

Matrizes, Sistemas Lineares  
e  
Determinantes

Roberto Kahn Pereira

Julho/2012

# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>3</b>
<b>Licença</b>	<b>3</b>
<b>Sobre este texto</b>	<b>3</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>4</b>
<b>2 Operações com matrizes</b>	<b>6</b>
2.1 Multiplicação por Real . . . . .	6
2.2 Soma e subtração . . . . .	6
2.3 Multiplicação . . . . .	7
<b>3 Matriz Inversa</b>	<b>8</b>
3.1 Matriz Identidade . . . . .	8
3.2 Matrizes Equivalentes . . . . .	8
3.3 Operações elementares . . . . .	8
3.4 Definição de Matriz Inversa . . . . .	8
3.5 Determinação da Inversa . . . . .	9
<b>4 Sistemas Lineares</b>	<b>10</b>
4.1 Resolução de Sistemas Lineares . . . . .	10
Método da substituição . . . . .	10
Método de Gauss . . . . .	11
4.2 Discussão de Sistemas Lineares . . . . .	11
<b>5 Determinantes</b>	<b>13</b>
5.1 Algumas propriedades . . . . .	13
5.2 Determinantes de matrizes de ordem 2 . . . . .	13
5.3 Determinantes de ordem 3 . . . . .	14
5.4 Determinantes de ordem maior que 3 . . . . .	14
Método de Laplace . . . . .	14
Método da triangularização . . . . .	14
<b>6 Referencias Bibliográficas</b>	<b>16</b>

## Agradecimentos

Agradeço a Deus por me dar inteligência e meios para escrever trabalhos como este. Este trabalho foi escrito em  $\text{\LaTeX}$ , usando o software  $\text{\LaTeX}$  em um PC com sistema Ubuntu. Um agradecimento a todos os envolvidos nesses projetos.

## Licença

Este trabalho foi licenciado com a Licença Creative Commons Atribuição - Não Comercial 3.0 Brasil. Para ver uma cópia desta licença, visite:

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/br/>

ou envie um pedido por carta para Creative Commons, 444 Castro Street, Suite 900, Mountain View, California, 94041, USA.

Você tem a liberdade de:

**Compartilhar** copiar, distribuir e transmitir a obra.

**Remixar** criar obras derivadas.

Sob as seguintes condições:

**Atribuição** Você deve creditar a obra da forma especificada pelo autor ou licenciante (mas não de maneira que sugira que estes concedem qualquer aval a você ou ao seu uso da obra).

**Uso não comercial** Você não pode usar esta obra para fins comerciais.

Comentários e sugestões, posso ser encontrado em: [robertokahn@facebook.com](mailto:robertokahn@facebook.com)

Código e arquivos dvi e ps disponíveis em:

<http://github.com/BetoKahn/Matrizes>

©2012 Roberto Kahn Pereira

## Sobre este texto

Quando eu dava plantão de dúvidas em um cursinho, percebi que precisava estudar mais sobre determinantes. A motivação para esse estudo foi começar a escrever um texto sobre o assunto, e como eu queria aprender  $\text{\LaTeX}$ , comecei a escrever nessa linguagem. Usei a sequência de temas: matrizes, sistemas e determinantes, porque me pareceu mais simples dessa forma.

O conteúdo aborda quase todos os temas dados no ensino médio, mas acredito que possa ser usado como um resumo desses temas para cursos introdutórios de álgebra linear e vetores ou cálculo numérico. Alguns temas estão faltando como: Sistemas de Cramer e determinação da inversa através da matriz adjunta e talvez algum outro tema que não me lembre agora.

Espero que você goste do trabalho, no futuro pode ser que eu complete os temas faltantes.

# 1 Introdução

As matrizes são agrupamentos de números reais ou complexos organizados de forma ordenada em linhas e colunas e delimitados por grandes colchetes  $[[$  ou parênteses  $()$ . São objetos matemáticos com grande importância em física e matemática, como por exemplo, na matemática vetorial ou em problemas de mecânica dos corpos rígidos e em mecânica quântica e relatividade. As matrizes possuem propriedades importantes de se conhecer sobre as quais falarei neste trabalho.

