de la loi $\times$.

C'est un groupe commutatif si l'anneau A est commutatif.

Démonstration 6.97
Montrons que l'application $\begin{array}{ccc} A^\times \times A^\times & \longrightarrow & A^\times \\ (a,b) & \longmapsto & ab \end{array}$ est bien définie, c'est-à-dire que $A^\times$ est une partie de A stable par $\times$.

Soient $a, b \in A^\times$. On sait que ab est inversible, d'inverse $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ (*cf.* Proposition 6.20).

Donc $ab \in A^\times$ donc $A^\times$ est stable par $\times$.

On a $\forall a, b, c \in A^\times,\ \ a\,(bc) = (ab)\,c$ donc $\times$ est associative.

La loi $\times$ admet 1 comme élément neutre dans $A^\times$ car $1 \in A^\times$ (*cf.* Exemple 6.15).

Tout élément de $A^\times$ est inversible dans $A^\times$ (*cf.* Exemple 6.17).

Donc $A^\times$ est un groupe. ■

Exemple 6.98
Déterminons $\mathbb{Z}^\times$, $\mathbb{R}^\times$, $\mathbb{C}^\times$ et $\left(\mathbb{R}^\mathbb{N}\right)^\times$.

Dans $(\mathbb{Z}, +, \times)$ (anneau de neutres 0 et 1), les seuls éléments inversibles sont 1 et -1 donc $\mathbb{Z}^\times = \{-1\ ;\ 1\}$. Sa loi de groupe est :

$\times$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

Dans $(\mathbb{Q}, +, \times)$ (anneau de neutres 0 et 1), tous les éléments sont inversibles sauf 0 donc $\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Idem dans $(\mathbb{R}, +, \times)$ et $(\mathbb{C}, +, \times)$: $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Dans $\left(\mathbb{R}^\mathbb{N}, +, \times\right)$ (anneau de neutres $(0)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(1)_{n\in\mathbb{N}}$), tous les éléments sont inversibles sauf les suites dont au moins un terme est nul donc $\left(\mathbb{R}^\mathbb{N}\right)^\times = (\mathbb{R}^*)^\mathbb{N}$.

6.3.3 Sous-anneaux

Définition 6.99 (Sous-anneau)
Soit $(A, +, \times)$ un anneau. On note 0 et 1 ses neutres.

Un sous-anneau de $(A, +, \times)$ (ou, par abus, de A) est une partie B de A telle que :

(1) Les éléments neutres 0 et 1 appartiennent à B.

(2) La partie B est stable par somme :

$$\forall b_1, b_2 \in B, \quad b_1 + b_2 \in B.$$

(3) La partie B est stable par produit :

$$\forall b_1, b_2 \in B, \quad b_1 \times b_2 \in B.$$

(4) La partie B est stable par passage à l'opposé :

$$\forall b \in B, \quad -b \in B.$$

Proposition 6.100
Tout sous-anneau d'un anneau $(A, +, \times)$ d'éléments neutres 0 et 1 est naturellement un anneau dont les lois sont celles induites par celles de A.

Démonstration 6.101
Soit B un sous-anneau de A.

Selon (2) et (3), B est une partie de A stable par $+$ et $\times$ donc $+$ et $\times$ induisent des lois $\oplus$ et $\otimes$ sur B.

Montrons que $(B, \oplus)$ est un groupe abélien.

On remarque que $(B, \oplus)$ est un sous-groupe de $(A, +)$ selon (1), (2) et (4) donc $(B, \oplus)$ est un groupe abélien.

Montrons que $\otimes$ est associative et possède un élément neutre :

$\otimes$ est associative car $\times$ est associative et $\otimes$ possède un neutre car $1 \in B$ et $\forall b \in B$, $\begin{cases} 1 \otimes b = 1 \times b = b \\ b \otimes 1 = b \times 1 = b \end{cases}$

$\otimes$ est distributive par rapport à $\oplus$ car $\times$ est distributive par rapport à $+$.

Donc $(B, \oplus, \otimes)$ est un anneau. ■

Proposition 6.102
Soient $(A, +, \times)$ d'éléments neutres 0 et 1 et B une partie de A.

Alors B est un sous-anneau de A si, et seulement si, les conditions suivantes sont vérifiées :

(5) $1 \in B$

(6) $\forall b_1, b_2 \in B, \quad b_1 - b_2 \in B$

(7) $\forall b_1, b_2 \in B, \quad b_1 \times b_2 \in B$

Démonstration 6.103
$\boxed{\Longrightarrow}$

Supposons (1), (2), (3) et (4).

On a clairement (5) et (7) selon (1) et (3).

Montrons (6) :

Soient $b_1, b_2 \in B$. On a $-b_2 \in B$ selon (4) puis $b_1 - b_2 = b_1 + (-b_2) \in B$ selon (2).

D'où (6).

$\boxed{\Longleftarrow}$

Supposons (5), (6) et (7).

On a clairement (3) selon (7).

On a $1 \in B$ selon (5) donc $1 - 1 \in B$ selon (6), c'est-à-dire $0 \in B$. D'où (1).

Montrons (4) :

Soit $b \in B$. On a $0 - b \in B$ selon (6) donc $-b \in B$. D'où (4).

Montrons (2) :

Soient $b_1, b_2 \in B$. On a $-b_2 \in B$ selon (4). Donc $b_1 - (-b_2) \in B$ selon (6). Donc $b_1 + b_2 \in B$. D'où (2). ∎

Exemple 6.104
On vérifie facilement que $\mathbb{Z}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R}$, que $\mathbb{Q}$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$, que $\mathbb{R}$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$, que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, ...

6.3.4 Morphismes d'anneaux

Définition 6.105 (Morphisme d'anneaux)
Soient $(A_1, +_1, \times_1)$ et $(A_2, +_2, \times_2)$ deux anneaux d'éléments neutres respectifs 0_1 et 1_1 et 0_2 et 1_2.

On appelle morphisme d'anneaux de $(A_1, +_1, \times_1)$ vers $(A_2, +_2, \times_2)$ (ou, par abus, de A_1 vers A_2) toute application $\varphi : A_1 \longrightarrow A_2$ telle que les conditions suivantes sont vérifiées :

(1) $\varphi(1_1) = 1_2$

(2) $\forall a, a' \in A_1, \;\; \varphi(a +_1 a') = \varphi(a) +_2 \varphi(a')$

(3) $\forall a, a' \in A_1, \;\; \varphi(a \times_1 a') = \varphi(a) \times_2 \varphi(a')$

Proposition 6.106
Soient $(A_1, +_1, \times_1)$ *et* $(A_2, +_2, \times_2)$ *deux anneaux d'éléments neutres pour l'addition respectifs* 0_1 *et* 0_2.

Soit $\varphi : A_1 \longrightarrow A_2$ *un morphisme d'anneaux.*

Alors on a :

$$\varphi(0_1) = 0_2$$

et

$$\forall a \in A_1, \ \ \varphi(-a) = -\varphi(a).$$

Démonstration 6.107
Montrons que $\varphi(0_1) = 0_2$. Comme φ est un morphisme d'anneaux de A_1 vers A_2, c'est un morphisme de groupes de $(A_1, +_1)$ vers $(A_2, +_2)$. On a alors $\varphi(0_1) = 0_2$ (*cf.* Proposition 6.53).

De même, on a $\forall a \in A_1, \ \varphi(-a) = -\varphi(a)$ car φ est un morphisme de groupes de $(A_1, +_1)$ vers $(A_2, +_2)$ (*cf.* Proposition 6.53). ■

Proposition 6.108
Soit $(A, +, \times)$ *un anneau dont on note l'élément neutre pour la multiplication* 1 *et* B *un sous-anneau de* A.

L'application

$$\begin{array}{rccc} i : & B & \longrightarrow & A \\ & b & \longmapsto & b \end{array}$$

est un morphisme d'anneaux.

Démonstration 6.109
On a $i(1) = 1$ et

$$\forall b_1, b_2 \in B, \ \begin{cases} i(b_1 + b_2) = b_1 + b_2 = i(b_1) + i(b_2) \\ i(b_1 b_2) = b_1 b_2 = i(b_1)\, i(b_2) \end{cases}$$ ■

Exemple 6.110
Soient $(A_1, +_1, \times_1)$ et $(A_2, +_2, \times_2)$ deux anneaux.

Les projections $p_1 : A_1 \times A_2 \longrightarrow A_1$ et $p_2 : A_1 \times A_2 \longrightarrow A_2$ sont des morphismes d'anneaux.

Exemple 6.111
Soit I un ensemble, J une partie de I et A un anneau.

Alors l'application de restriction

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F}(I, A) & \longrightarrow & \mathscr{F}(J, A) \\ f & \longmapsto & f\big|_J \end{array}$$

est un morphisme d'anneaux.

Proposition 6.112 (Composition de morphismes d'anneaux)
Soient A_1, A_2 et A_3 des anneaux et $\varphi : A_1 \longrightarrow A_2$ et $\psi : A_2 \longrightarrow A_3$ des morphismes d'anneaux.

Alors

$$\psi \circ \varphi : A_1 \longrightarrow A_3$$

est un morphisme d'anneaux.

Démonstration 6.113
On note 1_1, 1_2 et 1_3 les neutres respectifs de A_1, A_2 et A_3 pour la multiplication et $+_i$ et $\times_i$ les lois de A_i pour tout $i \in [\![1 ; 3]\!]$.

On a $\psi \circ \varphi(1_1) = \psi(\varphi(1_1)) = \psi(1_2) = 1_3$.

Soient $a, b \in A_1$.

On a :

$$\begin{cases} \psi \circ \varphi(a +_1 b) = \psi(\varphi(a +_1 b)) = \psi(\varphi(a) +_2 \varphi(b)) = \psi(\varphi(a)) +_3 \psi(\varphi(b)) \\ \psi \circ \varphi(a \times_1 b) = \psi(\varphi(a) \times_2 \varphi(b)) = \psi(\varphi(a)) \times_3 \psi(\varphi(b)) \end{cases}$$

Donc $\psi \circ \varphi$ est un morphisme d'anneaux de A_1 vers A_3. ■

6.3.5 Isomorphismes, endomorphismes, automorphismes

Définition 6.114 (Isomorphisme)
Soient A_1 et A_2 deux anneaux.

Un isomorphisme d'anneaux de A_1 vers A_2 est un morphisme d'anneaux $\varphi : A_1 \longrightarrow A_2$ bijectif.

Oubli 6.115
Un composée d'isomorphismes d'anneaux est un isomorphisme d'anneaux.

Théorème 6.116
Soit un isomorphisme d'anneaux $\varphi : A_1 \longrightarrow A_2$. Alors la bijection réciproque $\varphi^{-1} : A_2 \longrightarrow A_1$ est un isomorphisme d'anneaux.

Démonstration 6.117
On note $+_1$ et $\times_1$ les lois de A_1 et $+_2$ et $\times_2$ les lois de A_2. On note 1_1 et 1_2 les neutres de $\times_1$ et $\times_2$.

On sait que φ^{-1} est une bijection de A_2 vers A_1.

Montrons que φ^{-1} est un morphisme d'anneaux.

On a $\varphi(1_1) = 1_2$ donc $\varphi^{-1}(1_2) = 1_1$.

Soient $y, y' \in A_2$. On a
$$\varphi\left(\varphi^{-1}(y) +_1 \varphi^{-1}(y')\right) = \varphi\left(\varphi^{-1}(y)\right) +_2 \varphi\left(\varphi^{-1}(y')\right) = y +_2 y'$$
donc $\varphi^{-1}(y) +_1 \varphi^{-1}(y')$ est l'antécédent de $y +_2 y'$ par φ, c'est-à-dire
$$\varphi^{-1}(y) +_1 \varphi^{-1}(y') = \varphi^{-1}(y +_2 y').$$

On montre de même $\varphi^{-1}(y) \times_1 \varphi^{-1}(y') = \varphi^{-1}(y \times_2 y')$.

Donc φ^{-1} est un morphisme d'anneaux.

Donc φ^{-1} est un isomorphisme d'anneaux. ■

Définition 6.118 (Endomorphisme)
Soit A un anneau.

Un endomorphisme d'anneau de A est un morphisme d'anneaux $\varphi : A \longrightarrow A$.

Définition 6.119 (Automorphisme)
Soit A un anneau.

Un automorphisme de A est un isomorphisme d'anneaux $\varphi : A \longrightarrow A$, c'est-à-dire un endomorphisme de A bijectif.

L'ensemble des automorphismes d'anneau de A est noté $\mathrm{Aut}(A)$.

Exemple 6.120
Soit A un anneau.

Alors $(\mathrm{Aut}(A), \circ)$ est un groupe, appelé le groupe des automorphismes de A.

Démonstration 6.121
⋆⋆ **EXERCICE** ⋆⋆ ■

6.3.6 Anneaux intègres

Définition 6.122 (Anneau intègre)
Soit $(A, +, \times)$ un anneau. On note 0 son élément neutre pour $+$.

On dit que $(A, +, \times)$ est un anneau intègre s'il est non-nul, commutatif et « sans diviseurs de 0 » :

$$\begin{cases} 0 \neq 1 \\ \forall a, b \in A, \quad ab = ba \\ \forall a, b \in A, \quad ab = 0 \iff \left| \begin{array}{l} a = 0 \\ \text{ou} \\ b = 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

Exemple 6.123
Si $A = \mathbb{Z}^2$ alors $(1, 0) \times (0, 1) = (0, 0)$ donc A est un anneau non-intègre.

Si $A = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ alors $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*} \times \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-^*} = 0$ donc A est un anneau non-intègre.

Les anneaux usuels $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont intègres.

Remarque 6.124
Un anneau est intègre si, et seulement si, (S) : $\begin{cases} \text{il est non-nul} \\ \text{il est commutatif} \\ \text{tout élément non-nul est régulier pour le produit} \end{cases}$

Démonstration 6.125
$\boxed{\Longrightarrow}$

Soit $(A, +, \times)$ un anneau intègre.

Soit $a \in A \setminus \{0\}$. Montrons que a est régulier pour $\times$.

Soient $b, c \in A$ tels que $ab = ac$.

On a :

$$\begin{aligned} ab - ac &= 0 \\ a(b - c) &= 0 \\ b - c &= 0 \quad \text{\textit{car A est intègre et $a \neq 0$}} \\ b &= c \end{aligned}$$

$\boxed{\Longleftarrow}$

Soit A un anneau tel que (S) soit vérifié.

Montrons que A est intègre.

Soient $a, b \in A$ tels que $ab = 0$. Montrons que $a = 0$ ou $b = 0$.

Si $a = 0$: OK.

Si $a \neq 0$ alors $ab = a \times 0$ donc $b = 0$ car a est régulier et non-nul.

Donc A est intègre. ■

6.4 Corps

Définition 6.126 (Corps)
Un corps est un anneau non-nul, commutatif et dont tout élément non-nul est inversible, c'est-à-dire un anneau $(K, +, \times)$ tel que les conditions suivantes soient satisfaites :

(1) K n'est pas un singleton, c'est-à-dire $0 \neq 1$.

(2) K est un anneau commutatif.

(3) $K^{\times} = K \setminus \{0\}$.

On dit aussi que K est muni d'une structure de corps, ou, par abus, que K est un corps.

Proposition 6.127
Si K est un corps alors $K \setminus \{0\}$ est un groupe commutatif.

Démonstration 6.128
On sait que le groupe des inversibles d'un anneau est un groupe pour la loi $\times$ donc $(K^{\times}, \times)$ est un groupe (*cf.* Définition/Proposition 6.96).

De plus, on a $K^{\times} = K \setminus \{0\}$ et $\times$ est commutative.

Donc $(K \setminus \{0\}, \times)$ est commutatif. ■

Proposition 6.129
Tout corps est un anneau intègre.

Démonstration 6.130
C'est clair car le fait que tous les éléments non-nuls soient inversibles implique le fait que tous les éléments non-nuls soient réguliers. ■

Exemple 6.131
On vérifie facilement que $(\mathbb{Q},+,\times)$, $(\mathbb{R},+,\times)$ et $(\mathbb{C},+,\times)$ sont des corps.

Exemple 6.132
Soient $(K_1,+_1,\times_1)$ et $(K_2,+_2,\times_2)$ deux corps (donc deux anneaux dont on note 0_1 et 1_1 et 0_2 et 1_2 les neutres).

On a vu que $K_1 \times K_2$ est naturellement muni d'une structure d'anneau (*cf.* Exemple 6.82).

Cependant, ce n'est pas un corps.

En effet, il n'est pas intègre : $(1_1,0_2)\,(0_1,1_2) = (0_1,0_2)$.

Exemple 6.133
Soit I un ensemble et K un corps.

On a vu que $\mathscr{F}(I,K)$ est naturellement muni d'une structure d'anneau (*cf.* Exemple 6.83).

Si $I = \varnothing$ alors $\mathscr{F}(I,K)$ n'est pas un corps car c'est l'anneau nul.

Si $I = \{x\}$ est un singleton alors $\varphi : \begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & \mathscr{F}(\{x\},K) \\ \lambda & \longmapsto & \begin{array}{ccc} \{x\} & \longrightarrow & K \\ x & \longmapsto & \lambda \end{array} \end{array}$ est un isomorphisme d'anneaux. Or K est un corps donc $\mathscr{F}(I,K)$ est un corps.

Si I contient au moins deux élément x et y avec $x \neq y$ alors $\mathscr{F}(I,K)$ est un anneau non-intègre car $f : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & K \\ z & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } z = x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & K \\ z & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } z = y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$ vérifient $f \neq 0$, $g \neq 0$ et $fg = 0$.

Donc $\mathscr{F}(I,K)$ n'est pas un corps.

Chapitre 7

Limites de fonctions, continuité

Sommaire

7.1 Voisinages

7.1.1 Définition

Définition 7.1
Soit $V \subseteq \mathbb{R}$.

Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que V est un voisinage de a dans $\mathbb{R}$ si on a :

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad]a - \varepsilon\ ;\ a + \varepsilon[\ \subseteq V.$$

On dit que V est un voisinage de $+\infty$ dans $\mathbb{R}$ si on a :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad]\alpha\ ;\ +\infty[\ \subseteq V.$$

On dit que V est un voisinage de $-\infty$ dans $\mathbb{R}$ si on a :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad]-\infty\ ;\ \alpha[\ \subseteq V.$$

Exemple 7.2
$\mathbb{R}$ est un voisinage de tout point $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

$\mathbb{R}_+$ est un voisinage de $+\infty$.

Si $a \in \mathbb{R}_+^*$ alors $\mathbb{R}_+$ est un voisinage de a car $]a - \varepsilon\ ;\ a + \varepsilon[\ \subseteq \mathbb{R}_+$ avec $\varepsilon = a$.

$\mathbb{R}_+$ n'est pas un voisinage de 0 car $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad]0 - \varepsilon\ ;\ 0 + \varepsilon[\ \not\subseteq \mathbb{R}_+$.

Pour tout $a \in \mathbb{R}_-$ on a : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad]a - \varepsilon\ ;\ a + \varepsilon[\ \not\subseteq \mathbb{R}_+$ car $a \notin \mathbb{R}_+$.

$\mathbb{R}_+$ n'est pas un voisinage de $-\infty$.

L'ensemble des points dont $\mathbb{R}_+$ est un voisinage est donc $]0\ ;\ +\infty]$.

L'ensemble des points dont $[0\ ;\ 1]$ est $]0\ ;\ 1[$.

Soit $a \in \mathbb{R}$. On a $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad]a - \varepsilon\ ;\ a + \varepsilon[\ \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \varnothing$ car $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans R.

Donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad]a - \varepsilon\ ;\ a + \varepsilon[\ \not\subseteq \mathbb{Q}$.

Donc $\mathbb{Q}$ n'est le voisinage d'aucun réel.

De même, $\mathbb{Q}$ n'est pas un voisinage de $+\infty$ ni de $-\infty$.

Notation 7.3
Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Dans ce cours, on notera $\mathscr{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a dans $\mathbb{R}$.

Proposition 7.4
Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.

(1) Si $a \in \mathbb{R}$ alors tout voisinage de a contient a :

$$\forall V \in \mathscr{V}(a), \quad a \in V.$$

(2) L'intersection de deux voisinages de a est encore un voisinage de a :

$$\forall V, W \in \mathscr{V}(a), \quad V \cap W \in \mathscr{V}(a).$$

(3) Si $a \neq b$ alors a et b admettent des voisinages respectifs disjoints :

$$\exists V \in \mathscr{V}(a), \quad \exists W \in \mathscr{V}(b), \quad V \cap W = \varnothing.$$

Démonstration 7.5
⋆⋆ EXERCICE ⋆⋆ ■

Remarque 7.6 (Reformulation de la définition d'une partie dense de $\mathbb{R}$ (Définition 5.87))
Soit $A \subseteq \mathbb{R}$.

On a :

$$A \text{ dense dans } \mathbb{R} \iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall V \in \mathscr{V}(x), \quad A \cap V \neq \varnothing.$$

7.1.2 Vocabulaire lié aux voisinages

Si $a \in \overline{\mathbb{R}}$, on dit qu'une propriété est vraie « au voisinage de a » si elle est vraie sur un certain voisinage de a.

Définition 7.7
Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f est bornée au voisinage de a s'il existe un voisinage V de a tel que la restriction $f|_{A \cap V}$ soit bornée :

$$\exists V \in \mathscr{V}(a), \quad \exists M \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in A \cap V, \quad |f(x)| \leqslant M.$$

Exemple 7.8
La fonction $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est bornée au voisinage de tout point $a \in [-\infty\,;+\infty[$.

Elle n'est pas bornée au voisinage de $+\infty$.

Démonstration 7.9
On a $\forall x \in]a-1\,;a+1[\,,\ \ 0 < \exp x < \mathrm{e}^{a+1}$ donc exp est bornée au voisinage de a.

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}_-,\ \ 0 < \exp x \leqslant 1$ donc exp est bornée au voisinage de $-\infty$ (car $\mathbb{R}_- \in \mathscr{V}(-\infty)$). ■

Définition 7.10
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g \in \mathscr{F}(A, \mathbb{R})$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

On dit que f et g coïncident au voisinage de a si on a :

$$\exists V \in \mathscr{V}(a)\,,\ \ \forall x \in A \cap V,\ \ f(x) = g(x)\,.$$

Rappel 7.11 (Extremum global)
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in A$.

On dit que f admet un maximum (global) en a si on a : $\forall x \in A,\ \ f(x) \leqslant f(a)$.

On dit que f admet un minimum (global) en a si on a : $\forall x \in A,\ \ f(x) \geqslant f(a)$.

On dit que f admet un extremum (global) en a si f admet un maximum ou un minimum en a.

Définition 7.12 (Extremum local)
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in A$.

On dit que f admet un maximum local en a s'il existe un voisinage V de a tel que $f|_{V\cap A}$ admette un maximum global en a, c'est-à-dire si on a :

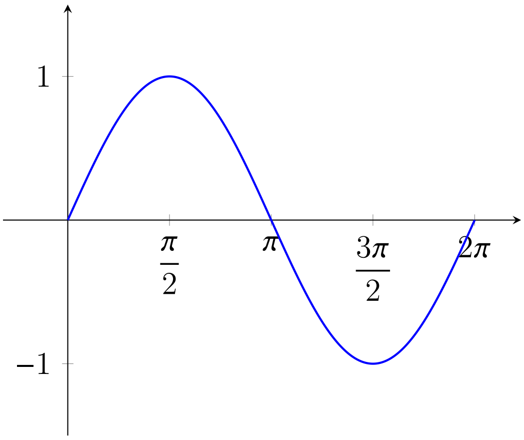
$$\exists V \in \mathscr{V}(a)\,,\ \ \forall x \in V \cap A,\ \ f(x) \leqslant f(a)\,.$$

On dit que f admet un minimum local en a s'il existe un voisinage V de a tel que $f|_{V\cap A}$ admette un minimum global en a, c'est-à-dire si on a :

$$\exists V \in \mathscr{V}(a)\,,\ \ \forall x \in V \cap A,\ \ f(x) \geqslant f(a)\,.$$

On dit que f admet un extremum local en a si f admet un maximum local ou un minimum local en a.

Exemple 7.13
Posons $f: \begin{array}{ccc} [0\,;2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$:



f admet :

- un maximum global en $\dfrac{\pi}{2}$;
- un minimum global en $\dfrac{3\pi}{2}$;
- un maximum local en 2π ;
- un minimum local en 0.

Remarque 7.14
Pluriel de maximum : maxima ou maximums.

Pluriel de minimum : minima ou minimums.

Pluriel d'extremum : extrema ou extremums.

7.2 Limite d'une fonction en un point de $\overline{\mathbb{R}}$

Dans ce chapitre, on considère une fonction $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur une partie $A \subseteq \mathbb{R}$ et on définit sa limite en un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Pour cela, on suppose qu'il existe des points où la fonction f est définie et qui sont arbitrairement proches de a (autrement, la limite n'a pas de sens).

Précisément, on supposera que tout voisinage de a dans $\mathbb{R}$ rencontre A :

$$\forall V \in \mathscr{V}(a), \; V \cap A \neq \varnothing.$$

Si $a = +\infty$, cela signifie que A est une partie non-majorée de $\mathbb{R}$.

Si $a = -\infty$, cela signifie que A est une partie non-minorée de $\mathbb{R}$.

Si $a \in \mathbb{R}$, cela signifie : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \ \exists a' \in A, \ \ |a' - a| \leqslant \varepsilon$.

7.2.1 Définition d'une limite

Définition/Proposition 7.15
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

On suppose que tout voisinage de a dans $\mathbb{R}$ rencontre A :

$$\forall V \in \mathscr{V}(a), \ \ V \cap A \neq \varnothing.$$

On dit que « $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a » ou que « f tend vers ℓ en a » si on a :

$$\forall V \in \mathscr{V}(\ell), \ \ \exists W \in \mathscr{V}(a), \ \ \forall x \in W \cap A, \ \ f(x) \in V,$$

c'est-à-dire :

$$\forall V \in \mathscr{V}(\ell), \ \ \exists W \in \mathscr{V}(a), \ \ f(W \cap A) \subseteq V.$$

Unicité de la limite : il existe au plus un élément $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que f tende vers ℓ en a. S'il existe, on appelle cet élément ℓ la limite de f en a et on le note :

$$\lim_a f \quad \text{ou} \quad \lim_{x \longrightarrow a} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \longrightarrow a \\ x \in A}} f(x).$$

Démonstration 7.16
Soient $\ell, \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$ deux limites de f en a. Montrons que $\ell = \ell'$.

Par l'absurde, supposons $\ell \neq \ell'$.

Soient $V \in \mathscr{V}(\ell)$ et $V' \in \mathscr{V}(\ell')$ tels que $V \cap V' = \varnothing$.

Soit $W \in \mathscr{V}(a)$ tel que $f(W \cap A) \subseteq V$.

Soit $W' \in \mathscr{V}(a)$ tel que $f(W' \cap A) \subseteq V'$.

On pose $W'' = W \cap W'$. On a $W'' \in \mathscr{V}(a)$ selon la Proposition 7.4.

De plus :

$$\begin{aligned} f(W'' \cap A) &\subseteq f(W \cap A) \cap f(W' \cap A) \\ &\subseteq V \cap V' \\ &= \varnothing \text{ : contradiction.} \end{aligned}$$

■

Remarque 7.17
Lorsqu'on utilise une notation de limite dans une formule mathématique, on prétend que la limite existe.

Par exemple, la proposition « $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) \neq 0$ » signifie que la limite existe et est non-nulle (ce n'est donc pas la négation de la proposition « $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = 0$ »).

En revanche, si on écrit par exemple « $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x)$ existe $\iff \dots$ », on ne suppose pas a priori que la limite existe.

Remarque 7.18
La limite d'une fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ en $+\infty$ coïncide avec celle de la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$.

Remarque 7.19
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si $\ell \in \mathbb{R}$ alors on a

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \ell \iff \lim_{x \longrightarrow a} f(x) - \ell = 0.$$

Si $a \in \mathbb{R}$ alors on a

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \ell \iff \lim_{h \longrightarrow 0} f(a+h) = \ell.$$

Remarque 7.20
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g \in \mathscr{F}(A, \mathbb{R})$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si f et g coïncident au voisinage de a alors f admet une limite en a si, et seulement si, g admet une limite en a. Les deux limites sont alors égales.

Proposition 7.21 (Reformulation de la Définition/Proposition 7.15 au cas par cas)
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

- *Si $a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$: on suppose $\forall \delta \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists x \in A,\ |x-a| \leqslant \delta$. On a :*

$$\ell = \lim_{x \longrightarrow a} f(x) \iff \left[\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in A,\ |x-a| \leqslant \delta \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\right].$$

- *Si $a \in \mathbb{R}$ et $\ell = +\infty$: on suppose $\forall \delta \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists x \in A,\ |x-a| \leqslant \delta$. On a :*

$$\ell = \lim_{x \longrightarrow a} f(x) \iff \left[\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in A,\ |x-a| \leqslant \delta \implies f(x) \geqslant \alpha\right].$$

- *Si $a \in \mathbb{R}$ et $\ell = -\infty$: on suppose $\forall \delta \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \exists x \in A,\ \ |x-a| \leqslant \delta$. On a :*

$$\ell = \lim_{x \longrightarrow a} f(x) \iff \left[\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \forall x \in A,\ \ |x-a| \leqslant \delta \implies f(x) \leqslant \alpha\right].$$

- *Si $a = +\infty$ et $\ell \in \mathbb{R}$: on suppose la partie A non-majorée. On a :*

$$\ell = \lim_{x \longrightarrow a} f(x) \iff \left[\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \exists \beta \in \mathbb{R},\ \ \forall x \in A,\ \ x \geqslant \beta \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\right].$$

- *Si $a = +\infty$ et $\ell = +\infty$: on suppose la partie A non-majorée. On a :*

$$\ell = \lim_{x \longrightarrow a} f(x) \iff [\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \ \exists \beta \in \mathbb{R},\ \ \forall x \in A,\ \ x \geqslant \beta \implies f(x) \geqslant \alpha].$$

- *Si $a = +\infty$ et $\ell = -\infty$: on suppose la partie A non-majorée. On a :*

$$\ell = \lim_{x \longrightarrow a} f(x) \iff [\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \ \exists \beta \in \mathbb{R},\ \ \forall x \in A,\ \ x \geqslant \beta \implies f(x) \leqslant \alpha].$$

- *Si $a = -\infty$ et $\ell \in \mathbb{R}$: on suppose la partie A non-minorée. On a :*

$$\ell = \lim_{x \longrightarrow a} f(x) \iff \left[\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \exists \beta \in \mathbb{R},\ \ \forall x \in A,\ \ x \leqslant \beta \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\right].$$

- *Si $a = -\infty$ et $\ell = +\infty$: on suppose la partie A non-minorée. On a :*

$$\ell = \lim_{x \longrightarrow a} f(x) \iff [\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \ \exists \beta \in \mathbb{R},\ \ \forall x \in A,\ \ x \leqslant \beta \implies f(x) \geqslant \alpha].$$

- *Si $a = -\infty$ et $\ell = -\infty$: on suppose la partie A non-minorée. On a :*

$$\ell = \lim_{x \longrightarrow a} f(x) \iff [\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \ \exists \beta \in \mathbb{R},\ \ \forall x \in A,\ \ x \leqslant \beta \implies f(x) \leqslant \alpha].$$

Rappel 7.22 (Définition de a^b)
Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

L'expression a^b est définie dans plusieurs cas :

- Si $b \in \mathbb{N}$ alors on pose

$$a^b = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{b \text{ facteurs}}.$$

  Autrement dit (définition par récurrence) :

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ \forall b \in \mathbb{N},\ \ a^{b+1} = a \times a^b \end{cases}$$

- Si $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{Z}$: on étend la définition précédente en posant, si b est un entier strictement négatif :
$$a^b = \frac{1}{a^{-b}}.$$
- Si $a > 0$ alors on pose
$$a^b = \mathrm{e}^{b \ln a}.$$
- Si $a = 0$ et $b \geqslant 0$ alors on pose :
$$0^b = \begin{cases} 1 & \text{si } b = 0 \\ 0 & \text{si } b > 0 \end{cases}$$

Lorsque plusieurs cas s'appliquent, ils donnent le même résultat.

Exemple 7.23
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} x^\lambda = \begin{cases} +\infty & \text{si } \lambda > 0 \\ 1 & \text{si } \lambda = 0 \\ 0 & \text{si } \lambda < 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x \in \mathbb{R}_+^*}} x^\lambda = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda > 0 \\ 1 & \text{si } \lambda = 0 \\ +\infty & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$$

Démonstration 7.24
Si $\lambda > 0$:

Montrons que
$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists \beta \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ x \geqslant \beta \implies x^\lambda \geqslant \alpha.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

On a
$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ x^\lambda \geqslant \alpha &\iff \left(x^\lambda\right)^{1/\lambda} \geqslant \alpha^{1/\lambda} \\ &\iff x \geqslant \alpha^{1/\lambda} \end{aligned}$$

car $t \longmapsto t^{1/\lambda} = \mathrm{e}^{\ln t / \lambda}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\lambda > 0$.

Donc le réel $\beta = \alpha^{1/\lambda}$ convient.

Donc $\lim_{x \longrightarrow +\infty} x^\lambda = +\infty$.

Montrons que
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ x \leqslant \delta \implies \left|x^\lambda - 0\right| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

On a
$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \left|x^\lambda - 0\right| \leqslant \varepsilon &\iff x^\lambda \leqslant \varepsilon \\ &\iff x \leqslant \varepsilon^{1/\lambda}. \end{aligned}$$

Donc $\delta = \varepsilon^{1/\lambda}$ convient.

Donc $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x \in \mathbb{R}_+^*}} x^\lambda = 0$.

Si $\lambda = 0$:

On a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \ x^\lambda = 1$ donc

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^\lambda = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x \in \mathbb{R}_+^*}} x^\lambda = 1 \end{cases}$$

Si $\lambda < 0$:

La fonction $t \longmapsto t^{1/\lambda} = \mathrm{e}^{\ln t/\lambda}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Montrons que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \ \exists \beta \in \mathbb{R}, \ \ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \ x \geqslant \beta \implies \left|x^\lambda\right| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Le réel $\beta = \varepsilon^{1/\lambda}$ convient.

Donc $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} x^\lambda = 0$.

Montrons que

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \ \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \ \ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \ x \leqslant \delta \implies x^\lambda \geqslant \alpha.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Le réel $\delta = \alpha^{1/\lambda}$ convient car $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \ x \leqslant \alpha^{1/\lambda} \implies x^\lambda \geqslant \alpha$.

Donc $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x \in \mathbb{R}_+^*}} x^\lambda = +\infty$. ■

Remarque 7.25
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in A$.

On suppose que f est définie en a.

Si f admet une limite en a alors cette limite est $f(a)$.

Démonstration 7.26
Supposons que f possède une limite ℓ en a.

Montrons que $\ell = f(a)$.

On a

$$\forall V \in \mathscr{V}(\ell), \ \ \exists W \in \mathscr{V}(a), \ \ \forall x \in A \cap W, \ \ f(x) \in V.$$

Donc
$$\forall V \in \mathscr{V}(\ell), \quad f(a) \in V$$
car $\begin{cases} \forall W \in \mathscr{V}(a), \quad a \in W \\ a \in A \end{cases}$ donc $a \in A \cap W$.

Donc $f(a) = \ell$ car sinon il existe $V' \in \mathscr{V}(f(a))$ tel que $\begin{cases} V \cap V' = \varnothing \\ f(a) \in V' \end{cases}$ donc $f(a) \notin V$. ■

7.2.2 Limites et ordre

Proposition 7.27
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $a, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On suppose
$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \ell.$$

Si $\lambda > \ell$ alors λ majore strictement f au voisinage de a :
$$\exists V \in \mathscr{V}(a), \quad \forall x \in V \cap A, \quad f(x) < \lambda.$$

Si $\lambda < \ell$ alors λ minore strictement f au voisinage de a :
$$\exists V \in \mathscr{V}(a), \quad \forall x \in V \cap A, \quad f(x) > \lambda.$$

Démonstration 7.28
Supposons $\lambda > \ell$.

Alors $V =]-\infty\,;\lambda[\in \mathscr{V}(\ell)$.

Donc il existe $W \in \mathscr{V}(a)$ tel que
$$\forall x \in A, \quad x \in W \implies f(x) \in V.$$

C'est-à-dire $\forall x \in A, \quad x \in W \implies f(x) < \lambda$.

Si $\lambda < \ell$: idem en prenant $V =]\lambda\,;+\infty[$. ■

Corollaire 7.29
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si f tend vers une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.

Si f tend vers $+\infty$ en a alors f est minorée au voisinage de a.

Si f tend vers $-\infty$ en a alors f est majorée au voisinage de a.

Démonstration 7.30
Supposons que f tend vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en a.

On a $\ell - 1 < \ell < \ell + 1$ donc

$$\begin{cases} \exists V_1 \in \mathscr{V}(a), \ \ \forall x \in A \cap V_1, \ \ \ell - 1 < f(x) \\ \exists V_2 \in \mathscr{V}(a), \ \ \forall x \in A \cap V_2, \ \ \ell + 1 > f(x) \end{cases}$$

selon la Proposition 7.27.

D'où, avec $V = V_1 \cap V_2$:

$$\forall x \in A \cap V, \ \ \ell - 1 < f(x) < \ell + 1$$

donc f est bornée au voisinage de a.

Supposons $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = +\infty$.

On a $0 < +\infty$. Donc 0 minore strictement f au voisinage de a selon la Proposition 7.27.

Idem si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = -\infty$. ■

Corollaire 7.31 (Passage à la limite dans une inégalité, version 1)
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On suppose que f admet une limite en a.

Si f est minorée par λ au voisinage de a, c'est-à-dire $\exists V \in \mathscr{V}(a), \ \forall x \in A \cap V, \ \lambda \leqslant f(x)$, alors

$$\lambda \leqslant \lim_{x \longrightarrow a} f(x).$$

Si f est majorée par λ au voisinage de a, c'est-à-dire $\exists V \in \mathscr{V}(a), \ \forall x \in A \cap V, \ \lambda \geqslant f(x)$, alors

$$\lambda \geqslant \lim_{x \longrightarrow a} f(x).$$

Démonstration 7.32
On suppose $\lambda \leqslant f$ au voisinage de a.

Montrons que $\lambda \leqslant \lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x)$.

Par l'absurde, supposons $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) < \lambda$.

Alors λ majore strictement f au voisinage de a :

$$\exists V_2 \in \mathscr{V}(a), \ \ \forall x \in A \cap V_2, \ \ f(x) < \lambda.$$

Or on a :

$$\exists V_1 \in \mathscr{V}(a), \ \ \forall x \in A \cap V_1, \ \ \lambda \leqslant f(x).$$

Considérons de tels voisinages V_1, V_2 de a et posons $V = V_1 \cap V_2$.

On a $V \in \mathscr{V}(a)$ et $\forall x \in A \cap V$, $\begin{cases} f(x) \geqslant \lambda \\ f(x) < \lambda \end{cases}$

Donc $A \cap V = \varnothing$: contradiction avec l'existence de $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x)$.

Idem si $\lambda \geqslant f$ au voisinage de a. ■

Proposition 7.33 (Théorème des gendarmes)
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$, trois fonctions $f, g, h \in \mathscr{F}(A, \mathbb{R})$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si on a $\forall x \in A,\ \ g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ et si g et h admettent la même limite finie ℓ en a, alors on a

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \ell.$$

Si on a $\forall x \in A,\ \ g(x) \leqslant f(x)$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow a} g(x) = +\infty$, alors on a

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = +\infty.$$

Si on a $\forall x \in A,\ \ f(x) \leqslant h(x)$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow a} h(x) = -\infty$, alors on a

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = -\infty.$$

NB : dans les trois cas, la proposition assure l'existence de la limite de f en a.

Démonstration 7.34
⋆⋆ **Exercice** ⋆⋆ (s'inspirer de la démonstration du théorème des gendarmes pour les suites (Démonstration 5.33 et Démonstration 5.69)). ■

7.2.3 Compléments

7.2.3.1 Limites à droite/gauche

Définition 7.35 (Limite à droite)
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

On appelle limite à droite de f en a la limite en a, si elle existe, de la restriction $f\big|_{A \cap]a;+\infty[}$. On la note alors :

$$\lim_{a^+} f \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) \qquad \text{ou} \qquad \lim_{\substack{x \longrightarrow a \\ x > a}} f(x)\,.$$

NB : pour que cette limite existe, il faut en particulier que tout voisinage de a rencontre l'ensemble $A \cap \,]a\,;+\infty[$.

Définition 7.36 (Limite à gauche)
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

On appelle limite à gauche de f en a la limite en a, si elle existe, de la restriction $f\big|_{A\cap]-\infty;a[}$. On la note alors :

$$\lim_{a^-} f \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\longrightarrow a^-} f(x) \qquad \text{ou} \qquad \lim_{\substack{x\longrightarrow a\\ x<a}} f(x)\,.$$

NB : pour que cette limite existe, il faut en particulier que tout voisinage de a rencontre l'ensemble $A \cap \,]-\infty\,;a[$.

Exemple 7.37
On a :

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad\qquad \lim_{x\longrightarrow 0^+} \lfloor x \rfloor = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\longrightarrow 0^-} \lfloor x \rfloor = -1.$$

Proposition 7.38
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

On suppose que tout voisinage de a rencontre les ensembles $A \cap \,]-\infty\,;a[$ et $A \cap \,]a\,;+\infty[$.

Si f n'est pas définie en a alors

$$\lim_{a} f = \ell \iff \lim_{a^-} f = \lim_{a^+} f = \ell.$$

Si f est définie en a alors

$$\lim_{a} f = \ell \iff \lim_{a^-} f = \lim_{a^+} f = f(a) = \ell.$$

7.2.3.2 Limites par valeurs supérieures/inférieures

Notation 7.39 (Limite par valeurs supérieures)
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

La notation $\lim\limits_{a} f = \ell^+$ signifie que f tend vers ℓ en a et qu'on a $f > \ell$ au voisinage de a :

$$\lim_{a} f = \ell^+ \iff \begin{cases} \lim\limits_{a} f = \ell \\ \exists V \in \mathscr{V}(a)\,,\ \ \forall x \in A \cap V,\ \ f(x) > \ell \end{cases}$$

On dit alors que f tend vers ℓ en a par valeurs supérieures.

Notation 7.40 (Limite par valeurs inférieures)
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

La notation $\lim_a f = \ell^-$ signifie que f tend vers ℓ en a et qu'on a $f < \ell$ au voisinage de a :

$$\lim_a f = \ell^- \iff \begin{cases} \lim_a f = \ell \\ \exists V \in \mathscr{V}(a), \ \ \forall x \in A \cap V, \ \ f(x) < \ell \end{cases}$$

On dit alors que f tend vers ℓ en a par valeurs inférieures.

Exemple 7.41
On a :

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} x = 0^+ \qquad \lim_{x \longrightarrow 0^-} x = 0^- \qquad \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+ \qquad \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^-.$$

7.2.4 Opérations sur les limites

Proposition 7.42
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g \in \mathscr{F}(A, \mathbb{R})$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si $\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = 0$ et g bornée au voisinage de a alors

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x)\, g(x) = 0$$

.

Si $\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = +\infty$ et g minorée au voisinage de a alors

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) + g(x) = +\infty$$

.

Si $\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = -\infty$ et g majorée au voisinage de a alors

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) + g(x) = -\infty$$

.

Démonstration 7.43
⋆⋆ **Exercice** ⋆⋆ (s'inspirer des démonstrations analogues sur les suites (Démonstration 5.43 et Démonstration 5.55)). ■

Proposition 7.44 (Opérations algébriques sur les limites)
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g \in \mathscr{F}(A, \mathbb{R})$, $a, \ell, \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$ *et* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

On suppose
$$\lim_a f = \ell \qquad \text{et} \qquad \lim_a g = \ell'.$$

Si la somme $\ell + \ell'$ *est bien définie dans* $\overline{\mathbb{R}}$ *(c'est-à-dire si* $(\ell, \ell') \notin \{(-\infty, +\infty)\ ;\ (+\infty, -\infty)\}$*), alors*
$$\lim_a (f + g) = \ell + \ell'.$$

Plus généralement, si la combinaison linéaire $\lambda\ell + \mu\ell'$ *est bien définie dans* $\overline{\mathbb{R}}$*, alors*
$$\lim_a (\lambda f + \mu g) = \lambda\ell + \mu\ell'.$$

Si le produit $\ell\ell'$ *est bien défini dans* $\overline{\mathbb{R}}$ *(c'est-à-dire si* $(\ell, \ell') \notin \{(-\infty, 0)\ ;\ (+\infty, 0)\ ;\ (0\ ;\ +\infty)\ ;\ (0\ ;\ -\infty)\}$*), alors*
$$\lim_a fg = \ell\ell'.$$

Si $\lim_a f = +\infty$ *alors*
$$\lim_a \frac{1}{f} = 0^+.$$

Si $\lim_a f = -\infty$ *alors*
$$\lim_a \frac{1}{f} = 0^-.$$

Si $\lim_a f = \ell \in \mathbb{R}^*$ *alors*
$$\lim_a \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell}.$$

Si $\lim_a f = 0^+$ *alors*
$$\lim_a \frac{1}{f} = +\infty.$$

Si $\lim_a f = 0^-$ *alors*
$$\lim_a \frac{1}{f} = -\infty.$$

Démonstration 7.45 (Somme)
Supposons $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$.

Montrons que $\lim_a (f + g) = \ell + \ell'$, c'est-à-dire :
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \ \exists V \in \mathscr{V}(a), \ \ \forall x \in A \cap V, \ \ |f(x) + g(x) - \ell - \ell'| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $V_1 \in \mathscr{V}(a)$ tel que $\forall x \in A \cap V_1,\ \ |f(x) - \ell| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Soit $V_2 \in \mathscr{V}(a)$ tel que $\forall x \in A \cap V_2,\ \ |g(x) - \ell'| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Posons $V = V_1 \cap V_2 \in \mathscr{V}(a)$.

On a

$$\begin{aligned}\forall x \in A \cap V,\ \ |f(x) + g(x) - \ell - \ell'| &\leqslant |f(x) - \ell| + |g(x) - \ell'| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

Donc V convient.

Donc $\lim\limits_{a}(f+g) = \ell + \ell'$.

Si $\ell \in \{-\infty\ ;\ +\infty\}$ ou $\ell' \in \{-\infty\ ;\ +\infty\}$, alors $\lim\limits_{a}(f+g) = \ell + \ell'$ découle de la Proposition 7.42. ■

Démonstration 7.46 (Autres opérations)
⋆⋆ Exercice ⋆⋆ ■

Proposition 7.47 (Composition de limites)
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$.

On suppose

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = b \qquad et \qquad \lim_{y \longrightarrow b} g(y) = c.$$

Alors

$$\lim_{x \longrightarrow a} g \circ f(x) = c.$$

Démonstration 7.48
Montrons que $\lim\limits_{a} g \circ f = c$, c'est-à-dire

$$\forall V \in \mathscr{V}(c),\ \ \exists W \in \mathscr{V}(a),\ \ g \circ f(A \cap W) \subseteq V.$$

Soit $V \in \mathscr{V}(c)$.

Comme $\lim\limits_{b} g = c$, il existe $W_1 \in \mathscr{V}(b)$ tel que $g(B \cap W_1) \subseteq V$.

Comme $\lim\limits_{a} f = b$, il existe $W \in \mathscr{V}(a)$ tel que $f(A \cap W) \subseteq W_1$.

Ainsi, on a $f(A \cap W) \subseteq W_1 \cap B$ car $\operatorname{Im} f \subseteq B$.

Donc $g(f(A \cap W)) \subseteq V$.

C'est-à-dire $g \circ f(A \cap W) \subseteq V$.

Donc W convient.

D'où $\lim\limits_{x \longrightarrow a} g \circ f(x) = c$. ■

Remarque 7.49
On peut également composer des limites par valeurs supérieures avec des limites à droite ou des limites par valeurs inférieures avec des limites à gauche. Voir la proposition suivante, par exemple.

Proposition 7.50
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$, $a, c \in \overline{\mathbb{R}}$ et $b \in \mathbb{R}$.

On suppose

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = b^{+} \qquad \text{et} \qquad \lim_{y \longrightarrow b^{+}} g(y) = c.$$

Alors

$$\lim_{x \longrightarrow a} g \circ f(x) = c.$$

Corollaire 7.51 (Passage à la limite dans une inégalité, version 2)
Version 1 : Corollaire 7.31.

Soient $A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g \in \mathscr{F}(A, \mathbb{R})$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

On suppose que f et g admettent chacune une limite en a et qu'on a $f \leqslant g$ au voisinage de a, c'est-à-dire :

$$\exists V \in \mathscr{V}(a), \ \forall x \in A \cap V, \ f(x) \leqslant g(x).$$

Alors

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) \leqslant \lim_{x \longrightarrow a} g(x).$$

Démonstration 7.52
Si $\lim\limits_{a} f$ et $\lim\limits_{a} g$ sont finies :

On a $f \leqslant g$ au voisinage de a.

Donc $0 \leqslant g - f$.

Donc $0 \leqslant \lim\limits_{a} g - \lim\limits_{a} f$ selon le Corollaire 7.31.

Donc $\lim\limits_{a} f \leqslant \lim\limits_{a} g$.

Si $\lim_a f = +\infty$ alors $\lim_a g = +\infty$ par le théorème des gendarmes.

Si $\lim_a f = -\infty$ alors $\lim_a f \leqslant \lim_a g$.

Idem pour g. ■

7.2.5 Caractérisation séquentielle de la limite

Proposition 7.53
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

On suppose que tout voisinage de a rencontre A.

On a :

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \ell \iff \left[\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}},\ \lim_{n\longrightarrow+\infty} x_n = a \implies \lim_{n\longrightarrow+\infty} f(x_n) = \ell\right].$$

Autrement dit : f tend vers ℓ en a si, et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui tend vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ.

Démonstration 7.54
$\boxed{\implies}$

Supposons $\lim_a f = \ell$.

Soit $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ de limite a.

On a $\begin{cases} \lim_{n\longrightarrow+\infty} x_n = a \\ \lim_{x\longrightarrow a} f(x) = \ell \end{cases}$ donc

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f(x_n) = \ell.$$

$\boxed{\impliedby}$

Par contraposée :

Supposons que f ne tende pas vers ℓ en a.

On a

$$\neg\left[\forall V \in \mathscr{V}(\ell),\ \exists W \in \mathscr{V}(a),\ \forall x \in A \cap W,\ f(x) \in V\right].$$

C'est-à-dire

$$\exists V \in \mathscr{V}(\ell),\ \forall W \in \mathscr{V}(a),\ \exists x \in A \cap W,\ f(x) \notin V.$$

Soit V un tel voisinage.

Supposons $a \in \mathbb{R}$.

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists x_n \in A \cap \left] a - \frac{1}{n} \, ; a + \frac{1}{n} \right[, \quad f(x_n) \notin V.$$

En considérant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ un tel x_n, on obtient une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in A^{\mathbb{N}^*}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} f(x_n) \notin V \\ |x_n - a| \leqslant \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

On en déduit $\lim\limits_{n} x_n = a$ par le théorème des gendarmes.

Enfin, $(f(x_n))_n$ ne tend pas vers ℓ car $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(x_n) \notin V$.

Supposons $a = +\infty$.

On prend cette fois $W = [n \, ; +\infty[$ et on conclut de la même façon.

Si $a = -\infty$, idem avec $W =]-\infty \, ; n]$. ■

Exemple 7.55
Montrons que sin n'admet pas de limite en $+\infty$.

Par l'absurde, supposons que sin admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$.

En prenant $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = n\pi$, on obtient une suite $(x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$.

On a donc $\lim\limits_{n} \sin x_n = \ell$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sin x_n = 0$.

Donc $\ell = 0$.

En prenant $\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$, on obtient une suite $(y_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$.

On a donc $\lim\limits_{n} \sin y_n = \ell$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sin y_n = 1$.

Donc $\ell = 1$: contradiction.

Donc sin n'admet pas de limite en $+\infty$.

7.2.6 Théorème de la limite monotone

Théorème 7.56 (Théorème de la limite monotone en $+\infty$)
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.

On suppose que f est monotone et que A est une partie de $\mathbb{R}$ non-majorée.

Alors f admet une limite en $+\infty$:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } f \text{ est croissante et non-majorée} \\ \sup\limits_A f & \text{si } f \text{ est croissante et majorée} \\ -\infty & \text{si } f \text{ est décroissante et non-minorée} \\ \inf\limits_A f & \text{si } f \text{ est décroissante et minorée} \end{cases}$$

Démonstration 7.57
Supposons f croissante.

Si f est non-majorée :

Montrons que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$, c'est-à-dire

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \exists \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in A, \quad x \geqslant \beta \implies f(x) \geqslant \alpha.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Comme f n'est pas majorée, il existe $\beta \in A$ tel que $f(\beta) > \alpha$.

Comme f est croissante, on a

$$\forall x \in A, \quad x \geqslant \beta \implies f(x) \geqslant f(\beta) \geqslant \alpha.$$

Donc β convient et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

Si f est majorée :

La partie $\operatorname{Im} f$ de $\mathbb{R}$ est non-vide car A est non-vide (car A est non-majorée) et majorée car f est majorée.

Donc f admet une borne supérieure $\lambda \in \mathbb{R}$.

Montrons que $\lim\limits_{+\infty} f = \lambda$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in A, \quad x \geqslant \beta \implies |f(x) - \lambda| \leqslant \varepsilon.$$

Rappel : λ est caractérisée par $\begin{cases} \forall x \in A, \quad f(x) \leqslant \lambda \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists x \in A, \quad \lambda - \varepsilon < f(x) \end{cases}$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

D'après la caractérisation de λ, il existe un point $\beta \in A$ tel que $\lambda - \varepsilon < f(\beta)$.

On a
$$\forall x \in A,\ \ x \geqslant \beta \implies \lambda - \varepsilon < f(\beta) \leqslant f(x) \leqslant \lambda.$$

Donc
$$\forall x \in A,\ \ x \geqslant \beta \implies \lambda - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \lambda + \varepsilon.$$

Donc
$$\forall x \in A,\ \ x \geqslant \beta \implies |f(x) - \lambda| \leqslant \varepsilon.$$

D'où $\lim\limits_{+\infty} f = \lambda$.

Idem si f est décroissante. ■

Théorème 7.58 (Théorème de la limite monotone en $-\infty$)
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.

On suppose que f est monotone et que A est une partie de $\mathbb{R}$ non-minorée.

Alors f admet une limite en $-\infty$:

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } f \text{ est croissante et non-minorée} \\ \inf\limits_A f & \text{si } f \text{ est croissante et minorée} \\ +\infty & \text{si } f \text{ est décroissante et non-majorée} \\ \sup\limits_A f & \text{si } f \text{ est décroissante et majorée} \end{cases}$$

Théorème 7.59 (Théorème de la limite monotone en à gauche d'un réel)
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

On suppose que f est monotone et que tout voisinage de a rencontre l'ensemble $B = A \cap \left]-\infty\,;a\right[$.

Alors f admet une limite à gauche en a :

$$\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } f \text{ est croissante et non-majorée sur } B \\ \sup\limits_B f & \text{si } f \text{ est croissante et majorée sur } B \\ -\infty & \text{si } f \text{ est décroissante et non-minorée sur } B \\ \inf\limits_B f & \text{si } f \text{ est décroissante et minorée sur } B \end{cases}$$

Démonstration 7.60 (Si f est croissante et non-majorée sur B)
Comme f n'est pas majorée sur B, on a

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \exists b \in B, \quad f(b) > \alpha.$$

Donc, comme f est croissante, on a

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \exists b \in B, \quad \forall x \in A \cap [b\,;a[\,, \quad f(x) > \alpha.$$

Donc

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall x \in A \cap [a-\delta\,;a[\,, \quad f(x) > \alpha$$

en prenant $\delta = a - b$.

Finalement :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall x \in B, \quad |x-a| \leqslant \delta \implies f(x) \geqslant \alpha.$$

Donc $\lim\limits_{a^-} f = +\infty$. ■

Démonstration 7.61 (Autres cas)
★★ **Exercice** ★★ ■

Théorème 7.62 (Théorème de la limite monotone en à droite d'un réel)
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

On suppose que f est monotone et que tout voisinage de a rencontre l'ensemble $B = A \cap]a\,;+\infty[$.

Alors f admet une limite à droite en a :

$$\lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } f \text{ est croissante et non-minorée sur } B \\ \inf\limits_B f & \text{si } f \text{ est croissante et minorée sur } B \\ +\infty & \text{si } f \text{ est décroissante et non-majorée sur } B \\ \sup\limits_B f & \text{si } f \text{ est décroissante et majorée sur } B \end{cases}$$

Bilan 7.63
Une fonction monotone admet une limite à droite et une limite à gauche partout où son ensemble de définition le permet.

Exemple 7.64
Étudions les limites de la fonction « partie entière » :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}$$

Comme f est croissante sur $\mathbb{R}$, selon le théorème de la limite monotone, elle admet une limite en $+\infty$, en $-\infty$ et à droite et à gauche en tout point $a \in \mathbb{R}$.

On a $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

En effet, cette limite existe et en posant $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = n$, on obtient une suite $(x_n)_n$ qui tend vers $+\infty$ et on a $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{n} f(x_n) = +\infty$.

On a de même $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ en prenant $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = -n$.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

On a

$$\begin{cases} \lim\limits_{a^+} f = \lfloor a \rfloor \\ \lim\limits_{a^-} f = \begin{cases} a-1 & \text{si } a \in \mathbb{Z} \\ \lfloor a \rfloor & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

En effet :

Si $a \notin \mathbb{Z}$, on a

$$\forall x \in \underbrace{[\lfloor a \rfloor\ ;\ \lfloor a \rfloor + 1[}_{\text{voisinage de } a},\ \ f(x) = \lfloor a \rfloor.$$

Donc au voisinage de a, f est constante et égale à $\lfloor a \rfloor$.

Donc $\lim\limits_{a^+} f = \lim\limits_{a^-} f = \lfloor a \rfloor$.

Sinon, on a

$$\forall x \in [a\ ;\ a+1[\,,\ \ f(x) = a$$

donc $\lim\limits_{a^+} f = a = \lfloor a \rfloor$ et

$$\forall x \in [a-1\ ;\ a[\,,\ \ f(x) = a-1$$

donc $\lim\limits_{a^-} f = a - 1$.

7.3 Continuité

7.3.1 Fonctions continues en un point

7.3.1.1 Définitions

Définition 7.65 (Continuité en un point)
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in A$.

On suppose que f est définie en a.

On dit que f est continue en a si f admet une limite en a, c'est-à-dire , selon la Remarque 7.25 si

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a).$$

Remarque 7.66
Pour qu'une fonction soit continue en un point, il faut qu'elle soit définie en ce point.

Si une fonction est continue en un point, elle est bornée au voisinage de ce point (selon le Corollaire 7.29).

Remarque 7.67
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g \in \mathscr{F}(A, \mathbb{R})$ et $a \in A$.

Si f et g coïncident au voisinage de a, alors f est continue en a si, et seulement si, g est continue en a.

Démonstration 7.68
Découle de la Remarque 7.20. ■

Exemple 7.69
Montrons que la fonction $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en 0.

On a

$$\sin \text{ continu en } 0 \iff \lim_{x \longrightarrow 0} \sin x = 0.$$

Or on a vu $\forall x \in \mathbb{R}, \ |\sin x| \leqslant |x|$ donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \sin x = 0.$$

Donc sin est continu en 0.

Définition 7.70 (Continuité à droite d'un point)
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in A$.

On dit que f est continue à droite de a si on a

$$\lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) = f(a).$$

Remarque 7.71 (Reformulation)
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in A$.

Alors f est continue à droite en a si, et seulement si, on a :

(1) Tout voisinage de a rencontre l'ensemble $A \cap \left]a\,;+\infty\right[$.

(2) La restriction $f\big|_{A\cap]a;+\infty[}$ est continue en a.

Définition 7.72 (Continuité à gauche d'un point)
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in A$.

On dit que f est continue à droite de a si on a

$$\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) = f(a)\,.$$

Remarque 7.73 (Reformulation)
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in A$.

Alors f est continue à gauche en a si, et seulement si, on a :

(1) Tout voisinage de a rencontre l'ensemble $A \cap \left]-\infty\,; a\right[$.

(2) La restriction $f\big|_{A\cap]-\infty;a[}$ est continue en a.

Exemple 7.74
La fonction « partie entière » : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}$ est

$$\begin{cases} \text{continue en tout point } a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ \text{continue à droite en tout point} \\ \text{non-continue à gauche} \end{cases}$$

Définition 7.75 (Prolongement par continuité en un point)
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus A$ tel que tout voisinage de a rencontre A :

$$\forall V \in \mathscr{V}(a)\,,\;\; V \cap A \neq \varnothing.$$

On appelle prolongement par continuité de f en a toute fonction $g : A \cup \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{cases} g\big|_A = f \\ g \text{ est continue en } a \end{cases}$$

Proposition 7.76
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus A$ tel que tout voisinage de a rencontre A.

Le prolongement par continuité de f en a est unique.

Il existe si, et seulement si, la fonction f admet une limite finie ℓ en a.

L'unique prolongement par continuité de f en a est alors :

$$\begin{array}{rccc} g: & A \cup \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases} \end{array}$$

Démonstration 7.77
$\boxed{\text{unicité}}$

Soit $g : A \cup \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\begin{cases} g\big|_A = f \\ g \text{ continue en } a \end{cases}$

On a

$$\begin{cases} \forall x \in A, \quad g(x) = f(x) \\ g(a) = \lim\limits_{x \longrightarrow a} g(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) \end{cases}$$

Donc g est unique et pour que g existe, il faut que f admette une limite finie en a.

$\boxed{\text{existence}}$

Montrons que

$$f \text{ prolongeable par continuité} \iff f \text{ admet une limite finie en } a.$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Déjà vu.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Supposons $\lim\limits_{a} f = \ell \in \mathbb{R}$.

Posons $\begin{array}{rccc} g: & A \cup \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases} \end{array}$

On a

$$\begin{cases} g\big|_A = f \\ \lim\limits_{x \longrightarrow a} g(x) = \ell = g(a) \end{cases}$$

Donc f est prolongeable par continuité, de prolongement g. ∎

Exemple 7.78
Montrons que les fonctions

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \sin \dfrac{1}{x} \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin \dfrac{1}{x} \end{array}$$

sont respectivement prolongeable par continuité en 0 et non-prolongeable par continuité en 0.

On remarque $\forall x \in \mathbb{R}^*, \ \left| x \sin \dfrac{1}{x} \right| \leqslant |x|$.

Or $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} |x| = 0$.

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0 \in \mathbb{R}$.

Donc f est prolongeable par continuité en 0.

Montrons que g n'admet aucune limite finie en 0.

Supposons par l'absurde $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

Posons

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \begin{cases} x_n = \dfrac{1}{n\pi} \\ y_n = \dfrac{1}{2n\pi + \pi/2} \end{cases}$$

On a $\lim\limits_n x_n = \lim\limits_n y_n = 0$ donc

$$\lim_n g(x_n) = \lim_n g(y_n) = \ell.$$

Or on a $\begin{cases} \lim\limits_n g(x_n) = 0 \\ \lim\limits_n g(y_n) = 1 \end{cases}$ donc $0 = 1$: contradiction.

Donc g n'admet aucune limite finie en 0.

Donc g n'est pas prolongeable par continuité en 0.

7.3.1.2 Propriétés

Proposition 7.79 (Opérations algébriques)
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in A$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathscr{F}(A, \mathbb{R})$ continues en a.

La fonction $f + g$ est continue en a.

La fonction $\lambda f + \mu g$ est continue en a.

La fonction fg est continue en a.

Si $f(a) \neq 0$ alors la fonction $\dfrac{1}{f}$ est continue en a.

Si $g(a) \neq 0$ alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue en a.

Démonstration 7.80
Découle de la Proposition 7.44. ■

Proposition 7.81 (Composition)
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in A$.

On suppose que f est continue en a et que g est continue en $f(a)$.

Alors $g \circ f$ est continue en a.

Démonstration 7.82
Découle de la Proposition 7.47. ■

7.3.1.3 Caractérisation séquentielle

Proposition 7.83 (Caractérisation séquentielle de la continuité en un point)
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in A$.

On a :

$$f \text{ continue en } a \iff \left[\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}},\ \lim_{n\longrightarrow+\infty} x_n = a \implies \lim_{n\longrightarrow+\infty} f(x_n) = f(a)\right].$$

Autrement dit : f est continue en a si, et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui tend vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(a)$.

Démonstration 7.84
Découle de la Proposition 7.53. ■

7.3.2 Fonctions continues

7.3.2.1 Définition

Définition 7.85 (Continuité)
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f est continue si f est continue en tout point de A :

$$\forall a \in A, \quad \lim_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a).$$

Exemple 7.86
Les fonctions

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

sont continues.

7.3.2.2 Propriétés

Proposition 7.87 (Restriction)
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq A$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.

Alors la restriction $f|_B$ est continue.

Proposition 7.88 (Opérations algébriques)
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g \in \mathscr{F}(A, \mathbb{R})$ continues et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

La fonction $f + g$ est continue.

La fonction $\lambda f + \mu g$ est continue.

La fonction fg est continue.

Si $\forall a \in A, \ f(a) \neq 0$ alors la fonction $\dfrac{1}{f}$ est continue.

Si $\forall a \in A, \ g(a) \neq 0$ alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue.

Démonstration 7.89
Découle de la Proposition 7.79. ∎

Proposition 7.90 (Composition)
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$.

On suppose que f est continue (sur A) et que g est continue (sur B).

Alors $g \circ f$ est continue (sur A).

Démonstration 7.91
Découle de la Proposition 7.81. ■

7.3.2.3 Caractérisation séquentielle

Proposition 7.92 (Caractérisation séquentielle de la continuité)
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.

On a :

$$f \text{ est continue} \iff \left[\forall \left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}},\ \lim_{n\longrightarrow+\infty} x_n \in A \implies \lim_{n\longrightarrow+\infty} f\left(x_n\right) = f\left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} x_n\right)\right].$$

Autrement dit : f est continue si, et seulement si, pour toute suite convergente $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A dont la limite ℓ appartient à A, la suite $\left(f\left(x_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$.

Démonstration 7.93
Découle de la Proposition 7.83. ■

7.3.2.4 Exemples usuels

Proposition 7.94
Les fonctions

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \quad \sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \tan : \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\,\frac{\pi}{2} + k\pi\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$

et, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^\alpha \end{array}$$

sont continues.

Démonstration 7.95
⋆⋆ **Admis** ⋆⋆ ■

7.3.2.5 Remarque

Remarque 7.96
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.

Ne pas confondre :

(1) La restriction $f\big|_B$ est continue.

(2) La fonction f est continue en tout point de B.

On a (1) $\Longrightarrow$ (2) mais l'implication réciproque est fausse en général.

Cela dit, dans le cas particulier où B est un voisinage d'un réel x, la continuité de $f\big|_B$ implique la continuité de f en x (selon la Remarque 7.67).

Exemple 7.97
La fonction « partie entière » :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}.$$

$f\big|_{[0;1[}$ est continue mais la proposition

$$\forall x \in [0\,;1[\,,\ \ f \text{ est continue en } x$$

est fausse.

7.3.3 Fonctions continues sur un intervalle

7.3.3.1 Intervalles

Rappel 7.98
On appelle intervalle de $\mathbb{R}$ toute partie $I \subseteq \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall a, b \in I,\ \ \forall x \in \mathbb{R},\ \ a < x < b \implies x \in I.$$

Théorème 7.99 (Description des intervalles de $\mathbb{R}$)
Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les parties de $\mathbb{R}$ de la forme :

- $[a\,;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ *avec* $a, b \in \mathbb{R}$

- $[a\,;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$ *avec* $a \in \mathbb{R}$ *et* $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

- $]a\ ;\ b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$ *avec* $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *et* $b \in \mathbb{R}$.

- $]a\ ;\ b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ *avec* $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *et* $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

NB : l'ensemble vide est bien un intervalle, on l'obtient en prenant $a > b$.

Démonstration 7.100
★★ **Exercice** ★★ (*cf.* Exercice 7.17). ■

Définition 7.101 (Segment)
On appelle segment tout intervalle de la forme $[a\ ;\ b]$ où $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$.

Remarque 7.102
L'ensemble vide est un intervalle mais pas un segment.

7.3.3.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 7.103 (Théorème des valeurs intermédiaires)
Soient I *un intervalle de* $\mathbb{R}$*,* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue et* $x_1, x_2 \in I$.

Tout réel compris entre $f(x_1)$ *et* $f(x_2)$ *admet un antécédent par* f *:*

$$\forall y \in \mathbb{R},\quad f(x_1) < y < f(x_2) \implies [\exists x \in I,\quad f(x) = y]\,.$$

Démonstration 7.104

On pose $\begin{cases} a_0 = \min\{x_1\ ;\ x_2\} \\ b_0 = \max\{x_1\ ;\ x_2\} \end{cases}$

Quitte à remplacer f par $-f$, on suppose $f(a_0) < f(b_0)$.

Soit $y \in\,]f(a_0)\ ;\ f(b_0)[$.

Montrons que $y \in \operatorname{Im} f$.

On construit par récurrence la suite croissante $(a_n)_n$ et la suite décroissante $(b_n)_n$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \begin{cases} f(a_n) \leqslant y \leqslant f(b_n) \\ b_n - a_n = \dfrac{b_0 - a_0}{2^n} \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\begin{cases} f(a_n) \leqslant y \leqslant f(b_n) \\ b_n - a_n = \dfrac{b_0 - a_0}{2^n} \end{cases}$

Si $f\left(\dfrac{b_n + a_n}{2}\right) \leqslant y$ on pose $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$

Sinon, on pose $\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \end{cases}$

D'où les deux suites.

$(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes donc convergentes et de même limite ℓ.

De plus, on a $a_0 \leqslant \ell \leqslant b_0$ et $a_0, b_0 \in I$ donc $\ell \in I$.

On a $\begin{cases} \lim\limits_n a_n = \lim\limits_n b_n = \ell \in I \\ f \text{ continue en } \ell \end{cases}$ donc

$$\lim_n f(a_n) = \lim_n f(b_n) = f(\ell).$$

Enfin, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \ f(a_n) \leqslant y \leqslant f(b_n)$ donc par passage à la limite :

$$f(\ell) \leqslant y \leqslant f(\ell).$$

Donc $y = f(\ell)$.

Donc $y \in \operatorname{Im} f$. ■

Corollaire 7.105 (L'image continue d'un intervalle est un intervalle)
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

Alors l'image directe $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Démonstration 7.106
Soient $y_1, y_2 \in f(I)$ et $y \in \mathbb{R}$.

Supposons $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$.

Montrons que $y \in f(I)$.

Soient $x_1, x_2 \in I$ tels que $\begin{cases} y_1 = f(x_1) \\ y_2 = f(x_2) \end{cases}$

On a $f(x_1) \leqslant y \leqslant f(x_2)$, f est continue et I est un intervalle donc selon le théorèmes des valeurs intermédiaires, il existe $x \in I$ tel que

$$f(x) = y.$$

Donc $y \in f(I)$. ■

Remarque 7.107
Le corollaire précédent est lui aussi appelé « théorèmes des valeurs intermédiaires ».

Exemple 7.108
Montrons par des exemples que :

- l'image d'un intervalle borné par une fonction continue peut être un intervalle non-borné ;
- l'image d'un intervalle non-borné par une fonction continue peut être un intervalle borné ;
- l'image d'un intervalle ouvert par une fonction continue peut être un segment.

Soit $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$. On a $f(]0\,;1]) = [1\,;+\infty[$.

On a $\sin(\mathbb{R}) = [-1\,;1]$.

On a $\sin(]0\,;4\pi[) = [-1\,;1]$.

Corollaire 7.109 (TVI appliqué aux fonctions strictement monotones)
Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ de bornes a et b et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement monotone.

Alors f est bijective de l'intervalle I vers l'intervalle $f(I)$.

On a :

Si f est croissante et $I = [a\,;b]$ alors $f(I) = [f(a)\,;f(b)]$.

Si f est décroissante et $I = [a\,;b]$ alors $f(I) = [f(b)\,;f(a)]$.

Si f est croissante et $I = [a\,;b[$ alors $f(I) = \left[f(a)\,;\lim\limits_{b} f\right[$.

Si f est décroissante et $I = [a\,;b[$ alors $f(I) = \left]\lim\limits_{b} f\,;f(a)\right]$.

Si f est croissante et $I =]a\,;b]$ alors $f(I) = \left]\lim\limits_{a} f\,;f(b)\right]$.

Si f est décroissante et $I =]a\,;b]$ alors $f(I) = \left[f(b)\,;\lim\limits_{a} f\right[$.

Si f est croissante et $I =]a\,;b[$ alors $f(I) = \left]\lim\limits_{a} f\,;\lim\limits_{b} f\right[$.

Si f est décroissante et $I =]a\,;b[$ alors $f(I) = \left]\lim\limits_{b} f\,;\lim\limits_{a} f\right[$.

Pour ne pas allonger inutilement l'énoncé, on a supposé implicitement :

- *que a n'est pas égal à $+\infty$ (car $a < b$), ni à $-\infty$ si $a \in I$ (car $I \subseteq \mathbb{R}$) ;*

- *que b n'est pas égal à $-\infty$ (car $a < b$), ni à $+\infty$ si $b \in I$ (car $I \subseteq \mathbb{R}$).*

Démonstration 7.110 (Cas où f est croissante et $I = [a\ ;\ b]$)
f est continue et I est un intervalle donc $f(I)$ est un intervalle selon le théorème des valeurs intermédiaires.

f est strictement monotone donc c'est une injection et donc une bijection de I vers $f(I)$.

Déterminons $f(I)$:

Supposons f croissante et $I = [a\ ;\ b]$.

On a $\forall x \in I,\ \ a \leqslant x \leqslant b$ donc $\forall x \in I,\ \ f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$.

Donc $f(I) = [f(a)\ ;\ f(b)]$. ∎

Démonstration 7.111 (Cas où f est croissante et $I = [a\ ;\ b[$)
f est continue et I est un intervalle donc $f(I)$ est un intervalle selon le théorème des valeurs intermédiaires.

f est strictement monotone donc c'est une injection et donc une bijection de I vers $f(I)$.

Déterminons $f(I)$:

Supposons f croissante et $I = [a\ ;\ b[$.

On a $\forall x \in I,\ \ f(a) \leqslant f(x)$ donc $\min f(I) = f(a)$.

Supposons f non-majorée, c'est-à-dire $f(I)$ non-majoré.

Comme f est croissante et non-majorée, d'après le théorème de la limite monotone, on a $f(I) = [f(a)\ ;\ +\infty[= \left[f(a)\ ;\ \lim_b f\right[$.

Supposons f majorée.

D'après le théorème de la limite monotone, on a $\lim_b f = \sup_I f = \sup f(I)$.

Donc $f(I) = \left[f(a)\ ;\ \lim_b f\right[$ ou $f(I) = \left[f(a)\ ;\ \lim_b f\right]$ car $f(I)$ est un intervalle, $\min f(I) = f(a)$ et $\sup f(I) = \lim_b f$.

Montrons que $\lim_b f \notin f(I)$.

Par l'absurde, supposons $\lim_b f \in f(I)$.

Soit $c \in I$ tel que $f(c) = \lim_b f$.

On a
$$\forall x \in [c ; b[, \quad f(c) \leqslant f(x) \leqslant \sup_I f = f(c).$$

Donc f est constante sur $[c ; b[$: contradiction.

Donc $\lim_b f \notin f(I)$.

Donc $f(I) = \left[f(a) ; \lim_b f \right[$. ■

Démonstration 7.112 (Autres cas)
⋆⋆ Exercice ⋆⋆ ■

7.3.4 Fonctions continues sur un segment

Théorème 7.113 (Théorème des bornes atteintes)
Soit $f : [a ; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment $[a ; b]$ de $\mathbb{R}$.

Alors f admet un minimum et un maximum.

Rappel 7.114 (Cf. Exercice 5.15*)*
Soit $A \subseteq \mathbb{R}$.

Si A est non-majorée alors il existe une suite d'éléments de A qui tend vers $+\infty$.

Si $\lambda = \sup A$ alors il existe une suite d'éléments de A qui tend vers λ.

Démonstration 7.115
Montrons que f est majorée :

Par l'absurde, supposons f non-majorée, c'est-à-dire $\operatorname{Im} f$ non-majoré.

Soit $(y_n)_n \in (\operatorname{Im} f)^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_n y_n = +\infty$.

Soit $(x_n)_n \in [a ; b]^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x_n) = y_n$.

On a $\lim_n f(x_n) = +\infty$.

Comme $(x_n)_n$ est bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(x_{\varphi(n)}\right)_n$ soit convergente.

On pose $\ell = \lim_n x_{\varphi(n)}$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}, \ \ a \leqslant x \leqslant b$ donc par passage à la limite : $a \leqslant \ell \leqslant b$. Donc $\ell \in [a\ ;\ b]$.

Donc f est continue en ℓ.

Donc $f(\ell) = \lim\limits_{n} f\left(x_{\varphi(n)}\right)$.

Or $\left(f\left(x_{\varphi(n)}\right)\right)_n$ tend vers $+\infty$ car c'est une suite extraite de $(f(x_n))_n$: contradiction.

Donc f est majorée.

Donc $f([a\ ;\ b])$ est une partie non-vide et majorée de $\mathbb{R}$, qui admet donc une borne supérieure.

Donc $\sup\limits_{[a;b]} f$ existe.

Comme précédemment, on construit $(x_n)_n \in [a\ ;\ b]^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n} f(x_n) = \sup\limits_{[a;b]} f$.

Selon le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(x_{\varphi(n)}\right)_n$ soit convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$.

Comme précédemment, on montre que $\ell \in [a\ ;\ b]$.

On a $\begin{cases} \lim\limits_{n} x_{\varphi(n)} = \ell \\ f \text{ continue en } \ell \end{cases}$

Donc $\lim\limits_{n} f\left(x_{\varphi(n)}\right) = f(\ell)$.

Donc $\sup\limits_{[a;b]} f = f(\ell)$.

Donc $\max\limits_{[a;b]} f = f(\ell)$.

On montre de même le minimum. ■

Remarque 7.116
On énonce parfois ainsi le théorème des bornes atteintes : « toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes ».

Corollaire 7.117 (L'image continue d'un segment est un segment)
Soit $f : [a\ ;\ b] :\longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue sur un segment* $[a\ ;\ b]$ *de* $\mathbb{R}$.

Alors l'image directe $f([a\ ;\ b])$ *est un segment de* $\mathbb{R}$.

Démonstration 7.118
$f([a\ ;\ b])$:

- est un intervalle d'après le théorème des valeurs intermédiaires car f est continue et $[a\ ;\ b]$ est un intervalle ;

- admet un maximum et un minimum d'après le théorème des bornes atteintes car f est continue et $[a\ ;\ b]$ est un segment.

Donc $f([a\ ;\ b])$ est un segment. ∎

7.3.5 Fonctions continues injectives sur un intervalle

Théorème 7.119
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et injective.

Alors f est monotone.

Démonstration 7.120
⋆⋆ **Exercice** ⋆⋆ *Cf.* Exercice 7.31. ∎

Corollaire 7.121 (Reformulation du Théorème 7.119)
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

Alors

$$f \text{ est strictement monotone} \iff f \text{ est injective.}$$

Démonstration 7.122
$\boxed{\Longrightarrow}$ Évident.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Théorème 7.119. ∎

Théorème 7.123
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement monotone.

Alors f est une injection et donc une bijection de I vers $\operatorname{Im} f$.

Sa bijection réciproque $f^{-1} : \operatorname{Im} f \longrightarrow I$ est continue et strictement monotone.

Précisément : f^{-1} est strictement croissante si f est strictement croissante et strictement décroissante si f est strictement décroissante.

Démonstration 7.124
Montrons que f^{-1} est strictement monotone.

Supposons f strictement croissante.

Soient $y_1, y_2 \in \operatorname{Im} f$ tels que $y_1 < y_2$.

On a $\begin{cases} f\left(f^{-1}(y_1)\right) < f\left(f^{-1}(y_2)\right) \\ f \text{ strictement croissante} \end{cases}$

Donc $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.

Donc f^{-1} est strictement croissante.

Idem si f est strictement décroissante.

Montrons que f^{-1} est continue.

Supposons f strictement croissante.

Soit $y_0 \in \operatorname{Im} f$.

Montrons que f^{-1} est continue en y_0.

On pose $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Montrons que $\lim\limits_{y_0} f^{-1} = x_0$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists W \in \mathscr{V}(y_0), \ \forall y \in \operatorname{Im} f \cap W, \ \left|f^{-1}(y) - x_0\right| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Si $x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon \in I$ alors on pose $W = \left]f(x_0 - \varepsilon) ; f(x_0 + \varepsilon)\right[$ un voisinage de y_0 car f est strictement croissante.

On a $\forall y \in W, \ x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon$.

Donc W convient.

Si $x_0 - \varepsilon \in I$ et $x_0 + \varepsilon \notin I$: idem avec $W = \left]f(x_0 - \varepsilon) ; +\infty\right[$.

Etc.

Donc f^{-1} continue. ■

Exemple 7.125 (Continuité de la fonction racine carrée)
La bijection $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est continue et strictement monotone sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$.

Sa bijection réciproque $f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$ est donc continue.

Exemple 7.126
Soient $A = [0\ ;\ 1[\cup [2\ ;\ 3[$ et $B = [0\ ;\ 2[$.

On a

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \longrightarrow & B \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{si } x \in [0\ ;\ 1[\\ x-1 & \text{si } x \in [2\ ;\ 3[\end{cases} \end{array}$$

strictement croissante et continue mais

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & B & \longrightarrow & A \\ & y & \longmapsto & \begin{cases} y & \text{si } y \in [0\ ;\ 1[\\ y+1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

n'est pas continue.

D'où l'importance d'avoir un intervalle.

7.3.6 Fonctions circulaires réciproques

7.3.6.1 Arcsin

Définition/Proposition 7.127 (Fonction Arcsin)
La fonction

$$\begin{array}{ccc} \left[\frac{-\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto & \sin\theta \end{array}$$

est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

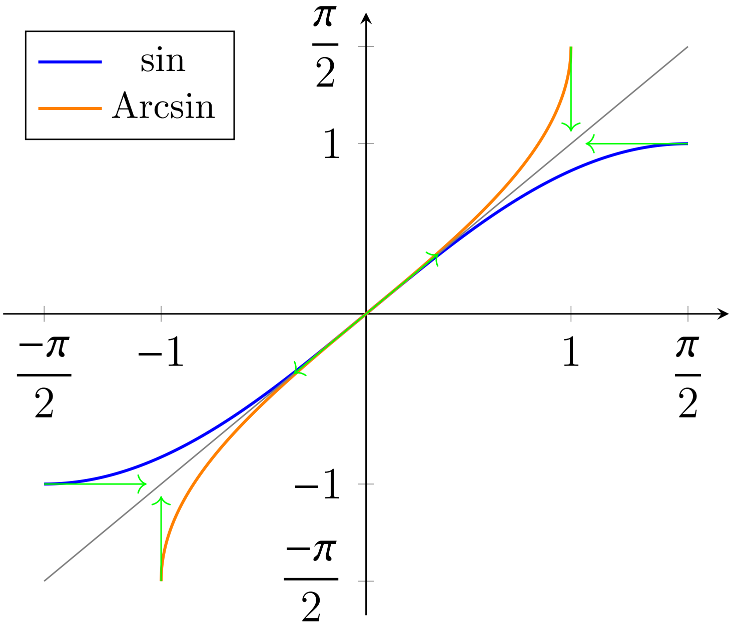
Elle est donc bijective de l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ vers l'intervalle $\left[\sin\frac{-\pi}{2}\ ;\ \sin\frac{\pi}{2}\right] = [-1\ ;\ 1]$ (selon le Corollaire 7.109).

Sa bijection réciproque est appelée la fonction arcsinus est est notée Arcsin :

$$\text{Arcsin} : [-1\ ;\ 1] \longrightarrow \left[\frac{-\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right].$$

Elle est continue et strictement croissante (selon le Théorème 7.123).

Allure du graphe :



Proposition 7.128 (Caractérisation)
Si $x \in [-1\,;\,1]$, *l'angle* $\operatorname{Arcsin} x$ *est l'unique angle* $\theta \in \left[\frac{-\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ *dont le sinus est* x.

On a donc :

$$\forall x \in [-1\,;\,1]\,,\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ \ \theta = \operatorname{Arcsin} x \iff \begin{cases} \sin\theta = x \\ \dfrac{-\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Exemple 7.129 (Valeurs à connaître)

x	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{Arcsin} x$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Proposition 7.130
La fonction Arcsin *est impaire.*

Remarque 7.131
On a

$$\forall x \in [-1\,;\,1]\,,\ \sin(\operatorname{Arcsin} x) = x$$

mais

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \ \operatorname{Arcsin}(\sin x) = \theta \iff \frac{-\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

7.3.6.2 Arccos

Définition/Proposition 7.132 (Fonction Arccos)
La fonction

$$\begin{array}{ccc} [0\ ;\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto & \cos\theta \end{array}$$

est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0\ ;\pi]$.

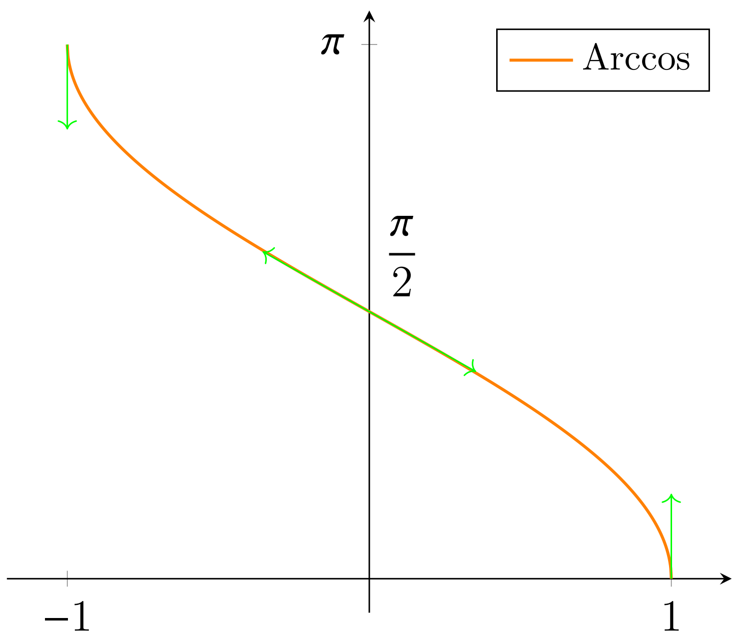
Elle est donc bijective de l'intervalle $[0\ ;\pi]$ vers l'intervalle $[\cos\pi\ ;\cos 0] = [-1\ ;1]$ (selon le Corollaire 7.109).

Sa bijection réciproque est appelée la fonction arccosinus et est notée Arccos :

$$\text{Arccos} : [-1\ ;1] \longrightarrow [0\ ;\pi]\,.$$

Elle est continue et strictement décroissante (selon le Théorème 7.123).

Allure du graphe :



Proposition 7.133 (Caractérisation)
Si $x \in [-1\ ;1]$, l'angle $\text{Arccos}\,x$ est l'unique angle $\theta \in [0\ ;\pi]$ dont le cosinus est x.

On a donc :

$$\forall x \in [-1\ ;1]\,,\quad \forall \theta \in \mathbb{R},\quad \theta = \text{Arccos}\,x \iff \begin{cases} \cos\theta = x \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \end{cases}$$

Exemple 7.134 (Valeurs à connaître)

x	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{Arccos} x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

Proposition 7.135
La fonction Arccos *n'est ni paire ni impaire.*

7.3.6.3 Arctan

Définition/Proposition 7.136 (Fonction Arctan)
La fonction

$$\begin{array}{ccc} \left]\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto & \tan\theta \end{array}$$

est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left]\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.

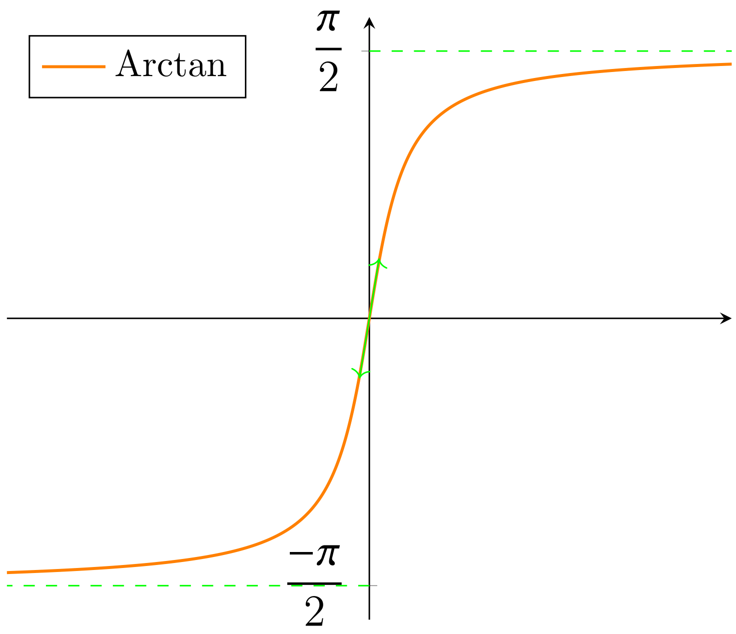
Elle est donc bijective de l'intervalle $\left]\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ vers l'intervalle $\left]\lim_{(-\pi/2)^+} \tan ; \lim_{(\pi/2)^-} \tan\right[= \mathbb{R}$ (selon le Corollaire 7.109).

Sa bijection réciproque est appelée la fonction arctangente est est notée Arctan :

$$\operatorname{Arctan} : \mathbb{R} \longrightarrow \left]\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[.$$

Elle est continue et strictement croissante (selon le Théorème 7.123).

Allure du graphe :



Proposition 7.137 (Caractérisation)
Si $x \in \mathbb{R}$, l'angle $\operatorname{Arctan} x$ est l'unique angle $\theta \in \left]\frac{-\pi}{2} \,;\, \frac{\pi}{2}\right[$ dont le tangente est x.

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \theta = \operatorname{Arctan} x \iff \begin{cases} \tan \theta = x \\ \dfrac{-\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Exemple 7.138 (Valeurs à connaître)

x	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{Arctan} x$	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

Proposition 7.139
La fonction Arctan est impaire.

7.3.6.4 Relations à connaître

Proposition 7.140
On a :

(1) $\forall x \in [-1\ ;\ 1]\,,\quad \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \dfrac{\pi}{2}$

(2) $\forall x \in [-1\ ;\ 1]\,,\quad \cos\left(\operatorname{Arcsin} x\right) = \sin\left(\operatorname{Arccos} x\right) = \sqrt{1-x^2}$

Démonstration 7.141 (1)
Soit $x \in [-1\ ;\ 1]$.

Montrons que $\operatorname{Arcsin} x = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arccos} x$.

On a

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arccos} x\right) = \cos\left(\operatorname{Arccos} x\right) = x.$$

De plus, on a $0 \leqslant \operatorname{Arccos} x \leqslant \pi$ donc

$$\frac{-\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arccos} x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Donc $\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arccos} x = \operatorname{Arcsin} x$.

D'où l'égalité. ■

Démonstration 7.142 (2)
Soit $x \in [-1\ ;\ 1]$.

Montrons que $\cos\left(\operatorname{Arcsin} x\right) = \sqrt{1-x^2}$.

On a $\cos^2\left(\operatorname{Arcsin} x\right) + \sin^2\left(\operatorname{Arcsin} x\right) = 1$ donc

$$\cos^2\left(\operatorname{Arcsin} x\right) = 1 - \sin^2\left(\operatorname{Arcsin} x\right) = 1 - x^2.$$

De plus, on a $\dfrac{-\pi}{2} \leqslant \operatorname{Arcsin} x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ donc

$$\cos\left(\operatorname{Arcsin} x\right) \geqslant 0.$$

Donc $\cos\left(\operatorname{Arcsin} x\right) = \sqrt{1-x^2}$.

Idem pour $\sin\left(\operatorname{Arccos} x\right)$. ■

7.4 Propriétés plus fortes que la continuité

7.4.1 Continuité uniforme

Définition 7.143 (Continuité uniforme)
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f est uniformément continue si on a :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \forall x, y \in A,\ \ |x - y| \leqslant \delta \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

Remarque 7.144
Ne pas confondre la continuité et la continuité uniforme.

Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.

La fonction f est continue si, et seulement si, on a :

$$\forall x \in A,\ \ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \forall y \in A,\ \ |x - y| \leqslant \delta \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

Proposition 7.145
Toute fonction uniformément continue est continue.

Démonstration 7.146
Si f est uniformément continue, on a :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \forall x, y \in A,\ \ |x - y| \leqslant \delta \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

où δ est indépendant de x.

Cela implique

$$\forall x \in A,\ \ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \forall y \in A,\ \ |x - y| \leqslant \delta \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

où δ dépend de x. ■

Exercice 7.147
Les fonctions suivantes sont-elles uniformément continues ?

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \qquad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

Indication : pour l'étude de h, on pourra montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+,\ \ \sqrt{x + y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

Correction 7.148 (f)
Posons $\varepsilon = 1$.

On a
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| = \left|x^2 - y^2\right| = |x - y|\,|x + y|\,.$$

Soit $\delta \in \mathbb{R}_+^*$.

On remarque
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(x+\delta)| = |2x + \delta|\,\delta.$$

Donc $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} |f(x) - f(x+\delta)| > 1$.

Donc f n'est pas uniformément continue.

Correction 7.149 (g)
Montrons que g est uniformément continue, c'est-à-dire
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall x, y \in [0\,;1]\,, \ |x - y| \leqslant \delta \implies |g(x) - g(y)| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

On a
$$\forall x, y \in [0\,;1]\,, \quad |g(x) - g(y)| = |x + y|\,|x - y| \leqslant 2\,|x - y|\,.$$

Donc $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ convient car on a
$$\forall x, y \in [0\,;1]\,, \quad |x - y| \leqslant \delta \implies |g(x) - g(y)| \leqslant 2 \times \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Donc g est uniformément continue.

Correction 7.150 (h)
On a $\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \ \sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

En effet :
$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y} &\iff x + y \leqslant x + y + 2\sqrt{xy} \\ &\iff 0 \leqslant 2\sqrt{xy} \\ & \text{ ce qui est vrai} \end{aligned}$$

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$.

Si $a \leqslant b$ alors $0 \leqslant \sqrt{b} - \sqrt{a} = \sqrt{a + b - a} - \sqrt{a}$ donc $\left|\sqrt{b} - \sqrt{a}\right| \leqslant \sqrt{b - a}$.

Si $a \geqslant b$, de même, on a $\left|\sqrt{b} - \sqrt{a}\right| \leqslant \sqrt{a - b}$.

Donc $\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \ \left|\sqrt{a} - \sqrt{b}\right| \leqslant \sqrt{|a-b|}$.

Montrons que h est uniformément continue, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall x, y \in \mathbb{R}_+, \ |x-y| \leqslant \delta \implies |h(x) - h(y)| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $\delta = \varepsilon^2$.

On a :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \ |x-y| \leqslant \delta \implies |h(x) - h(y)| \leqslant \sqrt{\delta} = \varepsilon.$$

Donc δ convient.

Donc h est uniformément continue.

Théorème 7.151 (Théorème de Heine)
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f : [a\ ;\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

Alors f est uniformément continue.

Démonstration 7.152
Par l'absurde, supposons

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall \delta \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists x, y \in [a\ ;\ b], \ \begin{cases} |x-y| \leqslant \delta \\ |f(x) - f(y)| > \varepsilon \end{cases}$$

Soit un tel $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

On a en particulier

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \exists x_n, y_n \in [a\ ;\ b], \ \begin{cases} |x_n - y_n| \leqslant \dfrac{1}{n} \\ |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon \end{cases}$$

En considérant de tels x_n, y_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient deux suites $(x_n)_n, (y_n)_n \in [a\ ;\ b]^{\mathbb{N}^*}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \begin{cases} |x_n - y_n| \leqslant \dfrac{1}{n} \\ |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon \end{cases}$$

Comme $(x_n)_n$ est bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe $\varphi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ strictement croissante telle que $\left(x_{\varphi(n)}\right)_n$ soit convergente.

Comme $\left(y_{\varphi(n)}\right)_n$ est bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe $\psi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ strictement croissante telle que $\left(y_{\varphi\circ\psi(n)}\right)$ soit convergente.

Ainsi, $\left(x_{\varphi\circ\psi(n)}\right)_n$ converge car c'est une suite extraite d'une suite convergente.

On pose $x = \lim_n x_{\varphi\circ\psi(n)}$ et $y = \lim_n y_{\varphi\circ\psi(n)}$.

On a
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \left|x_{\varphi\circ\psi(n)} - y_{\varphi\circ\psi(n)}\right| \leqslant \frac{1}{\varphi\circ\psi\,(n)}.$$

D'où, par passage à la limite : $|x - y| \leqslant 0$ donc $x = y$.

D'autre part, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \left|f\left(x_{\varphi\circ\psi(n)}\right) - f\left(y_{\varphi\circ\psi(n)}\right)\right| \geqslant \varepsilon.$$

D'où, par passage à la limite : $|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon$: contradiction car $x = y$. ■

7.4.2 Fonctions lipschitziennes

Définition 7.153 (Fonction lipschitzienne)
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+$.

On dit que f est k-lipschitzienne si on a :
$$\forall x, y \in A,\quad |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x - y|\,.$$

On dit que f est lipschitzienne si elle est K-lipschitzienne pour un certain $K \in \mathbb{R}_+$:
$$\exists K \in \mathbb{R}_+,\ \forall x, y \in A,\quad |f(x) - f(y)| \leqslant K\,|x - y|\,.$$

Proposition 7.154
Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.

Démonstration 7.155
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+$.

On suppose que f est k-lipschitzienne.

Montrons que f est uniformément continue, c'est-à-dire
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x, y \in A,\quad |x - y| \leqslant \delta \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $\delta = \dfrac{\varepsilon}{k}$.

On a
$$\forall x, y \in A,\quad |x - y| \leqslant \delta \implies |f(x) - f(y)| \leqslant k\delta = \varepsilon.$$

Donc δ convient.

Donc f est uniformément continue. ■

Bilan 7.156
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.

On a :
$$f \text{ lipschitzienne } \Longrightarrow f \text{ uniformément continue } \Longrightarrow f \text{ continue.}$$

Exercice 7.157
Les fonctions suivantes sont-elles lipschitziennes ?
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \qquad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

Correction 7.158 (f)
On a vu que f n'est pas uniformément continue donc par contraposée, f n'est pas lipschitzienne (*cf.* Correction 7.148).

Correction 7.159 (g)
Montrons que g est lipschitzienne, c'est-à-dire
$$\exists k \in \mathbb{R}_+,\ \ \forall x, y \in [0\,;1]\,,\ \ |g(x) - g(y)| \leqslant k\,|x - y|\,.$$

On a :
$$\begin{aligned} \forall x, y \in [0\,;1]\,,\ \ |g(x) - g(y)| &= \left|x^2 - y^2\right| \\ &= |x - y|\,|x + y| \\ &\leqslant 2\,|x - y| \end{aligned}$$

Donc g est 2-lipschitzienne.

Donc g est lipschitzienne.

Correction 7.160 (h)
Montrons que h n'est pas lipschitzienne.

Par l'absurde, supposons h lipschitzienne, c'est-à-dire :
$$\exists k \in \mathbb{R}_+,\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}_+,\ \ \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant k\,|x - y|\,.$$

En particulier, on a
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \left|\sqrt{\frac{1}{n}} - \sqrt{0}\right| \leqslant k\left|\frac{1}{n} - 0\right|.$$

Donc
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{k}{n}.$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \sqrt{n} \leqslant k$: contradiction.

Donc h n'est pas lipschitzienne.

Chapitre 8

Arithmétique

Sommaire

8.1 Rappels & compléments

8.1.1 Division euclidienne

Définition/Proposition 8.1 (Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$)
Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$$\begin{cases} a = qb + r \\ 0 \leqslant r < b \end{cases}$$

L'entier q est appelé le quotient de la division euclidienne de a par b.

L'entier r est appelé le reste de la division euclidienne de a par b.

Exemple 8.2
Divisions euclidiennes de 37 et −37 par 10 :

$$37 = 3 \times 10 + 7 \quad \text{et} \quad -37 = (-4) \times 10 + 3.$$

Démonstration 8.3
Cf. Démonstration 3.41. ∎

8.1.2 Divisibilité

Définition 8.4 (Divisibilité dans $\mathbb{Z}$)
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Si on a

$$\exists c \in \mathbb{Z}, \quad ac = b$$

alors on dit que

- a divise b ;
- a est un diviseur de b ;
- b est un multiple de a ;
- b est divisible par a.

Notation 8.5
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$.

- La notation $a \mid b$ signifie « a divise b » ;
- L'ensemble $\{ac\}_{c \in \mathbb{Z}}$ des multiples de a est noté $a\mathbb{Z}$:

$$a\mathbb{Z} = \{ac\}_{c \in \mathbb{Z}} = \{x \in \mathbb{Z} \mid a \mid x\}.$$

- Dans ce cours, on notera $\operatorname{div}(b)$ l'ensemble des diviseurs positifs de b :

$$\operatorname{div}(b) = \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid b\}.$$

Proposition 8.6 (Divisibilité dans $\mathbb{Z}$)
La relation binaire $|$ sur $\mathbb{Z}$ est réflexive et transitive (mais pas antisymétrique donc ce n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$).

On a : $\forall a, b \in \mathbb{Z},\ \ (a \mid b \quad \text{et} \quad b \mid a) \iff a = \pm b.$

On a :

- $\forall a, b \in \mathbb{Z},\ \ \forall n \in \mathbb{Z},\ \ a \mid b \implies na \mid nb$;
- $\forall a, b \in \mathbb{Z},\ \ \forall n \in \mathbb{Z}^*,\ \ a \mid b \iff na \mid nb.$

Proposition 8.7 (Divisibilité dans $\mathbb{N}$)
La relation binaire $|$ sur $\mathbb{N}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.

Pour cette relation d'ordre, 0 est le plus grand élément de $\mathbb{N}$ et 1 le plus petit : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ n \mid 0 \quad \text{et} \quad 1 \mid n.$

On a : $\forall a, b \in \mathbb{Z},\ \ a \mid b \implies (a \leqslant b \quad \text{ou} \quad b = 0).$

8.1.3 Congruences

Définition 8.8
Soient $a, b, n \in \mathbb{Z}$.

On dit que « a est congru à b modulo n » et on note $a \equiv b\ [n]$ si on a :

$$\exists k \in \mathbb{Z},\ \ a = b + kn.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} a \equiv b\ [n] &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \ a = b + kn \\ &\iff n \mid (a - b)\,. \end{aligned}$$

Remarque 8.9
Soit $n \in \mathbb{Z}$.

La relation « être congrus modulo n » est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

Remarque 8.10
Soient $x \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On note q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de x par n.

On a :

- $x \equiv r\ [n]$;
- $n \mid x \iff r = 0.$

Proposition 8.11 (Opérations sur les congruences)
Soient $a, b, c, d, n \in \mathbb{Z}$.

On suppose $a \equiv b\ [n]$ *et* $c \equiv d\ [n]$.

On a :
- *somme :* $a + c \equiv b + d\ [n]$ *;*
- *produit :* $ac \equiv bd\ [n]$ *;*
- *puissance :* $\forall k \in \mathbb{N},\ \ a^k \equiv b^k\ [n]$.

Proposition 8.12
Soient $a, b, n \in \mathbb{Z}$.

- *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{Z}^*$*, on a :* $a \equiv b\ [n] \iff \lambda a \equiv \lambda b\ [\lambda n]$.
- *Pour tout diviseur* d *de* n*, on a :* $a \equiv b\ [n] \implies a \equiv b\ [d]$.

Exemple 8.13 (Élément non-régulier modulo n*)*
Trouvons $\lambda, x, y, n \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$\lambda \neq 0 \quad \text{et} \quad \lambda x \equiv \lambda y\ [n] \quad \text{et} \quad x \not\equiv y\ [n]\,.$$

On remarque que $\lambda = 2$, $x = 3$, $y = 0$ et $n = 6$ conviennent.

En effet, on a

$$2 \neq 0 \quad \text{et} \quad 2 \times 3 \equiv 2 \times 0\ [6] \quad \text{et} \quad 3 \not\equiv 0\ [6]\,.$$

Exemple 8.14
Calculons 20.222.023 modulo 9, modulo 11 et modulo 999.

On a

$$\begin{aligned} 20.222.023 &= 2 \times 10^7 + 2 \times 10^5 + 2 \times 10^4 + 2 \times 10^3 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0 \\ &\equiv 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3\ [9] \quad \text{car } 10 \equiv 1\ [9] \\ &\equiv 13\ [9] \\ &\equiv 4\ [9]\,. \end{aligned}$$

De plus, $10 \equiv -1\ [11]$ donc on a

$$\begin{aligned} 20.222.023 &\equiv -2 - 2 - 2 + 2 - 2 + 3\ [11] \\ &\equiv -3\ [11] \\ &\equiv 8\ [11]\,. \end{aligned}$$

Enfin, comme $1.000 \equiv 1\ [999]$, on a

$$\begin{aligned} 20.222.023 &= 20 \times 1000^2 + 222 \times 1000^1 + 23 \times 1000^0 \\ &\equiv 20 + 222 + 23\ [999] \\ &\equiv 265\ [999]\,. \end{aligned}$$

8.1.4 Sous-groupes

Proposition 8.15 (Intersection de sous-groupes)
Soit $(G,*)$ *un groupe et* $(H_i)_{i\in I}$ *une famille de sous-groupes de* G.

Alors l'intersection $\bigcap_{i\in I} H_i$ *de ces sous-groupes est un sous-groupe de* G.

Démonstration 8.16
Cf. Exercice 6.15. ■

Définition/Proposition 8.17 (Somme de sous-groupes)
Soit $(G,+)$ un groupe abélien. Soient H_1, H_2 des sous-groupes de G.

On appelle somme de H_1 et H_2 et on note H_1+H_2 l'ensemble :

$$\begin{aligned} H_1+H_2 &= \{g\in G \mid \exists h_1\in H_1, \exists h_2\in H_2,\ \ g=h_1+h_2\} \\ &= \{h_1+h_2\}_{(h_1,h_2)\in H_1\times H_2} \end{aligned}$$

On a :

(1) l'ensemble H_1+H_2 est un sous-groupe de G ;
(2) la loi $+$ est une loi de composition interne sur l'ensemble des sous-groupes de G ;
(3) cette loi $+$ est associative et commutative.

Démonstration 8.18 (1)
Montrons que H_1+H_2 est un sous-groupe de G.

On note 0 le neutre de G.

On a $H_1+H_2\subseteq G$.

Comme H_1 et H_2 sont des sous-groupes de G, $0\in H_1$ et $0\in H_2$ donc $0=0+0\in H_1+H_2$.

Soient $h,h'\in H_1+H_2$.

Montrons que $h-h'\in H_1+H_2$.

Soient $h_1,h_1'\in H_1$ et $h_2,h_2'\in H_2$ tels que

$$h=h_1+h_2 \qquad \text{et} \qquad h'=h_1'+h_2'.$$

On a

$$\begin{aligned} h-h' &= h_1+h_2-h_1'-h_2' \\ &= \underbrace{h_1-h_1'}_{\in H_1}+\underbrace{h_2-h_2'}_{\in H_2} \end{aligned} \quad \text{car groupes abéliens}$$

Donc $h - h' \in H_1 + H_2$.

Donc $H_1 + H_2$ est un sous-groupe de G. ■

Démonstration 8.19 (2)
Clair. ■

Démonstration 8.20 (3)
Montrons que $+$ est associative :

Soient H_1, H_2, H_3 des sous-groupes de G.

Montrons que $H_1 + (H_2 + H_3) = (H_1 + H_2) + H_3$.

On a $H_1 + (H_2 + H_3) \subseteq G$ et $(H_1 + H_2) + H_3 \subseteq G$.

Soit $g \in G$.

On a

$$\begin{aligned} g \in (H_1 + H_2) + H_3 &\iff \exists h \in H_1 + H_2,\ \ \exists h_3 \in H_3,\ \ g = h + h_3 \\ &\iff \exists h_1 \in H_1,\ \ \exists h_2 \in H_2,\ \ \exists h_3 \in H_3,\ \ g = (h_1 + h_2) + h_3 \\ &\iff \exists h_1 \in H_1,\ \ \exists h_2 \in H_2,\ \ \exists h_3 \in H_3,\ \ g = h_1 + h_2 + h_3 \\ &\iff \exists h_1 \in H_1,\ \ \exists h \in H_2 + H_3,\ \ g = h_1 + h \\ &\iff g \in H_1 + (H_2 + H_3) \end{aligned}$$

Donc $+$ est associative.

Montrons que $+$ est commutative :

On a $H_1 + H_2 \subseteq G$ et $H_2 + H_1 \subseteq G$.

Soit $g \in G$.

On a

$$\begin{aligned} g \in H_1 + H_2 &\iff \exists h_1 \in H_1,\ \ \exists h_2 \in H_2,\ \ g = h_1 + h_2 \\ &\iff \exists h_2 \in H_2,\ \ \exists h_1 \in H_1,\ \ g = h_2 + h_1 \\ &\iff g \in H_2 + H_1 \end{aligned}$$

Donc $+$ est commutative. ■

Théorème 8.21 (Sous-groupes de $\mathbb{Z}$)
Les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ *sont les ensembles de la forme* $n\mathbb{Z}$ *où* $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration 8.22
Montrons que les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont les parties de la forme $n\mathbb{Z} = \{nk\}_{k\in\mathbb{Z}}$ où $n \in \mathbb{N}$.

On a
$$n\mathbb{Z} = \{\ldots\ ;\ -2n\ ;\ -n\ ;\ 0\ ;\ n\ ;\ 2n\ ;\ \ldots\}\,.$$

$\boxed{\supseteq}$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Montrons que $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.

On a $n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$.

On a $0 \in n\mathbb{Z}$ car $0 = n \times 0$.

Soient $x, y \in n\mathbb{Z}$.

Montrons que $x - y \in n\mathbb{Z}$.

Soient $x', y' \in \mathbb{Z}$ tels que $x = nx'$ et $y = ny'$.

On a
$$x - y = nx' - ny' = n\underbrace{(x - x')}_{\in\mathbb{Z}}\,.$$

Donc $x - y \in n\mathbb{Z}$.

Donc $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.

$\boxed{\subseteq}$

Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.

On pose $E = H \cap \mathbb{N}^*$.

Si $E = \varnothing$:

Montrons que $H = 0\mathbb{Z} = \{0\}$.

Par l'absurde, soit $x \in H \setminus \{0\}$.

Si $x > 0$ alors $x \in E$: contradiction car $E = \varnothing$.

Si $x < 0$ alors $-x \in E$: contradiction car $E = \varnothing$.

Donc $H = \{0\} = 0\mathbb{Z}$.

Supposons $E \neq \varnothing$.

On pose $n = \min E$ (n existe car E est une partie non-vide de $\mathbb{N}$).

Montrons que $H = n\mathbb{Z}$.

$\boxed{\supseteq}$

Montrons que $\forall k \in \mathbb{N},\ \ nk \in H$ par récurrence sur k.

Initialisation : on a $0 \in H$ et $0 = 0 \times n$.

Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $nk \in H$.

On a $n(k+1) = nk + n \in H$ car H est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ et $nk, n \in H$.

Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N},\ \ nk \in H$.

On en déduit que $\forall k \in \mathbb{N},\ \ -nk \in H$ car H est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.

Donc $\forall k \in \mathbb{Z},\ \ nk \in H$.

D'où $n\mathbb{Z} \subseteq H$.

$\boxed{\subseteq}$

Soit $h \in H$.

On a $n \in \mathbb{N}^*$.

On note q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de h par n.

On a donc $\begin{cases} h = nq + r \\ 0 \leqslant r < n \end{cases}$

On a $h, n \in H$ donc $r = h - nq \in H$.

Donc $r = 0$ car n est le plus petit élément strictement positif de H.

Donc $h = qn \in n\mathbb{Z}$. ■

8.2 PGCD

8.2.1 PGCD de deux entiers

8.2.1.1 Définition

Définition 8.23
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$.

On rappelle qu'on note $\mathrm{div}(a)$ l'ensemble des diviseurs positifs de a.

Les diviseurs positifs communs à a et b sont les éléments de l'ensemble $\mathrm{div}(a) \cap \mathrm{div}(b)$.

Si celui-ci possède un plus grand élément pour la relation d'ordre $|$, on l'appelle le plus grand commun diviseur de a et b et on le note $a \wedge b$.

Exemple 8.24
On a
$$\mathrm{div}\,(12) = \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,6\,;\,12\} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{div}\,(15) = \{1\,;\,3\,;\,5\,;\,15\}\,.$$

Donc les diviseurs communs à 12 et 15 sont :
$$\mathrm{div}\,(12) \cap \mathrm{div}\,(15) = \{1\,;\,3\}\,.$$

Donc le PGCD de 12 et 15 est :
$$12 \wedge 15 = 3.$$

Remarque 8.25
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$.

Le PGCD de a et b existe si, et seulement si, le PGCD de $|a|$ et $|b|$ existe.

On a alors
$$a \wedge b = |a| \wedge |b|\,.$$

Démonstration 8.26
Clair car $\mathrm{div}\,(a) \cap \mathrm{div}\,(b) = \mathrm{div}\,(|a|) \cap \mathrm{div}\,(|b|)$. ■

Remarque 8.27
On a, pour tout $a \in \mathbb{Z}$:
$$a \wedge 0 = |a| \qquad \text{et} \qquad a \wedge 1 = 1.$$

Remarque 8.28
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$.

(1) Le PGCD de a et b, s'il existe, est le diviseur commun à a et b positif et divisible par tous leurs autres diviseurs communs.

(2) Il est donc caractérisé par :
$$a \wedge b \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{div}\,(a) \cap \mathrm{div}\,(b) = \mathrm{div}\,(a \wedge b)\,.$$

(3) Si $a = b = 0$ alors $0 \wedge 0 = 0$.
Sinon, le plus grand diviseur commun à a et b pour l'ordre $|$ est aussi le plus grand diviseur commun à a et b pour l'ordre $\leqslant$ selon la Proposition 8.7.

Démonstration 8.29 (2)
Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \geqslant 0$ et $\operatorname{div}(a) \cap \operatorname{div}(b) = \operatorname{div}(n)$.

Montrons que n est le PGCD de a et b.

On a $n \in \operatorname{div}(n)$ donc $n \in \operatorname{div}(a) \cap \operatorname{div}(b)$ donc

$$n \mid a \qquad \text{et} \qquad n \mid b.$$

Donc n est un diviseur commun à a et b.

Montrons que n est le plus grand d'entre eux.

Soit d un diviseur commun à a et b.

On a $d \in \operatorname{div}(a) \cap \operatorname{div}(b)$ donc $d \in \operatorname{div}(n)$.

Donc $d \mid n$. ■

Lemme 8.30
Soient $a, b, n \in \mathbb{N}$ tels que $a \equiv b\ [n]$.

Alors a et n admettent un PGCD si, et seulement si, b et n admettent un PGCD.

On a alors

$$a \wedge n = b \wedge n.$$

Démonstration 8.31
Il suffit de montrer que $\operatorname{div}(a) \cap \operatorname{div}(b) = \operatorname{div}(b) \cap \operatorname{div}(a)$.

$\boxed{\subseteq}$

Soient $d \in \operatorname{div}(a) \cap \operatorname{div}(b)$ et $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = a + kn$.

On a $d \mid a$ et $d \mid kn$ donc $d \mid b$.

Donc $d \in \operatorname{div}(b) \cap \operatorname{div}(a)$.

$\boxed{\supseteq}$ Idem. ■

Remarque 8.32
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$.

On a

$$a \wedge b = |a| \iff a \mid b.$$

Démonstration 8.33
$\boxed{\Longrightarrow}$

Supposons $a \wedge b = |a|$.

On a $a \mid |a|$ et $|a| \mid b$.

Donc $a \mid b$.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Supposons $a \mid b$.

On a $|a| \mid a$ et $|a| \mid b$.

Donc $|a| \in \operatorname{div}(a) \cap \operatorname{div}(b)$.

De plus, on a $\forall d \in \operatorname{div}(a) \cap \operatorname{div}(b), \quad d \mid |a|$.

Donc $|a| = a \wedge b$. ■

Remarque 8.34
Soient $a, b \in \mathbb{N}$.

Alors $a \wedge b = \inf \{a \,;\, b\}$ pour l'ordre $|$, sous réserve d'existence.

8.2.1.2 Preuve algébrique

Proposition 8.35
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$.

Alors a et b admettent un PGCD.

Démonstration 8.36
L'ensemble $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ (*cf.* Définition/Proposition 8.17 et Théorème 8.21).

Il existe donc $n \in \mathbb{Z}$ tel que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = n\mathbb{Z}$.

Montrons que n est le PGCD de a et b.

On a $n \geqslant 0$.

De plus, on a $a \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ car $a = 1 \times a + 0 \times b$ donc $a \in n\mathbb{Z}$ donc $n \mid a$.

De même, $n \mid b$.

Soient $d \in \operatorname{div}(a) \cap \operatorname{div}(b)$ et $k, \ell \in \mathbb{Z}$ tels que $dk = a$ et $d\ell = b$.

On a $n \in n\mathbb{Z}$ donc $n \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$.

Soient $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $n = ua + vb$.

On a $n = udk + vd\ell = d(uk + v\ell)$ donc $d \mid n$.

Donc n est le PGCD de a et b. ■

8.2.1.3 Preuve algorithmique, algorithme d'Euclide

On définit une fonction récursive pgcd : $\mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$.

Montrons que la fonction termine toujours et que $\mathrm{pgcd}(a, b)$ renvoie le PGCD de a et b pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

Algorithme 8.37 (Algorithme d'Euclide)
Si $a < 0$ ou $b < 0$, on renvoie $\mathrm{pgcd}(|a|, |b|)$.

Si $b = 0$, on renvoie a.

Sinon :

- on fait la division euclidienne de a par b : $\begin{cases} a = qb + r \\ 0 \leqslant r < b \end{cases}$;
- on a $a \equiv r\ [b]$ donc on renvoie $\mathrm{pgcd}(b, r)$.

Démonstration 8.38 (Terminaison)
Montrons que l'algorithme termine toujours.

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

Par l'absurde, supposons que l'algorithme ne termine jamais :

$$\mathrm{pgcd}(a, b) \longrightarrow \underbrace{\mathrm{pgcd}(a_1, b_1) \longrightarrow \mathrm{pgcd}(a_2, b_2) \longrightarrow \dots}_{\text{arguments } \geqslant 0}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\begin{cases} a_{k+1} = b_k \\ 0 \leqslant b_{k+1} < b_k \end{cases}$

Donc $(b_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite strictement décroissante d'entiers naturels : contradiction.

Donc l'algorithme termine toujours. ■

Exemple 8.39
Calculons le PGCD de 1024 et 1000 :

$$1024 = 1 \times 1000 + 24$$
$$1000 = 41 \times 24 + 16$$
$$24 = 1 \times 16 + 8$$
$$16 = 2 \times 8 + 0$$

Donc $1024 \wedge 1000 = 8$.

8.2.1.4 Propriétés

Proposition 8.40
Soient $a, b, \lambda \in \mathbb{Z}$.

On a :
$$(\lambda a) \wedge (\lambda b) = |\lambda| (a \wedge b) .$$

Démonstration 8.41
Montrons que $\lambda (a \wedge b) \mid (\lambda a) \wedge (\lambda b)$.

On a $a \wedge b$ divise a et b.

Donc $\lambda (a \wedge b)$ divise λa et λb.

Donc $\lambda (a \wedge b) \mid (\lambda a) \wedge (\lambda b)$.

Montrons que $(\lambda a) \wedge (\lambda b) \mid \lambda (a \wedge b)$.

On a λ divise λa et λb.

Donc $\lambda \mid (\lambda a) \wedge (\lambda b)$.

Soit $d \in \mathbb{Z}$ tel que $(\lambda a) \wedge (\lambda b) = d\lambda$.

On a $(\lambda a) \wedge (\lambda b)$ divise λa et λb.

Donc $d\lambda$ divise λa et λb.

Supposons $\lambda \neq 0$.

Alors d divise a et b.

Donc $d \mid a \wedge b$.

Donc $\lambda d \mid \lambda (a \wedge b)$.

Donc $(\lambda a) \wedge (\lambda b) \mid \lambda (a \wedge b)$.

Si $\lambda = 0$: la proposition est vraie aussi car $\begin{cases} (\lambda a) \wedge (\lambda b) = 0 \\ \lambda (a \wedge b) = 0 \end{cases}$

Finalement, les entiers $\lambda (a \wedge b)$ et $(\lambda a) \wedge (\lambda b)$ se divisent mutuellement.

Donc $|\lambda (a \wedge b)| = |(\lambda a) \wedge (\lambda b)|$.

Donc $|\lambda| (a \wedge b) = (\lambda a) \wedge (\lambda b)$. ■

8.2.2 Relation de Bézout

8.2.2.1 Définition

Définition/Proposition 8.42 (Relation de Bézout)
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$.

Alors il existe des entiers $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$ua + vb = a \wedge b.$$

Une telle écriture s'appelle une relation de Bézout.

Elle n'est pas unique.

Démonstration 8.43 (Absence d'unicité)
Soient $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que

$$ua + vb = a \wedge b.$$

On a alors

$$(u - b) a + (v + a) b = a \wedge b.$$

Donc le couple $(u', v') = (u - b, v + a)$ convient aussi. ■

8.2.2.2 Preuve algébrique

Proposition 8.44
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$.

Alors a et b admettent une relation de Bézout.

Démonstration 8.45
On a vu que $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}=(a \wedge b)\,\mathbb{Z}$.

On a $a \wedge b \in (a \wedge b)\,\mathbb{Z}$ donc $a \wedge b \in a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$.

Donc on a
$$\exists u, v \in \mathbb{Z}, \quad a \wedge b = ua + bv.$$
■

8.2.2.3 Preuve algorithmique, algorithme d'Euclide étendu

Écrivons bezout (a, b) où $a, b \in \mathbb{Z}$ et qui renvoie u, v, d tels que $\begin{cases} d = a \wedge b \\ ua + vb = a \wedge b \end{cases}$

Algorithme 8.46 (Algorithme d'Euclide étendu, en langage Python)

```python
def bezout(a, b):
    if a < 0:
        u, v, d = bezout(-a, b)
        return -u, v, d
    if b < 0:
        u, v, d = bezout(a, -b)
        return u, -v, d
    elif b == 0:
        return 1, 0, a
    else:
        q, r = a // b, a % b
        u, v, d = bezout(b, r)
        return v, u - v * q, d
```

Exemple 8.47
Déterminons le PGCD et une relation de Bézout de 14 et 9 :

$$\text{bezout}\,(14, 9) \;\; (q = 1,\ r = 5)$$
$$\hookrightarrow \text{bezout}\,(9, 5) \;\; (q = 1,\ r = 4)$$
$$\hookrightarrow \text{bezout}\,(5, 4) \;\; (q = 1,\ r = 1)$$
$$\hookrightarrow \text{bezout}\,(4, 1) \;\; (q = 4,\ r = 0)$$
$$\hookrightarrow \text{bezout}\,(1, 0)$$
$$1, 0, 1$$
$$0, 1, 1$$
$$1, -1, 1$$
$$-1, 2, 1$$
$$2, -3, 1$$

Donc

$$14 \wedge 9 = 1 \qquad \text{et} \qquad 1 = 2 \times 14 - 3 \times 9.$$

8.2.3 PGCD de plusieurs entiers

Remarque 8.48
La loi $\wedge$ est une loi de composition interne associative et commutative sur $\mathbb{Z}$.

Démonstration 8.49
La loi $\wedge$ est clairement commutative.

Montrons qu'elle est associative.

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

On a

$$\operatorname{div}(a) \cap \operatorname{div}(b) \cap \operatorname{div}(c) = \operatorname{div}(a) \cap \operatorname{div}(b \wedge c) = \operatorname{div}(a \wedge (b \wedge c))$$

et

$$\operatorname{div}(a) \cap \operatorname{div}(b) \cap \operatorname{div}(c) = \operatorname{div}(a \wedge b) \cap \operatorname{div}(c) = \operatorname{div}((a \wedge b) \wedge c).$$

Donc $a(b \wedge c)$ et $(a \wedge b) \wedge c$ se divisent mutuellement.

De plus, ce sont des entiers positifs.

Donc ils sont égaux. ∎

Définition/Proposition 8.50
Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{Z}$.

Les diviseurs positifs communs à $a_1, \ldots, a_r$ sont les diviseurs de $a_1 \wedge \ldots \wedge a_r$.

Ce nombre est le PGCD de $a_1, \ldots, a_r$.

Proposition 8.51
Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_r, \lambda \in \mathbb{Z}$.

On a :

$$(\lambda a_1) \wedge \ldots \wedge (\lambda a_r) = |\lambda| (a_1 \wedge \ldots \wedge a_r).$$

Démonstration 8.52
Découle de la Proposition 8.40 par récurrence sur $r \in \mathbb{N}^*$. ∎

8.3 Entiers premiers entre eux

8.3.1 Cas de deux entiers

Définition 8.53 (Entiers premiers entre eux)
Deux entiers $a, b \in \mathbb{Z}$ sont dits premiers entre eux s'ils vérifient :

$$a \wedge b = 1.$$

Cela signifie que leurs seuls diviseurs communs sont 1 et -1.

Théorème 8.54 (Théorème de Bézout)
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$.

On a :

$$a \text{ et } b \text{ premiers entre eux} \iff \exists u, v \in \mathbb{Z},\ \ ua + vb = 1.$$

Démonstration 8.55
$\boxed{\Longrightarrow}$ Déjà vu (*cf.* Définition/Proposition 8.42).

$\boxed{\Longleftarrow}$

Supposons qu'il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $ua + bv = 1$.

On a $a \wedge b$ divise a et b.

Donc $a \wedge b \mid ua + vb$.

Donc $a \wedge b \mid 1$.

Donc $a \wedge b = 1$ car $a \wedge b \in \mathbb{N}$. ■

Proposition 8.56
Soient $\lambda, x, y, n \in \mathbb{Z}$.

On suppose que λ et n sont premiers entre eux.

Alors :

$$x \equiv y\ [n] \iff \lambda x \equiv \lambda y\ [n]\,.$$

Démonstration 8.57
Soient $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $u\lambda + vn = 1$.

On a $u\lambda \equiv 1\ [n]$.

Montrons l'équivalence.

$\boxed{\implies}$ Vraie : il suffit de multiplier par λ.

$\boxed{\impliedby}$ Vraie : il suffit de multiplier par u. ■

Lemme 8.58 (Lemme de Gauss)
Soient $a, b, n \in \mathbb{Z}$.

On suppose :

$$n \mid ab \qquad \text{et} \qquad n \wedge b = 1.$$

Alors :

$$n \mid a.$$

Démonstration 8.59
Soient $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $un + vb = 1$.

On a $n \mid ab$. Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $nk = ab$.

On a $a\,(un + vb) = a$ donc $nau + vnk = a$.

Donc $n\,(au + vk) = a$.

Donc $n \mid a$. ■

Remarque 8.60 (Forme irréductible d'un rationnel)
Soit $q \in \mathbb{Q}$.

Il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que :

$$q = \frac{a}{b} \qquad \text{et} \qquad a \wedge b = 1.$$

Démonstration 8.61
Soit $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $q = \dfrac{a}{b}$.

$\boxed{\text{existence}}$

On pose $a' = \dfrac{a}{a \wedge b}$ et $b' = \dfrac{b}{a \wedge b}$ (on a $a' \in \mathbb{Z}$ et $b' \in \mathbb{N}^*$ car $a \wedge b$ divise a et b).

On a $q = \dfrac{a'}{b'}$.

Montrons que $a' \wedge b' = 1$.

Comme $a \wedge b \geqslant 0$, d'après la Proposition 8.40, on a

$$a \wedge b = ((a \wedge b)\, a') \wedge ((a \wedge b) \wedge b) = (a \wedge b)\,(a' \wedge b')\,.$$

Or $a \wedge b \neq 0$ donc $1 = a' \wedge b'$.

$\boxed{\text{unicité}}$

Soit $(a'', b'') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\begin{cases} a'' \wedge b'' = 1 \\ q = \dfrac{a''}{b''} \end{cases}$

Montrons que $(a', b') = (a'', b'')$.

On a $\dfrac{a'}{b'} = \dfrac{a''}{b''}$ donc $a'b'' = b'a''$.

Donc $b'' \mid b'a''$ et $b'' \wedge a'' = 1$ donc $b'' \mid b'$ selon le lemme de Gauss.

De même, $b' \mid b''$ donc $b' = b''$ donc $a' = a''$. ∎

Proposition 8.62
Soient $a, b, n \in \mathbb{Z}$.

On suppose

$$a \wedge n = 1 \qquad \textit{et} \qquad b \wedge n = 1.$$

Alors

$$ab \wedge n = 1.$$

Démonstration 8.63
Soient $u, v, u', v' \in \mathbb{Z}$ tels que $\begin{cases} ua + vn = 1 \\ u'b + v'n = 1 \end{cases}$

On a, par produit :

$$\underbrace{uu'}_{\in\mathbb{Z}}\, ab + n\,\underbrace{(uav' + vbu' + vv'n)}_{\in\mathbb{Z}} = 1$$

Donc $ab \wedge n = 1$. ∎

Corollaire 8.64
Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_r, n \in \mathbb{Z}$.

On suppose
$$\forall k \in [\![1\,;\,r]\!]\,,\quad a_k \wedge n = 1.$$

Alors
$$(a_1 \ldots a_r) \wedge n = 1.$$

Démonstration 8.65
Par récurrence immédiate sur $r \in \mathbb{N}^*$. ■

Proposition 8.66
Soient $a, b, n \in \mathbb{Z}$.

On suppose
$$a \mid n \qquad \text{et} \qquad b \mid n \qquad \text{et} \qquad a \wedge b = 1.$$

Alors
$$ab \mid n.$$

Démonstration 8.67
Comme $a \mid n$, il existe $\lambda \in \mathbb{Z}$ tel que $a\lambda = n$.

On a $b \mid a\lambda$ et $b \wedge a = 1$.

Donc selon le lemme de Gauss : $b \mid \lambda$.

Donc $ab \mid a\lambda$.

Donc $ab \mid n$. ■

8.3.2 Cas de plusieurs entiers

Définition 8.68
Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{Z}$.

On dit que les entiers $a_1, \ldots, a_r$ sont premiers entre eux deux à deux si on a :
$$\forall i, j \in [\![1\,;\,r]\!]\,,\quad i \neq j \implies a_i \wedge a_j = 1.$$

On dit que les entiers $a_1, \ldots, a_r$ sont premiers entre eux dans leur ensemble si $a_1 \wedge \ldots \wedge a_r = 1$. Cela signifie que leurs seuls diviseurs communs sont 1 et -1.

Remarque 8.69
Soient $r \in \mathbb{N} \setminus \{0 ; 1\}$ et $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{Z}$.

« $a_1, \dots, a_r$ sont premiers entre eux deux à deux » implique « $a_1, \dots, a_r$ sont premiers entre eux dans leur ensemble ».

L'implication réciproque est fausse, par exemple : 6, 10 et 15 sont premiers entre eux dans leur ensemble mais pas deux à deux.

8.4 PPCM

Définition/Proposition 8.70
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$.

Dans l'ensemble ordonné $(\mathbb{N}, |)$, il existe un plus petit multiple commun positif à a et b appelé le « Plus Petit Commun Multiple » (PPCM) et noté $a \vee b$.

On a $\begin{cases} a \vee b \geqslant 0 \\ a \mid a \vee b \\ b \mid a \vee b \\ \forall m \in \mathbb{N},\ \ [a \mid m \quad \text{et} \quad b \mid m] \implies a \vee b \mid m \end{cases}$

Démonstration 8.71
L'ensemble $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.

Donc il existe $\mu \in \mathbb{N}$ tel que $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \mu\mathbb{Z}$.

On a $\mu \geqslant 0$.

Comme $\mu \in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$, on a $\begin{cases} a \mid \mu \\ b \mid \mu \end{cases}$

Enfin, soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $\begin{cases} a \mid m \\ b \mid m \end{cases}$

On a $m \in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ donc $m \in \mu\mathbb{Z}$.

Donc $\mu \mid m$. ∎

Remarque 8.72
On a :

- $\forall a, b \in \mathbb{Z}, \quad a \vee b = |a| \vee |b|$

- $\forall a, b \in \mathbb{N}, \quad a \vee b = \sup\{a \; ; b\}$ dans $(\mathbb{N}, |)$

Proposition 8.73
$\vee$ est une loi de composition interne associative et commutative sur $\mathbb{Z}$.

Démonstration 8.74
$\vee$ est clairement commutative.

Montrons que $\vee$ est associative.

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

D'une part,
$$a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} \cap c\mathbb{Z} = (a \vee b)\,\mathbb{Z} \cap c\mathbb{Z} = ((a \vee b) \vee c)\,\mathbb{Z}.$$

D'autre part,
$$a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} \cap c\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} \cap (b \vee c)\,\mathbb{Z} = (a \vee (b \vee c))\,\mathbb{Z}.$$

Donc $(a \vee b) \vee c$ et $a \vee (b \vee c)$ se divisent mutuellement.

De plus, ils appartiennent à $\mathbb{N}$ donc ils égaux. ■

Définition 8.75
Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{Z}$.

L'élément $a_1 \vee \ldots \vee a_r$ est le plus petit (pour $|$) multiple commun à $a_1, \ldots, a_r$.

On l'appelle le PPCM de $a_1, \ldots, a_r$.

Exemple 8.76
$9 \vee 12 = 36$ car $9\mathbb{N} = \{0 \; ; 9 \; ; 18 \; ; 27 \; ; 36 \; ; \ldots\}$ et $12\mathbb{N} = \{0 \; ; 12 \; ; 24 \; ; 36 \; ; \ldots\}$.

On a
$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \begin{cases} n \vee 1 = |n| \\ n \vee 0 = 0 \\ n \vee 2 = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2n & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

Remarque 8.77
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$.

On a
$$a \vee b = |b| \iff a \mid b.$$

Démonstration 8.78
$\boxed{\implies}$

Supposons $a \vee b = |b|$.

On a $a \mid |b|$.

Or $|b| \mid b$.

Donc $a \mid b$.

$\boxed{\impliedby}$

Supposons $a \mid b$.

On a
$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad [a \mid m \quad \text{et} \quad b \mid m] \iff b \mid m.$$

Donc $a \vee b = |b|$. ∎

Proposition 8.79
On a

(1) $\forall a, b, \lambda \in \mathbb{Z}, \quad (\lambda a) \vee (\lambda b) = |\lambda| (a \vee b)$

(2) $\forall r \in \mathbb{N}^*, \quad \forall a_1, \ldots, a_r, \lambda \in \mathbb{Z}, \quad (\lambda a_1) \vee \ldots \vee (\lambda a_r) = |\lambda| (a_1 \vee \ldots \vee a_r)$

Démonstration 8.80 (1)
Montrons que $(\lambda a) \vee (\lambda b) \mid \lambda (a \vee b)$.

On a λa et λb divisent $\lambda (a \vee b)$ donc $(\lambda a) \vee (\lambda b) \mid \lambda (a \vee b)$.

Montrons que $\lambda (a \vee b) \mid (\lambda a) \vee (\lambda b)$.

On a $\lambda \mid (\lambda a) \vee (\lambda b)$ (car $\lambda \mid \lambda a \mid (\lambda a) \vee (\lambda b)$).

Soit $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\lambda m = (\lambda a) \vee (\lambda b)$.

C'est-à-dire , en supposant $\lambda \neq 0$: $a \vee b \mid m$.

On a λa et λb divisent $(\lambda a) \vee (\lambda b)$ donc λa et λb divisent λm.

Donc a et b divisent m car $\lambda \neq 0$.

Donc $a \vee b \mid m$.

Donc $\lambda (a \vee b) \mid \lambda m$.

Finalement, $(\lambda a) \vee (\lambda b)$ et $\lambda (a \vee b)$ se divisent mutuellement donc ils ont même valeur absolue. ■

Démonstration 8.81 (2)
Découle de (1) par récurrence sur $r \in \mathbb{N}^*$. ■

Proposition 8.82
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$.

On a

$$(a \vee b)(a \wedge b) = |ab|.$$

Démonstration 8.83
Si $a \wedge b = 1$:

On a, selon la Proposition 8.66 :

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \quad \begin{cases} a \mid m \\ b \mid m \end{cases} \iff ab \mid m.$$

Donc $a \vee b = |ab|$ donc $(a \vee b)(a \wedge b) = |ab|$.

Sinon :

On pose $a' = \dfrac{a}{a \wedge b}$ et $b' = \dfrac{b}{a \wedge b}$.

Alors $a' \in \mathbb{Z}$ et $b' \in \mathbb{N}^*$ (*cf.* Démonstration 8.61).

On a donc, selon le cas précédent : $(a' \vee b')(a' \wedge b') = |a'b'|$.

Puis, en multipliant de chaque côté par $(a \wedge b)^2$:

$$\Bigg[\underbrace{((a \wedge b)\, a')}_{a} \wedge \underbrace{((a \wedge b)\, b')}_{b}\Bigg]\Bigg[\underbrace{((a \wedge b)\, a')}_{a} \vee \underbrace{((a \wedge b)\, b')}_{b}\Bigg] = |(a \wedge b)\, a'\, (a \wedge b)\, b'| = |ab|.$$

■

8.5 Nombres premiers

8.5.1 Définition

Définition 8.84 (Nombre premier)
On appelle nombre premier tout entier $p \in [\![2\ ;+\infty[\![$ dont les seuls diviseurs positifs sont 1 et lui-même.

L'ensemble des nombres premiers est souvent noté $\mathbb{P}$:

$$\forall p \in \mathbb{Z},\quad p \in \mathbb{P} \iff [p \geqslant 2 \quad \text{et} \quad \operatorname{div}(p) = \{1\ ;p\}]\,.$$

Définition 8.85 (Nombre composé)
On appelle nombre composé tout entier $n \in [\![2\ ;+\infty[\![$ qui n'est pas un nombre premier, c'est-à-dire vérifiant :

$$\exists a, b \in [\![2\ ;+\infty[\![\,,\quad ab = n.$$

Exemple 8.86
Les entiers 0 et 1 ne sont ni des nombres premiers, ni des nombres composés.

Les entiers 2, 3, 5, 7, 11 sont des nombres premiers.

Les entiers 4, 6, 8, 9, 10 sont des nombres composés.

Remarque 8.87
Soient $p \in \mathbb{P}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

On a

$$p \nmid n \iff p \wedge n = 1.$$

Démonstration 8.88
Si $p \mid n$ alors $p \wedge n = |n|$.

Si $p \nmid n$ alors $\begin{cases} p \wedge n \in \operatorname{div}(p) \\ p \wedge n \in \operatorname{div}(n) \end{cases}$

Donc $\begin{cases} p \wedge n \in \{1\ ;p\} \\ p \wedge n \neq p \end{cases}$

Donc $p \wedge n = 1$.

Finalement, $p \wedge n = 1 \iff p \nmid n$. ■

Lemme 8.89
Soit $n \in [\![2\ ;+\infty[\![$.

Alors n *admet un diviseur premier.*

Démonstration 8.90
On raisonne par récurrence forte sur n.

On pose
$$\forall n \in [\![2\ ;+\infty[\![\,,\quad \mathscr{P}(n) : [\exists p \in \mathbb{P},\quad p \mid n]\,.$$

On a $2 \mid 2$. D'où $\mathscr{P}(2)$.

Soit $n \in [\![3\ ;+\infty[\![$ tel que $\forall k \in [\![2\ ;n-1]\!]\,,\ \mathscr{P}(k)$.

Montrons $\mathscr{P}(n)$.

Si $n \in \mathbb{P}$ alors on a $\mathscr{P}(n)$ car $n \mid n$.

Sinon, n admet un diviseur positif autre que 1 et lui-même qu'on note d.

On a $1 < d < n$.

Selon $\mathscr{P}(d)$, il existe $p \in \mathbb{P}$ tel que $p \mid d$.

D'où $p \mid n$.

D'où, par récurrence forte, $\forall n \in [\![2\ ;+\infty[\![\,,\ \mathscr{P}(n)$. ■

Théorème 8.91
Il existe une infinité de nombres premiers.

Démonstration 8.92
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Posons $N = n! + 1$. On a $N \geqslant 2$.

Soit $p \in \mathbb{P}$ tel que $p \mid N$ (un tel p existe selon le lemme précédent).

On a $p \mid n! + 1$.

Montrons que $p > n$.

Par l'absurde, si $p \leqslant n$ alors $p \mid n!$ donc $p \mid 1$: contradiction.

On a donc montré $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{P},\ \ p > n$.

Donc $\mathbb{P}$ n'est pas majorée.

Donc $\mathbb{P}$ n'est pas finie. ■

Remarque 8.93 (Crible d'Eratosthène)
Soit $N \in [\![2 ; +\infty[\![$.

Tout nombre composé $n \in [\![1 ; N]\!]$ admet un diviseur premier p tel que $p \leqslant N$.

Démonstration 8.94
Soit un nombre composé $n \in [\![1 ; N]\!]$.

Il existe $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $\begin{cases} ab = n \\ 2 \leqslant a < n \\ 2 \leqslant b < n \end{cases}$

Quitte à échanger a et b, on peut supposer $a \leqslant \sqrt{n}$.

Soit, selon le lemme précédent, $p \in \mathbb{P}$ tel que $p \mid a$.

On a $\begin{cases} p \mid n & \text{car } p \mid a \text{ et } a \mid n \\ p \leqslant \sqrt{n} & \text{car } p \leqslant a \leqslant \sqrt{n} \end{cases}$

On peut ainsi déterminer tous les nombres premiers de $[\![1 ; N]\!]$. ■

Exemple 8.95
Avec $N = 25$ (et donc $\sqrt{N} = 5$) :

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

8.5.2 Théorème fondamental

Le théorème suivant affirme que tout entier strictement positif s'écrit comme produit de nombres premiers, de façon unique à l'ordre des facteurs près.

Théorème 8.96 (Théorème fondamental de l'arithmétique)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors n s'écrit de façon unique sous la forme :

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r} \qquad \text{où} \qquad \begin{cases} r \in \mathbb{N} \\ p_1, p_2, \dots, p_r \in \mathbb{P} \\ p_1 < p_2 < \dots < p_r \\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Démonstration 8.97
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition « le théorème est vrai pour n ».

On raisonne par récurrence forte.

On a clairement $\mathscr{P}(1)$ car 1 est le « produit vide » (avec $r = 0$), et seulement le produit vide.

On a clairement $\mathscr{P}(2)$ car $2 = p_1^{\alpha_1}$ avec $r = 1$, $p_1 = 2$ et $\alpha_1 = 1$.

Soit $n \in [\![3 \,;\, +\infty[\![$ tel que $\forall k \in [\![1 \,;\, n-1]\!],\ \ \mathscr{P}(k)$.

Montrons $\mathscr{P}(n)$.

$\boxed{\text{existence}}$

Si $n \in \mathbb{P}$ alors l'existence est claire.

Sinon, il existe $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $\begin{cases} n = ab \\ 2 \leqslant a < n \\ 2 \leqslant b < n \end{cases}$

Selon $\mathscr{P}(a)$, l'entier a est produit de nombres premiers.

Selon $\mathscr{P}(b)$, l'entier b est produit de nombres premiers.

Donc n est produit de nombres premiers.

$\boxed{\text{unicité}}$

Soient $r, s \in \mathbb{N}$, $p_1, \ldots, p_r, q_1, \ldots, q_s \in \mathbb{P}$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\begin{cases} n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r} = q_1^{\beta_1} \ldots q_s^{\beta_s} \\ p_1 < \cdots < p_r \\ q_1 < \cdots < q_s \end{cases}$$

Montrons que $p_1 = q_1$.

Par l'absurde, supposons $p_1 \neq q_1$.

Si $p_1 < q_1$ alors $\forall \ell \in [\![1 \,;\, s]\!],\ \ p_1 < q_\ell$.

Donc $\forall \ell \in [\![1 \,;\, s]\!],\ \ p_1 \wedge q_\ell = 1$.

D'où par produit, selon la Proposition 8.66, $p_1 \wedge \left(q_1^{\beta_1} \ldots q_s^{\beta_s}\right) = 1$.

Donc $p_1 \wedge n = 1$ et $p_1 \mid n$: contradiction.

Si $q_1 < p_1$, on montre de même que $q_1 \wedge n = 1$: contradiction.

Donc $p_1 = q_1$.

Ainsi, $\dfrac{n}{p_1} = p_1^{\alpha_1 - 1} \ldots p_r^{\alpha_r} = q_1^{\beta_1 - 1} \ldots q_s^{\beta_s}$.

Selon la partie $\boxed{\text{unicité}}$ de $\mathscr{P}\left(\dfrac{n}{p_1}\right)$, on a

$$\begin{cases} r = t \\ \forall k \in [\![2 \,;\, s]\!]\,, \quad \begin{cases} p_k = q_k \\ \alpha_k = \beta_k \end{cases} \\ \alpha_1 = \beta_1 \end{cases}$$

D'où l'unicité.

D'où $\mathscr{P}(n)$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathscr{P}(n)$. ■

8.5.3 Valuations p-adiques

Définition 8.98 (Valuation p-adique)
Pour tout entier strictement positif $n \in \mathbb{N}^*$ et tout nombre premier $p \in \mathbb{P}$, on note $v_p(n)$ l'exposant de p dans la décomposition de $|n|$ en produit de nombres premiers.

Exemple 8.99
On a $40 = 2^3 \times 5$.

Donc

$$v_2(40) = 3 \qquad v_5(40) = 1 \qquad \forall p \in \mathbb{P} \setminus \{2 \,;\, 5\}\,, \ \ v_p(40) = 0.$$

Notation 8.100 (Fonction signum)
On pose

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{sg}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$$

Notation 8.101
Soit $n \in \mathbb{Z}^*$.

La valuation p-adique de n est nulle pour tous les nombres premiers $p \in \mathbb{P}$ sauf un nombre fini d'entre eux (on dit que la famille $\left(v_p(n)\right)_{p\in\mathbb{P}}$ est une famille d'entiers « presque tous nuls »).

Pour cette raison, on s'autorise à définir le « produit infini » :

$$\prod_{p\in\mathbb{P}} p^{v_p(n)}$$

comme étant le produit de ses facteurs différents de 1.

Sa valeur est donc en fait un produit fini :

$$\prod_{p\in\mathbb{P}} p^{v_p(n)} = \prod_{\substack{p\in\mathbb{P} \\ v_p(n)\neq 0}} p^{v_p(n)}.$$

Corollaire 8.102
On a, selon le théorème fondamental de l'arithmétique :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, \quad n = \operatorname{sg}(n) \times \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{v_p(n)}.$$

Proposition 8.103 (Valuations d'un produit)
Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$.

On a :

$$\forall p \in \mathbb{P}, \quad v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b).$$

Démonstration 8.104

On a $\begin{cases} a = \displaystyle\prod_{p\in\mathbb{P}} p^{v_p(a)} \\ b = \displaystyle\prod_{p\in\mathbb{P}} p^{v_p(b)} \end{cases}$ donc

$$ab = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{v_p(a)+v_p(b)} = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{v_p(ab)}.$$

D'où l'égalité, par unicité de l'écriture de ab en produit de nombres premiers. ■

Proposition 8.105 (Caractérisation de la divisibilité)
Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$.

On a
$$a \mid b \iff \forall p \in \mathbb{P},\ \ v_p(a) \leqslant v_p(b)\,.$$

Démonstration 8.106
$\boxed{\Longleftarrow}$

Supposons $\forall p \in \mathbb{P},\ \ v_p(a) \leqslant v_p(b)$.

Alors on a

$$b = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_p(b)} = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_p(a)} \times \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_p(b)-v_p(a)} = |a| \times \underbrace{\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\overbrace{v_p(b)-v_p(a)}^{\text{entiers presque tous nuls}}}}_{\in \mathbb{N}}$$

Donc $|a| \mid |b|$.

Donc $a \mid b$.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Supposons $a \mid b$.

Soit $c \in \mathbb{Z}$ tel que $ac = b$.

Comme $b \neq 0$, on a $c \neq 0$.

On a
$$\left(\operatorname{sg}(a) \times \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_p(a)}\right)\left(\operatorname{sg}(c) \times \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_p(c)}\right) = \operatorname{sg}(b) \times \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_p(b)}$$

D'où, selon l'unicité de l'écriture d'un entier en produit de nombres premiers :
$$\forall p \in \mathbb{P},\ \ v_p(a) + \underbrace{v_p(c)}_{\in \mathbb{N}} = v_p(b)\,.$$

Donc $\forall p \in \mathbb{P},\ \ v_p(a) \leqslant v_p(b)$. ■

Remarque 8.107 (Caractérisation de $v_p(n)$)
En particulier, si $n \in \mathbb{Z}^*$ et $p \in \mathbb{P}$, alors

$$\forall \alpha \in \mathbb{N},\ \ \alpha = v_p(n) \iff \begin{cases} p^\alpha \mid n \\ p^{\alpha+1} \nmid n \end{cases}$$

Proposition 8.108 (PGCD et PPCM)
Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$.

On a :
$$a \wedge b = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min\left\{v_p(a);v_p(b)\right\}} \qquad \text{et} \qquad a \vee b = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\max\left\{v_p(a);v_p(b)\right\}}$$

Démonstration 8.109
Posons $d = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min\left\{v_p(a);v_p(b)\right\}}$.

Montrons que $a \wedge b = d$.

On a $d \mid a$ et $d \mid b$ selon la Proposition 8.105.

On a $d \geqslant 0$.

Enfin, soit $e \in \mathbb{N}$ tel que $e \mid a$ et $e \mid b$.

On a $e \neq 0$ (car $a \neq 0$).

On a donc, selon la Proposition 8.105 :
$$\forall p \in \mathbb{P}, \quad \begin{cases} v_p(e) \leqslant v_p(a) \\ v_p(e) \leqslant v_p(b) \end{cases}$$

Donc $\forall p \in \mathbb{P}, \;\; v_p(e) \leqslant \min\left\{v_p(a)\,;\, v_p(b)\right\} = v_p(d)$.

D'où $e \mid d$ selon la Proposition 8.105.

Finalement, $d = a \wedge b$.

Idem pour $a \vee b$. ■

8.6 Petit théorème de Fermat

Lemme 8.110
Soient $p \in \mathbb{P}$ et $k \in [\![1\,;\,p-1]\!]$.

Alors $p \mid \binom{p}{k}$.

Démonstration 8.111

On a $\dbinom{p}{k} = \dfrac{p!}{k!\ (p-k)!}$.

Donc $p! = \dbinom{p}{k} k!\ (p-k)!$.

Donc $p \mid \dbinom{p}{k} k!\ (p-k)!$.

Or $p \wedge k! = 1$ car $k < p$ et $p \wedge (p-k)! = 1$ car $k > 0$.

Donc $p \wedge k!\ (p-k)! = 1$.

Donc $p \mid \dbinom{p}{k}$ selon le lemme de Gauss. ■

Théorème 8.112 (Petit théorème de Fermat)
Soit $p \in \mathbb{P}$.

On a, pour tout $x \in \mathbb{Z}$:

$$x^p \equiv x\ [p]\ .$$

De plus, pour tout entier x qui n'est pas divisible par p :

$$x^{p-1} \equiv 1\ [p]\ .$$

Démonstration 8.113
Montrons que $\forall x \in \mathbb{N},\ \underbrace{x^p \equiv x\ [p]}_{\mathscr{P}(x)}$ par récurrence sur $x \in \mathbb{N}$.

On a clairement $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$.

Soit $x \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(x)$.

Montrons $\mathscr{P}(x+1)$.

On a

$$\begin{aligned}
(x+1)^p &\equiv \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^k\ [p] \\
&\qquad\qquad \textit{car } \binom{n}{k} \equiv 0\ [p]\ \textit{si } 1 \leqslant k \leqslant p-1 \\
&\equiv x^0 + x^p\ [p] \\
&\qquad\qquad \textit{selon } \mathscr{P}(x) \\
&\equiv 1 + x\ [p]
\end{aligned}$$

D'où $\mathscr{P}(x+1)$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{N},\ \ x^p \equiv x\ [p]$.

Enfin, si $x \in \mathbb{Z}$ alors il existe $y \in \mathbb{N}$ tel que $x \equiv y\,[p]$.

On a alors $x^p \equiv y^p \equiv y \equiv x\,[p]$. ■

Chapitre 9

Fonctions dérivables

Sommaire

Dans tout ce chapitre, on note I un intervalle de $\mathbb{R}$ qui contient au moins deux points (c'est-à-dire un intervalle qui n'est ni l'ensemble vide, ni un singleton).

9.1 Étude locale

9.1.1 Définitions

Définition 9.1 (Dérivée)
Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.

On dit que f est dérivable en a si la limite

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe et est finie.

Elle est alors notée $f'(a)$, $Df(a)$, $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(a)$.

Notons J l'ensemble des points (de I) où f est dérivable.

On appelle dérivée de f la fonction

$$\begin{array}{rcl} J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

On dit que f est dérivable (sur I) si f est dérivable en tout point de I (c'est-à-dire $J = I$).

Définition 9.2 (Dérivée à droite, à gauche)
Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.

On dit que f est dérivable à droite en a si la limite

$$\lim_{x \longrightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe et est finie (il faut donc que l'intervalle $I \cap]a\,;+\infty[$ soit non vide).

Cette limite est alors notée $f'_d(a)$.

On dit que f est dérivable à gauche en a si la limite

$$\lim_{x \longrightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe et est finie (il faut donc que l'intervalle $I \cap]-\infty\,;a[$ soit non vide).

Cette limite est alors notée $f'_g(a)$.

Remarque 9.3
Si $I = [a \,;\, b]$, où a et b sont deux réels tels que $a < b$, alors :

La fonction f est dérivable en a si, et seulement si, elle est dérivable à droite en a.

La fonction f est dérivable en b si, et seulement si, elle est dérivable à gauche en b.

Soit $c \in]a \,;\, b[$. La fonction f est dérivable en c si, et seulement si, elle est dérivable à droite et à gauche en c et $f'_d(c) = f'_g(c)$.

Exemple 9.4
La fonction « carré » $x \longmapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

En 0, la fonction « valeur absolue » $x \longmapsto |x|$ est dérivable à droite et à gauche, mais n'est pas dérivable.

Proposition 9.5 (Dérivable $\implies$ continue)
Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Si f est dérivable, alors f est continue.

Démonstration 9.6
Supposons f dérivable en a.

Alors $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow a \\ x \neq a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie et $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow a \\ x \neq a}} x - a = 0$ donc par produit, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow a \\ x \neq a}} f(x) - f(a) = 0$.

Enfin, $f(x) - f(a) = 0$ si $x = a$.

Donc $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a)$.

Donc f est continue. ∎

Remarque 9.7
Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.

Si f est dérivable à droite en a, alors f est continue à droite en a.

Si f est dérivable à gauche en a, alors f est continue à gauche en a.

9.1.2 Opérations sur les dérivées

Proposition 9.8
Soient $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$.

On suppose que f et g sont dérivables en a.

Alors :

(1) $f + g$ est dérivable en a et on a :

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)\,.$$

(2) Plus généralement, si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et on a :

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)\,.$$

(3) fg est dérivable en a et on a :

$$(fg)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)\,.$$

(4) Si $g(a) \neq 0$ alors $\dfrac{1}{g}$ est dérivable en a et on a :

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{g^2(a)}.$$

(5) Si $g(a) \neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et on a :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\,g(a) - f(a)\,g'(a)}{g^2(a)}.$$

Démonstration 9.9 (1 et 2)
Clair. ∎

Démonstration 9.10 (3)
On a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\},\quad \frac{f(x)\,g(x) - f(a)\,g(a)}{x-a} &= \frac{f(x)\,g(x) - f(x)\,g(a) + f(x)\,g(a) - f(a)\,g(a)}{x-a} \\ &= f(x)\,\frac{g(x)-g(a)}{x-a} + \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,g(a) \\ &\xrightarrow[x \longrightarrow a]{} f(a)\,g'(a) + f'(a)\,g(a)\,.\end{aligned}$$

∎

Démonstration 9.11 (4)
On a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}, \quad \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} = \frac{1}{g(x)} \times \frac{1}{g(a)} \times \frac{g(a) - g(x)}{x-a}$$
$$\underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} \frac{-g'(a)}{g^2(a)}.$$

g est non-nulle au voisinage de a car $g(a) \neq 0$ et g est continue en a. ■

Démonstration 9.12 (5)

f et $\dfrac{1}{g}$ sont dérivables en a donc leur produit aussi.

On a :

$$\left(f \times \frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a) \times \frac{1}{g(a)} + f(a) \times \left(\frac{1}{g}\right)'(a)$$
$$= \frac{f'(a)}{g(a)} - \frac{f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$
$$= \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$
■

Corollaire 9.13
Soient $f, g \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ dérivables.

Alors les fonctions $f+g$ et fg sont dérivables sur I et, si g ne s'annule pas, les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont dérivables sur I.

Proposition 9.14
Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points, $f : I \longrightarrow J$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.

On suppose f dérivable en a et g dérivable en $f(a)$.

Alors $g \circ f$ est dérivable en a et on a :

$$(g \circ f)'(a) = f'(a)\, g'(f(a)).$$

Démonstration 9.15
⋆⋆ **Admis provisoirement** ⋆⋆ (*cf.* chapitre « Relations de comparaison »). ■

Corollaire 9.16
Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points, $f : I \longrightarrow J$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables.

Alors $g \circ f$ est dérivable et on a :

$$\forall x \in I, \quad (g \circ f)'(x) = f'(x)\, g'(f(x)).$$

Exemple 9.17
Étudions la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{1 + \ln x}$.

On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \text{ bien défini} &\iff 1 + \ln x \geqslant 0 \\ &\iff \ln x \geqslant -1 \\ &\iff x \geqslant \frac{1}{\mathrm{e}}. \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in \left]\frac{1}{\mathrm{e}}\,;+\infty\right[, \quad f'(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{2\sqrt{1+\ln x}} = \frac{1}{2x\sqrt{1+\ln x}}.$

Théorème 9.18 (Dérivée de la bijection réciproque)
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable et strictement monotone.

La fonction $f : I \longrightarrow f(I)$ est bijective ; on note $f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$ sa bijection réciproque.

Soit $y \in f(I)$.

Si $f'\left(f^{-1}(y)\right) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en y et on a :

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

Si $f'\left(f^{-1}(y)\right) = 0$ alors f^{-1} n'est pas dérivable en y. Son graphe admet une tangente verticale au point $\left(y, f^{-1}(y)\right)$.

Démonstration 9.19
Cf. TD. ■

9.1.3 Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Définition 9.20 (Fonction de classe $\mathscr{C}^k$)
Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$.

On dit que f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I si elle est k fois dérivable sur I et si sa dérivée k-ème est continue.

On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I si elle est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Notation 9.21
Soit $n \in \mathbb{N}$.

L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ (respectivement $\mathscr{C}^\infty$) de I dans $\mathbb{R}$ est noté :

$$\mathscr{C}^n (I, \mathbb{R}) \ \text{(respectivement } \mathscr{C}^\infty (I, \mathbb{R})\text{)}.$$

Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, les dérivées successives de f sont notées :

$$f^{(0)} = f \qquad f^{(1)} = f' \qquad f^{(2)} = f'' \qquad f^{(3)} \qquad \dots \qquad f^{(n)}.$$

Elles vérifient la relation de récurrence :

$$\forall k \in [\![0 \,;\, n-1]\!], \ \left(f^{(k)}\right)' = (f')^{(k)} = f^{(k+1)}.$$

Remarque 9.22
La suite d'ensembles $(\mathscr{C}^n (I, \mathbb{R}))_{n \in \mathbb{N}}$ peut être définie par récurrence par :

$$\begin{cases} \mathscr{C}^0 (I, \mathbb{R}) \ \text{est l'ensemble des fonctions continues de } I \text{ dans } \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ \mathscr{C}^{n+1} (I, \mathbb{R}) = \{ f \in \mathscr{F} (I, \mathbb{R}) \mid f \text{ est dérivable et } f' \in \mathscr{C}^n (I, \mathbb{R}) \} \end{cases}$$

Enfin, on peut poser :

$$\mathscr{C}^\infty (I, \mathbb{R}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{C}^n (I, \mathbb{R}).$$

On a

$$\mathscr{C}^\infty (I, \mathbb{R}) \subseteq \dots \subseteq \mathscr{C}^2 (I, \mathbb{R}) \subseteq \mathscr{C}^1 (I, \mathbb{R}) \subseteq \mathscr{C}^0 (I, \mathbb{R}) \subseteq \mathscr{F} (I, \mathbb{R}).$$

Proposition 9.23
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f, g \in \mathscr{C}^n (I, \mathbb{R})$.

Alors leur somme $f + g$ est de classe $\mathscr{C}^n$ et on a :

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}.$$

Plus généralement, si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathscr{C}^n$ et on a :

$$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}.$$

Démonstration 9.24
⋆⋆ Exercice ⋆⋆ ■

Proposition 9.25 (Formule de Leibniz)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f, g \in \mathscr{C}^n (I, \mathbb{R})$.

Alors leur produit fg est de classe $\mathscr{C}^n$ et on a :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Démonstration 9.26
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition :

$$\forall f, g \in \mathscr{C}^n (I, \mathbb{R}), \quad fg \in \mathscr{C}^n (I, \mathbb{R}) \text{ et } (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Si f et g sont continues, alors fg est continue et on a $(fg)^{(0)} = fg = \binom{0}{0} f^{(0)} g^{(0)} = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

D'où $\mathscr{P}(0)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$. Montrons $\mathscr{P}(n+1)$.

Soient $f, g \in \mathscr{C}^{n+1} (I, \mathbb{R})$.

Alors on a $f, g \in \mathscr{C}^n (I, \mathbb{R})$ donc selon $\mathscr{P}(n)$, on a : $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

Les fonctions $f^{(k)}$ et $g^{(n-k)}$ sont dérivables pour tout $k \in [\![0 \,;\, n]\!]$.

On a donc :

$$\begin{aligned}
\left((fg)^{(n)}\right)' &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} \qquad \textit{car } \binom{n}{-1} = \binom{n}{n+1} = 0 \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)}.
\end{aligned}$$

De plus, $f^{(k)}$ et $g^{(n-k+1)}$ sont continues pour tout $k \in [\![0 ; n+1]\!]$ donc $(fg)^{(n+1)}$ est continue.

Donc fg est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$.

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathscr{P}(n)$. ■

Remarque 9.27
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Les ensembles $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ sont des sous-anneaux de $(\mathscr{F}(I, \mathbb{R}), +, \times)$.

Démonstration 9.28
★★ Exercice ★★ ■

Proposition 9.29 (Autres opérations)
Soient $n \in \mathbb{N}$.

Soient $f, g \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$. Si g ne s'annule pas, alors les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont de classe $\mathscr{C}^n$.

Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points, $f \in \mathscr{C}^n(I, J)$ et $g \in \mathscr{C}^n(J, \mathbb{R})$. Alors $g \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^n$.

Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points et $f \in \mathscr{C}^n(I, J)$ telle que

$$\forall x \in I, \quad f'(x) \neq 0.$$

Alors la bijection réciproque de f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur J.

Démonstration 9.30 (Composition et bijection réciproque)
★★ Admis ★★ ■

Démonstration 9.31 (Quotient, non-exigible)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition

$$\forall f, g \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R}), \quad [\forall x \in I, \quad g(x) \neq 0] \implies \frac{f}{g} \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R}).$$

Le quotient de deux fonctions continues est continu donc on a $\mathscr{P}(0)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$. Montrons $\mathscr{P}(n+1)$.

Soient $f, g \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$.

On a $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Or f' et g' sont de classe $\mathscr{C}^n$ car f et g sont de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ et donc de classe $\mathscr{C}^n$.

Donc $f'g - fg'$ et g^2 sont de classe $\mathscr{C}^n$.

Donc selon $\mathscr{P}(n)$, $\frac{f'g - fg'}{g^2}$ est de classe $\mathscr{C}^n$.

Donc $\left(\frac{f}{g}\right)'$ est de classe $\mathscr{C}^n$.

Donc $\frac{f}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$.

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \mathscr{P}(n)$. ■

9.1.4 Extrema locaux

Théorème 9.32
Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.

On suppose que f admet un extremum local en a, que f est dérivable en a et que I est un voisinage de a (c'est-à-dire : $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \ ]a - \varepsilon\ ;\ a + \varepsilon[\subseteq I$).

Alors on a :

$$f'(a) = 0.$$

Démonstration 9.33
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]a - \varepsilon\ ;\ a + \varepsilon[\subseteq I$.

Quitte à remplacer f par $-f$, on suppose que f admet un minimum local en a.

Soit $\delta \in]0\ ;\ \varepsilon[$ tel que $\forall x \in]a - \delta\ ;\ a + \delta[,\ \ f(a) \leqslant f(x)$.

On a donc $\begin{cases} \forall x \in]a\ ;\ a + \delta[,\ \ \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0 \\ \forall x \in]a - \delta\ ;\ a[,\ \ \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant 0 \end{cases}$

D'où, par passage à la limite quand $x \longrightarrow a$: $\begin{cases} f'(a) \geqslant 0 \\ f'(a) \leqslant 0 \end{cases}$

Donc $f'(a) = 0$. ■

Remarque 9.34
Ainsi, si I est un intervalle ouvert et si la fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable, on a, pour tout $a \in I$:

$$f \text{ admet un extremum local en } a \implies f'(a) = 0.$$

L'implication réciproque est généralement fausse, comme le montre l'exemple de la fonction « cube » $f : x \longmapsto x^3$. En effet, on a $f'(0) = 0$ mais f n'admet ni minimum local, ni maximum local en 0 (car $\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ \ f(x) < f(0)$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ f(x) > f(0)$).

9.2 Étude globale

9.2.1 Égalité des accroissements finis

Théorème 9.35 (Théorème de Rolle)
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a\ ;\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

On suppose que $\begin{cases} f \text{ est continue sur } [a\ ;\ b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a\ ;\ b[\\ f(a) = f(b) \end{cases}$

Alors on a

$$\exists c \in]a\ ;\ b[\,,\ \ f'(c) = 0.$$

Démonstration 9.36
Comme f est continue sur un segment, elle admet un minimum $m \in \mathbb{R}$ et un maximum $M \in \mathbb{R}$.

Si $M = m$ alors f est constante donc $f' = 0$ sur $]a\ ;\ b[$ donc $c = \dfrac{a+b}{2}$ convient.

Supposons $M \neq m$.

Si $f(a) = m$ alors $f(a) \neq M$.

Soit $c \in [a\ ;\ b]$ tel que $f(c) = M$.

On a $c \neq a$ et $c \neq b$.

Donc $\begin{cases} f \text{ est dérivable en } c \\ f \text{ admet un extremum (local) en } c \\ ]a\ ;\ b[\text{ est un voisinage de } c \end{cases}$

Donc $f'(c) = 0$, donc c convient.

Si $f(a) \neq m$: idem en considérant $c \in [a\ ;\ b]$ tel que $f(c) = m$. ■

Corollaire 9.37 (Égalité des accroissements finis)
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a\ ;\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

On suppose que $\begin{cases} f \text{ est continue sur } [a\ ;\ b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a\ ;\ b[\end{cases}$

Alors on a

$$\exists c \in]a\ ;\ b[\,,\quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Démonstration 9.38
Posons $g : \begin{array}{ccc} [a\ ;\ b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} x \end{array}$

On remarque que $\begin{cases} g \text{ est continue sur } [a\ ;\ b] \\ g \text{ est dérivable sur }]a\ ;\ b[\\ g(b) = g(a) \end{cases}$

Donc selon le théorème de Rolle, il existe $c \in]a\ ;\ b[$ tel que $g'(c) = 0$.

Donc $f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$.

D'où $f(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. ■

9.2.2 Inégalité des accroissements finis

Théorème 9.39 (Inégalité des accroissements finis)
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, $f : [a\ ;\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $m, M \in \mathbb{R}$.

On suppose que $\begin{cases} f \text{ est continue sur } [a\ ;\ b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a\ ;\ b[\\ \forall x \in]a\ ;\ b[\,,\quad m \leqslant f'(x) \leqslant M \end{cases}$

Alors on a

$$m(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b - a).$$

Démonstration 9.40
Selon l'égalité des accroissements finis, il existe $c \in \,]a\,;b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Or $m \leqslant f'(c) \leqslant M$ donc $m \leqslant \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant M$.

D'où $m(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b - a)$. ■

Remarque 9.41
En supposant seulement $\forall x \in \,]a\,;b[\,,\ \ f'(x) \leqslant M$, on obtient seulement

$$f(b) - f(a) \leqslant M(b - a)$$

.

De même, en supposant seulement $\forall x \in \,]a\,;b[\,,\ \ m \leqslant f'(x)$, on obtient seulement

$$m(b - a) \leqslant f(b) - f(a)$$

.

Corollaire 9.42
Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable et $k \in \mathbb{R}_+$.

On a

$$f \text{ } k\text{-lipschitzienne} \iff \forall x \in I,\ \ |f'(x)| \leqslant k.$$

Démonstration 9.43
$\boxed{\Longrightarrow}$

Supposons f k-lipschitzienne.

Montrons que $\forall x \in I,\ \ |f'(x)| \leqslant k$.

Soit $x \in I$.

On a $\forall y \in I,\ \ |f(y) - f(x)| \leqslant k\,|y - x|$.

Donc $\forall y \in I \setminus \{x\}\,,\ \ \left|\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}\right| \leqslant k$.

D'où, par passage à la limite quand $y \longrightarrow x$: $|f'(x)| \leqslant k$.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Supposons $\forall x \in I,\ \ |f'(x)| \leqslant k$.

Montrons que $\forall a, b \in I,\ \ |f(b) - f(a)| \leqslant k\,|b - a|$.

Soient $a, b \in I$.

Si $a = b$, on a le résultat.

Si $a < b$, on a $\begin{cases} f \text{ continue sur } [a\ ;\, b] \\ f \text{ dérivable sur }]a\ ;\, b[\\ \forall x \in]a\ ;\, b[\,,\ -k \leqslant f'(x) \leqslant k \end{cases}$

Donc selon l'inégalité des accroissements finis, on a

$$-k\,(b-a) \leqslant f\,(b) - f\,(a) \leqslant k\,(b-a)\,.$$

Donc $|f\,(b) - f\,(a)| \leqslant k\,|b-a|$.

Si $a > b$: idem en échangeant a et b. ∎

Corollaire 9.44
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

Alors

$$f \text{ lipschitzienne} \iff f' \text{ bornée.}$$

Exemple 9.45
La fonction $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne.

En effet, on a $\begin{cases} \mathbb{R} \text{ est un intervalle} \\ \sin \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R},\ \ |\sin' x| = |\cos x| \leqslant 1 \end{cases}$

Donc sin est 1-lipschitzienne.

Exemple 9.46
Les fonctions exp, ln et $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$ en sont pas lipschitziennes car leurs dérivées ne sont pas bornées.

Exemple 9.47
On retrouve $\forall x \in \mathbb{R},\ \ |\sin x| \leqslant |x|$.

Exemple 9.48
La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_- & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^x \end{array}$ est 1-lipschitzienne car $\mathbb{R}$ est un intervalle et

$$\forall x \in \mathbb{R}_-,\ \ |f'(x)| = |\mathrm{e}^x| \leqslant 1.$$

Exemple 9.49
La fonction $f = \mathrm{sg}\big|_{\mathbb{R}^*}$, c'est-à-dire $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array}$ est dérivable, de dérivée nulle.

Cependant, on ne peut pas en déduire qu'elle est lipschitzienne car $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle.

Montrons que f n'est pas lipschitzienne.

Par l'absurde, supposons que f est lipschitzienne.

Soit $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x, y \in \mathbb{R}^*,\ \ |\mathrm{sg}\, x - \mathrm{sg}\, y| \leqslant k\,|x - y|$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \left|\mathrm{sg}\,\dfrac{1}{n} - \mathrm{sg}\,\dfrac{-1}{n}\right| \leqslant k\left|\dfrac{1}{n} - \dfrac{-1}{n}\right|$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ 2 \leqslant \dfrac{2k}{n}$.

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ n \leqslant k$.

Donc k majore $\mathbb{N}^*$: contradiction.

Donc f n'est pas lipschitzienne.

9.2.3 Fonctions croissantes

Théorème 9.50
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

On a :

(1) f *constante* $\iff \forall x \in I,\ \ f'(x) = 0$

(2) f *croissante* $\iff \forall x \in I,\ \ f'(x) \geqslant 0$

(3) f *décroissante* $\iff \forall x \in I,\ \ f'(x) \leqslant 0$

(4) f *strictement croissante* $\iff \begin{cases} \forall x \in I,\ \ f'(x) \geqslant 0 \\ \forall a, b \in I,\ \ a < b \implies [\exists x \in \,]a\,;b[\,,\ \ f'(x) > 0] \end{cases}$

(5) f *strictement croissante* $\Longleftarrow \begin{cases} \forall x \in I,\ \ f'(x) \geqslant 0 \\ f' \text{ ne s'annule qu'en un nombre fini de points} \end{cases}$

(6) f *strictement décroissante* $\iff \begin{cases} \forall x \in I,\ \ f'(x) \leqslant 0 \\ \forall a, b \in I,\ \ a < b \implies [\exists x \in \,]a\,;b[\,,\ \ f'(x) < 0] \end{cases}$

(7) f *strictement décroissante* $\Longleftarrow \begin{cases} \forall x \in I,\ \ f'(x) \leqslant 0 \\ f' \text{ ne s'annule qu'en un nombre fini de points} \end{cases}$

Démonstration 9.51 (2)
$\boxed{\Longrightarrow}$

Supposons f croissante.

Soit $x \in I$.

Montrons que $f'(x) \geqslant 0$.

On remarque $\forall y \in I \setminus \{x\}, \quad \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqslant 0$.

D'où, par passage à la limite quand $y \longrightarrow x$: $f'(x) \geqslant 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Supposons $\forall x \in I, \quad f'(x) \geqslant 0$.

Montrons que f est croissante, c'est-à-dire $\forall a, b \in I, \quad a \leqslant b \implies f(a) \leqslant f(b)$.

Soient $a, b \in I$ tels que $a \leqslant b$.

Si $a = b$: on a le résultat.

Si $a < b$:

On a $\begin{cases} f \text{ continue sur } [a\,;b] \\ f \text{ dérivable sur }]a\,;b[\\ \forall x \in]a\,;b[, \quad 0 \leqslant f'(x) \end{cases}$

D'où, selon l'inégalité des accroissements finis : $0(b - a) \leqslant f(b) - f(a)$.

Donc $f(a) \leqslant f(b)$. ■

Démonstration 9.52 (3)
Idem. ■

Démonstration 9.53 (1)
Découle de (2) et (3). ■

Démonstration 9.54 (4)
$\boxed{\Longrightarrow}$

Supposons f strictement croissante.

On a f croissante donc $f' \geqslant 0$ selon (2).

Montrons que $\forall a, b \in I, \quad a < b \implies [\exists c \in]a\,;b[, \quad f'(c) > 0]$.

Par l'absurde, soient $a, b \in I$ tels que $\begin{cases} a < b \\ \forall c \in \left]a\ ;b\right[\,,\ \ f'(c) \leqslant 0 \end{cases}$

On a $\begin{cases} a < b \\ f \text{ continue sur } [a\ ;b] \\ f \text{ dérivable sur } \left]a\ ;b\right[\\ f' = 0 \end{cases}$

Donc $f(a) = f(b)$: contradiction.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Supposons $\begin{cases} f' \geqslant 0 \\ \forall a, b \in I,\ \ a < b \implies \left[\exists c \in \left]a\ ;b\right[\,,\ \ f'(c) > 0\right] \end{cases}$

Montrons que f est strictement croissante.

On a f croissante car $f' \geqslant 0$ selon (2).

Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$.

Montrons que $f(a) < f(b)$.

Si $f(a) > f(b)$: impossible car f est croissante.

Si $f(a) = f(b)$ alors on a $\forall c \in [a\ ;b]\,,\ \ f(a) \leqslant f(c) \leqslant f(b) = f(a)$.

Donc f est constante sur $[a\ ;b]$.

Donc $\forall c \in [a\ ;b]\,,\ \ f'(c) = 0$: impossible.

Donc $f(a) < f(b)$.

Donc f est strictement croissante. ■

Démonstration 9.55 (5)
Découle de (4). ■

Démonstration 9.56 (6 et 7)
Idem que (4) et (5). ■

9.2.4 Théorème de la limite de la dérivée

Théorème 9.57 (Théorème de la limite de la dérivée)
Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.

$$\text{On suppose } \begin{cases} f \text{ continue sur } I \\ f \text{ dérivable sur } I \setminus \{a\} \\ \ell = \lim\limits_{\substack{x \longrightarrow a \\ x \neq a}} f'(x) \text{ existe} \end{cases}$$

Si ℓ est finie alors f est dérivable en a, de dérivée $f'(a) = \ell$.

Si ℓ est infinie alors f n'est pas dérivable en a. Son graphe admet une tangente verticale.

Remarque 9.58
On a

$$f \text{ dérivable en } a \iff \lim_{\substack{x \longrightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe et est finie.}$$

Démonstration 9.59
Supposons ℓ finie.

Montrons que $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow a \\ x \neq a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall x \in I \setminus \{a\}, \quad |x - a| \leqslant \delta \implies \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \ell \right| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall c \in I \setminus \{a\}, \ |c - a| \leqslant \delta \implies |f'(c) - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Un tel δ existe car on a $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell$.

Montrons que δ convient, c'est-à-dire

$$\forall x \in I \setminus \{a\}, \quad |x - a| \leqslant \delta \implies \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \ell \right| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $x \in I \setminus \{a\}$ tel que $|x - a| \leqslant \delta$.

Si $a < x$:

$$\text{On a } \begin{cases} f \text{ continue sur } [a\,;x] \text{ (car } I \text{ est un intervalle)} \\ f \text{ dérivable sur }]a\,;x[\end{cases}$$

Donc selon l'égalité des accroissements finis, il existe $c_x \in \,]a\,;x[$ tel que $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$.

On a $|c_x - a| \leqslant \delta$ car $a < c_x < x < a + \delta$.

Donc $|f'(c_x) - \ell| \leqslant \varepsilon$ (par définition de δ).

Donc $\left|\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$.

Si $x < a$: idem en appliquant l'égalité des accroissements finis sur $[x\ ;\ a]$.

Donc δ convient.

Donc $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow a \\ x \neq a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell = \lim\limits_{\substack{x \longrightarrow a \\ x \neq a}} f'(x)$.

Si $\ell = \pm\infty$, on montre de la même façon que $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow a \\ x \neq a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$. ■

Exercice 9.60
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

On pose

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^\alpha = \begin{cases} e^{\alpha \ln x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

(1) Montrer que f est continue en 0.

(2) Donner une CNS sur α pour que f soit dérivable en 0.

Correction 9.61 (1)
On a $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} e^{\alpha \ln x} = 0$.

Donc f est continue en 0.

Correction 9.62 (2)
On a f continue sur $\mathbb{R}_+$ et f dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ f'(x) = \dfrac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x} = \dfrac{\alpha}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha - 1}$.

$$\text{Donc } \lim_{x \longrightarrow 0^+} f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha - 1 > 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha - 1 < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc d'après le théorème de la limite de la dérivée :

$$\begin{aligned} f \text{ dérivable en } 0 &\iff \lim_{x \longrightarrow 0^+} f'(x) \text{ finie} \\ &\iff \alpha - 1 \geqslant 0 \\ &\iff \alpha \geqslant 1. \end{aligned}$$

9.2.5 Fonctions usuelles

Les fonctions suivantes sont dérivables sur leur ensemble de définition :

La fonction :	définie sur :	est dérivable, de dérivée :
exp	$\mathbb{R}$	exp
ln	$\mathbb{R}_+^*$	$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$
sh	$\mathbb{R}$	ch
ch	$\mathbb{R}$	sh
sin	$\mathbb{R}$	cos
cos	$\mathbb{R}$	$-\sin$
tan	$\mathbb{R} \setminus \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$	$1 + \tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$
Arctan	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$
$x \longmapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto nx^{n-1}$
$x \longmapsto x^n$ avec $n \in -\mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$x \longmapsto nx^{n-1}$
$x \longmapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in]1\,;+\infty[\setminus \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}_+$	$x \longmapsto \alpha x^{\alpha-1}$
$x \longmapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in]-\infty\,;0[\setminus \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \longmapsto \alpha x^{\alpha-1}$
$x \longmapsto a^x$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \longmapsto (\ln a)\, a^x$

Les fonctions suivantes sont continues sur leur ensemble de définition, mais ne sont pas dérivables en tout point :

La fonction :	est dérivable sur :	de dérivée :
$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lvert x\rvert \end{array}$	$\mathbb{R}^*$	$x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
Arcsin (définie sur $[-1\,;1]$)	$]-1\,;1[$	$x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Arccos (définie sur $[-1\,;1]$)	$]-1\,;1[$	$x \longmapsto \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^\alpha \end{array}$ avec $\alpha \in]0\,;1[$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \longmapsto \alpha x^{\alpha-1}$

9.2.5.1 exp

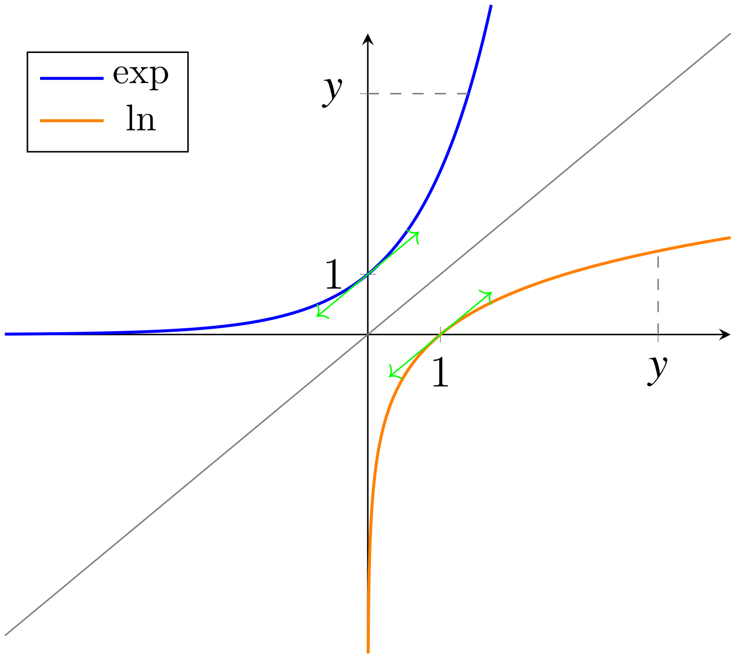
La fonction exp est dérivable, de dérivée exp (admis) et de classe $\mathscr{C}^\infty$.

9.2.5.2 ln

La fonction exp est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

Elle est donc bijective de $\mathbb{R}$ vers $\left]\lim_{-\infty} \exp\ ;\ \lim_{+\infty} \exp\right[=]0\ ;\ +\infty[= \mathbb{R}_+^*$.

On appelle $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ sa bijection réciproque :



La bijection exp est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et sa dérivée ne s'annule jamais.

Donc ln est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et, selon le théorème de dérivation de la bijection réciproque, on a :

$$\begin{aligned}\forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \ln' y &= \frac{1}{\exp' (\ln y)}\\ &= \frac{1}{\exp (\ln y)}\\ &= \frac{1}{y}.\end{aligned}$$

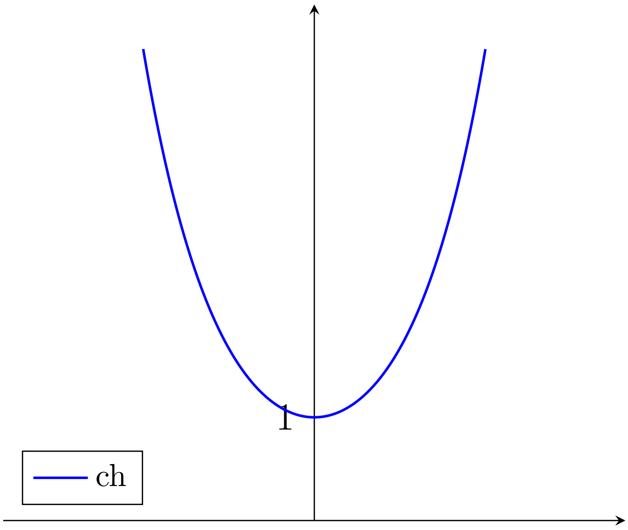
9.2.5.3 sh & ch

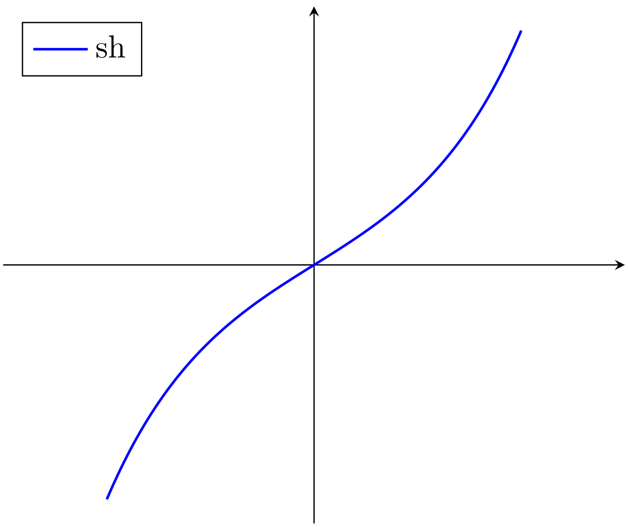
On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} & \text{(sinus hyperbolique)} \\ \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} & \text{(cosinus hyperbolique)} \end{cases}$$

On a $\forall x \in \mathbb{R}, \;\; \mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$.

Graphes :





La fonction ch est paire et on a $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$.

La fonction sh est impaire et on a $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$.

9.2.5.4 sin & cos

Les fonctions sin et cos sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ et on a $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$ (admis).

9.2.5.5 tan

La fonction tan est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et on a $\tan' = 1 + \tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$ (admis).

9.2.5.6 Arctan

On sait que la fonction $\mathrm{Arctan} : \mathbb{R} \longrightarrow \left] \dfrac{-\pi}{2} \,;\, \dfrac{\pi}{2} \right[$ est la bijection réciproque de $f = \tan\big|_{]-\pi/2;\pi/2[}$.

Comme f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et sa dérivée ne s'annule pas, on sait que f^{-1} = Arctan est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et qu'on a :

$$\begin{aligned}\forall y \in \mathbb{R},\quad \operatorname{Arctan}' y &= \frac{1}{f'\left(\operatorname{Arctan} y\right)}\\ &= \frac{1}{\tan'\left(\operatorname{Arctan} y\right)}\\ &= \frac{1}{1+\tan^2\left(\operatorname{Arctan} y\right)}\\ &= \frac{1}{1+y^2}.\end{aligned}$$

9.2.5.7 Fonctions puissance

La fonction $x \longmapsto x^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, est définie sur $\begin{cases}\mathbb{R}_+^* & \text{si } \alpha < 0\\ \mathbb{R}_+ & \text{si } \alpha \geqslant 0\end{cases}$

La fonction $x \longmapsto x^n$, où $n \in \mathbb{Z}$, est définie sur $\begin{cases}\mathbb{R}^* & \text{si } n < 0\\ \mathbb{R} & \text{si } n \geqslant 0\end{cases}$

Les fonctions sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

9.2.5.8 $x \longmapsto a^x$

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

On remarque que $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$ donc sa dérivée est $x \longmapsto (\ln a)\, \mathrm{e}^{x \ln a} = (\ln a)\, a^x$.

9.2.5.9 Arcsin

La fonction

$$f : \begin{array}{ccc}\left[\dfrac{-\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1 ; 1]\\ \theta & \longmapsto & \sin\theta\end{array}$$

est dérivable et bijective.

Sa bijection réciproque est Arcsin.

On a

$$\begin{aligned}\forall t \in [-1 ; 1],\ \text{ Arcsin est dérivable en } t &\iff f'\left(\operatorname{Arcsin} t\right) \neq 0\\ &\iff \cos\left(\operatorname{Arcsin} t\right) \neq 0\\ &\iff \sqrt{1-t^2} \neq 0\\ &\iff t \neq \pm 1.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\forall t \in \left]-1\ ;\ 1\right[,\quad \operatorname{Arcsin}' t &= \frac{1}{f'(\operatorname{Arcsin} t)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\end{aligned}$$

En $t = \pm 1$, la fonction Arcsin n'est pas dérivable et son graphe admet une tangente verticale.

9.2.5.10 Arccos

On sait qu'on a $\forall t \in [-1\ ;\ 1],\ \operatorname{Arccos} t = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} t$.

Donc Arccos est dérivable sur $\left]-1\ ;\ 1\right[$, de dérivée $t \longmapsto \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}$ et son graphe admet une tangente verticale en $t = \pm 1$.

9.3 Fonctions convexes

9.3.1 Préliminaires

Remarque 9.63 (Paramétrage d'un segment de $\mathbb{R}$)
Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

L'ensemble image de la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} [0\ ;\ 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (1-t)\,a + tb \end{array}$$

est le segment de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b, c'est-à-dire $\begin{cases} [a\ ;\ b] & \text{si } a \leqslant b \\ [b\ ;\ a] & \text{sinon} \end{cases}$

Remarque 9.64 (Paramétrage d'un segment de droite dans $\mathbb{R}^2$)
Soient $A = (x_A, y_A)\,, B = (x_B, y_B) \in \mathbb{R}^2$.

L'ensemble image de la fonction

$$F : \begin{array}{ccc} [0\ ;\ 1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (1-t)\,A + tB = ((1-t)\,x_A + tx_B, (1-t)\,y_A + ty_B) \end{array}$$

est le segment de droite $[A\ ;\ B]$.

Définition 9.65 (Vocabulaire : graphe, corde, sécante)
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

On rappelle que le graphe de f est l'ensemble :

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} \mid f(x) = y\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Soient $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 \neq x_2$.

Notons M_1 et M_2 les points du graphe de f d'abscisses respectives x_1 et x_2 :

$$M_1 = (x_1, f(x_1)) \qquad \text{et} \qquad M_2 = (x_2, f(x_2)).$$

Le segment de droite $[M_1 ; M_2]$ est appelé la corde de Γ_f en x_1 et x_2.

La droite $(M_1 M_2)$ est appelée la sécante à Γ_f en x_1 et x_2.

9.3.2 Définition

Définition 9.66 (Fonction convexe, fonction concave)
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f est une fonction convexe si elle vérifie :

$$\forall x, y \in I, \ \ \forall t \in [0 ; 1], \ \ f((1-t)x + ty) \leqslant (1-t) f(x) + t f(y).$$

On dit que f est une fonction concave si elle vérifie :

$$\forall x, y \in I, \ \ \forall t \in [0 ; 1], \ \ f((1-t)x + ty) \geqslant (1-t) f(x) + t f(y).$$

Remarque 9.67
Pour qu'une fonction soit convexe ou concave, il faut que son ensemble de définition soit un intervalle.

Exemple 9.68
Les fonctions exp et $x \longmapsto x^2$ sont convexes.

La fonction ln est concave.

La fonction sin n'est ni convexe ni concave.

Remarque 9.69
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

On a :

$$f \text{ concave } \iff -f \text{ convexe.}$$

Dans la suite de ce cours, on se concentrera sur les fonctions convexes.

Proposition 9.70 (Inégalité de Jensen)
Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ et $x_1, \ldots, x_n \in I$.

On suppose que f est convexe et qu'on a $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$.

Alors :

$$f\left(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n\right) \leqslant \lambda_1 f\left(x_1\right) + \cdots + \lambda_n f\left(x_n\right).$$

Démonstration 9.71
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition :

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+,\ \forall x_1, \ldots, x_n \in I,\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1 \implies f\left(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n\right) \leqslant \lambda_1 f\left(x_1\right) + \cdots + \lambda_n f\left(x_n\right).$$

On a $\mathscr{P}(1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$. Montrons $\mathscr{P}(n+1)$.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}_+$ et $x_1, \ldots, x_{n+1} \in I$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n+1} = 1$.

Si $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$ et $\lambda_{n+1} = 1$ alors on a $f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f\left(x_i\right)$. Donc on a $\mathscr{P}(n+1)$.

Supposons $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n \neq 0$.

On a :

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) &= f\left(\left(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n\right) \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) && \textit{car } f \textit{ est convexe} \\
&\leqslant \left(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n\right) f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} x_i\right) + \lambda_{n+1} f\left(x_{n+1}\right) && \textit{selon } \mathscr{P}(n) \\
&\leqslant \left(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n\right) \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} f\left(x_i\right) + \lambda_{n+1} f\left(x_{n+1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f\left(x_i\right).
\end{aligned}$$

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

Donc par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathscr{P}(n)$. ■

9.3.3 Propriétés

Par définition, une fonction convexe est une fonction qui est définie sur un intervalle et dont le graphe est situé en dessous de ses cordes. La proposition suivante précise la position du graphe par rapport à ses sécantes.

Proposition 9.72 (Position du graphe par rapport à ses sécantes)
Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a, b \in I$ tels que $a < b$.

On considère la sécante Δ au graphe Γ_f en a et b.

Le graphe de f est situé :

- *en dessous de sa sécante Δ sur $[a\ ;\ b]$;*
- *au dessus de sa sécante Δ sur $I \cap (]-\infty\ ;\ a] \cup [b\ ;\ +\infty[)$.*

Démonstration 9.73
Soit $s \in\ ]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]1\ ;\ +\infty[$.

Supposons $(1-s)\,a + sb \in I$.

Il s'agit de montrer $(1-s)\,f(a) + sf(b) \leqslant f((1-s)\,a + sb)$.

Posons $c = (1-s)\,a + sb = a + s\,(b-a)$.

Supposons $s > 1$ (c'est-à-dire $a < b < c$).

On a $\left(1 - \dfrac{1}{s}\right) a + \dfrac{1}{s} c = b$ avec $\dfrac{1}{s} \in [0\ ;\ 1]$.

D'où, comme f est convexe : $f(b) \leqslant \left(1 - \dfrac{1}{s}\right) f(a) + \dfrac{1}{s} f(c)$.

D'où, en multipliant par s : $(1-s)\,f(a) + sf(b) \leqslant f(c)$.

Supposons $s < 0$ (c'est-à-dire $c < a < b$).

On a $\dfrac{1}{1-s} c - \dfrac{s}{1-s} b = a$, c'est-à-dire $\left(1 - \dfrac{1}{1-s}\right) b + \dfrac{1}{1-s} c = a$.

D'où, comme f est convexe : $f(a) \leqslant \left(1 - \dfrac{1}{1-s}\right) f(b) + \dfrac{1}{1-s} f(c)$.

D'où, en multipliant par s : $f(c) \geqslant (1-s)\,f(a) + sf(b)$. ■

Proposition 9.74 (Inégalité des pentes)
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

Pour tous $a, b \in I$ *tels que* $a \neq b$*, on note* $\tau(a, b)$ *le taux d'accroissement de* f *entre* a *et* b *:*

$$\tau(a, b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

NB : cette notation n'est pas officielle.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) La fonction f *est convexe*

(2) $\forall a, b, c \in I, \quad a < b < c \implies \tau(a, b) \leqslant \tau(a, c) \leqslant \tau(b, c)$

(3) $\forall a, b, c \in I, \quad a < b < c \implies \tau(a, b) \leqslant \tau(b, c)$

Démonstration 9.75 ((1) $\implies$ *(2))*
Soient $a, b, c \in I$ tels que $a < b < c$.

On suppose f convexe.

Posons $t = \dfrac{b - a}{c - a}$.

On a $0 \leqslant t \leqslant 1$ et $t(c - a) = b - a$ donc $(1 - t)a + tc = b$.

Donc, comme f est convexe, on a $f(b) \leqslant (1 - t) f(a) + t f(c)$.

Donc $f(b) - f(a) \leqslant t(f(c) - f(a))$.

Donc $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \dfrac{t(f(c) - f(a))}{b - a}$.

Donc $\tau(a, b) \leqslant \tau(a, c)$.

De même, comme $t(c - a) = b - a$, on a $(1 - t)(c - a) = (c - a) - (b - a) = c - b$.

Et comme $t(f(c) - f(a)) \geqslant f(b) - f(a)$, on a :

$$(1 - t)(f(c) - f(a)) \leqslant f(a) - f(b) + f(c) - f(a) = f(c) - f(b).$$

D'où $\dfrac{(1 - t)(f(c) - f(a))}{c - b} \leqslant \dfrac{f(c) - f(b)}{c - b}$.

Donc $\tau(a, c) \leqslant \tau(b, c)$. ■

Démonstration 9.76 ((2) $\Longrightarrow$ (3))
Clair. ■

Démonstration 9.77 ((3) $\Longrightarrow$ (1))
Supposons (3).

Montrons que f est convexe.

Soient $a, c \in I$ et $t \in [0\ ;\ 1]$.

Montrons qu'on a
$$f\left((1-t)\,a+tc\right) \leqslant (1-t)\,f\,(a)+t f\,(c) \qquad (*)$$

Quitte à remplacer a, c, t par $c, a, 1-t$, on peut supposer $a \leqslant c$.

Posons $b = (1-t)\,a + tc$.

On a $a \leqslant b \leqslant c$.

Si $a = c$, $t = 0$ ou $t = 1$, alors $(*)$ est claire.

On suppose $a \neq c$, $t \neq 0$ et $t \neq 1$.

D'où $a < b < c$.

Il s'agit de montrer $f\,(b) \leqslant (1-t)\,f\,(a) + t f\,(c)$.

On a $\dfrac{f\,(b)-f\,(a)}{b-a} \leqslant \dfrac{f\,(c)-f\,(b)}{c-b}$.

Or $b - a = t\,(c-a)$ et $c - b = (1-t)\,(c-a)$.

D'où $\dfrac{f\,(b)-f\,(a)}{t\,(c-a)} \leqslant \dfrac{f\,(c)-f\,(b)}{(1-t)\,(c-a)}$.

D'où, en multipliant par $t\,(1-t)\,(c-a) > 0$: $(1-t)\,(f\,(b)-f\,(a)) \leqslant t\,(f\,(c)-f\,(b))$.

Donc $f\,(b) \leqslant (1-t)\,f\,(a) + t f\,(c)$.

Donc f est convexe. ■

La proposition suivante est une simple reformulation de la proposition précédente :

Proposition 9.78 (Croissance des pentes)
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

On pose
$$\forall a \in I, \quad g_a : \begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f\,(x)-f\,(a)}{x-a} \end{array}$$

On a alors :
$$f \text{ est convexe} \iff \forall a \in I, \ \ g_a \text{ est croissante.}$$

Démonstration 9.79
$\boxed{\Longrightarrow}$

Supposons f convexe.

Soit $a \in I$.

Montrons que g_a est croissante.

Soient $x, y \in I$ tels que $x < y$.

Montrons que $g_a(x) \leqslant g_a(y)$.

Selon la Proposition 9.74, on a :

- Si $a < x < y$: on a $\tau(a, x) \leqslant \tau(a, y)$. Donc $g_a(x) \leqslant g_a(y)$.
- Si $x < a < y$: on a $\tau(x, a) \leqslant \tau(a, y)$. Donc $g_a(x) \leqslant g_a(y)$.
- Si $x < y < a$: on a $\tau(x, a) \leqslant \tau(y, a)$. Donc $g_a(x) \leqslant g_a(y)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Supposons $\forall a \in I, \;\; g_a$ est croissante.

Montrons que f est convexe.

Soient $a, b, c \in I$ tels que $a < b < c$.

Comme g_a est croissante, on a $g_a(a) \leqslant g_a(b)$.

Donc $\tau(a, b) \leqslant \tau(b, c)$.

Donc d'après la Proposition 9.74, f est convexe. ∎

9.3.4 Fonctions convexes dérivables

Proposition 9.80
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

On a

$$f \text{ est convexe} \iff f' \text{ est croissante.}$$

Démonstration 9.81
$\boxed{\Longrightarrow}$

Supposons f convexe.

Montrons que f' est croissante.

Soient $x, y \in I$ tels que $x < y$.

Montrons que $f'(x) \leqslant f'(y)$.

On a, selon la Proposition 9.74 :

- $\forall z \in \left]x\ ;\ y\right[,\ \ \tau(x, z) \leqslant \tau(x, y)$
- $\forall z \in \left]x\ ;\ y\right[,\ \ \tau(x, y) \leqslant \tau(z, y)$.

D'où, par passage à la limite quand $z \longrightarrow x^+$: $f'(x) \leqslant \tau(x, y)$.

Et, par passage à la limite quand $z \longrightarrow y^-$: $\tau(x, y) \leqslant f'(y)$.

Finalement, on a $f'(x) \leqslant f'(y)$.

Donc f' est croissante.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Supposons f' croissante.

Montrons que f est convexe.

Soient $a, b, c \in I$ tels que $a < b < c$.

Montrons que $\tau(a, b) \leqslant \tau(b, c)$.

La fonction f est $\begin{cases} \text{continue sur } [a\ ;\ b] \\ \text{dérivable sur }]a\ ;\ b[\end{cases}$ et $\begin{cases} \text{continue sur } [b\ ;\ c] \\ \text{dérivable sur }]b\ ;\ c[\end{cases}$

Selon l'égalité des accroissements finis, il existe $x, y \in I$ tels que $a < x < b < y < c$ et

$$\tau(a, b) = f'(x) \qquad \text{et} \qquad \tau(b, c) = f'(y)\,.$$

Or f' est croissante donc $f'(x) \leqslant f'(y)$.

Donc $\tau(a, b) \leqslant \tau(b, c)$.

Donc f est convexe. ■

Corollaire 9.82
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

On a :

$$f \textit{ est convexe} \iff f'' \geqslant 0.$$

Exemple 9.83
On en déduit facilement la convexité (*i.e.* le caractère convexe ou concave) des fonctions usuelles :

- exp est convexe car $\exp'' = \exp \geqslant 0$.
- ln est concave car $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \ln'' x = \dfrac{-1}{x^2} \leqslant 0$.
- cos n'est ni convexe ni concave sur $\mathbb{R}$ (car $\cos'' 0 = -1 < 0$ et $\cos'' \pi = 1 > 0$).
- Arccos est concave sur $[0 \,;\, 1]$ et convexe sur $[-1 \,;\, 0]$ car $t \longmapsto \dfrac{-1}{\sqrt{1-t^2}}$ est décroissante sur $[0 \,;\, 1]$ et croissante sur $[-1 \,;\, 0]$.
- Arctan est concave sur $\mathbb{R}_+$ et convexe sur $\mathbb{R}_-$ car $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et croissante sur $\mathbb{R}_-$.
- tan est convexe sur $\left[0 \,;\, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et concave sur $\left[\dfrac{-\pi}{2} \,;\, 0\right]$ car $1 + \tan^2$ est croissante sur $\left[0 \,;\, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{-\pi}{2} \,;\, 0\right]$.

Exercice 9.84
Étudier la convexité de la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(1+x^2\right) \end{array}$.

Correction 9.85
On a $\forall x \in \mathbb{R}, \ \ f'(x) = 2x \times \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \ \ f''(x) = \dfrac{2\left(1+x^2\right) - 2x \times 2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \dfrac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}$.

Donc

$$\begin{aligned} f''(x) \geqslant 0 &\iff x^2 \leqslant 1 \\ &\iff |x| \leqslant 1 \\ &\iff x \in [-1 \,;\, 1]. \end{aligned}$$

Donc f est convexe sur $[-1 \,;\, 1]$ et concave sur $]-\infty \,;\, -1]$ et sur $[1 \,;\, +\infty[$.

Exercice 9.86 (Inégalité arithmético-géométrique)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+$.

Montrer :

$$\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Correction 9.87
Si l'un des réels $x_1, \ldots, x_n$ est nul, l'inégalité est claire.

Supposons $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$.

On a exp convexe sur $\mathbb{R}$.

On considère les points $\ln x_1, \ldots, \ln x_n \in \mathbb{R}$.

D'après l'inégalité de Jensen, on a :

$$\exp\left(\frac{\ln x_1 + \cdots + \ln x_n}{n}\right) \leqslant \frac{\exp(\ln x_1) + \cdots + \exp(\ln x_n)}{n}.$$

Donc $(\exp(\ln x_1 + \cdots + \ln x_n))^{1/n} \leqslant \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.

D'où $(x_1 \ldots x_n)^{1/n} \leqslant \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.

Proposition 9.88
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et dérivable.

Le graphe de f est situé au dessus de ses tangentes.

Démonstration 9.89
Soit $a \in I$.

On note Γ_f le graphe de f et T sa tangente en a.

On a

$$\Gamma_f : y = f(x) \qquad \text{et} \qquad T : y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Posons $\delta : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - (f'(a)(x-a) + f(a)) \end{array}$

Il s'agit de montrer que $\forall x \in I,\ \delta(x) \geqslant 0$.

On a $\forall x \in I,\ \delta'(x) = f'(x) - f'(a)$.

Or f est convexe donc f' est croissante donc $\forall x \in I,\ \begin{cases} \delta'(x) \geqslant 0 & \text{si } x \geqslant a \\ \delta'(x) \leqslant 0 & \text{si } x \leqslant a \end{cases}$

On a donc le tableau de variations suivant :

x		a	
δ	↘	0	↗

D'où $\forall x \in \boldsymbol{I},\ \ \delta(x) \geqslant 0$.

Donc $\boldsymbol{\Gamma}_f$ est situé au dessus de $\boldsymbol{T}$. ■

Exercice 9.90
Montrer les encadrements suivants :

(1) $\forall \theta \in \left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{4}\right],\ \ \theta \leqslant \tan\theta \leqslant \dfrac{4}{\pi}\theta$

(2) $\forall \theta \in \left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right],\ \ \dfrac{2}{\pi}\theta \leqslant \sin\theta \leqslant \theta$

Correction 9.91 (1)
La fonction tan est convexe sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{4}\right]$ car sa dérivée $\tan' = 1 + \tan^2$ est croissante sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{4}\right]$.

On en déduit d'une part que son graphe est situé au dessus de sa tangente en $\theta = 0$, c'est-à-dire $y = \tan'(0)(\theta - 0) + \tan(0) = \theta$.

Donc $\forall \theta \in \left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{4}\right],\ \ \theta \leqslant \tan\theta$.

On en déduit d'autre part que son graphe est situé en dessous de sa corde entre 0 et $\dfrac{\pi}{4}$, c'est-à-dire $\forall \theta \in \left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{4}\right],\ \ \tan\theta \leqslant \dfrac{4}{\pi}\theta$.

D'où l'encadrement.

Correction 9.92 (2)
La fonction sin est concave sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ car sa dérivée $\sin' = \cos$ est décroissante sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

On en déduit d'une part que son graphe est situé en dessous de sa tangente en 0, c'est-à-dire $y = \sin'(0)(\theta - 0) + \sin(0) = \theta$.

Donc $\forall \theta \in \left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right],\ \ \sin\theta \leqslant \theta$.

On en déduit d'autre part que son graphe est situé au dessus de sa corde entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $\forall \theta \in \left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right],\ \ \dfrac{2}{\pi}\theta \leqslant \sin\theta$.

D'où l'encadrement.

Chapitre 10

Polynômes, fractions rationnelles

Sommaire

Dans tout ce chapitre, on considère un corps $(\mathbb{K}, +, \times)$.

En pratique, aux concours, on se limite à $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, voire parfois $\mathbb{Q}$.

10.1 Polynômes

10.1.1 Anneau des polynômes

Il n'est pas difficile de donner une construction rigoureuse de l'anneau des polynômes, mais c'est hors programme (et cela n'apporte rien en pratique). On se contente donc de la « définition » suivante, qui décrit ce qu'il faut savoir.