Algumas definições de notação:

- As matrizes são denotadas por letras maiúsculas. Ex. A letra **A** representa a matriz A.
- O número de linhas e colunas de uma matriz é escrito em subscrito junto ao nome da matriz. Exemplo:  $A_{2 \times 3}$  significa que a matriz A possui 2 linhas e 3 colunas.
- Um elemento de uma matriz é denotado pela letra da matriz em forma minúscula com o número da linha e coluna (nessa ordem, sempre) em sobrescrito. Por exemplo,  $a_{11}$  é o elemento da linha 1 e coluna 1 da matriz A.
- De forma mais genérica denotamos  $a_{ij}$  o elemento da linha i e coluna j da matriz A.

**Matriz retangular** é o tipo mais genérico de matriz, que possui número de linhas diferente do número de colunas. Um exemplo de matriz retangular:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

**Matriz quadrada** é uma matriz que possui o mesmo número de linhas e colunas, esse número é chamado de *ordem* da matriz. A matriz  $B_{2 \times 2}$  é dita de ordem 2 e pode ser escrita como  $B_2$ . Um exemplo de matriz quadrada de ordem 2:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ \pi & \sin(30^\circ) \end{bmatrix}$$

**A Diagonal principal** de uma matriz quadrada A de ordem m  $A_m$  são os elementos  $a_{ij}$  tais que  $i=j$  ( $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots$ ). Na matriz  $4 \times 4$  a seguir a diagonal principal contém o símbolo \*\*:

$$\begin{pmatrix} ** & 2 & 3 & 7 \\ 1 & ** & 34 & 3 \\ 34 & 6 & ** & 12 \\ 8,7 & 1 & 1 & ** \end{pmatrix}$$

**A Diagonal secundaria** da matriz  $A_m$  é a diagonal que começa em  $a_{1m}$  e termina em  $a_{m1}$ , indicada na matriz  $3 \times 3$  a seguir por \*\*:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & ** \\ 0 & ** & 5 \\ ** & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

**A Matriz transposta** de uma matriz  $A_{m \times n}$  é a matriz  $(A^t)_{n \times m}$ , tal que o elemento  $(a^t)_{ij}$  da transposta é o elemento  $(a_{ji})$  da matriz original, ou seja, as linhas de A viram as colunas da transposta. Para uma matriz  $A_{2 \times 3}$  genérica:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Um exemplo prático, a transposta da matriz  $A_{2 \times 2}$  dada a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

## 2 Operações com matrizes

### 2.1 Multiplicação por Real

Para multiplicar uma matriz  $A$  por um número real  $\alpha$ , se deve multiplicar todos os elementos da matriz por  $\alpha$ , como a seguir:

$$\text{Seja a matriz } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

e seja  $\alpha$  um número real qualquer, então:

$$\alpha \cdot A = \begin{bmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} \\ \alpha \cdot a_{31} & \alpha \cdot a_{32} \end{bmatrix}$$

Em relação a multiplicação de uma matriz por um número real, vale a propriedade comutativa:

$$A \cdot \alpha = \alpha \cdot A$$

Exemplo: Seja  $A = \begin{pmatrix} 11 & 26 \\ \pi & 5 \end{pmatrix}$ . Calcular a matriz  $B$ , tal que  $B = 3A$ .

$$B = 3A = 3 \cdot \begin{bmatrix} 11 & 26 \\ \pi & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 11 & 3 \cdot 26 \\ 3 \cdot \pi & 3 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 & 78 \\ 3\pi & 15 \end{bmatrix}$$

### 2.2 Soma e subtração

A soma (e subtração) de matrizes se faz assim: Basta somar ( ou subtrair ) um a um os elementos das duas matrizes. Sejam  $A$  e  $B$  duas matrizes e  $C = A + B$ , resulta  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ .

Para simplicidade vou usar matrizes  $2 \times 2$ , mas muitas dessas operações valem para matrizes  $n \times m$ . Para matrizes genéricas  $2 \times 2$  fica:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \quad A + B = \begin{bmatrix} 1+5=6 & 2+6=8 \\ 3+7=10 & 4+8=12 \end{bmatrix}$$

Fazendo agora a subtração  $B - A$ , temos:

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-1 & 6-2 \\ 7-3 & 8-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Para a adição de matrizes valem as propriedades:

**Comutativa**  $A + B = B + A$

**Associativa**  $A + (B + C) = (A + B) + C$

## 2.3 Multiplicação

A multiplicação de matrizes é um pouco mais complicada. Primeiro: O número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas da segunda, sem essa condição não é possível a multiplicação de matrizes e com alguma prática, você entenderá porque. Suponha duas matrizes quadradas 2x2 A e B, a multiplicação  $A \cdot B = P$ , resulta:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

Agora você viu que o termo  $p_{ij}$  se calcula a partir da linha i da matriz A e da coluna j da matriz B, se deve multiplicar termo a termo e somar os produtos dos elementos dessas linhas e colunas. Observe que a multiplicação de matrizes não é necessariamente comutativa, ou seja,  $A \cdot B$  pode ser diferente de  $B \cdot A$ . Não existe divisão de matrizes.

Exemplo:

Sejam as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

O produto  $A \cdot B$  é:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 6 & 1 \cdot 4 + 3 \cdot 8 \\ 5 \cdot 2 + 7 \cdot 6 & 5 \cdot 4 + 7 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 28 \\ 52 & 76 \end{bmatrix}$$

O produto  $B \cdot A$  resulta:

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 22 & 34 \\ 46 & 74 \end{bmatrix}$$

Você pode fazer a demonstração como exercício.

## 3 Matriz Inversa

### 3.1 Matriz Identidade

Existe uma matriz especial, chamada *matriz identidade*. Normalmente ela é denotada pela letra  $I$ , e ela é sempre quadrada com o número 1 na diagonal principal e 0 no resto. Ex:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3.2 Matrizes Equivalentes

Sejam  $M$ ,  $M'$  e  $M''$  matrizes equivalentes, elas possuem as seguintes propriedades:

O Sinal  $\sim$  indica uma relação de equivalência<sup>1</sup>. Achei interessante mencionar esse assunto para mostrar que há relação entre uma matriz (ou sistema) que sofre uma operação elementar e a matriz, ou sistema, resultante dessa operação, porque apesar de não serem idênticos, possuem entre si uma relação de equivalência, que garante certas propriedades.

**Reflexiva**  $M \sim M$ .

**Simétrica**  $M \sim M' \Rightarrow M' \sim M$ .

**Transitiva** Se  $M \sim M'$  e  $M' \sim M''$ , então  $M \sim M''$ .

### 3.3 Operações elementares

Existem 3 operações que se pode fazer com as linhas de uma matriz  $M$  e transformam  $M$  em  $M'$  que é equivalente à  $M$ , essas operações são chamadas de *operações elementares*. As operações elementares são:

1. Trocar duas linhas de uma matriz entre si. Por exemplo:  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
2. Multiplicar uma linha por um número diferente de 0.
3. Multiplicar uma linha por um número diferente de 0 e somar a outra linha.

### 3.4 Definição de Matriz Inversa

A matriz inversa de  $A$  é a matriz  $A^{-1}$ , tal que  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ . Se existe  $A$  e  $A^{-1}$ , então é dito que a matriz  $A$  é *invertível*, mas cuidado, porque nem toda matriz é invertível. Mais a frente será visto um algoritmo (método) para se obter a inversa de uma matriz.

---

<sup>1</sup>Esse tópico é objeto de estudo da álgebra e tem importância também no estudo de sistemas lineares. Sistemas lineares são vistos na seção 4.



Uma matriz com determinante<sup>2</sup> nulo *não é inversível*. Se uma matriz possui uma linha (ou coluna) inteira nula (somente com o número 0), ou se ela possui 2 linhas ou colunas iguais, então ela possui determinante nulo e *não possui inversa*.