Définition 10.1
L'anneau des polynômes en l'indéterminée X à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un anneau commutatif noté $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ tel que :

(1) Le corps $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$.

(2) Il existe un élément $X \in \mathbb{K}[X]$ appelé l'indéterminée.

(3) Tout élément $P \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit de façon unique sous la forme :

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad \text{où : } \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ \forall k \in [\![0\,;n]\!], \quad a_k \in \mathbb{K} \end{cases}$$

à des termes nuls près.
Cette écriture est appelée l'écriture canonique du polynôme.
Le coefficient a_k est appelé le coefficient de P de degré k.

Remarque 10.2

- Le point (1) signifie que $\mathbb{K}$ est inclus dans $\mathbb{K}[X]$ et que, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, la somme $\lambda + \mu$ et le produit $\lambda\mu$ ont même valeur dans $\mathbb{K}$ et dans $\mathbb{K}[X]$.

- Dans le point (3), l'unicité de l'écriture à des termes nuls près signifie :

$$\forall m,n \in \mathbb{N},\ \ \forall a_0,\dots,a_n,b_0,\dots,b_m \in \mathbb{K},\ \ \begin{cases} n \leqslant m \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k \end{cases} \implies \begin{cases} \forall k \in [\![0\ ;\ n]\!],\ \ a_k = b_k \\ \forall k \in [\![n+1\ ;\ m]\!],\ \ b_k = 0 \end{cases}$$

- L'indéterminée est parfois aussi notée Y, Z ou T. L'anneau des polynômes est alors noté $\mathbb{K}[Y]$, $\mathbb{K}[Z]$ ou $\mathbb{K}[T]$.

- Les éléments $\lambda \in \mathbb{K}$ sont appelés polynômes constants. Leur écriture canonique est λX^0 ou simplement λ. On appelle polynôme nul le polynôme $0 = 0X^0$.

- On pourrait tout aussi bien considérer l'anneau $\mathbb{A}[X]$ des polynômes à coefficients dans un anneau commutatif $\mathbb{A}$, mais dans ce chapitre, on ne s'intéresse qu'au cas où les polynômes sont à coefficients dans un corps.

Remarque 10.3 (Structure de l'anneau $\mathbb{K}[X]$)

Soient deux polynômes $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $B = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ avec $m,n \in \mathbb{N}$ et $a_0,\dots,a_n,b_0,\dots,b_m \in \mathbb{K}$.

- Quitte à ajouter des termes nuls, on peut supposer $m = n$.

  La somme de A et B est le polynôme $C = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k X^k$ défini par :

$$\forall k \in [\![0\ ;\ n]\!],\ \ c_k = a_k + b_k.$$

- On pose : $\forall k \in [\![n+1\ ;\ +\infty[\![,\ \ a_k = 0$ et $\forall k \in [\![m+1\ ;\ +\infty[\![,\ \ b_k = 0$.

  Le produit de A et B est le polynôme $D = \displaystyle\sum_{k=0}^{m+n} d_k X^k$ défini par :

$$\forall k \in [\![0\ ;\ m+n]\!],\ \ d_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}.$$

- Les éléments neutres de l'anneau $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes constants $0 = 0X^0$ et $1 = 1X^0$.

Notation 10.4
Soit A un anneau. On suppose que $\mathbb{K}$ est un sous-anneau de A.

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $x \in A$.

On considère l'écriture canonique de P :

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad \text{où :} \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ \forall k \in [\![0\,;n]\!]\,, \quad a_k \in \mathbb{K} \end{cases}$$

On note $P(x)$ l'élément de A défini par :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

On dit que $P(x)$ est l'élément obtenu en évaluant P en x.

Cela ne signifie pas que P est considéré comme une fonction : il n'y a pas d'ensemble de définition bien défini, on peut « évaluer » P en n'importe quel élément d'un anneau contenant $\mathbb{K}$ comme sous-anneau.

Exemple 10.5 (mêmes notations)

- Si $A = \mathbb{K}$ alors la notation $P(\lambda)$ est valide pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

- En particulier, si $A = \mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $P = X^2 + 1$ alors la notation $P(\lambda)$ est valide pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ mais aussi pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. On a :
$$P(0) = 1 \qquad P(1) = 2 \qquad P(i) = 0.$$

- Si $A = \mathbb{K}[X]$ alors la notation $P(Q)$ est valide pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$. On dit que $P(Q)$ est la composition des polynômes P et Q.
Par exemple, si $P = X^2 + 1$ alors $P(Q) = Q^2 + 1 \in \mathbb{K}[X]$.
La composition des polynômes P et Q est parfois aussi notée $P \circ Q$.

- Dans les exemples qui précèdent, on a considéré des anneaux commutatifs, mais ce n'est pas nécessaire. En deuxième année, on appliquera très souvent des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ à des matrices carrées à coefficients dans $\mathbb{K}$, et l'anneau formé par ces matrices n'est pas commutatif.

Remarque 10.6 (Rédaction)

- Quand on évalue le polynôme P en i ou en X^2, on ne doit surtout pas écrire « on pose $X = i$ » ou « on pose $X = X^2$ ».

- La notation $P(X)$ désigne la composition des polynômes P et X, c'est-à-dire P. On peut donc écrire au choix « le polynôme $P(X) = X^2 + 1$ » ou « le polynôme $P = X^2 + 1$ », il n'y a aucune différence, alors que si f est une fonction, il ne faut surtout pas confondre f et $f(x)$.

Proposition 10.7
Soit A un anneau et $x \in A$. On suppose que $\mathbb{K}$ est un sous-anneau de A.

Alors il existe un unique morphisme d'anneaux $\varphi : \mathbb{K}[X] \longrightarrow A$ tel que :

$$\varphi(X) = x \quad \textit{et} \quad \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \ \varphi(\lambda) = \lambda.$$

Démonstration 10.8
$\boxed{\text{analyse}}$

Soit $\varphi : \mathbb{K}[X] \longrightarrow A$ tel que $\varphi(X) = x$ et $\varphi|_{\mathbb{K}} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}}$.

On montre par une récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \varphi(X^n) = x^n$.

Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $\begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K} \end{cases}$.

On a

$$\begin{aligned} \varphi(P) &= \sum_{k=0}^{n} \varphi\left(a_k X^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \varphi(a_k)\, \varphi\left(X^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \\ &= P(x). \end{aligned}$$

car φ morphisme d'anneaux

Ainsi, on a : $\forall P \in \mathbb{K}[X],\ \ \varphi(P) = P(x)$.

$\boxed{\text{synthèse}}$

Posons $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & A \\ P & \longmapsto & P(x) \end{array}$.

On a :

- $\varphi(X) = x$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \ \varphi(\lambda) = \lambda$
- φ est un morphisme d'anneaux :

$$\varphi(1) = 1 \quad \text{et} \quad \forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \ \begin{cases} \varphi(P+Q) = (P+Q)(x) = P(x) + Q(x) = \varphi(P) + \varphi(Q) \\ \varphi(PQ) = PQ(x) = P(x)\,Q(x) = \varphi(P)\,\varphi(Q) \end{cases}$$

$\boxed{\text{conclusion}}$

Le morphisme existe et est unique. ■

Définition 10.9 (Conjugaison)
Soit un polynôme à coefficients complexes $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ (avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$).

On appelle conjugué de P le polynôme :

$$\overline{P} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} X^k.$$

Remarque 10.10
On a : $\forall P \in \mathbb{C}[X], \quad P = \overline{P} \iff P \in \mathbb{R}[X]$.

Proposition 10.11
La conjugaison $\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}[X] \\ P & \longmapsto & \overline{P} \end{array}$ *est un automorphisme d'anneaux.*

Démonstration 10.12
$\star\star$ **EXERCICE** $\star\star$ $\blacksquare$

10.1.2 Degré

Définition 10.13 (Degré d'un polynôme)

Soit un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ (avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$).

Le degré de P est défini par :

$$\deg P = \begin{cases} -\infty & \text{si } P = 0 \\ \max\{k \in [\![0\,;\,n]\!] \mid a_k \neq 0\} & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 10.14
Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On a :

(1) $\deg(A + B) \leqslant \max\{\deg A\,;\,\deg B\}$ *avec égalité si* $\deg A \neq \deg B$.

(2) $\deg(AB) = \deg A + \deg B$.

(3) Si B non-constant alors $\deg(A(B)) = (\deg A) \times (\deg B)$.

Démonstration 10.15 (notations pour les démonstrations suivantes)

Soient $m, n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{K}$ tels que $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $B = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$.

On pose $\begin{cases} \forall k \in [\![n+1 \,;\, +\infty[\![, & a_k = 0 \\ \forall k \in [\![m+1 \,;\, +\infty[\![, & b_k = 0 \end{cases}$

On pose $\begin{cases} C = \sum_{k=0}^{p} c_k X^k = A + B & \text{avec } \begin{cases} p = \max\{m \,;\, n\} \\ c_0, \ldots, c_p \in \mathbb{K} \end{cases} \\ D = \sum_{k=0}^{m+n} d_k X^k = AB & \text{avec } d_0, \ldots, d_{m+n} \in \mathbb{K} \end{cases}$

Démonstration 10.16 (1)

On a : $\begin{cases} \forall k > \deg A, & a_k = 0 \\ \forall k > \deg B, & b_k = 0 \end{cases}$

Donc $\forall k \in [\![\max\{\deg A \,;\, \deg B\} + 1 \,;\, p]\!], \quad c_k = a_k + b_k = 0$.

Donc $\deg C \leqslant \max\{\deg A \,;\, \deg B\}$.

Supposons $\deg A \neq \deg B$, par exemple $\deg A < \deg B$.

On a : $\max\{\deg A \,;\, \deg B\} = \deg B$.

Et : $c_{\deg B} = \underbrace{a_{\deg B}}_{=0} + \underbrace{b_{\deg B}}_{\neq 0} \neq 0$.

Donc $\deg C \leqslant \deg B$ donc $\deg C = \deg B$. ∎

Démonstration 10.17 (2)
Si A ou B est nul, alors $\deg(AB) = -\infty = \deg A + \deg B$.

Supposons A et B non-nuls.

On a : $\begin{cases} a_{\deg A} \neq 0 & \text{et} & \forall k > \deg A, & a_k = 0 \\ b_{\deg B} \neq 0 & \text{et} & \forall k > \deg B, & b_k = 0 \end{cases}$

Montrons que $\deg(AB) = \deg A + \deg B$.

Si $k > \deg A + \deg B$ alors $d_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} = 0$ car $\forall j \in [\![0 \,;\, k]\!], \quad j > \deg A \quad$ ou $\quad k - j > \deg B$ (car $j + k - j > \deg A + \deg B$).

Si $k = \deg A + \deg B$ alors $d_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} = a_{\deg A} + b_{\deg B} \neq 0$ car si $j > \deg A$ alors $a_j = 0$ et si $j < \deg A$ alors $k - j > \deg B$ donc $b_{k-j} = 0$. ■

Démonstration 10.18 (3)

On a $A(B) = \sum_{k=0}^{n} a_k B^k$.

On suppose B non-constant.

On a $(\deg B)^{\deg A} = (\deg A)(\deg B)$.

Donc, comme $a_{\deg A} \neq 0$:

$$\deg\left(a_{\deg A} B^{\deg B}\right) = (\deg A)(\deg B) \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0 ; \deg A - 1]\!], \ \deg\left(a_k B^k\right) < (\deg A)(\deg B).$$

Donc $\deg\left(\sum_{k=0}^{\deg A-1} a_k B^k\right) < (\deg A)(\deg B)$.

Donc selon (1) : $\deg(A \circ B) = (\deg A)(\deg B)$. ■

Notation 10.19
Soit $n \in \mathbb{N}$.

On pose :

$$\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leqslant n\}.$$

Autrement dit :

$$\mathbb{K}_n[X] = \left\{P \in \mathbb{K}[X] \,\middle|\, \exists a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}, \ P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right\}.$$

Remarque 10.20
- Si $n = 0$ alors $\mathbb{K}_0[X] = \mathbb{K}$ est l'ensemble des polynômes constants.
- Si $n \in \mathbb{N}^*$ alors $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-groupe de $(\mathbb{K}[X], +)$ (mais pas un sous-anneau de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ car il n'est pas stable par produit).
  Le groupe $(\mathbb{K}_n[X], +)$ est isomorphe au groupe $\mathbb{K}^{n+1}$.

Proposition 10.21 (Propriétés de l'anneau $\mathbb{K}[X]$)

(1) L'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ *est intègre.*

(2) Les éléments inversibles de $\mathbb{K}[X]$ *sont les polynômes constants non-nuls :*

$$\mathbb{K}[X]^{\times} = \mathbb{K} \setminus \{0\}.$$

Démonstration 10.22 (1)

On sait que $\mathbb{K}[X]$ est non-nul et commutatif.

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $PQ = 0$.

On a $\deg(PQ) = -\infty$.

Donc $\underbrace{\deg P}_{\in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}} + \underbrace{\deg Q}_{\in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}} = -\infty$.

Donc $\deg P = -\infty \quad \text{ou} \quad \deg Q = -\infty$.

Donc $P = 0 \quad \text{ou} \quad Q = 0$. Donc $\mathbb{K}[X]$ est intègre. ∎

Démonstration 10.23 (2)

analyse

Soit $P \in \mathbb{K}[X]^{\times}$.

On a $PP^{-1} = 1$.

Donc $\deg\left(PP^{-1}\right) = \deg 1$.

Donc $\underbrace{\deg P}_{\in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}} + \underbrace{\deg P^{-1}}_{\in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}} = 0$.

Donc $\deg P = \deg P^{-1} = 0$.

Donc P constant non-nul.

synthèse

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg P = 0$.

On a $P = \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Donc P inversible : $\lambda \times \dfrac{1}{\lambda} = 1$.

conclusion

Les polynômes inversibles sont les polynômes constants non-nuls. ∎

Définition 10.24 (Coefficient dominant)
Le coefficient dominant d'un polynôme non-nul P est le coefficient de P de degré $\deg P$.

Un polynôme unitaire est un polynôme non-nul dont le coefficient dominant vaut 1.

Exemple 10.25

- Le coefficient dominant du polynôme $P = 7X^5 - 3X^2 + 5$ vaut 7.
- Le coefficient dominant du polynôme $Q = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$ vaut 1 donc Q est unitaire.

10.1.3 Division euclidienne

Définition/Proposition 10.26 (Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$)
Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On suppose $B \neq 0$.

Il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que :

$$\begin{cases} A = QB + R \\ \deg R < \deg B \end{cases}$$

Le polynôme Q est appelé le quotient de la division euclidienne de A par B.

Le polynôme R est appelé le reste de la division euclidienne de A par B.

Démonstration 10.27
$\boxed{\text{unicité}}$

Soient $Q_1, R_1, Q_2, R_2 \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\begin{cases} A = Q_1B + R_1 = Q_2B + R_2 \\ \deg R_1 < \deg B \\ \deg R_2 < \deg B \end{cases}$

On a $\begin{cases} (Q_1 - Q_2)B = R_2 - R_1 \\ \deg(R_2 - R_1) < \deg B \end{cases}$ donc $\deg((Q_1 - Q_2)B) < \deg B$ donc $\deg(Q_1 - Q_2) + \deg B < \deg B$.

Donc $\deg(Q_1 - Q_2) = -\infty$ donc $Q_1 = Q_2$ donc $R_1 - R_2 = 0 \times B = 0$.

Donc $(Q_1, R_1) = (Q_2, R_2)$.

$\boxed{\text{existence}}$

On fixe le polynôme $B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.

Si B est constant, la proposition est vraie car $\forall A \in \mathbb{K}[X]\,,\ \ A = QB$ avec $Q = \dfrac{A}{B}$.

Supposons B non-constant. Montrons que $\underbrace{\forall n \in \mathbb{N},\ \ \forall A \in \mathbb{K}_n[X]\,,\ \ \exists Q, R \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}\,,\ \ \begin{cases} A = QB + R \\ \deg R < \deg B \end{cases}}_{\mathscr{P}(n)}$

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

Soit $A \in \mathbb{K}_0[X]$. On a $\begin{cases} A = 0 \times B + A \\ \deg A = 0 < \deg B \end{cases}$ donc $Q = 0$ et $R = A$ conviennent. D'où $\mathscr{P}(0)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$. Montrons $\mathscr{P}(n+1)$.

Soit $A \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$.

Il existe $a_0, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{K}$ tels que $A = a_{n+1}X^{n+1} + \cdots + a_0X^0$.

Si $n + 1 < \deg B$ alors le couple $(Q, R) = (0, A)$ convient.

Supposons $n + 1 \geqslant \deg B$.

Posons $m = \deg B$ et $B = b_mX^m + \cdots + b_0X^0$ (avec $b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{K}$ et $b_m \neq 0$).

Posons $A_1 = A - \dfrac{a_{n+1}}{b_m}X^{n+1-m}B$.

On a $\begin{cases} \deg A \leqslant n + 1 \\ \deg\left(\dfrac{a_{n+1}}{b_m}X^{n+1-m}B\right) \leqslant n + 1 \end{cases}$

Donc $\deg A_1 \leqslant n + 1$.

De plus, le coefficient de degré $n + 1$ de A_1 est : $a_{n+1} - \dfrac{a_{n+1}}{b_m}b_m = 0$.

Donc $\deg A_1 < n + 1$.

Donc il existe $Q_1, R_1 \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\begin{cases} A_1 = Q_1B + R_1 \\ \deg R_1 < \deg B \end{cases}$

Finalement, on a $\begin{cases} A = \left(Q_1 + \dfrac{a_{n+1}}{b_m}X^{n+1-m}\right)B + R_1 \\ \deg R_1 < \deg B \end{cases}$

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

D'où $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \mathscr{P}(n)$.

D'où l'existence car $\mathbb{K}[X] = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{K}_n[X]$. ∎

Exemple 10.28
Calculons la division euclidienne de $2X^3 + 3X^2 + 1$ par $X^2 + 1$:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2X^3 & +3X^2 & & +1 & X^2+1 \\
\cline{5-5}
-2X^3 & & -2X & & 2X+3 \\
\cline{1-3}
 & 3X^2 & -2X & +1 & \\
 & -3X^2 & & -3 & \\
\cline{2-4}
 & & -2X & -2 &
\end{array}
$$

Donc $2X^3 + 3X^2 + 1 = \underbrace{(2X+3)}_{\text{quotient}}\left(X^2+1\right)\underbrace{-2X-2}_{\text{reste}}$ et $\deg(-2X-2) < \deg\left(X^2+1\right)$.

De même, on a :

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
3X^4 & & & +X & +1 & X+2 \\
\cline{6-6}
-3X^4 & -6X^3 & & & & 3X^3-6X^2+12X-23 \\
\cline{1-2}
 & -6X^3 & & & & \\
 & 6X^3 & +12X^2 & & & \\
\cline{2-3}
 & & 12X^2 & +X & & \\
 & & -12X^2 & -24X & & \\
\cline{3-4}
 & & & -23X & +1 & \\
 & & & 23X & +46 & \\
\cline{4-5}
 & & & & 47 &
\end{array}
$$

Donc $3X^4 + X + 1 = \underbrace{\left(3X^3 - 6X^2 + 12X - 23\right)}_{\text{quotient}}(X+2) + \underbrace{47}_{\text{reste}}$ et $\deg 47 < \deg(X+2)$.

10.1.4 Divisibilité

Définition 10.29 (Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$)
Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$.

Si on a :

$$\exists C \in \mathbb{K}[X], \quad AC = B$$

alors on dit que

- A divise B ;
- A est un diviseur de B ;
- B est un multiple de A ;
- B est divisible par A.

Notation 10.30
Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$.

La notation $A \mid B$ signifie « A divise B ».

L'ensemble $\{AC\}_{C \in \mathbb{K}[X]}$ des multiples de A est noté $A\mathbb{K}[X]$:

$$A\mathbb{K}[X] = \{AC\}_{C \in \mathbb{K}[X]} = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid A \mid P\}.$$

Dans ce cours, on notera $\operatorname{div}(B)$ (notation non-officielle) l'ensemble des polynômes nuls ou unitaires qui divisent B :

$$\operatorname{div}(B) = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P \mid B \quad \text{et} \quad (P = 0 \quad \text{ou} \quad P \text{ unitaire})\}.$$

Remarque 10.31 (Lien avec la division euclidienne)
Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On suppose $B \neq 0$.

On note R le reste de la division euclidienne de A par B.

Alors :

$$B \mid A \iff R = 0.$$

Proposition 10.32 (Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$)

(1) La relation binaire $\mid$ sur $\mathbb{K}[X]$ est réflexive et transitive (mais pas antisymétrique, donc ce n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbb{K}[X]$).

(2) On a :

$$\forall A, B, C \in \mathbb{K}[X], \quad A \mid B \implies CA \mid CB$$

et :

$$\forall A, B \in \mathbb{K}[X], \quad \forall C \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}, \quad A \mid B \iff CA \mid CB.$$

(3) On a :

$$\forall A, B \in \mathbb{K}[X], \quad A \mid B \implies (\deg A \leqslant \deg B \quad \text{ou} \quad B = 0).$$

Définition/Proposition 10.33
Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$.

On a :

$$(A \mid B \quad \text{et} \quad B \mid A) \iff \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, \quad A = \lambda B.$$

Lorsque ces propositions sont vérifiées, on dit que A et B sont associés.

Démonstration 10.34
$\boxed{\Longrightarrow}$

Supposons $A \mid B \quad \text{et} \quad B \mid A$.

Soient $C, D \in \mathbb{K}[X]$ tels que $AC = B$ et $BD = A$. On a $A = BD = ACD$.

Si $A \neq 0$ alors $CD = 1$ donc D inversible (d'inverse C). Donc $D = \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et $A = \lambda B$.

Si $A = 0$ alors $B = 0$ car $A \mid B$ et $\lambda = 1$ convient.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Claire : on a $B = \dfrac{1}{\lambda} A$. ■

Proposition 10.35 (Divisibilité entre polynômes unitaires)
Notons $\mathcal{U}$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ nuls ou unitaires :

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &= \operatorname{div}(0) \\ &= \left\{P \in \mathbb{K}[X] \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N},\ \exists R \in \mathbb{K}_n[X],\ P = X^{n+1} + R\right\} \cup \{0\,;1\}.\end{aligned}$$

(1) *La relation binaire $\mid$ sur $\mathcal{U}$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{U}$.*

(2) *Pour cette relation d'ordre, le polynôme nul est le plus grand élément de $\mathcal{U}$ et le polynôme constant 1 est le plus petit :*
$$\forall P \in \mathcal{U},\quad P \mid 0 \quad \textit{et} \quad 1 \mid P.$$

10.1.5 Racines

Définition 10.36 (Racine)
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

On appelle racine de P (dans $\mathbb{K}$) tout élément $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $P(\lambda) = 0$.

Exemple 10.37
Le polynôme $X^2 + 1$ admet i et $-i$ comme racines dans $\mathbb{C}$. Il n'admet aucune racine dans $\mathbb{R}$.

Tout polynôme de degré 1 admet exactement une racine.

Théorème 10.38 (Théorème de d'Alembert-Gauss)
Tout polynôme non-constant à coefficients complexes admet une racine :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \ \deg P \geqslant 1 \implies \exists \lambda \in \mathbb{C}, \ P(\lambda) = 0.$$

Démonstration 10.39
⋆⋆ **ADMIS** ⋆⋆ (hors programme). ∎

Proposition 10.40 (Racines complexes des polynômes réels)
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine complexe de P.

Alors $\overline{\lambda}$ est racine de P.

Démonstration 10.41
On a $P(\lambda) = 0$ donc $\overline{P(\lambda)} = 0$ donc $\overline{P}\left(\overline{\lambda}\right) = 0$.

Or $P = \overline{P}$ car $P \in \mathbb{R}[X]$.

Donc $P\left(\overline{\lambda}\right) = 0$.

Donc $\overline{\lambda}$ est racine de P. ∎

Proposition 10.42
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

On a :

$$\lambda \textit{ racine de } P \iff (X - \lambda) \mid P.$$

Démonstration 10.43
Notons Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de P par $X - \lambda$:

$$P = (X - \lambda) Q + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg (X - \lambda).$$

On a donc $R = \mu$ avec $\mu \in \mathbb{K}$.

On a :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ racine de } P &\iff P(\lambda) = 0 \\ &\iff (\lambda - \lambda) Q(\lambda) + \mu = 0 \\ &\iff \mu = 0 \\ &\iff R = 0 \\ &\iff (X - \lambda) \mid P. \end{aligned}$$ ∎

10.1.6 Fonctions polynomiales

Définition 10.44 (Fonction polynomiale associée à un polynôme)
Soit un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que $P = a_n X^n + \cdots + a_0 X^0$.

On appelle fonction polynomiale associée à P la fonction :

$$\begin{array}{rccc} \tilde{P}: & \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 x^0 \end{array}$$

Proposition 10.45 (Anneau des fonctions polynomiales)
L'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathscr{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \\ & P & \longmapsto & \tilde{P} \end{array}$$

est un morphisme d'anneaux.

En particulier, l'ensemble $\operatorname{Im}\varphi$ *des fonctions polynomiales de* $\mathbb{K}$ *dans* $\mathbb{K}$ *est un sous-anneau de* $\mathscr{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$.

Démonstration 10.46
⋆⋆ **EXERCICE** ⋆⋆ ■

Remarque 10.47
On a aussi :

$$\forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \ \widetilde{P \circ Q} = \tilde{P} \circ \tilde{Q}.$$

Remarque 10.48
On verra plus loin que si $\mathbb{K}$ est infini, alors φ est un isomorphisme d'anneaux. Ainsi, lorsque $\mathbb{K}$ est infini, deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ sont égaux si, et seulement si, leur fonction polynomiale associée sont égales.

Cela est faux lorsque le corps $\mathbb{K}$ est fini puisque dans ce cas, il y a une infinité de polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ mais seulement un nombre fini de fonctions polynomiales. Le petit théorème de Fermat donne un exemple de polynôme non-nul dont la fonction polynomiale associée est nulle : $X^p - X$.

10.1.7 Dérivation

Définition 10.49 (Polynôme dérivé d'un polynôme)
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ d'écriture canonique :

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad \text{où :} \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ \forall k \in [\![0\,;n]\!], \quad a_k \in \mathbb{K} \end{cases}$$

On appelle polynôme dérivé de P le polynôme :

$$P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}.$$

Remarque 10.50 (Lien entre dérivation des polynômes et dérivation des fonctions)
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

La fonction polynomiale associée à P' est la dérivée de la fonction polynomiale associée à P :

$$\widetilde{P'} = \left(\tilde{P}\right)'.$$

En particulier, toute fonction polynomiale est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Proposition 10.51 (Opérations algébriques sur les dérivés)
Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Somme : on a

$$(P+Q)' = P' + Q'.$$

Combinaison linéaire : on a, plus généralement

$$(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'.$$

Produit : on a

$$(PQ)' = P'Q + PQ'.$$

Composition : on a

$$(P \circ Q)' = Q' \times (P' \circ Q).$$

Démonstration 10.52
⋆⋆ **EXERCICE** ⋆⋆ ■

Proposition 10.53 (Formule de Leibniz pour les polynômes)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

On a :
$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}.$$

Démonstration 10.54
⋆⋆ **EXERCICE** ⋆⋆ (par récurrence, exactement comme on a démontré la formule de Leibniz pour les fonctions). ∎

Remarque 10.55
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{K}[X]$.

On a :
$$(P_1 \ldots P_n)' = \sum_{k=0}^{n} P_1 \ldots P_{k-1} P_k' P_{k+1} \ldots P_n.$$

Proposition 10.56 (Degré du polynôme dérivé)
On suppose ici que $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

On a :
$$\deg P' = \begin{cases} \deg P - 1 & \textit{si } P \textit{ non-constant, c'est-à-dire si } \deg P \geqslant 1 \\ -\infty & \textit{si } P \textit{ constant, c'est-à-dire si } \deg P \leqslant 0 \end{cases}$$

En particulier, on a : P constant $\iff P' = 0$.

Proposition 10.57 (Formule de Taylor pour les polynômes)
On suppose ici que $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Soit $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

On a :
$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\lambda)}{k!} (X - \lambda)^k .$$

Démonstration 10.58
Montrons que $\forall n \in \mathbb{N},\ \underbrace{\forall P \in \mathbb{K}_n[X],\ P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\lambda)}{k!}(X-\lambda)^k}_{\mathscr{P}(n)}$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Soit $P = \mu \in \mathbb{K}_0[X]$. On a $\begin{cases} P^{(0)}(\lambda) = \mu \\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \ P^{(k)}(\lambda) = 0 \end{cases}$ donc la somme vaut $\frac{\mu}{0!}(X-\lambda)^0 = \mu$. D'où $\mathscr{P}(0)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$. Soit $P \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$. On a $P' \in \mathbb{K}_n[X]$ donc selon $\mathscr{P}(n)$:

$$\begin{aligned} P' &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(P')^{(k)}}{k!}(X-\lambda)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k+1)}}{k!}(X-\lambda)^k \end{aligned}$$

Donc $P' - \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k+1)}}{k!}(X-\lambda)^k = 0$.

Donc $\left(P - \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k+1)}}{(k+1)!}(X-\lambda)^{k+1}\right)' = 0$.

Donc le polynôme $Q = P - \sum_{\ell=1}^{n+1} \frac{P^{(\ell)}}{\ell!}(X-\lambda)^\ell$ est constant.

Or $Q(\lambda) = P(\lambda) - 0$ donc $P - \sum_{\ell=1}^{n+1} \frac{P^{(\ell)}}{\ell!}(X-\lambda)^\ell = P(\lambda) = \frac{P^{(0)}}{0!}(X-\lambda)^0$.

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

D'où $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \mathscr{P}(n)$. ■

10.2 Arithmétique des polynômes

10.2.1 Idéal d'un anneau commutatif

Définition 10.59 (Idéal d'un anneau commutatif)
Soit $(A,+,\times)$ un anneau commutatif.

On appelle idéal de A toute partie $I \subseteq A$ telle que :

(1) I est un sous-groupe de $(A,+)$.

(2) $\forall a \in A, \ \ \forall x \in I, \ \ ax \in I$.

Proposition 10.60
Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. Soit $I \subseteq A$.

Alors la partie I est un idéal de A si, et seulement si, elle vérifie :

(3) $0_A \in I$.

(4) $\forall x, y \in I, \ \ x + y \in I$.

(5) $\forall a \in A, \ \ \forall x \in I, \ \ ax \in I$.

Démonstration 10.61
$\boxed{\Longrightarrow}$

Supposons (1) et (2).

Alors on a (3) et (4) car I est un sous-groupe de A et on a (5) car on a (2).

$\boxed{\Longleftarrow}$

Supposons (3), (4) et (5).

Alors (1) est vraie selon (3) et (4) et (2) est vraie selon (5). ∎

Exemple 10.62
Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif dont on note 0_A l'élément neutre pour la loi $+$.

Le singleton $\{0\}$ et l'ensemble en A tout-entier sont des idéaux de l'anneau commutatif A.

On appelle ces idéaux les idéaux triviaux de A.

Exemple 10.63
Soient $(A, +, \times)$ et $a \in A$.

L'ensemble des multiples de a :

$$aA = \{b \in A \mid \exists c \in A, \ \ b = ca\}$$

est un idéal de A.

Démonstration 10.64
On a $0 \in aA$ car $0 = 0 \times a$.

Si $x, y \in A$, il existe $b, c \in A$ tels que $x = ba$ et $y = ca$.

Donc $x + y = (b + c)\, a \in aA$.

Si $x \in aA$ et $b \in A$, il existe $c \in A$ tel que $x = ac$ et on a $bx = (bc)\, a \in aA$. ■

Exemple 10.65
Les idéaux de l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$ sont les sous-groupes du groupe $(\mathbb{Z}, +)$.

Démonstration 10.66
Tout idéal de $\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.

Réciproquement, si H est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$:

Soit $h \in H$.

On a $-h \in H$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} nh \in H \\ -nh \in H \end{cases}$ donc $\forall n \in \mathbb{Z},\ \ nh \in H$.

Donc H est un idéal de $\mathbb{Z}$. ■

Exemple 10.67
Soient $(A, +, \times)$ et $(B, +, \times)$ deux anneaux et $\varphi : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux.

On suppose que l'anneau A est commutatif.

On note 0_B l'élément neutre de B pour la loi $+$.

On appelle noyau du morphisme d'anneaux φ le noyau de φ vu comme un morphisme de groupes de $(A, +)$ vers $(B, +)$, c'est-à-dire :

$$\ker \varphi = \varphi^{-1}\left(\{0_B\}\right) = \{x \in A \mid \varphi(x) = 0_B\}\,.$$

Alors $\ker \varphi$ est un idéal de A.

Démonstration 10.68
On sait que $\ker \varphi$ est un sous-groupe de $(A, +)$.

De plus, si $a \in A$ et $x \in \ker \varphi$, alors $\varphi(ax) = \varphi(a)\, \varphi(x) = \varphi(a) \times 0 = 0$.

Donc $ax \in \ker \varphi$.

Donc $\ker \varphi$ est un idéal de A. ■

Proposition 10.69 (Intersection d'idéaux)
Soient $(A,+,\times)$ un anneau commutatif et $(I_j)_{j\in J}$ une famille d'idéaux de A.

Alors l'intersection $\bigcap_{j\in J} I_j$ est un idéal de A.

Démonstration 10.70
Pour tout $j \in J$, I_j est un sous-groupe de $(A,+)$ donc $\bigcap_{j\in J} I_j$ est un sous-groupe de $(A,+)$.

Soient $a \in A$ et $x \in \bigcap_{j\in J} I_j$.

On a $\forall j \in J,\ ax \in I_j$ car $x \in I_j$ et I_j est un idéal de A.

Donc $ax \in \bigcap_{j\in J} I_j$.

Donc $\bigcap_{j\in J}$ est un idéal de A. ∎

Définition/Proposition 10.71 (Somme d'idéaux)
Soient $(A,+,\times)$ un anneau commutatif et I_1, I_2 deux idéaux de A.

On appelle somme de I_1 et I_2 et on note $I_1 + I_2$ l'ensemble :

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= \{x \in A \mid \exists x_1 \in I_1,\ \ \exists x_2 \in I_2,\ \ x = x_1 + x_2\} \\ &= \{x_1 + x_2\}_{(x_1,x_2)\in I_1\times I_2} \end{aligned}$$

On a :

(1) L'ensemble $I_1 + I_2$ est un idéal de A.

(2) La loi $+$ est une loi de composition interne sur l'ensemble des idéaux de A.

(3) Cette loi $+$ est associative et commutative.

Démonstration 10.72 (1)
On a $I_1 + I_2 \subseteq A$ et $\underbrace{0}_{\in A} = \underbrace{0}_{\in I_1} + \underbrace{0}_{\in I_2} \in I_1 + I_2$.

Enfin, si $x \in I_1 + I_2$ et $a \in A$, il existe $x_1 \in I_1$ et $x_2 \in I_2$ tels que $x = x_1 + x_2$.

D'où $ax = \underbrace{ax_1}_{\in I_1} + \underbrace{ax_2}_{\in I_2} \in I_1 + I_2$.

Donc $I_1 + I_2$ est un idéal de A. ∎

Démonstration 10.73 (2 et 3)
Clair car la loi $+$ de A est associative et commutative. $\blacksquare$

Théorème 10.74 (Idéaux de $\mathbb{Z}$)
Les idéaux de l'anneau commutatif $(\mathbb{Z}, +, \times)$ *sont les ensembles de la forme* $n\mathbb{Z}$ *où* $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration 10.75
On a vu à l'Exemple 10.65 que les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont ses sous-groupes donc le théorème n'est qu'un reformulation de la description des sous-groupes de $\mathbb{Z}$ (*cf.* Théorème 8.21). $\blacksquare$

Théorème 10.76 (Idéaux de $\mathbb{K}[X]$)
Les idéaux de l'anneau commutatif $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ *sont les ensembles de la forme* $\mathbb{K}[X]\,P$ *où* $P \in \mathbb{K}[X]$, *c'est-à-dire les idéaux formés des multiples d'un polynôme donné.*

Démonstration 10.77
$\boxed{\supseteq}$

On a déjà vu que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}[X]\,P$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ (Exemple 10.63).

$\boxed{\subseteq}$

Soit I un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

Si $I = \{0\}$ alors $I = \mathbb{K}[X]\,P$ en prenant $P = 0$.

On suppose $I \neq \{0\}$.

On a $I \setminus \{0\} \neq \varnothing$ donc $\{\deg P\}_{P \in I \setminus \{0\}}$ est une partie non-vide de $\mathbb{N}$.

Soit $P \in I \setminus \{0\}$ tel que $\deg P$ soit minimal (c'est-à-dire tel que $\forall Q \in I \setminus \{0\},\ \deg P \leqslant \deg Q$).

Montrons que $I = \mathbb{K}[X]\,P$.

$\boxed{\supseteq}$ On a $\forall Q \in \mathbb{K}[X],\ QP \in I$ donc $\mathbb{K}[X]\,P \subseteq I$.

$\boxed{\subseteq}$

Soit $A \in I$.

On note Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de A par P.

On a $\begin{cases} A = QP + R \\ \deg R < \deg P \end{cases}$

On a $R \in I$ car $R = A - QP$ et $A, P \in I$.

Donc $R = 0$ car $\deg R < \deg P$.

Donc $A = QP \in \mathbb{K}[X]\,P$. $\blacksquare$

Remarque 10.78 (Hors-programme)
Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif.

On appelle idéal principal de A tout idéal de la forme aA où $a \in A$, c'est-à-dire tout idéal formé des multiples d'un élément de A (*cf.* Exemple 10.63).

On dit que A est un anneau principal si A est un anneau intègre et si tout idéal de A est principal.

On peut résumer le Théorème 10.74 et le Théorème 10.76 en disant que les anneaux $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[X]$ sont des anneaux principaux.

10.2.2 PGCD

L'étude du PGCD de deux polynômes dans $\mathbb{K}[X]$ se fait exactement de la même façon que celle du PGCD de deux entiers dans $\mathbb{Z}$ (et, plus généralement, on pourrait traiter de la même façon le PGCD de deux éléments dans un anneau principal).

Afin d'alléger l'exposé, on se contente de la preuve algébrique de l'existence du PGCD et de la relation de Bézout, mais on aurait aussi pu en donner, comme pour les entiers, une preuve algorithmique basée sur l'algorithme d'Euclide.

10.2.2.1 PGCD de deux polynômes

Définition/Théorème 10.79
Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$.

On rappelle qu'on note $\operatorname{div}(A)$ l'ensemble des diviseurs de A nuls ou unitaires.

Les diviseurs nuls ou unitaires communs à A et B sont les éléments de l'ensemble $\operatorname{div}(A) \cap \operatorname{div}(B)$.

On munit cet ensemble de la relation d'ordre $|$ (la divisibilité est bien une relation d'ordre sur cet ensemble selon la Proposition 10.35).

L'ensemble $\operatorname{div}(A) \cap \operatorname{div}(B)$ possède un plus grand élément appelé le plus grand diviseur commun à A et B et noté $A \wedge B$.

Démonstration 10.80
L'ensemble $\mathbb{K}[X]A + \mathbb{K}[X]B$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ donc il existe $D_1 \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\mathbb{K}[X]A + \mathbb{K}[X]B = \mathbb{K}[X]D_1$.

Posons $D = \begin{cases} D_1 & \text{si } D_1 = 0 \\ \dfrac{1}{\lambda}D_1 & \text{sinon, en notant } \lambda \text{ le coefficient dominant de } D_1 \end{cases}$

Ainsi, on a $\begin{cases} D \text{ nul ou unitaire} \\ \mathbb{K}[X]A + \mathbb{K}[X]B = \mathbb{K}[X]D \end{cases}$

On a $A = 1A + 0B \in \mathbb{K}[X]A + \mathbb{K}[X]B$ donc $A \in \mathbb{K}[X]D$ donc $D \mid A$.

On montre de même $D \mid B$.

Soit $C \in \mathbb{K}[X]$ divisant A et B.

Soient $C_1, C_2 \in \mathbb{K}[X]$ tels que $CC_1 = A$ et $CC_2 = B$.

On a $D \in \mathbb{K}[X]D$ donc $D \in \mathbb{K}[X]A + \mathbb{K}[X]B$.

Soient $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $UA + VB = D$.

On a $D = UCC_1 + VCC_2 = C(UC_1 + VC_2)$.

Donc $C \mid D$.

Donc D est le plus grand élément de $\operatorname{div}(A) \cap \operatorname{div}(B)$ pour $\mid$. ■

Exemple 10.81
Posons $A = X^2 - 1$ et $B = X^2 - X$.

Alors $A \wedge B = X - 1$.

Démonstration 10.82
On a $A = (X-1)(X+1)$ et $B = (X-1)X$.

Donc $X - 1$ divise A et B.

De plus, $X - 1$ est unitaire.

Quels sont les diviseurs unitaires de A ?

$\boxed{\text{analyse}}$

Soient $A_1 \in \mathbb{K}[X]$ un diviseur de A et $A_2 \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A_1A_2 = A$.

On a $\deg A_1 + \deg A_2 = \deg A$ et $\begin{cases} A_1 \neq 0 \\ A_2 \neq 0 \end{cases}$

Donc $\deg A_1 \in \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\}$.

Si $\deg A_1 = 0$ alors A_1 est constant et non-nul.

Si $\deg A_1 = 1$ alors A_1 admet une unique racine qui doit être racine de A, *i.e.* 1 ou -1.

Si $\deg A_1 = 2$ alors A_2 est constant et non-nul, donc A_1 est associé à A.

Si, de plus, A_1 est unitaire, alors $A_1 = 1$, $A_1 = X - 1$, $A_1 = X + 1$ ou $A_1 = X^2 - 1$.

synthèse

Ces quatre polynômes divisent A et sont unitaires.

conclusion

On a $\operatorname{div}(A) = \left\{1\ ;\ X-1\ ;\ X+1\ ;\ X^2-1\right\}$.

De même, on a $\operatorname{div}(B) = \left\{1\ ;\ X-1\ ;\ X\ ;\ X^2-X\right\}$.

Donc $\operatorname{div}(A) \cap \operatorname{div}(B) = \{1\ ;\ X-1\}$.

Donc $A \wedge B = X-1$. ■

Remarque 10.83
Soit $A \in \mathbb{K}[X]$.

On a $A \wedge 1 = 1$.

Si $A = 0$ alors $A \wedge 0 = 0$; sinon $A \wedge 0$ est l'unique polynôme unitaire associé à A.

Remarque 10.84
Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$.

(1) Le polynôme $A \wedge B$ est le diviseur commun à A et B nul ou unitaire et qui est divisible par tous les autres diviseurs communs à A et B.

(2) Il est donc caractérisé par :

$$A \wedge B \text{ nul ou unitaire} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{div}(A) \cap \operatorname{div}(B) = \operatorname{div}(A \wedge B)$$

ou par :

$$A \wedge B \text{ nul ou unitaire} \qquad \text{et} \qquad \forall P \in \mathbb{K}[X]\,,\ \ P \mid A \wedge B \iff [P \mid A \text{ et } P \mid B]\,.$$

(3) Si $A = B = 0$ alors $0 \wedge 0 = 0$.
Sinon, $A \wedge B$ est le polynôme unitaire du plus haut degré qui divise A et B (selon la Proposition 10.32).

Démonstration 10.85 (2)
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

Montrons qu'on a $P \mid A \wedge B \iff [P \mid A \text{ et } P \mid B]$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Si $P \mid A \wedge B$ alors $P \mid A$ car $A \wedge B \mid A$ et $P \mid B$ car $A \wedge B \mid B$.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Supposons $P \mid A$ et $P \mid B$.

On pose P_1 le polynôme nul ou unitaire associé à P :

$$P_1 = \begin{cases} P_1 = 0 & \text{si } P = 0 \\ P_1 = \dfrac{1}{\lambda} P & \text{en notant } \lambda \text{ le coefficient dominant de } P \end{cases}$$

On a $P_1 \mid P$, $P \mid A$ et $P \mid B$.

Donc $P_1 \mid A$ et $P_1 \mid B$.

Donc $P_1 \mid A \wedge B$.

Donc $P \mid A \wedge B$. ∎

Remarque 10.86
Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$.

Le polynôme $A \wedge B$ est nul si, et seulement si, on a $A = B = 0$.

Si A ou B est non-nul, on impose systématiquement au polynôme $A \wedge B$ d'être unitaire.

En revanche, on s'autorise parfois à appeler « plus grand commun diviseur de A et B » tout polynôme P associé à A et B, même s'il n'est pas unitaire.

Ainsi, on dit que $2X - 2$ est un PGCD de $X^2 - 1$ et $X^2 - X$.

10.2.2.2 Propriétés

Proposition 10.87
Soient $A, B, P \in \mathbb{K}[X]$.

Les polynômes $PA \wedge PB$ et $P \times (A \wedge B)$ sont associés.

Démonstration 10.88
Montrons que $P \times (A \wedge B)$ divise $PA \wedge PB$.

On a $A \wedge B$ divise A et B.

Donc $P \times (A \wedge B)$ divise PA et PB.

Donc $P \times (A \wedge B)$ divise $PA \wedge PB$.

Montrons que $PA \wedge PB$ divise $P \times (A \wedge B)$.

On a P divise PA et PB.

Donc P divise $PA \wedge PB$.

Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $PA \wedge PB = PQ$.

On remarque que PQ divise PA et PB.

Donc, en supposant que $P \neq 0$, on a Q divise A et B.

Donc Q divise $A \wedge B$.

Donc $PA \wedge PB = PQ$ divise $P \times (A \wedge B)$.

Ceci est également vrai si $P = 0$.

Finalement, comme les deux polynômes se divisent mutuellement, ils sont associés. ■

Définition/Proposition 10.89 (Relation de Bézout)
Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$.

Il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que
$$UA + VB = A \wedge B.$$

Une telle écriture s'appelle une relation de Bézout.

Elle n'est pas unique.

Démonstration 10.90
On a vu que $\mathbb{K}[X]A + \mathbb{K}[X]B = \mathbb{K}[X](A \wedge B)$.

On a $A \wedge B \in \mathbb{K}[X](A \wedge B)$ donc $A \wedge B \in \mathbb{K}[X]A + \mathbb{K}[X]B$.

Donc il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $A \wedge B = UA + VB$.

Ces polynômes ne sont pas unique car si (U, V) convient, $(U + B, V + A)$ convient aussi. ■

10.2.2.3 Algorithme d'Euclide

Les deux lemmes suivants servent à justifier l'algorithme d'Euclide.

Lemme 10.91
Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que $B \neq 0$.

On note R le reste de la division euclidienne de A par B.

Alors
$$A \wedge B = R \wedge B.$$

Démonstration 10.92
C'est clair car les polynômes qui divisent A et B sont ceux qui divisent R et B. ∎

Lemme 10.93
Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$.

On définit le polynôme A_1 en posant :

- *si $A = 0$ alors $A_1 = 0$;*
- *sinon A_1 est l'unique polynôme unitaire associé à A.*

On a :

$$A \wedge B = A_1 \iff A \mid B.$$

Démonstration 10.94
$\boxed{\Longrightarrow}$

Comme A et A_1 sont associés, ils se divisent mutuellement.

On a $A \mid A_1$ et $A_1 = A \wedge B \mid B$.

D'où $A \mid B$.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Supposons $A \mid B$.

Alors les diviseurs communs à A et B sont les diviseurs de A, c'est-à-dire les diviseurs de A_1.

Donc $A \wedge B = A_1$. ∎

Algorithme 10.95 (Algorithme d'Euclide)
Cf. Algorithme 8.37.

Algorithme 10.96 (Algorithme d'Euclide étendu)
Cf. Algorithme 8.46 (même principe).

10.2.2.4 PGCD de plusieurs polynômes

Proposition 10.97
La loi $\wedge$ *est une loi de composition interne sur* $\mathbb{K}[X]$.

Elle est associative et commutative.

Démonstration 10.98
⋆⋆ **Exercice** ⋆⋆ (*cf.* Démonstration 8.49). ∎

Définition/Proposition 10.99
Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \ldots, A_r \in \mathbb{K}[X]$.

Les diviseurs communs à $A_1, \ldots, A_r$ sont les diviseurs du polynôme $A_1 \wedge \ldots \wedge A_r$.

Ce polynôme est appelé le plus grand commun diviseur des polynômes $A_1, \ldots, A_r$.

Démonstration 10.100
⋆⋆ **Exercice** ⋆⋆ ∎

Proposition 10.101
Soient $r \in \mathbb{N}^*$ *et* $A_1, \ldots, A_r, P \in \mathbb{K}[X]$.

Les polynômes $PA_1 \wedge \ldots \wedge PA_r$ *et* $P \times (A_1 \wedge \ldots \wedge A_r)$ *sont associés.*

Démonstration 10.102
Découle de la Proposition 10.87 par récurrence sur $r \in \mathbb{N}^*$. ∎

Définition/Proposition 10.103 (Relation de Bézout pour $r \in \mathbb{N}^*$ polynômes)
Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \ldots, A_r \in \mathbb{K}[X]$.

Alors il existe $U_1, \ldots, U_r \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$U_1 A_1 + \cdots + U_r A_r = A_1 \wedge \ldots \wedge A_r.$$

Une telle écriture est appelée une relation de Bézout. Elle n'est pas unique.

Démonstration 10.104
On raisonne par récurrence sur $r \in [\![2\,;+\infty[\![$.

Pour tout $r \geqslant 2$, on note $\mathscr{P}(r)$ la proposition

$$\forall A_1, \ldots, A_r \in \mathbb{K}[X], \ \exists U_1, \ldots, U_r \in \mathbb{K}[X], \ U_1A_1 + \cdots + U_rA_r = A_1 \wedge \ldots \wedge A_r.$$

D'après la Définition/Proposition 10.89, on a $\mathscr{P}(2)$.

Soit $r \in [\![2\,;+\infty[\![$ tel que $\mathscr{P}(r)$.

Soient $A_1, \ldots, A_{r+1} \in \mathbb{K}[X]$.

Selon $\mathscr{P}(r)$, il existe $U_1, \ldots, U_r \in \mathbb{K}[X]$ tels que $U_1A_1 + \cdots + U_rA_r = A_1 \wedge \ldots \wedge A_r$.

Selon $\mathscr{P}(2)$, il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $U \times (A_1 \wedge \ldots \wedge A_r) + VA_{r+1} = (A_1 \wedge \ldots \wedge A_r) \wedge A_{r+1}$.

Finalement :

$$UU_1A_1 + \cdots + UU_rA_r + VA_{r+1} = A_1 \wedge \ldots \wedge A_{r+1}.$$

D'où $\mathscr{P}(r+1)$.

Donc on a $\forall r \in [\![2\,;+\infty[\![, \ \mathscr{P}(r)$. ■

10.2.3 Polynômes premiers entre eux

Les démonstrations sont laissées en exercice (*cf.* 8.3).

10.2.3.1 Cas de deux polynômes

Définition 10.105 (Polynômes premiers entre eux)
Deux polynômes $A, B \in \mathbb{K}[X]$ sont dits premiers entre eux s'ils vérifient

$$A \wedge B = 1.$$

Cela signifie que leurs seuls diviseurs communs sont les polynômes inversibles.

Théorème 10.106 (Théorème de Bézout)
Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$.

On a

$$A \text{ et } B \text{ sont premiers entre eux} \iff \exists U, V \in \mathbb{K}[X], \ UA + VB = 1.$$

Lemme 10.107 (Lemme de Gauss)
Soient $A, B, P \in \mathbb{K}[X]$.

On suppose

$$P \mid AB \qquad \textit{et} \qquad P \wedge B = 1.$$

Alors

$$P \mid A.$$

Proposition 10.108
Soient $A, B, P \in \mathbb{K}[X]$.

On suppose

$$A \wedge P = 1 \qquad \textit{et} \qquad B \wedge P = 1.$$

Alors

$$P \wedge AB = 1.$$

Corollaire 10.109
Soient $r \in \mathbb{N}^*$ *et* $A_1, \dots, A_r \in \mathbb{K}[X]$.

On suppose

$$\forall k \in [\![1\ ;\ r]\!]\,,\quad A_k \wedge P = 1.$$

Alors

$$P \wedge A_1 \dots A_r = 1.$$

Proposition 10.110
Soient $A, B, P \in \mathbb{K}[X]$.

On suppose

$$A \mid P \qquad \textit{et} \qquad B \mid P \qquad \textit{et} \qquad A \wedge B = 1.$$

Alors

$$AB \mid P.$$

10.2.3.2 Cas de plusieurs polynômes

Définition 10.111
Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \ldots, A_r \in \mathbb{K}[X]$.

On dit que les polynômes $A_1, \ldots, A_r$ sont premiers entre eux deux à deux si on a

$$\forall i, j \in [\![1\ ;\ r]\!]\,,\ \ i \neq j \implies A_i \wedge A_j = 1.$$

On dit que les polynômes $A_1, \ldots, A_r$ sont premiers entre eux dans leur ensemble si

$$A_1 \wedge \ldots \wedge A_r = 1.$$

Remarque 10.112
Soient $r \in [\![2\ ;\ +\infty[\![$ et $A_1, \ldots, A_r \in \mathbb{K}[X]$.

La proposition « $A_1, \ldots, A_r$ sont premiers entre eux deux à deux » implique la proposition « $A_1, \ldots, A_r$ sont premiers entre eux dans leur ensemble ».

L'implication réciproque est fausse.

10.2.4 PPCM

10.2.4.1 PPCM de deux polynômes

Définition/Proposition 10.113
Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$.

Notons $\mathscr{U}$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ nuls ou unitaires.

On a vu que la relation $|$ est une relation d'ordre sur cet ensemble (*cf.* Proposition 10.35).

Dans cet ensemble ordonné $(\mathscr{U}, |)$, il existe un plus petit multiple commun à A et B, c'est-à-dire un polynôme $A \vee B \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$A \vee B \in \mathscr{U} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} A \mid A \vee B \\ B \mid A \vee B \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \forall M \in \mathbb{K}[X]\,,\ \begin{cases} A \mid M \\ B \mid M \end{cases} \implies A \vee B \mid M.$$

Ce polynôme $A \vee B$ est appelé le plus petit commun multiple de A et B.

Démonstration 10.114
Posons $I = \mathbb{K}[X]A \cap \mathbb{K}[X]B$.

I est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ car c'est l'intersection de deux idéaux.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $I = \mathbb{K}[X]P$.

Quitte à multiplier P par un élément non-nul de $\mathbb{K}$, on peut supposer $P \in \mathcal{U}$.

On a $P \in \mathbb{K}[X]A$ donc $A \mid P$ et $P \in \mathbb{K}[X]B$ donc $B \mid P$.

Soit $M \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\begin{cases} A \mid M \\ B \mid M \end{cases}$

On a $M \in \mathbb{K}[X]A$ et $M \in \mathbb{K}[X]B$ donc $M \in I$.

Donc $P \mid M$. ■

Exemple 10.115
On pose $A = X^2 - 1$ et $B = X^2 - X$.

Alors $A \vee B = X^3 - X$.

Démonstration 10.116
On a $X^3 - X$ unitaire.

$X^3 - X$ est un multiple commun à A et B car $X^3 - X = X\left(X^2 - 1\right) = (X+1)\left(X^2 - X\right)$.

Soit $M \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A \mid M$ et $B \mid M$.

On a $\begin{cases} (X+1)(X-1) \mid M \\ X(X-1) \mid M \end{cases}$ donc $\begin{cases} X+1 \mid M \\ X(X-1) \mid M \end{cases}$

De plus, on a $(X+1) \wedge \left(X^2 - X\right) = 1$ car $(X-2)(X+1) - \left(X^2 - X\right) = 2$.

Donc $(X+1)X(X-1) \mid M$.

Donc $X(X-1)(X+1) = X^3 - X = A \vee B$. ■

Remarque 10.117
Soit $A \in \mathbb{K}[X]$.

On a $A \vee 0 = 0$.

Si $A = 0$ alors $A \vee 1 = 0$. Sinon, $A \vee 1$ est l'unique polynôme unitaire associé à A.

Remarque 10.118
Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$.

Le PPCM de A et B est le multiple commun à A et B nul ou unitaire et qui divise tous les autres multiples communs à A et B.

Il est donc caractérisé par :

$$A \vee B \text{ nul ou unitaire} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{K}[X]\,A \cap \mathbb{K}[X]\,B = \mathbb{K}[X]\,(A \vee B)$$

ou par

$$A \vee B \text{ nul ou unitaire} \qquad \text{et} \qquad \forall P \in \mathbb{K}[X]\,,\ \ A \vee B \mid P \iff [A \mid P \text{ et } B \mid P]\,.$$

Si $A = 0$ ou $B = 0$ alors $A \vee B = 0$.

Sinon, $A \vee B$ est le polynôme unitaire de plus bas degré qui est multiple de A et B (selon la Proposition 10.32).

Remarque 10.119
Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$.

Le polynôme $A \vee B$ est nul si, et seulement si, on a $A = B = 0$.

Si A ou B est non-nul, on impose systématiquement au polynôme noté $A \vee B$ d'être unitaire.

En revanche, on s'autorise parfois à appeler « plus petit commun multiple de A et B » tout polynôme P associé à $A \vee B$, même s'il n'est pas unitaire.

Ainsi, on dit que $2X^3 - 2X$ est un PPCM de $X^2 - 1$ et $X^2 - X$.

Remarque 10.120
Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$.

On définit le polynôme A_1 en posant :

- si $A = 0$ alors $A_1 = 0$;
- si $A \neq 0$ alors A_1 est l'unique polynôme unitaire associé à A.

On a

$$A \vee B = A_1 \iff B \mid A.$$

Proposition 10.121
Soient $A, B, P \in \mathbb{K}[X]$.

Les polynômes $PA \vee PB$ *et* $P \times (A \vee B)$ *sont associés.*

Démonstration 10.122
Si $P = 0$, la proposition est vraie.

Supposons $P \neq 0$.

Montrons que $PA \vee PB$ divise $P \times (A \vee B)$.

On a A et B divisent $A \vee B$.

Donc PA et PB divisent $P \times (A \vee B)$.

Donc $PA \vee PB$ divise $P \times (A \vee B)$.

Montrons que $P \times (A \vee B)$ divise $PA \vee PB$.

On remarque que P divise $PA \vee PB$ (car $P \mid PA \mid PA \vee PB$).

Soit $M \in \mathbb{K}[X]$ tel que $MP = PA \vee PB$.

On a PA et PB divisent MP.

Comme $P \neq 0$, on en déduit A et B divisent M.

Donc $A \vee B$ divise M.

Donc $P \times (A \vee B)$ divise PM.

Donc $P \times (A \vee B)$ divise $PA \vee PB$.

Conclusion : les polynômes $PA \vee PB$ et $P \times (A \vee B)$ sont associés. ■

Proposition 10.123
Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$.

Les polynômes $(A \vee B)(A \wedge B)$ et AB sont associés.

Démonstration 10.124
⋆⋆ Exercice ⋆⋆ ■

10.2.4.2 PPCM de plusieurs polynômes

Proposition 10.125
La loi $\vee$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{K}[X]$.

Elle est associative et commutative.

Démonstration 10.126
★★ **Exercice** ★★ ∎

Définition/Proposition 10.127
Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \ldots, A_r \in \mathbb{K}[X]$.

Les diviseurs communs à $A_1, \ldots, A_r$ sont les diviseurs du polynôme $A_1 \vee \ldots \vee A_r$.

Ce polynôme et ses polynômes associés sont appelés les plus petits communs multiples des polynômes $A_1, \ldots, A_r$.

Démonstration 10.128
★★ **Exercice** ★★ ∎

Proposition 10.129
Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \ldots, A_r, P \in \mathbb{K}[X]$.

Les polynômes $PA_1 \vee \ldots \vee PA_r$ et $P \times (A_1 \vee \ldots \vee A_r)$ sont associés.

Démonstration 10.130
Découle de la Proposition 10.121 par récurrence sur $r \in \mathbb{N}^*$. ∎

10.2.5 Polynômes irréductibles

10.2.5.1 Définition

Définition 10.131 (Polynôme irréductible)
Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit irréductible sur $\mathbb{K}$ ou dans $\mathbb{K}[X]$ s'il est non-constant et s'il n'est pas le produit de deux polynômes non-constants :

$$\begin{cases} P \text{ non-constant} \\ \forall Q_1, Q_2 \in \mathbb{K}[X], \quad P = Q_1 Q_2 \implies [Q_1 \text{ constant ou } Q_2 \text{ constant}] \end{cases}$$

On a donc
$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \quad P \text{ irréductible} \iff [P \notin \mathbb{K} \text{ et } \operatorname{div}(P) = \{1 \,;\, P_1\}]$$
avec P_1 l'unique polynôme unitaire associé à P.

Démonstration 10.132

$\boxed{\implies}$

Supposons P irréductible.

Alors $P \notin \mathbb{K}$ (en particulier, $P \neq 0$).

Déterminons $\operatorname{div}(P)$:

$\boxed{\text{analyse}}$

Soit $D \in \operatorname{div}(P)$.

On a $D \neq 0$ car $P \neq 0$ donc D est unitaire.

Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = QD$.

Si D est constant alors $D = 1$ car D est unitaire.

Si Q est constant alors Q est constant et non-nul (car $P \neq 0$) donc D est unitaire et associé à P donc $D = P_1$.

$\boxed{\text{synthèse}}$ 1 et P_1 divisent P et sont irréductibles.

$\boxed{\text{conclusion}}$ On a $\operatorname{div}(P) = \{1 ; P_1\}$.

$\boxed{\impliedby}$

Supposons $P \notin \mathbb{K}$ et $\operatorname{div}(P) = \{1 ; P_1\}$.

Montrons que P est irréductible.

On a bien P non-constant.

Soient $Q_1, Q_2 \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P = Q_1 Q_2$.

Comme $P \neq 0$, on a $Q_1 \neq 0$ et $Q_2 \neq 0$.

On note λ_1 le coefficient dominant de Q_1.

On a $P = \left(\dfrac{1}{\lambda_1} Q_1\right) \lambda_1 Q_2$ donc $\dfrac{1}{\lambda_1} Q_1 \in \operatorname{div}(P) = \{1 ; P_1\}$.

Si $\dfrac{1}{\lambda_1} Q_1 = 1$ alors Q_1 est constant.

Si $\dfrac{1}{\lambda_1} Q_1 = P_1$ alors Q_1 est associé à P.

Donc $\deg Q_1 = \deg P$.

Or $P = Q_1 Q_2$ donc $\deg P = \deg Q_1 + \deg Q_2$.

Donc $\deg Q_2 = 0$ donc Q_2 est constant. ■

Remarque 10.133
On n'impose pas aux polynômes irréductibles d'être unitaires.

Exemple 10.134
(1) Tout polynôme de degré 1 est irréductible.

(2) Le polynôme $P = X^2 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{R}$ mais pas sur $\mathbb{C}$.

Démonstration 10.135 (1)
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg P = 1$.

Montrons que P est irréductible.

On a P non-constant.

Soient $Q_1, Q_2 \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P = Q_1 Q_2$.

On a $P \neq 0$ donc $Q_1 \neq 0$ et $Q_2 \neq 0$.

On a $1 = \deg P = \deg Q_1 + \deg Q_2$.

Donc $\deg Q_1 = 0$ ou $\deg Q_2 = 0$.

Donc Q_1 constant ou Q_2 constant.

Donc P est irréductible. ∎

Démonstration 10.136 (2)
On a $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ donc P n'est pas irréductible sur $\mathbb{C}$.

Montrons que P est irréductible sur $\mathbb{R}$.

On a P non-constant.

Soient $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = Q_1 Q_2$.

On a $2 = \deg P = \deg Q_1 + \deg Q_2$.

Donc $(\deg Q_1, \deg Q_2) \in \{(2,0) ; (1,1) ; (0,2)\}$.

Supposons par l'absurde $(\deg Q_1, \deg Q_2) = (1,1)$.

Alors Q_1 et Q_2 admettent chacun une racine dans $\mathbb{R}$.

Donc P admet une racine dans $\mathbb{R}$: contradiction.

Donc $(\deg Q_1, \deg Q_2) \in \{(2,0) ; (0,2)\}$.

Donc Q_1 ou Q_2 est constant.

Donc P est irréductible. ∎

Remarque 10.137
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ irréductible.

(1) Si P admet une racine alors $\deg P = 1$.

(2) D'où, par contraposée : si $\deg P \geqslant 2$ alors P n'admet aucune racine.

Démonstration 10.138
Montrons (1).

Supposons que P admet une racine $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors $X - \lambda \mid P$.

Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $(X - \lambda) Q = P$.

Comme P est irréductible, on a $X - \lambda$ constant ou Q constant.

Donc Q est constant.

De plus, $Q \neq 0$ car $P \neq 0$.

Donc $\deg Q = 0$ et $\deg P = \deg(X - \lambda) + \deg Q = 1 + 0 = 1$. ■

Remarque 10.139
Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

On suppose que P est irréductible.

Alors
$$P \nmid Q \iff P \wedge Q = 1.$$

10.2.5.2 Polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$

Théorème 10.140
Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ *sont ceux de degré* 1.

Démonstration 10.141
$\boxed{\supseteq}$ On a déjà vu que tout polynôme de degré 1 est irréductible.

$\boxed{\subseteq}$

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ irréductible.

Selon le théorème de D'Alembert-Gauss, P admet une racine car P n'est pas constant.

Donc $\deg P = 1$ (selon la Remarque 10.137). ■

Théorème 10.142
Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ *sont ceux de degré* 1 *et ceux de la forme*

$$aX^2 + bX + c$$

où $\begin{cases} a, b, c \in \mathbb{R} \\ a \neq 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac < 0 \end{cases}$

Démonstration 10.143
$\boxed{\supseteq}$

Tout polynôme de degré 1 est irréductible.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac < 0 \end{cases}$

Le polynôme $P = aX^2 + bX + c$ n'admet aucune racine dans $\mathbb{R}$.

On a P non-constant.

Soient $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = Q_1 Q_2$.

On a $2 = \deg P = \deg Q_1 + \deg Q_2$.

De plus, $\deg Q_1 \neq 1$ car sinon Q_1 admettrait une racine dans $\mathbb{R}$ et P aussi.

Donc $(Q_1, Q_2) \in \{(0, 2) \ ; \ (2, 0)\}$.

Donc Q_1 ou Q_2 constant.

Donc P est irréductible.

$\boxed{\subseteq}$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ irréductible.

On a P non-constant.

D'après le théorème de D'Alembert-Gauss, il existe une racine complexe de P.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $P(\lambda) = 0$.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $X - \lambda \mid P$ (dans $\mathbb{R}[X]$).

Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $(X - \lambda) Q = P$.

Comme P est irréductible, $X - \lambda$ ou Q est constant donc Q est constant.

Donc $\deg P = 1$ car $Q \neq 0$.

Si $\lambda \notin \mathbb{R}$ alors $P\left(\overline{\lambda}\right) = 0$.

Donc $X - \lambda$ et $X - \overline{\lambda}$ divisent P.

Or $(X - \lambda) \wedge \left(X - \overline{\lambda}\right) = 1$ car $\lambda \neq \overline{\lambda}$.

Donc $(X - \lambda)\left(X - \overline{\lambda}\right) \mid P$ selon la Proposition 10.110.

Donc $X^2 - \left(\lambda + \overline{\lambda}\right) X + \lambda\overline{\lambda} = X^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(\lambda)\, X + |\lambda|^2 \in \mathbb{R}[X]$.

Ainsi $X^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(\lambda)\, X + |\lambda|^2 \mid P$.

Donc il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\left(X^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(\lambda)\, X + |\lambda|^2\right) Q = P$ avec nécessairement Q constant car P est irréductible et $Q \neq 0$ car $P \neq 0$.

Finalement, on a
$$\exists a \in \mathbb{R}^*,\ \ ax^2 - 2a\,\mathrm{Re}\,(\lambda)\, X + |\lambda|^2\, a = P$$
et $\Delta < 0$ car P n'a pas de racine réelle. ■

10.2.6 Théorème fondamental de l'arithmétique des polynômes

10.2.6.1 Cas général

Le théorème suivant affirme que tout polynôme non-constant s'écrit de façon unique comme le produit de polynômes irréductibles, à l'ordre des facteurs près et à des facteurs inversibles près :

Théorème 10.144
Soit $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \mathbb{K}$.

Alors il existe un entier $r \in \mathbb{N}^*$ et des polynômes irréductibles $A_1, \ldots, A_r \in \mathbb{K}[X]$ tels que
$$P = A_1 \ldots A_r.$$

De plus, si l'on a une autre décomposition
$$P = B_1 \ldots B_s$$
avec $s \in \mathbb{N}^*$ et $B_1, \ldots, B_s \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes irréductibles, alors il existe une bijection $\sigma : [\![1\,;\,r]\!] \longrightarrow [\![1\,;\,s]\!]$ telle que
$$\forall k \in [\![1\,;\,r]\!],\ \ A_k \text{ et } B_{\sigma(k)} \text{ sont associés.}$$

Démonstration 10.145
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « tout polynôme P de degré n s'écrit comme le produit de polynômes irréductibles, de façon unique à l'ordre des facteurs près et à des constantes multiplicatives non-nulles près ».

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg P = 1$.

$\boxed{\text{existence}}$ On a $P = P$ et P est irréductible.

$\boxed{\text{unicité}}$

Soient $B_1, \dots, B_s \in \mathbb{K}[X]$ irréductibles et tels que $P = B_1 \dots B_s$.

On a $\forall j \in [\![1 ; s]\!], \ \deg B_j \geqslant 1$ (car B_j est non-constant).

Donc $1 = \deg P = \displaystyle\sum_{j=1}^{s} \deg B_j \geqslant \sum_{j=1}^{s} 1 = s$.

Donc $s \leqslant 1$.

De plus, $s \neq 0$ (sinon $P = 1$ est constant).

Donc $s = 1$.

Donc $P = B_1$.

D'où $\mathscr{P}(1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall k \in [\![1 ; n]\!], \ \mathscr{P}(k)$.

$\boxed{\text{existence}}$

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg P = n + 1$.

Si P est irréductible, $P = P$ convient.

Supposons P non-irréductible.

Il existe $Q_1, Q_2 \in \mathbb{K}[X]$ non-constants tels que $P = Q_1 Q_2$.

On a $n + 1 = \deg P = \underbrace{\deg Q_1}_{\geqslant 1} + \underbrace{\deg Q_2}_{\geqslant 1}$.

Donc $\deg Q_1 \leqslant n$ et $\deg Q_2 \leqslant n$.

Selon l'hypothèse de récurrence, Q_1 et Q_2 sont produits de polynômes irréductibles donc leur produit P l'est aussi.

$\boxed{\text{unicité}}$

Soient $r, s \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \dots, A_r, B_1, \dots, B_s \in \mathbb{K}[X]$ irréductibles.

Supposons $P = A_1 \dots A_r = B_1 \dots B_s$.

Comme A_1 est irréductible, on a

$$\forall j \in [\![1 ; s]\!], \ \left| \begin{array}{l} A_1 \mid B_j \\ \text{ou} \\ A_1 \wedge B_j = 1 \end{array} \right.$$

Si $\forall j \in [\![1 ; s]\!], \ A_1 \wedge B_j = 1$ alors $A_1 \wedge (B_1 \dots B_s) = 1$ donc $A_1 \wedge P = 1$: contradiction car $A_1 \mid P$.

Donc il existe $j \in [\![1 ; s]\!]$ tel que $A_1 \mid B_j$ donc A_1 est associé à B_j car A_1 est non-constant et B_j est irréductible.

Soit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tel que $B_j = \lambda A_1$.

Quitte à renuméroter $B_1, \dots, B_s$ et à remplacer B_1 par $\dfrac{1}{\lambda} B_1$ et B_2 par λB_2, on a $A_1 = B_1$ donc

$$A_2 \dots A_r = B_2 \dots B_s$$

car $\mathbb{K}[X]$ est intègre.

Posons $Q = A_2 \dots A_r$.

On a $\deg Q \leqslant n$.

Selon l'hypothèse de récurrence appliquée à Q, il existe $\sigma : [\![2 \,;\, r]\!] \longrightarrow [\![1 \,;\, s]\!]$ une bijection telle que

$$\forall i \in [\![1 \,;\, r]\!],\ \ A_i \text{ et } B_{\sigma(i)} \text{ sont associés.}$$

Alors $\begin{array}{rccl} \tilde{\sigma} : & [\![1 \,;\, r]\!] & \longrightarrow & [\![1 \,;\, s]\!] \\ & i & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ \sigma(i) & \text{si } i \geqslant 2 \end{cases} \end{array}$ vérifie

$$\forall i \in [\![1 \,;\, r]\!],\ \ A_i \text{ et } B_{\tilde{\sigma}(i)} \text{ sont associés.}$$

D'où l'unicité.

Donc, par récurrence forte, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \mathscr{P}(n)$. ■

Corollaire 10.146 (Reformulation)
Soit $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.

On note $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ le coefficient dominant de P.

Alors il existe $r \in \mathbb{N}$, $A_1, \dots, A_r \in \mathbb{K}[X]$ irréductibles, unitaires et deux à deux distincts et $\alpha_1, \dots, \alpha_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$P = \lambda A_1^{\alpha_1} \dots A_r^{\alpha_r}.$$

De plus, si l'on a une autre décomposition

$$P = \mu B_1^{\beta_1} \dots B_s^{\beta_s}$$

avec $\mu \in \mathbb{K}$, $s \in \mathbb{N}$, $B_1, \dots, B_s \in \mathbb{K}[X]$ irréductibles, unitaires et deux à deux distincts, et $\beta_1, \dots, \beta_s \in \mathbb{N}^*$, alors $\lambda = \mu$ et il existe une bijection $\sigma : [\![1 \,;\, r]\!] \longrightarrow [\![1 \,;\, s]\!]$ telle que

$$\forall k \in [\![1 \,;\, r]\!],\ \ A_k = B_{\sigma(k)} \qquad \textit{et} \qquad \alpha_k = \beta_{\sigma(k)}.$$

10.2.6.2 Polynômes à coefficients complexes

Théorème 10.147
Soit $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$.

Alors P s'écrit de façon unique, à permutation de facteurs près :

$$P = \mu (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X - \lambda_r)^{\alpha_r} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \mu \in \mathbb{C}^* \\ r \in \mathbb{N} \\ \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C} \text{ deux à deux distincts} \\ \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Le coefficient dominant de P est μ.

Les racines de P sont $\lambda_1, \dots, \lambda_r$.

Pour tout $j \in [\![1 \,;\, r]\!]$, l'entier α_j est appelé multiplicité de la racine λ_j.

Le polynôme P admet r racines comptées sans multiplicité et $\alpha_1 + \dots + \alpha_r$ racines comptées avec multiplicité.

Exercice 10.148 (À retenir)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Décomposer le polynôme $X^n - 1$ en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$.

Correction 10.149
Le coefficient dominant de $X^n - 1$ est 1.

Les racines de $X^n - 1$ sont les éléments de $\mathbb{U}_n$ (il y en a n).

Notons $\alpha_\omega \in \mathbb{N}^*$ la multiplicité de $\omega \in \mathbb{U}_n$.

On a $X^n - 1 = 1 \times \displaystyle\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega)^{\alpha_\omega}$.

Donc $\deg(X^n - 1) = \displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \deg(X - \omega)^{\alpha_\omega}$.

Donc $n = \displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \alpha_\omega$.

Donc $\forall \omega \in \mathbb{U}_n, \ \ \alpha_\omega = 1$.

Finalement :

$$X^n - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega).$$

Proposition 10.150
Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$.

Alors P et Q sont premiers entre eux si, et seulement si, P et Q n'ont aucune racine commune.

Autrement dit, par contraposée :

$$P \wedge Q \neq 1 \iff \exists \lambda \in \mathbb{C},\ \ P(\lambda) = Q(\lambda) = 0.$$

Démonstration 10.151
S'il existe une racine $\lambda \in \mathbb{C}$ commune à P et Q, alors $X - \lambda$ divise P et Q.

Donc $X - \lambda \mid P \wedge Q$.

Donc $P \wedge Q \neq 1$.

S'il n'existe aucune racine commune à P et Q :

Décomposons P et Q en produits de polynômes irréductibles : $\begin{cases} P = \lambda(X-\lambda_1)\dots(X-\lambda_\alpha) \\ Q = \mu(X-\mu_1)\dots\left(X-\mu_\beta\right) \end{cases}$ où $\begin{cases} \alpha, \beta \in \mathbb{N} \\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}^* \\ \lambda_1, \dots, \lambda_\alpha, \mu_1, \dots, \mu_\beta \in \mathbb{C} \end{cases}$

On a $\{\lambda_1 ; \dots ; \lambda_\alpha\} \cap \left\{\mu_1 ; \dots ; \mu_\beta\right\} = \varnothing$.

Soit $j \in [\![1 ; \beta]\!]$.

On a $\forall i \in [\![1 ; \alpha]\!],\ \ (X - \lambda_i) \wedge \left(X - \mu_j\right) = 1$ car $\lambda_i \neq \mu_j$.

Donc, selon le Corollaire 10.109, on a

$$\lambda \prod_{i=1}^{\alpha} (X - \lambda_i) \wedge \left(X - \mu_j\right) = 1.$$

D'où, selon le Corollaire 10.109, on a

$$\lambda \prod_{i=1}^{\alpha} (X - \lambda_i) \wedge \mu \prod_{j=1}^{\beta} \left(X - \mu_j\right) = 1.$$

Donc $P \wedge Q = 1$. ∎

Proposition 10.152
Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$.

Alors P divise Q si, et seulement si, toute racine λ de P est racine de Q avec une multiplicité comme racine de Q au moins égale à sa multiplicité comme racine de P.

Exemple 10.153
On a $2\,(X-1)^{\alpha}\,(X+i)^{\beta} \mid (X-1)^2\,(X+i)^3 \iff \begin{cases} \alpha \leqslant 2 \\ \beta \leqslant 3 \end{cases}$

10.2.6.3 Polynômes à coefficients réels

Théorème 10.154
Soit $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$.

Alors P s'écrit de façon unique, à permutation des facteurs près :

$$P = \mu \times (X-\lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X-\lambda_r)^{\alpha_r} \times \left(X^2+b_1X+c_1\right)^{\beta_1} \dots \left(X^2+b_sX+c_s\right)^{\beta_s}$$

où $\begin{cases} \mu \in \mathbb{R}^* \\ r, s \in \mathbb{N} \\ \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R} \text{ deux à deux distincts} \\ (b_1, c_1), \dots, (b_s, c_s) \in \mathbb{R}^2 \text{ deux à deux distincts} \\ \text{les facteurs de degré 2 sont irréductibles, c'est-à-dire } \forall i \in [\![1\,;\,s]\!],\ \ b_i^2 - 4c_i < 0 \\ \alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Le coefficient dominant de P est μ.

Les racines réelles de P sont $\lambda_1, \dots, \lambda_r$.

Pour tout $j \in [\![1\,;\,r]\!]$, l'entier α_j est appelé multiplicité de la racine λ_j.

Le polynôme P admet r racines réelles comptées sans multiplicité et $\alpha_1 + \dots + \alpha_r$ racines comptées avec multiplicité.

Exercice 10.155 (À retenir)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Décomposer le polynôme $X^n - 1$ en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$.

Correction 10.156
On a vu

$$X^n - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\right).$$

Si n est pair, on a $n = 2m$ où $m = \dfrac{n}{2}$.

Donc $\mathbb{U}_n = \{-1 ; 1\} \cup \bigcup_{k=1}^{m-1} \left\{ \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} ; \mathrm{e}^{\frac{-2ik\pi}{n}} \right\}$.

D'où

$$\begin{aligned} X^n - 1 &= (X-1)(X+1) \prod_{k=1}^{m-1} \left(X - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \right) \left(X - \mathrm{e}^{\frac{-2ik\pi}{n}} \right) \\ &= (X-1)(X+1) \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) X + 1 \right) \end{aligned}$$

Si n est impair, on a $n = 2m+1$ avec $m = \dfrac{n-1}{2}$.

On obtient de même $\mathbb{U}_n = \{1\} \cup \bigcup_{k=1}^{m} \left\{ \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} ; \mathrm{e}^{\frac{-2ik\pi}{n}} \right\}$.

Donc

$$X^n - 1 = (X-1) \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) X + 1 \right).$$

Exemple 10.157
On a

$$\begin{aligned} X^4 - 1 &= \left(X^2 - 1\right)\left(X^2 + 1\right) \\ &= (X-1)(X+1)\left(X^2+1\right) \end{aligned}$$

et

$$X^5 - 1 = (X-1)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)X + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)X + 1\right).$$

Proposition 10.158 (Racines complexes de polynômes réels)
Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de P.

On sait, d'après la Proposition 10.40, *que $\overline{\lambda}$ est racine de P.*

Les racines λ et $\overline{\lambda}$ ont même multiplicité.

Démonstration 10.159
On considère la décomposition de P en produit d'irréductibles sur $\mathbb{C}$:

$$P = \mu (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X - \lambda_r)^{\alpha_r}$$

où $\begin{cases} \mu \in \mathbb{C}^* \\ \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C} \text{ deux à deux distincts} \\ \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

On pose $\lambda = \lambda_1$.

En conjuguant, on a
$$\overline{P} = \overline{\mu}\left(X - \overline{\lambda_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(X - \overline{\lambda_r}\right)^{\alpha_r} = P.$$

Selon l'unicité de l'écriture en produit d'irréductibles, il existe $k \in [\![1 ; r]\!]$ tel que $(X - \lambda_1)^{\alpha_1} = (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$.

Donc $\lambda_k = \overline{\lambda}$ et $\alpha_k = \alpha_1$.

Or α_k est la multiplicité de la racine $\overline{\lambda}$ de P et α_1 est la multiplicité de la racine λ de P. ■

10.3 Racines des polynômes

10.3.1 Multiplicités

Définition 10.160 (Multiplicité d'une racine)
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ non-nul et $\lambda \in \mathbb{K}$ une racine de P.

On a vu, à la Proposition 10.42, que $X - \lambda$ divise P.

On appelle multiplicité de λ comme racine de P l'exposant de $X - \lambda$ dans la décomposition de P en produit de polynômes irréductibles.

On dit que λ est racine simple de P si sa multiplicité vaut 1 ; sinon on dit que λ est racine multiple de P.

Exemple 10.161
Pour le polynôme $P = X^2 (X - 4)^3 (X - 7) \in \mathbb{R}[X]$:

- 0 est racine de multiplicité 2 (ou « racine double »)
- 4 est racine de multiplicité 3 (ou « racine triple »)
- et 7 est racine simple.

Ainsi, P admet :

- 3 racines comptées sans multiplicité
- 6 racines comptées avec multiplicité.

Remarque 10.162
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ non-nul et $\lambda \in \mathbb{K}$ une racine de P.

La multiplicité de λ est l'entier $\alpha \in \mathbb{N}^*$ caractérisé par :

$$\begin{cases}(X-\lambda)^{\alpha} \mid P \\ (X-\lambda)^{\alpha+1} \nmid P\end{cases}$$

En particulier, λ est racine multiple de P si, et seulement si, on a :

$$(X-\lambda)^2 \mid P.$$

Proposition 10.163 (Caractérisation à l'aide des dérivés)
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ non-nul et $\lambda \in \mathbb{K}$ une racine de P.

La multiplicité de λ est l'entier $\alpha \in \mathbb{N}^*$ caractérisé par :

$$\begin{cases}\forall j \in [\![0\,;\,\alpha-1]\!], \quad P^{(j)}(\lambda) = 0 \\ P^{(\alpha)}(\lambda) \neq 0\end{cases}$$

En particulier, λ est racine multiple de P si, et seulement si, on a :

$$P(\lambda) = P'(\lambda) = 0.$$

Démonstration 10.164
On note n le degré de P et λ le coefficient dominant de P.

On a $P^{(n)} = \lambda n!$ donc $P^{(n)}(\lambda) = \lambda n! \neq 0$.

On note $\gamma \in \mathbb{N}$ le plus petit entier tel que $P^{(\gamma)}(\lambda) \neq 0$ (toute partie non-vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum).

On a $\begin{cases}\forall k \in [\![0\,;\,\gamma-1]\!], \quad P^{(k)}(\lambda) = 0 \\ P^{(\gamma)}(\lambda) \neq 0\end{cases}$

Donc selon la formule de Taylor pour les polynômes :

$$\begin{aligned}P &= \sum_{k=\gamma}^{n} \frac{P^{(k)}(\lambda)}{k!}(X-\lambda)^k \\ &= (X-\lambda)^{\gamma} Q \text{ où } Q = \sum_{k=\gamma}^{n} \frac{P^{(k)}(\lambda)}{k!}(X-\lambda)^{k-\gamma}\end{aligned}$$

et $Q(\lambda) = \dfrac{P^{(\gamma)}(\lambda)}{\gamma!} \neq 0$.

Donc $X-\lambda \nmid Q$ donc
$$\begin{cases}(X-\lambda)^{\gamma} \mid P \\ (X-\lambda)^{\gamma+1} \nmid P\end{cases}$$

Donc la multiplicité de λ comme racine de P est γ. ■

10.3.2 Nombre de racines d'un polynôme

Proposition 10.165
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$.

Alors P admet au plus n racines comptées avec multiplicité.

En particulier, P admet au plus n racines comptées sans multiplicité.

Démonstration 10.166
Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les racines de P deux à deux distinctes et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ leurs multiplicités respectives, avec $r \in \mathbb{N}$.

On a $(X-\lambda_1)^{\alpha_1} \ldots (X-\lambda_r)^{\alpha_r} \mid P$.

Or, comme $P \neq 0$, on a
$$\deg\left((X-\lambda_1)^{\alpha_1} \ldots (X-\lambda_r)^{\alpha_r}\right) \leqslant \deg P.$$

Donc (avec multiplicité) :
$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_r \leqslant n.$$

Donc (sans multiplicité) :
$$r \leqslant n.$$
■

Corollaire 10.167
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{K}_n[X]$.

Si P admet $n+1$ racines alors $P = 0$.

Corollaire 10.168
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

Si P admet une infinité de racines alors $P = 0$.

Corollaire 10.169
On note $\mathrm{Pol}(\mathbb{K},\mathbb{K})$ *l'ensemble des fonctions polynomiales de* $\mathbb{K}$ *dans* $\mathbb{K}$ *(c'est un sous-anneau de* $\mathscr{F}(\mathbb{K},\mathbb{K})$ *selon la Proposition* 10.45*).*

Si $\mathbb{K}$ *est infini, alors l'application*

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathrm{Pol}(\mathbb{K},\mathbb{K}) \\ P & \longmapsto & \tilde{P} \end{array}$$

est un isomorphisme d'anneaux.

Démonstration 10.170
On a déjà vu que φ est un morphisme d'anneaux (*cf.* Proposition 10.45).

φ est clairement une surjection.

Montrons que φ est injective.

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\varphi(P) = \varphi(Q)$.

On a $\varphi(P - Q) = 0$, c'est-à-dire

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad (P - Q)(\lambda) = 0.$$

Donc $P - Q$ admet une infinité de racines (car $\mathbb{K}$ est infini).

Donc $P - Q = 0$ donc $P = Q$ donc φ est injectif. ■

10.3.3 Polynômes interpolateurs de Lagrange

Définition/Proposition 10.171 (Polynôme interpolateur de Lagrange)
Soient $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$.

Les polynômes $L_0, \ldots, L_n \in \mathbb{K}_n[X]$ définis par :

$$\forall j \in [\![0 \,;\, n]\!], \quad L_j = \prod_{k \in [\![0;n]\!] \setminus \{j\}} \frac{X - x_k}{x_j - x_k}$$

vérifient

$$\forall i, j \in [\![0 \,;\, n]\!], \quad L_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Le polynôme

$$y_0 L_0 + \cdots + y_n L_n$$

est l'unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que

$$\forall k \in [\![0 \,;\, n]\!], \quad P(x_k) = y_k.$$

Démonstration 10.172
$\boxed{\text{unicité}}$

Soient $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $\forall k \in [\![0\,;n]\!],\ \ P(x_k) = Q(x_k) = y_k$.

On a $\forall k \in [\![0\,;n]\!],\ \ (P-Q)(x_k) = 0$.

Donc $P - Q$ admet $n+1$ racines et $P - Q \in \mathbb{K}_n[X]$.

Donc $P - Q = 0$.

Donc $P = Q$. ∎

Exercice 10.173
Donner l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que

$$\begin{cases} P(-2) = -30 \\ P(0) = -4 \\ P(1) = 3 \\ P(2) = 22 \end{cases}$$

Correction 10.174
On pose

$$\begin{aligned} P &= -30\frac{(X-0)(X-1)(X-2)}{(-2-0)(-2-1)(-2-2)} - 4\frac{(X+2)(X-1)(X-2)}{(0+2)(0-1)(0-2)} + 3\frac{(X+2)(X-0)(X-2)}{(1+2)(1-0)(1-2)} \\ &\quad +22\frac{(X+2)(X-0)(X-1)}{(2+2)(2-0)(2-1)} \\ &= \frac{30}{24}\left(X^2 - X\right)(X-2) - \left(X^2 + X - 2\right)(X-2) - \left(X^2 + 2X\right)(X-2) + \frac{22}{8}\left(X^2 + 2X\right)(X-1) \\ &= \frac{5}{4}\left(X^3 - 3X^2 + 2X\right) - \left(X^3 - X^2 - 4X + 4\right) - \left(X^3 - 4X\right) + \frac{11}{4}\left(X^3 + X^2 - 2X\right) \\ &= 2X^3 + 5X - 4 \end{aligned}$$

Exercice 10.175
On garde les notations de la Définition/Proposition 10.171.

Compléter les égalités suivantes :

(1) $\forall P \in \mathbb{K}_n[X],\ \ P(x_0)L_0 + \cdots + P(x_n)L_n =$

(2) $L_0 + \cdots + L_n =$

Correction 10.176
On a :

(1) $\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \quad P(x_0) L_0 + \cdots + P(x_n) L_n = P$

(2) $L_0 + \cdots + L_n = 1$

10.3.4 Polynômes scindés

Définition 10.177 (Polynôme scindé)
Soit $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.

On dit que P est scindé (sur $\mathbb{K}$) s'il est produit de polynômes de degré 1, c'est-à-dire s'il admet $\deg P$ racines comptées avec multiplicité.

Exemple 10.178
Le polynôme $X^2 + 1$ est scindé sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

Proposition 10.179
Sur $\mathbb{C}$, tout polynôme est scindé.

Sur $\mathbb{R}$, un polynôme est scindé si, et seulement si, dans sa décomposition en produit d'irréductibles, il n'y a aucun polynôme de degré 2. Cela revient à dire que toutes les racines complexes du polynômes sont réelles.

Définition 10.180
Soit $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.

On dit que P est scindé à racines simples (sur $\mathbb{K}$) s'il est scindé (sur $\mathbb{K}$) et si toutes ses racines sont simples (c'est-à-dire de multiplicité 1).

Cela revient à dire que P admet $\deg P$ racines comptées sans multiplicité.

Bilan 10.181
Soit $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.

On note n le nombre de racines de P comptées sans multiplicité.

On note N le nombre de racines de P comptées avec multiplicité.

On a

$$n \underset{(1)}{\leqslant} N \underset{(2)}{\leqslant} \deg P.$$

De plus :

- (1) est une égalité si, et seulement si, P est à racines simples.

- (2) est une égalité si, et seulement si, P est scindé.

- (1) et (2) sont des égalités si, et seulement si, P est scindé à racines simples.

Définition 10.182 (Polynômes symétriques élémentaires)
Soit
$$P = a_n X^n + \cdots + a_0 X^0 \in \mathbb{K}[X]$$
un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$, où $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$.

On suppose ce polynôme scindé :
$$P = \mu (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_n),$$
où $\mu, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

Les polynômes symétriques élémentaires en les racines de P sont les sommes $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ définies par :
$$\forall k \in [\![1 \,;\, n]\!], \quad \sigma_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \lambda_{i_1} \times \cdots \times \lambda_{i_k}.$$

Exemple 10.183
Si $n = 3$, on a :

$\sigma_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$

$\sigma_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$

$\sigma_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$

Si $n = 4$, on a :

$\sigma_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$

$\sigma_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4$

$\sigma_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4$

$\sigma_4 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4.$

Proposition 10.184 (Relations coefficients/racines)
On garde les notations de la définition précédente.

Les polynômes symétriques élémentaires en les racines de P s'expriment en fonction des coefficients de P :

$$\forall k \in [\![1 \,;\, n]\!]\,,\ \ \sigma_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \lambda_{i_1} \times \cdots \times \lambda_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

En particulier, la somme et le produit des racines de P, comptées avec multiplicité, se lisent facilement sur les coefficients de P :

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \frac{-a_{n-1}}{a_n} \qquad \text{et} \qquad \lambda_1 \ldots \lambda_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Démonstration 10.185 (Idée)
On développe :

$$P = \mu\,(X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_n) = \mu X^n - \mu\sigma_1 X^{n-1} + \mu\sigma_2 X^{n-2} + \cdots + (-1)^n \mu\sigma_n.$$

D'où $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mu\sigma_k X^{n-k}$.

Or $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} X^{n-k}$.

Donc $\forall k \in [\![1 \,;\, n]\!]\,,\ \ (-1)^k \mu\sigma_k = a_{n-k}$.

Donc $\forall k \in [\![1 \,;\, n]\!]\,,\ \ \sigma_k = (-1)^k \dfrac{a_{n-k}}{a_n}$ (car $a_n = \mu$).

On en déduit

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \frac{-a_{n-1}}{a_n} \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=1}^{n} \lambda_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

■

Exercice 10.186
On pose $P = X^3 + 3X^2 + 1$.

(1) Montrer que toutes les racines complexes de P sont simples.

(2) Calculer la somme des carrés des racines complexes de P.

Correction 10.187 (1)
On a $P' = 3X^2 + 6X = X(3X + 6)$.

Donc P' a pour racines 0 et -2.

Or $P(0) = 1 \neq 0$ et $P(-2) = 5 \neq 0$.

Donc P' et P n'admettent aucune racine commune.

Donc P n'admet aucune racine double.

Donc toutes les racines de P sont simples.

Correction 10.188 (2)
Notons $x, y, z \in \mathbb{C}$ les racines de P.

On a $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$.

Donc

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) \\ &= \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \\ &= (-3)^2 - 2 \times 0 \\ &= 9. \end{aligned}$$

10.4 Fractions rationnelles

10.4.1 Corps des fractions rationnelles

Le corps $\mathbb{K}(X)$ se construit à partir de l'anneau intègre $\mathbb{K}[X]$ exactement comme le corps $\mathbb{Q}$ se construit à partir de l'anneau intègre $\mathbb{Z}$ (plus généralement, on peut associer à tout anneau intègre sont « corps des fractions »).

Cette construction n'est pas difficile, mais elle est hors-programme (et n'apporte rien en pratique). On se contente donc de la définition suivante, qui décrit ce qu'il faut savoir en admettant l'existence du corps $\mathbb{K}(X)$.

Définition 10.189 (Fractions rationnelles)
Le corps des fractions rationnelles en l'indéterminée X à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un corps noté $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ tel que :

(1) L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{K}(X), +, \times)$.

(2) Tout élément de $\mathbb{K}(X)$ est le quotient de deux éléments de $\mathbb{K}[X]$:

$$\forall F \in \mathbb{K}(X), \quad \exists A \in \mathbb{K}[X], \quad \exists B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}, \quad F = \frac{A}{B}.$$

À retenir :

- Les fractions rationnelles sont les quotients $\dfrac{A}{B}$ où $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.

- Savoir reconnaître deux écritures de la même fraction rationnelle :

$$\forall A, C \in \mathbb{K}[X], \quad \forall B, D \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}, \quad \frac{A}{B} = \frac{C}{D} \iff AD = BC.$$

- Tout polynôme $A \in \mathbb{K}[X]$ est une fraction rationnelle : $A = \dfrac{A}{1}$.

- Connaître enfin la structure de corps $(\mathbb{K}(X), +, \times)$:

  On considère des polynômes $A, C \in \mathbb{K}[X]$ et $B, D \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.

  On a la somme et le produit :

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + BC}{BD} \qquad \text{et} \qquad \frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}.$$

  L'élément neutre de la somme est la fraction rationnelle nulle, qui est aussi le polynôme nul : $0 = \dfrac{0}{1}$.

  L'élément neutre du produit est le polynôme constant $1 = \dfrac{1}{1}$.

  L'opposé de $\dfrac{A}{B}$ est $\dfrac{-A}{B}$.

  Si $A \neq 0$, l'inverse de $\dfrac{A}{B}$ est $\dfrac{B}{A}$.

Définition/Proposition 10.190 (Forme irréductible d'une fraction rationnelle)
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$.

Il existe un unique couple $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$ tel que :

$$F = \frac{A}{B} \qquad \text{et} \qquad A \wedge B = 1 \qquad \text{et} \qquad B \text{ est unitaire.}$$

On appelle forme irréductible de F toute écriture de F sous la forme

$$F = \frac{A}{B} \qquad \text{avec } A \wedge B = 1.$$

Démonstration 10.191
⋆⋆ **Exercice** ⋆⋆ (*cf.* Démonstration 8.61). ■

Notation 10.192
Soit $\mathbb{L}$ un corps tel que $\mathbb{K}$ soit un sous-anneau de $\mathbb{L}$.

Soient $F \in \mathbb{K}(X)$ et $x \in \mathbb{L}$.

On considère une forme irréductible de F :

$$F = \frac{A}{B} \qquad \text{avec} \begin{cases} A \in \mathbb{K}[X] \\ B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\} \\ A \wedge B = 1 \end{cases}$$

On a déjà défini les éléments $A(x) \in \mathbb{L}$ et $B(x) \in \mathbb{L}$ (*cf.* Notation 10.4).

Si $B(x) \neq 0$ alors on note $F(x)$ l'élément de $\mathbb{L}$:

$$F(x) = \frac{A(x)}{B(x)}.$$

On dit que $F(x)$ est l'élément obtenu en évaluant F en x.

Exemple 10.193
On garde les notations précédentes.

Si $\mathscr{L}(=, \mathbb{K})$ alors la notation $F(\lambda)$ est valide pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ qui n'est pas racine de B.

Si $\mathscr{L}(=, \mathbb{K}(X))$ alors la notation $F(G)$ est valide pour tout $G \in \mathbb{K}(X)$ sauf les polynômes constants qui sont racines de B.

On dit que $F(G)$ est la composition des fractions rationnelles F et G (qu'on note parfois $F \circ G$).

En particulier, on a le droit d'écrire $F = F(X)$.

Définition 10.194 (Conjugaison)

Soient $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{C}(X)$ (avec $A \in \mathbb{C}[X]$ et $B \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$).

On appelle conjuguée de F la fraction rationnelle

$$\overline{F} = \frac{\overline{A}}{\overline{B}}.$$

Elle ne dépend pas du choix de A et B.

Proposition 10.195
La conjugaison

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}(X) & \longrightarrow & \mathbb{C}(X) \\ F & \longmapsto & \overline{F} \end{array}$$

est un automorphisme d'anneau.

Démonstration 10.196
⋆⋆ **Exercice** ⋆⋆ ■

10.4.2 Degré

Définition 10.197 (Degré d'une fraction rationnelle)
Soit $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ (avec $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$).

Le degré de F est :

$$\deg F = \deg A - \deg B.$$

Le degré de F ne dépend pas du choix de A et B, et appartient à $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$.

Si F est un polynôme, son degré comme fraction rationnelle coïncide avec son degré comme polynôme.

Proposition 10.198
Soient $F, G \in \mathbb{K}(X)$.

On a :

(1) $\deg(F+G) \leqslant \max\{\deg F \,;\, \deg G\}$ *avec égalité si* $\deg F \neq \deg G$

(2) $\deg FG = \deg F + \deg G$

(3) $\deg \dfrac{1}{F} = -\deg F$.

Démonstration 10.199 (Globale)
Soient $A, C \in \mathbb{K}[X]$ et $B, D \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ tels que $F = \dfrac{A}{B}$ et $G = \dfrac{C}{D}$. ■

Démonstration 10.200 (1)
On a :

$$\begin{aligned}
\deg(F+G) &= \deg\left(\frac{A}{B}+\frac{C}{D}\right)\\
&= \deg\frac{AD+BC}{BD}\\
&= \deg(AD+BC)-\deg BD\\
&\leqslant \max\{\deg AD\ ;\ \deg BC\}-\deg BD \qquad (*)\\
&= \max\{\deg AD-\deg BD\ ;\ \deg BC-\deg BD\}\\
&= \max\{\deg A-\deg B\ ;\ \deg C-\deg D\}\\
&= \max\{\deg F\ ;\ \deg G\}.
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
(*) \text{ est une égalité } &\Longleftarrow \deg AD \neq \deg BC\\
&\Longleftrightarrow \deg A+\deg D \neq \deg B+\deg C\\
&\Longleftrightarrow \deg\frac{A}{B} \neq \deg\frac{C}{D}\\
&\Longleftrightarrow \deg F \neq \deg G.
\end{aligned}$$

■

Démonstration 10.201 (2)
On a :

$$\begin{aligned}
\deg FG &= \deg\frac{AC}{BD}\\
&= \deg AC-\deg BD\\
&= \deg A+\deg C-\deg B-\deg D\\
&= \deg\frac{A}{B}+\deg\frac{C}{D}\\
&= \deg F+\deg G.
\end{aligned}$$

■

Démonstration 10.202 (3)
On a :

$$\begin{aligned}
\deg\frac{1}{F} &= \deg\frac{B}{A}\\
&= \deg B-\deg A\\
&= -\deg F.
\end{aligned}$$

■

Définition/Proposition 10.203 (Partie entière d'une fraction rationnelle)
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$.

Il existe un unique couple $(E, G) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X)$ tel que $\begin{cases} F = E + G \\ \deg G < 0 \end{cases}$

Le polynôme E est appelé la partie entière de F.

Démonstration 10.204
$\boxed{\text{existence}}$

Soient $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ tels que $F = \dfrac{A}{B}$.

Soient $Q, R \in \mathbb{K}[X]$ le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B : $\begin{cases} A = QB + R \\ \deg R < \deg B \end{cases}$

On a :

$$\begin{aligned} F &= \frac{A}{B} \\ &= \frac{QB + R}{B} \\ &= \underbrace{Q}_{\in \mathbb{K}[X]} + \underbrace{\frac{R}{B}}_{\substack{\in \mathbb{K}(X) \\ \deg < 0}} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{unicité}}$

Soient $E_1, E_2 \in \mathbb{K}[X]$ et $G_1, G_2 \in \mathbb{K}(X)$ tels que $\begin{cases} F = E_1 + G_1 = E_2 + G_2 \\ \deg G_1 < 0 \\ \deg G_2 < 0 \end{cases}$

On a $E_1 - E_2 = G_2 - G_1$.

Donc $\underbrace{\deg(E_1 - E_2)}_{\in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}} = \underbrace{\deg(G_2 - G_1)}_{<0}$.

Donc $\deg(E_1 - E_2) = -\infty$.

Donc $E_1 = E_2$.

Donc $G_1 = G_2$. ∎

Remarque 10.205
Soient $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.

La partie entière de la fraction rationnelle $\dfrac{A}{B}$ est :

- nulle si, et seulement si, $\deg A < \deg B$;

- de degré $\deg A - \deg B$ sinon.

Exercice 10.206
Donner la partie entière de $F = \dfrac{X+1}{X-1}$ et de $G = \dfrac{X^8+7}{X^4+X^2-1}$.

Correction 10.207
On a

$$\begin{aligned} F &= \frac{X+1}{X-1} \\ &= \frac{X-1+2}{X-1} \\ &= \underbrace{1}_{\in \mathbb{R}[X]} + \underbrace{\frac{2}{X-1}}_{\deg < 0} \end{aligned}$$

Donc la partie entière de F est 1.

On calcule la division euclidienne de X^8+7 par X^4+X^2-1 :

$$\begin{array}{rrrrr|l}
X^8 & & & & +7 & X^4+X^2-1 \\ \cline{6-6}
-X^8 & -X^6 & +X^4 & & & X^4-X^2+2 \\ \cline{1-3}
 & -X^6 & +X^4 & & & \\
 & X^6 & +X^4 & -X^2 & & \\ \cline{2-4}
 & & 2X^4 & -X^2 & +7 & \\
 & & -2X^4 & -2X^2 & +2 & \\ \cline{3-5}
 & & & -3X^2 & +9 &
\end{array}$$

Donc $X^8+7 = \left(X^4+X^2-1\right)\left(X^4-X^2+2\right) - 3X^2 + 9$.