### 3.5 Determinação da Inversa

Existe um teorema que garante que o mesmo conjunto de operações elementares que transformam  $A$  em  $I$ , também transformam  $I$  em  $A^{-1}$ , caso exista. Então basta escrever a Matriz  $A$  ao lado da  $I$ , separadas por um traço vertical para melhor visualização, e aplicar operações elementares<sup>3</sup> simultaneamente na matriz  $A$  e na *Identidade* até que  $A$  se torne a *Identidade*, então do outro lado estará a inversa. Exemplo:

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Vamos calcular a matriz  $A^{-1}$ :

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Dividindo por 4 a 2ª linha, resulta:

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 & 1/4 \end{array} \right)$$

Multiplicando a 1ª linha por  $-3/4$  e somando com a 2ª, obtemos o resultado final:

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3/4 & 1/4 \end{array} \right)$$

Do lado esquerdo temos a matriz identidade e do direito a inversa da matriz inicial. A matriz  $A^{-1}$  resulta:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

---

<sup>2</sup>Os determinantes são vistos mais a frente na seção 5.

<sup>3</sup>Aquelas operações definidas em 3.3

## 4 Sistemas Lineares

Um sistema linear é qualquer agrupamento de equações com variáveis de expoente 1, como por exemplo:

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x + 5y = 3 \end{cases}$$

Um sistema pode ter, a principio, qualquer número de variáveis e equações, como veremos mais a frente. Um sistema linear pode ser expresso de forma matricial. Usando o sistema do exemplo anterior, podemos re-escreve-lo como:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Todo sistema linear pode ser escrito como  $A \cdot X = B$ , onde A é chamada de *matriz dos coeficientes*, X é chamada de *matriz das incógnitas* e B é chamada de *matriz dos termos independentes*.

Em sistemas se podem aplicar operações elementares às equações do sistema, de forma idêntica ao que se pode fazer com matrizes e o sistema resultante será um sistema equivalente, com as mesmas propriedades da equivalência de matrizes.

$$\text{O sistema: } \begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 5x + y = 3 \end{cases} \sim \begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

Onde subtrai a 2ª equação da 1ª e o sinal  $\sim$  representa a relação de equivalência.

### 4.1 Resolução de Sistemas Lineares

#### Método da substituição

Resolver um sistema linear significa determinar o valor das incógnitas de forma que todas as equações do sistema sejam simultaneamente verdadeiras ou verificar que isso é impossível, como será visto mais adiante.

Vamos resolver o sistema a seguir:

$$\begin{cases} 3x + y = 1 & (1) \\ x + y = 3 & (2) \end{cases}$$

Da equação (2), temos que  $y=3-x$  (3). Substituindo (3) na equação (1), resulta:

$$\begin{aligned} 3x + y &= 1 \\ 3x + 3 - x &= 1 \\ 2x &= -2 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Usando (3) descobrimos que  $y=4$

Esse é o método da substituição. Para mais de 2 variáveis o processo é similar, no entanto vai resultar em contas mais complicadas. Nesses casos, com mais de 2 variáveis, é melhor usar o método de Gauss, explicado mais a frente.

**Substituição retroativa** Quando se tem um sistema escalonado, como:

$$\begin{cases} ax + by + cz = l \\ dy + ez = m \\ fz = n \end{cases}$$

Então as soluções serão:

$$\begin{aligned} z &= \frac{n}{f} \\ \text{Conhecendo } z, \text{ achamos } y: \\ y &= \frac{m - ez}{d} \\ \text{Sabendo } z \text{ e } y, x \text{ resulta:} \\ x &= \frac{e - cz - by}{a} \end{aligned}$$

Esse algoritmo de encontrar as incógnitas por substituições sucessivas se chama *substituição retroativa*.

## Método de Gauss

O método de Gauss é um algoritmo para fazer uma matriz (ou um sistema) adquirir a forma triangular superior. Ele usa *pivôs* na diagonal principal. A cada operação se deve zerar todos os elementos abaixo do pivô, e para isso se deve multiplicar a linha do pivô por um número conveniente (o multiplicador) e adiciona-la à linha que se quer zerar os termos. Para encontrar o multiplicador você deve dividir o número que você quer zerar pelo pivô e usar o sinal inverso. Por exemplo na matriz  $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  você tem como 1º pivô o 2 e o multiplicador da 1ª linha será  $-(1/2)$ . A seguir vamos fazer um exemplo completo:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 3y + 2z = 1 \\ 5x + y + z = 5 \end{cases}$$