Donc $G = X^4 - X^2 + 2 + \underbrace{\dfrac{-3X^2+9}{X^4+X^2-1}}_{\deg<0}$.

Donc la partie entière de G est $X^4 - X^2 + 2$.

10.4.3 Racines, pôles

Définition 10.208 (Racines, pôles)
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$.

On considère une forme irréductible de F :

$$F = \frac{A}{B} \qquad \text{avec } \begin{cases} A \in \mathbb{K}[X] \\ B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\} \\ A \wedge B = 1 \end{cases}$$

On appelle racines de F les racines de A et pôles de F les racines de B.

De plus, la multiplicité d'une racine de F est sa multiplicité comme racine de A et la multiplicité d'un pôle de F est sa multiplicité comme racine de B.

Exemple 10.209

Si $F = \dfrac{(X-1)(X+2)^3}{(X-4)(X-5)^6}$ alors $\begin{cases} 1 \text{ est racine simple de } F \\ -2 \text{ est racine triple de } F \\ 4 \text{ est pôle simple de } F \\ 5 \text{ est pôle sextuple de } F \end{cases}$

Proposition 10.210
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$.

Alors F admet une infinité de racines si, et seulement si, F est nulle.

Démonstration 10.211
Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\begin{cases} F = \dfrac{A}{B} \\ A \wedge B = 1 \end{cases}$

Les racines de F sont les racines de A.

Donc on a :

$$\begin{aligned} F \text{ admet une infinité de racines} &\iff A \text{ admet une infinité de racines} \\ &\iff A = 0 \\ &\iff F = 0. \end{aligned}$$

■

Remarque 10.212
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$.

F admet un nombre fini de pôles.

Définition 10.213 (Fonction rationnelle)
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$.

On note Z l'ensemble des pôles de F (c'est une partie finie de $\mathbb{K}$).

La fonction rationnelle associée à F est la fonction

$$\begin{array}{rccc} \tilde{F}: & \mathbb{K} \setminus Z & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & F(x) \end{array}$$

10.4.4 Dérivation

Définition/Proposition 10.214 (Dérivée d'une fraction rationnelle)

Soient $F \in \mathbb{K}(X)$ et $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ tels que $F = \dfrac{A}{B}$.

La fraction rationnelle

$$\frac{A'B - AB'}{B^2}$$

ne dépend pas du choix de A et B.

On l'appelle la fraction rationnelle dérivée de F et on la note F'.

Remarque 10.215 (Lien entre dérivation des fractions rationnelles et des fonctions)
Soit $F \in \mathbb{R}(X)$.

La fonction rationnelle associée à F' est la dérivée de la fonction rationnelle associée à F :

$$\widetilde{F'} = \left(\tilde{F}\right)'.$$

En particulier, toute fonction rationnelle est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Proposition 10.216 (Opérations algébriques sur les dérivées)
Soient $F, G \in \mathbb{K}(X)$ *et* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

On a la somme :
$$(F+G)' = F' + G'.$$

On a, plus généralement :
$$(\lambda F + \mu G)' = \lambda F' + \mu G'.$$

On a le produit :
$$(FG)' = F'G + FG'.$$

On a le quotient :
$$\left(\frac{F}{G}\right)' = \frac{F'G - FG'}{G^2}.$$

On a la composition :
$$(F \circ G)' = G' \times (F' \circ G).$$

Démonstration 10.217
⋆⋆ Exercice ⋆⋆ ■

10.4.5 Décomposition en éléments simples

10.4.5.1 Le théorème

Définition 10.218 (Élément simple)
On appelle élément simple (sur $\mathbb{K}$) toute fraction rationnelle F de la forme
$$F = \frac{P}{Q^\alpha} \qquad \text{avec} \begin{cases} P, Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\} \\ \alpha \in \mathbb{N}^* \\ Q \text{ irréductible (sur } \mathbb{K}) \\ \deg P < \deg Q \end{cases}$$

Exemple 10.219
Éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$:
$$\frac{4}{X+1} \qquad \frac{5}{(X+1)^3} \qquad \frac{1}{X^5}$$

Éléments simples sur $\mathbb{R}$ mais pas sur $\mathbb{C}$:
$$\frac{2X+1}{X^2+1} \qquad \frac{X}{(X^2+1)^3}$$

Remarque 10.220
Le principal résultat de ce paragraphe affirme que toute fraction rationnelle s'écrit de façon unique comme la somme d'un polynôme et d'éléments simples.

Il faut savoir écrire le théorème sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.

Voici d'abord la forme générale du théorème (hors-programme, mais elle peut aider à mieux retenir les deux formes au programme) :

Théorème 10.221 (Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{K}$)
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$.

Soient $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ tels que :

$$F = \frac{A}{B} \qquad \text{et} \qquad A \wedge B = 1 \qquad \text{et} \qquad B \text{ est unitaire.}$$

Considérons la décomposition de B en produit de polynômes irréductibles : soient les polynômes irréductibles unitaires deux à deux distincts $Q_1, \dots, Q_r \in \mathbb{K}[X]$ (avec $r \in \mathbb{N}$) et les entiers $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$B = Q_1^{\alpha_1} \dots Q_r^{\alpha_r}.$$

Alors il existe un polynôme $E \in \mathbb{K}[X]$ et un polynôme $P_{i\gamma}$ pour tout couple d'entiers (i, γ) tel que $1 \leqslant i \leqslant r$ et $1 \leqslant \gamma \leqslant \alpha_i$ tels que :

$$\frac{A}{B} = E + \sum_{i=1}^{r} \sum_{\gamma=1}^{\alpha_i} \frac{P_{i\gamma}}{Q_i^{\gamma}} \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1\,;\,r]\!],\ \forall \gamma \in [\![1\,;\,\alpha_i]\!],\ \deg P_{i\gamma} < \deg Q_i.$$

Ces polynômes E et $P_{i\gamma}$ sont uniques.

Le polynôme E est la partie entière de F.

Démonstration 10.222
⋆⋆ **Admis** ⋆⋆ (hors-programme). ■

Théorème 10.223 (Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$)
Soit $F \in \mathbb{C}(X)$.

Soient $A \in \mathbb{C}[X]$ et $B \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ tels que

$$F = \frac{A}{B} \qquad \text{et} \qquad A \wedge B = 1 \qquad \text{et} \qquad B \text{ est unitaire.}$$

Considérons la décomposition de B en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$:

$$B = (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X - \lambda_r)^{\alpha_r} \qquad \text{avec} \begin{cases} r \in \mathbb{N} \\ \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C} \text{ deux à deux distincts} \\ \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Alors il existe un polynôme $E \in \mathbb{C}[X]$ et un nombre complexe $x_{i\gamma}$ pour tout couple d'entiers (i, γ) tel que $1 \leqslant i \leqslant r$ et $1 \leqslant \gamma \leqslant \alpha_i$ tels que :

$$\frac{A}{B} = E + \sum_{i=1}^{r} \sum_{\gamma=1}^{\alpha_i} \frac{x_{i\gamma}}{(X - \lambda_i)^\gamma}.$$

Ce polynôme E et ces nombres complexes $x_{i\gamma}$ sont uniques.

Le polynôme E est la partie entière de F.

Démonstration 10.224
⋆⋆ **Admis** ⋆⋆ (hors-programme ; découle du Théorème 10.221). ■

Théorème 10.225 (Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$)
Soit $F \in \mathbb{R}(X)$.

Soient $A \in \mathbb{R}[X]$ et $B \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ tels que

$$F = \frac{A}{B} \qquad \text{et} \qquad A \wedge B = 1 \qquad \text{et} \qquad B \text{ est unitaire.}$$

Considérons la décomposition de B en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$:

$$B = (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X - \lambda_r)^{\alpha_r} \times \left(X^2 + b_1 X + c_1\right)^{\beta_1} \dots \left(X^2 + b_s X + c_s\right)^{\beta_s}$$

$$\text{avec } \begin{cases} r, s \in \mathbb{N} \\ \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R} \text{ deux à deux distincts} \\ (b_1, c_1), \dots, (b_s, c_s) \in \mathbb{R}^2 \text{ deux à deux distincts} \\ \text{les facteurs de degré 2 sont irréductibles, c'est-à-dire } \forall i \in [\![1\,;\,s]\!],\ \ b_i^2 - 4c_i < 0 \\ \alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Alors il existe :

- *un polynôme $E \in \mathbb{R}[X]$;*
- *un réel $x_{i\gamma}$ pour tout couple d'entiers (i, γ) tel que $1 \leqslant i \leqslant r$ et $1 \leqslant \gamma \leqslant \alpha_i$;*
- *deux réels $y_{i\gamma}, z_{i\gamma}$ pour tout couple d'entiers (i, γ) tel que $1 \leqslant i \leqslant s$ et $1 \leqslant \gamma \leqslant \beta_i$*

tels que :

$$\frac{A}{B} = E + \sum_{i=1}^{r} \sum_{\gamma=1}^{\alpha_i} \frac{x_{i\gamma}}{(X - \lambda_i)^\gamma} + \sum_{i=1}^{s} \sum_{\gamma=1}^{\beta_i} \frac{y_{i\gamma} X + z_{i\gamma}}{\left(X^2 + b_i X + c_i\right)^\gamma}.$$

Ce polynôme E et ces réels $x_{i\gamma}, y_{i\gamma}, z_{i\gamma}$ sont uniques.

Le polynôme E est la partie entière de F.

Démonstration 10.226
⋆⋆ **Admis** ⋆⋆ (hors-programme ; découle du Théorème 10.221). ■

Définition 10.227 (Partie polaire associée au pôle λ)
Soient $F \in \mathbb{K}(X)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ un pôle de F dont on note α la multiplicité.

On appelle partie polaire de F associée au pôle λ la somme des éléments simples de pôle λ dans la décomposition en éléments simples de F.

Elle est de la forme
$$\sum_{\gamma=1}^{\alpha} \frac{x_\gamma}{(X-\lambda)^\gamma} \qquad \text{avec } x_1, \ldots, x_\alpha \in \mathbb{K}$$
et λ n'est pas un pôle de
$$F - \sum_{\gamma=1}^{\alpha} \frac{x_\gamma}{(X-\lambda)^\gamma}.$$

Exemple 10.228
On a les décompositions en éléments simples suivantes :

- Sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:
$$\frac{X^8+X+1}{X^4(X-1)^3} = X+3+\underbrace{\frac{22}{X-1}-\frac{3}{(X-1)^2}+\frac{3}{(X-1)^3}}_{\text{partie polaire associée à 1}}\underbrace{-\frac{16}{X}-\frac{9}{X^2}-\frac{4}{X^3}-\frac{1}{X^4}}_{\text{partie polaire associée à 0}}$$
- Sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:
$$\frac{4}{X^4-1} = \frac{1}{X-1} - \frac{1}{X+1} - \frac{2}{X^2+1}$$
- Sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:
$$\frac{4}{X^4-1} = \frac{1}{X-1} - \frac{1}{X+1} + \frac{i}{X-i} - \frac{i}{X+i}$$

Remarque 10.229
Il est simple de calculer des décompositions en éléments simples avec Python en utilisant le module `sympy`.

Par exemple :

```
>>> from sympy import apart, pprint
>>> from sympy.abc import x
>>> apart(1 / (x ** 2 + x))
-1/(x + 1) + 1/x
>>> pprint(apart(1 / (x ** 2 + x)))
    1     1
- ----- + -
  x + 1   x
```

Remarque 10.230
On verra que pour primitiver une fonction rationnelle réelle, on décompose la fraction rationnelle correspondante en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

On se ramène ainsi, via des changements de variables affines, à primitiver par rapport à t des expressions de la forme

$$\frac{1}{t-\lambda} \qquad \frac{1}{(t-\lambda)^{\alpha}} \qquad \frac{t}{1+t^2} \qquad \frac{t}{\left(1+t^2\right)^{\alpha}} \qquad \frac{1}{1+t^2} \qquad \frac{1}{\left(1+t^2\right)^{\alpha}}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in [\![2\,;+\infty[\![$.

Remarque 10.231
La décomposition en éléments simples suivantes est à retenir. On l'énonce sous deux formes équivalentes :

Proposition 10.232 (Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$ quand P est scindé)
Soit $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ scindé sur $\mathbb{K}$.

On a

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X-\lambda_k}$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ sont les racines de P comptées avec multiplicité.

Proposition 10.233 (Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$ quand P est scindé)
Soit $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ scindé sur $\mathbb{K}$.

On a

$$\frac{P'}{P} = \sum_{j=1}^{r} \frac{\alpha_j}{X-\mu_j}$$

où $\mu_1, \ldots, \mu_r \in \mathbb{K}$ sont les racines de P comptées sans multiplicité et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}^*$ leurs multiplicités respectives.

Démonstration 10.234
On a, en notant μ le coefficient dominant de P :

$$P = \mu\,(X-\lambda_1)\ldots(X-\lambda_n)\,.$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{P'}{P} &= \frac{\mu \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \prod_{j \in [\![1;n]\!] \setminus \{k\}} \left(X-\lambda_j\right)}{\mu \displaystyle\prod_{j=1}^{n} \left(X-\lambda_j\right)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X-\lambda_k}.\end{aligned}$$

■

Exemple 10.235
Si $P = 5\,(X-7)^3\,(X-9)$ alors
$$\frac{P'}{P} = \frac{3}{X-7} + \frac{1}{X-9}.$$

10.4.5.2 Quelques méthodes de calcul

Remarque 10.236
Les méthodes qui suivent servent à obtenir la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle de degré strictement négatif.

Méthode 10.237 (Fonctionne à tous les coups, mais à éviter car très calculatoire)
Mettre au même dénominateur puis identifier.

Cette méthode peut aussi être utilisée après les autres pour trouver les coefficients qui résistent.

Exemple 10.238
On pose $F = \dfrac{X}{X^2-1}$.

On a $X^2 - 1 = (X-1)\,(X+1)$.

La partie entière de F est nulle car $\deg F < 0$.

On a $F = \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{X+1}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Donc $F = \dfrac{a\,(X+1) + b\,(X-1)}{(X-1)\,(X+1)} = \dfrac{(a+b)\,X + a - b}{X^2-1}$.

Donc $\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=0 \end{cases}$

Donc $a = b = 0{,}5$.

D'où
$$F = \frac{0{,}5}{X+1} + \frac{0{,}5}{X-1}.$$

Méthode 10.239 (Classique)
Si λ est un pôle de multiplicité α de F : multiplier par $(X-\lambda)^\alpha$ puis évaluer en α.

Exemple 10.240
On pose $F = \dfrac{X^4+1}{(X-1)^2\,(X-2)^3}$.

On a $F = 0 + \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{(X-1)^2} + \dfrac{c}{X-2} + \dfrac{d}{(X-2)^2} + \dfrac{e}{(X-2)^3}$ avec $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$.

On multiplie par $(X-1)^2$ et on évalue en 1 ; on obtient $b = -2$.

On multiplie par $(X-2)^3$ et on évalue en 2 ; on obtient $e = 17$.

On a donc

$$F = \frac{a}{X-1} - \frac{2}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-2} + \frac{d}{(X-2)^2} + \frac{17}{(X-2)^3}.$$

De plus, on a

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{1\,;\,2\}\,,\quad t\frac{t^4+1}{(t-1)^2\,(t-2)^3} = \frac{at}{t-1} - \frac{2t}{(t-1)^2} + \frac{ct}{t-2} + \frac{dt}{(t-2)^2} + \frac{17t}{(t-2)^3}.$$

Donc quand $t \longrightarrow +\infty$: $1 = a + c$.

⋆⋆ Fin en exercice ⋆⋆

Méthode 10.241 (Pour obtenir des informations sur les coefficients)

- Évaluer la fraction rationnelle en un point.

- Multiplier la fraction rationnelle par une puissance de X et évaluer sa limite en $+\infty$.

Méthode 10.242 (Cas d'une fraction rationnelle réelle)

- On peut faire sa décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ puis regrouper les éléments simples conjugués pour en déduire la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

- Lorsqu'on fait sa décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$, on peut remarquer que la partie polaire de pôle λ et la partie polaire de pôle $\overline{\lambda}$ sont conjuguées (d'après l'unicité de la décomposition en éléments simples).

Exemple 10.243
On pose $F = \dfrac{X+1}{X^2+X+1} \in \mathbb{R}(X)$.

La partie entière de F est nulle car $\deg F < 0$.

On a $X^2 + X + 1 = (X-j)\left(X-j^2\right)$.

D'où la décomposition en éléments simples :

$$F = \frac{a}{X-j} + \frac{b}{X-j^2} \qquad \text{avec } a, b \in \mathbb{C}.$$

Or $F = \overline{F} = \dfrac{\overline{a}}{X - j^2} + \dfrac{\overline{b}}{X - j}$ (car $j^2 = \overline{j}$).

D'où, par unicité de la décomposition en éléments simples : $\begin{cases} a = \overline{b} \\ \overline{a} = b \end{cases}$

On multiplie par $X - j$ et on évalue en j ; on obtient

$$\begin{aligned} a &= \frac{j+1}{j - j^2} \\ &= \frac{-j^2}{i\sqrt{3}} \\ &= \frac{i j^2}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\frac{-i\pi}{6}}}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

D'où

$$F = \frac{\frac{\mathrm{e}^{\frac{-i\pi}{6}}}{\sqrt{3}}}{X - j} + \frac{\frac{\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{6}}}{\sqrt{3}}}{X - j^2}.$$

Exemple 10.244
On pose $F = \dfrac{1}{X\left(X^2+1\right)^2}$.

Déterminons la décomposition en éléments simples de F sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$.

La partie entière de F est nulle car $\deg F < 0$.

On a $X\left(X^2+1\right)^2 = X\,(X+i)^2\,(X-i)^2$.

D'où la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$:

$$F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-i} + \frac{c}{(X-i)^2} + \frac{d}{X+i} + \frac{e}{(X+i)^2} \qquad \text{avec } a, b, c, d, e \in \mathbb{C}.$$

Or $F = \overline{F} = \dfrac{\overline{a}}{X} + \dfrac{\overline{b}}{X+i} + \dfrac{\overline{c}}{(X+i)^2} + \dfrac{\overline{d}}{X-i} + \dfrac{\overline{e}}{(X-i)^2}$.

D'où, par une unicité de la décomposition en éléments simples : $\begin{cases} a = \overline{a} \\ b = \overline{d} \\ e = \overline{c} \end{cases}$

On multiplie par X et on évalue en 0 ; on obtient $a = 1$.

On multiplie par $(X-i)^2$ et on évalue en i ; on obtient $c = \dfrac{i}{4}$.

On multiplie par X et on prend la limite en $+\infty$; on obtient $b = \dfrac{-1}{2}$.

Finalement, F est impaire donc on a

$$\begin{aligned} F &= -F(-X) \\ &= \frac{-a}{-X} + \frac{-b}{-X-i} + \frac{-c}{(-X-i)^2} + \frac{-d}{-X+i} + \frac{-e}{(-X+i)^2} \\ &= \frac{a}{X} + \frac{b}{X+i} - \frac{c}{(X+i)^2} + \frac{d}{X-i} - \frac{e}{(X-i)^2}. \end{aligned}$$

D'où, par unicité de la décomposition en éléments simples : $\begin{cases} b = d \\ c = -e \end{cases}$

D'où

$$F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-i} + \frac{c}{(X-i)^2} + \frac{b}{X+i} - \frac{c}{(X+i)^2}.$$

D'où la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$:

$$F = \frac{1}{X} - \frac{1}{2(X-i)} + \frac{i}{4(X-i)^2} - \frac{1}{2(X+i)} - \frac{i}{4(X+i)^2}.$$

On en déduit la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{X} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{X+i} + \frac{1}{X-i}\right) + \frac{i}{4}\left(\frac{1}{(X-i)^2} - \frac{1}{(X+i)^2}\right) \\ &= \frac{1}{X} - \frac{1}{2} \times \frac{2X}{X^2+1} + \frac{i}{4} \times \frac{4iX}{\left(X^2+1\right)^2} \\ &= \frac{1}{X} - \frac{X}{X^2+1} - \frac{X}{\left(X^2+1\right)^2}. \end{aligned}$$

Remarque 10.245 (Astuce)
On aurait aussi pu ruser :

$$\begin{aligned} \frac{1}{X\left(X^2+1\right)^2} &= \frac{X^2+1-X^2}{X\left(X^2+1\right)^2} \\ &= \frac{1}{X\left(X^2+1\right)} - \frac{X}{\left(X^2+1\right)^2} \\ &= \frac{X^2+1-X^2}{X\left(X^2+1\right)} - \frac{X}{\left(X^2+1\right)^2} \\ &= \frac{1}{X} - \frac{X}{X^2+1} - \frac{X}{\left(X^2+1\right)^2}. \end{aligned}$$

Méthode 10.246
La proposition suivante :

Proposition 10.247 (Cas des pôles simples)

Soient $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ *une fraction rationnelle écrite sous forme irréductible et* $\lambda \in \mathbb{K}$ *un pôle simple de* F *(c'est-à-dire une racine simple de* B*).*

Alors l'élément simple de pôle λ *dans la décomposition en éléments simples de* F *est :*

$$\frac{\frac{A(\lambda)}{B'(\lambda)}}{X - \lambda}.$$

Démonstration 10.248
On sait que la décomposition en éléments simples de F s'écrit

$$\frac{A}{B} = \underbrace{\frac{\mu}{X - \lambda}}_{\substack{\text{partie polaire} \\ \text{associée à } \lambda}} + \underbrace{G}_{\substack{\text{la somme des autres} \\ \text{parties polaires} \\ \text{et de la partie} \\ \text{entière de } F}}$$

où $\mu \in \mathbb{K}$ et $G \in \mathbb{K}(X)$ telle que λ n'est pas un pôle de G.

λ est racine simple de B donc $X - \lambda \mid B$.

Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = (X - \lambda) Q$.

On a $B' = Q + (X - \lambda) Q'$.

Donc $B'(\lambda) = Q(\lambda) + 0$.

En multipliant la décomposition en éléments simples par $X - \lambda$, on a :

$$\frac{A}{Q} = \mu + (X - \lambda) G.$$

Puis en évaluant en λ : $\dfrac{A(\lambda)}{Q(\lambda)} = \mu$.

D'où

$$\mu = \frac{A(\lambda)}{B'(\lambda)}.$$

■

Exercice 10.249
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On pose $F = \dfrac{1}{X^n - 1}$.

(1) Donner la décomposition en éléments simples de F sur $\mathbb{C}$.

(2) En déduire la décomposition en éléments simples de F sur $\mathbb{R}$.

Correction 10.250 (1)
La partie entière de F est nulle car $\deg F < 0$.

On a $X^n - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega)$.

Donc on a la décomposition en éléments simples suivante :

$$F = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{\mu_\omega}{X - \omega}.$$

D'après la Proposition 10.247, on a

$$\forall \omega \in \mathbb{U}_n, \quad \mu_\omega = \frac{1}{n\omega^{n-1}} = \frac{\omega}{n} \text{ car } \omega^n = 1.$$

D'où la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$:

$$F = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{\omega}{n\,(X - \omega)}.$$

Correction 10.251 (2)
Si $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in [\![0 \,;\, n-1]\!]$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{\omega}{X - \omega} + \frac{\overline{\omega}}{X - \overline{\omega}} &= \frac{\omega\,(X - \overline{\omega}) + \overline{\omega}\,(X - \omega)}{(X - \omega)\,(X - \overline{\omega})} \\
&= \frac{2\,(\operatorname{Re}\omega)\,X - 2}{X^2 - 2\,(\operatorname{Re}\omega)\,X + 1} \\
&= \frac{2\left(\cos\frac{2k\pi}{n}\right)X - 2}{X^2 - 2\left(\cos\frac{2k\pi}{n}\right)X + 1}.
\end{aligned}$$

Donc, si n est pair, on a la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ suivante :

$$F = \frac{1}{n\,(X-1)} + \frac{-1}{n\,(X+1)} + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{\left(\cos\frac{2k\pi}{n}\right)X - 1}{X^2 - 2\left(\cos\frac{2k\pi}{n}\right)X + 1}.$$

Et si n est impair, on a la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ suivante :

$$F = \frac{1}{n\left(X-1\right)} + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} \frac{\left(\cos\frac{2k\pi}{n}\right)X-1}{X^2-2\left(\cos\frac{2k\pi}{n}\right)X+1}.$$

Chapitre 11

Intégrales sur un segment

Sommaire

Dans ce chapitre, on définit l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment. L'étude des intégrales de fonctions sur un intervalle autre qu'un segment sera faite en deuxième année.

Dans tout le chapitre, on pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on considère un segment $[a\,;b]$ de $\mathbb{R}$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$).

11.1 Définitions

11.1.1 Subdivisions d'un segment

Définition 11.1
On appelle subdivision de $[a\ ;\ b]$ toute suite finie strictement croissante $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de $[a\ ;\ b]$ telle que
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

L'application qui à une telle subdivision associe l'ensemble fini $\{x_1\ ;\ x_2\ ;\ \ldots\ ;\ x_{n-1}\}$ est une bijection de l'ensemble des subdivisions de $[a\ ;\ b]$ vers l'ensemble des parties finies de $]a\ ;\ b[$.

En pratique, on s'autorise à voir les subdivisions comme des ensembles finis et à parler, par exemple, de la subdivision réunion de deux subdivisions.

Définition 11.2
Soient σ et σ' deux subdivisions du segment $[a\ ;\ b]$.

On dit que σ' est plus fine que σ si on a
$$\sigma \subseteq \sigma'.$$

C'est-à-dire , du point de vue des suites finies : σ est une suite extraite de σ'.

Remarque 11.3
Pour toutes subdivisions σ_1 et σ_2 de $[a\ ;\ b]$, il existe une subdivision σ_3 plus fine que σ_1 et σ_2.

Définition 11.4
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle subdivision régulière de pas $\dfrac{1}{n}$ la subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ définie par :
$$\forall k \in [\![0\ ;\ n]\!]\,,\ \ x_k = a + \frac{k}{n}\,(b-a)\,.$$

11.1.2 Fonctions en escalier

Définition 11.5
On dit qu'une fonction $\varphi : [a\ ;\ b] \longrightarrow \mathbb{K}$ est en escalier s'il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ de $[a\ ;\ b]$ telle que :
$$\forall j \in [\![0\ ;\ n-1]\!]\,,\ \ \varphi\big|_{]x_j;x_{j+1}[} \text{ est constante,}$$
c'est-à-dire si :
$$\forall j \in [\![0\ ;\ n-1]\!]\,,\ \ \forall t \in \left]x_j\ ;\ x_{j+1}\right[\,,\ \ \varphi(t) = \varphi\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right).$$

Une telle subdivision est dite adaptée à φ.

Exemple 11.6
La restriction à tout segment de la fonction « partie entière » est en escalier.

La restriction à tout segment de la fonction « signum » est en escalier.

Notation 11.7 (Non-officielle)
On notera $\mathrm{Esc}\left([a\ ;\ b]\,,\mathbb{K}\right)$ l'ensemble des fonctions en escalier de $[a\ ;\ b]$ vers $\mathbb{K}$.

C'est un sous-anneau de $\left(\mathscr{F}\left([a\ ;\ b]\,,\mathbb{K}\right),+,\times\right)$.

Remarque 11.8
Soient $\varphi_1,\varphi_2 \in \mathscr{F}\left([a\ ;\ b]\,,\mathbb{R}\right)$.

On pose $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2 \in \mathscr{F}\left([a\ ;\ b]\,,\mathbb{C}\right)$.

Alors la fonction φ est en escalier si, et seulement si, φ_1 et φ_2 sont en escalier.

Remarque 11.9
Soit $\varphi \in \mathscr{F}\left([a\ ;\ b]\,,\mathbb{R}\right)$ une fonction en escalier.

Alors l'ensemble image $\mathrm{Im}\,\varphi$ est fini.

En particulier, la fonction φ est bornée.

11.1.3 Fonctions continues par morceaux

Définition 11.10 (Fonction continue par morceaux sur un segment)
On dit qu'une fonction $f : [a\ ;\ b] \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue par morceaux s'il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ de $[a\ ;\ b]$ telle que :

$$\forall j \in [\![0\ ;\ n-1]\!]\,,\quad f\big|_{]x_j;x_{j+1}[} \text{ admet un prolongement continu à } \left[x_j\ ;\ x_{j+1}\right],$$

c'est-à-dire si

$$\begin{cases} \forall j \in [\![0\ ;\ n-1]\!]\,,\quad f\big|_{]x_j;x_{j+1}[} \text{ est continue} \\ \forall j \in [\![0\ ;\ n-1]\!]\,,\quad f \text{ admet une limite finie à droite en } x_j \\ \forall j \in [\![1\ ;\ n]\!]\,,\quad f \text{ admet une limite finie à gauche en } x_j \end{cases}$$

Une telle subdivision est dite adaptée à f.

Exemple 11.11
Toute fonction en escalier est continue par morceaux.

Toute fonction continue est continue par morceaux.

La fonction $f : \begin{array}{ccc} [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$ n'est pas continue par morceaux (elle est continue sur $]0\,;1]$ mais n'admet pas de limite finie en 0^+).

Notation 11.12 (Non-officielle)
On notera $\mathscr{C}_m^0([a\,;b],\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux de $[a\,;b]$ vers $\mathbb{K}$.

C'est un sous-anneau de l'anneau $(\mathscr{F}([a\,;b],\mathbb{K}),+,\times)$.

Remarque 11.13
Soient $\varphi_1,\varphi_2 \in \mathscr{F}([a\,;b],\mathbb{R})$.

On pose $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2 \in \mathscr{F}([a\,;b],\mathbb{C})$.

Alors la fonction φ est continue par morceaux si, et seulement si, φ_1 et φ_2 sont continues par morceaux.

Remarque 11.14
Toute fonction continue par morceaux sur un segment est bornée (mais n'atteint pas forcément ses bornes).

Remarque 11.15
Toute fonction continue par morceaux est la somme d'une fonction continue et d'une fonction en escalier.

Démonstration 11.16
On raisonne par récurrence sur le nombre (nécessairement fini) de points où la fonction continue par morceaux n'est pas continue.

⋆⋆ **Exercice** ⋆⋆ : montrer que l'écriture comme somme d'une fonction continue et d'une fonction en escalier est unique à une constante additive près. ■

11.1.4 Intégrales

11.1.4.1 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 11.17
Soient $\varphi \in \text{Esc}([a\ ;\ b], \mathbb{K})$ et $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ une subdivision adaptée à φ.

La valeur de la somme
$$\sum_{j=0}^{n-1} \left(x_{j+1} - x_j\right) \varphi\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right)$$
ne dépend pas de la subdivision choisie.

On l'appelle intégrale de φ sur $[a\ ;\ b]$ et on la note :
$$\int_{[a;b]} \varphi \qquad \text{ou} \qquad \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{ou} \qquad \int_a^b \varphi.$$

Exemple 11.18
On a :
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} \lfloor t \rfloor\,\mathrm{d}t &= \sum_{j=0}^{1} \left(x_{j+1} - x_j\right) \left\lfloor \frac{x_j + x_{j+1}}{2} \right\rfloor \\ &= (0+1)\left\lfloor \frac{0-1}{2} \right\rfloor + (1-0)\left\lfloor \frac{1+0}{2} \right\rfloor + (2-1)\left\lfloor \frac{2+1}{2} \right\rfloor \\ &= -1 + 0 + 1 \\ &= 0\end{aligned}$$

Remarque 11.19
Les propriétés suivantes (laissées en exercice) sont utiles pour définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux.

Proposition 11.20 (Linéarité de l'intégrale)
On a :
$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \ \forall \varphi, \psi \in \text{Esc}([a\ ;\ b], \mathbb{K}),\ \ \int_{[a;b]} (\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda \int_{[a;b]} \varphi + \mu \int_{[a;b]} \psi.$$

On dit que l'application $\begin{array}{ccc}\text{Esc}([a\ ;\ b], \mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \varphi & \longmapsto & \displaystyle\int_{[a;b]} \varphi\end{array}$ *est linéaire (cela signifie que l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images).*

Proposition 11.21 (Positivité et croissance de l'intégrale)
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$ et $\varphi, \psi \in \operatorname{Esc}([a\,;b], \mathbb{K})$.

On a

$$\varphi \geqslant 0 \implies \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0 \qquad \textit{(positivité)}$$

et

$$\varphi \leqslant \psi \implies \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \psi(t)\,\mathrm{d}t \qquad \textit{(croissance).}$$

11.1.4.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition/Théorème 11.22 (Cas d'une fonction à valeurs réelles)
Soit $f \in \mathscr{C}_m^0([a\,;b], \mathbb{K})$.

On note $\mathcal{E}_-$ l'ensemble des fonctions en escalier inférieurs à f :

$$\mathcal{E}_- = \{\varphi \in \operatorname{Esc}([a\,;b], \mathbb{K}) \mid \varphi \leqslant f\}$$

et $\mathcal{E}_+$ l'ensemble des fonctions en escalier supérieures à f :

$$\mathcal{E}_+ = \{\psi \in \operatorname{Esc}([a\,;b], \mathbb{K}) \mid f \leqslant \psi\}.$$

Les bornes supérieure et inférieure suivantes sont bien définies :

$$I_-(f) = \sup_{\varphi \in \mathcal{E}_-} \int_{[a;b]} \varphi \qquad \text{et} \qquad I_+(f) = \inf_{\psi \in \mathcal{E}_+} \int_{[a;b]} \psi.$$

De plus, elles ont la même valeur, que l'on appelle intégrale de f sur $[a\,;b]$ et qu'on note :

$$\int_{[a;b]} f \qquad \text{ou} \qquad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{ou} \qquad \int_a^b f.$$

En résumé :

$$\int_{[a;b]} f = I_-(f) = I_+(f).$$

Démonstration 11.23

L'ensemble $\left\{\int_{[a;b]} \varphi\right\}_{\varphi \in \mathcal{E}_-}$ est une partie non-vide de $\mathbb{R}$ car f est continue par morceaux sur son segment, donc bornée, donc minorée par un réel $m \in \mathbb{R}$ et donc la fonction constante égale à m appartient à $\mathcal{E}_-$, et majorée car f est majorée par un réel $M \in \mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\forall \varphi \in \mathcal{E}_-, \quad \varphi \leqslant f \leqslant M$$

et donc, selon la Proposition 11.21 :

$$\forall \varphi \in \mathcal{E}_-, \quad \int_{[a;b]} \varphi \leqslant \int_{[a;b]} M = (b-a)\, M.$$

Donc cet ensemble admet une borne supérieure. Donc $I_-(f)$ est bien définie.

Idem pour $I_+(f)$.

Montrons que $I_-(f) = I_+(f)$.

$\boxed{\leqslant}$

On a

$$\forall \varphi \in \mathcal{E}_-, \ \ \forall \psi \in \mathcal{E}_+, \ \ \varphi \leqslant f \leqslant \psi.$$

D'où, selon la Proposition 11.21 :

$$\forall \varphi \in \mathcal{E}_-, \ \ \forall \psi \in \mathcal{E}_+, \quad \int_{[a;b]} \varphi \leqslant \int_{[a;b]} \psi.$$

Donc, par définition de $I_+(f)$:

$$\forall \varphi \in \mathcal{E}_-, \quad \int_{[a;b]} \varphi \leqslant I_+(f)\,.$$

Et donc, par définition de I_- :

$$I_-(f) \leqslant I_+(f)\,.$$

$\boxed{\geqslant}$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Comme f est continue par morceaux, il existe $f_0 \in \mathscr{C}^0([a\,;\,b]\,,\mathbb{R})$ et $\varphi_0 \in \mathrm{Esc}([a\,;\,b]\,,\mathbb{K})$ telles que $f = f_0 + \varphi_0$.

Comme f_0 est continue sur un segment, elle est uniformément continue d'après le théorème de Heine.

Il existe donc $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall x, y \in [a\,;\,b]\,, \ \ |x-y| \leqslant \delta \implies |f_0(x) - f_0(y)| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{b-a}{n} \leqslant \delta$ (un tel entier existe car $\lim\limits_{n} \dfrac{b-a}{n} = 0$).

On définit $\varphi \in \mathcal{E}_-$ et $\psi \in \mathcal{E}_+$ en posant $\forall k \in [\![0\,;\,n]\!]\,, \ \ x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ et $\varphi(b) = \psi(b) = f(b)$ et

$$\forall k \in [\![0\,;\,n-1]\!]\,, \ \ \forall t \in [x_k\,;\,x_{k+1}[\,, \quad \begin{cases} \varphi(t) = \min\limits_{[x_k;x_{k+1}[} f_0 \\ \psi(t) = \max\limits_{[x_k;x_{k+1}[} f_0 \end{cases}$$

De plus, on a :

$$\forall k \in [\![0\,;\,n-1]\!]\,, \ \ \forall x, y \in [x_k\,;\,x_{k+1}[\,, \ \ |x-y| \leqslant \frac{b-a}{n} \leqslant \delta.$$

Donc, par définition de δ :

$$\forall k \in [\![0 ; n-1]\!], \quad \left|\min_{[x_k;x_{k+1}[} f_0 - \max_{[x_k;x_{k+1}[} f_0\right| \leqslant \varepsilon.$$

D'où $\forall t \in [a ; b], \ |\varphi(t) - \psi(t)| \leqslant \varepsilon$ donc $\forall t \in [a ; b], \ \psi(t) - \varphi(t) \leqslant \varepsilon$.

D'où $\psi \leqslant \varphi + \varepsilon$.

Finalement, on a obtenu :

$$\begin{cases} \varphi \leqslant f_0 \leqslant \psi \\ \psi \leqslant \varphi + \varepsilon \end{cases}$$

D'où, en posant $\varphi_1 = \varphi + \varphi_0$ et $\psi_1 = \psi + \psi_0$:

$$\begin{cases} \varphi_1 \leqslant f \leqslant \psi_1 \\ \psi_1 \leqslant \varphi_1 + \varepsilon \end{cases}$$

On a donc $\varphi_1 \in \mathcal{E}_-$ et $\psi_1 \in \mathcal{E}_+$ donc

$$\begin{cases} \displaystyle\int_a^b \varphi_1 \leqslant I_-(f) \\ \displaystyle\int_a^b \psi_1 \geqslant I_+(f) \end{cases}$$

Or $\psi_1 \leqslant \varphi_1 + \varepsilon$ donc

$$\int_a^b \psi_1 \leqslant \int_a^b \varphi_1 + (b-a)\,\varepsilon.$$

D'où

$$I_+(f) \leqslant \int_a^b \psi_1 \leqslant \int_a^b \varphi_1 + (b-a)\,\varepsilon \leqslant I_-(f) + (b-a)\,\varepsilon.$$

D'où, avec $\varepsilon \longrightarrow 0$:

$$I_+(f) \leqslant I_-(f).$$

Donc $I_-(f) = I_+(f)$. ■

Remarque 11.24
Seule l'intégration des fonctions continues par morceaux est au programme, mais la construction précédente (due au mathématicien Gaston Darboux) s'applique à toute fonction f bornée sur $[a ; b]$ (afin que les ensembles $\mathcal{E}_-$ et $\mathcal{E}_+$ ne soient pas vides) et telle que $I_-(f) = I_+(f)$. Une telle fonction est dite Riemann-intégrable ou Darboux-intégrable.

Par exemple, la fonction f de l'Exemple 11.11 n'est pas continue par morceaux mais est Riemann-intégrable.

Il existe une autre théorie plus récente (1901) et plus satisfaisante pour définir l'intégrale d'une fonction réelle ou complexe, due à Henri Lebesgue (hors-programme).

Définition 11.25 (Cas d'une fonction à valeurs complexes)
Soit $f \in \mathscr{C}_m^0([a\,;b],\mathbb{C})$.

On note $f_1, f_2 \in \mathscr{C}_m^0([a\,;b],\mathbb{R})$ les fonctions réelles telles que $f = f_1 + i f_2$.

L'intégrale de f sur $[a\,;b]$ est définie par :

$$\int_{[a;b]} f = \int_{[a;b]} f_1 + i \int_{[a;b]} f_2.$$

Remarque 11.26 (Pour se ramener à des fonctions continues)
Soient $f \in \mathscr{C}_m^0([a\,;b],\mathbb{K})$ et $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ une subdivision adaptée à f, c'est-à-dire telle que pour tout $j \in [\![0\,;n-1]\!]$, la fonction $f\big|_{]x_j;x_{j+1}[}$ admet un prolongement continu $g_j : \left[x_j\,;x_{j+1}\right] \longrightarrow \mathbb{K}$.

L'intégrale de f sur $[a\,;b]$ est alors

$$\int_{[a;b]} f = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} g_j(t)\,\mathrm{d}t.$$

Notation 11.27 (Généralisation)
Soit $f \in \mathscr{C}_m^0([a\,;b],\mathbb{K})$.

On pose :

$$\forall x, y \in [a\,;b],\quad \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \displaystyle\int_{[x;y]} f & \text{si } x < y \\ \displaystyle -\int_{[x;y]} f & \text{si } x > y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

11.2 Propriétés

11.2.1 Premières propriétés

Proposition 11.28 (Linéarité de l'intégrale)
On a :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \ \forall f, g \in \mathscr{C}_m^0([a\,;b],\mathbb{K}),\ \ \int_{[a;b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a;b]} f + \mu \int_{[a;b]} g.$$

On dit que l'application $\begin{array}{ccc} \mathscr{C}_m^0([a\,;b],\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_{[a;b]} f \end{array}$ *est linéaire.*

Remarque 11.29
Soient $f, g \in \mathscr{C}_m^0([a\,;b], \mathbb{K})$.

Si f et g coïncident sauf en un nombre fini de points, alors

$$\int_{[a;b]} f = \int_{[a;b]} g.$$

Démonstration 11.30
$g - f$ est une fonction en escalier nulle partout sauf en un nombre fini de points donc $\displaystyle\int_a^b (g-f) = 0$.

D'où, par linéarité de l'intégrale : $\displaystyle\int_a^b g - \int_a^b f = 0$. ■

Proposition 11.31 (Relation de Chasles)
Soit $f \in \mathscr{C}_m^0([a\,;b], \mathbb{K})$.

On a :

$$\forall x, y, z \in [a\,;b], \quad \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^z f(t)\,\mathrm{d}t + \int_z^y f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 11.32 (Inégalité triangulaire intégrale [1])
On a :

$$\forall f \in \mathscr{C}_m^0([a\,;b], \mathbb{K}), \quad \left|\int_{[a;b]} f\right| \leqslant \int_{[a;b]} |f|.$$

Proposition 11.33 (Positivité et croissance de l'intégrale)
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ *tels que* $a \leqslant b$ *et* $f, g \in \mathscr{C}_m^0([a\,;b], \mathbb{K})$.

On a

$$f \geqslant 0 \implies \int_a^b d(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0 \qquad \textit{(positivité)}$$

et

$$f \leqslant g \implies \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \qquad \textit{(croissance).}$$

1. Dans les programmes précédents (donc dans les annales de concours), cette inégalité était appelée « inégalité de la moyenne ».

Démonstration 11.34 (Positivité)
Supposons $f \geqslant 0$.

La fonction nulle $\varphi_0 : \begin{array}{rcl} [a\ ;\ b] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & 0 \end{array}$ appartient à $\mathcal{E}_-$ donc on a

$$\int_a^b f = \sup_{\varphi \in \mathcal{E}_-} \int_a^b \varphi \geqslant \int_a^b \varphi_0.$$

■

Démonstration 11.35 (Croissance)
Supposons $f \leqslant g$.

Alors $0 \leqslant g - f$.

Donc selon la positivité de l'intégrale, on a $0 \leqslant \displaystyle\int_a^b (g - f)$.

D'où, par linéarité de l'intégrale : $0 \leqslant \displaystyle\int_a^b g - \int_a^b f$. ■

Proposition 11.36
On suppose $a < b$.

Soit $f : [a\ ;\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

On a

$$\left[f \geqslant 0 \quad et \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right] \implies f = 0.$$

NB : l'implication est fausse pour les fonctions continues par morceaux.

Démonstration 11.37
On suppose f continue et positive.

Montrons que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \implies f = 0$ par contraposée.

Supposons $f \neq 0$.

Montrons que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$.

Soit $x_0 \in [a\ ;\ b]$ tel que $f(x_0) \neq 0$.

Supposons $x_0 \neq a$ et $x_0 \neq b$.

On a $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ car f est continue en x_0 et $f(x_0) > 0$ car $f(x_0) \neq 0$ et $f \geqslant 0$.

Donc $\dfrac{f(x_0)}{2} < \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x)$.

Il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\begin{cases}]x_0 - \delta \,;\, x_0 + \delta[\subseteq [a \,;\, b] \\ \forall t \in]x_0 - \delta \,;\, x_0 + \delta[\,, \quad \dfrac{f(x_0)}{2} < f(t) \end{cases}$$

car $[a \,;\, b]$ est un voisinage de x_0 et car f est continue en x_0.

Posons $\varphi : \begin{array}{ccc} [a \,;\, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{f(x_0)}{2} & \text{si } |t - x_0| \leqslant \delta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$

On a $\varphi \leqslant f$ donc par croissance de l'intégrale, on a

$$0 < \delta f(x_0) = 2\delta \frac{f(x_0)}{2} = \int_a^b \varphi \leqslant \int_a^b f.$$

De même si $x_0 = a$ ou $x_0 = b$, on obtient $\displaystyle\int_a^b f \geqslant \delta \frac{f(x_0)}{2} > 0$. ■

11.2.2 Sommes de Riemann

Proposition 11.38 (Convergence des sommes de Riemann)
Soit $f \in \mathscr{C}_m^0([a \,;\, b], \mathbb{K})$.

On a :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration 11.39 (Cas où f est une fonction lipschitzienne)

On pose $\forall k \in [\![0 \,;\, n-1]\!]\,,\ x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ R_n(f) = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$.

On a :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - R_n(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(t) - f(x_k)]\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Soit $K \in \mathbb{R}_+$ tel que f est K-lipschitzienne.

On a :

$$\forall k \in [\![0\ ;\ n-1]\!]\,,\quad \forall t \in [x_k\ ;\ x_{k+1}]\,,\quad |f(t) - f(x_k)| \leqslant K\,|t - x_k|\,.$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}
\forall k \in [\![0\ ;\ n-1]\!]\,,\quad \left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(t) - f(x_k)]\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)|\,\mathrm{d}t \qquad \text{(inégalité triangulaire intégrale)}\\
&\leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}} K\,(t - x_k)\,\mathrm{d}t \qquad \text{(croissance de l'intégrale)}\\
&= \left[K \frac{(t - x_k)^2}{2}\right]_{x_k}^{x_{k+1}}\\
&= \frac{K}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - R_n(f)\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(t) - f(x_k)]\,\mathrm{d}t\right|\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{K}{2}\frac{(b-a)^2}{n^2}\\
&= \frac{K}{2}\frac{(b-a)^2}{n}.
\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_n \frac{K}{2}\frac{(b-a)^2}{n} = 0$.

Donc selon le théorème des gendarmes, $\lim\limits_n R_n(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

L'autre limite en découle car on a

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = R_n(f) + \frac{b-a}{n}\left(f(b) - f(a)\right) \quad \text{et} \quad \begin{cases} \lim\limits_n R_n(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \\ \lim\limits_n \frac{b-a}{n}\left(f(b) - f(a)\right) = 0 \end{cases}$$

. ∎

Démonstration 11.40 (Cas où f est une fonction continue)
Cf. Exercice 11.25. ∎

11.2.3 Théorème fondamental

Définition 11.41
On appelle primitive d'une fonction f toute fonction dérivable F dont la dérivée est f :

$$F' = f.$$

Proposition 11.42 (Unicité à une constante additive près)
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$.

On suppose que $F_1, F_2 \in \mathscr{F}(I, \mathbb{K})$ sont des primitives de f.

Alors
$$\exists c \in \mathbb{K}, \quad F_2 = F_1 + c.$$

Démonstration 11.43
On a $(F_2 - F_1)' = f - f = 0$.

Donc la fonction $F_2 - F_1$ est constante sur l'intervalle I : $\exists c \in \mathbb{K}, \quad F_2 - F_1 = c$.

Donc $\exists c \in \mathbb{K}, \quad F_2 = F_1 + c$. ■

Théorème 11.44 (Théorème fondamental de l'analyse)
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continue et $x_0 \in I$.

Alors la fonction
$$F : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$
est une primitive de f sur I (c'est l'unique primitive de f qui s'annule en x_0).

Démonstration 11.45
Soit $x \in I$.

Montrons que $\displaystyle\lim_{\substack{x' \longrightarrow x \\ x' \neq x}} \frac{F(x') - F(x)}{x' - x} = f(x)$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall x' \in I, \quad |x' - x| \leqslant \delta \implies \left| \frac{F(x') - F(x)}{x' - x} - f(x) \right| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que
$$\forall x'' \in I, \quad |x - x''| \leqslant \delta \implies |f(x) - f(x'')| \leqslant \varepsilon.$$

Un tel δ existe car f est continue en x.

Soit $x' \in I$ tel que $|x - x'| \leqslant \delta$.

On a, selon la relation de Chasles :

$$F(x') - F(x) = \int_x^{x'} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'où

$$\begin{aligned}
|F(x') - F(x) - (x' - x) f(x)| &= \left| \int_x^{x'} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_x^{x'} f(x)\,\mathrm{d}t \right| \\
&= \left| \int_x^{x'} (f(t) - f(x))\,\mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant \left| \int_x^{x'} |f(t) - f(x)|\,\mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant \left| \int_x^{x'} \varepsilon\,\mathrm{d}t \right| \\
&= \varepsilon\, |x' - x|\,.
\end{aligned}$$

D'où, si $x \neq x'$:

$$\left| \frac{F(x') - F(x)}{x' - x} \right| \leqslant \varepsilon.$$

Donc δ convient.

D'où $F'(x) = f(x)$. ■

Corollaire 11.46 (Existence de primitives)
Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive.

Exercice 11.47
Donner une primitive des fonctions suivantes (à l'aide d'une intégrale) :

(1) $\mathrm{Arctan} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

(2) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{Arcsin}\, x}}$

Correction 11.48 (1)
On a la primitive de Arctan suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x \operatorname{Arctan} t \, \mathrm{d}t \end{array}$$

Correction 11.49 (2)
f est bien définie sur $]0\,;1]$.

On a la primitive suivante :

$$\begin{array}{ccc}]0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\operatorname{Arcsin} t}} \end{array}$$

Corollaire 11.50
Soient $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{K}$ continue et $F : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{K}$ une primitive de f.

Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)\,.$$

L'accroissement $F(b) - F(a)$ est noté :

$$[F(t)]_a^b \qquad ou \qquad [F(t)]_{t=a}^b\,.$$

Démonstration 11.51
Posons $G : \begin{array}{ccc} [a\,;b] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$

Les fonctions F et G sont des primitives de f sur l'intervalle $[a\,;b]$.

Il existe donc $c \in \mathbb{K}$ tel que $\forall x \in [a\,;b]\,,\ G(x) = F(x) + c$.

En particulier, si $x = a$: $0 = G(a) = F(a) + c$.

Donc $c = -F(a)$ et $\forall x \in [a\,;b]\,,\ G(x) = F(x) - F(a)$.

D'où, en prenant $x = b$:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = G(b) = F(b) - F(a)\,.$$

■

Corollaire 11.52
Soit $g \in \mathscr{C}^1([a\,;b],\mathbb{K})$.

On a :

$$g(b) - g(a) = \int_a^b g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration 11.53
Découle du Corollaire 11.50 en prenant $\begin{cases} f = g' \\ F = g \end{cases}$ ∎

11.2.4 Intégration par parties

Proposition 11.54
Soient $f, g \in \mathscr{C}^1([a\,;b],\mathbb{K})$.

On a

$$\int_a^b f(t)\,g'(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)\,g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration 11.55
La fonction fg est de classe $\mathscr{C}^1$.

On a donc :

$$\begin{aligned}[f(t)\,g(t)]_a^b &= \int_a^b (fg)'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b f'(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g'(t)\,f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$ ∎

Exercice/Exemple 11.56

(1) Calculer une primitive de ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

(2) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{Arctan} t\,\mathrm{d}t$.

(3) Calculer une primitive de $t \longmapsto t^2 \ln t$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(4) Calculer une primitive de $t \longmapsto t\mathrm{e}^t$ sur $\mathbb{R}$.

(5) Calculer une primitive de $t \longmapsto t^2 \cos t$ sur $\mathbb{R}$.

Correction 11.57 (1)
On a la primitive

$$x \longmapsto \int_1^x \ln t \, \mathrm{d}t = [t \ln t]_1^x - \int_1^x t \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t$$
$$= x \ln x - (x-1)$$

Donc une autre primitive est $x \longmapsto x \ln x - x$.

Correction 11.58 (2)
On a :

$$\int_0^1 \operatorname{Arctan} t \, \mathrm{d}t = [t \operatorname{Arctan} t]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} \, \mathrm{d}t$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2t}{t^2+1} \, \mathrm{d}t$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \left[\ln\left(t^2+1\right)\right]_0^1$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2.$$

Correction 11.59 (3)
On a la primitive

$$x \longmapsto \int_1^x t^2 \ln t \, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3} \ln t\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^3}{3} \times \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t$$
$$= \frac{x^3 \ln x}{3} - \left[\frac{t^3}{9}\right]_1^x$$
$$= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + \frac{1}{9}$$
$$= \frac{x^3 (3 \ln x - 1) + 1}{9}.$$

Correction 11.60 (4)
On a la primitive

$$x \longmapsto \int_0^x t\mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t = \left[t\mathrm{e}^t\right]_0^x - \int_0^x \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t$$
$$= x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 1$$
$$= \mathrm{e}^x (x-1) + 1.$$

Correction 11.61 (5)
On a la primitive

$$\begin{aligned} x \longmapsto \int_0^x t^2 \cos t \, \mathrm{d}t &= \left[t^2 \sin t\right]_0^x - \int_0^x 2t \sin t \, \mathrm{d}t \\ &= x^2 \sin x - \left[-2t \cos t\right]_0^x + \int_0^x -2 \cos t \, \mathrm{d}t \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x. \end{aligned}$$

11.2.5 Formules de Taylor

Théorème 11.62 (Formule de Taylor avec reste intégral)
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{C}^{n+1}\left(\left[a\ ;\ b\right], \mathbb{K}\right)$.

On a

$$f\left(b\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}\left(a\right)}{k!} \left(b-a\right)^k + \int_a^b \frac{\left(b-t\right)^n}{n!} f^{(n+1)}\left(t\right) \mathrm{d}t.$$

Démonstration 11.63
On raisonne par récurrence finie.

On note

$$\forall m \in [\![0\ ;\ n]\!],\ \underbrace{f\left(b\right) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}\left(a\right)}{k!} \left(b-a\right)^k + \int_a^b \frac{\left(b-t\right)^m}{m!} f^{(m+1)}\left(t\right) \mathrm{d}t}_{\mathscr{P}(m)}.$$

On a bien $f\left(b\right) = f\left(a\right) + \displaystyle\int_a^b f'\left(t\right) \mathrm{d}t$ car $f \in \mathscr{C}^1\left(\left[a\ ;\ b\right], \mathbb{K}\right)$, d'où $\mathscr{P}\left(0\right)$.

Soit $m \in [\![0\ ;\ n-1]\!]$ tel que $\mathscr{P}\left(m\right)$.

Montrons $\mathscr{P}\left(m+1\right)$.

On peut intégrer la fonction $t \longmapsto \dfrac{\left(b-t\right)^m}{m!} f^{(m+1)}\left(t\right)$ car les fonctions $t \longmapsto \dfrac{-\left(b-t\right)^{m+1}}{\left(m+1\right)!}$ et $f^{(m+1)}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$.

D'où

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\left(b-t\right)^m}{m!} f^{(m+1)}\left(t\right) \mathrm{d}t &= \left[\frac{-\left(b-t\right)^{m+1}}{\left(m+1\right)!} f^{(m+1)}\left(t\right)\right]_a^b - \int_a^b \frac{-\left(b-t\right)^{m+1}}{\left(m+1\right)!} f^{(m+2)}\left(t\right) \mathrm{d}t \\ &= 0 - \frac{-\left(b-a\right)^{m+1}}{\left(m+1\right)!} f^{(m+1)}\left(a\right) + \int_a^b \frac{\left(b-t\right)^{m+1}}{\left(m+1\right)!} f^{(m+2)}\left(t\right) \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

D'où, selon $\mathscr{P}(m)$:

$$\begin{aligned}
f(b) &= \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+2)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+2)}(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

D'où $\mathscr{P}(m+1)$.

D'où, par récurrence : $\mathscr{P}(n)$. ■

Corollaire 11.64 (Inégalité de Taylor-Lagrange)
Soient $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathscr{C}^{n+1}([a\,;b], \mathbb{K})$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in [a\,;b]$, $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leqslant M$.

Alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Démonstration 11.65
On a, selon la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\begin{aligned}
\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| &= \left| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant \int_a^b \left| \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \right| \mathrm{d}t && \textit{inégalité triangulaire intégrale} \\
&\leqslant \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} M\,\mathrm{d}t && \textit{croissance de l'intégrale} \\
&\leqslant \frac{M}{n!}\left[\frac{(b-t)^{n+1}}{n+1} \right]_a^b \\
&= \frac{M}{n!}\left(0 - \frac{(b-a)^{n+1}}{n+1} \right) \\
&= \frac{M}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.
\end{aligned}$$

■

Exemple 11.66
Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

Prenons $a = 0$, $b = x$, $f = \exp$ et $n = 3$.

On a

$$\begin{aligned}
\left| \mathrm{e}^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right) \right| &\leqslant \frac{\max_{[0;x]} \exp}{4!} x^4 \\
&= \frac{\mathrm{e}^x x^4}{24}.
\end{aligned}$$

11.2.6 Changements de variable

Théorème 11.67
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ et $u \in \mathscr{C}^1([a\,;\,b], \mathbb{R})$ telle que $\operatorname{Im} u \subseteq I$.

On a
$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u(s))\,u'(s)\,\mathrm{d}s.$$

On dit qu'on fait le changement de variable $\begin{cases} t = u(s) \\ \mathrm{d}t = u'(s)\,\mathrm{d}s \end{cases}$

Démonstration 11.68
Posons $g : \begin{array}{ccc} [a\,;\,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{u(a)}^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(u(s))\,u'(s)\,\mathrm{d}s \end{array}$

Montrons que g est dérivable.

La fonction $\begin{array}{ccc} [a\,;\,b] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ s & \longmapsto & f(u(s))\,u'(s) \end{array}$ est continue car $\begin{cases} f \text{ est continue} \\ u \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \end{cases}$

Donc $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(u(s))\,u'(s)\,\mathrm{d}s$ est dérivable de dérivée $x \longmapsto f(u(x))\,u'(x)$.

La fonction $\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ y & \longmapsto & \displaystyle\int_{u(a)}^{y} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ est dérivable car f est continue, de dérivée $y \longmapsto f(y)$.

De plus, u est de classe $\mathscr{C}^1$ donc par composition de fonctions dérivables : $\begin{array}{ccc} [a\,;\,b] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{u(a)}^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$

est dérivable de dérivée $\begin{array}{ccc} [a\,;\,b] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & u'(x)\,f(u(x)) \end{array}$

Finalement, g est dérivable de dérivée nulle.

Donc g est constante sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.

Enfin, $g(a) = 0 - 0 = 0$.

Donc g est nulle, d'où la formule énoncée. ∎

Remarque 11.69
Si f était continue par morceaux alors $s \longmapsto f(u(s))\,u'(s)$ pourrait ne pas être continue par morceaux.

Exercice/Exemple 11.70

(1) Calculer $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{t}{t^2 + 2t + 2}\,\mathrm{d}t$.

(2) Calculer une primitive de $\dfrac{1}{\mathrm{ch}}$.

(3) Calculer une primitive de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}$.

Correction 11.71 (1)

On a $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{t}{(t+1)^2 + 1}\,\mathrm{d}t$.

On fait le changement de variable

$$\begin{cases} u = t + 1 \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \end{cases} \iff \begin{cases} t = u - 1 \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}u \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{u-1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln\left(u^2+1\right)\right]_0^1 - [\mathrm{Arctan}\, u]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Correction 11.72 (2)

Une primitive de $\dfrac{1}{\mathrm{ch}}$ est $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}\, t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{2}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t$.

On fait le changement de variable

$$\begin{cases} u = \mathrm{e}^t \\ \mathrm{d}u = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \end{cases} \iff \begin{cases} t = \ln u \\ \mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}u}{u} \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} F : x \longmapsto \int_0^x \frac{2}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t &= \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{2}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\ &= 2\,[\mathrm{Arctan}\, u]_1^{\mathrm{e}^x} \\ &= 2\,\mathrm{Arctan}\,\mathrm{e}^x - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Correction 11.73 (3)
Une primitive de f est $F : x \longmapsto \displaystyle\int_{10}^{x} \frac{1}{t \ln t \ln(\ln t)} \, \mathrm{d}t$.

On fait le changement de variable

$$\begin{cases} u = \ln t \\ \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}t}{t} \end{cases} \iff \begin{cases} t = \mathrm{e}^u \\ \mathrm{d}t = \mathrm{e}^u \, \mathrm{d}u \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} F : x \longmapsto \int_{\ln 10}^{\ln x} \frac{\mathrm{e}^u}{\mathrm{e}^u u \ln u} \, \mathrm{d}u &= \int_{\ln 10}^{\ln x} \frac{1}{u \ln u} \, \mathrm{d}u \\ &= \int_{\ln 10}^{\ln x} \frac{\frac{1}{u}}{\ln u} \, \mathrm{d}u \\ &= \left[\ln |\ln u|\right]_{\ln 10}^{\ln x} \\ &= \ln(\ln(\ln x)) - \ln(\ln(\ln 10)) . \end{aligned}$$

Donc une primitive de f est $x \longmapsto \ln(\ln(\ln x))$.

Notation 11.74 (Officielle)

On peut noter $x \longmapsto \displaystyle\int^{x} f(t) \, \mathrm{d}t$ une primitive de la fonction continue f.

11.2.7 Symétries

Proposition 11.75
Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $f \in \mathscr{C}_m^0([-\alpha ; \alpha], \mathbb{K})$.

Si f est impaire alors

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t) \, \mathrm{d}t = 0.$$

Si f est paire, alors

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t) \, \mathrm{d}t = 2 \int_{0}^{\alpha} f(t) \, \mathrm{d}t.$$

Démonstration 11.76 (Dans le cas continu)
On a

$$\begin{aligned}\int_{-\alpha}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{\alpha}^{0} -f(-u)\,\mathrm{d}u \qquad \text{avec } \begin{cases} u = -t \\ \mathrm{d}u = -\,\mathrm{d}t \end{cases} \text{ car } \begin{cases} f \text{ est de classe } \mathscr{C}^0 \\ t \longmapsto -t \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \end{cases} \\ &= \int_{0}^{\alpha} f(-u)\,\mathrm{d}u \\ &= \begin{cases} -\displaystyle\int_{0}^{\alpha} f(u)\,\mathrm{d}u & \text{si } f \text{ est impaire} \\ \displaystyle\int_{0}^{\alpha} f(u)\,\mathrm{d}u & \text{si } f \text{ est paire} \end{cases}\end{aligned}$$

D'où le résultat (car $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\alpha}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t$). ■

Proposition 11.77
Soient $f \in \mathscr{C}_m^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ et $T \in \mathbb{R}_+^*$.

On suppose que f est T-périodique.

Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_{x}^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{T} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration 11.78 (Dans le cas continu)
On pose $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{x}^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$

On a $\forall x \in \mathbb{R}, \; g(x) = \displaystyle\int_{0}^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Donc g est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}, \; g'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$.

Donc g est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

D'où le résultat. ■

11.3 Techniques de calcul

11.3.1 Utiliser les nombres complexes

Rappel 11.79
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

La fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{\alpha x} \end{array}$ est dérivable de dérivée $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \alpha \mathrm{e}^{\alpha x} \end{array}$

Exemple 11.80
Calculons une primitive de $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{2x} \sin x$.

On a $f = \operatorname{Im} g$ en posant $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{(2+i)x} \end{array}$

On a

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad \int^x g(t)\,\mathrm{d}t &= \int^x \mathrm{e}^{(2+i)t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{2+i}\mathrm{e}^{(2+i)t}\right]^x \\ &= \frac{1}{2+i}\mathrm{e}^{(2+i)x} \\ &= \frac{(2-i)\,\mathrm{e}^{(2+i)x}}{5} \\ &= \frac{2}{5}\mathrm{e}^{2x}\cos x + \frac{2i}{5}\mathrm{e}^{2x}\sin x - \frac{i}{5}\mathrm{e}^{2x}\cos x + \frac{1}{5}\mathrm{e}^{2x}\sin x. \end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\int^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{5}(2\sin x - \cos x)$.

11.3.2 Primitives des fonctions rationnelles

Exemple 11.81
Calculons une primitive de $f : x \longmapsto \dfrac{3}{x^3-1}$ (sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$).

Calculons la décomposition en éléments simples de $\dfrac{3}{X^3-1}$.

On a $X^3 - 1 = (X-1)\left(X^2+X+1\right)$.

Donc $\dfrac{3}{X^3-1} = \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{bX+c}{X^2+X+1}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Donc $\dfrac{3}{X^3-1} = \dfrac{a\left(X^2+X+1\right) + (X-1)(bX+c)}{X^3-1}$.

Donc $3 = aX^2 + aX + a + bX^2 + (c-b)X - c$.

Donc $\begin{cases} a+b=0 \\ a-b+c=0 \\ a-c=3 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-2 \end{cases}$

Donc $\dfrac{3}{X^3-1} = \dfrac{1}{X-1} - \dfrac{X+2}{X^2+X+1}$.

D'où

$$\int^x \frac{3}{t^3-1}\,\mathrm{d}t = \int^x \frac{\mathrm{d}t}{t-1} - \int^x \frac{t+2}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t.$$

Or $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t-1} = [\ln|t-1|]^x = \ln|x-1|$.

De plus, $\displaystyle\int^x \frac{t+2}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t = \int^x \frac{t+2}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t = \int^x \frac{t+2}{\frac{3}{4}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)^2\right)+1}\,\mathrm{d}t$.

On fait le changement de variable

$$\begin{cases} u = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\dfrac{1}{2}\right) \\ \mathrm{d}u = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}t \end{cases} \iff \begin{cases} t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}u - \dfrac{1}{2} \\ \mathrm{d}t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}u \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\int^x \frac{t+2}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t &= \int^{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}u-\frac{1}{2}+2}{\frac{3}{4}\left(u^2+1\right)}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\int^{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{3}}{4}\ln\left(u^2+1\right)+\frac{3}{2}\operatorname{Arctan} u\right]^{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right)+\sqrt{3}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{3}\left(x^2+x+1\right)\right)+\sqrt{3}\operatorname{Arctan}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Donc une primitive de f est

$$x \longmapsto \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{3}\left(x^2+x+1\right)\right) - \sqrt{3}\operatorname{Arctan}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

Proposition 11.82
On peut primitiver toute fonction rationnelle en écrivant sa décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

Remarque 11.83
C'est suffisant, pas nécessaire.

Par exemple : $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^7}{t^8+1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{8}\ln\left(t^8+1\right)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{8}$.

Démonstration 11.84
On peut primitiver chaque terme de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$:

La partie entière : c'est un polynôme.

Les termes de la forme $t \longmapsto \dfrac{1}{t-\lambda}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$: primitive

$$t \longmapsto \ln|t-\lambda|\,.$$

Les termes de la forme $t \longmapsto \dfrac{1}{(t-\lambda)^\alpha} = (t-\lambda)^{-\alpha}$ où $\begin{cases}\lambda \in \mathbb{R}\\ \alpha \in [\![2\,;+\infty[\![\end{cases}$: primitive

$$t \longmapsto \frac{1}{1-\alpha}(t-\lambda)^{1-\alpha}\,.$$

Les termes de la forme $t \longmapsto \dfrac{\lambda t+\mu}{t^2+bt+c}$ avec $\begin{cases}\lambda, \mu \in \mathbb{R}\\ b, c \in \mathbb{R} \text{ tels que } \Delta = b^2-4c < 0\end{cases}$:

Par un changement de variable affine, on se ramène à

$$\int^y \frac{\lambda' u+\mu'}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \frac{\lambda'}{2}\ln\left(y^2+1\right) + \mu' \operatorname{Arctan} y$$

et

$$\begin{aligned}\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+bt+c} &= \int^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}+c}\\ &= \int^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{b}{2}\right)^2 \underbrace{-\frac{\Delta}{4}}_{>0}}\\ &= \int^x \frac{\mathrm{d}t}{-\frac{\Delta}{4}\left(\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\left(t+\frac{b}{2}\right)\right)^2+1\right)}.\end{aligned}$$

D'où ce qu'on voulait par le changement de variable $u = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\left(t + \frac{b}{2}\right)$.

Les termes de la forme $t \longmapsto \frac{\lambda t + \mu}{\left(t^2 + bt + c\right)^\alpha}$ avec $\begin{cases} \alpha \in [\![2 \,;\, +\infty[\![\\ \lambda, \mu, b, c \in \mathbb{R} \\ b^2 - 4c < 0 \end{cases}$:

Quitte à faire un changement de variable affine, on peut supposer $b = 0$ et $c = 1$. Il suffit donc de savoir calculer

$$\int_0^x \frac{\lambda t + \mu}{\left(t^2+1\right)^\alpha}\,\mathrm{d}t = \lambda \underbrace{\int_0^x t\left(t^2+1\right)^{-\alpha}\mathrm{d}t}_{\frac{\lambda}{2(1-\alpha)}\left(x^2+1\right)^{1-\alpha}} + \mu \underbrace{\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+1\right)^\alpha}}_{I_\alpha(x)}.$$

Reste à calculer $I_\alpha(x)$ par récurrence sur α, à l'aide d'une intégration par partie.

En effet :

$$\begin{aligned}\int_0^x \left(t^2+1\right)^{-\alpha}\mathrm{d}t &= \left[t\left(t^2+1\right)^{-\alpha}\right]_0^x - \int_0^x t \times 2t\,(-\alpha)\left(t^2+1\right)^{-\alpha-1}\mathrm{d}t \\ &= \frac{x}{\left(x^2+1\right)^\alpha} + 2\alpha\int_0^x \left(t^2+1-1\right)\left(t^2+1\right)^{-\alpha-1}\mathrm{d}t \\ &= \frac{x}{\left(x^2+1\right)^\alpha} + 2\alpha I_\alpha(x) - 2\alpha I_{\alpha+1}(x).\end{aligned}$$

D'où $(1-2\alpha)\,I_\alpha(x) = \frac{x}{\left(x^2+1\right)^\alpha} - 2\alpha I_{\alpha+1}(x)$.

On connaît $I_1(x)$ (*cf.* termes de la forme $t \longmapsto \frac{1}{(t-\lambda)^\alpha}$).

On en déduit I_2, I_3, ... ∎

11.3.3 Fonctions rationnelles en e^t

Exemple 11.85

$$t \longmapsto \frac{1}{\operatorname{ch} t} = \frac{2}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}} = \frac{2\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^{2t}+1} \qquad \text{et} \qquad t \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{2t}+1}{\mathrm{e}^t - 1}$$

Proposition 11.86
On remarque

$$\forall F \in \mathbb{K}(X), \quad \int^x F\left(\mathrm{e}^t\right)\mathrm{d}t = \int^{\mathrm{e}^x} \frac{F(u)}{u}\,\mathrm{d}u$$

en opérant le changement de variable

$$\begin{cases} u = \mathrm{e}^t \\ \mathrm{d}u = \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t \end{cases} \iff \begin{cases} t = \ln u \\ \mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}u}{u} \end{cases}$$

Or $\dfrac{F}{X} \in \mathbb{K}(X)$ *donc on sait primitiver.*

11.3.4 Règle de Bioche

Méthode 11.87

Pour calculer $\displaystyle\int F(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$:

- Si $F(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ est invariant quand on remplace θ par $-\theta$:

  faire le changement de variable $t = \cos\theta$.

- Si $F(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ est invariant quand on remplace θ par $\pi - \theta$:

  faire le changement de variable $t = \sin\theta$.

- Si $F(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ est invariant quand on remplace θ par $\pi + \theta$:

  faire le changement de variable $t = \tan\theta$.

- Dans tous les cas, on peut

  faire le changement de variable $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$.

Exercice/Exemple 11.88
Calculer une primitive de $x \longmapsto \dfrac{\sin^3 x}{1 + \cos^2 x}$.

Correction 11.89
On a la primitive

$$x \longmapsto \int^x \frac{\sin^3\theta}{1 + \cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

On fait le changement de variable $\begin{cases} t = \cos\theta \\ \mathrm{d}t = -\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \end{cases}$

Donc

$$\begin{aligned}
x \longmapsto \int^{x} \frac{\sin^3\theta}{1+\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta &= \int^{x} \frac{-1+\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta}\,(-\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int^{\cos x} \frac{-1+t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int^{\cos x} \frac{t^2+1-2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \int^{\cos x} \left(1-\frac{2}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \cos x - 2\,\mathrm{Arctan}\,(\cos x)\,.
\end{aligned}$$

Chapitre 12

Espaces vectoriels

Sommaire

Dans tout le chapitre, on considère un corps $\mathbb{K}$ (en pratique, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Notation 12.1
Soient $p \in \mathbb{N}$ et $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{K}$.

On s'autorise à écrire le p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ verticalement (écriture « matricielle ») :

$$(x_1, \dots, x_p) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p.$$

12.1 Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels

12.1.1 Espaces vectoriels

Définition 12.2 ($\mathbb{K}$-espace vectoriel)
On appelle $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou espace vectoriel sur $\mathbb{K}$) tout triplet $(E, +, \cdot)$ où $(E, +)$ est un groupe abélien et $\cdot$ est une application (appelée parfois loi externe) :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda \cdot x = \lambda x \end{array}$$

qui vérifient

$$\begin{cases} \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \ \forall x, y \in E, \ \ \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y \\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \ \ \forall x \in E, \ \ (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x \\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \ \ \forall x \in E, \ \ (\lambda \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x) \\ \forall x \in E, \ \ 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x \end{cases}$$

Les éléments de E sont appelés les vecteurs.

Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés les scalaires.

L'élément neutre du groupe abélien $(E, +)$ est noté 0 ou 0_E. Il est appelé le vecteur nul de E.

Par abus, on dit que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Un espace vectoriel est nécessairement non-vide (puisqu'il contient son vecteur nul). Si E ne contient pas d'autre vecteur que le vecteur nul (c'est-à-dire si $E = \{0_E\}$), on dit que E est l'espace vectoriel nul.

Définition 12.3 (Combinaison linéaire)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x_1, \dots, x_n \in E$ (où $n \in \mathbb{N}$).

On appelle combinaison linéaire de $x_1, \dots, x_n$ tout vecteur de la forme :

$$\lambda_1 \cdot x_1 + \cdots + \lambda_n \cdot x_n$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

Exemple 12.4
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\mathbb{K}^n$ est naturellement un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

$\mathbb{K}[X]$ est naturellement un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit Ω un ensemble quelconque. L'ensemble $\mathscr{F}(\Omega, \mathbb{K})$ des fonctions de Ω dans $\mathbb{K}$ est naturellement un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ est naturellement un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soient $E_1, \dots, E_m$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On rappelle que l'ensemble produit $E_1 \times \cdots \times E_m$ est formé des m-uplets de la forme $(x_1, \dots, x_m)$ où $x_1 \in E_1, \dots, x_m \in E_m$. L'ensemble $E_1 \times \cdots \times E_m$ est naturellement un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Reformulation 12.5 (Concrète)
La reformulation suivante n'est ici que pour faire le point sur les opérations autorisées dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (à lire simplement, la définition à connaître est la Définition 12.2).

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un triplet $(E, +, \cdot)$ où E est un ensemble, $+$ est une fonction de $E \times E$ dans E et $\cdot$ est une fonction de $\mathbb{K} \times E$ dans E :

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda \cdot x = \lambda x \end{array}$$

qui vérifient

$$\begin{cases} \forall x, y, z \in E, \quad (x + y) + z = x + (y + z) \\ \forall x, y \in E, \quad x + y = y + x \\ \exists 0_E \in E, \quad \forall x \in E, \quad x + 0_E = x \\ \forall x \in E, \quad \exists -x \in E, \quad x + (-x) = 0_E \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall x, y \in E, \quad \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y \\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in E, \quad (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x \\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in E, \quad (\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x) \\ \forall x \in E, \quad 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x \end{cases}$$

Le vecteur 0_E est en fait unique. Il est appelé le vecteur nul de E.

Pour tout vecteur $x \in E$, le vecteur $-x$ est unique et appelé l'opposé de x. Pour simplifier, on note $y - x$ pour $y + (-x)$.

Reformulation 12.6 (Abstraite)
Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un groupe abélien $(E, +)$ muni d'un morphisme d'anneaux $\mathbb{K} \longrightarrow \mathrm{Hom}(E, E)$.

Remarque 12.7
On a vu à l'Exemple 12.4 que $\mathbb{K}$ est naturellement un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (en prenant $n = 1$). La loi $\cdot$ coïncide alors avec la loi produit du corps $\mathbb{K}$; les éléments de $\mathbb{K}$ peuvent alors être vus comme des scalaires ou comme des vecteurs.

Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, alors E est naturellement un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (en ne gardant de la loi $\mathbb{C} \times E \longrightarrow E$ que sa restriction $\mathbb{R} \times E \longrightarrow E$).

Exercice 12.8

(1) On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.
Le vecteur $X^2 - 1$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $X - 1$ et $X + 1$?
Le vecteur $X^2 - 1$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $X^2 + X$ et $X + 1$?

(2) On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$.
Le vecteur $(2, 2, 2, 2)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $(1, 2, 0, 0)$ et $(0, 1, -1, -1)$?
Le vecteur $(1, 0, 0, 0)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $(1, 2, 0, 0)$ et $(0, 1, -1, -1)$?

Correction 12.9 (1)
On a $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \deg(\lambda(X-1) + \mu(X+1)) \leqslant 1$ donc $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \lambda(X-1) + \mu(X+1) \neq X^2 - 1$. Donc $X^2 - 1$ n'est pas une combinaison linéaire de $X - 1$ et $X + 1$.

De plus, on a $X^2 - 1 = 1 \cdot \left(X^2 + X\right) - 1 \cdot (X + 1)$ donc $X^2 - 1$ est une combinaison linéaire de $X^2 + X$ et $X + 1$.

Correction 12.10 (2)
On a $(2, 2, 2, 2) = 2 \cdot (1, 2, 0, 0) - 2 \cdot (0, 1, -1, -1)$ donc $(2, 2, 2, 2)$ est combinaison linéaire de $(1, 2, 0, 0)$ et $(0, 1, -1, -1)$.

On a $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \lambda(1, 2, 0, 0) + \mu(0, 1, -1, -1) = (1, 0, 0, 0) \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ 2\lambda + \mu = 0 \\ -\mu = 0 \\ -\mu = 0 \end{cases}$: impossible

Donc $(1, 0, 0, 0)$ n'est pas combinaison linéaire de $(1, 2, 0, 0)$ et $(0, 1, -1, -1)$.

Proposition 12.11
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire et $x \in E$ un vecteur.

On a

$$\lambda \cdot x = 0_E \iff \left| \begin{array}{l} \lambda = 0_{\mathbb{K}} \\ \textit{ou} \\ x = 0_E \end{array} \right.$$

Démonstration 12.12
Supposons $\lambda = 0$.

Montrons que $\lambda \cdot x = 0_E$.

On a $\lambda + 1_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{K}}$.

Donc $(\lambda + 1_{\mathbb{K}}) \cdot x = 1_{\mathbb{K}} \cdot x$.

Donc $\lambda \cdot x + 1_{\mathbb{K}} \cdot x = 1_{\mathbb{K}} \cdot x$.

Donc $\lambda \cdot x = 0_E$ car $(E, +)$ est un groupe.

D'où l'équivalence.

Supposons $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$.

Alors λ est inversible car $\mathbb{K}$ est un corps.

On a

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot x = 0_E &\implies \lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot x) = \lambda^{-1} \cdot 0_E \\
&\implies \left(\lambda^{-1}\lambda\right) \cdot x = 0_E \\
&\implies 1_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E \\
&\implies x = 0_E \\
&\implies \lambda \cdot x = 0_E
\end{aligned}$$

Donc $\lambda \cdot x \iff x = 0_E$.

D'où l'équivalence. ■

Proposition 12.13
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire et $x \in E$ un vecteur.

On a

$$(-\lambda) \cdot x = \lambda \cdot (-x) = -(\lambda \cdot x)$$

et

$$(-\lambda) \cdot (-x) = \lambda \cdot x.$$

Démonstration 12.14
On remarque

$$(-\lambda) \cdot x + \lambda \cdot x = (-\lambda + \lambda) \cdot x = 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E.$$

Donc $(-\lambda) \cdot x = -(\lambda \cdot x)$.

De même :

$$\lambda \cdot (-x) + \lambda \cdot x = \lambda \cdot (x - x) = \lambda \cdot 0_E = 0_E.$$

Donc $\lambda \cdot (-x) = -(\lambda \cdot x)$.

Enfin :

$$(-\lambda) \cdot (-x) = -(\lambda \cdot (-x)) = -((-\lambda) \cdot x) = \lambda x. \qquad \blacksquare$$

12.1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 12.15
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dont on note 0_E l'élément neutre et F une partie de E.

On dit que F est un sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel de E (ou sous-espace vectoriel de E) si les conditions suivantes sont vérifiées :

(1) $0_E \in F$

(2) La partie F est « stable par combinaison linéaire » :

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}, \quad \forall x_1, x_2 \in F, \quad \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \in F.$$

Proposition 12.16
Tout sous-espace vectoriel F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est naturellement un $\mathbb{K}$-espace vectoriel : ses lois sont celles induites par celles de E.

Démonstration 12.17
On note 0_E le vecteur nul de E.

Montrons que F est un sous-groupe de $(E, +)$.

On a

$$\begin{cases} 0_E \in F \\ \forall x, y \in F, \quad x - y = 1_{\mathbb{K}} \cdot x + (-1_{\mathbb{K}}) \cdot y \in F \end{cases}$$

Donc F est un sous-groupe de $(E, +)$.

Donc la loi $+$ de E induit une loi de groupe abélien $\begin{array}{ccc} F \times F & \longrightarrow & F \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array}$

On a

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in F, \quad \lambda \cdot x \in F$$

car $\lambda \cdot x = \lambda \cdot x + 0_{\mathbb{K}} \cdot 0_E \in F$.

Donc la loi externe $\cdot$ induite $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times F & \longrightarrow & F \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda \cdot x \end{array}$ est bien définie.

Enfin, les quatre propriétés sont clairement conservées. $\blacksquare$

Exemple 12.18
Soient $n \in \mathbb{N}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points.

L'ensemble $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I, \mathbb{K})$ et est donc muni d'une structure naturelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Proposition 12.19 (Intersection de sous-espaces vectoriels)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, I un ensemble quelconque et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E.

Alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration 12.20
On a $\forall i \in I, \ \ 0_E \in F_i$ donc $0_E \in \bigcap_{i \in I} F_i$.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in \bigcap_{i \in I} F_i$.

On a $\forall i \in I, \ \ x, y \in F_i$.

Donc $\forall i \in I, \ \ \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F_i$.

Donc $\lambda \cdot x + \mu \cdot y \in \bigcap_{i \in I} F_i$. ■

Exemple 12.21
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points.

L'ensemble $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I, \mathbb{K})$ car c'est l'intersection des sous-espaces vectoriels $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{K})$ où $n \in \mathbb{N}$.

Définition/Proposition 12.22
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x_1, \dots, x_n \in E$.

On appelle sous-espace vectoriel engendré par $x_1, \dots, x_n$ et on note $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient $x_1, \dots, x_n$.

Ses éléments sont les combinaisons linéaires en $x_1, \dots, x_n$:

$$\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n\}_{\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}}$$

Démonstration 12.23
Notons F l'ensemble des combinaisons linéaires en $x_1, \dots, x_n$:

$$F = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n\}_{\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}}$$

Montrons que F est un sous-espace vectoriel de E.

On a $0_E = 0_{\mathbb{K}} x_1 + \cdots + 0_{\mathbb{K}} x_n$ donc $0_E \in F$.

De plus, si $x, x' \in F$ alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda'_1, \dots, \lambda'_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \qquad \text{et} \qquad x' = \lambda'_1 x_1 + \cdots + \lambda'_n x_n.$$

Soient $\mu, \mu' \in \mathbb{K}$.

On a
$$\mu x + \mu' x' = \left(\mu\lambda_1 + \mu'\lambda'_1\right) x_1 + \cdots + \left(\mu\lambda_n + \mu'\lambda'_n\right) x_n.$$

Donc $\mu x + \mu' x' \in F$.

Donc F est un sous-espace vectoriel de E.

On a $x_1, \dots, x_n \in F$ car $\forall k \in [\![1\,;\,n]\!],\quad x_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \delta_{ki} x_i$ où $\delta_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (c'est le symbole de Kronecker).

Enfin, si G est un sous-espace vectoriel de E contenant $x_1, \dots, x_n$ alors on a

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K},\;\; \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \in G$$

donc $F \subseteq G$.

Donc F est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $x_1, \dots, x_n$. ∎

12.1.3 Sommes, sommes directes

Définition/Proposition 12.24 (Somme de deux sous-espaces vectoriels)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

L'ensemble des vecteurs de la forme $y+z$, où $y \in F$ et $z \in G$, est un sous-espace vectoriel de E, appelé somme des sous-espaces vectoriels F et G. On le note $F + G$:

$$F + G = \{y + z\}_{(y,z) \in F \times G} = \{x \in E \mid \exists y \in F,\;\; \exists z \in G,\;\; x = y + z\}.$$

Définition 12.25 (Somme directe)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

On dit que F et G sont en somme directe si l'écriture de tout vecteur de $F+G$ sous la forme $y+z$ est unique, où $y \in F$ et $z \in G$, c'est-à-dire si :

$$\forall x \in F+G, \quad \exists!\,(y,z) \in F \times G, \quad x = y+z.$$

La somme de F et G est alors appelée somme directe de F et G et est notée

$$F \oplus G.$$

Proposition 12.26
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

Alors F et G sont en somme directe si, et seulement si, leur intersection est le sous-espace vectoriel nul :

$$F \cap G = \{0_E\}\,.$$

Démonstration 12.27
Montrons l'équivalence

$$F \text{ et } G \text{ sont en somme directe} \iff F \cap G = \{0_E\}\,.$$

$\boxed{\Longrightarrow}$

$\boxed{\supseteq}$ Claire.

$\boxed{\subseteq}$

Soit $x \in F \cap G$.

On a

$$x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{x}_{\in G}\,.$$

Donc comme F et G sont en somme directe : $(x, 0_E) = (0_E, x)$.

Donc $x = 0_E$.

Donc $F \cap G = \{0_E\}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Supposons $F \cap G = \{0_E\}$.

Montrons que F et G sont en somme directe.

Soient $x_F, y_F \in F$ et $x_G, y_G \in G$ tels que $x_F + x_G = y_F + y_G$.

Donc $\underbrace{x_F - y_F}_{\in F} = \underbrace{y_G - x_G}_{\in G}$.

Donc $\begin{cases} x_F - y_F \in F \cap G = \{0_E\} \\ y_G - x_G \in F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$

Donc $\begin{cases} x_F - y_F = 0_E \\ y_G - x_G = 0_E \end{cases}$

Donc $(x_F, x_G) = (y_F, y_G)$.

Donc l'écriture est unique.

Donc F et G sont en somme directe. ■

Définition 12.28 (Supplémentaire)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

On dit que G est un supplémentaire de F dans E (ou que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E) si on a :

$$E = F \oplus G,$$

c'est-à-dire $\begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ E = F + G \end{cases}$

Exemple 12.29

(1) En voyant $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on a $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$.

(2) On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note F (respectivement G) l'ensemble des fonctions paires (respectivement impaires) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(3) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré $n+1$. On note $\mathbb{K}[X]Q$ l'ensemble des multiples de Q dans $\mathbb{K}[X]$. Il admet pour supplémentaire l'espace des polynômes de degré au plus n :

$$\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[X]Q \oplus \mathbb{K}_n[X].$$

Démonstration 12.30 (2)
Montrons que $F \cap G = \{0\}$.

Soit $f \in F \cap G$.

On a $\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = f(-x) = -f(x)$ donc $f = 0$.

Donc $F \cap G = \{0\}$.

Donc F et G sont en somme directe.

Montrons que $F + G = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$\boxed{\subseteq}$ Claire.

$\boxed{\supseteq}$

Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On remarque
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Donc $f = g + h$ en posant $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} \end{array}$ et $h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \end{array}$

De plus, on a $g \in F$ et $h \in G$.

Donc $f \in F + G$.

Conclusion : on a montré $\begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ F + G = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \end{cases}$ donc $F \oplus G = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Donc F et G sont supplémentaires dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. ■

Démonstration 12.31 (3)
Montrons que $\mathbb{K}[X]Q \cap \mathbb{K}_n[X] = \{0\}$.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]Q \cap \mathbb{K}_n[X]$.

Comme $P \in \mathbb{K}[X]Q$, il existe $A \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = AQ$.

On a donc $\deg P = \underbrace{\deg A}_{\in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}} + \underbrace{\deg Q}_{= n+1} \leqslant n$.

Donc $\deg P = -\infty$ donc $P = 0$.

Donc $\mathbb{K}[X]Q \cap \mathbb{K}_n[X] = \{0\}$.

Montrons que $\mathbb{K}[X]Q + \mathbb{K}_n[X] = \mathbb{K}[X]$.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

On note A et B le quotient et le reste de la division euclidienne de P par Q : on a $P = AQ + B$ avec $\begin{cases} AQ \in \mathbb{K}[X]Q \\ B \in \mathbb{K}_n[X] \end{cases}$

Donc $P \in \mathbb{K}[X]Q + \mathbb{K}_n[X]$.

Finalement :
$$\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[X]Q \oplus \mathbb{K}_n[X].$$
■

Remarque 12.32

- Ne pas confondre supplémentaire et complémentaire. Le complémentaire d'un sous-espace vectoriel n'est jamais un sous-espace vectoriel car il ne contient pas le vecteur nul.

- Ne pas confondre « deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe » et « deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires ».

- Il n'y a pas unicité du supplémentaire d'un sous-espace vectoriel, sauf dans le cas des deux sous-espaces vectoriels triviaux : si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, le seul supplémentaire de $\{0_E\}$ dans E est E ; le seul supplémentaire de E dans E est $\{0_E\}$.

12.2 Applications linéaires

12.2.1 Définitions

Définition 12.33 (Application linéaire)
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u : E \longrightarrow F$.

On dit que u est une application linéaire si on a :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \ \ \forall x, y \in E, \ \ u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y).$$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E, F)$.

Définition 12.34 (Endomorphisme)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Un endomorphisme de E est une application linéaire de E dans E.

L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathscr{L}(E)$.

Définition 12.35 (Forme linéaire)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

L'ensemble des formes linéaires sur E est noté E^* et est appelé le dual de E.

Exemple 12.36
L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}_m^0\left([a\,;b],\mathbb{R}\right) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_{[a;b]} f \end{array}$$

est une forme linéaire.

Remarque 12.37
Si E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels alors on a

$$\mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(E,E) \qquad \text{et} \qquad E^* = \mathscr{L}(E,\mathbb{K}).$$

Exemple 12.38 (Homothéties)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On appelle homothétie de rapport λ l'endomorphisme

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda \cdot x \end{array}$$

Cet endomorphisme est aussi noté $\lambda \mathrm{id}_E$.

L'endomorphisme nul est une homothétie (de rapport 0).

L'application id_E est une homothétie (de rapport 1).

Exemple 12.39
Autres exemples d'endomorphismes : les opérateurs de dérivation

$$D : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \qquad \text{et} \qquad D : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$$

12.2.2 Opérations sur les applications linéaires

12.2.2.1 Cas des applications linéaires

Proposition 12.40
Une composée d'applications linéaires est linéaire.

Démonstration 12.41
Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$.

Montrons que $v \circ u \in \mathscr{L}(E, G)$.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$.

On a
$$\begin{aligned} v \circ u(\lambda x + \mu y) &= v(\lambda u(x) + \mu u(y)) && \text{car } u \text{ est linéaire} \\ &= \lambda v \circ u(x) + \mu v \circ u(y) && \text{car } v \text{ est linéaire} \end{aligned}$$

Donc $v \circ u$ est linéaire. ∎

Notation 12.42
Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$.

La composée de u et v est souvent notée vu au lieu de $v \circ u$.

Proposition 12.43
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(\mathscr{L}(E, F), +, \cdot)$ dont le vecteur nul (noté 0 ou $0_{\mathscr{L}(E,F)}$) est l'application identiquement nulle (i.e. en tout point) de E dans F.

En particulier, $\mathscr{L}(E)$ et E^* sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Démonstration 12.44
Montrons que $\mathscr{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{F}(E, F), +, \cdot)$.

Montrons que $0_{\mathscr{F}(E,F)} \in \mathscr{L}(E, F)$.

On a
$$\begin{aligned} \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \forall x, y \in E, \quad 0_{\mathscr{F}(E,F)}(\lambda x + \mu y) &= 0_F \\ &= \lambda 0_F + \mu 0_F \\ &= \lambda 0_{\mathscr{F}(E,F)}(x) + \mu 0_{\mathscr{F}(E,F)}(y). \end{aligned}$$

Donc $0_{\mathscr{F}(E,F)} \in \mathscr{L}(E, F)$.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $u, v \in \mathscr{L}(E, F)$.

Montrons que $\lambda u + \mu v \in \mathscr{L}(E, F)$.

Soient $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{K}$ et $x_1, x_2 \in E$.

On a

$$\begin{aligned}(\lambda u + \mu v)(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2) &= \lambda u(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2) + \mu v(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)\\ &= \lambda(\omega_1 u(x_1) + \omega_2 u(x_2)) + \mu(\omega_1 v(x_1) + \omega_2 v(x_2))\\ &= \omega_1(\lambda u(x_1) + \mu v(x_1)) + \omega_2(\lambda v(x_2) + \mu v(x_2))\\ &= \omega_1(\lambda u + \mu v)(x_1) + \omega_2(\lambda u + \mu v)(x_2)\,.\end{aligned}$$

Donc $\lambda u + \mu v \in \mathscr{L}(E, F)$.

Donc $\mathscr{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(E, F)$.

Donc $\mathscr{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. ■

12.2.2.2 Cas des endomorphismes

Notation 12.45
Soient E un espace vectoriel, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$.

L'itéré k-ème de u est souvent noté u^k (au lieu de $u^{\circ k}$).

Proposition 12.46
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

L'ensemble des endomorphismes de E est naturellement muni d'une structure d'anneau $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$.

Ses éléments neutres sont l'application identiquement nulle $0 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ pour $+$ et l'application identité id_E pour $\circ$.

En effet :

$$\forall u \in \mathscr{L}(E),\quad u \circ 0 = 0 \circ u = 0 \qquad \textit{et} \qquad u \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E \circ u = u.$$

L'anneau $\mathscr{L}(E)$ n'est pas commutatif en général.

Démonstration 12.47
On sait que $(\mathscr{L}(E), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Donc $(\mathscr{L}(E), +)$ est un groupe abélien.

La loi $\circ$ est associative et elle admet id_E comme élément neutre.

Montrons que $\circ$ est distributive par rapport à $+$.

Soient $u, v, w \in \mathscr{L}(E)$.

On a $\forall x \in E,\ \ (u + v) w(x) = uw(x) + vw(x) = (uw + vw)(x)$.

Donc $(u+v)\,w = uw + vw$.

De plus :

$$\begin{aligned}\forall x \in E,\quad u\,(v+w)\,(x) &= u\,(v\,(x) + w\,(x)) \\ &= uv\,(x) + uw\,(x) \\ &= (uv + uw)\,(x)\,.\end{aligned}$$

car u est linéaire

Donc $u\,(v+w) = uv + uw$.

Donc $\circ$ est distributive par rapport à $+$.

Donc $(\mathscr{L}\,(E)\,,+,\circ)$ est un anneau. ∎

Remarque 12.48
$(\mathscr{F}\,(E,E)\,,+,\circ)$ n'est pas un anneau.

Proposition 12.49
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u, v \in \mathscr{L}\,(E)$ deux endomorphismes qui commutent : $uv = vu$.

On a la formule du binôme de Newton :

$$\forall m \in \mathbb{N},\quad (u+v)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} u^k v^{m-k}$$

et

$$\forall m \in \mathbb{N},\quad u^m - v^m = (u-v) \sum_{k=0}^{m-1} u^k v^{m-1-k}.$$

12.2.3 Applications linéaires et sous-espaces vectoriels

Proposition 12.50
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}\,(E,F)$ et $x_1, \ldots, x_n \in E$.

On a

$$u\,(\mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n)) = \mathrm{Vect}\,(u\,(x_1)\,, \ldots, u\,(x_n))\,.$$

Démonstration 12.51
On a

$$\begin{aligned}u\,(\mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n)) &= u\left(\{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n\}_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}}\right) \\ &= \{u\,(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n)\}_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}} \\ &= \{\lambda_1 u\,(x_1) + \cdots + \lambda_n u\,(x_n)\}_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}} \\ &= \mathrm{Vect}\,(u\,(x_1)\,, \ldots, u\,(x_n))\,.\end{aligned}$$

car u est linéaire ∎

Exemple 12.52
Considérons l'endomorphisme $D: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors
$$D(\mathbb{K}_n[X]) = \mathbb{K}_{n-1}[X].$$

Démonstration 12.53
On a
$$\mathbb{K}_n[X] = \left\{a_n X^n + \cdots + a_0 X^0\right\}_{a_0,\ldots,a_n \in \mathbb{K}} = \operatorname{Vect}\left(X^n, \ldots, X^0\right).$$

En particulier, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

On a
$$\begin{aligned} D(\mathbb{K}_n[X]) &= D\left(\operatorname{Vect}\left(X^n, \ldots, X^0\right)\right) \\ &= \operatorname{Vect}\left(D(X^n), \ldots, D\left(X^0\right)\right) && \text{car } D \text{ est linéaire} \\ &= \operatorname{Vect}\left(nX^{n-1}, \ldots, 4X^3, 3X^2, 2X, 1, 0\right) \\ &= \operatorname{Vect}\left(X^{n-1}, \ldots, X^3, X^2, X, 1\right) \\ &= \mathbb{K}_{n-1}[X]. \end{aligned}$$
■

Proposition 12.54
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(E, F)$, E_1 un sous-espace vectoriel de E et F_1 un sous-espace vectoriel de F.

Alors
$$u^{-1}(F_1) \text{ est un sous-espace vectoriel de } E$$
et
$$u(E_1) \text{ est un sous-espace vectoriel de } F.$$

Démonstration 12.55
Montrons que $u^{-1}(F_1)$ est un sous-espace vectoriel de E.

On a $u^{-1}(F_1) \subseteq E$.

On a $u(0_E) = 0_F$ car u est linéaire donc $u(0_E) \in F_1$ donc $0_E \in u^{-1}(F_1)$.

Montrons que $u^{-1}(F_1)$ est stable par combinaison linéaire.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in u^{-1}(F_1)$.

Montrons que $\lambda x + \mu y \in u^{-1}(F_1)$.

Comme u est linéaire, on a

$$u(\lambda x + \mu y) = \underbrace{\lambda u(x)}_{\substack{\in F_1 \text{ car} \\ x \in u^{-1}(F_1)}} + \underbrace{\mu u(y)}_{\substack{\in F_1 \text{ car} \\ y \in u^{-1}(F_1)}}.$$

Donc $u(\lambda x + \mu y) \in F_1$ car F_1 est un sous-espace vectoriel de F.

Donc $\lambda u(x) + \mu u(y) \in u^{-1}(F_1)$.

Donc $u^{-1}(F_1)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Montrons que $u(E_1)$ est un sous-espace vectoriel de F.

On a $u(E_1) \subseteq F$.

On a $0_F = u(0_E)$ et $0_E \in E_1$ donc $0_F \in u(E_1)$.

Montrons que $u(E_1)$ est stable par combinaison linéaire.

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ et $y_1, y_2 \in u(E_1)$.

Montrons que $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in u(E_1)$.

Soient $x_1, x_2 \in E_1$ tels que $\begin{cases} y_1 = u(x_1) \\ y_2 = u(x_2) \end{cases}$

On a

$$\begin{aligned} \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 &= \lambda_1 u(x_1) + \lambda_2 u(x_2) \\ &= u(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \end{aligned} \quad \text{\textit{car } } u \text{ \textit{est linéaire}}$$

et $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in E_1$ car E_1 est un sous-espace vectoriel de E.

Donc $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in u(E_1)$.

Donc $u(E_1)$ est un sous-espace vectoriel de F. ■

Définition 12.56 (Noyau et image d'une application linéaire)
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

On note 0_F l'élément neutre de F.

L'image de u est l'ensemble image de l'application u :

$$\operatorname{Im} u = \{u(x)\}_{x \in E} = \{y \in F \mid \exists x \in E, \ u(x) = y\} = u(E).$$

Le noyau de u est l'ensemble des vecteurs de E d'image nulle :

$$\ker u = u^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E \mid u(x) = 0_F\}.$$

Proposition 12.57
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

Alors $\ker u$ est un sous-espace vectoriel de E et $\operatorname{Im} u$ est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration 12.58
$\ker u$ est l'image réciproque de $\{0_F\}$ par u.

Or u est linéaire et $\{0_F\}$ est un sous-espace vectoriel de F.

Donc $\ker u$ est un sous-espace vectoriel de E selon la Proposition 12.54.

De même, $\operatorname{Im} u = u(E)$ est l'image directe de E par u.

Or u est linéaire et E est un sous-espace vectoriel de E.

Donc $\operatorname{Im} u$ est un sous-espace vectoriel de F selon la Proposition 12.54. ■

Théorème 12.59
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

On note 0_E l'élément neutre de E.

Alors u est injective si, et seulement si, son noyau est « nul », c'est-à-dire

$$u \text{ est injective} \iff \ker u = \{0_E\}.$$

Démonstration 12.60 (Découle du théorème analogue pour les groupes (cf. Théorème 6.68))
$\boxed{\Longrightarrow}$

Supposons u injective.

Alors 0_F n'admet d'autre antécédent que 0_E par u.

Donc $\ker u = \{0_E\}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Supposons $\ker u = \{0_E\}$.

Montrons que u est injective.

Soient $x, y \in E$ tels que $u(x) = u(y)$.

On a $u(x) - u(y) = 0_F$ donc $u(x - y) = 0_F$ car u est linéaire.

Donc $x - y \in \ker u$.

Donc $x - y = 0_E$ donc $x = y$.

Donc u est injective. ■

12.2.4 Projecteurs

Définition/Proposition 12.61
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

Le projecteur p_F sur F parallèlement à G et le projecteur p_G sur G parallèlement à F sont les endomorphismes de E caractérisés par :

$$\forall x \in E, \quad \begin{cases} x = p_F(x) + p_G(x) \\ p_F(x) \in F \\ p_G(x) \in G \end{cases}$$

On a

$$\operatorname{Im} p_F = F \qquad \text{et} \qquad \ker p_F = G.$$

Démonstration 12.62 ($\operatorname{Im} p_F$*)*
On a, par définition de p_F : $\operatorname{Im} p_F \subseteq F$.

Montrons que $\operatorname{Im} p_F \supseteq F$.

Soit $x \in F$.

Montrons que $x \in \operatorname{Im} p_F = F$.

On a $x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$ donc $p_F(x) = x$.

Donc $x \in \operatorname{Im} p_F$.

D'où $\operatorname{Im} p_F = F$. ■

Démonstration 12.63 ($\ker p_F = G$*)*
$\boxed{\supseteq}$

Soit $x \in G$

On a $x = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{x}_{\in G}$ donc $p_F(x) = 0_E$.

Donc $x \in \ker p_F$.

$\boxed{\subseteq}$

Soit $x \in \ker p_F$.

On a $x = p_F(x) + p_G(x) = p_G(x) \in G$.

D'où l'égalité. ■

Définition 12.64
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p \in \mathscr{L}(E)$.

On dit que p est un projecteur s'il existe deux sous-espaces vectoriels F et G supplémentaires dans E tels que p soit le projecteur sur F parallèlement à G.

Exemple 12.65 (On reprend les couples de supplémentaires de l'Exemple 12.29)

(1) On a vu $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$.
Le projecteur sur $\mathbb{R}$ parallèlement à $i\mathbb{R}$ est

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \operatorname{Re} z \end{array}$$

Le projecteur sur $i\mathbb{R}$ parallèlement à $\mathbb{R}$ est

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & i \operatorname{Im} z \end{array}$$

(2) On a vu $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = F \oplus G$ où F (respectivement G) est l'ensemble des fonctions paires (respectivement impaires) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Les projecteurs p_F et p_G associés à cette décomposition de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ en somme directe sont :

$$p_F : \begin{array}{ccc} \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} \end{array} \end{array}$$

et

$$p_G : \begin{array}{ccc} \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \end{array} \end{array}$$

(3) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré $n+1$.
On a vu $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[X]Q \oplus \mathbb{K}_n[X]$.
Le projecteur sur $\mathbb{K}_n[X]$ parallèlement à $\mathbb{K}[X]Q$ est l'application qui à tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ associe le reste de sa division euclidienne par Q.

Proposition 12.66
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p \in \mathscr{L}(E)$.

Alors p est un projecteur si, et seulement si, $p^2 = p$ (c'est-à-dire $p \circ p = p$).

Précisément, p est alors le projecteur sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\ker p$.

Démonstration 12.67

$\boxed{\Longrightarrow}$

Supposons que p est un projecteur.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\begin{cases} E = F \oplus G \\ p \text{ est le projecteur sur } F \text{ parallèlement à } G \end{cases}$

Montrons que $p^2 = p$.

Soit $x \in E$.

On a $p(x) \in F$ donc $p(x) = \underbrace{p(x)}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$.

Donc $p(p(x)) = p(x)$.

Donc $p^2 = p$.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Supposons $p^2 = p$.

Posons $F = \operatorname{Im} p$ et $G = \ker p$.

Montrons que F et G sont supplémentaires dans E.

Montrons que $F \cap G = \{0_E\}$.

Soit $y \in F \cap G$.

Comme $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$.

Comme $y \in G$, on a $p(y) = 0_E$.

Donc $p(p(x)) = p^2(x) = p(x) = 0_E$.

Donc $y = 0_E$.

Montrons que $F + G = E$.

Soit $x \in E$.

On remarque $x = \underbrace{x - p(x)}_{\substack{\in \ker p \\ \text{car } p(x-p(x)) = p(x) - p^2(x) = 0_E}} + \underbrace{p(x)}_{\in \operatorname{Im} p}$.

Donc $F + G = E$.

Finalement, $F \oplus G = E$.

Notons p_F le projecteur sur F parallèlement à G.

Montrons que $p = p_F$.

Soit $x \in E$.

On a $x = \underbrace{p(x)}_{\in F} + \underbrace{x - p(x)}_{\in G}$.

Donc $p_F(x) = p(x)$ donc $p = p_F$.

Donc p est un projecteur. ■

Proposition 12.68
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p un projecteur de E.

Alors $\operatorname{Im} p$ *est l'ensemble des points fixes de p :*

$$\operatorname{Im} p = \{x \in E \mid p(x) = x\} = \ker(p - \mathrm{id}_E).$$

Démonstration 12.69
On remarque

$$\begin{aligned} \forall x \in E,\ \ x \in \ker(p - \mathrm{id}_E) &\iff (p - \mathrm{id}_E)(x) = 0_E \\ &\iff p(x) - x = 0_E \\ &\iff p(x) = x \end{aligned}$$

donc $\ker(p - \mathrm{id}_E)$ est l'ensemble des points fixes de p.

Montrons que $\operatorname{Im} p = \{x \in E \mid p(x) = x\}$.

$\boxed{\supseteq}$ Soit $x \in E$ tel que $p(x) = x$. Alors $x \in \operatorname{Im} p$.

$\boxed{\subseteq}$

Soit $y \in \operatorname{Im} p$.

Il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$.

Donc $p(y) = p(p(x))$.

Donc $p(y) = p^2(x) = p(x) = y$. ■

Proposition 12.70
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E et $u_1 \in \mathscr{L}(E_1, F)$ et $u_2 \in \mathscr{L}(E_2, F)$.

Alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que

$$u\big|_{E_1} = u_1 \qquad \text{et} \qquad u\big|_{E_2} = u_2.$$

Elle est donnée par :

$$\forall x \in E,\ \ u(x) = u_1(p_1(x)) + u_2(p_2(x))$$

où p_1 (respectivement p_2) est le projecteur sur E_1 (respectivement E_2) parallèlement à E_2 (respectivement E_1).

Démonstration 12.71
Déterminons les applications linéaires $u \in \mathscr{L}(E, F)$ telles que $u|_{E_1} = u_1$ et $u|_{E_2} = u_2$.

$\boxed{\text{analyse}}$

Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $\begin{cases} u|_{E_1} = u_1 \\ u|_{E_2} = u_2 \end{cases}$ et $x \in E$.

On a $x = \underbrace{p_1(x)}_{\in E_1} + \underbrace{p_2(x)}_{\in E_2}$.

Comme u est linéaire, on a

$$\begin{aligned} u(x) &= u(p_1(x)) + u(p_2(x)) \\ &= u_1(p_1(x)) + u_2(p_2(x)). \end{aligned}$$

Donc $u = u_1 p_1 + u_2 p_2$.

$\boxed{\text{synthèse}}$

Posons $u = \overbrace{\underbrace{u_1}_{\in\mathscr{L}(E_1,F)} \underbrace{p_1}_{\in\mathscr{L}(E,E_1)}}^{\in\mathscr{L}(E,F)} + \overbrace{\underbrace{u_2}_{\in\mathscr{L}(E_2,F)} \underbrace{p_2}_{\in\mathscr{L}(E,E_2)}}^{\in\mathscr{L}(E,F)}$.

On a $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

De plus, on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in E_1, \quad u(x) &= u_1(p_1(x)) + u_2(p_2(x)) \\ &= u_1(x) + u_2(0_E) \\ &= u_1(x) \end{aligned}$$

donc $u|_{E_1} = u_1$.

On montre de même $u|_{E_2} = u_2$.

$\boxed{\text{conclusion}}$

$u_1 p_1 + u_2 p_2$ est l'unique $u \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $u|_{E_1} = u_1$ et $u|_{E_2} = u_2$. ■

Remarque 12.72
On peut reformuler la proposition précédente (dont on garde les notations) en écrivant que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E_1, F) \times \mathscr{L}(E_2, F) \\ u & \longmapsto & \left(u|_{E_1}, u|_{E_2}\right) \end{array}$$

est une bijection.

12.2.5 Symétries

Dans ce paragraphe, on suppose que le corps $\mathbb{K}$ considéré est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Définition/Proposition 12.73
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

On note p_F (respectivement p_G) le projecteur sur F (respectivement G) parallèlement à G (respectivement F).

On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G l'endomorphisme $s \in \mathscr{L}(E)$ tel que :

$$\begin{cases} \forall x_F \in F, \quad s(x_F) = x_F \\ \forall x_G \in G, \quad s(x_G) = -x_G \end{cases}$$

Selon la Proposition 12.70, cela définit bien l'endomorphisme s.

En d'autres termes, on a :

$$s = p_F - p_G.$$

D'où les relations :

$$s = 2p_F - \mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad p_F = \frac{1}{2}(\mathrm{id}_E + s).$$

On a enfin :

$$F = \ker(s - \mathrm{id}_E) \qquad \text{et} \qquad G = \ker(s + \mathrm{id}_E).$$

Démonstration 12.74
Soient $x \in E$ et $x_F \in F$ et $x_G \in G$ tels que $x = x_F + x_G$.

On a $s(x) = x_F - x_G$.

On a

$$\begin{aligned} x \in \ker(s - \mathrm{id}_E) &\iff s(x) = x \\ &\iff x_F - x_G = x_F + x_G \\ &\iff -x_G = x_G \\ &\iff x_G = 0 \\ &\iff x \in F. \end{aligned}$$

Donc $F = \ker(s - \mathrm{id}_E)$.

De même, on a

$$\begin{aligned} x \in \ker(s + \mathrm{id}_E) &\iff s(x) = -x \\ &\iff x_F - x_G = -x_F - x_G \\ &\iff x_F = -x_F \\ &\iff x_F = 0 \\ &\iff x \in G. \end{aligned}$$

Donc $G = \ker(s + \mathrm{id}_E)$. ■

Définition 12.75
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $s \in \mathscr{L}(E)$.

On dit que s est une symétrie s'il existe deux sous-espaces vectoriels F et G supplémentaires dans E tels que s soit la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Proposition 12.76
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $s \in \mathscr{L}(E)$.

Alors s est un symétrie si, et seulement si, $s^2 = \mathrm{id}_E$ (c'est-à-dire $s \circ s = \mathrm{id}_E$).

Précisément, s est alors la symétrie par rapport à $\ker(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\ker(s + \mathrm{id}_E)$.

Démonstration 12.77
$\boxed{\Longleftarrow}$

Supposons $s^2 = \mathrm{id}_E$.

Montrons que $E = \ker(s - \mathrm{id}_E) \oplus \ker(s + \mathrm{id}_E)$, c'est-à-dire

$$\forall x \in E, \ \ \exists! \, (x_1, x_{-1}) \in \ker(s - \mathrm{id}_E) \times \ker(s + \mathrm{id}_E), \ \ x = x_1 + x_{-1}.$$

Soit $x \in E$.

$\boxed{\text{analyse}}$

Soit $(x_1, x_{-1}) \in \ker(s - \mathrm{id}_E) \times \ker(s + \mathrm{id}_E)$ tel que $x = x_1 + x_{-1}$.

On a $x_1 \in \ker(s - \mathrm{id}_E)$ donc $s(x_1) = x_1$.

On a $x_{-1} \in \ker(s + \mathrm{id}_E)$ donc $s(x_{-1}) = -x_{-1}$.

Or $x = x_1 + x_{-1}$ donc $s(x) = s(x_1) + s(x_{-1}) = x_1 - x_{-1}$.

Donc
$$x_1 = \frac{x + s(x)}{2} \qquad \text{et} \qquad x_{-1} = \frac{x - s(x)}{2}.$$

$\boxed{\text{synthèse}}$

Posons $x_1 = \dfrac{x + s(x)}{2}$ et $x_{-1} = \dfrac{x - s(x)}{2}$.

On a $s(x_1) = \dfrac{s(x) + s^2(x)}{2} = \dfrac{s(x) + x}{2} = x_1$.

On a $s(x_{-1}) = \dfrac{s(x) - s^2(x)}{2} = \dfrac{s(x) - x}{2} = -x_{-1}$.

On a $x_1 + x_{-1} = \dfrac{x + s(x)}{2} + \dfrac{x - s(x)}{2} = \dfrac{2x}{2} = x.$

$\boxed{\text{conclusion}}$ D'où l'existence et l'unicité de x_1 et x_{-1}.

Montrons que s est une symétrie par rapport à $\ker(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\ker(s + \mathrm{id}_E)$.

On a

$$\forall x_1 \in \ker(s - \mathrm{id}_E), \quad \forall x_{-1} \in \ker(s + \mathrm{id}_E), \quad \begin{aligned} s(x_1 + x_{-1}) &= s(x_1) + s(x_{-1}) \\ &= x_1 - x_{-1}. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

$\boxed{\Longrightarrow}$

Supposons que s est une symétrie.

Alors il existe F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$ et s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G :

$$\forall x_F \in F, \quad \forall x_G \in G, \quad s(x_F + x_G) = x_F - x_G.$$

On remarque :

$$\forall x_F \in F, \quad \forall x_G \in G, \quad s^2(x_F + x_G) = s(x_F - x_G) = x_F + x_G.$$

Donc $s^2 = \mathrm{id}_E$. ■

Exemple 12.78
L'application suivante est une symétrie :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(-x) \end{array} \end{array}$$

Remarque 12.79
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et s une symétrie de E.

On a $s^2 = \mathrm{id}_E$ donc s est surjective et injective donc $\begin{cases} \ker s = \{0_E\} \\ \operatorname{Im} s = E \end{cases}$

12.2.6 Isomorphismes, automorphismes

Définition 12.80 (Isomorphisme)
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

On appelle isomorphisme (de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels) de E vers F toute application linéaire $u : E \longrightarrow F$ qui est une bijection de E vers F.

Lorsqu'il existe un isomorphisme de E vers F, on dit que E et F sont des espaces vectoriels isomorphes.

Proposition 12.81
Soient E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u : E \longrightarrow F$ et $v : F \longrightarrow G$ deux isomorphismes de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Alors $vu : E \longrightarrow G$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Démonstration 12.82
⋆⋆ **Exercice** ⋆⋆ ■

Proposition 12.83
Si $u : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels alors sa bijection réciproque $u^{-1} : F \longrightarrow E$ est aussi un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Démonstration 12.84
On a $u^{-1} : F \longrightarrow E$.

Montrons que u^{-1} est linéaire.

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ et $y_1, y_2 \in F$.

Posons $\begin{cases} x_1 = u^{-1}(y_1) \\ x_2 = u^{-1}(y_2) \end{cases}$

On a $\begin{cases} y_1 = u(x_1) \\ y_2 = u(x_2) \end{cases}$

Donc comme u est linéaire : $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = u(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$.

Donc
$$u^{-1}(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \lambda_1 u^{-1}(y_1) + \lambda_2 u^{-1}(y_2).$$

Donc u^{-1} est linéaire. ■

Définition 12.85 (Automorphisme)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Un automorphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de E est un isomorphisme $u : E \longrightarrow E$ de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de E vers E, c'est-à-dire un endomorphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de E bijectif.

L'ensemble des automorphismes de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de E est appelé le groupe linéaire de E et est noté $\mathrm{GL}(E)$.

Proposition 12.86
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Alors $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ *est un groupe.*

Son élément neutre est id_E.

L'inverse u^{-1} d'un élément $u \in \mathrm{GL}(E)$ est sa bijection réciproque.

Rappel : on a

$$\forall u, v \in \mathrm{GL}(E), \quad (u \circ v)^{-1} = v^{-1} \circ u^{-1}.$$

Démonstration 12.87
On sait que $(S_E, \circ)$ est un groupe (où S_E est l'ensemble des bijections de E dans E) et que dans ce groupe, l'élément neutre est id_E et l'inverse d'un élément f est sa bijection réciproque f^{-1}.

Montrons que $\mathrm{GL}(E)$ est un sous-groupe de S_E.

On a $\mathrm{GL}(E) \subseteq S_E$.

On a $\mathrm{id}_E \in \mathrm{GL}(E)$.

Soient $u, v \in \mathrm{GL}(E)$.

Alors $u \circ v \in \mathrm{GL}(E)$ ($u \circ v$ est une bijection car u et v sont des bijections et $u \circ v$ est linéaire car u et v sont linéaires).

De plus, $u^{-1} \in \mathrm{GL}(E)$ selon la Proposition 12.83.

Donc $\mathrm{GL}(E)$ est un sous-groupe de S_E.

Donc $\mathrm{GL}(E)$ est un groupe. ∎

12.3 Familles de vecteurs

12.3.1 Familles libres

Définition 12.88
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, un entier $p \in \mathbb{N}^*$ et une famille de vecteurs $\mathscr{F} = \left(x_1, \ldots, x_p\right) \in E^p$.

On dit que $\mathscr{F}$ est une famille libre (sur $\mathbb{K}$) ou que les vecteurs $x_1, \ldots, x_p$ sont linéairement indépendants (sur $\mathbb{K}$) si :

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K},\ \ \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p = 0_E \implies \left(\lambda_1, \ldots, \lambda_p\right) = (0, \ldots, 0)\,.$$

Si la famille $\mathscr{F}$ n'est pas libre, on dit qu'elle est liée.

Exemple 12.89
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x \in E$.

Alors la famille (x) est liée si, et seulement si, le vecteur x est nul.

Démonstration 12.90
Découle de la Proposition 12.11. ■

Exercice/Exemple 12.91
On pose

$$E = \mathbb{R}^2 \qquad v_1 = (1, 0) \qquad v_2 = (1, 1) \qquad v_3 = (0, 1)\,.$$

Montrer :

(1) que la famille $(v_1, v_2) \in E^2$ est libre.

(2) que la famille $(v_1, v_2, v_3) \in E^3$ est liée.

Correction 12.92 (2)
On a $v_1 - v_2 + v_3 = (0, 0)$ or $(1, -1, 1) \neq (0, 0, 0)$ donc (v_1, v_2, v_3) est liée.

Correction 12.93 (1)
Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$.

Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

On a $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donc $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$ donc $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 = 0$.

Donc (v_1, v_2) est libre.

Remarque 12.94
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{F} = (x_1, \dots, x_p) \in E^p$.

(1) Le fait que la famille $\mathscr{F}$ soit libre ne dépend pas de l'ordre de ses vecteurs :

$$\forall \sigma \in S_p, \quad \left(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}\right) \text{ est libre} \iff \left(x_1, \dots, x_p\right) \text{ est libre.}$$

(2) Si la famille $\mathscr{F}$ contient le vecteur nul, alors elle est liée.

(3) Pour que $\mathscr{F}$ soit libre, il faut que ses vecteurs soient deux à deux distincts.

(4) Soit $\mathscr{G} = (x_1, \dots, x_p, \dots, x_m) \in E^m$ une famille contenant $\mathscr{F}$ (avec $m \geqslant p$).
On a l'implication

$$\mathscr{F} \text{ est liée} \implies \mathscr{G} \text{ est liée.}$$

On a donc aussi, en contraposant :

$$\mathscr{G} \text{ est libre} \implies \mathscr{F} \text{ est libre.}$$

Démonstration 12.95 (2)
Soit $k \in [\![1 \,;\, p]\!]$ tel que $x_k = 0_E$.

On a

$$0_{\mathbb{K}} \cdot x_1 + \cdots + 0_{\mathbb{K}} \cdot x_{k-1} + 1_{\mathbb{K}} \cdot x_k + 0_{\mathbb{K}} \cdot x_{k+1} + \cdots + 0_{\mathbb{K}} \cdot x_p = 0_E.$$

Donc $(x_1, \dots, x_p)$ est liée. ∎

Démonstration 12.96 (3)
Soient $k, \ell \in [\![1 \,;\, p]\!]$ tels que $k < \ell$ et $x_k = x_\ell$.

On a

$$0x_1 + \cdots + 0x_{k-1} + x_k + 0x_{k+1} + \cdots + 0x_{\ell-1} - x_\ell + 0x_{\ell+1} + \cdots + 0x_p = 0.$$

Donc $(x_1, \dots, x_p)$ est liée. ∎

Démonstration 12.97 (4)
Supposons que $\mathscr{F}$ est liée.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que $\begin{cases} \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p = 0 \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq (0, \dots, 0) \end{cases}$

Posons $\forall k \in [\![p+1 \,;\, m]\!], \quad \lambda_k = 0$.

On a $\begin{cases} \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m = 0 \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \neq (0, \dots, 0) \end{cases}$

Donc $\mathscr{G}$ est liée. ∎

Proposition 12.98
Une famille est liée si, et seulement si, l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire de ses autres vecteurs.

Démonstration 12.99
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$.

$\boxed{\Longrightarrow}$

Supposons que $(x_1, \ldots, x_p)$ est liée.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que $\begin{cases} \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p = 0_E \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \neq (0, \ldots, 0) \end{cases}$

Soit $k \in [\![1 ; p]\!]$ tel que $\lambda_k \neq 0$.

On remarque :

$$x_k = \sum_{j \in [\![1;p]\!] \setminus \{k\}} \frac{-\lambda_j}{\lambda_k} x_j.$$

Donc $x_k \in \operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_p)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Supposons que l'un des vecteurs de $(x_1, \ldots, x_p)$ est combinaison linéaire des autres.

Montrons que $(x_1, \ldots, x_p)$ est liée.

Quitte à permuter les vecteurs de la famille, on peut supposer $x_1 \in \operatorname{Vect}(x_2, \ldots, x_p)$.

Soient $\mu_2, \ldots, \mu_p \in \mathbb{K}$ tels que $x_1 = \mu_2 x_2 + \cdots + \mu_p x_p$.

On remarque $\begin{cases} x_1 - \mu_2 x_2 - \cdots - \mu_p x_p = 0_E \\ (1, -\mu_2, \ldots, -\mu_p) \neq (0, \ldots, 0) \end{cases}$

Donc $(x_1, \ldots, x_p)$ est liée. ■

Définition 12.100
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x, y \in E$.

On dit que les vecteurs x et y sont colinéaires si la famille (x, y) est liée, c'est-à-dire si

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, \quad y = \lambda x \qquad \text{ou} \qquad \exists \lambda \in \mathbb{K}, \quad x = \lambda y.$$

Exemple 12.101
Soit une famille de polynômes non-nuls $\mathscr{F} = (P_1, \dots, P_r) \in \mathbb{K}[X]^r$ de degrés deux à deux distincts, c'est-à-dire telle que :
$$\forall i, j \in [\![1 \,;\, r]\!]\,,\ \ i \neq j \implies \deg P_i \neq \deg P_j.$$

Alors $\mathscr{F}$ est libre.

Démonstration 12.102

Posons $\forall i \in [\![1 \,;\, r]\!]\,,\ \begin{cases} \mu_i \text{ le coefficient dominant de } P_i \\ d_i = \deg P_i \in \mathbb{N} \end{cases}$

Quitte à permuter les vecteurs de la famille, on peut supposer $d_1 > d_2 > \cdots > d_r$.

Montrons que $(P_1, \dots, P_r)$ est libre.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_r P_r = 0$.

Montrons que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$.

Le coefficient de degré d_1 de $\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_r P_r$ est $\lambda_1 \mu_1$.

Donc $\lambda_1 \mu_1 = 0$ or $\mu_1 \neq 0$ donc $\lambda_1 = 0$.

Donc $\lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_r P_r = 0$.

On continue de même (récurrence finie) : $\lambda_2 = 0$ puis $\lambda_3 = 0$, etc...

Donc $(P_1, \dots, P_r)$ est libre. ■

Exemple 12.103
$\left(X^5 - X^3 + 1, X^2, X^4 - X, 5\right)$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$ car c'est une famille de polynômes non-nuls de degrés deux à deux distincts.

Proposition 12.104
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ une famille libre de E et $x_{n+1} \in E$.

Alors $(x_1, \dots, x_{n+1})$ est une famille libre si, et seulement si, $x_{n+1} \notin \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

Démonstration 12.105
Par contraposée, montrons que $(x_1,\dots,x_{n+1})$ est liée $\iff$ $x_{n+1}\in\operatorname{Vect}(x_1,\dots,x_n)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Vraie selon la Proposition 12.98.

$\boxed{\Longrightarrow}$

Supposons que $(x_1,\dots,x_{n+1})$ est liée.

Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1}\in\mathbb{K}$ tels que $\begin{cases}\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_{n+1}x_{n+1}=0_E\\(\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1})\neq(0,\dots,0)\end{cases}$

Montrons que $\lambda_{n+1}\neq 0$.

Par l'absurde, supposons $\lambda_{n+1}=0$.

On a $\begin{cases}\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n=0\\(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\neq(0,\dots,0)\end{cases}$

Donc $(x_1,\dots,x_n)$ est liée : contradiction.

Donc $\lambda_{n+1}\neq 0$.

Donc $x_{n+1}=\dfrac{-\lambda_1}{\lambda_{n+1}}x_1+\cdots+\dfrac{-\lambda_n}{\lambda_{n+1}}x_n$.

Donc $x_{n+1}\in\operatorname{Vect}(x_1,\dots,x_n)$. ■

12.3.2 Familles génératrices

Définition 12.106
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\left(x_1,\dots,x_p\right)\in E^p$ une famille d'élément de E.

On dit que $\left(x_1,\dots,x_p\right)$ est une famille génératrice de E ou que la famille $\left(x_1,\dots,x_p\right)$ engendre E si tout vecteur de E est combinaison linéaire de ses vecteurs, c'est-à-dire si

$$E=\operatorname{Vect}\left(x_1,\dots,x_p\right),$$

c'est-à-dire :

$$\forall x\in E,\ \ \exists\lambda_1,\dots,\lambda_p\in\mathbb{K},\ \ x=\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_px_p.$$

Remarque 12.107
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $p\in\mathbb{N}^*$ et $\mathscr{F}=\left(x_1,\dots,x_p\right)\in E^p$.

(1) Le fait que $\mathscr{F}$ soit une famille génératrice de E ne dépend pas de l'ordre de ses vecteurs :

$$\forall\sigma\in S_p,\ \ \left(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(p)}\right)\text{ engendre }E\iff\left(x_1,\dots,x_p\right)\text{ engendre }E.$$

(2) Soit $\mathscr{G} = \left(x_1, \ldots, x_p, \ldots, x_m\right) \in E^m$ une famille contenant $\mathscr{F}$ (avec $m \geqslant p$).
On a l'implication
$$\mathscr{F} \text{ est génératrice} \implies \mathscr{G} \text{ est génératrice.}$$

Proposition 12.108
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $m, n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ une famille quelconque de vecteurs de E et $(y_1, \ldots, y_m) \in E^m$ une famille génératrice de E.

Alors $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille génératrice de E si, et seulement si :
$$\forall j \in [\![1 \,;\, m]\!]\,,\ \ y_j \in \operatorname{Vect}\left(x_1, \ldots, x_n\right).$$

Démonstration 12.109
$\boxed{\implies}$ Claire.

$\boxed{\impliedby}$

Supposons $\forall j \in [\![1 \,;\, m]\!]\,,\ \ y_j \in \operatorname{Vect}\left(x_1, \ldots, x_n\right)$.

Soit $\left(a_{ij}\right)_{(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;m]\!]} \in \mathbb{K}^{[\![1;n]\!] \times [\![1;m]\!]}$ tels que
$$\forall j \in [\![1 \,;\, m]\!]\,,\ \ y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i.$$

Montrons que $(x_1, \ldots, x_n)$ est génératrice de E.

Soit $x \in E$.

Montrons que $x \in \operatorname{Vect}\left(x_1, \ldots, x_n\right)$.

Comme $(y_1, \ldots, y_m)$ est génératrice de E, il existe $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{K}$ tels que
$$x = \sum_{j=1}^{m} b_j y_j.$$

On a donc
$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^{m} b_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_j}_{\in \mathbb{K}} x_i \\ &\in \operatorname{Vect}\left(x_1, \ldots, x_n\right). \end{aligned}$$
■

12.3.3 Bases

Définition 12.110
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(e_1, \dots, e_p) \in E^p$ une famille d'éléments de E.

On dit que $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de E si c'est une famille libre et génératrice de E.

Il est équivalent de dire que tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille :

$$\forall x \in E, \ \ \exists! \left(\lambda_1, \dots, \lambda_p\right) \in \mathbb{K}^p, \ \ x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p.$$

On appelle alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ les coordonnées du vecteur x dans la base $(e_1, \dots, e_p)$.

Exemple 12.111 (Base canonique de $\mathbb{K}^n$)
Posons :

$$\forall k \in [\![1 \,;\, n]\!], \ \ e_k = (\delta_{1k}, \delta_{2k}, \dots, \delta_{nk}) \in \mathbb{K}^n$$

(autrement dit, le n-uplet e_k a tous ses coefficients nuls sauf le k-ème qui vaut 1).

La famille $(e_1, \dots, e_n) \in (\mathbb{K}^n)^n$ est une base de $\mathbb{K}^n$ appelée la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Exemple 12.112 (Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$)
La famille

$$\left(1, X, X^2, \dots, X^n\right)$$

est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ appelée la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice/Exemple 12.113
On pose

$$E = \mathbb{R}^2 \qquad v_1 = (1, 0) \qquad v_2 = (1, 1)\,.$$

Montrer que la famille $(v_1, v_2) \in E^2$ est une base de E et donner les coordonnées d'un vecteur quelconque $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Correction 12.114

Soient $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

On a

$$\begin{aligned}
\lambda v_1 + \mu v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\iff \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} \lambda + \mu = x \\ \mu = y \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \lambda = x - y \\ \mu = y \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc tout vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de v_1 et v_2.

Donc (v_1, v_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

De plus, on a obtenu les coordonnées de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base (v_1, v_2) :

$$(x - y, y)\,.$$

Proposition 12.115
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$ une famille d'éléments de E.

Considérons l'application linéaire

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & E \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) & \longmapsto & \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p \end{array}$$

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(x_1, \ldots, x_p) \text{ est une famille libre } &\iff \varphi \text{ est injective} \\
(x_1, \ldots, x_p) \text{ est une famille génératrice de } E &\iff \varphi \text{ est surjective} \\
(x_1, \ldots, x_p) \text{ est une base de } E &\iff \varphi \text{ est un isomorphisme}
\end{aligned}$$

Démonstration 12.116
On a :

$$\begin{aligned}
(x_1, \ldots, x_p) \text{ est libre } &\iff \left[\forall\, (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ \ \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p = 0_E \implies (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) = (0, \ldots, 0)\right] \\
&\iff \left[\forall\, (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ \ (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \ker\varphi \implies (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) = (0, \ldots, 0)\right] \\
&\iff \ker\varphi = \{0_E\} \\
&\iff \varphi \text{ est injective.}
\end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned}\left(x_1,\dots,x_p\right) \text{ est génératrice de } E &\iff \forall x \in E,\ \exists\left(\lambda_1,\dots,\lambda_p\right) \in \mathbb{K}^p,\ x = \varphi\left(\left(\lambda_1,\dots,\lambda_p\right)\right)\\ &\iff \varphi \text{ est une surjection de } \mathbb{K}^p \text{ vers } E.\end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}\left(x_1,\dots,x_p\right) \text{ est une base de } E &\iff \left(x_1,\dots,x_p\right) \text{ est libre et génératrice de } E\\ &\iff \varphi \text{ est injective et surjective}\\ &\iff \varphi \text{ est bijective.}\end{aligned}$$

■

Proposition 12.117
Soit $n \in \mathbb{N}$.

On considère une famille de polynômes $\mathscr{B} = (P_0,\dots,P_n) \in \mathbb{K}_n[X]^{n+1}$ « à degrés échelonnés », c'est-à-dire telle que

$$\forall k \in [\![0\,;n]\!],\ \deg P_k = k.$$

Alors $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Démonstration 12.118
On sait que $\mathscr{B}$ est une famille libre (selon l'Exemple 12.101).

Montrons que $\mathscr{B}$ est génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.

Montrons que $\forall k \in [\![0\,;n]\!],\ \underbrace{\forall P \in \mathbb{K}_k[X],\ P \in \mathrm{Vect}(P_0,\dots,P_k)}_{\mathscr{P}(k)}$ par récurrence sur k.

Soit $P \in \mathbb{K}_0[X]$.

On a P_0 constant et non-nul et P constant donc $P = \dfrac{P}{P_0}P_0$ avec $\dfrac{P}{P_0} \in \mathbb{K}$.

Donc $P \in \mathrm{Vect}(P_0)$.

D'où $\mathscr{P}(0)$.

Soit $k \in [\![0\,;n-1]\!]$ tel que $\mathscr{P}(k)$.

Montrons $\mathscr{P}(k+1)$.

Soient $P \in \mathbb{K}_{k+1}[X]$ et $a_0,\dots,a_{k+1} \in \mathbb{K}$ tels que

$$P = a_{k+1}X^{k+1} + \cdots + a_0X^0.$$

On note μ le coefficient dominant de P_{k+1}.

On a

$$\begin{cases} \deg\left(P - \dfrac{a_{k+1}}{\mu} P_{k+1}\right) \leqslant k+1 \text{ car } \begin{cases} \deg P \leqslant k+1 \\ \deg P_{k+1} \leqslant k+1 \end{cases} \\ \text{le coefficient de degré } k+1 \text{ de } P - \dfrac{a_{k+1}}{\mu} P_{k+1} \text{ vaut } a_{k+1} - \dfrac{a_{k+1}}{\mu}\mu = 0 \end{cases}$$

Donc $P - \dfrac{a_{k+1}}{\mu} P_{k+1} \in \mathbb{K}_k[X]$.

Selon $\mathscr{P}(k)$, il existe $\omega_0, \ldots, \omega_k \in \mathbb{K}$ tels que

$$P - \frac{a_{k+1}}{\mu} P_{k+1} = \omega_0 P_0 + \cdots + \omega_k P_k.$$

Finalement, on a :

$$P = \omega_0 P_0 + \cdots + \omega_k P_k + \frac{a_{k+1}}{\mu} P_{k+1}.$$

Donc $P \in \mathrm{Vect}(P_0, \ldots, P_{k+1})$.

D'où $\mathscr{P}(k+1)$.

On a $\mathscr{P}(n)$ donc $\mathbb{K}_n[X] = \mathrm{Vect}(\mathscr{B})$.

Donc $\mathscr{B}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.

Finalement, $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. ■

12.3.4 Pivot de Gauss pour les systèmes linéaires

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et deux familles de scalaires :

$$\left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]} \in \mathbb{K}^{[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]} \qquad \text{et} \qquad (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^n.$$

Considérons le système linéaire de n équations à p inconnues suivant :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

On peut dire au choix :

- que ses inconnues sont les scalaires $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{K}$.
- que son inconnue est le p-uplet $\left(x_1, \ldots, x_p\right) \in \mathbb{K}^p$.

L'ensemble solution $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{K}^p$ de (S) est l'ensemble des p-uplets qui vérifient (S).

On dit que (S) est un système linéaire homogène si $b_1 = \cdots = b_n = 0$.

On a

$$\mathcal{S} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{K}^p \iff (S) \text{ est un système linéaire homogène.}$$

L'algorithme du « pivot de Gauss » permet de résoudre le système (S) en raisonnant par équivalences, en appliquant au système les transformations suivantes :

- $L_i \leftrightarrow L_j$: échange des lignes L_i et L_j.
- $L_i \leftarrow \lambda L_i$: multiplication de la ligne L_i par $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$: ajout à L_i de λL_j où $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

De plus, si le système (S) est linéaire homogène, il permet d'obtenir une base de l'espace vectoriel $\mathcal{S}$.

Exercice/Exemple 12.119
Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Résoudre les systèmes linéaires suivants en appliquant l'algorithme du pivot de Gauss.

Donner une base de l'ensemble solution de chaque système linéaire homogène.

$$(S_1) \begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ x + 2y = -3 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} x + 2y - z = \alpha \\ 2x + 5y + 3z = \beta \\ 3x + 7y + 2z = \gamma \end{cases} \quad (S_3) \begin{cases} a + 2b + c + 3d = 0 \\ 3a + 7b + 3c + 6d = 0 \\ a + 3b + c = 0 \end{cases} \quad (S_4)\ 8a + 4b - 2c + d = 0$$

Correction 12.120 (1)
On a

$$\begin{aligned}
(S_1) &\iff \begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ x + 2y = -3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + 2y = -3 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + 2y = -3 \\ -y = 5 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 7 \\ y = -5 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S}_1 = \{(7, -5)\}$.

Correction 12.121 (2)
On a

$$(S_2) \iff \begin{cases} x+2y-z=\alpha \\ 2x+5y+3z=\beta \\ 3x+7y+2z=\gamma \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+2y-z=\alpha \\ y+5z=\beta-2\alpha & L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ y+5z=\gamma-3\alpha & L_3 \leftarrow L_3-3L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+2y-z=\alpha \\ y+5z=\beta-2\alpha \\ 0=\gamma-\beta-\alpha \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x-11z=5\alpha-2\beta & L_1 \leftarrow L_1-2L_2 \\ y+5z=\beta-2\alpha \\ 0=\gamma-\beta-\alpha \end{cases}$$

Si $\gamma-\beta-\alpha \neq 0$ alors $\mathcal{S}_2=\varnothing$.

Supposons $\gamma-\beta-\alpha=0$.

Alors

$$\mathcal{S}_2=\left\{\begin{pmatrix} 5\alpha-2\beta \\ \beta-2\alpha \\ 0 \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$$

De plus, si $\alpha=\beta=\gamma=0$ alors (S_2) est homogène et $\mathcal{S}_2$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de base $\left(\begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Correction 12.122 (3)
On a

$$(S_3) \iff \begin{cases} a+2b+c+3d=0 \\ 3a+7b+3c+6d=0 \\ a+3b+c=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a+2b+c+3d=0 \\ b-3d=0 & L_2 \leftarrow L_2-3L_1 \\ b-3d=0 & L_3 \leftarrow L_3-L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a+c+9d=0 & L_1 \leftarrow L_1-2L_2 \\ b-3d=0 \end{cases}$$

Donc

$$\mathcal{S}_3 = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}_{(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2}$$

Donc $\mathcal{S}_3$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de base $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Correction 12.123 (4)
On a

$$\begin{aligned} (S_4) &\iff 8a + 4b - 2c + d = 0 \\ &\iff d + 8a + 4b - 2c = 0 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \forall \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4,\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_4 &\iff d = -8a - 4b + 2c \\ &\iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ -8a - 4b + 2c \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{S}_4 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

et $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{S}_4$.

12.3.5 Familles de vecteurs et applications linéaires

12.3.5.1 Image d'une famille par une application linéaire

Proposition 12.124
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $(x_1,\dots,x_p) \in E^p$ une famille de vecteurs de E.

On a :

(1) Si $(x_1,\dots,x_p)$ est libre et u injective, alors $(u(x_1),\dots,u(x_p))$ est libre.

(2) Si $(x_1,\dots,x_p)$ est génératrice de E et u surjective, alors $(u(x_1),\dots,u(x_p))$ est génératrice de F.

(3) Si $(x_1,\dots,x_p)$ est une base de E et u un isomorphisme, alors $(u(x_1),\dots,u(x_p))$ est une base de F.

Démonstration 12.125 (1)
On suppose que $(x_1,\dots,x_p)$ est libre et u injective.

Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 u(x_1)+\dots+\lambda_p u(x_p) = 0_F$.

Montrons que $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$.

Comme u est linéaire, on a $u(\lambda_1 x_1+\dots+\lambda_p x_p) = 0_F$.

Donc, comme u est injective, on a $\lambda_1 x_1+\dots+\lambda_p x_p = 0_E$.

Donc, comme $(x_1,\dots,x_p)$ est libre, on a $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$.

Donc $(u(x_1),\dots,u(x_p))$ est libre. ■

Démonstration 12.126 (2)
Supposons que $(x_1,\dots,x_p)$ engendre E et que u est surjective.

On a
$$\begin{aligned}\operatorname{Vect}(u(x_1),\dots,u(x_p)) &= u(\operatorname{Vect}(x_1,\dots,x_p)) && \text{car } (x_1,\dots,x_p) \text{ engendre } E\\ &= u(E) && \text{car } u \text{ est surjective}\\ &= F\end{aligned}$$

Donc $(u(x_1),\dots,u(x_p))$ engendre F. ■

Démonstration 12.127 (3)
Découle de (1) et (2). ■

12.3.5.2 Application linéaire définie par l'image d'une base

Proposition 12.128
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $(y_1, \dots, y_p)$ une famille d'éléments de F.

Alors
$$\exists! u \in \mathscr{L}(E, F), \quad \forall j \in [\![1 \,;\, p]\!], \quad u(e_j) = y_j.$$

Démonstration 12.129
Pour tout vecteur $x \in E$, on note $\left(e_1^*(x), \dots, e_p^*(x)\right)$ les coordonnées de x dans la base $(e_1, \dots, e_p)$.
Autrement dit, on a
$$\begin{cases} e_1^*(x), \dots, e_p^*(x) \in \mathbb{K} \\ x = e_1^*(x)\, e_1 + \dots + e_p^*(x)\, e_p \end{cases}$$

$\boxed{\text{analyse}}$

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ tel que $\forall j \in [\![1 \,;\, p]\!], \quad u(e_j) = y_j$.

On a $\forall x \in E, \quad x = e_1^*(x)\, e_1 + \dots + e_p^*(x)\, e_p$.

Donc comme u est linéaire, on a :
$$\begin{aligned} \forall x \in E, \quad u(x) &= e_1^*(x)\, u(e_1) + \dots + e_p^*(x)\, u(e_p) \\ &= e_1^*(x)\, y_1 + \dots + e_p^*(x)\, y_p. \end{aligned}$$

D'où $u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & e_1^*(x)\, y_1 + \dots + e_p^*(x)\, y_p \end{array}$

$\boxed{\text{synthèse}}$

Posons $u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & e_1^*(x)\, y_1 + \dots + e_p^*(x)\, y_p \end{array}$

u est clairement linéaire car $e_1^*, \dots, e_p^*$ sont linéaires.

On a
$$\forall j \in [\![1 \,;\, p]\!], \quad u(e_j) = e_1^*(x)\, y_1 + \dots + e_p^*(x)\, y_p = \delta_{1j} y_1 + \dots + \delta_{pj} y_p = y_j.$$ ■

12.3.6 Extension aux familles quelconques

Dans ce paragraphe, on étend ce qu'on a vu précédemment à des familles de vecteurs indicées par un ensemble quelconque (éventuellement infini).

12.3.6.1 Combinaisons linéaires

Définition 12.130 (Famille de scalaires « presque tous nuls »)
Soient I un ensemble et $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ une famille de scalaires indicée par I.

On appelle support de la famille $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ l'ensemble

$$\operatorname{Supp}(\lambda_i)_{i\in I} = \{i \in I \mid \lambda_i \neq 0\}.$$

Cette famille est dite à support fini si son support est fini. Si l'ensemble I est infini, on dit alors aussi que c'est une famille de scalaires presque tous nuls.

L'ensemble des familles de scalaires indicées par I à support fini est souvent noté $\mathbb{K}^{(I)}$:

$$\mathbb{K}^{(I)} = \left\{(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I \;\middle|\; \operatorname{Card}\operatorname{Supp}(\lambda_i)_{i\in I} < +\infty\right\}.$$

Si I est fini, on a $\mathbb{K}^{(I)} = \mathbb{K}^I$.

Notation 12.131
Soient I un ensemble, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{F} = (x_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille de vecteurs de E.

Si $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ est une famille de scalaires à support fini, on pose :

$$\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = \sum_{i\in\operatorname{Supp}\mathscr{F}} \lambda_i x_i.$$

Ainsi, on s'autorise à écrire une somme éventuellement infinie $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i x_i$ car on la voit comme une somme finie.

Définition 12.132 (Combinaison linéaire, généralisation de la Définition 12.3)
Soient I un ensemble, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{F} = (x_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille de vecteurs de E.

On appelle combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ tout vecteur de la forme :

$$\sum_{i\in I} \lambda_i x_i$$

où $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ est une famille de scalaires à support fini.

Définition/Proposition 12.133
Soient I un ensemble, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{F} = (x_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille de vecteurs de E.

On appelle sous-espace vectoriel engendré par $\mathscr{F}$ et on note $\operatorname{Vect}(\mathscr{F})$ le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient les vecteurs de $\mathscr{F}$.

Ses éléments sont les combinaisons linéaires de $\mathscr{F}$.

Exemple 12.134
Considérons le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ et la famille $\mathscr{F} = (X^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Alors
$$\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) = \mathbb{K}[X].$$

12.3.6.2 Familles génératrices

Définition 12.135
Soient I un ensemble, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{F} = (x_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille de vecteurs de E.

On dit que $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E ou que la famille $\mathscr{F}$ engendre E si tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{F}$, c'est-à-dire si :
$$E = \mathrm{Vect}(\mathscr{F}),$$
c'est-à-dire :
$$\forall x \in E,\ \ \exists (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)},\ \ x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i.$$

12.3.6.3 Familles libres

Définition 12.136
Soient I un ensemble, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{F} = (x_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille de vecteurs de E.

On dit que $\mathscr{F}$ est une famille libre si :
$$\forall (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)},\ \ \sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0_E \implies [\forall i \in I,\ \ \lambda_i = 0].$$

Si la famille $\mathscr{F}$ n'est pas libre, on dit qu'elle est liée.

Remarque 12.137
Soient I un ensemble, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{F} = (x_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille de vecteurs de E.

Alors la famille $\mathscr{F}$ est libre si, et seulement si, pour tous $p \in \mathbb{N}^*$ et tous $i_1, \ldots, i_p \in I$ deux à deux distincts, la famille $\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}\right)$ est libre.

Exemple 12.138
Soient I un ensemble et $\mathscr{F} = (P_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}[X]^I$ une famille de polynômes non-nuls de degrés deux à deux distincts, c'est-à-dire telle que :
$$\forall i, j \in I,\ \ i \neq j \implies \deg P_i \neq \deg P_j.$$

Alors $\mathscr{F}$ est libre.

12.3.6.4 Bases

Définition 12.139
Soient I un ensemble, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{F} = (e_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille de vecteurs de E.

On dit que $\mathscr{F}$ est une base de E si c'est une famille libre et génératrice de E.

Il est équivalent de dire que tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille :

$$\forall x \in E,\ \ \exists!\, (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)},\ \ x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i.$$

On appelle alors $(\lambda_i)_{i\in I}$ les coordonnées du vecteur x dans la base $\mathscr{F}$.

Exemple 12.140 (Base canonique de $\mathbb{K}[X]$)
La famille

$$(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$$

est une base de $\mathbb{K}[X]$ appelée la base canonique de $\mathbb{K}[X]$.

12.3.6.5 Cas des ensembles de vecteurs

Définition 12.141 (Parties libres, génératrices)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

On dit qu'une partie $A \subseteq E$ est :

- libre si la famille $(x)_{x\in A}$ est libre.
- génératrice si la famille $(x)_{x\in A}$ est génératrice de E.
- une base de E si la famille $(x)_{x\in A}$ est une base de E.

12.4 Géométrie affine

12.4.1 Translations

Définition 12.142 (Translation)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $v \in E$.

On appelle translation de vecteur v la fonction :

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x+v \end{array}$$

Remarque 12.143
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $v \in E$.

L'image du vecteur nul par la translation de vecteur v est le vecteur v.

En particulier, une translation n'est jamais un endomorphisme, sauf si $v = 0$ (dans ce cas, la translation de vecteur v est l'application identité id_E).

12.4.2 Sous-espaces affines

Définition/Proposition 12.144 (Sous-espace affine d'un espace vectoriel)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

On appelle sous-espace affine de E toute partie $A \subseteq E$ de la forme :

$$A = v_1 + A_0 = \{v_1 + v_0\}_{v_0 \in A_0}$$

où $v_1 \in E$ et A_0 est un sous-espace vectoriel de E.

On dit que $v_1 + A_0$ est le sous-espace affine de direction A_0 passant par v_1.

(1) On a alors nécessairement :
$$A_0 = \{v - v'\}_{v,v' \in A}\,.$$
En particulier, l'espace vectoriel A_0 est unique. Il est appelé la direction du sous-espace affine A.

(2) En revanche, le vecteur v_1 n'est pas unique en général car tout vecteur de A convient :
$$\forall v_2 \in A,\quad A = v_2 + A_0.$$

Démonstration 12.145 (1)
Montrons que $A_0 = \{v - v'\}_{v,v' \in A}$.

$\boxed{\supseteq}$

Soient $v, v' \in A$.

Montrons que $v - v' \in A_0$.

Il existe $v_0, v_0' \in A_0$ tels que $\begin{cases} v = v_1 + v_0 \\ v' = v_1 + v_0' \end{cases}$

On a
$$\begin{aligned} v - v' &= v_1 + v_0 - (v_1 + v_0)' \\ &= v_0 - v_0' \\ &\in A_0 \end{aligned} \qquad \textit{car } A_0 \textit{ est un sous-espace vectoriel}$$

$\boxed{\subseteq}$

Soit $v_0 \in A_0$.

On a $\begin{cases} v_1 + v_0 \in A \\ v_1 + 0_E \in A \end{cases}$

D'où
$$v_0 = v_1 + v_0 - (v_1 + 0_E) \in \{v - v'\}_{v,v' \in A}\,.$$
■

Démonstration 12.146 (2)
Soit $v_2 \in A$.

Montrons que $A = v_2 + A_0$, c'est-à-dire $v_1 + A_0 = v_2 + A_0$.

On a $v_2 = v_1 + v_0$ où $v_0 \in A_0$.

Donc
$$v_2 + A_0 = v_1 + v_0 + A_0 = v_1 + A_0 \text{ car } v_0 \in A_0.$$
■

Remarque 12.147
Les sous-espaces affines de E sont les images des sous-espaces vectoriels de E par les translations de E.

Exemple 12.148
Soit E un espace vectoriel.

Alors

- L'ensemble E est un sous-espace affine de E, de direction E.
- Tout singleton de E est un sous-espace affine de E, de direction $\{0_E\}$.
- Tout sous-espace vectoriel F de E est un sous-espace affine de E, de direction F.
- L'ensemble vide n'est pas un sous-espace affine de E.

Exemple 12.149
Prenons $E = \mathbb{R}^3$ et considérons le système suivant, d'inconnue $(x, y, z) \in E$:

$$(S)\ \begin{cases} x + y - 4z = 1 \\ x - y - 2z = 3 \end{cases}$$

Son ensemble solution A est un sous-espace affine de E.

Démonstration 12.150
On a

$$\begin{aligned}
(S) &\iff \begin{cases} x + y - 4z = 1 \\ x - y - 2z = 3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + y - 4z = 1 \\ -2y + 2z = 2 \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x - 3z = 2 \quad L_1 \leftarrow L_1 + \dfrac{1}{2}L_2 \\ y - z = -1 \quad L_2 \leftarrow \dfrac{-1}{2}L_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
A &= \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}_{\lambda \in \mathbb{R}} \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc A est le sous-espace affine de E passant par $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et dirigé par $\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. ■

Proposition 12.151 (Intersection de sous-espaces affines)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces affines de E.

Pour tout $i \in I$, on note A_i' la direction de A_i.

Alors l'intersection $\bigcap_{i\in I} A_i$ est soit l'ensemble vide, soit un sous-espace affine de E de direction $\bigcap_{i\in I} A_i'$.

Démonstration 12.152
Supposons $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \varnothing$.

Soit $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$.

Montrons que $\bigcap_{i\in I} A_i = x + \bigcap_{i\in I} A_i'$.

$\boxed{\subseteq}$

Soit $y \in \bigcap_{i\in I} A_i$.

On a $\forall i \in I, \quad y \in A_i = x + A_i'$.

Donc pour tout $i \in I$, il existe $z_i \in A_i'$ tel que $y = x + z_i$.

D'où $\forall i \in I, \quad y - x = z_i \in A_i'$.

Donc $y - x \in \bigcap_{i\in I} a_i'$.

D'où $y = x + y - x \in x + \bigcap_{i\in I} A_i'$.

$\boxed{\supseteq}$

Soit $y \in x + \bigcap_{i\in I} A_i'$.

Alors $\forall j \in I, \quad y \in x + A_j'$ car $A_j' \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i'$.

Donc $y \in \bigcap_{j\in I} \left(x + A_j'\right) = \bigcap_{j\in I} A_j$. ■

12.4.3 Équations linéaires

Définition 12.153 (Équation linéaire)
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $y \in F$.

L'équation suivante, d'inconnue $x \in E$, est appelée équation linéaire :

$$u(x) = y.$$

Exemple 12.154 (Système linéaire)
Le système suivant :

$$(S) \begin{cases} x + y - 4z = 1 \\ x - y - 2z = 3 \end{cases}$$

peut être vu comme une équation linéaire.

Posons $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x + y - 4z \\ x - y - 2z \end{pmatrix} \end{array} \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2\right)$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Alors $(S) \iff u(X) = Y$: équation linéaire d'inconnue $X \in \mathbb{R}^3$.

Exemple 12.155 (Équation différentielle linéaire)
L'équation différentielle

$$(E) \quad y'' + y = \cos t$$

peut être vue comme une équation linéaire.

Posons $u : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ y & \longmapsto & y'' + y \end{array}$ et $z = \cos \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Alors $(E) \iff u(y) = z$: équation linéaire d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exemple 12.156 (Polynômes interpolateurs de Lagrange)
Soient $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts et $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$.

Le système suivant, d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$(S) \begin{cases} P(x_0) = y_0 \\ \vdots \\ P(x_n) = y_n \end{cases}$$

peut être vu comme une équation linéaire.

Posons $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(x_0), \ldots, P(x_n)) \end{array} \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}[X], \mathbb{R}^{n+1}\right)$ et $Y = (y_0, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Alors $(S) \iff u(P) = Y$: équation linéaire d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$.

Proposition 12.157 (Ensemble solution d'une équation linéaire)
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $y \in F$.

L'ensemble solution $\mathscr{S}$ de l'équation linéaire suivante, d'inconnue $x \in E$:

$$u(x) = y$$

est soit l'ensemble vide, soit un sous-espace affine de E de direction $\ker u$.

Démonstration 12.158
Supposons $\mathscr{S} \neq \varnothing$.

Soit $x_1 \in \mathscr{S}$.

On a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in E, \quad u(x) = y &\iff u(x) = u(x_1) \\
&\iff u(x - x_1) = 0 \\
&\iff x - x_1 \in \ker u \\
&\iff \exists x_0 \in \ker u, \quad x - x_1 = x_0 \\
&\iff \exists x_0 \in \ker u, \quad x = x_0 + x_1 \\
&\iff x \in \ker u + x_1.
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S} = x_1 + \ker u$. ■

Chapitre 13

Équations différentielles

Sommaire

On pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

13.1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

13.1.1 Cadre

On considère :

- I un intervalle de $\mathbb{R}$;
- $a, b \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})$;

- éventuellement $t_0 \in I$ et $v_0 \in \mathbb{K}$;
- l'équation différentielle linéaire du premier ordre (E) $\ y' + a(t)\,y = b(t)$.

Résoudre[1] l'équation différentielle (E), c'est déterminer quelles sont les fonctions $y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$ qui sont solutions de (E), c'est-à-dire qui vérifient :

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)\,y(t) = b(t)\,.$$

L'ensemble solution de l'équation différentielle E est l'ensemble des solutions de (E) :

$$\mathcal{S} = \left\{ y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K}) \;\middle|\; \forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)\,y(t) = b(t) \right\}.$$

L'équation différentielle (E) est dite homogène si b est la fonction identiquement nulle.

On appelle équation homogène associée à (E) l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre : (E_0) $\ y' + a(t)\,y = 0$.

Lorsque l'on recherche la[2] solution de (E) qui vérifie de plus une condition initiale, on dit qu'on résout le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' + a(t)\,y = b(t) \\ y(t_0) = v_0 \end{cases}$$

Exemple 13.1

- Équation différentielle linéaire homogène du premier ordre :
$$y' + (3\ln t + 1)\,y = 0.$$
- Équation différentielle linéaire du premier ordre :
$$y' - \frac{\ln t}{t} y = t.$$
- Problème de Cauchy :
$$\begin{cases} y' + ty = t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

13.1.2 Cas homogène

Proposition 13.2
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})$ et $A : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une primitive de a.

Les solutions de l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre

$$(E_0) \quad y' + a(t)\,y = 0$$

sont les fonctions de la forme

$$y_0 : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & \lambda \mathrm{e}^{-A(t)} \end{array} \qquad \text{où } \lambda \in \mathbb{K}.$$

1. On dit aussi « intégrer l'équation différentielle (E) ».
2. On verra que cette solution existe et est unique.

Démonstration 13.3
Soit $y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$.

On a

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (E_0) &\iff \forall t \in I,\quad y'(t) + a(t)\,y(t) = 0 \\ &\iff \forall t \in I,\quad y'(t)\,\mathrm{e}^{A(t)} + a(t)\,y(t)\,\mathrm{e}^{A(t)} = 0 \\ &\iff \forall t \in I,\quad \left(y\mathrm{e}^{A}\right)'(t) = 0 \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{K},\quad \forall t \in I,\quad y(t)\,\mathrm{e}^{A(t)} = \lambda \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{K},\quad \forall t \in I,\quad y(t) = \lambda \mathrm{e}^{-A(t)}. \end{aligned}$$

car I est un intervalle

■

Exercice/Exemple 13.4
Résoudre sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle homogène

$$(E_0)\quad y' + \frac{1}{t}y = 0.$$

Correction 13.5
Une primitive de $a : t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ est $A : t \longmapsto \ln t$.

Donc les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda \mathrm{e}^{-\ln t} = \dfrac{\lambda}{t} \end{array}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice/Exemple 13.6
Résoudre sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle homogène

$$(E_0)\quad y' + (\ln t)\,y = 0.$$

Correction 13.7
Une primitive de $t \longmapsto \ln t$ est $t \longmapsto t\ln t - t$.

Donc les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda \mathrm{e}^{-t\ln t + t} = \lambda t^{-t}\mathrm{e}^{t} = \lambda \left(\dfrac{\mathrm{e}}{t}\right)^{t} \end{array}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

13.1.3 Méthode de variation de la constante

Remarque 13.8
Il existe beaucoup de méthodes dites de « variation de la constante ». Elles permettent de trouver une/des/les solutions d'une équation différentielle linéaire à partir d'une solution non-nulle de l'équation différentielle linéaire homogène associée.

On montre dans ce paragraphe comment obtenir une solution (particulière) d'une équation différentielle linéaire à partir d'une solution de l'équation différentielle linéaire homogène associée.

Méthode 13.9 (Méthode de variation de la constante)
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a, b \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})$.

On considère l'équation différentielle linéaire

$$(E) \;\; y' + a(t)\, y = b(t)$$

et son équation homogène associée

$$(E_0) \;\; y' + a(t)\, y = 0.$$

On suppose que $y_0 \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$ est une solution de (E_0) qui ne s'annule jamais.

On peut en déduire une solution de (E) sous la forme

$$t \longmapsto \lambda(t)\, y_0(t)$$

où $\lambda \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$.

En particulier, l'ensemble solution de (E) est non-vide.

Démonstration 13.10
Soit $\lambda \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$.

On pose $y_1 = \lambda y_0$.

On a

$$\begin{aligned} y_1 \text{ est solution de } (E) &\iff \forall t \in I,\;\; (\lambda y_0)'(t) + a(t)(\lambda y_0)(t) = b(t) \\ &\iff \forall t \in I,\;\; \lambda'(t)\, y_0(t) + \underbrace{\lambda(t)\, y_0'(t) + a(t)\, \lambda(t)\, y_0(t)}_{=0 \text{ car } y_0 \text{ est solution de } (E_0)} = b(t) \\ &\iff \forall t \in I,\;\; \lambda'(t) = \frac{b(t)}{y_0(t)}. \end{aligned}$$

La fonction $\dfrac{b}{y_0}$ est continue sur I donc elle admet une primitive $\lambda \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$.

Alors y_1 est solution de (E). ■

Exercice/Exemple 13.11
Trouver une solution sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle

$$(E) \;\; y' + \frac{1}{t} y = 1.$$

Correction 13.12
On a l'équation homogène associée à (E) : $(E_0) \;\; y' + \dfrac{1}{t} y = 0$.

Les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{\lambda}{t} \end{array}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit $\lambda \in \mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$.

On pose $y_1 : t \longmapsto \dfrac{\lambda(t)}{t}$.

On a

$$\begin{aligned} y_1 \text{ est solution de } (E) &\Longleftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \;\; y_1'(t) + \frac{1}{t} y_1(t) = 1 \\ &\Longleftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \;\; \frac{\lambda'(t)\, t - \lambda(t)}{t^2} + \frac{\lambda(t)}{t^2} = 1 \\ &\Longleftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \;\; \frac{\lambda'(t)\, t}{t^2} = 1 \\ &\Longleftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \;\; \frac{\lambda'(t)}{t} = 1 \\ &\Longleftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \;\; \lambda'(t) = t \\ &\Longleftarrow \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \;\; \lambda(t) = \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

Donc $t \longmapsto \dfrac{t}{2}$ est solution de (E).

13.1.4 Conséquences de la linéarité

Proposition 13.13 (Structure de l'ensemble solution)
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a, b \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})$.

On considère l'équation différentielle linéaire

$$(E) \;\; y' + a(t)\, y = b(t)$$

et son équation homogène associée

$$(E_0) \;\; y' + a(t)\, y = 0.$$

(1) L'ensemble solution $\mathscr{S}_0$ de (E_0) est un espace vectoriel.

(2) L'ensemble solution $\mathscr{S}$ de (E) est un espace affine de direction $\mathscr{S}_0$.

Démonstration 13.14
Posons

$$u: \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^1(I,\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^0(I,\mathbb{K}) \\ y & \longmapsto & y'+ay \end{array}$$

On a $u \in \mathscr{L}\left(\mathscr{C}^1(I,\mathbb{K}), \mathscr{C}^0(I,\mathbb{K})\right)$.

On a $\mathscr{S}_0 = \ker u$ donc $\mathscr{S}_0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})$.

$\mathscr{S}$ est l'ensemble solution de l'équation linéaire $u(y) = b$ d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})$.

Selon la Méthode 13.9, on a $\mathscr{S} \neq \varnothing$ donc $\mathscr{S}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})$ de direction $\ker u = \mathscr{S}_0$. ■

Proposition 13.15 (Principe de superposition)
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ et $a, b_1, b_2 \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{K})$.

Si $y_1 \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})$ est solution de

$$(E_1) \quad y' + a(t)\,y = b_1(t)$$

et $y_2 \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})$ est solution de

$$(E_2) \quad y' + a(t)\,y = b_2(t)$$

alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est solution de

$$(E) \quad y' + a(t)\,y = \lambda_1 b_1(t) + \lambda_2 b_2(t).$$

Démonstration 13.16
⋆⋆ **Exercice** ⋆⋆ ■

Proposition 13.17
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$ et $b \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{C})$.

Si $z \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{C})$ est solution de

$$y' + a(t)\,y = b(t)$$

alors $\operatorname{Re} z$ est solution de

$$y' + a(t)\,y = \operatorname{Re} b(t)$$

et $\operatorname{Im} z$ est solution de

$$y' + a(t)\,y = \operatorname{Im} b(t).$$

Démonstration 13.18
⋆⋆ **Exercice** ⋆⋆ ■

13.1.5 Méthode de résolution

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a, b \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})$.

On considère l'équation différentielle linéaire

$$(E) \;\; y' + a(t)\, y = b(t)\,.$$

13.1.5.1 Résolution de l'équation homogène associée

Soit $A : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une primitive de a sur I.

Selon la Proposition 13.2, les solutions de l'équation homogène associée à (E) :

$$(E_0) \;\; y' + a(t)\, y = 0$$

sont les fonctions de la forme

$$\begin{array}{rccc} y_0 : & I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & t & \longmapsto & \lambda \mathrm{e}^{-A(t)} \end{array} \qquad \text{où } \lambda \in \mathbb{K}.$$

13.1.5.2 Recherche d'une solution particulière de (E)

On obtient une solution particulière de (E), que l'on note y_1 :

- soit en remarquant qu'il existe une solution « évidente » ;
- soit en utilisant la méthode de variation de la constante (en utilisant la Proposition 13.15 et la Proposition 13.17 si cela allège les calculs).

13.1.5.3 Conclusion

Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$\begin{array}{rccc} y : & I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & t & \longmapsto & \lambda \mathrm{e}^{-A(t)} + y_1(t) \end{array} \qquad \text{où } \lambda \in \mathbb{K}.$$

S'il existe une condition initiale, on trouve la valeur de la constante λ pour que la condition initiale soit vérifiée (cette valeur existe et est unique).

Exercice/Exemple 13.19
Résoudre l'équation différentielle

$$(E) \;\; y' - \frac{1}{t} y = 1 + \frac{2}{t} + t^2 \sin t$$

sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.

Correction 13.20
On a l'équation homogène associée (E_0) $y' - \frac{1}{t}y = 0$.

Les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda t \end{array}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Déterminons une solution particulière de (E_1) $y' - \frac{1}{t}y = 1$.

Soit $\lambda \in \mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$.

Posons $y_1 : t \longmapsto \lambda(t)\, t$.

On a

$$\begin{aligned} y_1 \text{ est solution de } (E_1) &\iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \lambda'(t)\, t + \lambda(t) - \lambda(t) = 1 \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \lambda'(t)\, t = 1 \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \lambda'(t) = \frac{1}{t} \\ &\Longleftarrow \lambda = \ln \end{aligned}$$

Donc $y_1 : t \longmapsto t \ln t$ est solution de (E_1).

On remarque que $y_2 : t \longmapsto -1$ est solution de (E_2) $y' - \frac{1}{t}y = \frac{1}{t}$.

Déterminons une solution particulière de (E_3) $y' - \frac{1}{t}y = t^2 e^{it}$.

Soit $\lambda \in \mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C}\right)$.

Posons $y_3 : t \longmapsto \lambda(t)\, t$.

On a

$$\begin{aligned} y_3 \text{ est solution de } (E_3) &\iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \lambda'(t)\, t + \lambda(t) - \lambda(t) = t^2 e^{it} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \lambda'(t)\, t = t^2 e^{it} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \lambda'(t) = t e^{it} \\ &\Longleftarrow \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \lambda(t) = \int^t x e^{ix}\, dx \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \lambda(t) = \left[-ie^{ix}x\right]^t - \int^t -ie^{ix}\, dx \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \lambda(t) = -ite^{it} + e^{it} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \lambda(t) = e^{it}(1 - it) \end{aligned}$$

Donc $y_3 : t \longmapsto te^{it}(1 - it)$ est solution de (E_3).

On a

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \operatorname{Im} y_3(t) &= \operatorname{Im}\left(te^{it}(1-it)\right)\\ &= \operatorname{Im}\left(t(\cos t + i\sin t)(1-it)\right)\\ &= t\sin t - t^2\cos t\\ &= t(\sin t - t\cos t)\,.\end{aligned}$$

On en déduit, par le principe de superposition, que

$$y_4 : t \longmapsto t\ln t - 2 + t(\sin t - t\cos t)$$

est solution de (E).

Finalement, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & \lambda t + t \longmapsto t\ln t - 2 + t(\sin t - t\cos t)\end{array}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

13.2 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

13.2.1 Cadre

On considère :

- un intervalle I de $\mathbb{R}$;
- des scalaires $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$;
- une fonction continue $f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})$;
- éventuellement trois éléments $t_0 \in I$ et $v_0, w_0 \in \mathbb{K}$;
- l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

$$(E) \;\; ay'' + by' + cy = f(t)\,.$$

Résoudre [3] l'équation différentielle (E), c'est déterminer quelles sont les fonctions $y \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{K})$ qui sont solutions de (E), c'est-à-dire qui vérifient

$$\forall t \in I, \;\; ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)\,.$$

3. On dit aussi « intégrer l'équation différentielle (E) ».

L'ensemble solution de l'équation différentielle (E) est l'ensemble des solutions de (E) :

$$\mathcal{S} = \left\{ y \in \mathscr{C}^2 (I, \mathbb{K}) \;\middle|\; \forall t \in I,\ \ ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t) \right\}.$$

L'équation différentielle (E) est dite homogène si f est la fonction identiquement nulle.

On appelle équation homogène associée à (E) l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre

$$(E_0)\ \ ay'' + by' + cy = 0.$$

Lorsque l'on rechercher la[4] solution de (E) qui vérifie de plus une condition initiale, on dit qu'on résout le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = f(t) \\ y(t_0) = v_0 \\ y'(t_0) = w_0 \end{cases}$$

Exemple 13.21

- Équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants :

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

- Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants :

$$y'' + 2y' + y = \cos t.$$

- Problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = \cos t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

13.2.2 Conséquences de la linéarité

Proposition 13.22 (Structure de l'ensemble solution)
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a, b, c \in \mathbb{K}$ tels que $a \neq 0$ et $f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})$.

On considère l'équation différentielle linéaire

$$(E)\ \ ay'' + by' + cy = f(t)$$

et son équation homogène associée

$$(E_0)\ \ ay'' + by' + cy = 0.$$

(1) L'ensemble solution $\mathcal{S}_0$ de (E_0) est un espace vectoriel.

(2) L'ensemble solution $\mathcal{S}$ de (E) est un espace affine de direction $\mathcal{S}_0$.

4. Cette solution existe et est unique.

Démonstration 13.23
Cf. Démonstration 13.14 en admettant que $\mathcal{S}$ est non-vide. ■

Proposition 13.24 (Principe de superposition)
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\lambda_1, \lambda_2, a, b, c \in \mathbb{K}$ tels que $a \neq 0$ et $f_1, f_2 \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})$.

Si $y_1 \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{K})$ est solution de

$$(E_1) \quad ay'' + by' + cy = f_1(t)$$

et $y_2 \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{K})$ est solution de

$$(E_2) \quad ay'' + by' + cy = f_2(t)$$

alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est solution de

$$(E) \quad ay'' + by' + cy = \lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t).$$

Démonstration 13.25
⋆⋆ **Exercice** ⋆⋆ ■

Proposition 13.26
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et $f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{C})$.

Si $z \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{C})$ est solution de

$$ay'' + by' + cy = f(t)$$

alors $\operatorname{Re} z$ est solution de

$$ay'' + by' + cy = \operatorname{Re} f(t)$$

et $\operatorname{Im} z$ est solution de

$$ay'' + by' + cy = \operatorname{Im} f(t).$$

Démonstration 13.27
⋆⋆ **Exercice** ⋆⋆ ■

13.2.3 Cas homogène

Remarque 13.28
Attention à ne jamais appliquer les résultats de ce paragraphe à des équations différentielles linéaires homogènes du second ordre à coefficients non-constants.

13.2.3.1 Cas complexe

Proposition 13.29
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq 0$.

On considère l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre

$$(E_0) \;\; ay'' + by' + cy = 0.$$

On lui associe son équation caractéristique :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

d'inconnue $x \in \mathbb{C}$ et dont on note Δ le discriminant.

Si $\Delta \neq 0$ alors l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et les solutions de (E_0) sur I sont les fonctions de la forme

$$\begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \lambda e^{\alpha t} + \mu e^{\beta t} \end{array} \qquad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Si $\Delta = 0$ alors l'équation caractéristique admet une unique solution (double) $\alpha \in \mathbb{C}$ et les solutions de (E_0) sur I sont les fonctions de la forme

$$\begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & (\lambda t + \mu) e^{\alpha t} \end{array} \qquad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Démonstration 13.30
Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ et $y \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{C})$.

On pose $\lambda : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{-\alpha t} y(t) \end{array}$ de sorte qu'on a $\begin{cases} \forall t \in I, \;\; y(t) = \lambda(t) e^{\alpha t} \\ \lambda \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{C}) \end{cases}$

On a, selon la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (E_0) &\iff \forall t \in I, \;\; a\left(\lambda''(t) e^{\alpha t} + 2\alpha\lambda'(t) e^{\alpha t} + \underbrace{\alpha^2 \lambda(t) e^{\alpha t}}_{\star}\right) + b\left(\lambda'(t) e^{\alpha t} + \underbrace{\alpha\lambda(t) e^{\alpha t}}_{\star}\right) \\ &\qquad + \underbrace{c\lambda(t)}_{\star} = 0 \\ &\iff \forall t \in I, \;\; a\lambda''(t) + 2a\alpha\lambda'(t) + b\lambda'(t) = 0 \\ &\iff \lambda' \text{ est solution de } (E_0') \;\; z' + \left(2\alpha + \frac{b}{a}\right) z = 0. \end{aligned}$$

$\star$: s'annulent car $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$.

On note α, β les racines de $aX^2 + bX + c$ (c'est-à-dire $\beta = \alpha$ si $\Delta = 0$).

On sait que $\alpha + \beta = \dfrac{-b}{a}$ donc
$$2\alpha + \frac{b}{a} = 2\alpha - \alpha - \beta = \alpha - \beta.$$

Si $\Delta \neq 0$:

Résolvons $\left(E_0'\right)$.

Une primitive de $t \longmapsto \alpha - \beta$ est $t \longmapsto (\alpha - \beta)\, t$ donc les solutions de $\left(E_0'\right)$ sont les fonctions de la forme
$$t \longmapsto \mu \mathrm{e}^{-(\alpha-\beta)t} = \mu \mathrm{e}^{(\beta-\alpha)t} \qquad \text{où } \mu \in \mathbb{C}.$$

Résolvons maintenant (E_0).

On a :
$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (E_0) &\iff \lambda' \text{ est solution de } \left(E_0'\right) \\ &\iff \exists \mu \in \mathbb{C},\ \ \forall t \in I,\ \ \lambda'(t) = \mu \mathrm{e}^{(\beta-\alpha)t} \\ &\iff \exists \mu, \nu \in \mathbb{C},\ \ \forall t \in I,\ \ \lambda(t) = \frac{\mu}{\beta - \alpha} \mathrm{e}^{(\beta-\alpha)t} + \nu \\ &\iff \exists \mu', \nu \in \mathbb{C},\ \ \forall t \in I,\ \ \lambda(t) = \mu' \mathrm{e}^{(\beta-\alpha)t} + \nu \\ &\iff \exists \mu', \nu \in \mathbb{C},\ \ \forall t \in I,\ \ y(t) = \mu' \mathrm{e}^{\beta t} + \nu \mathrm{e}^{\alpha t} \end{aligned}$$

Les solutions de (E_0) sont donc les fonctions de la forme
$$t \longmapsto \mu' \mathrm{e}^{\beta t} + \nu \mathrm{e}^{\alpha t}$$
où $\mu', \nu \in \mathbb{C}$.

Si $\Delta = 0$:

On a :
$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (E_0) &\iff \lambda' \text{ est solution de } z' = 0 \\ &\iff \lambda'' = 0 \\ &\iff \exists \mu \in \mathbb{C},\ \ \forall t \in I,\ \ \lambda'(t) = \mu \\ &\iff \exists \mu, \nu \in \mathbb{C},\ \ \forall t \in I,\ \ \lambda(t) = \mu t + \nu \\ &\iff \exists \mu, \nu \in \mathbb{C},\ \ \forall t \in I,\ \ y(t) = (\mu t + \nu)\, \mathrm{e}^{\alpha t} \end{aligned}$$

Les solutions de (E_0) sont donc les fonctions de la forme
$$t \longmapsto (\mu t + \nu)\, \mathrm{e}^{\alpha t} \qquad \text{où } \mu, \nu \in \mathbb{C}.$$
■

Exercice/Exemple 13.31
Donner les solutions complexes sur l'intervalle $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle
$$(E_0)\ \ y'' + 2y' + y = 0.$$

Correction 13.32
L'unique solution de l'équation caractéristique $x^2+2x+1=0$ est -1.

Donc les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme

$$t \longmapsto (\lambda t+\mu)\,\mathrm{e}^{-t}$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Exercice/Exemple 13.33
Donner les solutions complexes sur l'intervalle $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(E_0)\ \ y''+y'+y=0.$$

Correction 13.34
Les solutions de l'équation caractéristique $x^2+x+1=0$ sont j et j^2.

Donc les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme

$$t \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{jt}+\mu \mathrm{e}^{j^2 t}$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

13.2.3.2 Cas réel

Proposition 13.35
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$.

On considère l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre

$$(E_0)\ \ ay''+by'+cy=0.$$

On lui associe son équation caractéristique :

$$ax^2+bx+c=0$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ et dont on note Δ le discriminant.

Si $\Delta>0$ alors l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et les solutions de (E_0) sur I sont les fonctions de la forme

$$\begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda \mathrm{e}^{\alpha t}+\mu \mathrm{e}^{\beta t} \end{array} \qquad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Si $\Delta = 0$ alors l'équation caractéristique admet une unique solution (double) $\alpha \in \mathbb{R}$ et les solutions de (E_0) sur I sont les fonctions de la forme

$$\begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (\lambda t + \mu)\, \mathrm{e}^{\alpha t} \end{array} \qquad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Si $\Delta < 0$ alors l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme

$$\begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t))\, \mathrm{e}^{\alpha t} \end{array} \qquad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Démonstration 13.36
⋆⋆ **Exercice** ⋆⋆ (déduire le cas réel du cas complexe). ■

Exercice/Exemple 13.37
Donner les solutions réelles sur l'intervalle $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(E_0) \;\; y'' + y' + y = 0.$$

Correction 13.38
Les solutions de l'équation caractéristique $x^2 + x + 1 = 0$ sont $\dfrac{-1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme

$$t \longmapsto \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) \mathrm{e}^{\frac{-t}{2}}$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

13.2.4 Second membre de la forme « polynôme × exponentielle »

Méthode 13.39
Soient $a, b, c, \gamma \in \mathbb{K}$ tels que $a \neq 0$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

Pour trouver une solution de

$$(E) \;\; ay'' + by' + cy = P(t)\, \mathrm{e}^{\gamma t},$$

on la cherche sous la forme

$$Q(t)\, \mathrm{e}^{\gamma t}$$

avec $Q \in \mathbb{K}[X]$ de degré

$$\begin{cases} \deg P & \text{si } \gamma \text{ n'est pas racine de } aX^2 + bX + c \\ \deg P + 1 & \text{si } \gamma \text{ est racine simple de } aX^2 + bX + c \\ \deg P + 2 & \text{si } \gamma \text{ est racine double de } aX^2 + bX + c \end{cases}$$

Exercice/Exemple 13.40
Résoudre les équations différentielles suivantes :

(1) $(E)\ \ y'' - 3y' + 2y = \operatorname{ch} t$

(2) $(E)\ \ y'' - y = t \operatorname{sh} t$

(3) $(E)\ \ y'' + y = \sin t$

Correction 13.41 (1)
Résolvons l'équation homogène associée à (E) :

$$(E_0)\ \ y'' - 3y' + 2y = 0.$$

L'équation caractéristique $x^2 - 3x + 2 = 0$ admet pour solutions 1 et 2.

Les solutions de (E_0) sont donc les fonctions de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda e^{t} + \mu e^{2t} \end{array} \qquad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Cherchons une solutions particulière de (E).

On pose

$$(E_1)\ \ y'' - 3y' + 2y = e^{t} \qquad \text{et} \qquad (E_2)\ \ y'' - 3y' + 2y = e^{-t}.$$

Déterminons une solution particulière de (E_1).

Brouillon
On a $P(t)\, e^{\gamma t}$ avec $\begin{cases} P = 1 \text{ donc } \deg P = 0 \\ \gamma = 1 \text{ racine simple de } X^2 - 3X + 2 \end{cases}$

Donc on cherche une solution de la forme

$$Q(t)\, e^{\gamma t}$$

avec $\deg Q = 0 + 1 = 1$, c'est-à-dire de la forme

$$(at + \cancel{b})\, e^{t}.$$

Remarque : on peut ici considérer que $b = 0$ car be^{t} est solution de (E_0).

Soit $a \in \mathbb{R}$.

On pose $y_1 : t \longmapsto at\mathrm{e}^t$.

On a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} y_1'(t) = a\mathrm{e}^t(1+t) \\ y_1''(t) = a\mathrm{e}^t(t+2) \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{aligned} y_1 \text{ est solution de } (E_1) &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad a\mathrm{e}^t(t+2) - 3a\mathrm{e}^t(t+1) + 2at\mathrm{e}^t = \mathrm{e}^t \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad at\mathrm{e}^t + 2a\mathrm{e}^t - 3at\mathrm{e}^t - 3a\mathrm{e}^t + 2at\mathrm{e}^t = \mathrm{e}^t \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad -a\mathrm{e}^t = \mathrm{e}^t \\ &\iff a = -1 \end{aligned}$$

Donc $y_1 : t \longmapsto -t\mathrm{e}^t$ est solution de (E_1).

Déterminons une solution particulière de (E_2).

Brouillon

On a $P(t)\,\mathrm{e}^{\gamma t}$ avec $\begin{cases} P = 1 \text{ donc } \deg P = 0 \\ \gamma = -1 \text{ pas racine de } X^2 - 3X + 2 \end{cases}$

Donc on cherche une solution de la forme

$$Q(t)\,\mathrm{e}^{\gamma t}$$

avec $\deg Q = 0$, c'est-à-dire de la forme

$$a\mathrm{e}^{-t}.$$

Soit $a \in \mathbb{R}$.

On pose $y_2 : t \longmapsto a\mathrm{e}^{-t}$.

On a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} y_2'(t) = -a\mathrm{e}^{-t} \\ y_2''(t) = a\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{aligned} y_2 \text{ est solution de } (E_2) &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad a\mathrm{e}^{-t} + 3a\mathrm{e}^{-t} + 2a\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{-t} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad 6a\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{-t} \\ &\iff a = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Donc $y_2 : t \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{6}$ est solution de (E_2).

Ainsi, comme on a $\forall t \in \mathbb{R}, \ \operatorname{ch} t = \dfrac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}$, d'après le principe de superposition :

$$y_3 : t \longmapsto -\frac{t\mathrm{e}^t}{2} + \frac{\mathrm{e}^{-t}}{12}$$

est solution de (E).

Finalement, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$t \longmapsto \lambda e^t + \mu e^{2t} - \frac{te^t}{2} + \frac{e^{-t}}{12} \qquad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Correction 13.42 (2)
Résolvons l'équation homogène associée à (E) :

$$(E_0) \;\; y'' - y = 0.$$

Les solutions de l'équation caractéristique $x^2 - 1 = 0$ sont 1 et -1.

Les solutions de (E_0) sont donc les fonctions de la forme

$$t \longmapsto \lambda e^t + \mu e^{-t} \qquad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Cherchons une solution particulière de (E).

On pose

$$(E_1) \;\; y'' - y = te^t \qquad \text{et} \qquad (E_2) \;\; y'' - y = te^{-t}$$

Déterminons une solution particulière de (E_1).

Brouillon
On a $P(t)\,e^{\gamma t}$ avec $\begin{cases} P = X \text{ donc } \deg P = 1 \\ \gamma = 1 \text{ racine simple de } X^2 - 1 \end{cases}$

Donc on cherche une solution de la forme

$$Q(t)\,e^{\gamma t}$$

avec $\deg Q = 1 + 1 = 2$, c'est-à-dire de la forme

$$\left(at^2 + bt\right) e^t.$$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

On pose $y_1 : t \longmapsto \left(at^2 + bt\right) e^t$.

On a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \;\; \begin{cases} y_1'(t) = e^t\left(2at + b + at^2 + bt\right) = e^t\left(at^2 + (2a+b)\,t + b\right) \\ y_1''(t) = e^t\left(at^2 + (2a+b)\,t + b + 2at + 2a + b\right) = e^t\left(at^2 + (4a+b)\,t + 2\,(a+b)\right) \end{cases}$$

D'où :

$$y_1 \text{ est solution de } (E_1) \iff \forall t \in \mathbb{R},\ \ \mathrm{e}^t\left(at^2 + (4a+b)\,t + 2\,(a+b)\right) - \mathrm{e}^t\left(at^2+bt\right) = t\mathrm{e}^t$$
$$\iff \forall t \in \mathbb{R},\ \ 4at + 2a + 2b = t$$
$$\iff \forall t \in \mathbb{R},\ \ (4a-1)\,t + 2a + 2b = 0$$
$$\Longleftarrow \begin{cases} 2a + 2b = 0 \\ 4a - 1 = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a = \dfrac{1}{4} \\ b = \dfrac{-1}{4} \end{cases}$$

Donc $y_1 : t \longmapsto \dfrac{1}{4}\left(t^2 - t\right)\mathrm{e}^t$ est solution de (E_1).

Déterminons une solution particulière de (E_2).

Brouillon

On a $P\,(t)\,\mathrm{e}^{\gamma t}$ avec $\begin{cases} P = X \text{ donc } \deg P = 1 \\ \gamma = -1 \text{ racine simple de } X^2 - 1 \end{cases}$

Donc on cherche une solution de la forme

$$Q\,(t)\,\mathrm{e}^{\gamma t}$$

avec $\deg Q = 2$ donc de la forme

$$\left(at^2 + bt\right)\mathrm{e}^{-t}.$$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

On pose $y_2 : t \longmapsto \left(at^2 + bt\right)\mathrm{e}^{-t}$.

On a

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} y_2'\,(t) = \mathrm{e}^{-t}\left(-at^2 - bt + 2at + b\right) \\ y_2''\,(t) = \mathrm{e}^{-t}\left(at^2 + bt - 2at - b - 2at - b + 2a\right) = \mathrm{e}^{-t}\left(at^2 + (b-4a)\,t + 2a - 2b\right) \end{cases}$$

D'où :

$$y_2 \text{ est solution de } (E_2) \iff \forall t \in \mathbb{R},\ \ \mathrm{e}^{-t}\left(at^2 + (b-4a)\,t + 2a - 2b\right) - \left(at^2+bt\right)\mathrm{e}^{-t} = t\mathrm{e}^{-t}$$
$$\iff \forall t \in \mathbb{R},\ \ -(4a+1)\,t + 2a - 2b = 0$$
$$\Longleftarrow \begin{cases} -4a - 1 = 0 \\ 2a - 2b = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a = \dfrac{-1}{4} \\ b = \dfrac{-1}{4} \end{cases}$$

Donc $y_2 : t \longmapsto \frac{-1}{4}\left(t^2+t\right)\mathrm{e}^{-t}$ est solution de (E_2).

Finalement, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$t \longmapsto \lambda \mathrm{e}^t + \mu \mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{8}\left(t^2-t\right)\mathrm{e}^t + \frac{1}{8}\left(t^2+t\right)\mathrm{e}^{-t} \qquad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Correction 13.43 (3)
Résolvons l'équation homogène associée à (E) :

$$(E_0) \;\; y'' + y = 0.$$

Les solutions de l'équation caractéristique $x^2 + x = 0$ sont i et $-i$.

Les solutions de (E_0) sont donc les fonctions de la forme

$$t \longmapsto \lambda \cos t + \mu \sin t \qquad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Déterminons une solution particulière de $(E_1) \;\; y'' + y = \mathrm{e}^{it}$.

Brouillon
On a $P(t)\,\mathrm{e}^{\gamma t}$ avec $\begin{cases} P = 1 \text{ donc } \deg P = 0 \\ \gamma = i \text{ racine simple de } X^2 + X \end{cases}$

Donc on cherche une solution de la forme

$$Q(t)\,\mathrm{e}^{\gamma t}$$

avec $\deg Q = 1$, c'est-à-dire de la forme

$$at\mathrm{e}^{it}.$$

Soit $a \in \mathbb{R}$.

On pose $y_1 : t \longmapsto at\mathrm{e}^{it}$.

On a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} y_1'(t) = a\left(\mathrm{e}^{it} + it\mathrm{e}^{it}\right) = a\mathrm{e}^{it}(it+1) \\ y_1''(t) = a\left(i\mathrm{e}^{it}(it+1) + i\mathrm{e}^{it}\right) = ai\mathrm{e}^{it}(it+2) \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{aligned} y_1 \text{ est solution de } (E_1) &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \;\; ai\mathrm{e}^{it}(it+2) + at\mathrm{e}^{it} = \mathrm{e}^{it} \\ &\iff 2ai = 1 \\ &\Longleftarrow a = \frac{-i}{2} \end{aligned}$$

Donc $y_1 : t \longmapsto \frac{-i}{2} t\mathrm{e}^{it}$ est solution de (E_1).

De plus, on a :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Im} y_1(t) &= \operatorname{Im}\left(\frac{-i}{2} t (\cos t + i \sin t)\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{-i}{2} t \cos t + \frac{1}{2} t \sin t\right) \\ &= \frac{-1}{2} t \cos t\end{aligned}$$

Finalement, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$t \longmapsto \lambda \cos t + \mu \sin t - \frac{1}{2} t \cos t \qquad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

13.3 Changements de variable

Cf. ?THM? **??**.

13.4 Problèmes de raccord

Cf. ?THM? **??**.

Chapitre 14

Espaces vectoriels de dimension finie

Sommaire

On considère un corps $\mathbb{K}$ (en pratique, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, voire $\mathbb{Q}$).

14.1 Familles de vecteurs

14.1.1 Quelques rappels

Rappel 14.1
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $x_1, \ldots, x_n \in E$.

On a

$$u(\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)) = \mathrm{Vect}(u(x_1), \ldots, u(x_n)).$$

Rappel 14.2
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ une famille libre de E et $x_{n+1} \in E$.

Alors $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ est libre si, et seulement si, $x_{n+1} \notin \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$.

Rappel 14.3
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n, m \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ une famille quelconque de vecteurs de E et $(y_1, \ldots, y_m) \in E^m$ une famille génératrice de E.

Alors $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille génératrice de E si, et seulement si :

$$\forall j \in [\![1\,;\,m]\!],\ \ y_j \in \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n).$$

Rappel 14.4
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$ une famille de vecteurs de E.

On a :

(1) Si $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre et u injective, alors $(u(x_1), \ldots, u(x_p))$ est libre.

(2) Si $(x_1, \ldots, x_p)$ engendre E et u est surjective, alors $(u(x_1), \ldots, u(x_p))$ engendre F.

(3) Si $(x_1, \ldots, x_p)$ est une base de E et u un isomorphisme, alors $(u(x_1), \ldots, u(x_p))$ est une base de F.

14.1.2 Cardinaux des familles libres / génératrices

Lemme 14.5
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n, m \in \mathbb{N}$ et $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m \in E$.

On suppose que $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ est libre et que $(y_1, \ldots, y_m)$ est génératrice de E.

Alors on a :
$$n \leqslant m.$$

Démonstration 14.6
On raisonne par l'absurde : supposons $n > m$.

Idée : On va montrer qu'on peut remplacer un par un chaque vecteur de la famille génératrice par un vecteur de la famille libre, et cela en conservant une famille génératrice de E. Les vecteurs de la famille libre qui restent seront des combinaisons linéaires des autres vecteurs de la famille libre : contradiction.

Démonstration formelle :

Pour tout $k \in [\![0\,;\,m]\!]$, on note $\mathscr{P}(k)$ la propriété :
$$\exists i_{k+1}, \ldots, i_m \in [\![1\,;\,m]\!], \ \left(x_1, \ldots, x_k, y_{i_{k+1}}, \ldots, y_{i_m}\right) \text{ est génératrice de } E.$$

Montrons $\mathscr{P}(k)$ pour tout $k \in [\![0\,;\,m]\!]$ par une récurrence finie sur k.

La propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie : il suffit de poser $i_1 = 1, \ldots, i_m = m$ et la famille $\left(y_{i_1}, \ldots, y_{i_m}\right)$ est bien une famille génératrice de E.

Soit $k \in [\![0\,;\,m-1]\!]$ tel que $\mathscr{P}(k)$.

Considérons $i_{k+1}, \ldots, i_m \in [\![1\,;\,m]\!]$ tels que
$$\mathscr{G} = \left(x_1, \ldots, x_k, y_{i_{k+1}}, \ldots, y_{i_m}\right)$$
soit une famille génératrice de E.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ tels que
$$(R) \ \ x_{k+1} = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} y_{i_{k+1}} + \cdots + \lambda_m y_{i_m}$$
(de tels scalaires existent par hypothèse).

Les coefficients $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_m$ ne sont pas tous nuls, car sinon on aurait $x_{k+1} \in \operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_k)$ alors que la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre.

Soit $p \in [\![k+1\,;\,m]\!]$ tel que $\lambda_p \neq 0$.

Quitte à renuméroter les entiers $i_{k+1}, \ldots, i_m$, on peut supposer $p = k+1$.

Montrons que
$$\mathscr{F} = \left(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, y_{i_{k+2}}, \ldots, y_{i_m}\right)$$
est une famille génératrice de E.

Pour cela, selon le Rappel 14.3, il suffit de montrer que chaque vecteur de la famille $\mathscr{G}$ appartient à Vect $(\mathscr{F})$.

On a, selon la relation (R) :

$$y_{i_{k+1}} = \frac{-\lambda_1}{\lambda_{k+1}}x_1 + \cdots + \frac{-\lambda_k}{\lambda_{k+1}}x_k + \frac{1}{\lambda_{k+1}}x_{k+1} + \frac{-\lambda_{k+2}}{\lambda_{k+1}}y_{i_{k+2}} + \cdots + \frac{-\lambda_m}{\lambda_{k+1}}y_{i_m}$$

donc $y_{i_{k+1}} \in \text{Vect}\,(\mathscr{F})$.

C'est clair pour les autres vecteurs de $\mathscr{G}$ (ils appartiennent à Vect $(\mathscr{F})$ car ils appartiennent à $\mathscr{F}$).

Ainsi, la famille $\mathscr{F}$ est génératrice de E et la propriété $\mathscr{P}(k+1)$ est donc vraie.

On a donc, par récurrence (finie) : $\forall k \in [\![0\,;\,m]\!],\ \ \mathscr{P}(k)$ est vraie.

En particulier (en prenant $k = m$) : la famille $(x_1, \ldots, x_m)$ est génératrice de E donc

$$x_{m+1} \in \text{Vect}\,(x_1, \ldots, x_m)\,.$$

On a donc bien une contradiction car la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre.

Donc $n \leqslant m$. ∎

14.1.3 Théorème de la base incomplète

Théorème 14.7
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n, m \in \mathbb{N}$ et $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m \in E$.

On suppose que $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ est libre et que $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ est génératrice de E.

Alors il existe des éléments $i_1, \ldots, i_r \in [\![1\,;\,m]\!]$ tels que la famille

$$\left(x_1, \ldots, x_n, y_{i_1}, \ldots, y_{i_r}\right)$$

soit une base de E.

Démonstration 14.8
Idée : si $(x_1, \ldots, x_n)$ est déjà une base de E, le théorème est vrai (en prenant $r = 0$). Sinon, la famille libre $(x_1, \ldots, x_n)$ n'est pas une famille génératrice de E. Selon le Rappel 14.3, il existe un élément de la famille génératrice $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ qui n'est pas combinaison linéaire de $x_1, \ldots, x_n$: considérons un tel élément y_{i_1} (où $i_1 \in [\![1\,;\,m]\!]$). Selon le Rappel 14.2, la famille $\left(x_1, \ldots, x_n, y_{i_1}\right)$ est libre. On continue ensuite à rajouter des éléments parmi $y_1, \ldots, y_m$ à la famille libre jusqu'à ce qu'on obtienne une famille génératrice (à chaque étape, la famille reste libre), et on finit par obtenir une base.

Démonstration formelle :

Posons :

$$J = \left\{p \in [\![0\,;\,m]\!] \;\middle|\; \exists i_1, \ldots, i_p \in [\![1\,;\,m]\!],\ \left(x_1, \ldots, x_n, y_{i_1}, \ldots, y_{i_p}\right) \text{ est libre}\right\}.$$

L'ensemble J est une partie de $\mathbb{N}$ non-vide (car elle contient 0) et majorée (par m). Elle admet donc un plus grand élément ; notons le r.

Soient $i_1, \ldots, i_r \in \llbracket 1 ; m \rrbracket$ tels que la famille $\left(x_1, \ldots, x_n, y_{i_1}, \ldots, y_{i_r}\right)$ soit libre.

Montrons que la famille $\left(x_1, \ldots, x_n, y_{i_1}, \ldots, y_{i_r}\right)$ est une base de E : il s'agit de montrer qu'elle est génératrice de E.

Raisonnons par l'absurde : on suppose qu'elle ne l'est pas.

D'après le Rappel 14.3, la famille $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ étant génératrice, elle contient un élément qui n'est pas combinaison linéaire de $x_1, \ldots, x_n, y_{i_1}, \ldots, y_{i_r}$.

Considérons un tel élément $y_{i_{r+1}}$ (où $i_{r+1} \in \llbracket 1 ; m \rrbracket$).

Finalement, la famille $\left(x_1, \ldots, x_n, y_{i_1}, \ldots, y_{i_r}\right)$ est libre, on lui ajoute un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire de ses éléments, donc d'après le Rappel 14.2, la famille qu'on obtient est libre :

$$\left(x_1, \ldots, x_n, y_{i_1}, \ldots, y_{i_{r+1}}\right) \text{ est libre.}$$

Donc $r + 1$ appartient à J, ce qui contredit le fait que r soit le plus grand élément de J.

Donc la famille libre $\left(x_1, \ldots, x_n, y_{i_1}, \ldots, y_{i_r}\right)$ est génératrice de E : c'est une base. ■

Théorème 14.9 (Reformulation)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(x_k)_{k \in K} \in E^K$ une famille de vecteurs de E indicée par un ensemble fini K et $I \subseteq K$.

On suppose que $(x_k)_{k \in I}$ est libre et que $(x_k)_{k \in K}$ est génératrice de E.

Alors il existe un ensemble J tel que

$$I \subseteq J \subseteq K \qquad \text{et} \qquad (x_k)_{k \in J} \text{ est une base de } E.$$

Corollaire 14.10 (Théorème de la base extraite)
De toute famille génératrice finie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on peut extraire une base.

Démonstration 14.11
Découle du Théorème 14.7 (en prenant $n = 0$). ■

Corollaire 14.12 (Théorème de la base incomplète)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Si E admet une famille génératrice finie, alors toute famille libre de E peut être complétée en une base de E (finie).

Démonstration 14.13
Découle du Théorème 14.7. ■

14.2 Dimension

14.2.1 Définition

Définition/Théorème 14.14
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Si E admet une base finie, alors toutes les bases de E sont finies et on le même nombre d'éléments, appelé dimension de E et noté $\dim E$.

Si E n'admet aucune base finie, alors on dit que E est de dimension infinie et on pose $\dim E = +\infty$.

Démonstration 14.15
Supposons que $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base finie de E.

Soit $\mathscr{B}' = (x_i)_{i \in I}$ une base de E (où I est un ensemble quelconque).

Montrons que $\operatorname{Card} I \leqslant n$.

Par l'absurde, si $\operatorname{Card} I \geqslant n+1$ alors il existe $i_1, \ldots, i_{n+1} \in I$ deux à deux distincts.

On a $\begin{cases} \left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n+1}}\right) \text{ est une famille libre de vecteurs de } E \\ (e_1, \ldots, e_n) \text{ est une famille génératrice de } E \end{cases}$: contradiction selon le Lemme 14.5.

En particulier, on a montré que I est fini.

Montrons que $\operatorname{Card} I \geqslant n$.

On a

$$\begin{cases} (e_1, \ldots, e_n) \text{ est une famille libre de vecteurs de } E \\ (x_i)_{i \in I} \text{ est une famille génératrice de } E \end{cases}$$

Donc $n \leqslant \operatorname{Card} I$ selon le Lemme 14.5.

Donc $\operatorname{Card} I = n$.

D'où le résultat. ∎

Proposition 14.16 (Espaces vectoriels de dimension infinie)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) E est de dimension infinie (i.e. E n'admet aucune base finie)

(2) E n'admet aucune famille génératrice finie

(3) $\forall n \in \mathbb{N}, \ \exists x_1, \ldots, x_n \in E, \ (x_1, \ldots, x_n)$ *est une famille libre*

(4) Il existe une famille libre infinie de vecteurs de E

Démonstration 14.17 ((2) $\implies$ *(1))*
Claire. ∎

Démonstration 14.18 ((1) $\implies$ *(2))*
Découle du théorème de la base extraite (Corollaire 14.10). ∎

Démonstration 14.19 ((4) $\implies$ *(3))*
Claire car toute sous-famille d'une famille libre est libre. ∎

Démonstration 14.20 ((3) $\implies$ *(2))*
Supposons (3).

Par l'absurde, soit $(x_1, \ldots, x_m)$ une famille génératrice finie de E (où $m \in \mathbb{N}$).

Selon (3) et le Lemme 14.5, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ n \leqslant m \text{ : contradiction.}$$ ∎

Démonstration 14.21 ((2) $\implies$ *(4))*
Supposons (2).

On construit par récurrence une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

On considère $x_0 \in E \setminus \{0\}$.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x_0, \ldots, x_n \in E$ tels que $(x_0, \ldots, x_n)$ est libre.

Selon (2), $(x_0, \ldots, x_n)$ n'est pas une famille génératrice de E.

Donc il existe $x_{n+1} \in E$ tel que $x_{n+1} \notin \operatorname{Vect}(x_0, \ldots, x_n)$.

Donc $(x_0, \ldots, x_{n+1})$ est libre.

On construit ainsi par récurrence une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ (x_0, \ldots, x_n) \ \text{ est libre.}$$

Déduisons-en que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

Soit $I \subseteq \mathbb{N}$ tel que I est fini.

Montrons que $(x_n)_{n\in I}$ est libre.

Soit $N \in \mathbb{N}$ un majorant de I.

$(x_n)_{n\in I}$ est une sous-famille de la famille libre $(x_n)_{n\in [\![0;N]\!]}$.

Donc $(x_n)_{n\in I}$ est libre.

Donc $(x_n)_{n\in \mathbb{N}}$ est libre. ■

Définition 14.22
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

On a $\dim E = 0$ si, et seulement si, E est l'espace vectoriel nul : $E = \{0_E\}$.

Si $\dim E = 1$, on dit que E est une droite vectorielle (cela revient à dire qu'on a $E = \mathrm{Vect}\,(x)$ où x est un vecteur non-nul).

Si $\dim E = 2$, on dit que E est un plan vectoriel (cela revient à dire qu'on a $E = \mathrm{Vect}\,(x, y)$ où x et y sont deux vecteurs non-colinéaires).

Définition 14.23
On appelle dimension d'un sous-espace affine la dimension de sa direction.

Une droite affine est un sous-espace affine de dimension 1.

Un plan affine est un sous-espace affine de dimension 2.

14.2.2 Exemples

Exercice/Exemple 14.24
Donner la dimension des espaces vectoriels suivants :

(1) $\mathbb{K}^n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$)

(2) $\mathbb{K}_n[X]$ (où $n \in \mathbb{N}$)

(3) $\mathbb{K}[X]$

(4) $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

(5) On prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
L'ensemble solution $\mathcal{S}_0$ de l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre :

$$(E_0) \;\; y' + a(t)\, y = 0$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $\operatorname{Card} I \geqslant 2$ et $a \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})$.

(6) On prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
L'ensemble solution $\mathcal{S}_0$ de l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre :

$$(E_0) \;\; ay'' + by' + cy = 0$$

où $a, b, c \in \mathbb{K}$ tels que $a \neq 0$.

Correction 14.25

(1) On a $\dim \mathbb{K}^n = n$ car la base canonique de $\mathbb{K}^n$ possède n éléments.

(2) On a $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$ car la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ possède $n+1$ éléments.

(3) On a $\dim \mathbb{K}[X] = +\infty$ car $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre infinie de vecteurs de $\mathbb{K}[X]$.

(4) On a $\dim \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = +\infty$ car $\left(t \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda t}\right)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est une famille libre infinie de vecteurs de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(5) On a vu que $\mathcal{S}_0$ admet pour base la famille (f_0) où $f_0 : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & \mathrm{e}^{-A(t)} \end{array}$ où A est une primitive de a. Donc $\dim \mathcal{S}_0 = 1$.

(6) De même, on a $\dim \mathcal{S}_0 = 2$ (*cf.* chapitre 13).

Proposition 14.26
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

On sait que E est naturellement un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Notons $\dim_{\mathbb{C}} E$ la dimension de E comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $\dim_{\mathbb{R}} E$ la dimension de E comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Alors on a :

$$\dim_{\mathbb{R}} E = 2 \dim_{\mathbb{C}} E.$$

Démonstration 14.27
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

On a $n = \dim_{\mathbb{C}} E$.

Posons $\mathscr{B}' = (e_1, ie_1, \ldots, e_n, ie_n)$.

Montrons que $\mathscr{B}'$ est une base de E en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Montrons que $\mathscr{B}'$ est génératrice de E sur $\mathbb{R}$.

Comme $\mathscr{B}$ est une base de E sur $\mathbb{C}$, on a :

$$\forall x \in E, \quad \exists z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}, \quad x = z_1 e_1 + \cdots + z_n e_n.$$

Donc $\forall x \in E, \quad \exists a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n \in \mathbb{R}, \quad x = a_1 e_1 + i b_1 e_1 + \cdots + a_n e_n + i b_n e_n$.

Donc $\forall x \in E, \quad x \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\mathscr{B}' \right)$.

Donc $\mathscr{B}'$ est génératrice de E sur $\mathbb{R}$.

Montrons que $\mathscr{B}'$ est libre sur $\mathbb{R}$.

Soient $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que $a_1 e_1 + i b_1 e_1 + \cdots + a_n e_n + i b_n e_n = 0$.

On a $(a_1 + i b_1) e_1 + \cdots + (a_n + i b_n) e_n = 0$.

Or $\mathscr{B}$ est libre sur $\mathbb{C}$.

Donc $\forall k \in [\![1 ; n]\!], \quad a_k + i b_k = 0$.

Donc $\forall k \in [\![1 ; n]\!], \quad a_k = b_k = 0$.

Donc $\mathscr{B}'$ est libre sur $\mathbb{R}$.