O 1º pivô é o coeficiente de x na 1ª equação. O multiplicador da 3ª linha é  $-5/1 = -5$ . Então, multiplicamos a 1ª linha por -5 e somamos na última, resultando:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 3y + 2z = 1 \\ -9y - 4z = -5 \end{cases}$$

Agora o pivô é o coeficiente de y na 2ª equação, 3, e o multiplicador da 3ª linha é  $-(-9)/3 = 3$ . Multiplicando a 2ª linha por 3 e somando na 3ª, temos:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 3y + 2z = 1 \\ 2z = -2 \end{cases}$$

Fazendo a substituição retroativa temos como solução  $z = 1$ ,  $y = -\frac{1}{3}$  e  $x = \frac{1}{3}$ .

## 4.2 Discussão de Sistemas Lineares

Um sistema linear pode ser:

**Possível e Determinado** É quando um sistema admite 1 única solução, como foi o caso do exemplo visto na seção anterior.

**Possível e Indeterminado** É quando um sistema admite infinitas soluções.

**Impossível** É quando o sistema não admite solução. Por exemplo:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \text{ É um sistema sem solução.}$$

**Sistema Possível e Indeterminado** Este tipo de sistema é reconhecido quando na forma escalonada ele apresenta uma linha do tipo  $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = 0$ , onde  $x_i$  são as  $n$  variáveis do sistema. A notação de chamar as variáveis por  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é mais versátil, às vezes, do que  $x, y, z, \dots$ . A solução desse sistema é escrita em função de uma ou mais variáveis, que são chamadas de *variáveis livres*. Por exemplo o sistema:

$$\begin{cases} 4x + y + z = 2 \\ 2x + 5y + 3z = 3 \\ 6x + 6y + 4z = 5 \end{cases}$$

Na forma escalonada fica:

$$\begin{cases} 4x + y + z = 2 \\ 0x + 4,5y + 2,5z = 2 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

Selecionando  $z$  como a variável livre, podemos escrever  $x$  e  $y$  em função de  $z$ , resultando como conjunto solução:

$$S = \left\{ \left( x = \frac{7}{18} - \frac{1}{9}z, y = \frac{4}{9} - \frac{5}{9}z \right) \right\}$$

Você percebe que existe um par de soluções para cada valor de  $z$ , e existem infinitos valores de  $z$  possíveis, logo existem infinitas soluções.

**Sistemas Impossíveis** Um sistema é impossível quando uma das linhas do sistema escalonado é do tipo:  $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = \beta$  onde  $\beta$  é um número real.

$$\text{Seja o sistema: } \begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y = 2 \\ 0x + 0y = 1 \end{cases}$$

Você percebe claramente que como  $0 \neq 1$  para quaisquer valores de  $x$  e  $y$ , então não existe solução para esse sistema.

## 5 Determinantes

O determinante é uma função definida de forma bem específica sobre os elementos de uma matriz. Essa função associa a matriz a um número real. Somente matrizes quadradas possuem determinantes. O determinante de uma matriz  $A$  se escreve, como  $\det(A)$  ou como  $|A|$ , ou ainda como  $||A||$ . A definição matemática dessa função é complicada e vou omitir nesse texto. Meu objetivo é mostrar como se calcula o determinante de uma matriz. Informações mais específicas podem ser encontradas na referência 1.

### 5.1 Algumas propriedades

- O determinante de uma matriz de ordem 1, é o próprio elemento da matriz.
- Uma matriz com uma linha ou coluna inteira composta de 0's possui determinante nulo.
- Se uma matriz é triangular (superior ou inferior), então seu determinante será o produto dos elementos da diagonal principal<sup>4</sup>.
- Se  $A$  possui 2 linhas ou colunas iguais, então  $\det(A) = 0$ .
- Quando se multiplica uma linha (ou coluna) da matriz  $A$  por um real  $\lambda$ , o determinante da matriz resultante é igual a  $\lambda \cdot \det(A)$ .
- Ao permutar 2 linhas ou colunas da matriz  $A$ , o determinante da matriz resultante vale  $-\det(A)$ .
- Somar à uma linha (ou coluna) de  $A$  uma linha (ou coluna) de  $A$  multiplicada por um real não altera o valor do determinante de  $A$ .
- Se  $A$  possui inversa, então  $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$ .
- Se 1 linha ou coluna do determinante for combinação linear das outras, então o determinante é nulo.