Donc $\mathscr{B}'$ est une base de E sur $\mathbb{R}$ possédant $2n$ vecteurs.

Donc $\dim_{\mathbb{R}} E = 2n$. ∎

14.3 Familles de vecteurs en dimension finie

Théorème 14.28
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

On pose $n = \dim E$.

Alors :

(1) *Toute famille libre de E possède au plus n vecteurs.*

(2) Toute famille génératrice de E possède au moins n vecteurs.

Démonstration 14.29
Soit $\mathscr{B}$ une base de E (qui possède donc n vecteurs).

(1) Comme $\mathscr{B}$ est une famille génératrice de E possédant n vecteurs, toute famille libre de E possède au plus n vecteurs.

(2) Comme $\mathscr{B}$ est une famille libre de E possédant n vecteurs, toute famille génératrice de E possède au moins n vecteurs. ■

Proposition 14.30
Soient E et F deux espaces vectoriels.

(1) S'il existe une application linéaire injective de E vers F alors

$$\dim E \leqslant \dim F.$$

(2) S'il existe une application linéaire surjective de E vers F alors

$$\dim E \geqslant \dim F.$$

(3) Si E et F sont isomorphes alors

$$\dim E = \dim F.$$

Démonstration 14.31 (1)
Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ injective.

Si $\dim E < +\infty$:

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Comme u est injective, $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une famille libre de F selon le Rappel 14.4.

Donc $n \leqslant \dim F$ car F possède une famille libre de n vecteurs.

Si $\dim E = +\infty$ alors il existe une famille libre infinie $(x_i)_{i \in I} \in E^I$ de vecteurs de E et $(u(x_i))_{i \in I}$ est une famille libre infinie de vecteurs de F (selon le Rappel 14.4).

Donc $\dim E \leqslant \dim F$. ■

Démonstration 14.32 (2)
Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ surjective.

Si $\dim E = +\infty$ alors $\dim E \geqslant \dim F$.

Si $\dim E < +\infty$:

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Selon le Rappel 14.4, $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une famille génératrice de F.

Donc $\dim F \leqslant n$. ■

Démonstration 14.33 (3)
Découle de (1) et (2). ■

Théorème 14.34
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille d'éléments de E.

Alors $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de E si elle vérifie deux des trois propositions suivantes :

(1) $p = n$

(2) $(e_1, \ldots, e_p)$ *est une famille libre*

(3) $(e_1, \ldots, e_p)$ *est une famille génératrice de E.*

Démonstration 14.35
Si on a (2) et (3) alors $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de E.

Si on a (1) et (2) alors on peut compléter $(e_1, \ldots, e_p)$ en une base de E selon le théorème de la base incomplète. Donc $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de E.

Si on a (3) alors on peut extraire de $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E selon le théorème de la base extraite. Si, de plus, $n = p$ alors $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de E. ■

Exercice 14.36
Montrer que la famille $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Correction 14.37
Montrons que $\mathscr{B}$ est libre.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = 0$.

Alors $\begin{cases} a + 2c = 0 \\ 2a + b + c = 0 \\ 2b = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} -3c = 0 & L_1 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -3a = 0 & L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ b = 0 \end{cases}$

Donc $\mathscr{B}$ est libre.

De plus, elle possède 3 éléments et $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

14.4 Sous-espaces vectoriels en dimension finie

14.4.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Théorème 14.38
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E.

Alors :
$$\dim F \leqslant \dim E,$$
avec égalité si, et seulement si, $E = F$.

Démonstration 14.39
On pose $n = \dim E$.

Toute famille libre de F est une famille libre de E et possède donc au plus n éléments.

Donc F est de dimension finie.

Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de F où $p \in \mathbb{N}$.

Comme $(e_1, \ldots, e_p)$ est une famille libre de vecteurs de E, on a $p \leqslant n$.

Donc
$$\dim F = p \leqslant n = \dim E.$$

Montrons que $\dim E = \dim F \iff E = F$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Claire.

$\boxed{\Longrightarrow}$

Si $p = n$ alors $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille libre de vecteurs de E possédant $p = \dim E$ vecteurs de E.

C'est donc une base de E.

Donc $E = \text{Vect}\,(e_1, \dots, e_p) = F$. ■

Définition 14.40 (Base adaptée à un sous-espace vectoriel)
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E.

On dit qu'une base $\mathscr{B}$ de E est adaptée au sous-espace vectoriel F si ses premiers vecteurs forment une base de F, c'est-à-dire si elle est de la forme

$$\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p, \dots, e_n) \in E^n$$

avec $p = \dim F$, $n = \dim E$ et $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de F.

Il est facile de voir si un vecteur de E appartient à F à partir de ses coordonnées dans $\mathscr{B}$:

$$\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K},\ \ x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \in F \iff x_{p+1} = \cdots = x_n = 0.$$

Exercice/Exemple 14.41
Donner une base de E adaptée au sous-espace vectoriel F dans les situations suivantes :

(1) $E = \mathbb{K}_N[X]$ et $F = \mathbb{K}_n[X]$ où les entiers $n, N \in \mathbb{N}$ vérifient $n \leqslant N$.

(2) $E = \mathbb{K}_4[X]$ et $F = \{P \in \mathbb{K}_4[X] \mid 3 \text{ est racine multiple de } P\}$.

Correction 14.42 (1)
La base canonique de $\mathbb{K}_N[X]$ $\left(\underbrace{1, \dots, X^n}_{\text{base de } \mathbb{K}_n[X]}, \dots, X^N\right)$ est adaptée à $\mathbb{K}_n[X]$.

Correction 14.43 (2)
On a $\dim E = 5$.

On a

$$\begin{aligned}
\forall P \in E,\ \ P \in F &\iff (X-3)^2 \mid P \\
&\iff \exists a, b, c \in \mathbb{K},\ \ P = (X-3)^2 \left(aX^2 + bX + c\right) \\
&\iff \exists a, b, c \in \mathbb{K},\ \ P = aX^2 (X-3)^2 + bX (X-3)^2 + c (X-3)^2 \\
&\iff P \in \text{Vect}\left((X-3)^2, X(X-3)^2, X^2(X-3)^2\right)
\end{aligned}$$

D'où une base de E adaptée à F : $\left((X-3)^2, X(X-3)^2, X^2(X-3)^2, 1, X\right)$.

C'est bien une base de E car c'est une famille de polynômes à degrés échelonnés.

Proposition 14.44
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E.

Il existe une base de E adaptée à F.

Démonstration 14.45
Comme F est un sous-espace vectoriel de E, il est de dimension finie.

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F (avec $p \in \mathbb{N}$).

Comme $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille libre de vecteurs de F, c'est une famille libre de vecteurs de E.

Selon le théorème de la base incomplète, on peut la compléter en une base de E :

$$\Big(\underbrace{e_1, \dots, e_p}_{\text{base de } F}, \dots, e_n\Big).$$

■

14.4.2 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 14.46
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{F} = (x_1, \dots, x_p) \in E^p$ une famille de vecteurs de E (où $p \in \mathbb{N}$).

Le rang de la famille $\mathscr{F}$ est la dimension du sous-espace vectoriel qu'elle engendre :

$$\operatorname{rg} \mathscr{F} = \dim \operatorname{Vect}(\mathscr{F}).$$

Remarque 14.47
On ne modifie pas le rang d'une famille de vecteurs :

- en permutant ses vecteurs ;
- en multipliant l'un de ses vecteurs par un scalaire non-nul ;
- en ajoutant à l'un de ses vecteurs une combinaison linéaire de ses autres vecteurs ;
- en lui ôtant le vecteur nul.

Démonstration 14.48
C'est clair puisque ces transformations ne modifient pas l'espace vectoriel engendré par la famille. ■

Exercice/Exemple 14.49
Donner le rang des familles de vecteurs suivantes :

(1) La famille $\left(\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}\right)$ (famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$) ;

(2) La famille $\left(X-1, X^3-X^2, X^3-3X^2+2, X^2-1\right)$ (famille de vecteurs de $\mathbb{R}[X]$).

Correction 14.50 (1)

On a, comme $\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}\right) &= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}\right) \\
& \qquad \textit{car } \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) \\
& \qquad \textit{car } \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \textit{ et } \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \textit{ ne sont pas colinéaires} \\
&= 2
\end{aligned}$$

Correction 14.51 (2)
On remarque $X^3-3X^2+2 = \left(X^3-X^2\right) - 2\left(X^2-1\right)$.

Donc $\operatorname{rg}\left(X-1, X^3-X^2, X^3-3X^2+2, X^2-1\right) = \operatorname{rg}\left(X-1, X^3-X^2, X^2-1\right) = 3$.

En effet, la famille $\left(X-1, X^3-X^2, X^2-1\right)$ est libre car c'est une famille de polynômes non-nuls de degrés deux à deux distincts.

Donc c'est une base de $\operatorname{Vect}\left(X-1, X^3-X^2, X^2-1\right)$.

Donc on a $\dim \operatorname{Vect}\left(X-1, X^3-X^2, X^2-1\right) = 3$.

Remarque 14.52
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{F} = \left(x_1, \ldots, x_p\right) \in E^p$ une famille de vecteurs de E (où $p \in \mathbb{N}$).

On a d'une part (selon le Théorème 14.28) :

$$\operatorname{rg} \mathscr{F} \leqslant p,$$

avec égalité si, et seulement si, la famille $\mathscr{F}$ est libre (selon le Théorème 14.34).

On a d'autre part (selon le Théorème 14.38) :

$$\operatorname{rg} \mathscr{F} \leqslant \dim E,$$

avec égalité si, et seulement si, la famille $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E.

14.4.3 Sommes directes en dimension finie

Définition 14.53
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Si $\mathscr{F}_1 = \left(v_1^{(1)}, \dots, v_{d_1}^{(1)}\right), \dots, \mathscr{F}_m = \left(v_1^{(m)}, \dots, v_{d_m}^{(m)}\right)$ sont des familles de vecteurs de E, on appelle famille obtenue en juxtaposant $\mathscr{F}_1, \dots, \mathscr{F}_m$ la famille :

$$\left(v_1^{(1)}, \dots, v_{d_1}^{(1)}, \dots, v_1^{(m)}, \dots, v_{d_m}^{(m)}\right).$$

Proposition 14.54
Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E, $\mathscr{B}_F = (v_1, \dots, v_n)$ une base de F et $\mathscr{B}_G = (w_1, \dots, w_m)$ une base de G.

Alors la famille

$$\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m)$$

obtenue en juxtaposant $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ est une base de E.

Démonstration 14.55
Montrons que $\mathscr{B}$ est libre.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{K}$ tels que

$$\underbrace{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n}_{\in F} + \underbrace{\mu_1 w_1 + \cdots + \mu_m w_m}_{\in G} = 0_E.$$

Donc comme F et G sont en somme directe : $\begin{cases} \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_E \\ \mu_1 w_1 + \cdots + \mu_m w_m = 0_E \end{cases}$

Donc comme $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ sont libres : $\begin{cases} \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0 \\ \mu_1 = \cdots = \mu_m = 0 \end{cases}$

Donc $\mathscr{B}$ est libre.

Montrons que $\mathscr{B}$ est génératrice de E.

Soit $x \in E$.

Comme $E = F + G$, il existe $x_F \in F$ et $x_G \in G$ tels que $x = x_F + x_G$.

Comme $\mathscr{B}_F$ est génératrice de F, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$x_F = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Comme $\mathscr{B}_G$ est génératrice de G, il existe $\mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{K}$ tels que

$$x_G = \mu_1 w_1 + \cdots + \mu_m w_m.$$

Finalement, on a $x = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n + \mu_1 w_1 + \cdots + \mu_m w_m$.

Donc $x \in \mathrm{Vect}\,(\mathscr{B})$.

Donc $\mathscr{B}$ est génératrice de E.

Finalement, $\mathscr{B}$ est une base de E. ∎

Corollaire 14.56
Soient E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E en somme directe :

$$F \cap G = \{0_E\}\,.$$

Alors on a :

$$\dim F \oplus G = \dim F + \dim G.$$

Démonstration 14.57
Posons $E' = F \oplus G$.

Si F ou G est de dimension infinie, alors E' aussi donc on a bien $\dim E' = \dim F + \dim G$.

Supposons F et G de dimension finie.

Soient $\mathscr{B}_F$ une base de F et $\mathscr{B}_G$ une base de G.

On note $\mathscr{B}$ la famille obtenue en juxtaposant $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$.

Selon la Proposition 14.54, $\mathscr{B}$ est une base de E'.

Donc

$$\dim E' = \mathrm{Card}\,\mathscr{B} = \mathrm{Card}\,\mathscr{B}_F + \mathrm{Card}\,\mathscr{B}_G = \dim F + \dim G.$$ ∎

Définition 14.58 (Base adaptée à une somme directe)
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E :

$$E = F \oplus G.$$

Une base de E obtenue en juxtaposant une base de F et une base de G est dite adaptée à la décomposition de E en somme directe.

On a vu à la Proposition 14.54 qu'une telle base existe.

Exercice 14.59
Soient F et G deux plans vectoriels de $\mathbb{K}^3$ tels que $F \neq G$.

Quelle est la dimension de leur intersection ?

Correction 14.60

On a $\begin{cases} F \cap G \text{ est un sous-espace vectoriel de } F \\ \dim F = 2 \end{cases}$ donc $\dim F \cap G \leqslant 2$.

Si $\dim F \cap G = 2$:

On a $\begin{cases} F \cap G \subseteq F \\ \dim F \cap G = \dim F < +\infty \end{cases}$ donc $F \cap G = F$ donc $F \subseteq G$.

Ainsi $\begin{cases} F \subseteq G \\ \dim F = \dim G < +\infty \end{cases}$ donc $F = G$: contradiction.

Si $\dim F \cap G = 0$ alors on a $F \cap G = \{0\}$ donc $F \oplus G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$ tel que $\dim F \oplus G = \dim F + \dim G = 4$: contradiction car $\dim \mathbb{K}^3 = 3$.

Donc $\dim F \cap G = 1$.

14.4.4 Supplémentaire en dimension finie

Théorème 14.61 (Existence d'un supplémentaire en dimension finie)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E.

Alors F admet un supplémentaire dans E.

Démonstration 14.62
Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F (avec $p \in \mathbb{N}$).

La famille $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille libre de vecteurs de E.

Donc selon le théorème de la base incomplète, on peut la compléter en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E (avec $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant p$).

Posons $S = \operatorname{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$.

Montrons que S est un supplémentaire de F dans E, c'est-à-dire

$$F \cap S = \{0_E\} .$$

Soit $x \in F \cap S$.

On a $x \in F = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ donc il existe $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{K}$ tels que

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_p e_p$$

et $x \in S = \operatorname{Vect}\left(e_{p+1}, \ldots, e_n\right)$ donc il existe $x_{p+1}, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$x = x_{p+1}e_{p+1} + \cdots + x_n e_n.$$

On a $x_1e_1 + \cdots + x_pe_p - x_{p+1}e_{p+1} - \cdots - x_ne_n = x - x = 0_E$.

Or $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre.

Donc $\forall k \in [\![1\,;\,n]\!]\,,\ \ x_k = 0$.

Donc $x = 0_E$ donc $F \cap S = \{0_E\}$.

Montrons que $F + S = E$.

Soit $x \in E$.

Comme $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, il existe $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$x = \underbrace{x_1e_1 + \cdots + x_pe_p}_{\in F} + \underbrace{x_{p+1}e_{p+1} + \cdots + x_ne_n}_{\in S}.$$

Donc $x \in F + S$.

Finalement, $E = F \oplus S$. ■

14.5 Autres exemples de dimensions

14.5.1 Dimension d'un produit d'espaces vectoriels

Proposition 14.63
Soient $F_1, \ldots, F_m$ des espaces vectoriels de dimension finie.

On pose :

$$\begin{cases} F_1' = F_1 \times \left\{0_{F_2}\right\} \times \cdots \times \left\{0_{F_m}\right\} \\ \vdots \\ F_m' = \left\{0_{F_1}\right\} \times \ldots \left\{0_{F_{m-1}}\right\} \times F_m \end{cases}$$

On a $\forall k \in [\![1\,;\,m]\!]\,,\ \ F_k$ est isomorphe à F_k' donc $\dim F_k = \dim F_k'$.

Soient $\mathscr{B}_1$ une base de F_1', ..., $\mathscr{B}_m$ une base de F_m'.

On note $\mathscr{B}$ la famille obtenue en juxtaposant $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m$.

Alors $\mathscr{B}$ est une base de l'espace vectoriel produit $F_1 \times \cdots \times F_m$.

Démonstration 14.64
★★ **Exercice** ★★ ■

Corollaire 14.65
Soient $F_1, \dots, F_m$ des espaces vectoriels.

Alors :

$$\dim (F_1 \times \cdots \times F_m) = \dim F_1 + \cdots + \dim F_m.$$

Démonstration 14.66
On distingue deux cas :

- Si l'un des espaces vectoriels $F_1, \dots, F_m$ est de dimension infinie, alors $F_1 \times \cdots \times F_m$ est aussi de dimension infinie.

- Si les espaces vectoriels $F_1, \dots, F_m$ sont de dimension finie alors la formule découle de la proposition précédente. ■

14.5.2 Dimension de $\mathscr{L}(E, F)$

Théorème 14.67
Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie.

Alors on a :

$$\dim \mathscr{L}(E, F) = (\dim E)(\dim F).$$

En particulier, l'espace vectoriel $\mathscr{L}(E, F)$ est de dimension finie.

Démonstration 14.68
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

On sait que

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E, F) & \longrightarrow & F^n \\ u & \longmapsto & (u(e_1), \dots, u(e_n)) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Donc

$$\begin{aligned} \dim \mathscr{L}(E, F) &= \dim F^n \\ &= n \dim F && \textit{selon le Corollaire } 14.65 \\ &= (\dim E)(\dim F). \end{aligned}$$

■

Corollaire 14.69
Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Alors on a :
$$\dim \mathscr{L}(E) = (\dim E)^2$$
et :
$$\dim E^* = \dim E.$$

En particulier, les espaces vectoriels $\mathscr{L}(E)$ et E^* sont de dimension finie.

Démonstration 14.70
Posons $n = \dim E$.

On a $\dim \mathscr{L}(E) = \dim \mathscr{L}(E, E) = n^2$.

On a $\dim E^* = \dim \mathscr{L}(E, \mathbb{K}) = n \times 1 = n$. ■

Remarque 14.71
Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

On a vu en TD (*cf.* Exercice 12.37) que si $\mathscr{B}$ est une base de E alors la base duale $\mathscr{B}'$ possède le même nombre d'éléments que $\mathscr{B}$, ce qui redémontre que $\dim E^* = \dim E$.

14.6 Rang d'une application linéaire

14.6.1 Définition

Définition 14.72
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

On appelle rang de l'application linéaire u la dimension de son image :
$$\operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Im} u.$$

Remarque 14.73
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

On suppose que $(e_1, \ldots, e_p) \in E^p$ est une famille génératrice de E.

Alors
$$\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}\left(u(e_1), \ldots, u(e_p)\right).$$

Démonstration 14.74
On a :

$$\begin{aligned}\operatorname{rg} u &= \dim \operatorname{Im} u \\ &= \dim u(E) \\ &= \dim u\left(\operatorname{Vect}\left(e_1, \ldots, e_p\right)\right) \\ &= \dim \operatorname{Vect}\left(u(e_1), \ldots, u(e_p)\right) \\ &= \operatorname{rg}\left(u(e_1), \ldots, u(e_p)\right).\end{aligned}$$

■

Proposition 14.75
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

On a :

$$\operatorname{rg} u \leqslant \min\{\dim E\ ;\ \dim F\}.$$

Démonstration 14.76
Montrons que $\operatorname{rg} u \leqslant \dim E$.

C'est vrai si $\dim E < +\infty$.

Sinon, on considère une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E (où $n \in \mathbb{N}$) et on a :

$$\begin{aligned}\operatorname{rg} u &= \operatorname{rg}\left(u(e_1), \ldots, u(e_n)\right) \\ &\leqslant n.\end{aligned}$$

selon la Remarque 14.52

Montrons que $\operatorname{rg} u \leqslant \dim F$.

On a $\operatorname{Im} u \subseteq F$ donc $\operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Im} u \leqslant \dim F$. ■

Exercice/Exemple 14.77
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Quel est le rang de l'endomorphisme

$$D: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} ?$$

Correction 14.78
On a $\mathbb{R}_n[X] = \mathrm{Vect}(1, X, \dots, X^n)$.

Donc selon la Remarque 14.73 :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}\, D &= \mathrm{rg}\left(D(1), \dots, D(X^n)\right) \\
&= \mathrm{rg}\left(0, 1, 2X, 3X^2, \dots, nX^{n-1}\right) \\
&= \mathrm{rg}\left(1, 2X, 3X^2, \dots, nX^{n-1}\right) \\
&= n. && \text{car } \mathrm{Vect}\left(1, 2X, \dots, nX^{n-1}\right) = \mathbb{R}_{n-1}[X]
\end{aligned}$$

Proposition 14.79 (Invariance du rang par composition par un isomorphisme)
Soient E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$.

(1) *Si u est un isomorphisme, alors :* $\mathrm{rg}\, vu = \mathrm{rg}\, v$.

(2) *Si v est un isomorphisme, alors :* $\mathrm{rg}\, vu = \mathrm{rg}\, u$.

Démonstration 14.80 (1)
On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}\, vu &= \dim vu(E) \\
&= \dim v(u(E)) \\
&= \dim v(F) && \text{car } u(E) = F \text{ car } u \text{ est surjectif} \\
&= \mathrm{rg}\, v.
\end{aligned}$$

■

Démonstration 14.81 (2)
On a

$$\mathrm{Im}\, vu = vu(E) = v(\mathrm{Im}\, u).$$

Comme v est un isomorphisme, les espaces vectoriels $\mathrm{Im}\, vu$ et $\mathrm{Im}\, u$ sont isomorphes.

Donc $\dim \mathrm{Im}\, vu = \dim \mathrm{Im}\, u$.

Donc $\mathrm{rg}\, vu = \mathrm{rg}\, u$. ■

14.6.2 Théorème du rang

Théorème 14.82 (Forme géométrique du théorème du rang)
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et S un supplémentaire de $\ker u$ dans E :

$$E = \ker u \oplus S.$$

Alors u induit un isomorphisme de S vers $\operatorname{Im} u$.

Cela signifie que l'application

$$\begin{array}{rccc} v: & S & \longrightarrow & \operatorname{Im} u \\ & x & \longmapsto & u(x) \end{array}$$

est un isomorphisme.

Démonstration 14.83
On a $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et S est un sous-espace vectoriel de E donc $u\big|_S \in \mathscr{L}(S, F)$ et $\operatorname{Im} u\big|_S \subseteq \operatorname{Im} u$ donc $v \in \mathscr{L}(S, \operatorname{Im} u)$.

Montrons que $\ker v = \{0_E\}$.

Soit $x \in S$ tel que $v(x) = 0_F$.

On a $u(x) = 0_F$ car $v(x) = u(x)$.

Donc $x \in \ker v \cap S = \{0_E\}$.

Donc $x = 0_E$.

Donc v est injectif.

Montrons que v est surjectif de S vers $\operatorname{Im} u$.

Soient $y \in \operatorname{Im} u$ et $x \in E$ tel que $u(x) = y$.

Comme $\ker u + S = E$, il existe $x_0 \in \ker u$ et $x_1 \in S$ tels que $x = x_0 + x_1$.

On a

$$y = u(x) = u(x_0) + u(x_1) = 0_E + v(x_1).$$

Donc $y \in \operatorname{Im} v$.

Donc v est surjectif.

Donc v est un isomorphisme de S vers $\operatorname{Im} u$. ∎

Théorème 14.84 (Théorème du rang)
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

On suppose que E est de dimension finie.

On a :
$$\dim E = \operatorname{rg} u + \dim \ker u.$$

Démonstration 14.85
Soit S un supplémentaire de $\ker u$ dans E.

Selon le théorème précédent, S et $\operatorname{Im} u$ sont isomorphes donc $\dim S = \dim \operatorname{Im} u$, c'est-à-dire $\dim E - \dim \ker u = \operatorname{rg} u$.

Donc
$$\dim E = \operatorname{rg} u + \dim \ker u.$$
■

Remarque 14.86
Le théorème est également vrai en dimension infinie.

14.6.3 Applications

14.6.3.1 Isomorphismes en dimension finie

Théorème 14.87
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) u est injective (c'est-à-dire $\ker u = \{0_E\}$)

(2) u est surjective (c'est-à-dire $\operatorname{rg} u = \dim F$)

(3) u est bijective.

Démonstration 14.88
On a :

$$\begin{aligned} u \text{ est surjectif} &\iff \operatorname{Im} u = F \\ &\iff \dim \operatorname{Im} u = \dim F \quad \text{\textit{car} } \operatorname{Im} u \text{ \textit{est un sous-espace vectoriel de} } F \text{ \textit{et} } \dim F < +\infty \\ &\iff \operatorname{rg} u = \dim F. \end{aligned}$$

Les implications (3) $\implies$ (1) et (3) $\implies$ (2) sont claires.

Selon le théorème du rang appliqué à u, on a

$$\dim E = \operatorname{rg} u + \dim \ker u.$$

D'où

$$\begin{aligned} u \text{ est injective} &\iff \ker u = \{0_E\} \\ &\iff \dim \ker u = 0 \\ &\iff \operatorname{rg} u = \dim E \\ &\iff \operatorname{rg} u = \dim F \\ &\iff u \text{ est surjective.} \end{aligned}$$

D'où les équivalences. ■

Corollaire 14.89
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$.

On rappelle que l'anneau $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ n'est pas commutatif (sauf si $\dim E \leqslant 1$).

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) u est inversible : $u \in \mathrm{GL}(E)$.

(2) u est inversible à droite : $\exists v \in \mathscr{L}(E), \quad uv = \mathrm{id}_E$.

(3) u est inversible à gauche : $\exists v \in \mathscr{L}(E), \quad vu = \mathrm{id}_E$.

Démonstration 14.90
Supposons u inversible à droite.

Alors u est une surjection.

Donc u est un isomorphisme car $\dim E < +\infty$.

D'où (1).

Supposons u inversible à gauche.

Alors u est une injection.

Donc u est un isomorphisme car $\dim E < +\infty$.

D'où (1).

Finalement, les implications (1) $\implies$ (2) et (1) $\implies$ (3) sont claires. ∎

14.6.3.2 Formule de Grassmann

Proposition 14.91 (Formule de Grassmann)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie.

On a :

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G.$$

Démonstration 14.92
On pose :

$$u : \begin{array}{ccc} F \times G & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}$$

On a $\begin{cases} u \in \mathscr{L}(F \times G, E) \\ \operatorname{Im} u = F + G \end{cases}$

Selon le théorème du rang appliqué à u, on a :

$$\dim(F \times G) = \dim\ker u + \operatorname{rg} u,$$

avec $\begin{cases} \dim(F \times G) = \dim F + \dim G \\ \operatorname{rg} u = \dim(F+G) \\ \ker u = \{(x,y) \in F \times G \mid x+y = 0_E\} = \{(z,-z)\}_{z \in F \cap G} \end{cases}$

Or $\{(z,-z)\}_{z\in F\cap G}$ est isomorphe à $F\cap G$ (en effet, $\begin{array}{ccc} F \cap G & \longrightarrow & \{(z,-z)\}_{z \in F \cap G} \\ z & \longmapsto & (z,-z) \end{array}$ est clairement linéaire et bijective donc c'est un isomorphisme).

Donc $\dim\ker u = \dim F \cap G$.

Finalement, on a $\dim F + \dim G = \dim F \cap G + \dim(F+G)$, c'est-à-dire :

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G.$$ ∎

Corollaire 14.93
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie.

On a :

$$\dim (F+G) \leqslant \dim F + \dim G$$

avec égalité si, et seulement si, F et G sont en somme directe.

Démonstration 14.94
Selon la formule de Grassmann, on a

$$\begin{aligned}\dim (F+G) &= \dim F + \dim G - \dim F \cap G \\ &\leqslant \dim F + \dim G\end{aligned}$$

avec égalité ssi $\dim F \cap G = 0$ ssi $F \cap G = \{0_E\}$ ssi F et G sont en somme directe. ■

14.6.3.3 Supplémentaires

Proposition 14.95 (Caractérisation des supplémentaires)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

On a

$$E = F \oplus G$$

si deux des trois conditions suivantes sont satisfaites :

(1) Les sous-espaces vectoriels F et G sont en somme directe

(2) $E = F + G$

(3) $\dim E = \dim F + \dim G$.

Démonstration 14.96 (((1) et (3)) $\Longrightarrow$ (2))
Supposons (1) et (3).

Selon la formule de Grassmann et (1), on a :

$$\begin{aligned}\dim (F+G) &= \dim F + \dim G - 0 \\ &= \dim E\end{aligned} \quad \text{selon (3)}$$

Ainsi, on a $\begin{cases} F+G \subseteq E \\ \dim (F+G) = \dim E < +\infty \end{cases}$

Donc $F + G = E$. ■

Démonstration 14.97 (((2) et (3)) $\Longrightarrow$ (1))
Supposons (2) et (3).

Selon la formule de Grassmann, on a :

$$\begin{aligned}\dim F \cap G &= \underbrace{\dim F + \dim G}_{= \dim E \text{ selon (3)}} - \underbrace{\dim (F+G)}_{= \dim E \text{ selon (2)}} \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc $F \cap G = \{0_E\}$. ■

14.7 Hyperplans

14.7.1 Hyperplans en dimension quelconque

Définition 14.98
Soient E un espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de E.

On dit que H est un hyperplan (de E) si H est le noyau d'une forme linéaire non-nulle :

$$\exists \ell \in E^* \setminus \{0\}, \quad H = \ker \ell.$$

Proposition 14.99
Soient E un espace vectoriel, D une droite vectorielle de E et H un hyperplan de E ne contenant pas D :

$$D \not\subseteq H.$$

Alors H et D sont supplémentaires dans E :

$$H \oplus D = E.$$

Démonstration 14.100
Montrons que $H \cap D = \{0_E\}$.

On a $H \cap D \subseteq D$ et $\dim D = 1$ donc $\dim H \cap D = 0$ ou $\dim H \cap D = 1$.

Si $\dim H \cap D = 1$:

Alors $\begin{cases} H \cap D \subseteq D \\ \dim H \cap D = \dim D < +\infty \end{cases}$

Donc $H \cap D = D$.

Donc $D \subseteq H$: contradiction.

Donc $\dim H \cap D = 0$ donc $H \cap D = \{0_E\}$.

Montrons que $H + D = E$.

Comme H est un hyperplan de E, il existe $\ell \in E^* \setminus \{0\}$ telle que $H = \ker \ell$.

Soit $x \in E$.

Montrons que $x \in H + D$.

On a $D \nsubseteq H$ donc $D \nsubseteq \ker \ell$.

Donc $\exists x \in D, \quad \ell(x) \neq 0$.

Donc $\ell\big|_D \neq 0$ donc $\ell\big|_D$ est surjective.

Donc $\exists y \in D, \quad \ell(y) = \ell(x)$.

Donc

$$\begin{aligned} \exists y \in D, \ & y - x \in \ker \ell \\ & \exists z \in \ker \ell, \quad y - x = z \\ & \exists z \in H, \quad y - z = x. \end{aligned}$$

Donc $H + D = E$. ■

Proposition 14.101
Les hyperplans de E sont les sous-espaces vectoriels de E qui admettent comme supplémentaire une droite vectorielle.

Démonstration 14.102
Soit $H \subseteq E$.

Montrons que

$$H \text{ est un hyperplan de } E \iff H \text{ admet comme supplémentaire une droite.}$$

$\boxed{\Longrightarrow}$

Supposons que H est un hyperplan de E.

Soit $\ell \in E^* \setminus \{0\}$ telle que $H = \ker \ell$.

Comme $\ell \neq 0$, on a $H \neq E$.

Soit $x \in E \setminus H$.

Alors $D = \mathrm{Vect}(x)$ est une droite (car $x \neq 0_E$ car $x \notin H$) non-incluse dans H (car $x \notin H$).

Donc D est une droite supplémentaire de H dans E selon la Proposition 14.99.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Supposons $E = H \oplus D$ où D est une droite de E.

On a $\dim D = \dim \mathbb{K} = 1$.

Donc il existe un isomorphisme $\ell_1 \in D^*$.

Notons $\ell_0 \in H^*$ la forme linéaire nulle sur H.

Soit $\ell \in E^*$ l'unique forme linéaire sur E telle que

$$\ell\big|_H = \ell_0 \qquad \text{et} \qquad \ell\big|_D = \ell_1.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\forall h \in H,\ \ \forall d \in D,\ \ h + d \in \ker \ell &\iff \ell\left(h + d\right) = 0_{\mathbb{K}} \\
&\iff \ell_0\left(h\right) + \ell_1\left(d\right) = 0_{\mathbb{K}} \\
&\iff \ell_1\left(d\right) = 0_{\mathbb{K}} \\
&\iff d = 0 \qquad \textit{car } \ell_1 \textit{ est injective} \\
&\iff h + d = h \\
&\iff h + d \in H
\end{aligned}$$

Donc $\ker \ell = H$ donc H est un hyperplan car $\ell \in E^* \setminus \{0\}$. ∎

Proposition 14.103
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, H un hyperplan de E et $\ell \in E^* \setminus \{0\}$ une forme linéaire non-nulle de E telle que $\ker \ell = H$.

Les formes linéaires nulles sur H sont celles qui sont colinéaires à ℓ :

$$\forall \ell' \in E^*,\ \ H \subseteq \ker \ell' \iff \left[\exists \lambda \in \mathbb{K},\ \ \ell' = \lambda \ell\right].$$

Les formes linéaires dont H est le noyau sont donc celles de la forme $\lambda\ell$ où $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Démonstration 14.104
Soient D une droite telle que $H \oplus D = E$ et $x \in E$ tel que $D = \mathrm{Vect}\left(x\right)$.

Soit $\ell' \in E^*$.

Montrons que

$$\forall \ell' \in E^*,\ \ H \subseteq \ker \ell' \iff \left[\exists \lambda \in \mathbb{K},\ \ \ell' = \lambda \ell\right].$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ S'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\ell' = \lambda\ell$ alors $\forall h \in H,\ \ \ell'\left(h\right) = \lambda\ell\left(h\right) = 0$ donc $H \subseteq \ker \ell'$.

$\boxed{\Longrightarrow}$

Supposons $H \subseteq \ker \ell'$.

On a $\ell(x) \neq 0$.

Posons $\lambda = \dfrac{\ell'(x)}{\ell(x)}$.

On a $\ell'(x) = \lambda\ell(x)$ donc comme ℓ' est linéaire :

$$\begin{aligned}
\forall h \in H,\ \ \forall \mu \in \mathbb{K},\ \ \ell'(h+\mu x) &= \ell'(h) + \mu\ell'(x) \\
&= 0 + \mu\lambda\ell(x) \\
&= \lambda\ell(h) + \mu\lambda\ell(x) \\
&= \lambda\ell(h+\mu x)\,.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall y \in H + \mathrm{Vect}(x)\,,\ \ \ell'(y) = \lambda\ell(y)$.

Donc $\ell' = \lambda\ell$ car $E = H + \mathrm{Vect}(x)$. ■

14.7.2 Hyperplans en dimension finie

Proposition 14.105
Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Les hyperplans de E sont ses sous-espaces vectoriels de dimension $n-1$.

Démonstration 14.106
Rappel : si $\ell \in E^* = \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ alors $\mathrm{rg}\,\ell \leqslant \dim\mathbb{K} = 1$ donc toute forme linéaire non-nulle est surjective.

$\boxed{\subseteq}$

Soient H un hyperplan de E et $\ell \in E^* \setminus \{0\}$ telle que $H = \ker\ell$.

D'après le théorème du rang appliqué à ℓ, on a :

$$\dim E = \dim\ker\ell + \mathrm{rg}\,\ell.$$

Donc $n = \dim H + 1$ donc $\dim H = n-1$.

$\boxed{\supseteq}$

Soient H un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$ et D un supplémentaire de H dans E :

$$E = H \oplus D.$$

On a $\dim E = \dim H + \dim D$ donc $\dim D = 1$.

Donc H est un hyperplan selon la Proposition 14.101. ■

Démonstration 14.107 (Autre méthode)
Soient H un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$ et $\Bigg(\underbrace{e_1,\dots,e_{n-1}}_{\text{base de } H},e_n\Bigg)$ une base de E adaptée à H.

On note $\left(e_1^*,\dots,e_n^*\right)$ la base duale de $(e_1,\dots,e_n)$.

On a $H=\ker e_n^*$ avec e_n^* une forme linéaire non-nulle.

Donc H est un hyperplan de E. ■

Proposition 14.108 (Équation cartésienne d'un hyperplan dans une base)
Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n\in\mathbb{N}^*$, H un hyperplan de E et $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E.

Alors H admet dans $\mathscr{B}$ une équation cartésienne de la forme :

$$a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0,$$

où $a_1,\dots,a_n$ sont des scalaires non-tous nuls.

En d'autres termes, on a :

$$\exists\,(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}\,,\ \ \forall x_1,\dots,x_n\in\mathbb{K},\ \ x_1e_1+\cdots+x_ne_n\in H\iff a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0.$$

De plus, l'équation cartésienne d'un hyperplan de E est unique à un facteur multiplicatif non-nul près.

Autrement dit, si $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0$ est une équation cartésienne de H dans $\mathscr{B}$, alors les autres équations cartésiennes de H dans $\mathscr{B}$ sont celles de la forme :

$$\lambda a_1x_1+\cdots+\lambda a_nx_n=0$$

où $\lambda\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$.

Remarque 14.109
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E.

Déterminons les formes linéaires sur E.

$\boxed{\text{analyse}}$

Soit $\ell\in E^*$.

On note $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$ les coordonnées de x dans $\mathscr{B}$: $x=x_1e_1+\cdots+x_ne_n$.

On a

$$\begin{aligned}\ell\,(x)&=\ell\,(x_1e_1+\cdots+x_ne_n)\\&=x_1\ell\,(e_1)+\cdots+x_n\ell\,(e_n)\\&=a_1x_1+\cdots+a_nx_n\end{aligned}$$

en posant $a_1 = \ell(e_1), \ldots, a_n = \ell(e_n)$.

synthèse

Si $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ alors la fonction $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x_1e_1 + \cdots + x_ne_n & \longmapsto & a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \end{array}$ est clairement une forme linéaire sur E.

conclusion

Les formes linéaires sur E sont les fonctions de la forme

$$\ell : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x_1e_1 + \cdots + x_ne_n & \longmapsto & a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \end{array}$$

où $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$.

De plus, comme $\forall k \in [\![1 ; n]\!], \;\; a_k = \ell(e_k)$, on remarque :

$$\ell = 0 \iff a_1 = \cdots = a_n = 0$$

Démonstration 14.110 (De la proposition précédente)
Soient $\ell \in E^* \setminus \{0\}$ telle que $H = \ker \ell$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tel que

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}, \;\; \ell(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n.$$

On a

$$\begin{aligned} \forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}, \;\; x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \in H &\iff \ell(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) = 0 \\ &\iff a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0. \end{aligned}$$

■

Exemple 14.111
On pose

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \;\middle|\; 2x + z = 0\right\}$$

.

Alors F est un hyperplan de $\mathbb{K}^3$ car les hyperplans de $\mathbb{K}^3$ sont les noyaux de ses formes linéaires non-nulles.

14.7.3 Intersections d'hyperplans en dimension finie

Proposition 14.112
Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $H_1, \ldots, H_m$ des hyperplans de E (où $m \in \mathbb{N}^*$).

Alors :

$$\dim \bigcap_{i=1}^{m} H_i \geqslant n - m.$$

Démonstration 14.113
Soient $\ell_1, \ldots, \ell_m \in E^* \setminus \{0\}$ telles que $\forall i \in [\![1 ; m]\!]$, $H_i = \ker \ell_i$.

On pose
$$u : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^m \\ x & \longmapsto & (\ell_1(x), \ldots, \ell_m(x)) \end{array}$$
de sorte que
$$\ker u = \bigcap_{i=1}^{m} \ker \ell_i = \bigcap_{i=1}^{m} H_i.$$

Appliquons le théorème du rang à u :
$$\dim E = \dim \ker u + \operatorname{rg} u \qquad \text{avec} \begin{cases} \dim E = n \\ \dim \ker u = \dim \bigcap_{i=1}^{m} H_i \\ \operatorname{rg} u \leqslant m \end{cases}$$

Donc $\dim \bigcap_{i=1}^{m} H_i \geqslant n - m$. ■

Proposition 14.114
Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et F un sous-espace vectoriel de E de dimension $m \in [\![0 ; n-1]\!]$.

Alors F est l'intersection de $n - m$ hyperplans de E.

Démonstration 14.115

Soit $\left(\underbrace{e_1, \ldots, e_m}_{\text{base de } F}, \ldots, e_n\right)$ une base de E adaptée à F.

On a
$$F = \underbrace{\bigcap_{i=m+1}^{n} \ker e_i^*}_{n-m \text{ hyperplans}}.$$
■

Corollaire 14.116
Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et F un sous-espace vectoriel de E tel que $E \neq F$.

Alors il existe un hyperplan H de E tel que $F \subseteq H$.

Démonstration 14.117

On a $F = \bigcap_{i=1}^{m} H_i$ avec $m \geqslant 1$ donc $F \subseteq H_1$. ■

Exemple 14.118
Les droites vectorielles du plan $\mathbb{R}^2$ sont les parties de $\mathbb{R}^2$ définies par une équation cartésienne de la forme

$$ax + by = 0$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Exemple 14.119
Les droites affines du plan $\mathbb{R}^2$ sont les parties de $\mathbb{R}^2$ définies par une équation cartésienne de la forme

$$ax + by = c$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $c \in \mathbb{R}$.

Exemple 14.120
Les plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont les parties de $\mathbb{R}^3$ définies par une équation cartésienne de la forme

$$ax + by + cz = 0$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

Exemple 14.121
Les plans affines de $\mathbb{R}^3$ sont les parties de $\mathbb{R}^3$ définies par une équation cartésienne de la forme

$$ax + by + cz = d$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ et $d \in \mathbb{R}$.

Exemple 14.122
Les droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ sont les parties de $\mathbb{R}^3$ définies par un système cartésien de la forme

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}$$

où les vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ sont non-colinéaires.

Exemple 14.123
Les droites affines de $\mathbb{R}^3$ sont les parties de $\mathbb{R}^3$ définies par un système cartésien de la forme

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

où les vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ sont non-colinéaires et $d, d' \in \mathbb{R}$.

Chapitre 15

Matrices I

Sommaire

On considère un corps $\mathbb{K}$ (en pratique, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

15.1 Matrices

Définition 15.1 (Matrice)
On appelle matrice toute famille de scalaires de la forme

$$A = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]} \in \mathbb{K}^{[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$$

avec $n, p \in \mathbb{N}^*$.

On représente aussi une telle matrice sous la forme d'un tableau :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

et on dit que A est une matrice à n lignes et p colonnes ou que A est de taille (n, p) ou encore que A est une matrice $n \times p$.

Son coefficient a_{ij} est appelé coefficient de A en position (i, j).

Si $n = 1$, on dit que A est une matrice-ligne.

Si $p = 1$, on dit que A est une matrice-colonne.

L'ensemble des matrices de taille (n, p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté

$$\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}.$$

On pose enfin, si $n = p$:

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_{nn}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{[\![1;n]\!]^2}.$$

Une matrice de taille (n, n) est appelée matrice carrée de taille n.

Exemple 15.2
On a :

$$(100i + j)_{(i,j)\in[\![1;2]\!]\times[\![1;4]\!]} = \begin{pmatrix} 101 & 102 & 103 & 104 \\ 201 & 202 & 203 & 204 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{24}(\mathbb{R}).$$

Notation 15.3
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle matrice identité de taille n la matrice carrée

$$I_n = \left(\delta_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).$$

Notation 15.4 (Non-officielle)
Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.

On appelle matrice nulle de taille (n, p) la matrice de taille (n, p) dont tous les coefficients sont nuls et on la note parfois 0_{np} :

$$0_{np} = (0)_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}).$$

Enfin, on pose : $0_n = 0_{nn} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

15.2 Combinaisons linéaires de matrices

Proposition 15.5
Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.

L'ensemble $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes est naturellement un espace vectoriel.

Notation 15.6 (Matrices élémentaires)
Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.

On définit pour tout $(i_0, j_0) \in [\![1\ ;\ n]\!] \times [\![1\ ;\ p]\!]$ la matrice élémentaire

$$E_{i_0 j_0} = \left(\delta_{ii_0}\delta_{jj_0}\right)_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}).$$

Tous ses coefficients sont nuls, sauf celui en position (i_0, j_0) qui vaut 1.

Exemple 15.7
Les matrices élémentaires de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ sont :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 15.8
Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.

La famille des matrices élémentaires de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$

$$\left(E_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})^{[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$$

est une base de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ appelée base canonique de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

Les coordonnées d'une matrice dans cette base sont ses coefficients.

Démonstration 15.9
On note $\mathscr{B}$ la famille des matrices élémentaires de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

Montrons que $\mathscr{B}$ est libre.

Soit $\left(\lambda_{ij}\right)_{(i,j)} \in \mathbb{K}^{[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$ telle que
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\lambda_{ij}E_{ij} = 0_{np}.$$

On a $\begin{pmatrix}\lambda_{11} & \dots & \lambda_{1p}\\ \vdots & & \vdots\\ \lambda_{n1} & \dots & \lambda_{np}\end{pmatrix} = 0_{np}$.

Donc
$$\forall i \in [\![1\,;n]\!],\ \ \forall j \in [\![1\,;p]\!],\ \ \lambda_{ij} = 0.$$

Donc $\mathscr{B}$ est libre.

Montrons que $\mathscr{B}$ est génératrice de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

Soit $A = \begin{pmatrix}a_{11} & \dots & a_{1p}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \dots & a_{np}\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

On remarque
$$A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}a_{ij}E_{ij}.$$

Donc $\mathscr{B}$ est génératrice de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$. ■

Exemple 15.10
On a :
$$\forall a,b,c,d \in \mathbb{K},\ \ \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}.$$

Corollaire 15.11
On a :
$$\forall n,p \in \mathbb{N}^*,\ \ \dim \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}) = np.$$

15.3 Produit matriciel

15.3.1 Produits de matrices

Définition 15.12 (Produit matriciel)
Soient $m, n, p \in \mathbb{N}^*$, $A = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1;m]\!]\times[\![1;n]\!]} \in \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{K})$ et $B = \left(b_{jk}\right)_{(j,k)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

On appelle produit des matrices A et B la matrice C de taille (m, p) :

$$C = (c_{ik})_{(i,k)\in[\![1;m]\!]\times[\![1;p]\!]} = A \times B = AB \in \mathscr{M}_{mp}(\mathbb{K})$$

définie par :

$$\forall (i, k) \in [\![1 \,;\, m]\!] \times [\![1 \,;\, p]\!], \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}.$$

L'application ainsi définie

$$\mathscr{M}_{mn}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathscr{M}_{mp}(\mathbb{K})$$

est appelée le produit matriciel.

Proposition 15.13 (Bilinéarité du produit matriciel)
Soient $m, n, p \in \mathbb{N}^*$.

Le produit matriciel $\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{mp}(\mathbb{K}) \\ (A, B) & \longmapsto & AB \end{array}$ *est bilinéaire, c'est-à-dire qu'on a :*

$$\begin{cases} \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}, \ \ \forall A_1, A_2 \in \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{K}), \ \ \forall B \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}), \ \ (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) B = \lambda_1 A_1 B + \lambda_2 A_2 B \\ \forall \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}, \ \ \forall A \in \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{K}), \ \ \forall B_1, B_2 \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}), \ \ A(\mu_1 B_1 + \mu_2 B_2) = \mu_1 A B_1 + \mu_2 A B_2 \end{cases}$$

Cela équivaut à :

$$\begin{aligned} \forall \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}, \ \ \forall A_1, A_2 \in \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{K}), \ \ \forall B_1, B_2 \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}), \ \ (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)(\mu_1 B_1 + \mu_2 B_2) = {} & \lambda_1 \mu_1 A_1 B_1 \\ & + \lambda_1 \mu_2 A_1 B_2 \\ & + \lambda_2 \mu_1 A_2 B_1 \\ & + \lambda_2 \mu_2 A_2 B_2 \end{aligned}$$

Proposition 15.14 (Matrices nulles, matrices identités)
Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.

On a :

$$0_n \times A = A \times 0_p = 0_{np} \qquad \text{et} \qquad I_n \times A = A \times I_p = A.$$

Démonstration 15.15
Les égalités sont claires pour les produits avec les matrices nulles.

On pose $C = (c_{ik})_{(i,k)} = I_n A$.

Montrons que $C = A$.

On a $C \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $\forall i \in [\![1\ ;\ n]\!],\ \forall k \in [\![1\ ;\ p]\!],\ c_{ik} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} a_{jk} = a_{ik}$.

Donc $C = A$.

On montre de même $AI_p = A$. ∎

Remarque 15.16 (Matrices « scalaires »)
Soient $m, n, p \in \mathbb{N}^*$.

On a, selon la Proposition 15.13 :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall A \in \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}),\ (\lambda A) B = A (\lambda B) = \lambda AB.$$

D'où, selon la Proposition 15.14 :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}),\ \lambda A = (\lambda I_n) A = A \left(\lambda I_p\right).$$

En particulier, les matrices de la forme λI_n où $\lambda \in \mathbb{K}$ (qu'on appelle parfois « matrices scalaires ») commutent avec toute matrice carrée de taille n :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \lambda A = (\lambda I_n) A = A (\lambda I_n).$$

Exercice/Exemple 15.17
Compléter la table de multiplication (ne rien mettre dans la case quand le produit n'est pas défini) :

$\times$	$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&7\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&2\\-1&3\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}9\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$							
$\begin{pmatrix}1&2&3&4\end{pmatrix}$							
$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$							
$\begin{pmatrix}7\end{pmatrix}$							
$\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$							
$\begin{pmatrix}3&-3\end{pmatrix}$							
$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$							

Correction 15.18

$\times$	$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&7\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&2\\-1&3\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}9\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix}-1&2\\-1&3\\-1&0\end{pmatrix}$				
$\begin{pmatrix}1&2&3&4\end{pmatrix}$							
$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix}0&0&7\\0&0&14\\0&0&21\\0&0&28\end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix}2&4\\4&8\\6&12\\8&16\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}9\\18\\27\\36\end{pmatrix}$		
$\begin{pmatrix}7\end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix}0&0&49\end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix}14&28\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}63\end{pmatrix}$		
$\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$						$\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}3&-3\end{pmatrix}$						$\begin{pmatrix}3&-3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}6\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix}0&0&7\\0&0&0\end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix}2&4\\0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}9\\0\end{pmatrix}$		

Proposition 15.19 (Associativité du produit matriciel)
Soient $m, n, p, q \in \mathbb{N}^*$.

On a :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}), \ \forall B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}), \ \forall C \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K}), \ (AB)C = A(BC).$$

En pratique, on n'écrit pas les parenthèses.

Démonstration 15.20
On a

$$\begin{cases} AB \in \mathcal{M}_{mp}(\mathbb{K}) \text{ donc } (AB)C \in \mathcal{M}_{mq}(\mathbb{K}) \\ BC \in \mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K}) \text{ donc } A(BC) \in \mathcal{M}_{mq}(\mathbb{K}) \end{cases}$$

Posons $D = AB$; $E = BC$; $F = DC$ et $G = AE$.

Montrons que $F = G$.

On a vu que $F, G \in \mathcal{M}_{mq}(\mathbb{K})$.

Par définition du produit matriciel, on a $\forall i \in [\![1 ; m]\!], \ \forall k \in [\![1 ; p]\!], \ d_{ik} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$ donc

$$\forall i \in [\![1 ; m]\!], \ \forall \ell \in [\![1 ; q]\!], \ f_{i\ell} = \sum_{k=1}^{p} d_{ik} c_{k\ell} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{ij} b_{jk} c_{k\ell}.$$

De même, on a $\forall j \in [\![1 \,;\, n]\!]\,,\ \forall \ell \in [\![1 \,;\, q]\!]\,,\ e_{j\ell} = \sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{k\ell}$ donc

$$\forall i \in [\![1 \,;\, m]\!]\,,\ \forall \ell \in [\![1 \,;\, q]\!]\,,\ g_{i\ell} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_{j\ell} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{ij}b_{jk}c_{k\ell}.$$

D'où $F = G$. ■

Proposition 15.21 (Produit de matrices élémentaires)
Soient $m, n, p \in \mathbb{N}^*$.

Considérons deux matrices élémentaires

$$E_{ij} \in \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{K}) \qquad \textit{et} \qquad E_{k\ell} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$$

avec $i \in [\![1 \,;\, m]\!]$, $j, k \in [\![1 \,;\, n]\!]$ et $\ell \in [\![1 \,;\, p]\!]$.

Alors on a :

$$E_{ij}E_{k\ell} = \delta_{jk}E_{i\ell} = \begin{cases} E_{i\ell} & \textit{si } j = k \\ 0_{mp} & \textit{sinon} \end{cases}$$

Démonstration 15.22
On a $E_{ij} \in \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{K})$ et $E_{k\ell} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ donc

$$E_{ij}E_{k\ell} \in \mathscr{M}_{mp}(\mathbb{K})\,.$$

Posons $A = (a_{xz})_{(x,z)} = E_{ij} \times E_{k\ell}$.

On a :

$$\begin{aligned}\forall x \in [\![1 \,;\, m]\!]\,,\ \forall z \in [\![1 \,;\, p]\!]\,,\ a_{xz} &= \sum_{y=1}^{n} \underbrace{\delta_{xi}\delta_{yj}}_{\substack{\text{coefficient de}\\ E_{ij} \text{ en } (x,y)}} \times \underbrace{\delta_{yk}\delta_{z\ell}}_{\substack{\text{coefficient de}\\ E_{k\ell} \text{ en } (y,z)}} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } (x,z) = (i,\ell) \text{ et } j = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

15.3.2 Produits de matrices carrées

Proposition 15.23 (Anneau des matrices carrées)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ *est un anneau.*

Son élément neutre pour $+$ *est la matrice nulle* 0_n.

Son élément neutre pour $\times$ *est la matrice identité* I_n.

C'est un anneau non-commutatif si $n \geqslant 2$.

Démonstration 15.24
$(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +)$ est clairement un groupe abélien car $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

$\times$ est une loi de composition interne sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$: on a

$$\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad AB \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),$$

c'est une loi associative selon la Proposition 15.19 et elle admet I_n comme élément neutre selon la Proposition 15.14.

De plus, elle est distributive par rapport à $+$ car le produit matriciel est bilinéaire.

Donc $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau.

Enfin, si $n \geqslant 2$, l'anneau est non-commutatif :

$$\begin{cases} E_{12}E_{21} = E_{11} \\ E_{21}E_{12} = E_{22} \neq E_{11} \end{cases}$$

■

Remarque 15.25
Tout ce qu'on a vu sur les anneaux s'applique donc à l'anneau des matrices carrées.

Par exemple, on note A^k la puissance k-ème d'une matrice si $k \in \mathbb{N}$, voire si $k \in \mathbb{Z}$ dans le cas où A est inversible.

La proposition suivante s'applique aussi :

Proposition 15.26
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Si A *et* B *sont deux éléments de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *qui commutent (c'est-à-dire tels que* $AB = BA$*), alors on a la formule du binôme de Newton :*

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad (A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$$

et la formule :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad A^m - B^m = (A-B) \sum_{k=0}^{m-1} A^k B^{m-1-k} = \left(\sum_{k=0}^{m-1} A^k B^{m-1-k} \right) (A-B).$$

Remarque 15.27 (« Diviseurs de zéro »)
Soit $n \in [\![2\ ;+\infty[\![$.

On a :

$$\exists A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \begin{cases} A \neq 0 \\ B \neq 0 \\ AB = 0 \end{cases}$$

Démonstration 15.28
On a :

$$\begin{cases} E_{11}E_{22} = 0 \\ E_{11} \neq 0 \\ E_{22} \neq 0 \end{cases}$$

■

Remarque 15.29 (Matrices nilpotentes)
Soit $n \in [\![2\ ;+\infty[\![$.

On a :

$$\exists A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \exists k \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} A \neq 0 \\ A^k = 0 \end{cases}$$

Une telle matrice A est appelée matrice nilpotente.

Démonstration 15.30
On a :

$$\begin{cases} E_{12}^2 = 0 \\ E_{12} \neq 0 \end{cases}$$

■

15.3.3 Matrices inversibles, groupe linéaire

Définition 15.31 (Matrice inversible)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On dit qu'une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si elle est inversible dans l'anneau $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$.

On rappelle que cela signifie qu'elle admet un inverse à gauche et à droite pour le produit matriciel :

$$\exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad AB = BA = I_n.$$

On sait que la matrice B est alors unique, on l'appelle l'inverse de A et on la note A^{-1}.

Exemple 15.32
On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En effet, on a bien :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque 15.33
On verra (*cf.* Bilan 15.95) que pour qu'un matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ soit inversible, il suffit qu'elle soit « inversible à gauche » ou « inversible à droite » :

$$[\exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \; BA = I_n] \qquad \text{ou} \qquad [\exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \; AB = I_n].$$

La matrice B est alors automatiquement l'inverse de A (à gauche et à droite).

Définition/Proposition 15.34 (Groupe linéaire)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

L'ensemble des matrices carrées de taille n qui sont inversibles est appelé le groupe linéaire d'ordre n et est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

On a donc :

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \; AB = BA = I_n\}.$$

Le groupe linéaire est un groupe pour le produit matriciel.

Son élément neutre est la matrice identité I_n.

Le produit de deux matrices inversibles est une matrice inversible et on a :

$$\forall P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \; (PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}.$$

Démonstration 15.35
On a vu que $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau d'élément neutre I_n pour $\times$.

On sait que l'ensemble de ses éléments inversibles est un groupe pour $\times$, d'élément neutre I_n. ■

15.4 Matrices diagonales, matrices triangulaires

Définition 15.36 (Matrice diagonale)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Une matrice carrée $A = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonale si :

$$\forall i, j \in [\![1\,;n]\!], \quad \left[i \neq j \implies a_{ij} = 0\right],$$

c'est-à-dire si A s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Notation 15.37
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

La matrice diagonale de taille n et de coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ est parfois notée

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Proposition 15.38
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

L'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est :

- *un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n (sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$) ;*
- *un anneau commutatif (sous-anneau de $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$).*

Démonstration 15.39
Notons F l'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On remarque $F = \operatorname{Vect}(E_{11}, E_{22} \dots, E_{nn})$ donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

De plus, $(E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn})$ est génératrice de F et libre (sous-famille de famille libre (base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$)) donc c'est une base de F et on a $\dim F = n$.

Montrons que F est un sous-anneau de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On a $I_n \in F$, on sait que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et on a :

$$\begin{aligned}\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}, \quad \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) &= (\lambda_1 E_{11} + \dots + \lambda_n E_{nn})(\mu_1 E_{11} + \dots + \mu_n E_{nn}) \\ &= \lambda_1\mu_1 E_{11} + \dots + \lambda_n\mu_n E_{nn} \\ &= \operatorname{diag}(\lambda_1\mu_1, \dots, \lambda_n\mu_n)\end{aligned}$$

Donc F est stable par produit et deux matrices diagonales commutent toujours.

Donc F est un sous-anneau de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. ■

Définition 15.40 (Matrice triangulaire)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Une matrice carrée $A = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite triangulaire supérieure si :

$$\forall i, j \in [\![1 \,;\, n]\!], \quad \left[i > j \implies a_{ij} = 0\right],$$

c'est-à-dire si A s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

La matrice A est dite triangulaire inférieure si :

$$\forall i, j \in [\![1 \,;\, n]\!], \quad \left[i < j \implies a_{ij} = 0\right],$$

c'est-à-dire si A s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Cela revient à dire que sa transposée ${}^tA$ est triangulaire supérieure.

On appelle matrice triangulaire toute matrice triangulaire supérieure ou triangulaire inférieure.

Proposition 15.41
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

L'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est :

- *un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ (sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$) ;*
- *un sous-anneau de $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$.*

Même chose pour l'ensemble des matrices triangulaires inférieures.

Démonstration 15.42
Notons F l'ensemble des matrices triangulaires supérieures.

On pose $I = \left\{(i, j) \in [\![1 \,;\, n]\!]^2 \,\middle|\, i \leqslant j\right\}$.

Alors $F = \mathrm{Vect}\left(\left(E_{ij}\right)_{(i,j)\in I}\right)$.

Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

De plus, $(E_{ij})_{(i,j)\in I}$ est une famille génératrice de F et libre (car c'est une sous-famille de la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$) donc c'est une base de F et $\dim F = \operatorname{Card} I = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Montrons que F est un sous-anneau de $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$.

On a $I_n \in F$ et $\forall A, B \in F,\ \ A - B \in F$.

Soient $A = (a_{ij})_{(i,j)}, B = (b_{jk})_{(j,k)} \in F$.

Posons $C = (c_{ik})_{(i,k)} = AB$.

Montrons que $C \in F$, c'est-à-dire

$$\forall (i,k) \in [\![1\ ;\ n]\!]^2,\ \ [i > k \implies c_{ik} = 0]\,.$$

Soit $(i,k) \in [\![1\ ;\ n]\!]^2$ tel que $i > k$.

On a

$$\begin{aligned}
c_{ik} &= \sum_{j=1}^{n} \underbrace{a_{ij}}_{\substack{=0 \text{ si}\\ i>j}} \underbrace{b_{jk}}_{\substack{=0 \text{ si}\\ j>k}} \\
&= \sum_{j=1}^{i-1} \underbrace{a_{ij}}_{\substack{=0\\ \text{car } j<i}} b_{jk} + \sum_{j=i}^{n} a_{ij} \underbrace{b_{jk}}_{\substack{=0\\ \text{car } j\geqslant i>k}}
\end{aligned}$$

Donc F est un sous-anneau de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. ■

15.5 Transposition

Définition 15.43 (Transposée d'une matrice)
Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ une matrice de taille (n,p).

On appelle transposée de A et on note ${}^tA$ ou A^T la matrice de taille (p,n) suivante :

$${}^tA = (a_{ij})_{(j,i)\in[\![1;p]\!]\times[\![1;n]\!]} \in \mathscr{M}_{pn}(\mathbb{K})\,.$$

On a donc :

$${}^t\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1p} & \dots & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{pn}(\mathbb{K})\,.$$

Exemple 15.44
On a :

$$^t\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix}.$$

Proposition 15.45 (Linéarité de la transposition)
Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.

L'application

$$\begin{array}{ccc}\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{pn}(\mathbb{K})\\ A & \longmapsto & {}^tA\end{array}$$

est linéaire.

Démonstration 15.46
⋆⋆ Exercice ⋆⋆ ■

Proposition 15.47 (Transposée d'un produit)
Soient $m, n, p \in \mathbb{N}^*$.

On a :

$$\forall A \in \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{K}), \ \forall B \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}), \ {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA \in \mathscr{M}_{pm}(\mathbb{K}).$$

Démonstration 15.48
On a $AB \in \mathscr{M}_{mp}(\mathbb{K})$ donc ${}^t(AB) \in \mathscr{M}_{pm}(\mathbb{K})$ et $\begin{cases}{}^tB \in \mathscr{M}_{pn}(\mathbb{K})\\ {}^tA \in \mathscr{M}_{nm}(\mathbb{K})\end{cases}$ donc ${}^tB\,{}^tA \in \mathscr{M}_{pm}(\mathbb{K})$.

On pose $C = AB$; $D = {}^tC$ et $F = {}^tB\,{}^tA$.

On a :

$$\forall i \in [\![1\ ;\ m]\!], \ \forall k \in [\![1\ ;\ p]\!], \ \begin{cases}c_{ik} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\\ d_{ki} = c_{ik} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\\ f_{ki} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{jk}a_{ij} = d_{ki}\end{cases}$$

D'où l'égalité. ■

Corollaire 15.49
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad {}^t\left(A^k\right) = \left({}^tA\right)^k .$$

On écrit donc simplement « ${}^tA^k$ ».

Proposition 15.50 (Transposition et inversibilité)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff {}^tA \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) .$$

Les matrices ${}^t\left(A^{-1}\right)$ et $\left({}^tA\right)^{-1}$ sont donc égales et notées ${}^tA^{-1}$.

Démonstration 15.51
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$\boxed{\Longrightarrow}$

Supposons $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

On a $\begin{cases} AA^{-1} = I_n \\ A^{-1}A = I_n \end{cases}$ donc $\begin{cases} {}^t\left(A^{-1}\right) {}^tA = {}^tI_n \\ {}^tA \, {}^t\left(A^{-1}\right) = {}^tI_n \end{cases}$

Or ${}^tI_n = I_n$ donc ${}^tA$ est inversible, d'inverse $\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Supposons ${}^tA \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Alors ${}^t\left({}^tA\right) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ selon $\boxed{\Longrightarrow}$

Donc $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. ■

15.6 Matrices symétriques, matrices antisymétriques

Définition 15.52
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite $\begin{cases} \text{symétrique} & \text{si } {}^tA = A \\ \text{antisymétrique} & \text{si } {}^tA = -A \end{cases}$

Proposition 15.53
On suppose ici que $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques (respectivement antisymétriques) de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Alors $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K}).$$

On a :

$$\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2} \qquad et \qquad \dim \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Démonstration 15.54
Posons $I = \left\{(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2 \;\middle|\; i < j\right\}$.

On a $\mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \operatorname{Vect}\left(\left(E_{ij} - E_{ji}\right)_{(i,j)\in I}\right)$ donc $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension

$$\begin{aligned}\dim \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) &= \operatorname{Card} I \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= \frac{n(n-1)}{2}.\end{aligned}$$

Notons $\mathscr{B}$ la famille obtenue en juxtaposant les familles $(E_{ii})_{i\in[\![1;n]\!]}$ et $\left(E_{ij} + E_{ji}\right)_{(i,j)\in I}$.

$\mathscr{B}$ est clairement libre et on a $\mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = \operatorname{Vect}(\mathscr{B})$.

Donc $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension

$$\begin{aligned}\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) &= n + \operatorname{Card} I \\ &= n + \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= \frac{n(n+1)}{2}.\end{aligned}$$

Montrons que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.

On note u la transposition : $u: \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & {}^tM \end{array}$.

On a $\begin{cases} u \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})) \\ u^2 = \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})} \end{cases}$ donc u est une symétrie de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Donc

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \underbrace{\ker\left(u - \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}\right)}_{=\mathscr{S}_n(\mathbb{K})} \oplus \underbrace{\ker\left(u + \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}\right)}_{=\mathscr{A}_n(\mathbb{K})}.$$

■

15.7 Lignes et colonnes d'une matrice

15.7.1 Abus autorisés

Abus 15.55 (Matrice-colonne = vecteur)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K}) \\ (a_1, \ldots, a_n) & \longmapsto & \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

On s'autorise (abusivement) à identifier les espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$:

$$\mathbb{K}^n = \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K}).$$

On identifie donc les n-uplets de scalaires et les matrices-colonne :

$$\forall a_1, \ldots, a_n, \ \ (a_1, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

En particulier, si $n = 1$, on identifie matrice de taille $(1, 1)$ et scalaire :

$$\mathbb{K} = \mathscr{M}_1(\mathbb{K}) \qquad \text{et} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \ \lambda = (\lambda).$$

Définition 15.56
Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

On appelle famille des vecteurs-colonne de A la famille $\left(C_1, \ldots, C_p\right) \in (\mathbb{K}^n)^p$ définie par :

$$\forall j \in [\![1\ ;\ p]\!],\ \ C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n.$$

On s'autorise à noter la matrice A « par colonnes » :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & \ldots & C_p \end{pmatrix}.$$

Rappel 15.57
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Les formes linéaires sur $\mathbb{K}^n$ sont les fonctions de la forme

$$\ell_{b_1,\ldots,b_n} : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (a_1, \ldots, a_n) & \longmapsto & b_1a_1 + \cdots + b_na_n \end{array}$$

où $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$.

De plus, la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & (\mathbb{K}^n)^* \\ (b_1, \ldots, b_n) & \longmapsto & \ell_{b_1,\ldots,b_n} \end{array}$$

est un isomorphisme.

Abus 15.58 (Matrice-ligne = forme linéaire)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{1n}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & (\mathbb{K}^n)^* \\ L & \longmapsto & [C \longmapsto LC] \end{array}$$

c'est-à-dire

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{1n}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}) \\ \begin{pmatrix} b_1 & \ldots & b_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} b_1 & \ldots & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = b_1a_1 + \cdots + b_na_n \right] \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

On s'autorise (abusivement) à identifier les espaces vectoriels $(\mathbb{K}^n)^*$ et $\mathscr{M}_{1n}(\mathbb{K})$:

$$(\mathbb{K}^n)^* = \mathscr{M}_{1n}(\mathbb{K}).$$

On identifie donc les formes linéaires sur $\mathbb{K}^n$ et les matrices-ligne :

$$\forall b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{K},\ \ \ell_{b_1,\ldots,b_n} = \begin{pmatrix} b_1 & \ldots & b_n \end{pmatrix}.$$

Définition 15.59
Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

On appelle famille des lignes de A la famille $(L_1, \ldots, L_n) \in \mathscr{M}_{1p}(\mathbb{K})^n$ définie par :
$$\forall i \in [\![1 \,;\, n]\!], \quad L_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & \ldots & a_{ip} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{1p}(\mathbb{K})\,.$$

On s'autorise à noter la matrice A « par lignes » :
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}.$$

15.7.2 Produits matriciels

Remarque 15.60 (Produit avec une matrice-colonne ou une matrice-ligne)
Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $M = \left(m_{ij}\right)_{(i,j)} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

On note $(L_1, \ldots, L_n) \in \mathscr{M}_{1p}(\mathbb{K})^n$ la famille des lignes de M et $\left(C_1, \ldots, C_p\right) \in (\mathbb{K}^n)^p$ la famille des colonnes de M.

On peut donc écrire :
$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \ldots & m_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \ldots & m_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & \ldots & C_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}.$$

Soient enfin une matrice-ligne $L = \begin{pmatrix} b_1 & \ldots & b_n \end{pmatrix}$ et une matrice-colonne $C = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$.

Alors on a :
$$LM = \begin{pmatrix} b_1 & \ldots & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = b_1 L_1 + \cdots + b_n L_n$$
et :
$$MC = \begin{pmatrix} C_1 & \ldots & C_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 C_1 + \cdots + a_p C_p.$$

Exemple 15.61
On a :
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Corollaire 15.62
Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ *et* $M = (m_{ij})_{(i,j)} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

On note $(L_1, \dots, L_n) \in \mathscr{M}_{1p}(\mathbb{K})^n$ *la famille des lignes de* M *et* $(C_1, \dots, C_p) \in (\mathbb{K}^n)^p$ *la famille des colonnes de* M *:*

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}.$$

De plus, on note $(e_1, \dots, e_p)$ *la base canonique de* $\mathbb{K}^p$ *et* $(e'_1, \dots, e'_n)$ *la base canonique de* $\mathbb{K}^n$*.*

Alors on a :

$$\forall j \in [\![1 ; p]\!], \quad M \times e_j = C_j$$

et :

$$\forall i \in [\![1 ; n]\!], \quad {}^t e'_i \times M = L_i.$$

Remarque 15.63
Soient $m, n, p \in \mathbb{N}^*$, $B = (b_{ij})_{(i,j)} \in \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{K})$ et $A = (a_{jk})_{(j,k)} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

On note $(L_1, \dots, L_m) \in \mathscr{M}_{1n}(\mathbb{K})^m$ la famille des lignes de B et $(C_1, \dots, C_p) \in (\mathbb{K}^n)^p$ la famille des colonnes de A :

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_p \end{pmatrix}.$$

Alors on a, par définition du produit matriciel :

$$BA = (L_i C_k)_{(i,k)} \in \mathscr{M}_{mp}(\mathbb{K}).$$

On a aussi :

$$BA = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} L_1 A \\ \vdots \\ L_m A \end{pmatrix}$$

et :

$$BA = B \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BC_1 & \dots & BC_p \end{pmatrix}.$$

Ainsi, calculer le produit matriciel BA revient à multiplier chaque ligne de B par A (à droite) ou chaque colonne de A par B (à gauche).

Exemple 15.64
En utilisant la Remarque 15.60 et la Remarque 15.63, on calcule les produits matriciels suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2b & 3c \\ 4a & 5b & 6c \\ 7a & 8b & 9c \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a & 3a \\ 4b & 5b & 6b \\ 7c & 8c & 9c \end{pmatrix}.$$

15.7.3 Opérations élémentaires sur les matrices

Définition 15.65 (Opérations élémentaires sur une matrice)
On appelle opérations élémentaires sur une matrice les opérations suivantes :

- Opérations élémentaires sur les lignes :

$$\begin{aligned} L_i \leftrightarrow L_j & \qquad \text{échange des lignes } L_i \text{ et } L_j \\ L_i \leftarrow \lambda L_i & \qquad \text{multiplication de la ligne } L_i \text{ par } \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \\ L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j & \qquad \text{ajout à } L_i \text{ de } \lambda L_j \text{ où } \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

- Opérations élémentaires sur les colonnes :

$$\begin{aligned} C_i \leftrightarrow C_j & \qquad \text{échange des colonnes } C_i \text{ et } C_j \\ C_i \leftarrow \lambda C_i & \qquad \text{multiplication de la colonne } C_i \text{ par } \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \\ C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j & \qquad \text{ajout à } C_i \text{ de } \lambda C_j \text{ où } \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Exercice/Exemple 15.66
Soit $M \in \mathscr{M}_{32}(\mathbb{K})$.

Donner les produits matriciels ayant même effet que les opérations élémentaires suivantes :

$$L_1 \leftrightarrow L_3 \qquad L_2 \leftarrow \lambda L_2 \qquad L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_3 \qquad C_1 \leftrightarrow C_2 \qquad C_2 \leftarrow \lambda C_2 \qquad C_2 \leftarrow C_2 + \lambda C_1.$$

Correction 15.67

$L_1 \leftrightarrow L_3 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} M$.

$L_2 \leftarrow \lambda L_2 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M$.

$L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_3 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M$.

$C_1 \leftrightarrow C_2 : M \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$C_2 \leftarrow \lambda C_2 : M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

$C_2 \leftarrow C_2 + \lambda C_1 : M \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Bilan 15.68
Appliquer une opération élémentaire aux lignes d'une matrice M revient à multiplier M à gauche par une matrice G qui ne dépend que de l'opération élémentaire et du nombre de lignes de M.

Appliquer une opération élémentaire aux colonnes d'une matrice M revient à multiplier M à droite par une matrice D qui ne dépend que de l'opération élémentaire et du nombre de colonnes de M.

Les matrices G et D sont faciles à déterminer : il suffit de prendre comme matrice M une matrice identité.

15.8 Rang d'une matrice

Définition 15.69
Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.

Le rang d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ est le rang de la famille de ses vecteurs-colonne (famille de p vecteurs de $\mathbb{K}^n$).

Remarque 15.70
Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

On note $(C_1, \dots, C_p)$ la famille des vecteurs-colonne de A.

On a :
$$0 \leqslant \operatorname{rg} A \leqslant \min\{n\ ;\ p\}.$$

Cas d'égalité :

(1) $\operatorname{rg} A = 0 \iff A = 0_{np}$;

(2) $\operatorname{rg} A = n \iff (C_1, \dots, C_p)$ est génératrice de $\mathbb{K}^n$;

(3) $\operatorname{rg} A = p \iff (C_1, \dots, C_p)$ est libre.

Démonstration 15.71 (1)
On a :
$$\begin{aligned} A = 0 &\iff \forall j \in [\![1\ ;\ p]\!],\ \ C_j = 0 \\ &\iff \operatorname{rg}(C_1, \dots, C_p) = 0. \end{aligned}$$
■

Démonstration 15.72 (2)
On a :
$$\begin{aligned} \operatorname{rg} A = n &\iff \operatorname{rg}(C_1, \dots, C_p) = n \\ &\iff \dim \operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_p) = n \\ &\iff \operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_p) = \mathbb{K}^n \\ &\iff (C_1, \dots, C_p) \text{ est génératrice de } \mathbb{K}^n. \end{aligned}$$
■

Démonstration 15.73 (3)
On a :
$$\begin{aligned} \operatorname{rg} A = p &\iff \operatorname{rg}(C_1, \dots, C_p) = p \\ &\iff (C_1, \dots, C_p) \text{ est libre.} \end{aligned}$$
■

15.9 Application linéaire canoniquement associée à une matrice

15.9.1 Définition

Définition 15.74 (Application linéaire canoniquement associée à une matrice)
Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

On appelle application linéaire canoniquement associée à A le « produit à gauche par A » :

$$u_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$$

C'est l'unique application linéaire $u_A \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ telle que :

$$\forall i \in [\![1 \,;\, p]\!], \quad u_A(e_i) = C_i$$

en notant $e_1, \ldots, e_p$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^p$ et $\left(C_1, \ldots, C_p\right)$ la famille des vecteurs-colonne de A.

Définition 15.75 (Endomorphisme canoniquement associé à une matrice)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On appelle endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A le « produit à gauche par A » :

$$u_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$$

C'est l'unique endomorphisme $u_A \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ tel que :

$$\forall i \in [\![1 \,;\, n]\!], \quad u_A(e_i) = C_i$$

en notant $e_1, \ldots, e_n$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $(C_1, \ldots, C_n)$ la famille des vecteurs-colonne de A.

Exercice/Exemple 15.76
Que dire des endomorphismes canoniquement associés aux matrices suivantes (savoir lire ces matrices colonne par colonne et ligne par ligne) :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Correction 15.77
On a :

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad u_{M_1}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{cases} u_{M_1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ u_{M_1}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ u_{M_1}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

On reconnaît le projecteur sur $\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ parallèlement à $\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

De même, on a :

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad u_{M_2}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{cases} u_{M_2}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ u_{M_2}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Remarque 15.78
Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

On note $u_A \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ l'application linéaire canoniquement associée à A, $(L_1, \dots, L_n) \in \mathscr{M}_{1p}(\mathbb{K})^n$ la famille des lignes de A et $(C_1, \dots, C_p) \in (\mathbb{K}^n)^p$ la famille des colonnes de A :

$$A = \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}.$$

Alors :

(1) L'ensemble image de u_A est le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de A, vues comme des vecteurs de $\mathbb{K}^n$:

$$\operatorname{Im} u_A = \operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_p).$$

(2) Le noyau de u_A est l'intersection des noyaux des lignes de A, vues comme des formes linéaires :

$$\ker u_A = \{X \in \mathbb{K}^p \mid L_1 X = \dots = L_n X = 0_{n1}\}.$$

(3) On a :

$$\begin{aligned} u_A \text{ est injective} &\iff \left(C_1, \ldots, C_p\right) \text{ est libre} \\ &\iff \operatorname{rg} A = p. \end{aligned}$$

(4) On a :

$$\begin{aligned} u_A \text{ est surjective} &\iff \left(C_1, \ldots, C_p\right) \text{ est génératrice de } \mathbb{K}^n \\ &\iff \operatorname{rg} A = n. \end{aligned}$$

(5) On a :

$$\begin{aligned} u_A \text{ est bijective} &\iff \begin{cases} n = p \\ \left(C_1, \ldots, C_p\right) \text{ est une base de } \mathbb{K}^n \end{cases} \\ &\iff \operatorname{rg} A = n = p. \end{aligned}$$

(6) On a :

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} u_A.$$

Démonstration 15.79 (1)
$\operatorname{Im} u_A$ est l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{K}^n$ de la forme $u_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = x_1 C_1 + \cdots + x_p C_p$ où $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{K}$.

D'où $\operatorname{Im} u_A = \operatorname{Vect}\left(C_1, \ldots, C_p\right)$. ∎

Démonstration 15.80 (2)

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p$.

On a :

$$\begin{aligned} X \in \ker u_A &\iff u_A(X) = 0_{\mathbb{K}^n} \\ &\iff AX = 0_{n1} \\ &\iff \forall i \in [\![1\ ;\ n]\!],\quad L_i X = 0. \end{aligned}$$ ∎

Démonstration 15.81
On a :

$$\begin{aligned} u_A \text{ est injective} &\iff \ker u_A = \{0\} \\ &\iff [\forall X \in \mathbb{K}^p,\ \ AX = 0 \iff X = 0] \\ &\iff \left[\forall x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{K},\ \ x_1 C_1 + \cdots + x_p C_p = 0 \implies x_1 = \cdots = x_p = 0\right] \\ &\iff \left(C_1, \ldots, C_p\right) \text{ est libre.} \end{aligned}$$ ∎

Démonstration 15.82 (4)
On a :

$$\begin{aligned} u_A \text{ est surjective} &\iff \operatorname{Im} u_A = \mathbb{K}^n \\ &\iff \operatorname{Vect}\left(C_1, \ldots, C_p\right) = \mathbb{K}^n \\ &\iff \left(C_1, \ldots, C_p\right) \text{ est génératrice de } \mathbb{K}^n. \end{aligned}$$

■

Démonstration 15.83 (5)
Découle de (3) et (4). ■

Démonstration 15.84 (6)
On a :

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} u_A &= \dim \operatorname{Im} u_A \\ &= \dim \operatorname{Vect}\left(C_1, \ldots, C_p\right) \\ &= \operatorname{rg}\left(C_1, \ldots, C_p\right) \\ &= \operatorname{rg} A. \end{aligned}$$

■

15.9.2 Propriétés

Dans ce paragraphe, on note $u_A \in \mathscr{L}\left(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n\right)$ l'application linéaire canoniquement associée à la matrice $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

Proposition 15.85 (Matrices quelconques)
Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.

L'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{L}\left(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n\right) \\ A & \longmapsto & u_A \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration 15.86
Montrons que φ est linéaire.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $A, B \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

Montrons que $u_{\lambda A+\mu B} = \lambda u_A + \mu u_B$.

On a :

$$\begin{aligned} \forall X \in \mathbb{K}^p, \quad u_{\lambda A+\mu B}(X) &= (\lambda A + \mu B) X \\ &= \lambda A X + \mu B X \\ &= \lambda u_A(X) + \mu u_B(X). \end{aligned}$$

par bilinéarité du produit matriciel

Donc φ est linéaire.

Montrons que φ est injective.

Soit $A \in \ker \varphi$.

On a $\varphi(A) = u_A = 0$.

Donc les colonnes $C_1, \ldots, C_p$ de A sont nulles car $\forall j \in [\![1\ ;\ p]\!],\ \ C_j = u_A(e_j)$ en notant $(e_1, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$.

Donc $A = 0$.

Donc $\ker \varphi = \{0_{np}\}$.

Donc φ est injective.

Finalement, on a $\dim \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}) = \dim \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n) = np < +\infty$.

Donc φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. ■

Proposition 15.87
Soient $m, n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

On a :

$$u_{AB} = u_A \circ u_B.$$

Démonstration 15.88
On a $u_A \circ u_B, u_{AB} \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^m)$ et

$$\begin{aligned}\forall X \in \mathbb{K}^p,\ \ u_A \circ u_B(X) &= u_A(u_B(X)) \\ &= A(BX) \\ &= (AB)X \\ &= u_{AB}(X).\end{aligned}$$ ■

Proposition 15.89 (Matrices carrées)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

L'application

$$\begin{array}{rccc}\varphi : & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{L}(\mathbb{K}^n) \\ & A & \longmapsto & u_A\end{array}$$

est un isomorphisme d'anneaux de $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ *vers* $(\mathscr{L}(\mathbb{K}^n), +, \circ)$

Démonstration 15.90
Montrons que φ est un morphisme d'anneaux.

On a $\varphi(I_n) = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$. En effet : $\forall X \in \mathbb{K}^n, \ \ u_{I_n}(X) = I_n X = X$.

De plus, selon la Proposition 15.85, on a :

$$\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \ \ \begin{cases} \varphi(A+B) = \varphi(A) + \varphi(B) \\ \varphi(AB) = \varphi(A) \circ \varphi(B) \end{cases}$$

Donc φ est un morphisme d'anneaux.

De plus, d'après la même proposition, φ est une bijection.

Donc φ est un isomorphisme d'anneaux. ∎

Proposition 15.91
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

La matrice A est inversible dans l'anneau $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ si, et seulement si, l'endomorphisme u_A est inversible dans l'anneau $(\mathscr{L}(\mathbb{K}^n), +, \circ)$:

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff u_A \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n).$$

Démonstration 15.92
Cela découle de la proposition précédente car un isomorphisme d'anneaux conserve les éléments inversibles. ∎

Proposition 15.93
Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

On ne change pas le rang de A en la multipliant à gauche ou à droite par une matrice inversible :

$$\forall P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \ \ \forall Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}), \ \ \mathrm{rg}\, PAQ = \mathrm{rg}\, A.$$

Démonstration 15.94
On sait qu'on ne change pas le rang d'une application linéaire quand on la compose à gauche ou à droite par un isomorphisme.

Donc si $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ alors

$$\mathrm{rg}\, u_P \circ u_A \circ u_Q = \mathrm{rg}\, u_A$$

car u_P et u_Q sont des isomorphismes selon la proposition précédente.

Donc selon la Proposition 15.87 : $\mathrm{rg}\, u_{PAQ} = \mathrm{rg}\, u_A$.

Donc selon la Remarque 15.78 :

$$\mathrm{rg}\, PAQ = \mathrm{rg}\, A.$$ ∎

15.9.3 Conséquences sur l'inversibilité des matrices

Bilan 15.95
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On note $u_A \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A, $(C_1, \dots, C_n)$ la famille des vecteurs-colonne de A et $(L_1, \dots, L_n)$ la famille des lignes de A.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) A est une matrice inversible

(2) A est « inversible à droite » dans l'anneau $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$:

$$\exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad AB = I_n$$

(3) A est « inversible à gauche » dans l'anneau $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$:

$$\exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad BA = I_n$$

(4) $u_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ est un automorphisme de $\mathbb{K}^n$

(5) $u_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ est une injection

(6) $u_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ est une surjection

(7) $\operatorname{rg} u_A = n$

(8) $\operatorname{rg} A = n$

(9) $(C_1, \dots, C_n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$

(10) $(C_1, \dots, C_n)$ est une famille libre

(11) $(C_1, \dots, C_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$

(12) ${}^tA$ est une matrice inversible

(13) $(L_1, \dots, L_n)$ est une famille génératrice de $\mathscr{M}_{1n}(\mathbb{K})$

(14) $(L_1, \dots, L_n)$ est une famille libre

(15) $(L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathscr{M}_{1n}(\mathbb{K})$.

15.9.4 Remarque

Abus 15.96
Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.

Le programme de MP2I autorise à confondre une matrice $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ et l'application linéaire qui lui est canoniquement associée.

On peut donc écrire, par exemple : « $\ker A$ » ou « $\operatorname{Im} A$ ».

Nous ne ferons jamais cet abus (sauf parfois, dans le cas où A est une matrice-ligne) car il rend les choses un peu confuses.

15.10 Matrices équivalentes

Définition 15.97
Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

On dit que la matrice B est équivalente à la matrice A si on a :

$$\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \ \exists Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}), \ B = PAQ.$$

Proposition 15.98
Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$.

La relation « être équivalente à » est une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

Démonstration 15.99
Notons $\sim$ la relation « être équivalente à » :

$$\forall A, B \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}), \ B \sim A \iff \left[\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \ \exists Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}), \ B = PAQ\right].$$

On a $\forall A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}), \ A = I_n A I_p$ donc $\forall A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}), \ A \sim A$ donc $\sim$ est réflexive.

Soient $A, B \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ telles que $B \sim A$.

Il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $B = PAQ$.

D'où $P^{-1}BQ^{-1} = P^{-1}PAQQ^{-1}$ donc $P^{-1}BQ^{-1} = A$ avec $\begin{cases} P^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \\ Q^{-1} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \end{cases}$

D'où $A \sim B$ donc $\sim$ est symétrique.

Soient $A, B, C \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ telles que $C \sim B$ et $B \sim A$.

Il existe $P_1, P_2 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Q_1, Q_2 \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $C = P_1 B Q_1$ et $B = P_2 A Q_2$.

Donc $C = P_1 P_2 A Q_2 Q_1$ avec $\begin{cases} P_1 P_2 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \\ Q_2 Q_1 \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \end{cases}$

Donc $C \sim A$ donc $\sim$ est transitive.

Finalement, $\sim$ est une relation d'équivalence. ■

Exercice/Exemple 15.100

Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont équivalentes.

Correction 15.101

On remarque $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Remarque 15.102
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On suppose que A et B sont équivalentes.

Alors A est inversible si, et seulement si, B est inversible.

De plus, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$.

Proposition 15.103
Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $r \in \mathbb{N}$.

Alors :
$$\operatorname{rg} A = r \iff \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ \exists Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}),\ A = P J_r Q,$$
en posant
$$J_r = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} 1 \\ \\ \\ r \\ \\ n \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \\ & 0 & & & 0 \\ & & & & \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{ccc} 1 & \quad r & \quad n \end{array} \end{array}.$$

Démonstration 15.104
$\boxed{\Longrightarrow}$ Admise provisoirement. On verra dans le chapitre suivant que cette proposition découle naturellement de la forme géométrique du théorème du rang.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Découle de la Proposition 15.93. ■

Corollaire 15.105
Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ *et* $A, B \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

Alors :

$$A \text{ et } B \text{ sont équivalentes} \iff \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B.$$

Démonstration 15.106
$\boxed{\Longrightarrow}$ Claire car on ne change pas le rang d'une matrice en la multipliant à gauche et à droite par des matrices inversibles.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Supposons $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$.

Selon la proposition précédente, A et B sont équivalentes à J_r en posant $r = \operatorname{rg} A$.

Donc A est équivalente à B. ■

15.11 Matrices semblables

Définition 15.107
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On dit que la matrice B est semblable à la matrice A si :

$$\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \quad B = PAP^{-1}.$$

Proposition 15.108
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

La relation « être semblable à » est une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration 15.109
On pose la relation binaire $\mathscr{R}$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad A\mathscr{R}B \iff \left[\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \quad B = PAP^{-1}\right].$$

Soient $A, B, C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrons que $\mathscr{R}$ est réflexive.

On a $A = I_n A I_n^{-1}$ donc $A\mathscr{R}A$.

Montrons que $\mathscr{R}$ est symétrique.

Supposons $A\mathscr{R}B$.

Il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = PAP^{-1}$.

On a $P^{-1}BP = P^{-1}PAP^{-1}P$ donc $P^{-1}B\left(P^{-1}\right)^{-1} = A$.

Donc $B\mathscr{R}A$.

Montrons que $\mathscr{R}$ est transitive.

Supposons $A\mathscr{R}B$ et $B\mathscr{R}C$.

Il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $\begin{cases} B = PAP^{-1} \\ C = QBQ^{-1} \end{cases}$

Donc $C = QPAP^{-1}Q^{-1} = QPA(QP)^{-1}$.

Donc $A\mathscr{R}C$.

Donc $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. ∎

Exercice/Exemple 15.110

Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Correction 15.111
L'idée est qu'on a :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\lambda^{-1} & b \\ c\lambda^{-1} & d \end{pmatrix}.$$

On remarque :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Remarque 15.112
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & PMP^{-1} \end{array}$$

est un automorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ en tant qu'espace vectoriel et en tant qu'anneau (elle conserve les combinaisons linéaires et les produits).

Remarque 15.113
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tels que $B = PAP^{-1}$.

Alors on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad B^k = PA^kP^{-1}.$$

De plus, si A est inversible, alors B aussi et on a :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad B^k = PA^kP^{-1}.$$

Remarque 15.114
Si deux matrices sont semblables, elles ont même rang.

On retrouve en particulier que l'une est inversible si, et seulement si, l'autre est inversible.

Démonstration 15.115
On ne change pas le rang d'une matrice en la multipliant à gauche ou à droite par une matrice inversible (*cf.* Proposition 15.93). ■

15.12 Rang d'une matrice (suite)

Proposition 15.116
Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

On note $u_A \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ l'application linéaire canoniquement associée à A, $(C_1, \ldots, C_p)$ la famille des vecteurs-colonne de A et $(L_1, \ldots, L_n)$ la famille des lignes de A.

Alors :

$$\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, u_A = \mathrm{rg}\left(C_1, \ldots, C_p\right) = \mathrm{rg}\left(L_1, \ldots, L_n\right) = \mathrm{rg}\left({}^tA\right).$$

Démonstration 15.117
Il s'agit de montrer $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\left({}^t A\right)$.

<u>Méthode 1 :</u>

Posons $r = \operatorname{rg} A$.

Selon la Proposition 15.103, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $A = PJ_rQ$ où $J_r \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

On a ${}^t A = {}^t Q\, {}^t J_r\, {}^t P$.

Donc, comme ${}^t Q$ et ${}^t P$ sont inversibles, on a :

$$\operatorname{rg}\left({}^t A\right) = \operatorname{rg}\left({}^t J_r\right) = r.$$

<u>Méthode 2 :</u>

On a vu que $u_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ x & \longmapsto & (\ell_1(x), \ldots, \ell_n(x)) \end{array}$ est de rang $\operatorname{rg} u_A = \operatorname{rg}(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ (en notant ℓ_i la forme linéaire canoniquement associée à L_i pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$).

Donc

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(L_1, \ldots, L_n) = \operatorname{rg}\left({}^t A\right).$$

■

Lemme 15.118
On ne change pas le rang d'une matrice en appliquant des opérations élémentaires à ses lignes ou à ses colonnes.

Démonstration 15.119
Découle de la Proposition 15.93 et du Bilan 15.68. ■

Algorithme 15.120 (Calcul du rang d'une matrice)
Pour calculer le rang d'une matrice, il suffit d'appliquer des opérations élémentaires à ses lignes et ses colonnes jusqu'à obtenir une matrice de rang évident.

NB : on peut opérer tantôt sur les lignes, tantôt sur les colonnes, ce qui rend le calcul facile et rapide.

Exemple 15.121

On a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&2&1&0\\1&3&2&5\end{pmatrix} &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&-1\\0&2&2&4\end{pmatrix}\begin{matrix}\\L_2 \leftarrow L_2 - L_1\\L_3 \leftarrow L_3 - L_1\end{matrix}\\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&\cancel{0}&0&1\\0&\cancel{0}&1&-1\\0&\cancel{0}&2&4\end{pmatrix}\begin{matrix}C_2 \leftarrow C_2 - C_1 - C_3\\ \\ \end{matrix}\\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-3\\0&2&0\end{pmatrix}\begin{matrix}C_3 \leftarrow C_3 - C_1 - 2C_2\\ \\ \end{matrix}\\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-3\\0&2&0\end{pmatrix}L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_3\\
&= 3
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&3&2\\2&2&2\\3&1&2\end{pmatrix} &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&3&2\\0&-4&-2\\0&-8&-4\end{pmatrix}\begin{matrix}\\L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1\\L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1\end{matrix}\\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&3&2\\0&-4&-2\\\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2\end{matrix}\\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&3&2\\0&2&1\end{pmatrix}L_2 \leftarrow \frac{-1}{2}L_2\\
&= 2.
\end{aligned}$$

car $(1,3,2)$ *et* $(0,2,1)$ *ne sont pas colinéaires*

Définition 15.122 (Matrice extraite)

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A = \begin{pmatrix}a_{11}&\dots&a_{1p}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\dots&a_{np}\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

On appelle matrice extraite de A toute matrice de la forme

$$M = \begin{pmatrix}a_{i_1j_1}&\dots&a_{i_1j_s}\\\vdots&&\vdots\\a_{i_rj_1}&\dots&a_{i_rj_s}\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{rs}(\mathbb{K}) \qquad \text{où } \begin{cases} r \in [\![1\,;\,n]\!]\\ s \in [\![1\,;\,p]\!]\\ 1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_r \leqslant n\\ 1 \leqslant j_1 < j_2 < \dots < j_s \leqslant p\end{cases}$$

Concrètement, cela signifie qu'on obtient M à partir de A en supprimant quelques lignes et quelques colonnes.

Proposition 15.123
Le rang d'une matrice A est la taille de la plus grande matrice inversible extraite de A.

Démonstration 15.124
On note $(C_1, \dots, C_p)$ la famille des vecteurs-colonne de A et on pose $r = \operatorname{rg} A$.

On a $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(C_1, \dots, C_p) = \dim \operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_p)$.

Selon le théorème de la base extraite, il existe $j_1, \dots, j_r \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_r \leqslant p$ et $(C_{j_1}, \dots, C_{j_r})$ est une base de $\operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_p)$.

Posons $B = \begin{pmatrix} C_{j_1} & \dots & C_{j_r} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{nr}(\mathbb{K})$ (matrice extraite de A).

On note $(L_1, \dots, L_n)$ la famille des lignes de B.

On a $r = \operatorname{rg} B = \operatorname{rg}(L_1, \dots, L_n) = \dim \operatorname{Vect}(L_1, \dots, L_n)$.

Selon le théorème de la base extraite, il existe $i_1, \dots, i_r \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant n$ et $(L_{i_1}, \dots, L_{i_r})$ est une base de $\operatorname{Vect}(L_1, \dots, L_n)$.

Posons $C = \begin{pmatrix} L_{i_1} \\ \vdots \\ L_{i_r} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_r(\mathbb{K})$.

C est extraite de A et on a $\operatorname{rg} C = r$ donc $C \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{K})$.

Ainsi, il existe une matrice inversible de taille r extraite de A.

Enfin, toute matrice extraite de A est de rang inférieur à r.

Donc il n'existe aucune matrice inversible de taille supérieure à $r+1$ extraite de A. ■

15.13 Trace d'une matrice carrée

Définition 15.125
On appelle trace d'une matrice carrée la somme de ses coefficients diagonaux.

Ainsi, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij})_{(i,j)} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle trace de A le scalaire :

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Exemple 15.126

(1) On a :

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{K}, \;\; \operatorname{tr}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d.$$

(2) La trace d'une matrice antisymétrique est toujours nulle.

Remarque 15.127

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a clairement :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \;\; \operatorname{tr}\left({}^t A\right) = \operatorname{tr} A.$$

Proposition 15.128

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

L'application $\operatorname{tr} : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 15.129

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a :

$$\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \;\; \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

Démonstration 15.130

On pose $C = (c_{ik})_{(i,k)} = AB$ et $D = (d_{ik})_{(i,k)} = BA$.

Montrons que $\operatorname{tr} C = \operatorname{tr} D$.

On a :

$$\forall (i, k) \in [\![1\,;\,n]\!]^2, \;\; \begin{cases} c_{ik} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \\ d_{ik} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_{jk} \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} \operatorname{tr} C = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} \\ \operatorname{tr} D = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_{ji} \end{cases}$$

Donc $\operatorname{tr} C = \operatorname{tr} D$ (changement d'indice $(i', j) = (j, i)$). ■

Exemple 15.131

On pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$.

On a :

$$\operatorname{tr}(AB) = aa' + bc' + cb' + dd' \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tr}\left({}^tAA\right) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Corollaire 15.132
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Deux matrices semblables ont même trace :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \ \ \forall P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \ \ \operatorname{tr}\left(PAP^{-1}\right) = \operatorname{tr} A.$$

Démonstration 15.133
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

On a :

$$\operatorname{tr}\left(PAP^{-1}\right) = \operatorname{tr}\left(APP^{-1}\right) = \operatorname{tr} A.$$

■

15.14 Matrices et systèmes linéaires

Dans cette section, on utilise les notations suivantes :

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}) \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$$

(en notant $\left(C_1, \dots, C_p\right)$ la famille des vecteurs-colonne de A).

Le système linéaire de n équations à p inconnues

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

d'inconnue $\left(x_1, \dots, x_p\right) \in \mathbb{K}^p$ peut se réécrire « matriciellement » ou « vectoriellement ».

Écriture matricielle de (S) :

$$(S)\ \ AX = B \qquad \text{équation matricielle d'inconnue } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p1}(\mathbb{K}).$$

Écriture vectorielle de (S) :

$$(S)\ \ x_1C_1 + \cdots + x_pC_p = B \qquad \text{équation vectorielle d'inconnue } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p.$$

Remarque 15.134

(1) Notons (S_0) le système homogène associé à (S) (c'est-à-dire celui obtenu en « remplaçant B par 0_{n1} »). L'écriture matricielle de (S_0) montre que son espace vectoriel solution $\mathcal{S}_0$ est le noyau de l'application linéaire canoniquement associée à A :

$$\ker u_A = \mathcal{S}_0 \subseteq \mathbb{K}^p.$$

(2) L'écriture vectorielle de (S) montre que (S) possède au moins une solution [1] si, et seulement si, le second membre B est combinaison linéaire des vecteurs-colonne de A :

$$\mathcal{S} \neq \varnothing \iff B \in \operatorname{Vect}\left(C_1, \ldots, C_p\right).$$

(3) Cette solution est alors unique si, et seulement si, la famille $\left(C_1, \ldots, C_p\right)$ des vecteurs-colonne de A est libre.

Exercice/Exemple 15.135

Écrire matriciellement et vectoriellement le système linéaire suivant :

$$(S)\ \begin{cases} a + 2b + c + 3d = 0 \\ 3a + 7b + 3c + 6d = 0 \\ a + 3b + c = 7 \end{cases}$$

Correction 15.136

On a :

$$(S)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad (S)\ \ a\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

1. Si le système (S) possède au moins une solution, on dit que (S) est compatible.

Définition 15.137
On appelle rang du système linéaire (S) le rang de la matrice A (dans l'écriture matricielle), c'est-à-dire le rang de la famille de vecteurs $\left(C_1, \ldots, C_p\right)$ (dans l'écriture vectorielle).

Proposition 15.138
Notons r le rang du système (S).

L'ensemble solution $\mathscr{S}$ du système (S) est soit l'ensemble vide, soit un sous-espace affine de $\mathbb{K}^p$ de dimension $p - r$.

Démonstration 15.139
Supposons $\mathscr{S} \neq \varnothing$.

On a vu que $\mathscr{S}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{K}^p$ dirigé par $\mathscr{S}_0 = \ker u_A$.

Selon le théorème du rang appliqué à $u_A \in \mathscr{L}\left(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n\right)$, on a :

$$\dim \mathbb{K}^p = \operatorname{rg} u_A + \dim \ker u_A$$

$$p = r + \dim \mathscr{S}_0.$$

Donc $\mathscr{S}_0$ est un espace vectoriel de dimension $p - r$ et $\mathscr{S}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{K}^p$ dirigé par $\mathscr{S}_0$. ∎

Définition 15.140 (Système de Cramer)
On dit que (S) est un système de Cramer si $n = p$ et si la matrice A est inversible.

Proposition 15.141
Tout système de Cramer admet une unique solution.

Démonstration 15.142
C'est clair avec l'écriture matricielle :

$$\forall X \in \mathbb{K}^p, \quad AX = B \iff X = A^{-1}B.$$ ∎

15.15 Calculer l'inverse d'une matrice

Algorithme 15.143
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

En appliquant l'algorithme du pivot de Gauss aux lignes de A, on arrive à I_n si A est inversible ou à une matrice simple de même rang que A si A n'est pas inversible.

Exercice/Exemple 15.144

Décider si $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

Correction 15.145
On applique l'algorithme :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) L_2 \leftarrow -L_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

Donc $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Vérification : on a bien $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = I_2$.

Chapitre 16

Matrices II

⋆⋆ À VENIR ⋆⋆

Chapitre 17

Relations de comparaison, développements limités

⋆⋆ **À VENIR** ⋆⋆

Chapitre 18

Groupe symétrique

⋆⋆ À VENIR ⋆⋆

Chapitre 19

Déterminants

⋆⋆ À VENIR ⋆⋆

Chapitre 20

Séries, familles sommables

⋆⋆ À VENIR ⋆⋆

Chapitre 21

Espaces préhilbertiens

Sommaire

21.1 Produit scalaire, norme associée

21.1.1 Produit scalaire

Définition 21.1 (Produit scalaire)
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

On appelle produit scalaire sur E tout forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire toute application

$$\begin{array}{rccc} \langle \cdot \mid \cdot \rangle : & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & \langle x \mid y \rangle \end{array}$$

qui vérifie :

$$\begin{cases} \langle \cdot \mid \cdot \rangle \text{ est bilinéaire : } \begin{cases} \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \ \forall x_1, x_2, y \in E,\ \ \langle \lambda x_1 + \mu x_2 \mid y \rangle = \lambda \langle x_1 \mid y \rangle + \mu \langle x_2 \mid y \rangle \\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \ \forall x, y_1, y_2 \in E,\ \ \langle x \mid \lambda y_1 + \mu y_2 \rangle = \lambda \langle x \mid y_1 \rangle + \mu \langle x \mid y_2 \rangle \end{cases} \\ \langle \cdot \mid \cdot \rangle \text{ est symétrique : } \forall x, y \in E,\ \ \langle x \mid y \rangle = \langle y \mid x \rangle \\ \langle \cdot \mid \cdot \rangle \text{ est définie positive : } \forall x \in E,\ \ \begin{cases} \langle x \mid x \rangle \geqslant 0 \\ \langle x \mid x \rangle = 0 \iff x = 0_E \end{cases} \end{cases}$$

Le produit scalaire de deux vecteurs x et y est traditionnellement noté $\langle x \mid y \rangle$, $(x \mid y)$, $\langle x, y \rangle$ ou $x \cdot y$. On le notera $\langle x \mid y \rangle$ dans tout ce cours.

Définition 21.2 (Espace euclidien)
On appelle espace préhilbertien (réel) tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

On appelle espace euclidien tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Exemple 21.3
Les exemples suivants sont à connaître parfaitement :

(1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \right) & \longmapsto & x_1 x_1' + \cdots + x_n x_n' \end{array}$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ appelé le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.
Ce produit scalaire s'écrit aussi :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (X, X') & \longmapsto & {}^t X X' \end{array}$$

(2) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On pose $E = \mathscr{C}^0\left([a\ ;\ b], \mathbb{R}\right)$. L'application :

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f, g) & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t \end{array}$$

est un produit scalaire sur E.

(3) L'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (A, B) & \longmapsto & \operatorname{tr}\left({}^t A B\right) \end{array}$$

est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ appelé le produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On a, pour toutes matrices $A = \left(a_{ij}\right)_{(i,j) \in [\![1;n]\!]^2}$ et $B = \left(b_{ij}\right)_{(i,j) \in [\![1;n]\!]^2}$:

$$\operatorname{tr}\left({}^t A B\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}.$$

(4) Plus généralement, l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{np}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{np}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (A, B) & \longmapsto & \operatorname{tr}\left({}^t AB\right) \end{array}$$

est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$ appelé le produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$.
On a, pour toutes matrices $A = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$ et $B = \left(b_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$:

$$\operatorname{tr}\left({}^t AB\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}b_{ij}.$$

Démonstration 21.4 (2)
On note $\varphi : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application.

On a :

$$\forall f, g \in E,\ \ \varphi(f, g) = \varphi(g, f).$$

Donc φ est symétrique.

On a :

$$\begin{aligned} \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \ \forall f_1, f_2, g \in E,\ \ \varphi(\lambda f_1 + \mu f_2, g) &= \int_a^b (\lambda f_1(t) + \mu f_2(t))\, g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda \int_a^b f_1(t)\, g(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b f_2(t)\, g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda\varphi(f_1, g) + \mu\varphi(f_2, g). \end{aligned}$$

Donc φ est linéaire à gauche.

Comme φ est symétrique, φ est aussi linéaire à droite.

Donc φ est bilinéaire.

Soit $f \in E$.

On a :

$$\varphi(f, f) = \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

Donc φ est définie positive.

Enfin, si $\varphi(f, f) = 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Or la fonction f^2 est continue et positive sur $[a\,;b]$ donc $f^2 = 0$ donc $f = 0$.

Finalement, φ est un produit scalaire sur E. ■

Démonstration 21.5 (Autres exemples)
⋆⋆ **Exercice** ⋆⋆ ■

21.1.2 Norme associée à un produit scalaire

Notation 21.6
Soit E un espace préhilbertien.

On pose :

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}.$$

On étudie dans la suite l'application :

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\| : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle} \end{array}$$

appelée norme associée au produit scalaire de E.

Théorème 21.7 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Soient E un espace préhilbertien et $x, y \in E$.

On a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle x \mid y \rangle| \leqslant \|x\| \, \|y\| \, .$$

De plus, on a les cas d'égalités dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle x \mid y \rangle| = \|x\| \, \|y\| \iff x \text{ et } y \text{ sont colinéaires}$$

et :

$$\langle x \mid y \rangle = \|x\| \, \|y\| \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+, \left| \begin{array}{l} x = \lambda y \\ \text{ou} \\ y = \lambda x \end{array} \right.$$

Démonstration 21.8 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Si $y = 0_E$ alors $\langle x \mid y \rangle = \|x\| \, \|y\| = 0$.

Supposons $y \neq 0_E$.

On pose $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \lambda & \longmapsto & \|x + \lambda y\|^2 \end{array}$

On a :

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda) &= \langle x + \lambda y \mid x + \lambda y \rangle && \textit{car } \langle \cdot \mid \cdot \rangle \textit{ est bilinéaire} \\ &= \langle x \mid x \rangle + \lambda \langle x \mid y \rangle + \lambda^2 \langle y \mid x \rangle + \langle y \mid y \rangle && \textit{car } \langle \cdot \mid \cdot \rangle \textit{ est symétrique} \\ &= \lambda^2 \underbrace{\|y\|^2}_{\neq 0} + 2\lambda \langle x \mid y \rangle + \|x\|^2 && \textit{car } \langle \cdot \mid \cdot \rangle \textit{ est positif} \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Donc f est une fonction polynomiale de degré 2 positive sur $\mathbb{R}$.

Donc le discriminant de $\|y\|^2 X^2 + 2\langle x \mid y\rangle X + \|x\|^2$ est négatif :

$$\Delta = 4\langle x \mid y\rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leqslant 0.$$

D'où $|\langle x \mid y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$. ■

Démonstration 21.9 (Cas d'égalité en valeur absolue)
Si $y = 0_E$, l'équivalence est vraie.

Supposons $y = 0_E$.

On a :

$$\begin{aligned}
|\langle x \mid y\rangle| = \|x\|\,\|y\| &\iff \Delta = 0 \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\quad f(\lambda) = 0 \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\quad \|x + \lambda y\|^2 = 0 \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\quad x = -\lambda y \qquad \textit{car } y \neq 0_E \\
&\iff x \text{ et } y \text{ sont colinéaires.}
\end{aligned}$$

■

Démonstration 21.10 (Cas d'égalité)
On a :

$$\begin{aligned}
\langle x \mid y\rangle = \|x\|\,\|y\| &\iff \begin{cases} x \text{ et } y \text{ sont colinéaires} \\ \langle x \mid y\rangle = \|x\|\,\|y\| \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R}, \left| \begin{array}{l} x = \lambda y \\ \text{ou} \\ y = \lambda x \end{array} \right. \\ \langle x \mid y\rangle = \|x\|\,\|y\| \end{cases} \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+, \left| \begin{array}{l} x = \lambda y \\ \text{ou} \\ y = \lambda x \end{array} \right.
\end{aligned}$$

■

Exemple 21.11
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f, g \in \mathscr{C}^0([a\,;b], \mathbb{R})$.

On a :

$$\left|\int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Démonstration 21.12
C'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée au produit scalaire (2) de l'Exemple 21.3. ■

Théorème 21.13 (Inégalité de Minkowski ou inégalité triangulaire pour la norme)
Soient E un espace préhilbertien et $x, y \in E$.

On a l'inégalité de Minkowski :

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| .$$

De plus, on a le cas d'égalité dans l'inégalité de Minkowski :

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+, \left| \begin{array}{l} x = \lambda y \\ \textit{ou} \\ y = \lambda x \end{array} \right.$$

Démonstration 21.14 (Inégalité de Minkowski)
On a :

$$\begin{aligned} \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| &\iff \|x + y\|^2 \leqslant (\|x\| + \|y\|)^2 \\ &\iff \langle x + y \mid x + y \rangle \leqslant (\|x\| + \|y\|)^2 \\ &\iff \|x\|^2 + 2 \langle x \mid y \rangle + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2 \|x\| \|y\| + \|y\|^2 \\ & \text{ ce qui est vrai selon l'inégalité de Cauchy-Schwarz.} \end{aligned}$$

■

Démonstration 21.15 (Cas d'égalité)
Découle du cas d'égalité sans valeur absolue dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz. ■

Exemple 21.16
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f, g \in \mathscr{C}^0([a\,;\,b], \mathbb{R})$.

On a :

$$\sqrt{\int_a^b (f(t) + g(t))^2 \, \mathrm{d}t} \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(t) \, \mathrm{d}t} + \sqrt{\int_a^b g^2(t) \, \mathrm{d}t}.$$

Démonstration 21.17
C'est l'inégalité de Minkowski appliquée au produit scalaire (2) de l'Exemple 21.3. ■

Remarque 21.18
Soit E un espace préhilbertien.

La norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire de E vérifie :

$$\begin{cases} \forall x \in E, \quad \|x\| = 0 \implies x = 0_E \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in E, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \\ \forall x, y \in E, \quad \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \end{cases}$$

En deuxième année, vous étudierez les fonction $E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant ces trois propriétés. Une telle fonction sur un $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)-espace vectoriel est appelée une « norme ».

Ainsi, dans ce paragraphe, on a montré que la « norme associée à un produit scalaire » est bien ce qu'on appelle une « norme ».

Démonstration 21.19
Soit $x \in E$.

On a :

$$\begin{aligned} \|x\| = 0 &\iff \sqrt{\langle x \mid x \rangle} = 0 \\ &\iff \langle x \mid x \rangle = 0 \\ &\iff x = 0. \end{aligned}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a :

$$\begin{aligned} \|\lambda x\| &= \sqrt{\langle \lambda x \mid \lambda x \rangle} \\ &= \sqrt{\lambda^2 \langle x \mid x \rangle} \\ &= |\lambda| \, \|x\| . \end{aligned}$$

■

Définition/Proposition 21.20 (Distance)
Soit E un espace préhilbertien.

On appelle distance associée au produit scalaire de E l'application :

$$d : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x, y) & \longmapsto & \|y - x\| \end{array}$$

Elle vérifie :

$$\begin{cases} \forall x, y \in E, \quad d(x, y) = 0 \iff x = y \\ \forall x, y \in E, \quad d(x, y) = d(y, x) \\ \forall x, y, z \in E, \quad d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) \end{cases}$$

21.1.3 Propriétés

Soit E un espace préhilbertien dont on note $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme associée.

Proposition 21.21
Soient $x, y \in E$.

On a :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x \mid y \rangle + \|y\|^2 \qquad \textit{et} \qquad \|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x \mid y \rangle + \|y\|^2 .$$

Démonstration 21.22
On a :

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y \mid x+y \rangle = \langle x \mid x \rangle + \langle x \mid y \rangle + \langle y \mid x \rangle + \langle y \mid y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x \mid y \rangle + \|y\|^2$$

et :

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y \mid x-y \rangle = \langle x \mid x \rangle - \langle x \mid y \rangle - \langle y \mid x \rangle + \langle y \mid y \rangle = \|x\|^2 - 2\langle x \mid y \rangle + \|y\|^2 .$$ ■

Théorème 21.23 (Identité du parallélogramme)
Soient $x, y \in E$.

On a :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 .$$

Démonstration 21.24
Découle de la Proposition 21.21 par somme des deux égalités. ■

Théorème 21.25 (Identités de polarisation)
Soient $x, y \in E$.

On a :

$$\begin{cases} \langle x \mid y \rangle = \dfrac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \\ \langle x \mid y \rangle = \dfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \end{cases}$$

Démonstration 21.26
Découle de la Proposition 21.21. ■

21.2 Orthogonalité, base orthonormale

21.2.1 Vocabulaire

Définition 21.27
Soit E un espace préhilbertien.

On dit qu'un vecteur $x \in E$ est unitaire s'il est de norme 1 :

$$\|x\| = 1.$$

On dit que deux vecteurs $x, y \in E$ sont orthogonaux et on note $x \perp y$ si leur produit scalaire est nul :

$$\langle x \mid y \rangle = 0.$$

On dit qu'une famille de vecteurs $(x_i)_{i \in I} \in E^I$ est orthogonale si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux :

$$\forall i, j \in I, \quad i \neq j \implies \left\langle x_i \,\middle|\, x_j \right\rangle = 0.$$

On dit qu'une famille de vecteurs $(x_i)_{i \in I} \in E^I$ est orthonormale ou orthonormée si ses vecteurs sont unitaires et deux à deux orthogonaux :

$$\forall i, j \in I, \quad \left\langle x_i \,\middle|\, x_j \right\rangle = \delta_{ij}.$$

On dit qu'une famille de vecteurs est une base orthonormale ou orthonormée de E si c'est une famille orthonormale et une base de E.

Exemple 21.28
La base canonique de $\mathbb{R}^n$, pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, est orthonormale.

La base canonique de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$, pour le produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$, est orthonormale.

Exercice 21.29
On note $\mathscr{C}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(1) Montrer que l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}_{2\pi} \times \mathscr{C}_{2\pi} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f, g) & \longmapsto & \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t \end{array}$$

est un produit scalaire. L'espace vectoriel $\mathscr{C}_{2\pi}$ est-il un espace euclidien ?

(2) On pose :

$$\forall k \in [\![0\,;n]\!], \quad f_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \cos(kt) \end{array}$$

La famille $(f_0, \ldots, f_n)$ est-elle orthogonale ? orthonormale ?

(3) Même question avec la famille $(f_0, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n)$, en posant :

$$\forall k \in [\![1 \,;\, n]\!], \quad g_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sin(kt) \end{array}$$

Correction 21.30 (1)
Cf. Démonstration 21.4.

On note tout de même :

Soit $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$.

Si $\langle f \mid f \rangle = 0$ alors $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Or f^2 est continue et positive.

Donc $\forall t \in [0 \,;\, 2\pi]\,, \quad f^2(t) = 0$.

Donc $f = 0$ car f est 2π-périodique.

Correction 21.31 (2)
On a :

$$\begin{aligned}
\forall k, \ell \in [\![0 \,;\, n]\!], \quad \langle f_k \mid f_\ell \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_k(t)\, f_\ell(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(kt)\cos(\ell t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4\pi} \left(\int_0^{2\pi} \cos((k+\ell)\,t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} \cos((k-\ell)\,t)\,\mathrm{d}t \right) \\
&= \begin{cases}
\dfrac{1}{4\pi} \left(\left[\dfrac{\sin((k+\ell)\,t)}{k+\ell} \right]_0^{2\pi} + \left[\dfrac{\sin((k-\ell)\,t)}{k-\ell} \right]_0^{2\pi} \right) = 0 & \text{si } k \neq \ell \\
\dfrac{1}{4\pi} \left(\left[\dfrac{\sin(2kt)}{2k} \right]_0^{2\pi} + 2\pi \right) = \dfrac{1}{2} \neq 1 & \text{si } k = \ell \neq 0 \\
\dfrac{1}{4\pi} (2\pi + 2\pi) = 1 & \text{si } k = \ell = 0
\end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $(f_0, \ldots, f_n)$ est orthogonale mais pas orthonormée car $\forall k \in [\![1 \,;\, n]\!], \quad \|f_k\| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \neq 1$.

Correction 21.32 (3)
On a :

$$\forall k \in [\![0 \,;\, n]\!]\,,\ \forall \ell \in [\![1 \,;\, n]\!]\,,\ \langle f_k \mid g_\ell \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_k(t)\, g_\ell(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(kt)\sin(\ell t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{4\pi}\left(\int_0^{2\pi} \sin((k+\ell)t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} \sin((\ell-k)t)\,\mathrm{d}t\right)$$
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi}\left(\left[\dfrac{-\cos((k+\ell)t)}{k+\ell}\right]_0^{2\pi} + \left[\dfrac{-\cos((\ell-k)t)}{\ell-k}\right]_0^{2\pi}\right) = 0 & \text{si } k \neq \ell \\ \dfrac{1}{4\pi}\left(\left[\dfrac{-\cos(2kt)}{2k}\right]_0^{2\pi} + 0\right) = 0 & \text{si } k = \ell \end{cases}$$

Donc $\forall k \in [\![0 \,;\, n]\!]\,,\ \forall \ell \in [\![1 \,;\, n]\!]\,,\ f_k \perp g_\ell$.

De plus, on a :

$$\forall k, \ell \in [\![1 \,;\, n]\!]\,,\ \langle g_k \mid g_\ell \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_k(t)\, g_\ell(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(kt)\sin(\ell t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{4\pi}\left(\int_0^{2\pi} \cos((k-\ell)t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} \cos((k+\ell)t)\,\mathrm{d}t\right)$$
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi}\left(\left[\dfrac{\sin((k-\ell)t)}{k-\ell}\right]_0^{2\pi} - \left[\dfrac{\sin((k+\ell)t)}{k+\ell}\right]_0^{2\pi}\right) = 0 & \text{si } k \neq \ell \\ \dfrac{1}{4\pi}\left(-\left[\dfrac{\sin(2kt)}{2k}\right]_0^{2\pi} + 2\pi\right) = \dfrac{1}{2} & \text{si } k = \ell \end{cases}$$

Donc $\forall k, \ell \in [\![1 \,;\, n]\!]\,,\ g_k \perp g_\ell$.

Finalement, $(f_0, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ est orthogonale mais pas orthonormée car $\forall k \in [\![1 \,;\, n]\!]\,,\ \|g_k\| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \neq 1$.

21.2.2 Propriétés des familles orthogonales

Théorème 21.33 (Théorème de Pythagore)
Soient E un espace préhilbertien et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille orthogonale de vecteurs de E.

On a :

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2 .$$

Démonstration 21.34
On a :

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\|^2 &= \left\langle \sum_{j=1}^{n} x_j \;\middle|\; \sum_{k=1}^{n} x_k \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\langle x_j \mid x_k \rangle}_{=0 \text{ si } j \neq k} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2
\end{aligned}$$

■

Proposition 21.35
Soient E un espace préhilbertien et $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ une famille orthogonale dont tous les vecteurs sont non-nuls.

Alors $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille libre.

Démonstration 21.36
Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j = 0_E$ et $k \in [\![1 \,;\, n]\!]$.

On a $\left\langle \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \;\middle|\; x_k \right\rangle = 0$.

Donc $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \underbrace{\langle x_j \mid x_k \rangle}_{=0 \text{ si } j \neq k} = 0$.

Donc $\lambda_k \|x_k\|^2 = 0$.

Donc $\lambda_k = 0$ car $x_k \neq 0$.

Donc $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre. ■

Proposition 21.37
Soient E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ une famille orthonormale possédant n vecteurs.

Alors $(x_1, \dots, x_n)$ est une base orthonormale de E.

Démonstration 21.38
La famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre car c'est une famille orthogonale de vecteurs non-nuls. De plus, elle possède n vecteurs et $\dim E = n$ donc c'est une base de E et donc une base orthonormale de E. ∎

21.2.3 Calculs dans une base orthonormale

Proposition 21.39
Soient E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E et x et y deux vecteurs de E dont on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ les coordonnées respectives dans $\mathscr{B}$.

On a :

(1) $\forall i \in [\![1\,;n]\!],\ x_i = \langle e_i \mid x \rangle$;

(2) $\langle x \mid y \rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^t XY$;

(3) $\|x\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{{}^t XX}$.

Démonstration 21.40
Tout découle de :

$$\begin{cases} x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \\ y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i e_i \\ \forall i, j \in [\![1\,;n]\!],\ \left\langle e_i \mid e_j \right\rangle = \delta_{ij} \end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned} \forall i \in [\![1\,;n]\!],\ \langle e_i \mid x \rangle &= \left\langle e_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \left\langle e_i \mid e_j \right\rangle \\ &= x_i \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\langle x \mid y \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \left\langle e_i \mid e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.\end{aligned}$$

■

Remarque 21.41
Attention au fait que les formules précédentes ne sont valables que dans une base orthonormale.

Ainsi, si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E, alors on a :

$$\forall x \in E, \ \ x = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \mid x \rangle \, e_i.$$

Corollaire 21.42
Soient E un espace euclidien, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E et $u \in \mathscr{L}(E)$.

La matrice de u dans $\mathscr{B}$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \langle e_1 \mid u(e_1) \rangle & \ldots & \langle e_1 \mid u(e_n) \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle e_n \mid u(e_1) \rangle & \ldots & \langle e_n \mid u(e_n) \rangle \end{pmatrix}.$$

21.3 Sous-espaces vectoriels

21.3.1 Sous-espaces vectoriels orthogonaux

Définition 21.43
Soient E un espace préhilbertien et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

On dit que F et G sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux et on note $F \perp G$ si on a :

$$\forall x \in F, \ \ \forall y \in G, \ \ x \perp y.$$

Exemple 21.44
Soit E un espace préhilbertien.

Soient $x, y \in E$ tels que $x \perp y$. On a alors $\mathrm{Vect}\,(x) \perp \mathrm{Vect}\,(y)$.

Le sous-espace vectoriel nul $\{0_E\}$ est orthogonal à tous les sous-espaces vectoriels de E (car le vecteur nul de E est orthogonal à tous les vecteurs de E).

Définition 21.45 (Orthogonal d'une partie)
Soient E un espace préhilbertien et $A \subseteq E$.

On appelle orthogonal de A (dans E) et on note $A^\perp$ l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de A :
$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in A,\ \ x \perp y\}\,.$$

L'ensemble $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 21.46 (Orthogonal d'un sous-espace vectoriel)
Soient E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E.

On a :

(1) $F^\perp$ *est un sous-espace vectoriel de* E *;*

(2) $F \perp F^\perp$ *;*

(3) $F \cap F^\perp = \{0_E\}$ *;*

(4) $F \subseteq \left(F^\perp\right)^\perp$.

Démonstration 21.47 (1)
On a $F^\perp \subseteq E$ et $0_E \in F^\perp$ car $\forall y \in F,\ \ 0_E \perp y$.

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $x_1, x_2 \in F^\perp$.

On a :
$$\forall y \in F,\ \ \langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \mid y\rangle = \lambda_1 \underbrace{\langle x_1 \mid y\rangle}_{=0} + \lambda_2 \underbrace{\langle x_2 \mid y\rangle}_{=0} = 0.$$

Donc $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in F^\perp$.

Donc $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E. ■

Démonstration 21.48 (2)
Clair par définition de $F^\perp$. ■

Démonstration 21.49 (3)
Soit $x \in F \cap F^\perp$.

On a $x \perp x$ donc $\langle x \mid x \rangle = 0$.

Donc $x = 0_E$. ■

Démonstration 21.50 (4)
Soit $x \in F$.

On a $\forall y \in F^\perp, \ \ x \perp y$.

Donc $x \in \left(F^\perp\right)^\perp$. ■

Remarque 21.51
Soient E un espace préhilbertien et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) $F \perp G$

(2) $F \subseteq G^\perp$

(3) $G \subseteq F^\perp$

Démonstration 21.52
On a :

$$\begin{aligned} F \perp G &\iff \forall x \in F, \ \ \forall y \in G, \ \ x \perp y \\ &\iff \forall x \in F, \ \ x \in G^\perp \\ &\iff F \subseteq G^\perp. \end{aligned}$$

D'où (1) $\iff$ (2).

Idem pour (1) $\iff$ (3). ■

21.3.2 Supplémentaire orthogonal

Rappel 21.53
Soient E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E.

Selon la Proposition 21.46, on a :
$$F \cap F^{\perp} = \{0_E\}\,.$$

Donc F et $F^{\perp}$ sont en somme directe.

Définition 21.54 (Supplémentaire orthogonal)
Soient E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E.

Un supplémentaire orthogonal de F (dans E) est un supplémentaire de F (dans E) qui est orthogonal à F.

En d'autres termes, c'est un sous-espace vectoriel G de E tel que :
$$\begin{cases} F \oplus G = E \\ F \perp G \end{cases}$$

On résume parfois ce système avec la notation $F \overset{\perp}{\oplus} G = E$ ou des variantes de cette notation.

Proposition 21.55 (Unicité du supplémentaire orthogonal)
Soient E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E.

Si G est un supplémentaire orthogonal de F alors $G = F^{\perp}$.

Démonstration 21.56
$\boxed{\subseteq}$ Claire car $G \perp F$.

$\boxed{\supseteq}$

Soit $x \in F^{\perp}$.

Montrons que $x \in G$.

Soient $x_F \in F$ et $x_G \in G$ tels que $x = x_F + x_G$.

On a $\langle x_F \mid x_F + x_G \rangle = \langle x_F \mid x \rangle$ donc
$$\|x_F\|^2 + \underbrace{\langle x_F \mid x_G \rangle}_{=0 \text{ car } F \perp G} = \underbrace{\langle x_F \mid x \rangle}_{=0 \text{ car } F \perp G}\,.$$

Donc $x_F = 0_E$.

Donc $x = x_G$.

Donc $x \in G$. ■

Remarque 21.57
Soient E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E.

D'après la proposition précédente, F admet un supplémentaire orthogonal si, et seulement si, $F^{\perp}$ est un supplémentaire de F : $F + F^{\perp} = E$.

Exercice 21.58
Soient E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E.

On suppose que F admet un supplémentaire orthogonal dans E.

Montrer :

$$\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F.$$

Correction 21.59
On a $E = F \oplus F^{\perp}$ donc F est un supplémentaire orthogonal de $F^{\perp}$.

Donc $F = \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$ selon la Proposition 21.55.

Définition 21.60
Soit E un espace préhilbertien.

Un projecteur $p \in \mathscr{L}(E)$ est dit orthogonal si son image et son noyau sont orthogonaux :

$$\operatorname{Im} p \perp \ker p.$$

Remarque 21.61
Soient E un espace préhilbertien et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

(1) Notons p le projecteur sur F, parallèlement à G.
Si p est un projecteur orthogonal, alors $G = F^{\perp}$.
On dit simplement que p est le projecteur orthogonal sur F.

(2) Le « projecteur orthogonal sur F » est bien défini si, et seulement si, F admet un supplémentaire orthogonal.

Démonstration 21.62 (1)
Si p est un projecteur orthogonal alors $F \perp G$ et $F \oplus G = E$ donc $G = F^{\perp}$. ■

Remarque 21.63
On sait que tout projecteur est le projecteur sur son image, parallèlement à son noyau.

De même, tout projecteur orthogonal p est le projecteur orthogonal sur son image, c'est-à-dire le projecteur sur $\operatorname{Im} p$, parallèlement à $(\operatorname{Im} p)^{\perp}$.

21.3.3 Projecteur orthogonal sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

Définition/Théorème 21.64
Soient E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E.

On suppose que F est de dimension finie.

Alors F et son orthogonal $F^{\perp}$ sont supplémentaires dans E :

$$E = F \oplus F^{\perp}.$$

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de F.

Le projecteur orthogonal p_F sur F est donné par :

$$\forall x \in E, \quad p_F(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \mid x \rangle e_k.$$

Démonstration 21.65
Posons $\begin{array}{rccc} q : & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \langle e_k \mid x \rangle e_k \end{array}$

On a bien $q \in \mathscr{L}(E, F)$.

On remarque : $\forall x \in E, \quad x = \underbrace{q(x)}_{\in F} + \underbrace{x - q(x)}_{\in F^{\perp}\,?}.$

Soit $x \in E$. Il suffit de montrer que $x - q(x) \in F^{\perp}$.

En effet, on en déduira que $E = F + F^{\perp}$ donc $E = F \oplus F^{\perp}$ et que le projecteur orthogonal sur F est q.

On a :

$$\begin{aligned} \forall k \in [\![1\,;n]\!], \quad \langle e_k \mid x - q(x) \rangle &= \langle e_k \mid x \rangle - \left\langle e_k \,\middle|\, \sum_{\ell=1}^{n} \langle e_\ell \mid x \rangle e_\ell \right\rangle \\ &= \langle e_k \mid x \rangle - \langle e_k \mid x \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc par combinaison linéaire : $\forall y \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n), \quad \langle y \mid x - q(x) \rangle = 0.$

Donc $x - q(x) \in F^{\perp}$. ■

Corollaire 21.66
Soient E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E.

On a :
$$\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F.$$

Démonstration 21.67
Comme F est de dimension finie, on sait (selon le théorème précédent) que $F^{\perp}$ est un supplémentaire de F. La formule en découle. ■

Définition 21.68
Soient E un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de E et x un vecteur de E.

On appelle distance de x à F le réel :
$$d(x, F) = \inf_{z \in F} d(x, z) = \inf_{z \in F} \|x - z\| \in \mathbb{R}_{+}.$$

Démonstration 21.69
Cette borne inférieure est bien définie car $\{d(x, z)\}_{z \in F}$ est une partie non-vide de $\mathbb{R}$ (elle contient $d(x, 0)$) et minorée (par 0). ■

Proposition 21.70
Soient E un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et x un vecteur de E.

On note p_F le projecteur orthogonal sur F.

Alors :
$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\|.$$

Ainsi, la distance (qui est une borne inférieure) est en fait atteinte.

De plus, $p_F(x)$ est l'unique élément de F où la distance de x à F est atteinte.

Enfin :
$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2.$$

Démonstration 21.71
On a :

$$\begin{aligned}
\forall z \in F,\quad \|x - z\|^2 &= \Big\|\underbrace{x - p_F(x)}_{\in F^\perp} + \underbrace{p_F(x) - z}_{\in F}\Big\|^2 \\
&= \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - z\|^2 \qquad \textit{selon le théorème de Pythagore} \\
&\geqslant \|x - p_F(x)\|^2 \ \text{ avec égalité ssi } p_F(x) = z.
\end{aligned}$$

D'où $\min\limits_{z \in F} \|x - z\| = \|x - p_F(x)\|$.

Enfin, en prenant $z = 0_E$, on a : $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2$. ■

Exercice/Exemple 21.72
Soient E un espace euclidien et $v \in E$ unitaire.

On pose :

$$D = \operatorname{Vect}(v) \qquad \text{et} \qquad H = \operatorname{Vect}(v)^\perp.$$

Soit $x \in E$.

(1) Donner le projeté orthogonal de x sur D.

(2) Donner le projeté orthogonal de x sur H.

(3) Donner la distance de x à D.

(4) Donner la distance de x à H.

Correction 21.73
On remarque que (v) est une base orthonormale de D.

On a le projeté orthogonal de x sur D : $p_D(x) = \langle v \mid x \rangle v$.

On a le projeté orthogonal de x sur H : $p_H(x) = x - \langle v \mid x \rangle v$.

On a la distance de x à D : $\|x - p_D(x)\| = \|x - \langle v \mid x \rangle v\|$.

On a la distance de x à H :

$$\begin{aligned}
\|x - p_H(x)\| &= \|x - x + \langle v \mid x \rangle v\| \\
&= \|\langle v \mid x \rangle v\| \qquad \textit{car } v \textit{ est unitaire} \\
&= |\langle v \mid x \rangle|
\end{aligned}$$

21.3.4 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème 21.74
Soient E un espace euclidien et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Alors il existe une base orthonormale $\mathscr{B}' = \left(e'_1, \ldots, e'_n\right)$ de E telle que :

$$\forall j \in [\![1 \,;\, n]\!]\,,\ \ e'_j \in \operatorname{Vect}\left(e_1, \ldots, e_j\right),$$

c'est-à-dire telle que la matrice de passage $\mathscr{P}_{\mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{B}'}$ soit triangulaire supérieure.

Démonstration 21.75
On calcule successivement :

$$e'_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} \qquad e'_2 = \frac{e_2 - \left\langle e'_1 \mid e_2 \right\rangle e'_1}{\left\|e_2 - \left\langle e'_1 \mid e_2 \right\rangle e'_1\right\|} \qquad e'_3 = \frac{e_3 - \left\langle e'_1 \mid e_3 \right\rangle e'_1 - \left\langle e'_2 \mid e_3 \right\rangle e'_2}{\left\|e_3 - \left\langle e'_1 \mid e_3 \right\rangle e'_1 - \left\langle e'_2 \mid e_3 \right\rangle e'_2\right\|} \qquad \cdots$$

Formule générale : $\forall k \in [\![1 \,;\, n]\!]\,,\ \ e'_k = \dfrac{e_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} \left\langle e'_j \,\middle|\, e_k \right\rangle e'_j}{\left\| e_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} \left\langle e'_j \,\middle|\, e_k \right\rangle e'_j \right\|}$. ∎

Corollaire 21.76
Tout espace euclidien admet une base orthonormale.

Démonstration 21.77
Soit E un espace euclidien.

Il existe une base $\mathscr{B}$ de E car $\dim E < +\infty$.

On en déduit une base orthonormale de E en appliquant à $\mathscr{B}$ l'algorithme de Gram-Schmidt. ∎

Théorème 21.78 (Théorème de la base orthonormée incomplète)
Soient E un espace euclidien et $(e_1, \ldots, e_r)$ une famille orthonormale de vecteurs de E.

Alors on peut compléter $(e_1, \ldots, e_r)$ en une base orthonormale de E.

Démonstration 21.79
La famille $(e_1, \dots, e_r)$ est une famille libre de vecteurs de E.

Selon le théorème de la base incomplète, on peut la compléter en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E.

En appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à cette base, on obtient une base orthonormale $\left(e_1', \dots, e_n'\right)$ de E.

On remarque $\forall k \in [\![1 \,;\, r]\!]\,,\ \ e_k' = e_k$ donc on a complété $(e_1, \dots, e_r)$ en la base orthonormale

$$\left(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}', \dots, e_n'\right). \qquad \blacksquare$$

Exercice/Exemple 21.80
On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire canonique et on pose :

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad e_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

(1) Déterminer une base orthonormale de $F = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, e_3)$.

(2) Calculer le projeté orthogonal de v sur F et la distance de v à F.

Correction 21.81 (1)
On sait que (e_1, e_2, e_3) est une base de F. Orthonormalisons cette base.

On pose :

$$e_1' = \frac{e_1}{\|e_1\|} \qquad e_2' = \frac{e_2 - \left\langle e_1' \mid e_2\right\rangle e_1'}{\left\|e_2 - \left\langle e_1' \mid e_2\right\rangle e_1'\right\|} \qquad e_3' = \frac{e_3 - \left\langle e_1' \mid e_3\right\rangle e_1' - \left\langle e_2' \mid e_3\right\rangle e_2'}{\left\|e_3 - \left\langle e_1' \mid e_3\right\rangle e_1' - \left\langle e_2' \mid e_3\right\rangle e_2'\right\|}$$

On a $\|e_1\| = \sqrt{2}$ donc $e_1' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$.

De plus, on a $\left\langle e_1' \mid e_2\right\rangle = \left\langle \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ et $e_2 - \sqrt{2}e_1' = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{2}$.

Donc $e_2' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$.

De plus, on a $\left\langle e_1' \mid e_3 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{3}{\sqrt{2}}$ et $\left\langle e_2' \mid e_3 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{7}{\sqrt{2}}$ et $e_3 - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{7}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\left\| \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \times 2 = 1.$

Donc $e_3' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Finalement, $\left(e_1', e_2', e_3'\right)$ est une base orthonormale de F.

Correction 21.82 (2)
On a :

$$p_F(v) = \left\langle e_1' \mid v \right\rangle e_1' + \left\langle e_2' \mid v \right\rangle e_2' + \left\langle e_3' \mid v \right\rangle e_3'.$$

Or, on a :

$$\left\langle e_1' \mid v \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \left\langle e_2' \mid v \right\rangle = 0 \qquad \left\langle e_3' \mid v \right\rangle = \frac{-1}{2}$$

D'où :

$$\begin{aligned} p_F(v) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
d(v,F) &= \|v - p_F(v)\| \\
&= \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \\
&= \frac{1}{4} \times 2 \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

21.3.5 Hyperplans d'un espace euclidien

Définition/Proposition 21.83
Soient E un espace euclidien et H un hyperplan de E.

On appelle vecteur normal à H tout vecteur v non-nul et orthogonal à tout vecteur de H :

$$v \in H^\perp \setminus \{0_E\}.$$

Il vérifie :

$$\forall x \in E,\ \ x \in H \iff v \perp x.$$

Démonstration 21.84
On a $\dim E < +\infty$ donc $\dim H^\perp = \dim E - \dim H = 1$ donc il existe $v \in H^\perp \setminus \{0_E\}$ donc H admet un vecteur normal.

Posons $D = \mathrm{Vect}(v)$.

On a $D = H^\perp$ donc $H = D^\perp$ selon l'Exercice 21.58.

Donc :

$$\begin{aligned}
\forall x \in E,\ \ x \in H &\iff x \in D^\perp \\
&\iff x \perp v \\
&\iff \langle x \mid v \rangle = 0 \qquad \text{(équation cartésienne de } H\text{)}.
\end{aligned}$$

■

Proposition 21.85 (Isomorphisme canonique entre un espace euclidien et son dual)
Soient E un espace euclidien et $\ell \in E^*$ une forme linéaire sur E.

Il existe un unique vecteur $v \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, \ \ \ell(x) = \langle v \mid x \rangle .$$

Démonstration 21.86
Posons $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^* \\ v & \longmapsto & \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \langle v \mid x \rangle \end{array} \end{array}$

On a $\varphi \in \mathscr{L}(E, E^*)$.

Montrons que φ est une injection.

Soit $v \in \ker \varphi$.

On a $\varphi(v) = 0$ donc $\forall x \in E, \ \ \langle v \mid x \rangle = 0$.

Donc $\langle v \mid v \rangle = 0$.

Donc $v = 0$.

Donc $\ker \varphi = \{0\}$ donc φ est une injection.

De plus, $\dim E = \dim E^* < +\infty$ donc φ est une surjection.

Donc φ est un isomorphisme : $\forall \ell \in E^*, \ \ \exists! v \in E, \ \ \ell = \varphi(v)$.

Donc :

$$\forall \ell \in E^*, \ \ \exists! v \in E, \ \ \forall x \in E, \ \ \ell(x) = \langle v \mid x \rangle .$$

■

Exercice/Exemple 21.87
On a vu dans l'Exercice/Exemple 21.80 un hyperplan F de $\mathbb{R}^4$.

Donner un vecteur normal à F.

Correction 21.88
On a $v - p_F(v) \in F^\perp$ et $v - p_F(v) \neq 0_{\mathbb{R}^4}$ donc $v = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à F et donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aussi.

Ainsi :

$$\forall \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in F \iff \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\iff a - b - c + d = 0 \qquad \text{(équation cartésienne de } F\text{)}.$$

Remarque 21.89
Soit E un espace euclidien.

On retrouve que les hyperplans de E sont les noyaux des formes linéaires non-nulles de E.

Démonstration 21.90
Soient $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E, H un hyperplan de E et v un vecteur normal à H de coordonnées $(a_1, \ldots, a_n)$ dans $\mathscr{B}$.

On a :

$$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \in H \iff \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \perp \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$$

$$\iff \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \ker \ell$$

avec $\ell : \begin{cases} e_1 \longmapsto a_1 \\ \vdots \\ e_n \longmapsto a_n \end{cases}$ ■

Chapitre 22

Fonctions de deux variables réelles

Sommaire

Dans tout le chapitre, on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire la norme associée au produit scalaire canonique $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ de $\mathbb{R}^2$:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \quad \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

22.1 Ouverts de $\mathbb{R}^2$

Définition 22.1 (Boules)
Soient $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

La boule ouverte de centre a et de rayon r est l'ensemble des points x dont la distance à a est strictement inférieure à r :

$$\mathbb{B}(a, r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \|a - x\| < r \right\}.$$

La boule fermée de centre a et de rayon r est l'ensemble des points x dont la distance à a est inférieure à r :

$$\mathbb{B}'(a, r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \|a - x\| \leqslant r \right\}.$$

La sphère de centre a et de rayon r est l'ensemble des points x dont la distance à a est égale à r :

$$\mathbb{S}(a, r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \|a - x\| = r \right\}.$$

Les notations $\mathbb{B}(a, r)$, $\mathbb{B}'(a, r)$ et $\mathbb{S}(a, r)$ ne sont pas « officielles ».

Définition 22.2
Soient $a \in \mathbb{R}^2$ et $V \subseteq \mathbb{R}^2$.

On dit que V est un voisinage de a dans $\mathbb{R}^2$ s'il contient une boule centrée en a et de rayon strictement positif :

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \ \mathbb{B}\left(a, \varepsilon\right) \subseteq V.$$

Définition 22.3 (Ouvert)
Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

On dit que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (ou une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$) si Ω est un voisinage de chacun de ses points, c'est-à-dire :

$$\forall a \in \Omega, \ \ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \ \mathbb{B}\left(a, \varepsilon\right) \subseteq \Omega.$$

Exercice/Exemple 22.4
Parmi les parties de $\mathbb{R}^2$ suivantes, lesquelles sont des ouverts ?

$$\varnothing \qquad \mathbb{R}^2 \qquad \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \qquad \left(\mathbb{R}_+\right)^2 \qquad \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \qquad \left(\mathbb{R}^*\right)^2 \qquad]0\,;1] \times \mathbb{R} \qquad]0\,;1[\times \mathbb{R}$$

Correction 22.5
$\varnothing$ est un ouvert.

$\mathbb{R}^2$ est un ouvert car $\forall a \in \mathbb{R}^2, \ \mathbb{B}\left(a, 1\right) \subseteq \mathbb{R}^2$.

$\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ est un ouvert car $\forall \left(x, y\right) \in \mathbb{R}^2, \ \mathbb{B}\left(\left(x, y\right), \min\left\{|x|\,;|y|\right\}\right) \subseteq \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$.

$\left(\mathbb{R}_+\right)^2$ n'est pas un ouvert.

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est un ouvert car $\forall a \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \ \mathbb{B}\left(a, \|a\|\right) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$\left(\mathbb{R}^*\right)^2$ est un ouvert.

$]0\,;1] \times \mathbb{R}$ n'est pas un ouvert.

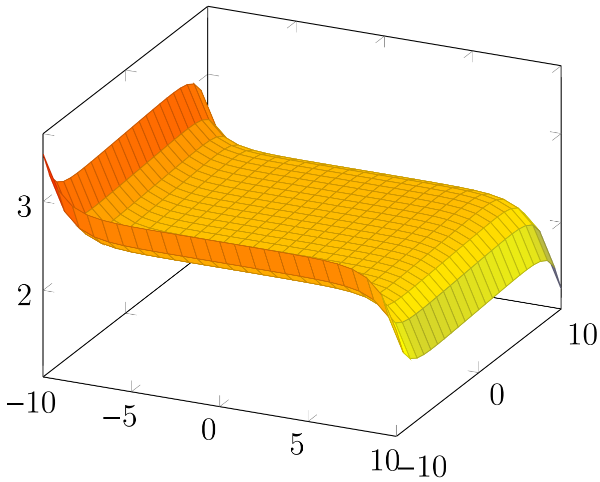
$]0\,;1[\times \mathbb{R}$ est un ouvert.

22.2 Continuité

Le graphe de $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble :

$$\{(x, y, z) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid z = f(x, y)\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Par exemple :



Définition 22.6 (Fonction continue sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$)
Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \Omega$.

On dit que f est continue en a si on a :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \;\; \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \;\; \forall x \in \Omega, \;\; \|x - a\| \leqslant \delta \implies |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon,$$

c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \;\; \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \;\; f(\Omega \cap \mathbb{B}'(a, \delta)) \subseteq [f(a) - \varepsilon \,;\, f(a) + \varepsilon],$$

c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \;\; \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \;\; \begin{cases} \mathbb{B}'(a, \delta) \subseteq \Omega \\ f(\mathbb{B}'(a, \delta)) \subseteq [f(a) - \varepsilon \,;\, f(a) + \varepsilon] \end{cases}$$

On dit que f est continue si elle est continue en tout de Ω.

Proposition 22.7
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

L'ensemble $\mathscr{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$ des fonctions continues de Ω dans $\mathbb{R}$ est un sous-anneau de $\mathscr{F}(\Omega, \mathbb{R})$.

Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \operatorname{Im} f \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues alors $g \circ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue.

Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue alors l'ensemble

$$\Omega' = f^{-1}(\mathbb{R}^*) = \{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}$$

est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ *et la fonction*

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{1}{f}: & \Omega' & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{f(x)} \end{array}$$

est continue.

Démonstration 22.8
⋆⋆ Exercice ⋆⋆ ■

Exercice/Exemple 22.9
On pose :

$$f:(x,y)\longmapsto x \qquad \text{et} \qquad g:(x,y)\longmapsto \operatorname{Arctan}\frac{y}{x}.$$

Pour chacune de ces fonctions, donner son ensemble de définition, dire si c'est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et dire si la fonction est continue.

Correction 22.10
f est définie sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Montrons que f est continue en (a,b).

On a :

$$\begin{aligned} \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \ |f(x,y)-f(a,b)| &= |x-a| \\ &= \sqrt{(x-a)^2} \\ &\leqslant \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \\ &= \|(x,y)-(a,b)\|. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \ \exists\delta\in\mathbb{R}_+^*,\ \ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \ \|(x,y)-(a,b)\|\leqslant\delta \implies |f(x,y)-f(a,b)|\leqslant\varepsilon$$

car $\delta=\varepsilon$ convient.

Donc f est continue.

g est définie sur $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

De même que précédemment, $(x,y)\longmapsto y$ est continue.

Donc $(x,y)\longmapsto \dfrac{y}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$.

Or $\operatorname{Arctan}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ est continue donc g est continue par composition.

22.3 Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

22.3.1 Développement limité d'ordre 1

Notation 22.11
Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant $(0,0)$ et $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

On dit que $g(x)$ est négligeable devant $\|x\|$ et on note $g(x) \underset{x \longrightarrow (0,0)}{=} o(\|x\|)$ si on a :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall x \in \Omega, \quad \|x\| \leqslant \delta \implies |g(x)| \leqslant \varepsilon \|x\|.$$

Définition 22.12
Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a = (a_1, a_2) \in \Omega$.

On dit que f admet un développement limité à l'ordre 1 en a s'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) \underset{h=(h_1,h_2) \longrightarrow (0,0)}{=} f(a_1, a_2) + \lambda h_1 + \mu h_2 + o(\|h\|).$$

Les réels λ et μ sont alors uniques.

22.3.2 Dérivées partielles

Définition 22.13
Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a = (a_1, a_2) \in \Omega$.

On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à x en a si la fonction $\gamma : t \longmapsto f(t, a_2)$ est dérivable en a_1.

On pose alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \gamma'(a_1).$$

On définit de même $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice/Exemple 22.14
Calculer les dérivées partielles de

$$f : (x, y) \longmapsto x^3 y^2 + x + 1 \qquad \text{et} \qquad g : (x, y) \longmapsto \operatorname{Arctan} \frac{y}{x}.$$

Correction 22.15
On a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y^2 + 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3 y \end{cases}$$

et :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \dfrac{-y}{x^2} \times \dfrac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \dfrac{-y}{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{cases}$$

Remarque 22.16
Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \Omega$.

Le fait que f admette des dérivées partielles en a n'implique pas la continuité de f en a.

22.3.3 Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Définition 22.17
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

On dit qu'une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ si ses dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont définies et continues.

Théorème 22.18
Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.

Alors f admet un développement limité à l'ordre 1 en tout point de Ω.

Soit $(x_0, y_0) \in \Omega$.

Alors on a :

$$f(x_1,y_1) \underset{(x_1,y_1)\longrightarrow(x_0,y_0)}{=} f(x_0,y_0) + (x_1-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y_1-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + o\left(\|(x_1-x_0, y_1-y_0)\|\right)$$

Démonstration 22.19
On a :

$$\begin{aligned}
f(x_1,y_1)-f(x_0,y_0) &= f(x_1,y_1)-f(x_1,y_0)+f(x_1,y_0)-f(x_0,y_0)\\
&= \int_{y_0}^{y_1}\frac{\partial f}{\partial y}(x_1,t)\,\mathrm{d}t+\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial f}{\partial x}(t,y_0)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_{y_0}^{y_1}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_1,t)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\mathrm{d}t+\int_{y_0}^{y_1}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,\mathrm{d}t\\
&\quad+\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(t,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)\mathrm{d}t+\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Soient $\varepsilon,\delta\in\mathbb{R}_+^*$ tels que $\begin{cases}\mathbb{B}\left((x_0,y_0),\delta\right)\subseteq\Omega\\ \forall a\in\mathbb{B}\left((x_0,y_0),\delta\right),\ \begin{cases}\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right|\leqslant\varepsilon\\ \left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right|\leqslant\varepsilon\end{cases}\end{cases}$

On a :

$$\begin{aligned}
f(x_1,y_1)-f(x_0,y_0) &= \underbrace{\int_{y_0}^{y_1}\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_1,t)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)}_{|\cdot|\leqslant\varepsilon}\mathrm{d}t}_{\leqslant|y_1-y_0|\varepsilon}+\underbrace{\int_{y_0}^{y_1}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,\mathrm{d}t}_{=(y_1-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}\\
&\quad+\underbrace{\int_{x_0}^{x_1}\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(t,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)}_{|\cdot|\leqslant\varepsilon}\mathrm{d}t}_{\leqslant|x_1-x_0|\varepsilon}+\underbrace{\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,\mathrm{d}t}_{=(x_1-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_{y_0}^{y_1}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_1,t)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\mathrm{d}t+\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(t,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)\mathrm{d}t &\leqslant 2\varepsilon\left\|(x_1,y_1)-(x_0,y_0)\right\|\\
&= o\left(\left\|(x_1-x_0,y_1-y_0)\right\|\right).
\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Définition 22.20 (Gradient)
Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f\in\mathscr{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$ et $a\in\Omega$.

On appelle gradient de f en a le vecteur

$$\nabla f(a)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a),\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right).$$

Selon le théorème précédent, il vérifie :

$$f(a+h) \underset{h \longrightarrow (0,0)}{=} f(a) + \langle \nabla f(a) \mid h \rangle + o(\|h\|).$$

Exercice/Exemple 22.21
Calculer le gradient des fonctions

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \sqrt{x^2+y^2} \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \operatorname{Arctan} \dfrac{y}{x} \end{array}$$

Correction 22.22
On a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad \nabla f(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} (x,y)$$

et :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad \nabla g(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right) = \frac{1}{x^2+y^2} (-y,x).$$

22.3.4 Règle de la chaîne

Proposition 22.23
Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $\operatorname{Card} I \geqslant 2$.

Soit $\gamma : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \Omega \\ t & \longmapsto & (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \end{array}$

On suppose que γ_1 et γ_2 sont de classe $\mathscr{C}^1$.

Alors $g : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(\gamma(t)) \end{array}$ *est de classe $\mathscr{C}^1$ et sa dérivée est :*

$$\forall t \in I, \quad g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t))\, \gamma_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))\, \gamma_2'(t).$$

Démonstration 22.24
Soit $t \in I$.

On a, quand $h \longrightarrow 0$: $\begin{cases} \gamma_1(t+h) = \gamma_1(t) + \gamma_1'(t)\, h + o(h) \\ \gamma_2(t+h) = \gamma_2(t) + \gamma_2'(t)\, h + o(h) \end{cases}$

Donc :

$$\begin{aligned} g(t+h) &= f\left(\gamma_1(t) + \underbrace{\gamma_1'(t)\, h + o(h)}_{\longrightarrow 0}, \gamma_2(t) + \underbrace{\gamma_2'(t)\, h + o(h)}_{\longrightarrow 0}\right) \\ &= f(\gamma(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t))\left(\gamma_1'(t)\, h + o(h)\right) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))\left(\gamma_2'(t)\, h + o(h)\right) \\ &\quad \underbrace{+ o\left(\left\|\left(\underbrace{\gamma_1'(t)\, h + o(h)}_{O(h)}, \underbrace{\gamma_2'(t)\, h + o(h)}_{O(h)}\right)\right\|\right)}_{o(h)} \\ &= g(t) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t))\, \gamma_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))\, \gamma_2'(t)\right) h + o(h) \end{aligned}$$

Donc g est dérivable, de dérivée $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t))\, \gamma_1'(t) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))\, \gamma_2'(t)$. ■

Définition/Proposition 22.25 (Dérivée selon un vecteur)
Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \Omega$ et $v \in \mathbb{R}^2$.

On appelle dérivée de f en a selon v la dérivée en 0 (si elle existe) de $t \longmapsto f(a + tv)$.

On la note $\mathrm{D}_v f(a)$.

Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ alors $\mathrm{D}_v f(a)$ existe et vaut

$$\mathrm{D}_v f(a) = \langle \nabla f(a) \mid v \rangle .$$

Démonstration 22.26
Notons $v = (v_1, v_2)$.

On a, pour tout t suffisamment petit :

$$f(a + tv) = f(a_1 + tv_1, a_2 + tv_2) .$$

Donc selon la règle de la chaîne :

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_v f(a) &= v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a) \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \middle| \nabla f(a) \right\rangle . \end{aligned}$$

■

Corollaire 22.27
Soient Ω, Ω' *deux ouverts de* $\mathbb{R}^2$, $f \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ *et* $\varphi, \psi \in \mathscr{C}^1(\Omega', \mathbb{R})$.

On suppose $\forall u, v \in \Omega', \ \ (\varphi(u,v), \psi(u,v)) \in \Omega$.

On pose $g : \begin{array}{ccc} \Omega' & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \end{array}$

Alors g *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *et on a :*

$$\forall a \in \Omega', \ \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial u}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi(a), \psi(a)) \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi(a), \psi(a)) \dfrac{\partial \psi}{\partial u}(u,v) \\ \dfrac{\partial g}{\partial v}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi(a), \psi(a)) \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial v}(\varphi(a), \psi(a)) \dfrac{\partial \psi}{\partial v}(u,v) \end{cases}$$

22.3.5 Équations aux dérivées partielles

Exemple 22.28
Résolvons sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles (E) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^2 y^2$.

Soit $f \in \mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$.

On a :

$$f \text{ est solution de } (E) \iff \exists g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 y^2 + g(y).$$

Exemple 22.29
Résolvons sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles (E) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \cos x + \sin y + \exp(x\mathrm{e}^y)$.

Soit $f \in \mathscr{C}^2\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ (c'est-à-dire $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y} \in \mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$).

On a :

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } (E) &\iff \exists g \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin x + x \sin y \\ &\qquad + \mathrm{e}^{-y} \exp(x\mathrm{e}^y) + g(y) \\ &\iff \exists g, h \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x,y) = -\cos x + \frac{1}{2}x^2 \sin y \\ &\qquad + \mathrm{e}^{-2y} \exp(x\mathrm{e}^y) + x g(y) + h(y) \end{aligned}$$

où $g, h \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Deuxième partie

TDs

Chapitre 0

Préliminaires

Sommaire

0.1 Logique

Exercice 0.1 (Exercice 1)
Soient P, Q et R des propositions.

(1) Montrer que les propositions suivantes sont vraies à l'aide de tables de vérité :

(a) $(P \implies Q) \vee P$

(b) $(P \implies Q) \iff (Q \vee \neg P)$

(c) $[P \wedge (P \implies Q)] \implies Q$

(2) Déduire de (b) une nouvelle démonstration de l'équivalence

$$(P \implies Q) \iff (\neg Q \implies \neg P)\,.$$

Correction 0.2
⋆⋆ à venir ⋆⋆

0.2 Quantificateurs

Exercice 0.3 (Exercice 2)
Les propositions suivantes sont-elles vraies ?

(1) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \;\; \ln(x) = 0$

(2) $\exists x \in \mathbb{R}_+^*, \;\; \ln(x) = 0$

(3) $\exists x \in \mathbb{R}, \;\; \exp(x) = 0$

(4) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \;\; 2xy \geqslant x^2 + y^2$ (en justifiant)

(5) $\forall x \in \mathbb{R}, \;\; \exists y \in \mathbb{R}, \;\; x < y$

(6) $\exists y \in \mathbb{R}, \;\; \forall x \in \mathbb{R}, \;\; x < y$

Correction 0.4
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 0.5 (Exercice 3)
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et T un réel strictement positif.

Écrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

(1) La fonction f est paire

(2) La fonction f est impaire

(3) La fonction f est périodique, de période T

(4) La fonction f est périodique

Correction 0.6
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 0.7 (Exercice 4)
Écrire à l'aide de quantificateurs les négations des propositions des exercices 2 et 3.

Correction 0.8

$\star\star$ à venir $\star\star$

Exercice 0.9 (Exercice 5)
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Écrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

(1) La fonction f est constante

(2) La fonction f est croissante

(3) La fonction f est strictement décroissante

Correction 0.10

$\star\star$ à venir $\star\star$

Exercice 0.11 (Exercice 6)
Les propositions suivantes sont-elles vraies ?

(1) $\forall a, b \in \mathbb{R}^*, \;\; a \leqslant b \implies \dfrac{1}{a} \geqslant \dfrac{1}{b}$

(2) $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \;\; a \leqslant b \implies \dfrac{1}{a} \geqslant \dfrac{1}{b}$

(3) $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \;\; a < b \implies \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$

(4) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, \;\; (a \leqslant b \quad \text{et} \quad c \leqslant d) \implies a + c \leqslant b + d$

(5) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, \;\; (a \leqslant b \quad \text{et} \quad c \leqslant d) \implies ac \leqslant bd$

(6) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}_+, \;\; (a \leqslant b \quad \text{et} \quad c \leqslant d) \implies ac \leqslant bd$

Correction 0.12

$\star\star$ à venir $\star\star$

0.3 Raisonnement par analyse-synthèse

Exercice 0.13 (Exercice 7)
Déterminer les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels vérifiant :

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \ \ u_{m+n} = u_m + u_n.$$

Correction 0.14
⋆⋆ à venir ⋆⋆

0.4 Congruences

Exercice 0.15 (Exercice 8)
Les propositions suivantes sont-elles vraies ?

(1) $\forall x, y \in \mathbb{Z}, \ \ x \equiv y\,[5] \implies x^2 \equiv y^2\,[5]$

(2) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \ \ x \equiv y\,[5] \implies x^2 \equiv y^2\,[5]$

(3) $\exists x \in \mathbb{Z}, \ \ x^2 \equiv -1\,[5]$

(4) $\exists x \in \mathbb{Z}, \ \ x^2 \equiv -1\,[7]$

(5) $\exists x \in \mathbb{R}, \ \ x^2 \equiv -1\,[7]$

Correction 0.16
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 0.17 (Exercice 9)
Soient x et y deux nombres réels.

Chercher quelles implications sont vraies entre les propositions suivantes :

(1) $x \equiv y\,[\pi]$

(2) $x \equiv y + \pi\,[\pi]$

(3) $x \equiv y\,[2\pi]$

(4) $x \equiv y + \pi \; [2\pi]$

(5) $2x \equiv 2y \; [2\pi]$

(6) $\dfrac{x}{2} \equiv \dfrac{y}{2} \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$

(7) $\dfrac{x}{2} \equiv \dfrac{y}{2} + \dfrac{\pi}{2} \; [\pi]$

Correction 0.18
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Chapitre 1

Inégalités, calculs

Exercice 1.1 (Exercice 1)

(1) Montrer :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{xy}{x+y} \leqslant \frac{x+y}{4}.$$

(2) En déduire :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{xy}{x+y} + \frac{yz}{y+z} + \frac{xz}{x+z} \leqslant \frac{x+y+z}{2}.$$

Correction 1.2

⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 1.3 (Exercice 2)

Résoudre les inéquations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

(1) $\ln(1+x) \leqslant 1 + \ln x$

(2) $\sqrt{\ln\left(1+x^2\right)} \geqslant 2$

(3) $\dfrac{1}{x} < -1$

(4) $\dfrac{1}{x} \leqslant 1$

(5) $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \dfrac{1}{2}$

(6) $\left\lfloor \sqrt{x^2+1} \right\rfloor \leqslant 2$

(7) $\left\lfloor x^2 - 4x \right\rfloor = 0$

Correction 1.4

⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 1.5 (Exercice 3)
Soit $x \in [1 ; +\infty[$.

Montrer :
$$\frac{(x-1)^2}{8x} \leqslant \frac{x+1}{2} - \sqrt{x} \leqslant \frac{(x-1)^2}{8}.$$

Correction 1.6

⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 1.7 (Exercice 4)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculer
$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{2}{k}\right).$$

Correction 1.8

⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 1.9 (Exercice 5)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculer
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)}.$$

Correction 1.10

⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 1.11 (Exercice 6)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Calculer
$$\sum_{k=1}^{n} k \times k!$$

Correction 1.12
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 1.13 (Exercice 7)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Calculer
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^4 + k^2 + 1}.$$

Indication : factoriser le dénominateur en remarquant $k^4 + k^2 + 1 = k^4 + 2k^2 + 1 - k^2$.

Correction 1.14
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 1.15 (Exercice 8)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Calculer
$$\sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Que remarque-t-on ?

Indication : s'inspirer du calcul de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ vu en cours.

Correction 1.16
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 1.17 (Exercice 9)
Montrer la proposition suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \prod_{k=0}^{n} \left(x^{2^k} + 1\right) = \frac{x^{2^{n+1}} - 1}{x - 1}.$$

Correction 1.18
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 1.19 (Exercice 10)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} 2 \qquad S_2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} 2^i \qquad S_3 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} 2^j \qquad S_4 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} 2^{i+j}.$$

Correction 1.20
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 1.21 (Exercice 11)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \qquad S_2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{i+j}{j} \qquad S_3 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{(i+j)^2}{j}.$$

Correction 1.22
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 1.23 (Exercice 12)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Calculer

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \min\{i\ ;\ j\}.$$

Correction 1.24
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 1.25 (Exercice 13)
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en posant :

$$u_1 = 1 \qquad u_2 = u_3 = 2 \qquad u_4 = u_5 = u_6 = 3 \qquad u_7 = u_8 = u_9 = u_{10} = 4 \qquad \dots$$

Combien vaut u_{30} ?

Exprimer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ à l'aide de la fonction partie entière.

Correction 1.26
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 1.27 (Exercice 14)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Montrer :

$$\left\lfloor \left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)^2 \right\rfloor = 4n + 1.$$

Correction 1.28
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 1.29 (Exercice 15)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que la partie entière de $\left(2+\sqrt{3}\right)^n$ est un entier impair.

Correction 1.30
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 1.31 (Exercice 16, classique)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculer

$$\prod_{k=1}^{n} 2k \qquad \text{puis} \qquad \prod_{k=1}^{n} (2k-1)\,.$$

NB : on exprimera le résultat à l'aide de factorielles, sans symbole $\prod$ *ni points de suspension.*

Correction 1.32
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Chapitre 2

Révisions de trigonométrie

Exercice 2.1 (Exercice 1)
Calculer

$$\cos\frac{\pi}{12} \qquad \sin\frac{\pi}{12} \qquad \tan\frac{\pi}{12} \qquad \tan\frac{\pi}{8} \qquad \tan\frac{\pi}{16} \qquad \sin\frac{\pi}{8} \qquad \cos\frac{\pi}{8}.$$

Correction 2.2
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 2.3 (Exercice 2)
Résoudre les équations suivantes, d'inconnue x :

(1) $\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = 3\tan x$

(2) $\sin x + \cos x = 1$

(3) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$

Correction 2.4
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 2.5 (Exercice 3)
Soit t un réel.

On note M (respectivement N) le point de coordonnées $(1, t)$ (respectivement $(-1, 0)$) et $\mathscr{C}$ le cercle unité.

(1) Déterminer $\mathscr{C} \cap (MN)$.

(2) Retrouver des formules connues.

Correction 2.6

★★ **à venir** ★★

Exercice 2.7 (Exercice 4)

Soient n un entier relatif et x un réel tels que

$$\cos x + \cos(nx) + \cos((2n-1)x) \neq 0.$$

Simplifier l'expression

$$\frac{\sin x + \sin(nx) + \sin((2n-1)x)}{\cos x + \cos(nx) + \cos((2n-1)x)}.$$

Correction 2.8

★★ **à venir** ★★

Exercice 2.9 (Exercice 5)

Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(nx)| \leqslant n\,|\sin x|\,.$$

Correction 2.10

★★ **à venir** ★★

Exercice 2.11 (Exercice 6)

Montrer

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \cos x^2 + \cos y^2 - \cos(xy) < 3.$$

Correction 2.12

★★ **à venir** ★★

Exercice 2.13 (Exercice 7)

Soient n un entier naturel et x un réel tels que $x \not\equiv 0 \left[\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right]$.

Montrer que la somme $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \tan\left(2^k x\right)$ est bien définie et calculer S.

Indication : montrer que pour tout réel θ tel que $\theta \not\equiv 0 \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a

$$\tan\theta = \operatorname{cotan}\theta - 2\operatorname{cotan}(2\theta)$$

en posant $\operatorname{cotan} = \dfrac{\cos}{\sin}$.

Correction 2.14
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 2.15 (Exercice 8)
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0\,;\pi[$.

Calculer
$$P = \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{x}{2^k}.$$

Correction 2.16
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 2.17 (Exercice 9)
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2^{n+1}}\right[$.

En utilisant l'exercice précédent, calculer
$$Q = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{\cos\left(2^k x\right)}\right).$$

Correction 2.18
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 2.19 (Exercice 10)
Soient x un réel et n un entier naturel.

Calculer
$$S = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(-3)^k} \cos^3\left(3^k x\right).$$

Indication : montrer $\forall \theta \in \mathbb{R}, \;\; \cos^3\theta = \frac{3}{4}\cos\theta + \frac{1}{4}\cos(3\theta)$.

Correction 2.20
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Chapitre 3

Nombres complexes

Exercice 3.1 (Exercice 1)
Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique et sous forme trigonométrique :

$$1+i \qquad 1+j \qquad \frac{i}{1-i} \qquad \frac{\sqrt{3}+3i}{1+i}.$$

Correction 3.2
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 3.3 (Exercice 2)
Calculer

$$i^{2022} \qquad j^{2022} \qquad (1+j)^{2022} \qquad (1+i)^{2022}.$$

Correction 3.4
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 3.5 (Exercice 3)

Écrire $z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$ sous forme trigonométrique.

Indication : déterminer $\cos(2\arg z)$.

Correction 3.6
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 3.7 (Exercice 4)
Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

(1) $z^2 + 2z + 5 = 0$

(2) $z^2 + (1+i)z - i = 0$

(3) $z^4 + z^2 + 1 = 0$

(4) $z^4 - 4iz^2 - 4 = 0$

Correction 3.8
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 3.9 (Exercice 5)
Résoudre le système suivant, d'inconnues $x, y \in \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} x + y = 1 + i \\ xy = 2 - i \end{cases}$$

Correction 3.10
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 3.11 (Exercice 6, CCP 2016)
On pose

$$\omega = \exp \frac{2i\pi}{7} \qquad S = \omega + \omega^2 + \omega^4 \qquad T = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6.$$

(1) Calculer $S + T$ et ST.

(2) En déduire les valeurs de S et T.

Correction 3.12
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 3.13 (Exercice 7)
Décrire l'ensemble $\mathbb{U}_{10}$ des racines dixièmes de l'unité.

Quels éléments de $\mathbb{U}_{10}$ sont racines carrées de l'unité ? racines cinquièmes ? racines septièmes ? racines quinzièmes ? racines vingtièmes ?

Correction 3.14
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 3.15 (Exercice 8)
Soient $x, y \in \mathbb{C}$.

Montrer les propositions suivantes :

(1) $|x| + |y| \leqslant |x + y| + |x - y|$

(2) $|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2\,|x|^2 + 2\,|y|^2$ « identité du parallélogramme » dans $\mathbb{C}$

Correction 3.16
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 3.17 (Exercice 9)
Soient A, B et C des points du plan d'affixes respectives a, b et c.

(1) Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si, et seulement si

$$a + jb + j^2c = 0.$$

Si $A = B = C$, on convient que le triangle ABC est équilatéral direct et indirect.

(2) Donner une CNS analogue pour que le triangle ABC soit équilatéral indirect.

(3) Montrer que le triangle ABC est équilatéral si, et seulement si

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca.$$

Correction 3.18
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 3.19 (Exercice 10)
Soit $(n, a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Calculer
$$\sum_{k=0}^{n} \sin(a + kb) \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} \cos(a + kb).$$

Correction 3.20
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 3.21 (Exercice 11)
Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

Développer
$$\sin(5\theta) \qquad \cos(5\theta) \qquad \tan(5\theta) \qquad \sin(7\theta) \qquad \cos(7\theta) \qquad \tan(7\theta).$$

Correction 3.22
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 3.23 (Exercice 12)
Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

Linéariser
$$\cos^5\theta \qquad \sin^5\theta \qquad \cos^4\theta\sin^2\theta.$$

Correction 3.24
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 3.25 (Exercice 13)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculer
$$S = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega \qquad \text{et} \qquad P = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega.$$

Correction 3.26
$\star\star$ à venir $\star\star$

Exercice 3.27 (Exercice 14)

Calculer $\cos \frac{2\pi}{5}$.

Indication : on pourra utiliser la somme $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_5} \omega$.

Correction 3.28
$\star\star$ à venir $\star\star$

Exercice 3.29 (Exercice 15)
Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

(1) $e^z = 0$

(2) $e^z = 1$

(3) $e^z = i$

(4) $e^z = 2j$

Correction 3.30
$\star\star$ à venir $\star\star$

Exercice 3.31 (Exercice 16)
Déterminer les nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$z + \overline{z} = |z| \,.$$

Correction 3.32
$\star\star$ à venir $\star\star$

Exercice 3.33 (Exercice 17)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(z+1)^n = (z-1)^n .$$

Correction 3.34
★★ à venir ★★

Exercice 3.35 (Exercice 18)
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.

Montrer que les racines du polynôme $P = aX^2 + bX + c$ ont leurs parties réelles respectives strictement négatives si, et seulement si, on a :

$$a, b, c \in \mathbb{R}_+^* \qquad \text{ou} \qquad a, b, c \in \mathbb{R}_-^*.$$

Correction 3.36
★★ à venir ★★

Exercice 3.37 (Exercice 19)
Soit $z \in \mathbb{C}$.

Donner une CNS pour que les points z, z^2 et z^4 soient alignés.

Correction 3.38
★★ à venir ★★

Exercice 3.39 (Exercice 20)
On pose $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ et $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

Montrer que la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{D} \\ z & \longmapsto & \dfrac{z-i}{z+i} \end{array}$ est une bijection de $\mathbb{H}$ vers $\mathbb{D}$.

NB : On vérifiera que la fonction f est bien définie.

Correction 3.40
★★ à venir ★★

Chapitre 4

Notions ensemblistes

Sommaire

4.1 Ensembles

Exercice 4.1 (Exercice 1)
Soient A, B et C des ensembles.

Montrer les propositions suivantes :

(1) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

(2) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

(3) $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$

(4) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Correction 4.2
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 4.3 (Exercice 2)
Soient E et F deux ensembles.

(1) Montrer l'équivalence

$$E \subseteq F \iff \mathscr{P}(E) \subseteq \mathscr{P}(F)$$

(2) La proposition suivante est-elle vraie ?

$$\mathscr{P}(E \cup F) = \mathscr{P}(E) \cup \mathscr{P}(F)$$

(3) La proposition suivante est-elle vraie ?

$$\mathscr{P}(E \cap F) = \mathscr{P}(E) \cap \mathscr{P}(F)$$

Correction 4.4
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 4.5 (Exercice 3)
On pose $\mathscr{C} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1\right\}$.

Existe-t-il deux parties $A, B \subseteq \mathbb{R}$ telles que $\mathscr{C} = A \times B$?

Correction 4.6
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 4.7 (Exercice 4, pas d'« ensemble de tous les ensembles »)
Montrer qu'il n'existe pas d'ensemble dont les éléments sont les ensembles.

Pour cela, on pourra supposer par l'absurde qu'un tel ensemble E existe, considérer l'ensemble

$$A = \{X \in E \mid X \notin X\}$$

et aboutir à une contradiction.

Correction 4.8
⋆⋆ à venir ⋆⋆

4.2 Fonctions

Exercice 4.9 (Exercice 5)
Soient E et F deux ensembles et deux fonctions $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$.

On suppose que la fonction $f \circ g \circ f$ est une bijection de E dans F.

Montrer que f et g sont des bijections.

Correction 4.10
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 4.11 (Exercice 6, images directes, images réciproques)
Soient E et F deux ensembles, la fonction $f : E \longrightarrow F$, la partie $A \subseteq E$ et la partie $B \subseteq F$.

(1) Montrer l'équivalence
$$A \subseteq f^{-1}(B) \iff f(A) \subseteq B.$$

(2) Quelle inclusion est toujours vraie entre A et $f^{-1}(f(A))$? Donner un contre-exemple pour l'autre inclusion.

(3) Même chose entre B et $f\left(f^{-1}(B)\right)$.

Correction 4.12
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 4.13 (Exercice 7)
Soient a et b des réels.

Donner une CNS sur a et b pour que la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax+b \end{array}$$

soit une bijection.

Déterminer alors sa bijection réciproque.

Correction 4.14
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 4.15 (Exercice 8)
Montrer que la fonction « sinus hyperbolique » :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{sh}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \end{array}$$

est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Correction 4.16
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 4.17 (Exercice 9)
Soit E un ensemble non-vide et $A \subseteq E$ une partie de E.

Montrer que la fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E)^2 \\ & X & \longmapsto & (X \cap A, X \cup A) \end{array}$$

est une injection.

Est-ce une surjection ?

Correction 4.18
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 4.19 (Exercice 10)
Soient E et F deux ensembles et deux fonctions $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$.

On suppose

$$g \circ f = \mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad f \circ g = \mathrm{id}_F.$$

Montrer que f et g sont des bijections, réciproques l'une de l'autre.

Correction 4.20
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 4.21 (Exercice 11, fonctions indicatrices)
Soient E un ensemble et $A, B, C \in \mathscr{P}(E)$.

(1) Montrer que la fonction

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \{0 ; 1\}^E \\ A & \longmapsto & \mathbb{1}_A \end{array}$$

est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

(2) Déterminer, en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$, les fonctions indicatrices des parties suivantes :

$$A \cap B \qquad A \cup B \qquad E \setminus A.$$

(3) Utiliser ce qui précède pour montrer l'égalité :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Correction 4.22
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 4.23 (Exercice 12)
Soient E et F deux ensembles non-vides.

Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(1) Il existe une injection $f : E \longrightarrow F$.

(2) Il existe une surjection $g : F \longrightarrow E$.

Correction 4.24
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 4.25 (Exercice 13)
Soit E un ensemble.

Montrer qu'il n'existe pas de surjection $f : E \longrightarrow \mathscr{P}(E)$.

Correction 4.26
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 4.27 (Exercice 14)
Soient E, E', F et F' des ensembles et $f : E \longrightarrow F$.

On suppose que l'ensemble E' est non-vide et que l'ensemble F' possède au moins deux éléments distincts.

On définit les fonctions :

$$F_1 : \begin{array}{ccc} \mathscr{F}(E', E) & \longrightarrow & \mathscr{F}(E', F) \\ \varphi & \longmapsto & f \circ \varphi \end{array} \qquad \text{et} \qquad F_2 : \begin{array}{ccc} \mathscr{F}(F, F') & \longrightarrow & \mathscr{F}(E, F') \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \circ f \end{array}$$

(1) Donner une CNS sur f pour que F_1 soit injective.

(2) Donner une CNS sur f pour que F_1 soit surjective.

(3) Donner une CNS sur f pour que F_2 soit injective.

(4) Donner une CNS sur f pour que F_2 soit surjective.

Correction 4.28
⋆⋆ à venir ⋆⋆

4.3 Ensembles ordonnés

Exercice 4.29 (Exercice 15, ordre produit sur $E \times F$)
Soient $(E, \leqslant_E)$ et $(F, \leqslant_F)$ deux ensembles ordonnés.

On définit une relation binaire sur $E \times F$ en posant :

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E \times F, \quad (x_1, y_1) \leqslant (x_2, y_2) \iff \begin{cases} x_1 \leqslant_E x_2 \\ y_1 \leqslant_F y_2 \end{cases}$$

Montrer que $\leqslant$ est une relation d'ordre sur $E \times F$.

Correction 4.30
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 4.31 (Exercice 16, ordre lexicographique sur $\mathbb{R}^2$)
On définit une relation binaire $\sqsubseteq$ sur $\mathbb{R}^2$ en posant :

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (x_1, y_1) \sqsubseteq (x_2, y_2) \iff \left| \begin{array}{l} x_1 < x_2 \\ \text{ou} \\ x_1 = x_2 \quad \text{et} \quad y_1 \leqslant y_2 \end{array} \right.$$

Montrer que $\sqsubseteq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$ et que cet ordre est total.

Correction 4.32
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 4.33 (Exercice 17)
Soient $A, B \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ deux parties de $\mathbb{R}$ admettant chacune une borne supérieure.

(1) Montrer que $A \cup B$ admet une borne supérieure, et déterminer cette borne supérieure en fonction de $\sup A$ et $\sup B$.

(2) Montrer que la partie
$$A + B = \{a + b\}_{(a,b) \in A \times B}$$
admet une borne supérieure, et déterminer cette borne supérieure en fonction de $\sup A$ et $\sup B$.

Correction 4.34
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 4.35 (Exercice 18)
Soit X un ensemble.

On considère l'ensemble $E = \mathscr{P}(X)$, ordonné par la relation d'inclusion $\subseteq$.

(1) Soient $A, B \in E$. La partie $\{A\ ;\ B\} \subseteq E$ admet-elle une borne supérieure dans E ? une borne inférieure dans E ?

(2) Soit $(A_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E. Cette famille admet-elle une borne supérieure dans E ? une borne inférieure dans E ?

NB : dans le cas présent, où tous les ensembles A_i sont des parties de E, on convient que l'intersection $\bigcap_{i \in I} A_i$ vaut E si I est vide.

Correction 4.36
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 4.37 (Exercice 19)
On considère la droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}$, munie de sa relation d'ordre usuelle.

Montrer que toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Correction 4.38
⋆⋆ à venir ⋆⋆

4.4 Entiers naturels

Exercice 4.39 (Exercice 20, descente infinie de Fermat)
Montrer qu'il n'existe pas de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ d'entiers naturels strictement décroissante.

Correction 4.40
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 4.41 (Exercice 21)
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \end{cases}$$

Montrer la proposition suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 2^{n-1}.$$

Correction 4.42
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Chapitre 5

Suites

Exercice 5.1 (Exercice 1, exemples fondamentaux)
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Étudier la limite des suites suivantes en fonction de λ :

$$\left(n^{\lambda}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \qquad \left(\ln^{\lambda} n\right)_{n\in[\![2;+\infty[\![} \qquad (\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (n!)_{n\in\mathbb{N}}$$

Correction 5.2
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 5.3 (Exercice 2)
Étudier la convergence (et déterminer la limite éventuelle) des suites de terme général :

(1) $u_n = \dfrac{n! + (-1)^n \cos n}{n! + \cos n}$

(2) $v_n = \dfrac{(-1)^n n! + \cos n}{n! + \cos n}$

(3) $w_n = \dfrac{(-1)^n n! + \cos n}{(n+1)! + \cos(n+1)}$

(4) $x_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} t^n \sin t \,\mathrm{d}t$

Correction 5.4
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 5.5 (Exercice 3, moyennes)
On définit, pour tous réels strictement positifs a et b :

- leur moyenne arithmétique : $m_a(a,b) = \dfrac{a+b}{2}$;
- leur moyenne géométrique : $m_g(a,b) = \sqrt{ab}$;
- leur moyenne harmonique : $m_h(a,b) = \dfrac{2ab}{a+b}$.

(1) Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'on a

$$m_g\left(a^{-1}, b^{-1}\right)^{-1} = m_g(a,b) \qquad \text{et} \qquad m_a\left(a^{-1}, b^{-1}\right)^{-1} = m_h(a,b)$$

et

$$m_h(a,b) \leqslant m_g(a,b) \leqslant m_a(a,b) \qquad \text{et} \qquad m_g\left(m_h(a,b), m_a(a,b)\right) = m_g(a,b).$$

On se fixe pour la suite deux réels x et y tels que $0 < x < y$.

(2) On pose

$$\begin{cases} x_0 = x \\ y_0 = y \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \ \begin{cases} x_{n+1} = m_g(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = m_a(x_n, y_n) \end{cases}$$

Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et de même limite.

(3) On pose

$$\begin{cases} u_0 = x \\ v_0 = y \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \ \begin{cases} u_{n+1} = m_h(u_n, v_n) \\ v_{n+1} = m_a(u_n, v_n) \end{cases}$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et de même limite. Quelle est cette limite ?

Correction 5.6
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 5.7 (Exercice 4, série harmonique)
On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

(1) Montrer que la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.

(2) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}.$$

(3) En déduire la limite de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction 5.8
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 5.9 (Exercice 5)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

Quelles implications sont vraies entre les propositions suivantes ?

(1) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

(2) $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$

Correction 5.10
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 5.11 (Exercice 6)
Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}.$$

Montrer que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que sa limite est réelle.

Correction 5.12
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 5.13 (Exercice 7)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

(1) Montrer que si $(u_n)_n$ est décroissante et si on a $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \in \mathbb{N}$ alors $(u_n)_n$ est stationnaire.

(2) Montrer que si $(u_n)_n$ est convergente et si on a $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \in \mathbb{Z}$ alors $(u_n)_n$ est stationnaire.

Correction 5.14
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 5.15 (Exercice 8)
Soit $A \subseteq \mathbb{R}$.

(1) Montrer que si A n'est pas majorée, alors il existe une suite d'élément de A qui tend vers $+\infty$.

(2) Montrer que si A est majorée, alors il existe une suite d'éléments de A qui tend vers $\sup A$.

Correction 5.16
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 5.17 (Exercice 9)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

Montrer que $(u_n)_n$ ne tend pas vers $+\infty$ si, et seulement si, elle admet une suite extraite majorée.

Correction 5.18
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 5.19 (Exercice 10)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Montrer que $(u_n)_n$ tend vers ℓ si, et seulement si, de toute suite extraite de $(u_n)_n$ on peut extraire une suite qui tend vers ℓ.

Correction 5.20
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 5.21 (Exercice 11, théorème des segments emboîtés)
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ a_n \leqslant b_n.$$

On suppose que la suite des segments $([a_n\ ;\ b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ [a_{n+1}\ ;\ b_{n+1}] \subseteq [a_n\ ;\ b_n]$$

et que la suite des longueurs des segments tend vers 0, c'est-à-dire :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} b_n - a_n = 0.$$

Montrer que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n\ ;\ b_n]$ est un singleton.

Correction 5.22
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 5.23 (Exercice 12)

(1) Soit A une partie de $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \exists a, b \in A,\ \ a < x < b \qquad \text{et} \qquad \forall a, b \in A,\ \ \frac{a+b}{2} \in A.$$

Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$.

(2) Retrouver le fait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Correction 5.24
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 5.25 (Exercice 13, moyenne de Cesàro d'une suite)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles et ℓ un réel.

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ U_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k.$$

(1) Montrer que si $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$, alors $(U_n)_n$ diverge vers $+\infty$.

(2) Montrer que si $(u_n)_n$ converge vers ℓ, alors $(U_n)_n$ converge vers ℓ.

(3) Montrer que les implications réciproques des propositions ci-dessus ne sont pas toujours vraies.

(4) Montrer que si la suite $(v_{n+1} - v_n)_n$ converge vers ℓ, alors $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{v_n}{n} = \ell$.

(5) On suppose qu'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \in \mathbb{R}_+^* \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = +\infty.$$

Montrer :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{v_n} = +\infty.$$

(6) On suppose qu'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \in \mathbb{R}_+^* \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \ell.$$

Montrer :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{v_n} = \ell.$$

(7) Calculer $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!}$.

(8) Calculer $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^2}$.

Correction 5.26
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 5.27 (Exercice 14)

(1) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$x + \ln x = n$$

admet une unique solution.

Dans la suite, on note u_n cette unique solution et on s'intéresse à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

(2) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

(3) Déterminer sa limite.

Correction 5.28
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Chapitre 6

Algèbre générale

Sommaire

6.1 Lois de composition internes

Exercice 6.1 (Exercice 1)
On considère la loi de composition interne $*$ sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x * y = \ln\left(e^x + e^y\right).$$

Est-elle associative ? commutative ? Possède-t-elle un élément neutre ?

Correction 6.2
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 6.3 (Exercice 2)
Soit E un ensemble muni d'une loi $*$.

On suppose que la loi $*$ est associative et qu'elle possède un élément neutre e.

Un élément $x \in E$ est dit idempotent s'il vérifie $x * x = x$.

(1) Soient $x, y \in E$. On suppose que x et y sont idempotents et qu'ils commutent. Montrer que $x * y$ est idempotent.

(2) Soit $x \in E$ un élément inversible et idempotent. Montrer que son inverse x^{-1} est idempotent.

Correction 6.4
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 6.5 (Exercice 3, plus difficile)
Soient E un ensemble fini et $*$ une loi de composition interne associative sur E.

Soit $x \in E$. On suppose que x est régulier pour la loi $*$.

(1) Montrer que toute puissance de x est régulière :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ x^n \text{ est régulier.}$$

(2) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre.

(3) Montrer que x est inversible.

Correction 6.6
⋆⋆ à venir ⋆⋆

6.2 Groupes

Exercice 6.7 (Exercice 4, exemple important)
Soit E un ensemble.

On appelle permutation de E toute bijection $f : E \longrightarrow E$.

On note S_E l'ensemble des permutations de E.

Montrer que $(S_E, \circ)$ est un groupe. Est-il commutatif ?

Correction 6.8
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 6.9 (Exercice 5)
Montrer que l'ensemble des applications de la forme

$$\begin{array}{rccc} f_{ab}: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & az+b \end{array}$$

avec $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ est un groupe pour la composition.

Correction 6.10
★★ à venir ★★

Exercice 6.11 (Exercice 6)
On pose $E = \{0 ; 1 ; 2\}$.

(1) Combien y a-t-il de lois de composition internes sur E ?

(2) Combien y a-t-il de lois de composition internes commutatives sur E ?

(3) Combien y a-t-il de lois de composition internes admettant 0 comme élément neutre sur E ?

(4) Combien y a-t-il de lois de composition internes « unitaires » (c'est-à-dire admettant un élément neutre) sur E ?

(5) Combien y a-t-il de structures de groupe pour lesquelles 0 est l'élément neutre sur E ?

(6) Combien y a-t-il de structures de groupe sur E ?

(7) Ces dernières sont-elles commutatives ?

(8) On munit E de sa structure de groupe telle que 0 soit l'élément neutre. Quels sont les sous-groupes de E ? Déterminer $\mathrm{Aut}\,(E)$.

Correction 6.12
★★ à venir ★★

Exercice 6.13 (Exercice 7)
On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Rappeler les structures naturelles de groupe de $\mathbb{C}^*$ et $\mathbb{U}$ et montrer que la fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ & z & \longmapsto & \dfrac{z}{|z|} \end{array}$$

est un morphisme de groupes.

Correction 6.14
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 6.15 (Exercice 8, intersection de sous-groupes)
Soient G un groupe et $(H_i)_{i\in I}$ une famille de sous-groupes de G.

Montrer que l'intersection $\bigcap_{i\in I} H_i$ est un sous-groupe de G.

Correction 6.16
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 6.17 (Exercice 9)
Soit $(G, *)$ un groupe d'élément neutre e tel que

$$\forall g \in G, \quad g * g = e.$$

Montrer que G est abélien.

Correction 6.18
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 6.19 (Exercice 10)
Soit $(G, *)$ un groupe de cardinal pair et d'élément neutre e.

(1) Vérifier que la relation $\mathscr{R}$ sur G définie par

$$\forall g, h \in G, \quad g \mathscr{R} h \iff \left| \begin{array}{l} g = h \\ \text{ou} \\ g = h^{-1} \end{array} \right.$$

est une relation d'équivalence.

(2) En déduire que G possède un élément g tel que $g \neq e$ et $g * g = e$.

Correction 6.20
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 6.21 (Exercice 11)
Soit G un groupe et g un élément de G.

(1) Montrer qu'il existe un unique morphisme de groupes $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow G$ tel que

$$\varphi(1) = g.$$

Que vient-on de montrer à propos de l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G) & \longrightarrow & G \\ \varphi & \longmapsto & \varphi(1) \end{array} \quad ?$$

(2) Montrer par des exemples que l'image d'un morphisme de groupes $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow G$ peut être finie ou infinie.

Correction 6.22
⋆⋆ à venir ⋆⋆

6.3 Anneaux

Exercice 6.23 (Exercice 12)
Quels sont les sous-anneaux de $\mathbb{Z}$?

Correction 6.24
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 6.25 (Exercice 13)
Montrer que toute structure d'anneau sur un ensemble à trois éléments est une structure d'anneau commutatif.

Correction 6.26
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 6.27 (Exercice 14)
Montrer que l'ensemble des suites réelles convergentes (indicées par $\mathbb{N}$) est un sous-anneau de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Que dire des suites complexes convergentes ?

Correction 6.28
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 6.29 (Exercice 15)

(1) Les anneaux $(\mathbb{Z}, +, \times)$ et $(\mathbb{Q}, +, \times)$ sont-ils isomorphes ?

(2) Les anneaux $(\mathbb{R}, +, \times)$ et $(\mathbb{Q}, +, \times)$ sont-ils isomorphes ?

(3) Les anneaux $(\mathbb{R}, +, \times)$ et $(\mathbb{C}, +, \times)$ sont-ils isomorphes ?

Correction 6.30
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 6.31 (Exercice 16)
On pose :

$$\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{x + \sqrt{2}y\right\}_{(x,y)\in\mathbb{Z}^2} = \left\{a \in \mathbb{R} \;\middle|\; \exists x, y \in \mathbb{Z},\ \ a = x + \sqrt{2}y\right\}.$$

(1) Montrer que $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ est un anneau commutatif.

(2) On pose :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z},\ \ N\left(x + \sqrt{2}y\right) = x^2 - 2y^2.$$

Montrer que cela définit une application $N : \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] \longrightarrow \mathbb{Z}$.

(3) Montrer que si a et b sont des éléments de $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ alors

$$N(ab) = N(a)\,N(b).$$

(4) Montrer que

$$\forall a \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right],\ \ a = 0 \iff N(a) = 0.$$

(5) Montrer que

$$\forall a \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right],\ \ a \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]^{\times} \iff N(a) \in \mathbb{Z}^{\times}.$$

(6) On pose

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$$

Montrer que pour tout entier naturel n, l'élément $u_n + \sqrt{2}v_n$ est inversible dans $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$.

Correction 6.32
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 6.33 (Exercice 17)
Soient $(A, +, \times)$ un anneau intègre et $a, b \in A$.

On dit que a divise b et on note $a \mid b$ si on a :

$$\exists c \in A,\ \ ac = b.$$

Montrer :

$$\left(\exists \lambda \in A^{\times},\ \ a = \lambda b\right) \iff \begin{cases} a \mid b \\ b \mid a \end{cases}$$

Correction 6.34
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 6.35 (Exercice 18)
On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux :

$$\mathbb{D} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \exists \alpha \in \mathbb{N},\ \ \exists \lambda \in \mathbb{Z},\ \ x = \frac{\lambda}{10^{\alpha}} \right\}.$$

(1) Montrer que $\mathbb{D}$ est naturellement muni d'une structure d'anneau.

(2) Quels sont ses éléments inversibles ?

Correction 6.36
★★ à venir ★★

Exercice 6.37 (Exercice 19)
Soit $(A, +, \times)$ un anneau. On note 0 et 1 ses éléments neutres.

Un élément $a \in A$ est dit nilpotent s'il vérifie :

$$\exists n \in \mathbb{N}^*, \quad a^n = 0.$$

(1) Si A est intègre, quels sont ses éléments nilpotents ?

(2) Soient $a, b \in A$. On suppose que a et b sont nilpotents et qu'ils commutent.

Montrer que $a + b$ et ab sont nilpotents.

(3) Soit $a \in A$ un élément nilpotent.

Montrer que $1 + a$ est inversible et déterminer son inverse.

Correction 6.38
★★ à venir ★★

6.4 Corps

Exercice 6.39 (Exercice 20)
Quels sont les sous-corps de $\mathbb{Q}$?

Correction 6.40
★★ à venir ★★

Exercice 6.41 (Exercice 21)
On pose :

$$\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{x + \sqrt{2}y\right\}_{(x,y)\in\mathbb{Q}^2} = \left\{a \in \mathbb{R} \;\middle|\; \exists x, y \in \mathbb{Q}, \quad a = x + \sqrt{2}y\right\}.$$

Montrer que $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$ est un corps. Quels sont ses sous-corps ?

Correction 6.42
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 6.43 (Exercice 22)
Soient K un corps et A un anneau non-nul.

Montrer que tout morphisme d'anneaux $\varphi : F \longrightarrow A$ est injectif.

Correction 6.44
⋆⋆ à venir ⋆⋆

Exercice 6.45 (Exercice 23)
Montrer que tout anneau intègre fini est un corps.

Correction 6.46
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Chapitre 7

Limites de fonctions, continuité

Sommaire

7.1 Limites & continuité

Exercice 7.1 (Exercice 1)
On admet $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} t \ln t = 0$.

Déterminer, lorsqu'elle existent, les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^2 - 2x + x \ln x$

(2) $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \dfrac{x^2 + x}{x^6 + 2x^5 - 2x^3 - x^2}$ avec a valant $+\infty$, puis $-\infty$, puis 0, puis 1, puis -1.

On commencera par déterminer l'ensemble de définition du quotient.

(3) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} x^x$

(4) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^{-1/\ln x}$

(5) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$

(6) $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \ln x \times \ln(\ln x)$

Correction 7.2

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 7.3 (Exercice 2)

(1) Quel est l'ensemble de définition de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x \ln x}{x-1}$?

(2) En quels points peut-on prolonger f par continuité ?

Correction 7.4

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 7.5 (Exercice 3)

Soient $T \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction T-périodique.

(1) Montrer que f est continue si,et seulement si, sa restriction $f\big|_{[0;T]}$ est continue.

(2) Montrer que f admet une limite en $+\infty$ si, et seulement si, elle est constante.

(3) Soit f la fonction 2-périodique telle que

$$\forall x \in [0\,;1[\,,\quad f(x) = 1 - x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in [1\,;2[\,,\quad f(x) = x - 1.$$

Que dire de f (continuité, limite en $+\infty$, en $-\infty$) ?

Correction 7.6

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 7.7 (Exercice 4)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose

$$\begin{array}{rccc} f_\alpha : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^\alpha \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor \end{array}$$

(1) On suppose dans cette question que $\alpha = 0$. Déterminer en quels points f_0 est continue, continue à droite, continue à gauche.

(2) Faire la même chose pour f_α (où α est un réel quelconque).

(3) Étudier la limite de f_α en 0 et en $+\infty$.

Correction 7.8
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 7.9 (Exercice 5)
On pose

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array}$$

Déterminer les prolongements continus de f à $\mathbb{R}$.

Correction 7.10
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 7.11 (Exercice 6, CCP MPI 2023)
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(u_n)_n$ en posant :

$$\begin{cases} u_0 = x_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \operatorname{Arctan} u_n \end{cases}$$

(1) Démontrer que la suite $(u_n)_n$ est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de $(u_n)_n$.

(2) Montrer que $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

(3) Déterminer l'ensemble des fonctions continues $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = h(\operatorname{Arctan} x).$$

Correction 7.12
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 7.13 (Exercice 7)
Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ un endomorphisme de groupe (la loi étant l'addition usuelle).

On pose $\alpha = \varphi(1)$.

(1) Déterminer, en fonction de α, la restriction de φ à $\mathbb{Z}$.

(2) Déterminer, en fonction de α, la restriction de φ à $\mathbb{Q}$.

(3) On suppose φ continu. Déterminer φ en fonction de α.

(4) Quels sont les endomorphismes continus du groupe $\mathbb{R}$?

Correction 7.14
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 7.15 (Exercice 8)
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soient $f : [a\ ;b] \longrightarrow [a\ ;b]$ continue et $(u_n)_n$ une suite d'éléments de $[a\ ;b]$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = f(u_n)\,.$$

On suppose que $(u_n)_n$ est convergente.

Montrer que sa limite ℓ est un point fixe de f (on n'oubliera pas de justifier que f est bien définie en ℓ).

Correction 7.16
⋆⋆ À venir ⋆⋆

7.2 Principaux théorèmes

Exercice 7.17 (Exercice 9)
Démontrer le Théorème 7.99 (inutile de traiter tous les cas).

Correction 7.18
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 7.19 (Exercice 10, très classique)
Soit $f : [0\ ;1] \longrightarrow [0\ ;1]$ continue.

Montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire :

$$\exists x \in [0\ ;1]\,,\ \ f(x) = x.$$

Correction 7.20
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 7.21 (Exercice 11)
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et décroissante.

Montrer que f admet un unique point fixe.

Correction 7.22
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Exercice 7.23 (Exercice 12)
Montrer que la fonction tangente admet une infinité de points fixes, c'est-à-dire qu'il existe une infinité de réels x tels que $\tan x = x$.

Correction 7.24
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Exercice 7.25 (Exercice 13)
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et périodique.

Montrer que f est bornée.

Correction 7.26
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Exercice 7.27 (Exercice 14)
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

On suppose :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{et} \lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

Montrer que f admet un minimum (global).

Correction 7.28
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Exercice 7.29 (Exercice 15)
Soient $f, g \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On suppose f continue et g bornée.

Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées.

Correction 7.30
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 7.31 (Exercice 16, démonstration du Théorème 7.119)
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ injective et continue.

On veut montrer dans les questions (1) à (3) que f est monotone en raisonnant par l'absurde. Pour cela, on suppose f non-monotone.

(1) Montrer qu'il existe des éléments $a, b, c, d \in I$ tels que

$$\begin{cases} a < b \\ c < d \\ f(a) < f(b) \\ f(c) > f(d). \end{cases}$$

(2) On pose

$$g : \begin{array}{ccc} [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(ta + (1-t)c) - f(tb + (1-t)d) \end{array}$$

Montrer :

$$\exists t_0 \in [0\,;1], \quad g(t_0) = 0.$$

(3) Conclure.

(4) Montrer par un exemple qu'on ne pourrait conclure sans supposer que f est définie sur un intervalle (c'est-à-dire donner une fonction $f_1 : J \longrightarrow \mathbb{R}$ injective, continue et non-monotone, où J est une partie quelconque de $\mathbb{R}$).

(5) Montrer par un exemple qu'on ne pourrait pas conclure sans l'hypothèse de continuité de f (c'est-à-dire donner une fonction $f_2 : K \longrightarrow \mathbb{R}$ injective et non-monotone, où K est un intervalle de $\mathbb{R}$).

Correction 7.32
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 7.33 (Exercice 17)
Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$. Soit $f :]a\,;b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

On suppose que f possède la même limite en a et en b.

Montrer que f n'est pas injective.

Correction 7.34
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 7.35 (Exercice 18)
Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \geqslant \lambda |x - y| .$$

Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Correction 7.36
⋆⋆ À venir ⋆⋆

7.3 Fonctions circulaires réciproques

Exercice 7.37 (Exercice 19)
Montrer

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{-\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Correction 7.38
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 7.39 (Exercice 20)
Soient $x, y \in \,]-1\,;\,1[$.

(1) Montrer
$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y = \operatorname{Arctan} \frac{x+y}{1-xy}.$$

(2) Montrer
$$\operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}.$$

Correction 7.40
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 7.41 (Exercice 21)
Soit $x \in \mathbb{R}$.

Dire pour quelles valeurs de x les expressions suivantes sont bien définies et simplifier ces expressions :

(1) $\cos(\operatorname{Arctan} x)$

Indication : utiliser la relation entre $\tan^2$ et $\cos^2$.

(2) $\sin(\operatorname{Arctan} x)$

(3) $\sin(2 \operatorname{Arctan} x)$

Quelle formule reconnaît-on ?

(4) $\cos(2 \operatorname{Arctan} x)$

Quelle formule reconnaît-on ?

(5) $\operatorname{Arctan} \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

Correction 7.42
⋆⋆ À venir ⋆⋆

7.4 Fonctions lipschitziennes

Exercice 7.43 (Exercice 22)
Soient $k \in [0\,;1[$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ k-lipschitzienne.

(1) Montrer que f admet un point fixe.

(2) Montrer que ce point fixe est unique.

(3) Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

Montrer que $(u_n)_n$ converge vers le point fixe de f.

Correction 7.44
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 7.45 (Exercice 23)
Soient $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant \lambda \leqslant b$. Soit $f : [a\,;b] \longrightarrow [a\,;b]$ 1-lipschitzienne.

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par : $\begin{cases} u_0 = \lambda \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n + f\left(u_n\right)}{2} \end{cases}$

(1) Justifier que la suite $(u_n)_n$ est bien définie.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $u_{n+2} - u_{n+1}$ est de même signe (au sens large) que $u_{n+1} - u_n$.

(3) Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge vers un point fixe de f.

Correction 7.46
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Chapitre 8

Arithmétique

Sommaire

8.1 Compléments sur les groupes

⋆⋆ Les exercices 1 et 2 étaient en fait les démonstrations de la Définition/Proposition 8.17 **et du Théorème** 8.21 **⋆⋆**

Exercice 8.1 (Exercice 3)
Soit $(G,+)$ un groupe abélien. On note E l'ensemble de ses sous-groupes.

On munit E de la loi de composition interne $+$ (somme de sous-groupes) et de la relation d'ordre $\subseteq$.

Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $H_1, \dots, H_r$ des sous-groupes de G.

(1) $(E,+)$ est-il un groupe ?

(2) Montrer que $\{H_1 \,;\, \dots \,;\, H_r\}$ admet une borne inférieure et une borne supérieure dans E.

Correction 8.2
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 8.3 (Exercice 4, familles d'entiers presque tous nuls)
Soit I un ensemble.

On appelle support d'une famille d'entiers relatifs $\mathscr{F} = (x_i)_{i\in I} \in \mathbb{Z}^I$ l'ensemble :

$$\operatorname{supp} \mathscr{F} = \{i \in I \mid x_i \neq 0\}\,.$$

On dit que $\mathscr{F}$ est une famille d'entiers presque tous nuls si son support est un ensemble fini, c'est-à-dire si les termes de $\mathscr{F}$ sont tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux. L'ensemble de ces familles est noté $\mathbb{Z}^{(I)}$:
$$\mathbb{Z}^{(I)} = \left\{\mathscr{F} \in \mathbb{Z}^I \;\middle|\; \operatorname{Card} \operatorname{supp} \mathscr{F} < +\infty\right\}.$$

Montrer que $\mathbb{Z}^{(I)}$ est un sous groupe de $\left(\mathbb{Z}^I, +\right)$.

Correction 8.4
⋆⋆ À venir ⋆⋆

8.2 Arithmétique

Exercice 8.5 (Exercice 5)
Calculer :

(1) $100^{1234567}$ modulo 13

(2) $1234^{12345678910}$ modulo 21

(3) $1234^{12345^{123456}}$ modulo 256

(4) $1000^{1000^{1000}}$ modulo 17

Indication : on pourra utiliser le petit théorème de Fermat.

Correction 8.6 (1)
On a $100 \equiv 9\,[13]$.

Or on a $9^2 \equiv 3\,[13]$, $9^3 \equiv 1\,[13]$ et $9^4 \equiv 9\,[13]$.

Donc, avec N un entier relatif, 9^N modulo 13 ne dépend que de N modulo 3.

Or $1234567 \equiv 1\,[3]$.

Donc $100^{1234567} \equiv 9^1\,[13] \equiv 9\,[13]$.

Exercice 8.7 (Exercice 6)
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$.

(1) Montrer que 8 divise $a^2 - 1$ si, et seulement si, a est impair.

(2) Montrer que 7 divise $a^2 + b^2$ si, et seulement si, 7 divise a et b.

Correction 8.8

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 8.9 (Exercice 7)

(1) Soient n et α deux entiers supérieurs ou égaux à 2. Montrer que si n^α est un nombre premier alors $n = 2$ et α est un nombre premier. La réciproque est-elle vraie ?

(2) Soit β un entier naturel. Montrer que si $2^\beta + 1$ est premier alors β est une puissance de 2.

Correction 8.10

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 8.11 (Exercice 8)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note u_n l'entier naturel dont l'écriture en base 10 possède 3^n chiffres, tous égaux à 1 :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = \underbrace{1111\ldots1}_{3^n \text{ chiffres}}.$$

Déterminer la valuation 3-adique de u_n.

Indication : remarquer $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = u_n\left(1 + 10^{3^n} + 10^{3^n\times 2}\right)$.

Correction 8.12

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 8.13 (Exercice 9)

Soit $n \in \mathbb{N}$.

(1) Justifier que $n + 1$ et $2n + 1$ sont premiers entre eux.