### 5.2 Determinantes de matrizes de ordem 2

Suponha a matriz:  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Seu determinante é obtido multiplicando os elementos da diagonal principal e subtraindo o resultado do produto dos elementos da diagonal secundária, ou de forma mais simples:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

---

<sup>4</sup>Essa propriedade é muito útil para calcular o determinante de uma matriz de ordem maior que 3

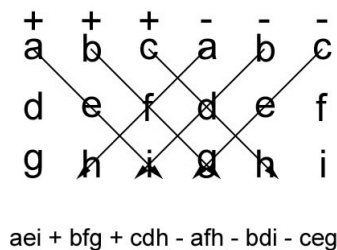


Figura 1: Regra de Sarrus, note que a repetição da 3ª coluna não é necessária.  
Fonte: Wikipedia, citado nas referencias.

### 5.3 Determinantes de ordem 3

Seja a matriz  $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

Seu determinante é:  $\det(A) = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg$

Uma forma prática de calcular esse determinante é a *regra de Sarrus*, na qual se copiam as duas primeiras colunas da matriz ao final da mesma e se atribuem os sinais de acordo com a figura 1

### 5.4 Determinantes de ordem maior que 3

#### Método de Laplace

**Cofator** O cofator  $A_{ij}$  obtido a partir do elemento  $a_{ij}$  da matriz A é obtido multiplicando-se o fator  $-1^{i+j}$  pelo determinante da matriz A, excluídas a linha i e coluna j. Por exemplo:

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$\text{O cofator } A_{11} = -1^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} \quad A_{12} = -1^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}$$

O método de Laplace consiste em escolher 1 linha (ou coluna) da matriz A e somar os produtos dos elementos da linha (ou coluna) escolhida pelos respectivos cofatores. Usando a matriz  $A_{3 \times 3}$  definida antes, vamos calcular seu determinante pelo método de Laplace, vou escolher a linha 1 para eliminar:

$$\begin{aligned}
 \det(A) &= a \cdot A_{11} + b \cdot A_{12} + c \cdot A_{13} \\
 &= a \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + b \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

#### Método da triangularização

Este método se baseia na propriedade vista na seção 5.1 que diz que o determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal principal.

Então o trabalho é transformar o determinante da matriz A no determinante de uma matriz triangular usando operações elementares e lembrando que:

- Quando se multiplica uma linha (ou coluna) da matriz A por um real  $\lambda$ , o determinante da matriz resultante é igual a  $\lambda \cdot \det(A)$ .
- Ao permutar 2 linhas ou colunas da matriz A, o determinante da matriz resultante vale  $-\det(A)$ .
- Somar à uma linha (ou coluna) de A uma linha (ou coluna) de A multiplicada por um real não altera o valor do determinante de A.

Um exemplo: Seja  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ , calcule  $\det(A)$

Vamos usar o método de Gauss usando os elementos da diagonal principal como pivôs para triangular este determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

Neste exemplo sempre somamos o produto de uma linha por um número real à outra linha, e portanto o valor do determinante não é alterado. Um caso um

pouco mais complicado: Calcular:  $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

Primeiro vou trocar de lugar a 1ª com a 2ª linhas:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

Agora vou colocar o 2 da 3ª linha para fora do determinante:

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

Usando o método de Gauss para triangularizar o determinante, resulta:

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -2 \cdot 4 = -8$$

## 6 Referencias Bibliográficas

1. Álgebra Linear e Aplicações; Callioli, A. C., Domingues, H. H., Costa, R. C. F., 6ª edição.
2. <http://pt.wikipedia.org/wiki/Determinante>
3. <http://mathworld.wolfram.com/MatrixInverse.html> - artigo sobre matrizes inversas, em inglês.