(2) Montrer que $n + 1$ divise $\binom{2n}{n}$.

Indication : considérer $\binom{2n+1}{n+1}$.

Correction 8.14
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 8.15 (Exercice 10)
Soient $m, n \in [\![2\,;+\infty[\![$.

On suppose $\dfrac{\ln m}{\ln n} \in \mathbb{Q}$.

Montrer que m et n ont les mêmes diviseurs premiers.

Correction 8.16
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 8.17 (Exercice 11)
Trouver un entier $x \in \mathbb{Z}$ tel que $\begin{cases} x \equiv 2\,[7] \\ x \equiv 3\,[9] \end{cases}$

Correction 8.18
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 8.19 (Exercice 12)
Trouver un entier $x \in \mathbb{Z}$ tel que $\begin{cases} x \equiv 5\,[7] \\ x \equiv 10\,[16] \end{cases}$

Correction 8.20
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 8.21 (Exercice 13)
Trouver un entier $x \in \mathbb{Z}$ tel que $\begin{cases} x \equiv 5\,[9] \\ x \equiv 10\,[15] \end{cases}$

Correction 8.22
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 8.23 (Exercice 14)
Soit $p \in \mathbb{P}$.

(1) Montrer $\forall k \in [\![1\ ;\ p-1]\!]\,,\ \ p \mid \dbinom{p}{k}$.

(2) En déduire $\forall k \in [\![0\ ;\ p-1]\!]\,,\ \ \dbinom{p-1}{k} \equiv (-1)^k\ [p]$.

Correction 8.24
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 8.25 (Exercice 15)
Soit $n \in [\![2\ ;\ +\infty[\![$.

Montrer

$$n \in \mathbb{P} \iff \forall k \in [\![1\ ;\ n-1]\!]\,,\ \ n \mid \binom{n}{k}.$$

Correction 8.26
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 8.27 (Exercice 16, valuations p-adiques des rationnels)

(1) Soit $a \in \mathbb{P}$. Montrer qu'on définit une fonction $w_p : \mathbb{Q}^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ en posant :

$$\forall a \in \mathbb{Z}^*,\ \ \forall b \in \mathbb{N}^*,\ \ w_p\left(\frac{a}{b}\right) = v_p\,(a) - v_p\,(b)\,.$$

Indication : il s'agit de montrer que l'image d'un rationnel ne dépend pas de l'écriture $\dfrac{a}{b}$ choisie.

(2) En utilisant l'Exercice 8.3, montrer que les groupes $(\mathbb{Q}^*, \times)$ et $\left(\mathbb{Z}^{(\mathbb{P})}, +\right)$ sont isomorphes.

Correction 8.28
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 8.29 (Exercice 17)
On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite strictement croissante des nombres premiers (c'est-à-dire $p_0 = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, ...).

(1) Montrer $\forall n \in \mathbb{N},\ \ p_{n+1} \leqslant p_0 \times p_1 \times \cdots \times p_n + 1$.

(2) En déduire $\forall n \in \mathbb{N},\ \ p_n \leqslant 2^{2^n}$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on note $\pi(N)$ le nombre de nombres premiers inférieurs à N :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \ \pi(N) = \operatorname{Card} \mathbb{P} \cap [\![1\ ;\ N]\!]\,.$$

(3) Montrer l'encadrement $\forall N \in [\![2\ ;\ +\infty[\![\,,\ \ \log_2 \circ \log_2(N) \leqslant \pi(N) \leqslant N$.

Remarque : le logarithme en base 2 est la fonction $\log_2 : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est la bijection réciproque de la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & 2^x \end{array}$$

On montre facilement : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \log_2 x = \dfrac{\ln x}{\ln 2}$.

Correction 8.30
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 8.31 (Exercice 18)
Soit p un nombre premier impair.

On suppose que -1 est un carré modulo p :

$$\exists x \in \mathbb{Z},\ \ -1 \equiv x^2\ [p]\,.$$

Montrer $p \equiv 1\ [4]$.

Indication : utiliser le petit théorème de Fermat.

Remarque : la CN prouvée est en fait une CNS : $\left[\exists x \in \mathbb{Z},\ \ -1 \equiv x^2\ [p]\right] \iff p \equiv 1\ [4]$.

Correction 8.32
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 8.33 (Exercice 19)

(1) Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p \equiv 3\,[4]$.

(2) En utilisant l'exercice précédent, montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p \equiv 1\,[4]$.

Indications :

(1) S'intéresser aux diviseurs premiers de $4\,(n!) - 1$ avec $n \in \mathbb{N}$.

(2) S'intéresser aux diviseurs premiers de $(n!)^2 + 1$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Correction 8.34

$\star\star$ **À venir** $\star\star$

Chapitre 9

Fonctions dérivables

Sommaire

9.1 Étude locale

Exercice 9.1 (Exercice 1)
Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes (en précisant leurs ensembles de définition) :

(1) $f : x \longmapsto \cos\sqrt{x}$

(2) $f : x \longmapsto \sin|x|$

(3) $f : x \longmapsto \ln\left(1+\sqrt{x}\right)$

(4) $f : x \longmapsto x\,|x|$

(5) $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 - x^3}$

(6) $f : x \longmapsto (1-x)\operatorname{Arccos} x$

Correction 9.2
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Exercice 9.3 (Exercice 2)
Montrer que la fonction

$$f : x \longmapsto \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\right)$$

est définie sur $\mathbb{R}^*$ et se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Correction 9.4
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 9.5 (Exercice 3)
Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

On suppose que f est dérivable en a.

Déterminer $\displaystyle\lim_{\substack{h \longrightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+2h) - f(a-h)}{h}$.

Correction 9.6
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 9.7 (Exercice 4)
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer la dérivée k-ème des fonctions suivantes :

(1) $f : x \longmapsto \ln x$

(2) $f : x \longmapsto x^2 \ln x$

(3) $f : x \longmapsto \cos^4 x$

(4) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(5) $f : x \longmapsto \dfrac{x-1}{x+1}$

On simplifiera les résultats en utilisant des factorielles si c'est utile.

Correction 9.8
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 9.9 (Exercice 5)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

(1) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer la dérivée k-ème de $f : x \longmapsto x^n$.

(2) En calculant de deux façons la dérivée n-ème de $g : x \longmapsto x^{2n}$, calculer :

$$S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 .$$

Correction 9.10
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

9.2 Étude globale

Exercice 9.11 (Exercice 6)
Étudier la fonction $f : x \longmapsto \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

On précisera l'ensemble de définition de f, en quels points f est continue, en quels points f est dérivable, les variations de f (avec ses limites), et le graphe de f.

Correction 9.12
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Exercice 9.13 (Exercice 7)
Dessiner le graphe de la fonction :

$$f : x \longmapsto \operatorname{Arccos}\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}} - \operatorname{Arcsin}\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}.$$

Correction 9.14
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Exercice 9.15 (Exercice 8)
Montrer

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1-x}{2\sqrt{x}}\right)$$

de deux façons :

(1) En calculant $\tan\left(\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right)$.

(2) En dérivant.

Correction 9.16
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 9.17 (Exercice 9)
Soit $\alpha \in \left]1\,;+\infty\right[$.

(1) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\quad |f(x) - f(y)| \leqslant |x-y|^\alpha\,.$$

Indication : montrer qu'une telle fonction est nécessairement dérivable.

(2) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^*,\quad |f(x) - f(y)| \leqslant |x-y|^\alpha\,.$$

Correction 9.18
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 9.19 (Exercice 10)
Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que :

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = 0.$$

(1) Montrer que f est bornée.

(2) À l'aide du théorème de Rolle, montrer :

$$\exists c \in \mathbb{R}_+^*,\quad f'(c) = 0.$$

Correction 9.20
★★ À venir ★★

Exercice 9.21 (Exercice 11)
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f, g \in \mathscr{F}([a\,;\,b], \mathbb{R})$ continues.

On suppose que f et g sont dérivables sur $]a\,;\,b[$.

Montrer :
$$\exists c \in \left]a\,;\,b\right[,\quad f'(c)\,(g(b) - g(a)) = g'(c)\,(f(b) - f(a))\,.$$

Correction 9.22
★★ À venir ★★

Exercice 9.23 (Exercice 12)
On pose :
$$\begin{array}{rccc} f: & [0\,;\,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^x}{x+2} \end{array}$$

(1) Soit $a \in [0\,;\,1]$. Montrer que l'on définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0\,;\,1]^{\mathbb{N}}$ en posant :
$$u_0 = a \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = f(u_n)\,.$$

(2) Montrer que f est $\dfrac{2\mathrm{e}}{9}$-lipschitzienne.

(3) Montrer que f admet un unique point fixe α dans $[0\,;\,1]$.

(4) Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge vers α et que l'on a :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{2\mathrm{e}}{9}\right)^n.$$

(5) Donner un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n soit une approximation de α à 10^{-3} près.

Correction 9.24
★★ À venir ★★

9.3 Convexité

Exercice 9.25 (Exercice 13)
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Donner une CNS pour que la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax^2 + bx + c \end{array}$$

soit convexe.

Correction 9.26
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 9.27 (Exercice 14)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

On pose :

$$f_\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp\left(\dfrac{-x^2}{2\alpha^2}\right) \end{array}$$

Étudier la convexité de f_α en fonction de α.

Correction 9.28
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 9.29 (Exercice 15)
Soit $x \in [0\,;\,1]$.

Montrer :

$$\frac{\pi}{4}x \leqslant \operatorname{Arctan} x \leqslant x \leqslant \operatorname{Arcsin} x \leqslant \frac{\pi}{2}x.$$

Correction 9.30
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 9.31 (Exercice 16)
Montrer :
$$\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt{x_1 + \cdots + x_n} \leqslant \sqrt{x_1} + \cdots + \sqrt{x_n} \leqslant \sqrt{n\,(x_1 + \cdots + x_n)}.$$

Correction 9.32
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 9.33 (Exercice 17)

(1) Donner un exemple de fonction dérivable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ qui soit convexe, majorée et non-constante.

(2) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable, convexe et majorée. Montrer que f est constante.

(3) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et majorée. Montrer que f est constante.

Correction 9.34
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 9.35 (Exercice 18)
Soit $f : [0\,;\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe.

(1) Montrer que f est dérivable à droite et à gauche en tout point de $]0\,;\,1[$.

(2) La fonction f est-elle nécessairement dérivable en 0 ? en 1 ? en $\dfrac{1}{2}$?

(3) La fonction f est-elle nécessairement continue en 0 ? en 1 ? en $\dfrac{1}{2}$?

Correction 9.36
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 9.37 (Exercice 19)
Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe.

(1) Montrer que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ existe. On la note ℓ.

(2) Montrer que si $\ell \leqslant 0$ alors f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
Indication : raisonner par l'absurde.

(3) Montrer que f admet une limite en $+\infty$.

(4) Établir, pour chaque valeur de ℓ, quelles sont les différentes limites possibles pour f en $+\infty$, en illustrant chaque possibilité par un exemple.

Correction 9.38
★★ **À venir** ★★

Exercice 9.39 (Exercice 20)
(1) Montrer que la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1 + e^x) \end{array}$ est convexe.

(2) En déduire :

$$\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*, \quad 1 + \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k)\right)^{1/n}$$

puis :

$$\forall a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}_+^*, \quad \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} (a_k + b_k)\right)^{1/n}.$$

Correction 9.40
★★ **À venir** ★★

Exercice 9.41 (Exercice 21)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [1 ; +\infty[$.

Montrer :

$$n\left(x^{n+1/2} - x^{n-1/2}\right) \leqslant x^n - 1.$$

Indication : factoriser par $x - 1$.

Correction 9.42
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 9.43 (Exercice 22)
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f \in \mathscr{C}^2([a\,;b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.

(1) Justifier que
$$M = \max_{[a;b]} |f''|$$
est bien défini.

(2) Étudier la convexité des fonctions
$$g : \begin{array}{ccc} [a\,;b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) + M\dfrac{(x-a)(b-x)}{2} \end{array} \quad \text{et} \quad h : \begin{array}{ccc} [a\,;b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - M\dfrac{(x-a)(b-x)}{2} \end{array}$$

(3) En déduire :
$$\forall x \in [a\,;b], \quad |f(x)| \leqslant M\frac{(x-a)(b-x)}{2}.$$

Correction 9.44
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 9.45 (Exercice 23, inégalités de Hölder et de Minkowski)
Soient $p, q \in \,]1\,;+\infty[$ tels que :
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

(1) Montrer :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad xy \leqslant \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q.$$

(2) Soient $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k^p = \sum_{k=1}^n y_k^q = 1$.

Montrer :
$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leqslant 1.$$

(3) En déduire l'inégalité de Hölder :
$$\forall a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}_+, \quad \sum_{k=1}^n a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{1/q}.$$

(4) En déduire l'inégalité de Minkowski :
$$\forall a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}_+, \quad \left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p\right)^{1/p}.$$

Correction 9.46
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Chapitre 10

Polynômes, fractions rationnelles

Soit $\mathbb{K}$ un corps.

10.1 Polynômes

Exercice 10.1 (Exercice 1)
On pose

$$P_1 = X^4 + 3X - 1 \qquad P_2 = X^2 + 4 \qquad P_3 = X + 1.$$

(1) Faire, pour tout $(i, j) \in \{1 ; 2 ; 3\}$, la division euclidienne de P_i par P_j.

(2) Calculer

$$P_3(P_2) \qquad P_2(P_3) \qquad P_2(P_1) \qquad P_2'(P_1) \qquad P_1'(P_3).$$

Correction 10.2
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 10.3 (Exercice 2)

(1) Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$P\left(X^3\right) = P^2.$$

(2) Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$X^2 P\left(X^2\right) = P\left(X^3\right) + 2(X-1)\left(X^3 + X + 1\right).$$

Correction 10.4

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 10.5 (Exercice 3)

(1) Déterminer les polynômes P à coefficients complexes tels que

$$P = P'P''.$$

(2) Déterminer les polynômes P à coefficients complexes tels que

$$P = P^{(1)}P^{(2)}P^{(3)}.$$

(3) Déterminer les polynômes P à coefficients complexes tels que

$$P = P^{(1)}P^{(2)}P^{(3)}P^{(4)}.$$

Correction 10.6

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 10.7 (Exercice 4)

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\begin{cases} P(-1) = -17 \\ P(0) = -7 \\ P(1) = -3 \\ P(3) = 35 \end{cases}$

Indication : commencer par calculer l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ solution du système.

Correction 10.8

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 10.9 (Exercice 5)

Décomposer en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

$$P_1 = X^4 - 4 \qquad P_2 = X^3 - 2X^2 + 2X \qquad P_3 = X^6 + 64.$$

Correction 10.10

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 10.11 (Exercice 6)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculer
$$\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} (X - \omega) \,.$$

Correction 10.12
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 10.13 (Exercice 7)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Calculer
$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} \qquad S_3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 \binom{n}{k} .$$

Correction 10.14
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 10.15 (Exercice 8, algorithme d'Euclide)
Appliquer l'algorithme d'Euclide étendu à $A = X^8 + X$ et $B = X^5 + X$ pour trouver un PGCD D de A et B et des polynômes U et V tels que $UA + VB = D$.

Il s'agit d'un simple exercice d'application, ne pas chercher à ruser pour aller plus vite.

Correction 10.16
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 10.17 (Exercice 9)
Soient $A, B \in \mathbb{R}[X]$.

Montrer que A divise B dans $\mathbb{R}[X]$ si, et seulement si, A divise B dans $\mathbb{C}[X]$.

Correction 10.18
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 10.19 (Exercice 10)
Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que $X^n - 1$ divise $X^m - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ si, et seulement si, n divise m dans $\mathbb{Z}$.

Correction 10.20
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 10.21 (Exercice 11)
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P.

Correction 10.22
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 10.23 (Exercice 12)
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

Montrer que $P - X$ divise $P \circ P - X$.

Correction 10.24
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 10.25 (Exercice 13, devinettes)
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$.

Quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)(X-c)$

(1) si a, b et c sont deux à deux distincts ?

(2) si $a = b = c$?

Correction 10.26
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 10.27 (Exercice 14)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On pose
$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$$
.

Montrer que P_n est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$.

Correction 10.28
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 10.29 (Exercice 15)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) Calculer $\sum_{x \in \mathbb{U}_n} x^k$ en fonction de $k \in \mathbb{Z}$.

(2) Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tels que
$$\deg P < n \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{U}_n, \; |P(x)| \leqslant M.$$
Montrer que les coefficients de P sont de module majoré par M.

Correction 10.30
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 10.31 (Exercice 16, classique)
Dans tout l'exercice, « scindé » signifie « scindé sur $\mathbb{R}$ ».

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

(1) Montrer que si P est scindé à racines simples, alors P' est scindé à racines simples.

(2) Montrer que si P est scindé, alors P' est scindé.

Correction 10.32
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 10.33 (Exercice 17, suite de l'exercice précédent, moins classique)
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

On suppose que P s'écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec

$$n \geqslant 3 \qquad a_0 \neq 0 \qquad a_n \neq 0 \qquad \exists k \in [\![1\,;n-2]\!]\,,\ \ a_k = a_{k+1} = 0.$$

Montrer que P n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

Correction 10.34
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 10.35 (Exercice 18)
On pose $P = X^3 + 3X^2 + 3X + 9$.

(1) Montrer que toutes les racines complexes de P sont simples.

(2) Calculer la somme des racines complexe de P.

(3) Calculer la somme des carrés des racines complexes de P.

(4) Calculer la somme des cubes des racines complexes de P.

Correction 10.36
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 10.37 (Exercice 19)
On pose $P = X^6 + 4X^5 - 3X^4 - 32X^3 - 53X^2 - 36X - 9$.

(1) Montrer que -1 est racine de P et calculer sa multiplicité.

(2) Déterminer les autres racines de P.

Correction 10.38
⋆⋆ À venir ⋆⋆

10.2 Fractions rationnelles

Exercice 10.39 (Exercice 20)
Soit $F \in \mathbb{C}(X)$.

Montrer :

$$F = \overline{F} \iff F \in \mathbb{R}(X).$$

Correction 10.40
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 10.41 (Exercice 21)
Calculer la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles suivantes :

(1) $\dfrac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2}$

(2) $\dfrac{X^2 + 1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$

(3) $\dfrac{4}{X^4 - 1}$ (sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$)

(4) $\dfrac{1}{X(X-1)^2}$

(5) $\dfrac{2X}{X^2 + 1}$ (sur $\mathbb{C}$)

(6) $\dfrac{3X - 1}{X^2 (X+1)^2}$

Correction 10.42
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 10.43 (Exercice 22)

(1) Rappeler les lois des groupes $\mathbb{K}(X) \setminus \{0\}$ et $\mathbb{K}(X)$.

(2) Montrer que $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}(X) \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{K}(X) \\ F & \longmapsto & \dfrac{F'}{F} \end{array}$ est un morphisme de groupes.

Quel est son noyau ?

(3) Soit $F \in \mathbb{C}(X) \setminus \{0\}$.

Quelle est la décomposition en éléments simples de $\dfrac{F'}{F}$? On l'exprimera en fonction des racines et pôles de F, et de leurs multiplicités respectives.

Correction 10.44
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 10.45 (Exercice 23)
Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

On pose $P = \mu (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)$.

Exprimer en fonction de P, P' et P'' les fractions rationnelles suivantes :

$$F = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - \lambda_k} \qquad G = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(X - \lambda_k)^2} \qquad H = \sum_{1 \leqslant k < \ell \leqslant n} \frac{1}{(X - \lambda_k)(X - \lambda_\ell)}.$$

Correction 10.46
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 10.47 (Exercice 24)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $a_n \neq 0$.

On suppose que le polynôme $P = a_n X^n + \dots + a_0 X^0$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

(1) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ \ P'(x)^2 - P(x) P''(x) \geqslant 0$.

(2) En déduire : $\forall k \in [\![0\,;n-2]\!],\ \ a_k a_{k+2} \leqslant a_{k+1}^2$.

Indication : utiliser l'Exercice 10.31.

Correction 10.48
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 10.49 (Exercice 25)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On pose $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$.

(1) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(\omega X) = P$. Montrer :

$$\exists Q \in \mathbb{C}[X],\ \ P = Q(X^n).$$

(2) En déduire la forme irréductible de la fraction rationnelle :

$$F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X + \omega^k}{X - \omega^k}.$$

Correction 10.50
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 10.51 (Exercice 26, un peu calculatoire)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

On pose :

$$A_n = \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^\ell \binom{n}{2\ell+1} X^{2\ell+1} \qquad B_n = \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^\ell \binom{n}{2\ell} X^{2\ell} \qquad F_n = \frac{A_n}{B_n}.$$

(1) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ et $n\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Montrer : $\tan(n\theta) = F_n(\tan\theta)$.

Indication : utiliser la formule du binôme de Newton à $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ pour calculer

$$\tan(n\theta) = \frac{\operatorname{Im}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^n\right)}{\operatorname{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^n\right)}.$$

(2) Quelle formule retrouve-t-on si $n = 2$?

(3) Quels sont les pôles de F_n ? En déduire que A_n et B_n sont premiers entre eux.

(4) Quelle est la partie entière de F_n ? On donnera le résultat en fonction de la parité de n.

(5) Donner la décomposition en éléments simples de F_n.

Correction 10.52
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Chapitre 11

Intégrales sur un segment

Exercice 11.1 (Exercice 1)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Calculer l'intégrale
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$$
pour $\alpha = 1$, $\alpha = 2$, $\alpha = 3$ et $\alpha = 4$.

Correction 11.2
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 11.3 (Exercice 2)
Déterminer une primitive pour chacun des fonctions suivantes (on précisera sur quel ensemble de définition) :

(1) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^4 - x^2 - 2}$

(2) $f : x \longmapsto \dfrac{x}{1+x^4}$

(3) $f : x \longmapsto \dfrac{x^2}{1+x^3}$

(4) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x+i}$

(5) $f = \cos^3$

(6) $f = \tan$

(7) $f = \mathrm{Arctan}$

(8) $f : x \longmapsto x \operatorname{Arctan} x$

(9) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\cos x}$

(10) $f : x \longmapsto \dfrac{\sin x}{\cos^2 x + 2}$

(11) $f : x \longmapsto x^7 \ln x$

(12) $f : x \longmapsto \ln^3 x$

(13) $f : x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(14) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x} + 2x}$

(15) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x \ln x}$

(16) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^x}$

Correction 11.4
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 11.5 (Exercice 3)
On pose

$$f : x \longmapsto \int_0^{\sin^2 x} \operatorname{Arcsin} \sqrt{t}\, \mathrm{d}t + \int_0^{\cos^2 x} \operatorname{Arccos} \sqrt{t}\, \mathrm{d}t.$$

(1) Quel est l'ensemble de définition de f ?

(2) Déterminer f.

Correction 11.6
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 11.7 (Exercice 4)
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

On pose :

$$f : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{(x-a)\,(b-x)}}.$$

(1) Quel est l'ensemble de définition de f ?

(2) Déterminer une primitive de f.
Indication : faire le changement de variable

$$y = \frac{2}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right).$$

Correction 11.8
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 11.9 (Exercice 5)
On pose

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t}\,\mathrm{d}t.$$

(1) Justifier que les intégrales I et J sont bien définies.

(2) Montrer $I = J$ par un changement de variable.

(3) En déduire la valeur de I et J.

(4) En déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t + \sqrt{1-t^2}}$.

Correction 11.10
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 11.11 (Exercice 6)
Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On suppose

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} f''(x) = 0.$$

Montrer :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f'(x) = 0.$$

Indication : on pourra utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.

Correction 11.12
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 11.13 (Exercice 7, classique à l'oral, de CCP à l'X)
On pose

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \end{array}$$

(1) Vérifier que la fonction f est bien définie. Quel est son signe ?

(2) Dresser le tableau de variations de f (en précisant les limites en 0^+, 1^-, 1^+ et $+\infty$).
Indication : pour la limite en 1^+, montrer :

$$\forall x \in \left]1\,;+\infty\right[,\quad \int_x^{x^2} \frac{x\,\mathrm{d}t}{t\ln t} \leqslant f(x) \leqslant \int_x^{x^2} \frac{x^2\,\mathrm{d}t}{t\ln t}.$$

(3) En déduire que f se prolonge en une fonction continue $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$.

(4) Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$.

Correction 11.14
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 11.15 (Exercice 8, lemme de Lebesgue)
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f \in \mathscr{C}^1([a\,;b], \mathbb{C})$.

Montrer :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Indication : faire une intégration par parties.

Correction 11.16
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 11.17 (Exercice 9)
À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer :

(1) $\forall x \in \left]-1\ ;\ 1\right],\ \ \ln(1+x) = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1} x^k}{k}.$

(2) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \forall x \in \left]-1\ ;\ 0\right],\ \ \ln(1+x) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1} x^k}{k}.$

(3) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \forall x \in \left[0\ ;\ +\infty\right[,\ \ \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \leqslant \ln(1+x) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{2n+1} \dfrac{(-1)^{k-1} x^k}{k}.$

Correction 11.18
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 11.19 (Exercice 10)
Soit $f : [0\ ;\ 1] \longrightarrow [0\ ;\ 1]$ une fonction continue telle que :

$$\int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)^2\, \mathrm{d}t.$$

Montrer que f est constante, égale à 0 ou 1.

Correction 11.20
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 11.21 (Exercice 11)
Soit une fonction continue $f : [0\ ;\ 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

Montrer que f admet un point fixe.

Donner un contre-exemple quand f n'est pas supposée continue (et seulement supposée continue par morceaux).

Correction 11.22
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 11.23 (Exercice 12)
Calculer la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{t}{1+t+t^2+t^3}\,\mathrm{d}t \end{array}$$

Correction 11.24
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Exercice 11.25 (Exercice 13, Démonstration 11.40)
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

On considère les sommes de Riemann de f :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad R_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Montrer que la suite $(R_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l'intégrale de f sur $[a\,;b]$.

Correction 11.26
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Exercice 11.27 (Exercice 14)
Déterminer

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{k}{n^2+k^2}.$$

Correction 11.28
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Exercice 11.29 (Exercice 15)
Déterminer

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}.$$

Correction 11.30
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Exercice 11.31 (Exercice 16)
Déterminer

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{2k+1}.$$

Correction 11.32
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Exercice 11.33 (Exercice 17)
Déterminer

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}.$$

Indication : remarquer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\prod_{k=1}^{n}(n+k)=n^n\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

Correction 11.34
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Exercice 11.35 (Exercice 18, ENSEA 2018)
(1) À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer :

$$\forall x\in[0\,;\,1]\,,\;\; 0\leqslant \mathrm{e}^x-1-x\leqslant\frac{\mathrm{e}}{2}x^2.$$

(2) En déduire la limite de la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\;\; u_n=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{\frac{1}{n+k}}-n.$$

Correction 11.36
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Chapitre 12

Espaces vectoriels

Sommaire

Soit $\mathbb{K}$ un corps.

12.1 Espaces vectoriels

Exercice 12.1 (Exercice 1)
Les ensembles suivants sont-ils (naturellement) des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ?

(1) $\left\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, a + 2b - c - d = \lambda\right\}$ où λ est un réel fixé.

(2) $\left\{y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,\middle|\, y'' + 2y' + fy = g\right\}$ où f et g sont deux fonctions fixées.

(3) $\{y \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid y \text{ est croissante sur } \mathbb{R}\}$.

(4) $\{y \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid y \text{ est monotone sur } \mathbb{R}\}$.

Correction 12.2
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Exercice 12.3 (Exercice 2, Mines-Telecom PSI 2016)
Soient E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

Montrer :

$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff \left|\begin{array}{l} F \subseteq G \\ \text{ou} \\ G \subseteq F \end{array}\right.$$

Correction 12.4
⋆⋆ À venir ⋆⋆

12.2 Applications linéaires

Exercice 12.5 (Exercice 3)
Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires (pour les structures naturelles d'espaces vectoriels) ?

$$u_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \qquad u_2 : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}\times\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & (f'(1), f'') \end{array} \qquad u_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P\left(X^2\right) \end{array}$$

Correction 12.6
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 12.7 (Exercice 4)
On note B l'ensemble des suites réelles bornées et C l'ensemble des suites réelles convergentes.

(1) Montrer que B et C sont naturellement des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

(2) L'application

$$u : \begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n \end{array}$$

est-elle une forme linéaire ?

(3) L'application

$$v : \begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n \end{array}$$

est-elle une forme linéaire ?

Correction 12.8
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 12.9 (Exercice 5)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u, v \in \mathscr{L}(E)$.

On suppose que les endomorphismes u et v commutent.

Montrer que u stabilise $\ker v$ et $\operatorname{Im} v$, c'est-à-dire :

$$u(\ker v) \subseteq \ker v \qquad \text{et} \qquad u(\operatorname{Im} v) \subseteq \operatorname{Im} v.$$

Correction 12.10
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 12.11 (Exercice 6, résultats à bien connaître)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u, v \in \mathscr{L}(E)$.

(1) Montrer :

$$v \circ u = 0 \iff \operatorname{Im} u \subseteq \ker v.$$

(2) Donner les inclusions qui sont vraies entre les sous-espaces vectoriels de E suivants :

(a) $\operatorname{Im}(v \circ u)$ et $\operatorname{Im} v$.

(b) $\ker(v \circ u)$ et $\ker u$.

(c) $\operatorname{Im}(u + v)$ et $\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$.

(d) $\ker(u + v)$ et $\ker u \cap \ker v$.

(3) Que peut-on en déduire pour les suites de sous-espaces vectoriels de E :

$$\left(\operatorname{Im} u^k\right)_{k \in \mathbb{N}} \qquad \text{et} \qquad \left(\ker u^k\right)_{k \in \mathbb{N}}\ ?$$

Correction 12.12
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 12.13 (Exercice 7, classique)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$.

On suppose que pour tout vecteur $x \in E$, le vecteur $u(x)$ est colinéaire à x.

(1) Justifier que u vérifie :

$$\forall x \in E,\ \ \exists \lambda_x \in \mathbb{K},\ \ u(x) = \lambda_x x.$$

(2) Montrer que u est une homothétie.

Correction 12.14
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 12.15 (Exercice 8, Arts & Métiers PSI 2016)
On pose

$$E = \{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x + 2\pi) = f(x)\} \qquad \text{et} \qquad \forall f \in E,\ \ u(f) = f''.$$

(1) Montrer que E est un espace vectoriel et que $u \in \mathscr{L}(E)$.

(2) Déterminer $\ker u$.

(3) Déterminer les vecteurs $f \in E$ tels que $u(f) = \sin$ et les vecteurs $f \in E$ tels que $u(f) = \sin^2$.

(4) Déterminer $\operatorname{Im} u$.

(5) Montrer $\ker u \oplus \operatorname{Im} u = E$.

Correction 12.16
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 12.17 (Exercice 9)
Soient E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ des applications linéaires.

(1) Montrer :
$$f(\ker(g \circ f)) = \operatorname{Im} f \cap \ker g.$$

(2) Montrer :
$$\ker(g \circ f) = \ker f \iff \operatorname{Im} f \cap \ker g = \{0_F\}.$$

Correction 12.18
⋆⋆ À venir ⋆⋆

12.3 Sommes directes, projecteurs

Exercice 12.19 (Exercice 10)
Soient E un espace vectoriel et $p, q \in \mathscr{L}(E)$ des projecteurs.

Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) $p + q$ est un projecteur

(2) $pq + qp = 0$

(3) $pq = qp = 0$

Correction 12.20
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 12.21 (Exercice 11)
Soient E un espace vectoriel et $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f \circ g = \mathrm{id}_E$.

Montrer que $g \circ f$ est un projecteur. Déterminer son image et son noyau.

Correction 12.22
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 12.23 (Exercice 12)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p et q des projecteurs de E qui commutent.

(1) Montrer que pq est un projecteur.

(2) Montrer $\mathrm{Im}(pq) = \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$.

(3) Montrer $\ker(pq) = \ker p + \ker q$.

Correction 12.24
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 12.25 (Exercice 13, polynômes interpolateurs de Lagrange)
Soient $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts.

On note $L_0, \dots, L_n \in \mathbb{K}_n[X]$ les polynômes définis par :

$$\forall j \in [\![0\,;n]\!],\quad L_j = \prod_{k \in [\![0;n]\!] \setminus \{j\}} \frac{X - x_k}{x_j - x_k}.$$

(1) Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

(2) Montrer que l'application

$$u : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P(x_0)\,L_0 + \cdots + P(x_n)\,L_n \end{array}$$

est un projecteur.

(3) Déterminer l'image et le noyau de u.

Correction 12.26
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 12.27 (Exercice 14)
Donner un supplémentaire de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}(X)$.

Correction 12.28
⋆⋆ À venir ⋆⋆

12.4 Familles libres / génératrices

Exercice 12.29 (Exercice 15)
On considère le système linéaire homogène :

$$(S)\begin{cases} a + ib + c + id = 0 \\ ia - b + ic - d = 0 \\ (1-i)\,a + (1+i)\,b + (1+i)\,c - (1-i)\,d = 0 \end{cases}$$

On note $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{C}^4$ son ensemble solution.

C'est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et donc également un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(1) Donner une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathscr{S}$.

(2) Donner une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{S}$.

Correction 12.30
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 12.31 (Exercice 16)
On pose

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f_\lambda : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \mathrm{e}^{\lambda t} \end{array}$$

On considère la famille $\mathscr{F} = (f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ de vecteurs de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(1) La famille $\mathscr{F}$ est-elle une base de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

(2) La famille $\mathscr{F}$ est-elle une base de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

(3) Montrer que la famille $\mathscr{F}$ n'est pas libre

(a) en utilisant des limites en $+\infty$.

(b) en utilisant des polynômes interpolateurs de Lagrange.

Correction 12.32
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 12.33 (Exercice 17)
On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On définit les vecteurs suivants :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f_\lambda : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sin(\lambda t) \end{array}$$

Les familles suivantes sont-elles libres ?

(1) $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$

(2) $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}^*}$

(3) $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}_+^*}$

Correction 12.34
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 12.35 (Exercice 18)
Donner une base de l'image et du noyau des endomorphismes suivants :

(1)

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (a,b,c) & \longmapsto & (a-b, b-c, c-a) \end{array}$$

(2)

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P \end{array}$$

Correction 12.36
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 12.37 (Exercice 19, base duale)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Pour tout $k \in [\![1 \,;\, n]\!]$, on note $e_k^* : E \longrightarrow \mathbb{K}$ l'application qui associe à tout vecteur de E sa k-ème coordonnée dans la base $\mathscr{B}$.

Les applications $e_1^*, \dots, e_n^*$ sont donc caractérisées par :

$$\forall x \in E,\ \ x = \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x)\, e_k.$$

Montrer que la famille $\mathscr{B}^* = \left(e_1^*, \dots, e_n^*\right)$ est une base de E^* (appelée base duale de $\mathscr{B}$).

Correction 12.38
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 12.39 (Exercice 20)
Montrer que la famille infinie $(\ln p)_{p\in\mathbb{P}}$ est une famille libre du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.

Correction 12.40
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 12.41 (Exercice 21)
On se place dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.

(1) Soit $p \in \mathbb{P}$. Montrer que la famille $\left(1, \sqrt{p}\right)$ est libre sur $\mathbb{Q}$.

(2) En déduire que la famille $\left(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\right)$ est libre sur $\mathbb{Q}$.

Correction 12.42
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 12.43 (Exercice 22)
Résoudre les systèmes linéaires suivants en appliquant l'algorithme du pivot de Gauss.

Lorsque l'ensemble solution est un espace affine, on précisera une base de sa direction.

$$(S_1)\begin{cases} a+b+2c+d=7 \\ 4a+5b+3c+4d=17 \\ a+2b-3c+d=-4 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} a+b+2c=7 \\ 4a+5b+3c=17 \\ a+2b-3c=7 \end{cases}$$

Correction 12.44
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Chapitre 13

Équations différentielles

13.1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Exercice 13.1 (Exercice 1)
Résoudre l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' + y = \sin t.$$

Correction 13.2
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Exercice 13.3 (Exercice 2)
Résoudre l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' + \frac{\sin t}{\cos t - 2} y = \frac{2 \sin t}{\cos t - 2}.$$

Correction 13.4
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Exercice 13.5 (Exercice 3)
Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' - \dfrac{t^3 + t + 1}{t^2 + 1} y = \dfrac{t^4 + t - 1}{t^2 + 1} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Correction 13.6
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 13.7 (Exercice 4)
Résoudre l'équation différentielle suivante sur l'intervalle $]0\,;1[$:

$$(E)\ \ t\ln t y' - y = 2t^2\ln^2 t.$$

Correction 13.8
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 13.9 (Exercice 5)
Résoudre l'équation différentielle suivante sur l'intervalle $]-1\,;1[$:

$$(E)\ \ \sqrt{1-t^2}y' - y = 1.$$

Correction 13.10
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 13.11 (Exercice 6)
On considère l'équation différentielle :

$$(E)\ \ ty' + y = \cos t.$$

(1) Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ (respectivement $\mathbb{R}_-^*$).

(2) En déduire les solutions définies sur $\mathbb{R}$.

Correction 13.12
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 13.13 (Exercice 7, Mines MP 2006)
Résoudre l'équation différentielle suivante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$:

$$(E)\ \ t\ln t y' - (3\ln t + 1)\,y = 0.$$

Correction 13.14
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 13.15 (Exercice 8)
Trouver les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ à l'équation différentielle :

$$(E)\ \ ty' - (2t+1)\,y = 2t+1.$$

Quelles sont les solutions vérifiant $y(0) = 0$? celles vérifiant $y(0) = -1$?

Correction 13.16
⋆⋆ À venir ⋆⋆

13.2 Équations différentielles linéaires d'ordre 2

Exercice 13.17 (Exercice 9)
Résoudre les équations différentielles suivantes :

(1) $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{3t} + 3t\mathrm{e}^{t}$

(2) $y'' + 4y' - 5y = \operatorname{sh} t$

(3) $y'' + 4y = t \sin t$.

Correction 13.18
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 13.19 (Exercice 10)
Résoudre sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$(E)\ \ t^2y'' + 3ty' + y = (t+1)^2$$

en faisant le changement de variable $s = \ln t$.

Correction 13.20
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 13.21 (Exercice 11)
Résoudre l'équation différentielle :

$$(E)\ \left(1+t^2\right)^2 y'' + 2t\left(1+t^2\right) y' + y = \operatorname{Arctan} t$$

en faisant le changement de variable $x = \operatorname{Arctan} t$.

Correction 13.22
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 13.23 (Exercice 12)
Résoudre sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$(E)\ t^2y'' + ty' - y = t^2$$

en faisant le changement de variable $x = \ln t$.

Correction 13.24
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 13.25 (Exercice 13, Mines-Ponts PSI 2017)
Soit a un réel non-nul.

Résoudre

$$(E)\ \left(1+x^2\right)^2 y'' + 2x\left(1+x^2\right) y' + a^2y = 0$$

en faisant le changement de variable $\theta = \operatorname{Arctan} x$.

Correction 13.26
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 13.27 (Exercice 14)
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle réelle :

$$(E)\ ty'' + 2(t+1)y' + (t+2)y = 0.$$

Indication : on pourra considérer la fonction $z : t \longmapsto ty(t)$.

Correction 13.28
⋆⋆ À venir ⋆⋆

13.3 Applications

Exercice 13.29 (Exercice 15)
Résoudre[1] de deux façons le système linéaire :

$$(E)\ \begin{cases} y_1' = -y_2 \\ y_2' = y_1 \end{cases}$$

(1) À l'aide d'une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par la fonction complexe $y_1 + iy_2$.

(2) À l'aide d'une équation différentielle d'ordre 2 vérifée par la fonction réelle y_1.

Correction 13.30
★★ **À venir** ★★

Exercice 13.31 (Exercice 16)
Résoudre le système linéaire :

$$(E)\ \begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 + \cos t \\ y_2' = y_1 + 2y_2 + \sin t \end{cases}$$

Correction 13.32
★★ **À venir** ★★

Exercice 13.33 (Exercice 17)
Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable, on note $\mathscr{P}(f)$ la propriété :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = 2f(-x) + x.$$

(1) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que si $\mathscr{P}(f)$ est vraie, alors f est deux fois dérivable et satisfait une certaine équation différentielle linéaire d'ordre 2.

(2) Résoudre l'équation différentielle obtenue.

(3) Déterminer l'ensemble des fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $\mathscr{P}(f)$ soit vraie.

Correction 13.34
★★ **À venir** ★★

1. C'est-à-dire déterminer les couples $(y_1, y_2) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$ qui sont solution

Chapitre 14

Espaces vectoriels en dimension finie

Exercice 14.1 (Exercice 1)
Si $p \in \mathbb{N}^*$, on note E_p l'espace vectoriel des suites p-périodiques d'éléments de $\mathbb{K}$:

$$E_p = \left\{ (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+p} = u_n \right\}.$$

On note E l'espace vectoriel des suites périodiques d'éléments de $\mathbb{K}$:

$$E = \left\{ (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \exists p \in \mathbb{N}^*,\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+p} = u_n \right\}.$$

(1) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la dimension de E_p ?

(2) Quelle est la dimension de E ?

Correction 14.2
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Exercice 14.3 (Exercice 2, TPE MP 2018)
On pose :

$$E = \left\{ P \in \mathbb{C}[X] \;\middle|\; \left(X^4 + 1\right) P = P\left(X^2\right) \right\}.$$

(1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.

(2) Si $P \in E \setminus \{0\}$, déterminer le degré de P.

(3) Donner un polynôme non-nul appartenant à E.

(4) Déterminer la dimension de E.

Correction 14.4

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 14.5 (Exercice 3, relations de récurrence d'ordre 2)
Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq 0$.

On note E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ vérifiant la relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0.$$

(1) Montrer que l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (u_n)_n & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

(2) Quelle est la dimension de E ?

(3) En déduire le théorème suivant (à retenir) :

- Si le polynôme $aX^2 + bX + c$ admet deux racines distinctes $x, y \in \mathbb{C}$, alors E est l'ensemble des suites de la forme :
$$(\lambda x^n + \mu y^n)_{n\in\mathbb{N}}$$
où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

- Si le polynôme $aX^2 + bX + c$ admet une racine double $x \in \mathbb{C}$, alors E est l'ensemble des suites de la forme :
$$((\lambda n + \mu)\, x^n)_{n\in\mathbb{N}}$$
où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Correction 14.6

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 14.7 (Exercice 4)
Donner un exemple d'espace vectoriel E et d'endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ tels que u soit inversible à droite mais pas à gauche (dans l'anneau $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$).

Correction 14.8

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 14.9 (Exercice 5)
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

(1) Montrer qu'il existe une application linéaire injective $u : E \longrightarrow F$ si, et seulement si, $\dim E \leqslant \dim F$.

(2) Montrer qu'il existe une application linéaire surjective $u : E \longrightarrow F$ si, et seulement si, $\dim E \geqslant \dim F$.

(3) Montrer qu'il existe un isomorphisme (d'espaces vectoriels) $u : E \longrightarrow F$ si, et seulement si, $\dim E = \dim F$.

Correction 14.10
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 14.11 (Exercice 6, endomorphismes de rang 1)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$.

(1) Justifier que l'endomorphisme u est de rang 1 si, et seulement si, il s'écrit :

$$u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \ell(x)\, a \end{array}$$

où a est un vecteur non-nul de E et $\ell \in E^*$ est une forme linéaire non-nulle.

On suppose désormais que u est de rang 1.

(2) Montrer : $\exists \lambda \in \mathbb{K}, \ \ u^2 = \lambda u$.

(3) Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(a) $\exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, \ \ \lambda u$ est un projecteur

(b) $E = \ker u \oplus \operatorname{Im} u$

(c) $u^2 \neq 0$.

Correction 14.12
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 14.13 (Exercice 7)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$.

On suppose :
$$\dim E = 3 \qquad \text{et} \qquad u^2 = 0.$$

Montrer : $\operatorname{rg} u \leqslant 1$.

Correction 14.14
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Exercice 14.15 (Exercice 8)
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathscr{L}(E)$.

Montrer :
$$|\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v| \leqslant \operatorname{rg}(u + v) \leqslant \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v.$$

Correction 14.16
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Exercice 14.17 (Exercice 9)
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathscr{L}(E)$.

Montrer :
$$\operatorname{rg}(uv) \leqslant \min\{\operatorname{rg} u \ ; \operatorname{rg} v\}.$$

Correction 14.18
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Exercice 14.19 (Exercice 10)
Soient $u \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3\right)$ et $v \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2\right)$.

On suppose que $u \circ v$ est un projecteur de rang 2 de $\mathbb{R}^3$.

Montrer que v est une surjection et que u est une injection puis que $v \circ u = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.

Correction 14.20
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 14.21 (Exercice 11)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathscr{L}(E)$.

Montrer l'équivalence :

$$\ker u = \operatorname{Im} u \iff \begin{cases} u^2 = 0 \\ \dim E = 2 \operatorname{rg} u \end{cases}$$

Correction 14.22
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 14.23 (Exercice 12, formule de Grassmann)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie.

(1) Montrer qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{N}$ et une base de $F + G$:

$$\left(e_1, \ldots, e_a, e'_1, \ldots, e'_b, e''_1, \ldots, e''_c\right)$$

tels que

$$\begin{cases} F \cap G = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_a) \\ F = \operatorname{Vect}\left(x_1, \ldots, e_a, e'_1, \ldots, e'_b\right) \\ G = \operatorname{Vect}\left(e_1, \ldots, e_a, e''_1, \ldots, e''_b\right) \end{cases}$$

(2) En déduire une nouvelle démonstration de la formule de Grassmann.

Correction 14.24
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 14.25 (Exercice 13, Centrale 2008 (extrait))
Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et G un sous-espace vectoriel de F.

Montrer :

$$\dim f^{-1}(G) = \dim E - \operatorname{rg} f + \dim(\operatorname{Im} f \cap G).$$

Correction 14.26
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 14.27 (Exercice 14)
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathscr{L}(E)$.

Montrer :

$$\operatorname{rg}(u+v) = \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v \iff \begin{cases} \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v = \{0_E\} \\ \ker u + \ker v = E \end{cases}$$

Correction 14.28
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 14.29 (Exercice 15)
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $\ell_1, \dots, \ell_m \in E^*$.

On considère l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E & \longrightarrow & \mathbb{K}^m \\ & x & \longmapsto & (\ell_1(x), \dots, \ell_m(x)) \end{array}$$

(1) Montrer que la famille $(\ell_1, \dots, \ell_m)$ est une famille libre si, et seulement si, l'application φ est surjective.

(2) Montrer :

$$\operatorname{rg} \varphi = \operatorname{rg}(\ell_1, \dots, \ell_m).$$

Indication : considérer une base $\left(\ell_{i_1}, \dots, \ell_{i_r}\right)$ de $\operatorname{Vect}(\ell_1, \dots, \ell_m)$.

(3) En déduire que la famille $(\ell_1, \dots, \ell_m)$ engendre E^* si, et seulement si, l'application φ est injective.

Correction 14.30
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 14.31 (Exercice 16)
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$.

Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) $\operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Im} u$

(2) $\ker u^2 = \ker u$

(3) $E = \ker u \oplus \operatorname{Im} u$.

Correction 14.32

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 14.33 (Exercice 17)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathscr{L}(E)$.

On suppose :

$$u \circ v = 0 \qquad \text{et} \qquad u + v \in \mathrm{GL}(E)\,.$$

Montrer :

$$\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v = \dim E \qquad \text{et} \qquad \ker u \oplus \ker v = E.$$

Correction 14.34

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Chapitre 15

Matrices I

Exercice 15.1 (Exercice 1)
Soient $a, b, c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

On pose

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^n et B^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Correction 15.2
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 15.3 (Exercice 2)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

L'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est-il stable par le produit matriciel ? Qu'en est-il de l'ensemble des matrices antisymétriques ?

Correction 15.4
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 15.5 (Exercice 3)
Dire pour chaque système quel est son rang et ce qu'on le peut en déduire sur l'espace $\mathscr{S}$ de ses solutions. Le résoudre ensuite.

(1) Système d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

(2) Système d'inconnue $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, où λ est un paramètre réel fixé :

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ a - b + 2c - d = 1 \\ 3a + b + 4c + d = \lambda \end{cases}$$

Correction 15.6
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 15.7 (Exercice 4)
Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$.

On considère les équations matricielles d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{p1}(\mathbb{R})$:

$$(E_1)\ \ AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad (E_2)\ \ AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On suppose que (E_1) n'admet aucune solution et que (E_2) admet une unique solution.

Quelles sont les valeurs possibles pour les entiers n et p ?

Donner, pour chaque possibilité, un exemple de matrice A.

Correction 15.8
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 15.9 (Exercice 5)
Soit (S) un système linéaire de n équations à p inconnues. On note r son rang.

Justifier les propositions suivantes :

(1) Si $r = p$ alors (S) admet au plus une solution.

(2) Si $r = n$ alors (S) admet au moins une solution.

Correction 15.10
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 15.11 (Exercice 6)
Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Correction 15.12
★★ À venir ★★

Exercice 15.13 (Exercice 7)
Calculer les inverses des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction 15.14
★★ À venir ★★

Exercice 15.15 (Exercice 8)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & 2 & \dots & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

(1) Déterminer l'inverse de A.

(2) Calculer ${}^tAA$.

(3) En déduire l'inverse de B.

Correction 15.16
★★ À venir ★★

Exercice 15.17 (Exercice 9)
Soient $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{K}$ et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a & b\lambda^{-1} & c\lambda^{-2} \\ d\lambda & e & f\lambda^{-1} \\ g\lambda^2 & h\lambda & i \end{pmatrix}$ sont semblables.

Correction 15.18
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 15.19 (Exercice 10)
Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^* \\ & A & \longmapsto & B \longmapsto \operatorname{tr}(AB) \end{array}$$

est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vers son dual.

Correction 15.20
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 15.21 (Exercice 11)
On suppose que le corps $\mathbb{K}$ est fini et on note q son cardinal :

$$q = \operatorname{Card} \mathbb{K} < +\infty.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Déterminer le cardinal des ensembles suivants :

(1) $\mathbb{K}^n$

(2) $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

(3) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$

Indications pour le (3) :

- Commencer par $n = 2$ ou 3.
- Une matrice carrée est inversible si, et seulement si, la famille de ses vecteurs colonnes est libre. Compter les matrices inversibles de taille n revient donc à compter les familles libres de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

Correction 15.22

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 15.23 (Exercice 12)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction non-constante telle que :

$$\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad f(AB) = f(A) f(B).$$

Montrer que pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a l'équivalence :

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff f(A) \neq 0.$$

Correction 15.24

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Chapitre 16

Matrices II

Exercice 16.1 (Exercice 1)
On note E un espace vectoriel, $\mathscr{B}$ une base de E et u un endomorphisme de E.

Donner, dans chaque cas, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ de u dans $\mathscr{B}$.

(1) $E = \mathbb{C}$, vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ; $\mathscr{B} = (1, i)$
$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & (a+ib)\,z \end{array} \quad \text{où } a, b \in \mathbb{R}.$$

(2) $E = \mathbb{C}$, vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ; $\mathscr{B} = (1, i)$
$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & i\lambda z + 2\overline{z} \end{array} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

(3) $E = \mathbb{C}$, vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ; $\mathscr{B} = (1)$
$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & (a+ib)\,z \end{array} \quad \text{où } a, b \in \mathbb{R}.$$

(4) $E = \mathbb{C}$, vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ; $\mathscr{B} = (1)$
$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & i\lambda z + 2\overline{z} \end{array} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

(5) $E = \mathrm{Vect}\,(\cos, \sin)$, sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; $\mathscr{B} = (\cos, \sin)$
$$u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & 2f + f' \end{array}$$

(6) $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$; $\mathscr{B} = (E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22})$
$$u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & AM \end{array} \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E \text{ est une matrice fixée.}$$

(7) $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$; $\mathscr{B} = (E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22})$
$$u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & MA \end{array} \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E \text{ est une matrice fixée.}$$

(8) $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$; $\mathscr{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$
$$u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & MA \end{array} \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E \text{ est une matrice fixée.}$$

(9) $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$; $\mathscr{B}$ à choisir (judicieusement)

$$u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & AM \end{array} \quad \text{où } A \in E \text{ est une matrice fixée.}$$

(10) $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$; $\mathscr{B}$ à choisir (judicieusement)

$$u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & MA \end{array} \quad \text{où } A \in E \text{ est une matrice fixée.}$$

Correction 16.2

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 16.3 (Exercice 2)

On pose

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & X^2P'' - 6P \end{array}$$

Calculer le rang et la trace de u :

(1) si $n = 3$.

(2) si $n \geqslant 3$.

Correction 16.4

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 16.5 (Exercice 3)

On pose

$$u : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & {}^tA \end{array}$$

Calculer le rang et la trace de u :

(1) si $n = 2$.

(2) si $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction 16.6

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 16.7 (Exercice 4)
Soient E un espace vectoriel de dimension finie non-nulle et $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.

Quelle est la relation entre la matrice de passage $\mathscr{P}_{\mathscr{B}\longrightarrow\mathscr{B}'}$ et la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{id}_E)$ de l'application linéaire id_E dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$?

Correction 16.8
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 16.9 (Exercice 5)
Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E, F)$ une application linéaire de rang $r \in \mathbb{N}$.

Montrer que u est la somme de r applications linéaires de rang 1.

Correction 16.10
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 16.11 (Exercice 6)
Soient E un espace vectoriel de dimension finie non-nulle et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 = 0$.

(1) Quelle inclusion est vraie entre $\ker u$ et $\mathrm{Im}\, u$?

(2) Montrer que u est de trace nulle.
Indication : construire une base de E adaptée à la situation.
Remarque : vous montrerez en deuxième année que tout endomorphisme nilpotent de E est de trace nulle.

Correction 16.12
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 16.13 (Exercice 7, méthode à retenir)
On pose :

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; x_1 + 2x_3 = 0 \right\} \qquad \text{et} \qquad D = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

(1) Justifier que H et D sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{C}^3$.

(2) On note p_H la projection sur H parallèlement à D et p_D la projection sur D parallèlement à H.
Déterminer les matrices de p_H et p_D dans la base canonique.

Correction 16.14
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 16.15 (Exercice 8, méthode également à retenir)
On pose $E = \mathbb{R}^4$.

On note F et G les ensembles solutions respectifs des systèmes

$$\begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a+b+c=0 \\ b+c+d=0 \end{cases}$$

(1) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

(2) Déterminer une base $\mathscr{B}_F$ de F et une base $\mathscr{B}_G$ de G.

On note $\mathscr{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, $\mathscr{B}$ la base de $\mathbb{R}^4$ obtenue en juxtaposant $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$, p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

(3) Donner la matrice de p dans la base $\mathscr{B}$.

(4) En déduire la matrice de p dans la base $\mathscr{B}_0$.

(5) En déduire la matrice de s dans la base $\mathscr{B}_0$.

NB : il faut savoir refaire parfaitement la question (4) sans les questions intermédiaires (2) et (3).

Correction 16.16
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 16.17 (Exercice 9)
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de trace différente de 2.

On pose :

$$E = \left\{ X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; X + {}^tX = (\operatorname{tr} X)\, M \right\}.$$

(1) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et déterminer sa dimension.

(2) Que se passe-t-il si $\operatorname{tr} M = 2$?

Correction 16.18
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Exercice 16.19 (Exercice 10)
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $u \in \mathscr{L}(E)$.

On suppose $u^2 = \lambda u$.

Donner une relation entre $\operatorname{tr} u$ et $\operatorname{rg} u$.

Correction 16.20
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Chapitre 17

Relations de comparaison, développements limités

Exercice 17.1 (Exercice 1)
Classer les expressions suivantes de la plus « petite » à la plus « grande » quand x tend vers $+\infty$ (on pourra exprimer la réponse à l'aide des notations de Hardy) :

$$x^2 \ln x \qquad \frac{x^3}{\ln x} \qquad x \ln^7 x \qquad \frac{\mathrm{e}^x}{x \ln x} \qquad \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^7 \ln x} \qquad \frac{\mathrm{e}^{2x}}{x \ln x} \qquad \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$$

Correction 17.2
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 17.3 (Exercice 2)

(1) Simplifier les expressions suivantes :

$$A \underset{x \longrightarrow +\infty}{=} \left(x \ln x + \sqrt{x} \ln^2 x + O(x) + \sin x + \sqrt{x}\right) x + o\left(x^2 \ln x\right)$$

et

$$B \underset{x \longrightarrow 0}{=} O\left(x^3 \ln x\right) + x^3 \ln^2 x + 2x^3 + \frac{x \ln^2 x}{1 - x} + o\left(x^3\right) + O\left(x^3\right)$$

en utilisant pour B le développement limité en 0 de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$.

(2) Donner un équivalent de A et B.

Correction 17.4
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 17.5 (Exercice 3)
Donner un équivalent des fonctions suivantes :

(1) $f : x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ quand x tend vers $+\infty$.

(2) $g : x \longmapsto \dfrac{x^\alpha}{1+x^\beta}$ quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers 0^+.

(3) $h : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \lfloor t \rfloor \, dt$ quand x tend vers $+\infty$.

(4) $k : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{x+1} e^t \ln t \, dt$ quand x tend vers $+\infty$.

Correction 17.6
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 17.7 (Exercice 4)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note u_n le nombre de zéros consécutifs situés à droite de l'écriture en base 10 de $n!$.

Par exemple, l'entier $20! = 2432902008176640000$ se termine par quatre zéros donc $u_{20} = 4$.

Donner un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Correction 17.8
Si $N \in \mathbb{N}^*$, le nombre de zéros à droite de N est

$$\min\{v_2(n) \ ; \ v_5(n)\}.$$

Soit $p \in \mathbb{P}$.

Calculons
$$\begin{aligned} v_p(n!) &= \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \dots \\ &= \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^\alpha} \right\rfloor \end{aligned}$$

Donc $v_2(n!) \geqslant v_5(n!)$.

Donc $u_n = v_5(n!) = \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{5^\alpha} \right\rfloor$.

On a

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^*, \quad \left\lfloor \frac{n}{5^\alpha} \right\rfloor = 0 \iff \frac{n}{5^\alpha} < 1$$
$$\iff n < 5^\alpha$$
$$\iff \alpha > \log_5 n$$
$$\iff \alpha > \lfloor \log_5 n \rfloor$$

Donc

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{\alpha=1}^{\lfloor \log_5 n \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{5^\alpha} \right\rfloor \\ &\leqslant \sum_{\alpha=1}^{\lfloor \log_5 n \rfloor} \frac{n}{5^\alpha} \\ &= n \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{5^{\lfloor \log_5 n \rfloor + 1}}}{1 - \frac{1}{5}} \\ &\leqslant \frac{n}{4} \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} u_n &\geqslant \sum_{\alpha=1}^{\lfloor \log_5 n \rfloor} \left(\frac{n}{5^\alpha} - 1 \right) \\ &= n \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{5^{\lfloor \log_5 n \rfloor + 1}}}{1 - \frac{1}{5}} - \lfloor \log_5 n \rfloor \\ &= \frac{n}{4} \left(1 - \frac{1}{5^{\lfloor \log_5 n \rfloor + 1}} \right) - \lfloor \log_5 n \rfloor \\ &\geqslant \frac{n}{4} \left(1 - \frac{1}{5^{\lfloor \log_5 n \rfloor + 1}} \right) - \log_5 n \\ &\underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{4} \end{aligned}$$

$$n \frac{1 + o(1)}{4} + o(n) = \frac{n}{4} + o(n)$$

Donc $u_n \sim \dfrac{n}{4}$.

Exercice 17.9 (Exercice 5)
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ centré en 0, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que f admet un développement limité à l'ordre n en 0 :

$$f(x) \underset{x \longrightarrow 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$

(1) Montrer que si la fonction f est paire, alors les termes de degré impair de son développement limité sont tous nuls :

$$0 = a_1 = a_3 = a_5 = \ldots$$

(2) Montrer que si la fonction f est impaire, alors les termes de degré pair de son développement limité sont tous nuls :

$$0 = a_0 = a_2 = a_4 = \dots$$

Correction 17.10

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 17.11 (Exercice 6)

Calculer les développements limités des fonctions suivantes en 0 :

(1) $x \longmapsto \sqrt{1+\sin x}$ à l'ordre 4.

(2) $x \longmapsto \sqrt{1+\cos x}$ à l'ordre 4.

(3) $x \longmapsto \ln\left(\mathrm{e}^x + \cos x\right)$ à l'ordre 3.

(4) $x \longmapsto \ln\left(\cos\left(2x\right)\right)$ à l'ordre 7.

(5) $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ à l'ordre $n \in \mathbb{N}$.

(6) Arcsin à l'ordre $n \in \mathbb{N}$.

(7) Arccos à l'ordre $n \in \mathbb{N}$.

Indication : pour le (5), exprimer pour tout $k \in \mathbb{N}$ le quotient $\dfrac{\alpha\left(\alpha-1\right)\dots\left(\alpha-k+1\right)}{k!}$ avec $\alpha = \dfrac{-1}{2}$ à l'aide de factorielles.

Correction 17.12

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 17.13 (Exercice 7)

Calculer les développements limités des fonctions suivantes :

(1) $x \longmapsto \ln\left(1+x^2\right)$ à l'ordre 3 en 2.

(2) $x \longmapsto \sin x \cos\left(3x\right)$ à l'ordre 2 en $\dfrac{\pi}{3}$.

Correction 17.14
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 17.15 (Exercice 8)
Calculer les limites suivantes :

(1)
$$\lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\operatorname{Arctan}(2x) - 2\operatorname{Arctan} x}{x^3}$$

(2)
$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x} \right)^{x \ln x}$$

(3)
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\lambda}{n} \right)^n \quad \text{où } \lambda \text{ est un réel fixé}$$

(4)
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3} \right)^n$$

(5)
$$\lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\operatorname{Arctan}\left(x^2 - x^2 \cos x\right)}{\left(1 - \sqrt{\cos x}\right) \ln \frac{\sin x}{x}}$$

(6)
$$\lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{x \cos x - \sin x}{\cos x - 1}$$

(7)
$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \left(\frac{x \cos x - \sin x}{\cos x - 1} \right)^x$$

(8)
$$\lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x \neq 0}} \left(\frac{2^x + 3^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$$

(9)
$$\lim_{\substack{x \longrightarrow \frac{\pi}{3} \\ x \neq \frac{\pi}{3}}} \frac{3\cos^2 x - \sin^2(2x)}{\tan(4x) - \sqrt{3}}$$

Correction 17.16
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 17.17 (Exercice 9)

(1) Montrer que l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\mathrm{e}^{x^2} \end{array}$$

est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On note f^{-1} sa bijection réciproque.

(2) Montrer que les fonctions f et f^{-1} sont impaires.

(3) Déterminer le développement limité à l'ordre 5 de f^{-1} en 0.
On pensera à utiliser l'Exercice 17.9 pour alléger les calculs.

Correction 17.18
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 17.19 (Exercice 10)

On pose

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

(1) Déterminer le développement limité de f à l'ordre 3 en 0.

(2) Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

(3) Déterminer la position relative du graphe de f par rapport à sa tangente en 0.

Correction 17.20
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 17.21 (Exercice 11)
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Déterminer un développement asymptotique de la suite de terme général

$$u_n = \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n$$

à la précision $\dfrac{1}{n^2}$.

Correction 17.22
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 17.23 (Exercice 12)
On pose :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (x+1)\exp\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{array}$$

Déterminer un développement asymptotique de f en $+\infty$ à la précision $\dfrac{1}{x}$.

En déduire que le graphe de f admet une asymptote en $+\infty$ et sa position par rapport à son asymptote (au voisinage de $+\infty$).

Correction 17.24
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 17.25 (Exercice 13)
Trouver un équivalent, quand x tend vers 0^+, de :

$$x^{\sin x} - \sin^x x.$$

Correction 17.26
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 17.27 (Exercice 14)
Montrer qu'on a, quand x tend vers 1 :

$$\operatorname{Arccos} x \sim \sqrt{2\,(1-x)}.$$

Correction 17.28

⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Exercice 17.29 (Exercice 15)

(1) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists! u_n \in \mathbb{R}, \quad u_n \mathrm{e}^{n u_n} = 1.$$

On obtient ainsi une suite de réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que l'on étudie dans la suite.

(2) Étudier la limite de la suite $(u_n)_n$.

(3) Donner un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Correction 17.30

⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Exercice 17.31 (Exercice 16, oral 2016)

(1) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence et l'unicité d'un réel x_n tel que :

$$x_n - \mathrm{e}^{-x_n} = n.$$

(2) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \leqslant x_n \leqslant n + 1.$$

(3) En déduire un équivalent de x_n, puis un développement asymptotique à deux termes de x_n quand n tend vers $+\infty$.

(4) Donner un développement asymptotique à 5 termes de x_n quand n tend vers $+\infty$.

NB : la question (4) est ajoutée, elle n'a pas été posée à l'oral dont provient l'exercice.

Correction 17.32

⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Exercice 17.33 (Exercice 17)
On rappelle la formule du multinôme [1], qui généralise la formule du binôme de Newton (obtenue quand $r = 2$) :

$$\forall n, r \in \mathbb{N},\ \ \forall z_1, \dots, z_r \in \mathbb{C},\ \ (z_1 + \cdots + z_r)^n = \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_r = n} \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_r!} z_1^{\alpha_1} \dots z_r^{\alpha_r}$$

(on sous-entend pour alléger la formule que les α_i sont des entiers naturels).

Soient I et J des intervalles de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points, $f \in \mathscr{C}^n(I, J)$, $g \in \mathscr{C}^n(J, \mathbb{R})$ et $a \in I$.

Montrer la formule de Faà di Bruno :

$$(g \circ f)^{(n)}(a) = \sum_{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + n\alpha_n = n} \frac{n!}{(1!)^{\alpha_1} \dots (n!)^{\alpha_n} \alpha_1! \dots \alpha_n!} g^{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)}(f(a)) f^{(1)}(a)^{\alpha_1} \dots f^{(n)}(a)^{\alpha_n}$$

qui donne la dérivée n-ème de $g \circ f$ en fonction des dérivées successives de f et g.

Correction 17.34
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Remarque 17.35
Les deux derniers exercices sont assez calculatoires ; on pourra s'aider d'une calculatrice ou d'un ordinateur pour obtenir les développements limités utiles.

Exercice 17.36 (Exercice 18)
On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et le vecteur $f = \sin$.

La famille $(f, f \circ f, f \circ f \circ f)$ est-elle libre ?

Correction 17.37
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 17.38 (Exercice 19)
Trouver un équivalent simple quand x tend vers 0 de la fonction :

$$x \longmapsto \tan(\sin x) - \sin(\tan x).$$

Correction 17.39
⋆⋆ À venir ⋆⋆

1. La formule est énoncée ici pour les nombres complexes ; elle est en fait valable dans tout anneau si les éléments $z_1, \dots, z_r$ commutent deux à deux.

Chapitre 18

Groupe symétrique

Exercice 18.1 (Exercice 1)
On pose

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 6 & 3 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour tout $k \in [\![1 ; 4]\!]$:

- Décomposer σ_k en produit de cycles à supports disjoints.
- Calculer la signature de σ_k.
- Calculer σ_k^2, σ_k^{-1} et σ_k^{2023}.

Correction 18.2
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Exercice 18.3 (Exercice 2, bon à retenir)
Soient $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $2 \leqslant k \leqslant n$.

Soient $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et un k-cycle
$$c = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_k \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n$$
(avec $a_1, \dots, a_k \in [\![1 ; n]\!]$ deux à deux distincts).

Calculer
$$\sigma c \sigma^{-1}.$$

Correction 18.4
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Exercice 18.5 (Exercice 3)
Soit $n \in [\![2 \; ; +\infty[\![$.

(1) Montrer que si $\tau, \tau' \in \mathfrak{S}_n$ sont des transpositions alors

$$\exists \sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad \sigma \tau \sigma^{-1} = \tau'$$

(on dit que les transpositions τ et τ' sont conjuguées dans $\mathfrak{S}_n$).

(2) Quels sont les morphismes de groupes de $\mathfrak{S}_n$ vers $\{-1 \; ; 1\}$?

Correction 18.6
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 18.7 (Exercice 4)
Soient $n \in [\![3 \; ; +\infty[\![$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

On suppose que σ commute avec toutes les permutations de $\mathfrak{S}_n$.

Montrer

$$\sigma = \mathrm{id}.$$

Correction 18.8
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 18.9 (Exercice 5)
Soit $n \in [\![2 \; ; +\infty[\![$.

On considère le n-cycle

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n.$$

Quelles sont les permutations de $\mathfrak{S}_n$ qui commutent avec c ?

On pourra identifier $[\![1 \; ; n]\!]$ avec $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de sorte que

$$\forall x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad c(x) = x + 1.$$

Correction 18.10
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 18.11 (Exercice 6)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est produit de transpositions de la forme $\begin{pmatrix} i & i+1 \end{pmatrix}$ où $i \in [\![1 \,;\, n-1]\!]$.

Correction 18.12
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 18.13 (Exercice 7, groupe alterné $\mathfrak{A}_n$)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) Donner tous les éléments de $\mathfrak{A}_4$ sous forme de produits de cycles à supports disjoints.

(2) En supposant $n \geqslant 2$, quel est le cardinal de $\mathfrak{A}_n$?

(3) Donner une CNS sur n pour que le groupe $\mathfrak{A}_n$ soit commutatif.

(4) Montrer que tout élément de $\mathfrak{A}_n$ est produit de 3-cycles.

On suppose désormais $n \geqslant 5$.

(5) Soient deux 3-cycles $c_1, c_2 \in \mathfrak{A}_n$. Montrer

$$\exists \sigma \in \mathfrak{A}_n, \quad c_2 = \sigma c_1 \sigma^{-1}$$

(on dit que c_1 et c_2 sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$).

(6) Soient $(G, \times)$ un groupe abélien et $\varphi : \mathfrak{A}_5 \longrightarrow G$ un morphisme de groupes.

(a) Montrer qu'il existe deux permutations $a, b \in \mathfrak{A}_5$ telles que :

$$\begin{cases} a^3 = \mathrm{id} \\ b^2 = \mathrm{id} \\ (ab)^5 = \mathrm{id} \end{cases}$$

(b) Montrer

$$a, b \in \ker \varphi.$$

Indication : utiliser le système et la commutativité de G.

(c) Montrer que φ est constant.

(7) Montrer que tout morphisme de groupes de $\mathfrak{A}_n$ vers un groupe abélien est constant [1].

1. Cela montre que le groupe $\mathfrak{A}_n$ n'est pas « résoluble » si $n \geqslant 5$, proposition importante en « théorie de Galois ». Cette démonstration provient de la belle conférence d'Alain Connes « Évariste Galois et la théorie de l'ambiguïté » (on la trouve facilement sur internet).

Correction 18.14 (1)
On a

$$\mathfrak{A}_4 = \left\{\mathrm{id} \; ; \; \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}3 & 2 & 1\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1 & 2 & 4\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}4 & 2 & 1\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1 & 3 & 4\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}4 & 3 & 1\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}2 & 3 & 4\end{pmatrix} ; \right.$$
$$\left. \begin{pmatrix}4 & 3 & 2\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}\right\}$$

On remarque $\operatorname{Card} \mathfrak{A}_4 = 12$.

Correction 18.15 (2)
Montrons que $f : \begin{array}{ccc} \mathfrak{A}_n & \longrightarrow & \mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n \\ \sigma & \longmapsto & \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\sigma \end{array}$ est une bijection.

f est bien définie car $\forall \sigma \in \mathfrak{A}_n, \; f(\sigma) \in \mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n$.

Soit $\sigma' \in \mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n$.

On a

$$\begin{aligned} \forall \sigma \in \mathfrak{A}_n, \; f(\sigma) = \sigma' &\iff \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\sigma = \sigma' \\ &\iff \sigma = \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\sigma'. \end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned} \varepsilon\left(\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\sigma'\right) &= \varepsilon\left(\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\right)\varepsilon(\sigma') \\ &= (-1)(-1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donc $\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\sigma' \in \mathfrak{A}_n$.

Donc $\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\sigma'$ est l'unique antécédent de σ par f.

Donc f est une bijection.

Donc $\operatorname{Card} \mathfrak{A}_n = \operatorname{Card}(\mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n)$.

Or $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{A}_n \cup (\mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n)$ (réunion disjointe).

Donc

$$\begin{aligned} \operatorname{Card} \mathfrak{S}_n &= \operatorname{Card} \mathfrak{A}_n + \operatorname{Card}(\mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n) \\ n! &= 2 \operatorname{Card} \mathfrak{A}_n \\ \frac{n!}{2} &= \operatorname{Card} \mathfrak{A}_n. \end{aligned}$$

Correction 18.16 (3)
$\mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{A}_2$ sont clairement commutatifs.

De plus, $\mathfrak{A}_3 = \left\{\mathrm{id} \ ; \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}3 & 2 & 1\end{pmatrix}\right\}$ est commutatif car $\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

Enfin, dans $\mathfrak{A}_n$ avec $n \geqslant 4$, on a

$$\begin{cases} \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\end{pmatrix}(3) = 1 \\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}(3) = 2 \end{cases}$$

donc $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\end{pmatrix}$ ne commutent pas donc $\mathfrak{A}_n$ n'est pas commutatif.

D'où la CNS :

$$\mathfrak{A}_n \text{ est commutatif} \iff n \leqslant 3.$$

Correction 18.17 (4)
Soit $\sigma \in \mathfrak{A}_n$.

Soient $N \in \mathbb{N}$ et $a_1, b_1, \dots, a_N, b_N \in [\![1 \ ; N]\!]$ tels que

$$\begin{cases} \sigma = \begin{pmatrix}a_1 & b_1\end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix}a_N & b_N\end{pmatrix} \\ \forall j \in [\![1 \ ; n]\!], \quad a_j \neq b_j \end{cases}$$

Comme $\sigma \in \mathfrak{A}_n$, N est pair donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $N = 2k$.

Donc

$$\sigma = \underbrace{\begin{pmatrix}a_1 & b_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2 & b_2\end{pmatrix}}_{\sigma_1} \dots \underbrace{\begin{pmatrix}a_{N-1} & b_{N-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_N & b_N\end{pmatrix}}_{\sigma_k}.$$

Il suffit de montrer que $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ sont produits de 3-cycles.

Montrons que σ_1 est produit de 3-cycles.

Si $\mathrm{Card}\left(\{a_1 \ ; b_1\} \cap \{a_2 \ ; b_2\}\right) = 2$ alors

$$\begin{pmatrix}a_1 & b_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2 & b_2\end{pmatrix} = \mathrm{id}.$$

Si $\mathrm{Card}\left(\{a_1 \ ; b_1\} \cap \{a_2 \ ; b_2\}\right) = 1$: supposons par exemple $b_1 = a_2$. Alors

$$\begin{pmatrix}a_1 & b_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2 & b_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1 & b_1 & b_2\end{pmatrix}.$$

Si $\mathrm{Card}\left(\{a_1 \ ; b_1\} \cap \{a_2 \ ; b_2\}\right) = 0$ alors

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix}a_1 & b_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2 & b_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}a_1 & b_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1 & a_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1 & a_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2 & b_2\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}a_1 & b_1 & a_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1 & a_2 & b_2\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc σ_1 est produit de 3-cycles.

De même, $\forall i \in [\![1 \ ; k]\!], \quad \sigma_k$ est produit de 3-cycles.

Donc σ est produit de 3-cycles.

Correction 18.18 (5)
Soient $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 \in [\![1 \; ; n]\!]$ tels que

$$\begin{cases} c_1 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix} \\ c_2 = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

x_1, y_1, z_1 sont deux à deux distincts et x_2, y_2, z_2 aussi.

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que

$$\begin{cases} \sigma(x_1) = x_2 \\ \sigma(y_1) = y_2 \\ \sigma(z_1) = z_2 \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} \sigma c_1 \sigma^{-1} &= \begin{pmatrix} \sigma(x_1) & \sigma(y_1) & \sigma(z_1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} \\ &= c_2. \end{aligned}$$

Soient $a, b \in [\![1 \; ; n]\!] \setminus \{x_1 \; ; y_1 \; ; z_1\}$ tels que $a \neq b$.

Posons $\sigma' = \sigma \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$.

On a

$$\begin{cases} \sigma'(x_1) = x_2 \\ \sigma'(y_1) = y_2 \\ \sigma'(z_1) = z_2 \end{cases}$$

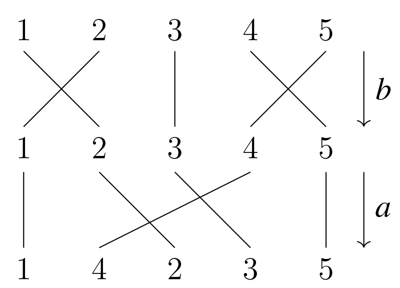
Donc $\sigma' c_1 \sigma'^{-1} = c_2$.

On a $\varepsilon(\sigma') = -\varepsilon(\sigma)$.

Donc σ ou σ' est pair.

Donc c_1 et c_2 sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$.

Correction 18.19 (6a)
On schématise la situation comme suit :



Prenons donc $\begin{cases} a = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\ b = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix} \end{cases}$

On a bien

$$\begin{cases} a^3 = \mathrm{id} \\ b^2 = \mathrm{id} \end{cases}$$

De plus, on a aussi

$$\begin{aligned} (ab)^5 &= \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}\right)^5 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}^5 \\ &= \mathrm{id}. \end{aligned}$$

Correction 18.20 (6b)

Posons $\begin{cases} a' = \varphi(a) \\ b' = \varphi(b) \end{cases}$

On a $a'^3 = \varphi(a)^3 = \varphi\left(a^3\right) = \varphi(\mathrm{id}) = 1$.

De même, $b'^2 = 1$.

Donc $(a'b')^5 = 1$.

De plus G est commutatif donc $(a'b')^5 = a'^5 b'^5$.

Donc $1 = a'^{-1} b'$.

Donc $a' = b'$.

Donc $a'^2 = 1$.

Donc $a' = a'^3 a'^{-2} = 1$.

Donc $b' = 1$.

Donc $a, b \in \ker \varphi$.

Correction 18.21 (6c)
Soit c un 3-cycle.

Selon (5), il existe $\sigma \in \mathfrak{A}_n$ telle que $c = \sigma a \sigma^{-1}$ car $a = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Donc

$$\begin{aligned}
\varphi(c) &= \varphi\left(\sigma a \sigma^{-1}\right) \\
&= \varphi(\sigma)\,\varphi(a)\,\varphi\left(\sigma^{-1}\right) \\
&= \varphi(a)\,\varphi(\sigma)\,\varphi\left(\sigma^{-1}\right) \quad \text{car } \boldsymbol{G} \text{ est commutatif} \\
&= \varphi(a) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Soit $\sigma' \in \mathfrak{A}_n$.

Selon (4), σ' est produit de 3-cycles.

Donc $\varphi(\sigma') = 1$.

Correction 18.22 (7)
Soit $\psi : \mathfrak{A}_n \longrightarrow \boldsymbol{G}$ un morphisme de groupes avec $\boldsymbol{G}$ abélien.

Posons $\varphi = \psi\big|_{\mathfrak{A}_5}$.

Selon (6), φ est constant.

Donc

$$\psi\left(\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\right) = 1.$$

Comme précédemment, on en déduit que tout 3-cycle de $\mathfrak{A}_n$ appartient à $\ker\psi$ puis que ψ est constant.

Chapitre 19

Déterminants

Exercice 19.1 (Exercice 1)
Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Calculer les déterminants suivants quand ils sont définis :

$$A = \begin{vmatrix} a^{-1} & a & a^3 \\ b^{-1} & b & b^3 \\ c^{-1} & c & c^3 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

On factorisera autant que possible les résultats.

Correction 19.2
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 19.3 (Exercice 2)

(1) Donner une CNS sur $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P + \lambda X P' \end{array}$$

soit un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

(2) Donner une CNS sur $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P + (\lambda X + 1) P' + \lambda X^2 P(0) \end{array}$$

soit un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

(3) (Mines-Telecom 2016) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le déterminant de

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & XP' + P \end{array}$$

Correction 19.4

★★ **À venir** ★★

Exercice 19.5 (Exercice 3)

(1) Donner une CNS sur $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ pour que

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & \left(\lambda X^2 + \mu\right) P(1) + XP' \end{array}$$

soit un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

(2) Plus généralement, donner une CNS sur $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ pour que

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & (\lambda X^n + \mu) P(1) + XP' \end{array}$$

soit un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Correction 19.6

★★ **À venir** ★★

Exercice 19.7 (Exercice 4)

Soient $a, b, c, t \in \mathbb{R}$.

On suppose que a, b et c sont deux à deux distincts.

Résoudre le système d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) \begin{cases} x + y + z = t \\ ax + by + cz = t^2 \\ a^2 x + b^2 y + c^2 z = t^3 \end{cases}$$

Correction 19.8

★★ **À venir** ★★

Exercice 19.9 (Exercice 5)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

Résoudre le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$(S) \begin{cases} ax + (a-1)y + (a+b)z = 1 \\ ax + ay + bz = a \\ bx + by + az = b \end{cases}$$

Correction 19.10
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 19.11 (Exercice 6)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculer le déterminant de la matrice $A = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall i, j \in [\![1\ ;n]\!]\,, \quad a_{ij} = |i-j|\,.$$

Correction 19.12
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 19.13 (Exercice 7)
Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$.

Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & x_1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ x_n & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Correction 19.14
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 19.15 (Exercice 8)

(1) Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$. On pose $\forall k \in [\![1\ ;n]\!]\,,\ \ s_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} x_j$.

Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} s_1 & \dots & \dots & \dots & s_1 \\ \vdots & s_2 & \dots & \dots & s_2 \\ \vdots & \vdots & s_3 & \dots & s_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \end{vmatrix}$$

(2) Que vaut le déterminant suivant ?

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & 2 & \dots & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix}$$

Retrouver ce résultat en utilisant l'Exercice 15.15.

Correction 19.16
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 19.17 (Exercice 9)
Calculer le déterminant et la trace des endomorphismes

$$f: \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto & {}^tM \end{array} \qquad \text{et} \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto & (\operatorname{tr} M)\, I_n \end{array}$$

Correction 19.18
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 19.19 (Exercice 10)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique et inversible.

Montrer que l'entier n est pair.

Donner un exemple de matrice antisymétrique inversible.

Correction 19.20
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 19.21 (Exercice 11)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$.

Montrer que l'entier n est pair.

Donner un exemple

- de matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$.
- de matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^2 = -I_n$ avec n impair.

Correction 19.22
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 19.23 (Exercice 12)
Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, elles sont semblables sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire :

$$\left[\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\quad B = PAP^{-1}\right] \iff \left[\exists Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),\quad B = QAQ^{-1}\right].$$

Correction 19.24
★★ **À venir** ★★

Exercice 19.25 (Exercice 13, déterminant d'une matrice « tridiagonale »)
Soient $x, y \in \mathbb{C}$ et $n \in [\![2\,;+\infty[\![$.

On considère la matrice $M_n = \left(m_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\quad m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } |i-j| \geqslant 2 \\ xy & \text{si } i-j=-1 \\ x+y & \text{si } i-j=0 \\ 1 & \text{si } i-j=1 \end{cases}$$

Calculer le déterminant de M_n.

Indication : poser $u_n = \det M_n$ et montrer que la suite $(u_n)_n$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 : $\forall n \in [\![2\,;+\infty[\![,\quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$ (avec $a, b, c \in \mathbb{C}$) puis en déduire la valeur de u_n en fonction de n (utiliser l'exercice Exercice 14.5).

Correction 19.26
★★ **À venir** ★★

Exercice 19.27 (Exercice 14)
Soit $x \in \mathbb{C}$.

On considère la matrice $M = \left(m_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\quad m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } |i-j| \geqslant 2 \\ x & \text{si } |i-j| = 1 \\ 2x & \text{si } i=j \end{cases}$$

Calculer le déterminant de M.

Correction 19.28
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 19.29 (Exercice 15)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

(1) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Justifier qu'il existe un unique endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$\forall j \in [\![1\,;n]\!],\ \ u\left(e_j\right) = e_{\sigma(j)}.$$

Dans la suite, on note u_σ cet endomorphisme et on note M_σ sa matrice dans $\mathscr{B}$. Les matrices de la forme M_σ, où $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, sont appelées matrices de permutation.

(2) On suppose ici $n = 3$. Donner la matrice de permutation M_σ pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_3$.

(3) Montrer que l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n) \\ \sigma & \longmapsto & u_\sigma \end{array}$$

est bien définie et est un morphisme de groupes.

(4) En déduire un morphisme de groupes de $\mathfrak{S}_n$ vers $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

(5) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Calculer le déterminant de u_σ.

Correction 19.30
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 19.31 (Exercice 16)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

(1) Vérifier que $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ est un sous-anneau de $(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), +, \times)$.

(2) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$. Donner une CNS sur $\det A$ pour que A soit inversible dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$.

(3) Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ possède une infinité d'éléments inversibles si $n \geqslant 2$.

Correction 19.32
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Exercice 19.33 (Exercice 17, ENSAM PSI 2016 (BEOS 2727))
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré 3.

On lui associe la famille de vecteurs de $\mathbb{R}_4[X]$:

$$\mathscr{F} = \left(P, XP, P', XP', X^2P'\right).$$

On note D le déterminant de cette famille dans la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$.

(1) Montrer que D est nul si, et seulement si, il existe deux polynômes non-nuls $U \in \mathbb{R}_1[X]$ et $V \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que $PU = P'V$.

(2) Montrer que D est nul si, et seulement si, le polynôme P admet une racine multiple.

(3) Calculer D si $P = aX^3 + bX^2 + cX$.

Correction 19.34
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Exercice 19.35 (Exercice 18, polynômes interpolateurs de Lagrange)
Soient $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ des scalaires deux à deux distincts.

On note $\mathscr{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

On note $L_0, \ldots, L_n \in \mathbb{K}_n[X]$ les polynômes définis par :

$$\forall j \in [\![0\,;n]\!],\ \ L_j = \prod_{k\in[\![0;n]\!]\setminus\{j\}} \frac{X - x_k}{x_j - x_k}.$$

(1) Montrer que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

(2) Calculer $\det_{\mathscr{B}}(L_0, \ldots, L_n)$.

Correction 19.36
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Exercice 19.37 (Exercice 19, ENSEA PSI 2018)
Soient E un espace vectoriel de dimension 3, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ une base de E.

Étudier l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E^3 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x, y, z) & \longmapsto & \det_{\mathscr{B}}(u(x), y, z) + \det_{\mathscr{B}}(x, u(y), z) + \det_{\mathscr{B}}(x, y, u(z)) \end{array}$$

Correction 19.38
★★ À venir ★★

Exercice 19.39 (Exercice 20, TPE PSI 2018)
Soient $a, b, r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}$.

On pose :

$$A = \begin{pmatrix} r_1 & a & \dots & a \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & r_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \Delta(x) = \begin{vmatrix} r_1 + x & a + x & \dots & a + x \\ b + x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a + x \\ b + x & \dots & b + x & r_n + x \end{vmatrix}$$

(1) Montrer que la fonction Δ est polynomiale de degré au plus 1.

(2) En déduire $\det A$ si $a \neq b$.

(3) Supposons $a = b$. Comment calculer $\det A$?

Correction 19.40
★★ À venir ★★

Chapitre 20

Séries, familles sommables

Dans tout le TD, on admet $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Exercice 20.1 (Exercice 1)
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Déterminer la nature des séries suivantes, dont on notera x_n les termes généraux :

(1) $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$.

(2) $\displaystyle\sum_n \left(\exp\frac{1}{n} - \exp\frac{1}{n+1}\right)$.

(3) $\displaystyle\sum_n \left(\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$.

(4) $\displaystyle\sum_n \ln\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}$.

(5) $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n^a 4^n}\binom{2n}{n}$.

(6) $\displaystyle\sum_n \left(a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1} + c\sqrt{n+2}\right)$.

(7) $\displaystyle\sum_n \frac{1}{\ln^n n}$.

(8) $\displaystyle\sum_n \frac{n!^a}{(2n)!}$.

(9) $\displaystyle\sum_n \frac{\sqrt{n}\ln n}{\mathrm{e}^n}$.

(10) $\displaystyle\sum_n \frac{1}{(\ln(\ln n))^n}$.

(11) $\displaystyle\sum_n \int_0^1 \tan^n t\,\mathrm{d}t$.

(12) $\displaystyle\sum_n \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n^2} t \, \mathrm{d}t$.

Correction 20.2

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 20.3 (Exercice 2)

Déterminer si les séries suivantes sont convergentes et calculer alors leur somme :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geqslant 0} \ln\left(\cos\frac{x}{2^n}\right) \text{ où } x \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[.$$

Correction 20.4

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 20.5 (Exercice 3, classique)

(1) Soit $\displaystyle\sum_n u_n$ une série à termes positifs.

On suppose la série $\displaystyle\sum_n u_n$ convergente. La série $\displaystyle\sum_n u_n^2$ est-elle convergente ?

Inversement, si l'on suppose $\displaystyle\sum_n u_n^2$ convergente, la série $\displaystyle\sum_n u_n$ est-elle convergente ?

(2) L'implication montrée ci-dessus reste-t-elle vraie si l'on ne suppose pas que les termes de la suite $(u_n)_n$ sont positifs ?

Correction 20.6

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 20.7 (Exercice 4, TPE)

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left(n \sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

(1) Déterminer $\ell = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$.

(2) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_n (u_n - \ell)$.

Correction 20.8
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 20.9 (Exercice 5, ENSEA)

(1) Montrer qu'on a, quand x tend vers 1 :

$$\operatorname{Arccos} x \sim \sqrt{2(1-x)}.$$

(2) Donner la nature de la série

$$\sum_n \operatorname{Arccos} \frac{n^2+n+1}{n^2+n+3}.$$

Correction 20.10
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 20.11 (Exercice 6, séries de Bertrand)
Donner une CNS sur $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ pour que la série

$$\sum_n \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$$

soit convergente.

Correction 20.12
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 20.13 (Exercice 7)

(1) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \sin\left(\pi n + \frac{\pi}{n}\right)$ est convergente.

On note $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\pi n + \frac{\pi}{n}\right)$ la somme de cette série.

(2) Donner un rang $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\left| S - \sum_{n+1}^{N} \sin\left(\pi n + \frac{\pi}{n}\right) \right| \leqslant 10^{-3}.$$

Correction 20.14
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 20.15 (Exercice 8)
Montrer que la somme
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-8)^n}{(2n)!}$$
est bien définie et donner sa partie entière.

Correction 20.16
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 20.17 (Exercice 9, Mines)
La série
$$\sum_n \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$
est-elle convergente ?

Correction 20.18
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 20.19 (Exercice 10)
Donner une CNS sur $x \in \mathbb{R}$ pour que la série suivante converge :
$$\sum_n \frac{x^n}{1 + x^{2n}}.$$

Correction 20.20
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 20.21 (Exercice 11)
Donner une CNS sur $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ pour que la série suivante converge :
$$\sum_{n \geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}.$$

Correction 20.22

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 20.23 (Exercice 12)

Soit $(u_n)_n$ une suite telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{-u_n}}{n+1}.$$

(1) Déterminer la nature de la série $\sum_n u_n$.

(2) Déterminer la nature de la série $\sum_n (-1)^n u_n$.

Correction 20.24

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 20.25 (Exercice 13)

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On pose :

$$a_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

(1) Justifier que a_n est un entier relatif.

(2) Montrer que la série $\sum_{k \geqslant n+1} \frac{(-1)^k}{k!}$ converge. On note R_n sa somme.

(3) Donner le signe de R_n en fonction de n.

(4) On suppose $n \geqslant 2$. Montrer que a_n est l'entier relatif le plus proche de $\frac{n!}{\mathrm{e}}$.

Correction 20.26

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 20.27 (Exercice 14)
On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}.$$

(1) Quelle est la limite de la suite $(R_n)_n$?

(2) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{nn!}.$$

(3) En déduire un équivalent de R_{n-1} quand n tend vers $+\infty$.

(4) Déterminer la nature des séries

$$\sum_n \sin(2\mathrm{e}\pi n!) \qquad \text{et} \qquad \sum_n \sin(\mathrm{e}\pi n!)\,.$$

Correction 20.28
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

Exercice 20.29 (Exercice 15, CCP)
On pose :

$$\forall n \in [\![2\,;+\infty[\![, \quad u_n = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n.$$

(1) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$.

(2) Déterminer la nature de la série $\sum_n \frac{u_n - 1}{n}$.

On admet[1] *que la série de Bertrand* $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n \ln n}$ *diverge.*

Correction 20.30
⋆⋆ **À venir** ⋆⋆

1. *Cf.* Exercice 20.11.

Exercice 20.31 (Exercice 16)
On considère une suite $(u_n)_n$ telle que :

$$u_0 \in \,]0\,;\pi[\qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = \sin u_n.$$

(1) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ 0 < u_n < \pi.$$

(2) Étudier la croissance de la suite $(u_n)_n$ puis sa limite.

(3) Montrer :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{3}.$$

(4) En déduire un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.
On admet[2] *que si $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ alors sa « moyenne de Cesàro » converge aussi vers ℓ :*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = \ell.$$

Correction 20.32
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 20.33 (Exercice 17)
Soit $(u_n)_n$ une suite décroissante de réels positifs.

On suppose que la série $\sum_n u_n$ est convergente.

Montrer :

$$u_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Correction 20.34
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 20.35 (Exercice 18, astuces à retenir)
Calculer :

$$S_2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \qquad S_2' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \qquad S_4 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} \qquad S_4' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4}.$$

2. *Cf.* Exercice 5.25.

Correction 20.36
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 20.37 (Exercice 19)
Calculer

$$S = \sum_{a=1}^{+\infty} \sum_{b=a}^{+\infty} \frac{1}{b^3}.$$

Correction 20.38
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 20.39 (Exercice 20)
On pose :

$$I = \left\{(k,n) \in \mathbb{N}^2 \;\middle|\; 1 \leqslant k \leqslant n\right\} \qquad I' = \left\{(k,n) \in \mathbb{N}^2 \;\middle|\; 1 \leqslant n \leqslant k\right\} \qquad I'' = (\mathbb{N}^*)^2 .$$

Les familles suivantes sont-elles sommables ? Le cas échéant, calculer leur somme :

$$\left(\frac{(-1)^{n-1}}{nk\,(k+1)}\right)_{(k,n)\in I} \qquad \left(\frac{(-1)^{n-1}}{nk\,(k+1)}\right)_{(k,n)\in I'} \qquad \left(\frac{(-1)^{n-1}}{nk\,(k+1)}\right)_{(k,n)\in I''} .$$

Correction 20.40
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 20.41 (Exercice supplémentaire)
On pose :

$$I = \left\{(k,n) \in \mathbb{N}^2 \;\middle|\; 0 < k < n\right\} .$$

La famille suivante est-elle sommable ? Le cas échéant, calculer sa somme :

$$\mathscr{G} = \left(\frac{1}{2^n} \exp \frac{2ik\pi}{n}\right)_{(k,n)\in I} .$$

Correction 20.42
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 20.43 (Exercice 21)
Déterminer si la série de terme général u_n est convergente et calculer alors sa somme dans les cas suivants :

(1) $\forall n \in [\![2\ ;+\infty[\![,\quad u_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p^2\,(n-p)^2}$.

(2) $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{n-k}k!}$.

Correction 20.44
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 20.45 (Exercice 22)

(1) Calculer
$$S = \sum_{(a,b)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}} \frac{1}{\left(a^2+b\right)\left(a^2+b+1\right)}.$$

(2) En déduire :
$$S' = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\left\lfloor\sqrt{n}\right\rfloor}{n\,(n+1)}.$$

Correction 20.46
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 20.47 (Exercice 23, X MP)
On note I l'ensemble des entiers naturels non-nuls dont l'écriture décimale ne comporte pas le chiffre 9.

La famille $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in I}$ est-elle sommable ?

Correction 20.48
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 20.49 (Exercice 24)
On note P (comme « puissances ») l'ensemble des entiers qui s'écrivent sous la forme a^b où $a, b \in [\![2 ; +\infty[\![$.

(1) Calculer $\displaystyle\sum_{a=2}^{+\infty} \sum_{b=2}^{+\infty} \frac{1}{a^b}$.

(2) En déduire $\displaystyle\sum_{m \in P} \frac{1}{m-1}$ (formule due à Euler).

Correction 20.50
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 20.51 (Exercice 25)
Calculer la partie entière des sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{n=1}^{10^9} \frac{1}{n^{2/3}} \qquad \text{et} \qquad S_2 = \sum_{n=1}^{10^{12}} \frac{1}{n^{2/3}}.$$

Correction 20.52
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Chapitre 21

Espaces préhilbertiens

Exercice 21.1 (Exercice 1)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique :

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (A, B) & \longmapsto & \operatorname{tr}\left({}^t AB\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} \end{array}$$

et on note $\|\cdot\|$ la norme associée.

(1) Calculer $\|I_n\|$.

(2) Déterminer l'orthogonal de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

(3) Montrer :
$$\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|AB\| \leqslant \|A\| \, \|B\| .$$

Correction 21.2
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 21.3 (Exercice 2)
Soient $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

(1) Montrer $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

(2) Montrer $F \subseteq G \implies G^\perp \subseteq F^\perp$.

On suppose désormais que E est de dimension finie.

(3) Montrer $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.

(4) Montrer $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

(5) Montrer $F \subseteq G \iff G^{\perp} \subseteq F^{\perp}$.

Correction 21.4
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 21.5 (Exercice 3)
(1) Montrer que l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \longmapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t) Q(t) \, \mathrm{d}t \end{array}$$

est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

(2) Appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt à la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

Correction 21.6
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 21.7 (Exercice 4, CCP PSI 2012)
Déterminer les réels a, b, c, d tels que l'intégrale

$$\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - ax^3 - bx^2 - cx - d\right)^2 \mathrm{d}x$$

soit la plus petite possible.

Correction 21.8
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 21.9 (Exercice 5, CCP PSI)
On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire canonique et de sa base canonique $\mathscr{B}_0$.

Donner la matrice dans $\mathscr{B}_0$ de la projection orthogonale sur le plan

$$\Pi : \begin{cases} x + 2y + z + 2t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

Correction 21.10
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 21.11 (Exercice 6)
Calculer :

$$\inf_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} \left(t^3 - at^2 - bt - c\right)^2 \mathrm{d}t.$$

Correction 21.12
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 21.13 (Exercice 7)
Calculer :

$$\inf_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_{0}^{1} \left(\mathrm{e}^t - at^2 - bt - c\right)^2 \mathrm{d}t.$$

Correction 21.14
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 21.15 (Exercice 8)
On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique.

On note H l'hyperplan de $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne

$$x + y - z = 0$$

(dans la base canonique).

Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur H.

Correction 21.16
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 21.17 (Exercice 9)
Soient E un espace euclidien, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $x \in E$.

On note S la sphère unité de E :
$$S = \{y \in E \mid \|y\| = 1\}.$$

Montrer :
$$\|x\| = \max_{y \in S} \langle y \mid x \rangle.$$

Correction 21.18
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 21.19 (Exercice 10)
Soient E et F des espaces euclidiens dont on note $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ les normes, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

On suppose que la famille $(u(e_1), \ldots, u(e_n)) \in F^n$ est orthonormale.

Montrer :
$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\|_F = \|x\|_E.$$

Correction 21.20
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 21.21 (Exercice 11)
Soit $f \in \mathscr{C}^0([0\,;1], \mathbb{R})$ positive et non-nulle.

On pose :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^1 f^n(t)\,\mathrm{d}t$$
et :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{I_{n+1}}{I_n}.$$

(1) Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n > 0$.

(2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Correction 21.22
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 21.23 (Exercice 12, Centrale)
Soient E un espace euclidien dont on note le produit scalaire $(x, y) \longmapsto \langle x \mid y \rangle$ et $f \in \mathscr{L}(E)$.

On considère l'application

$$g : \begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \langle f(x) \mid f(y) \rangle \end{array}$$

(1) Donner une CNS sur f pour que g soit un produit scalaire.

(2) On suppose désormais :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle x \mid y \rangle = 0 \iff \langle f(x) \mid f(y) \rangle = 0.$$

(a) Montrer que f est inversible.

(b) Montrer :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \quad \langle f(x) \mid f(y) \rangle = \lambda \langle x \mid y \rangle.$$

Correction 21.24
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 21.25 (Exercice 13, CCP PSI 2016)
On pose :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_3[X], \quad \varphi(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(t)\, Q(t)\, \mathrm{d}t.$$

(1) Montrer que φ est un produit scalaire.

(2) Calculer le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Correction 21.26
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 21.27 (Exercice supplémentaire)
Soient E un espace préhilbertien réel dont on note $\|\cdot\|$ la norme et $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur.

Montrer :

$$p \text{ est un projecteur orthogonal} \iff \forall x \in E, \quad \|p(x)\| \leqslant \|x\|.$$

Correction 21.28
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 21.29 (Exercice 14, sous-espace vectoriel sans supplémentaire orthogonal)
On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathscr{C}^0([0\,;1],\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel :

$$\forall f, g \in E,\ \ \langle f \mid g\rangle = \int_0^1 f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$$

et de la norme associée :

$$\forall f \in E,\ \ \|f\| = \sqrt{\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t}.$$

(1) Justifier que $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$ est un hyperplan de E.

Soit $f \in E$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad f_n : \begin{array}{rcl} [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} nf\left(\dfrac{1}{n}\right)x & \text{si } x \leqslant \dfrac{1}{n} \\ f(x) & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

(2) Montrer :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|f_n - f\| = 0.$$

(3) En déduire :

$$F^\perp = \{0_E\}.$$

(4) F admet-il un supplémentaire orthogonal dans E ?

(5) Que vaut $\left(F^\perp\right)^\perp$?

Correction 21.30
⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 21.31 (Exercice 15)
Soient E un espace euclidien et $v_1, \ldots, v_p$ des vecteurs de E tels que :

$$\forall i, j \in [\![1\,;p]\!],\ \ i \neq j \implies \left\langle v_i \mid v_j\right\rangle < 0.$$

(1) Montrer :

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R},\ \ \left\|\sum_{i=1}^p |\lambda_i|\,v_i\right\| \leqslant \left\|\sum_{i=1}^p \lambda_i v_i\right\|.$$

(2) Montrer que toute sous-famille à $p-1$ éléments de $\left(v_1, \ldots, v_p\right)$ est libre.

Correction 21.32

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 21.33 (Exercice 16, endomorphismes « symétriques »)
Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est symétrique si l'on a :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x) \mid y \rangle = \langle x \mid u(y) \rangle .$$

(1) Les homothéties de E sont-elles des endomorphismes symétriques ?

(2) Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. Montrer que $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$ sont des supplémentaires orthogonaux.

(3) Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur. Montrer l'équivalence :

$$p \text{ est un endomorphisme symétrique} \iff p \text{ est un projecteur orthogonal.}$$

(4) Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E. Montrer :

$$u \text{ est un endomorphisme symétrique} \iff \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \text{ est une matrice symétrique.}$$

Correction 21.34

⋆⋆ À venir ⋆⋆

Exercice 21.35 (Exercice 17, matrices « orthogonales »)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $(C_1, \ldots, C_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$ la famille des colonnes de A :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & \ldots & C_n \end{pmatrix} .$$

La matrice A est dite orthogonale si la famille $(C_1, \ldots, C_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire usuel.

(1) Exprimer la matrice suivante en fonction de A par une formule simple :

$$M = \begin{pmatrix} \langle C_1 \mid C_1 \rangle & \ldots & \langle C_1 \mid C_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle C_n \mid C_1 \rangle & \ldots & \langle C_n \mid C_n \rangle \end{pmatrix}.$$

(2) Compléter :

$$A \text{ est une matrice orthogonale} \iff A \text{ est inversible, d'inverse ...}$$

Correction 21.36
$\star\star$ **À venir** $\star\star$

Exercice 21.37 (Exercice 18)
Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$.

(1) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n\sigma(n)}$.

(2) Montrer que la série $\displaystyle\sum_n \frac{\sigma(n)}{n^2}$ est divergente.

Indication : considérer les sommes partielles de la série : $\forall N \in \mathbb{N},\ \ S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{\sigma(n)}{n^2}$ et minorer $S_{2N} - S_N$.

Correction 21.38
$\star\star$ **À venir** $\star\star$

Chapitre 22

Fonctions de deux variables réelles

⋆⋆ À VENIR ⋆⋆