Matrizes, Sistemas Lineares
e
Determinantes

Roberto Kahn Pereira

Julho/2012

Sumário

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me dar inteligencia e meios para escrever trabalhos como este. Este trabalho foi escrito em LaTeX, usando o software LaTeXila em um PC com sistema Ubuntu. Um agradecimento a todos os envolvidos nesses projetos.

Licença

Comentários e sugestões, posso ser encontrado em: robertokahn@facebook.com
Código e arquivo pdf disponiveis em:
http://github.com/BetoKahn/Matrizes

Sobre este texto

Quando eu dava plantão de dúvidas em um cursinho, percebi que precisava estudar mais sobre determinantes. A motivação para esse estudo foi começar a escrever um texto sobre o assunto, e como eu queria aprender LaTeX, comecei a escrever nessa linguagem. Usei a sequência de temas: matrizes, sistemas e determinantes, porque me pareceu mais simples dessa forma.
O conteúdo aborda quase todos os temas dados no ensino médio, mas também pode ser usado como uma revisão desses temas para cursos superiores de álgebra linear e vetores ou calculo numérico. Alguns temas estão faltando como: Sistemas de Cramer e talvez algum outro tema que não me lembre agora.
Espero que você goste do trabalho.

1 Introdução

As matrizes são agrupamentos de números reais ou complexos organizados de forma ordenada em linhas e colunas e delimitados por grandes colchetes [] ou parenteses() . São objetos matemáticos com grande importância em física e matemática, como por exemplo, na matemática vetorial ou em problemas de mecânica dos corpos rígidos e em mecânica quântica e relatividade. As matrizes possuem propriedades importantes de se conhecer sobre as quais falarei neste trabalho.
Algumas definições de notação:

- As matrizes são denotadas por letras maiúsculas. Ex. A letra **A** representa a matriz A.
- O número de linhas e colunas de uma matriz é escrito em subscrito junto ao nome da matriz. Exemplo: $A_{2\times 3}$ significa que a matriz A possui 2 linhas e 3 colunas.
- Um elemento de uma matriz é denotado pela letra da matriz em forma minuscula com o número da linha e coluna (nessa ordem, sempre) em sobrescrito. Por exemplo, a_{11} é o elemento da linha 1 e coluna 1 da matriz A.
- De forma mais genérica denotamos a_{ij} o elemento da linha i e coluna j da matriz A.

Matriz retangular é o tipo mais genérico de matriz, que possui número de linhas diferente do número de colunas. Um exemplo de matriz retangular:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Matriz quadrada é uma matriz que possui o mesmo número de linhas e colunas, esse número é chamado de *ordem* da matriz. A matriz $B_{2\times 2}$ é dita de ordem 2 e pode ser escrita como B_2.Um exemplo de matriz quadrada de ordem 2:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ \pi & sen(30^0) \end{bmatrix}$$

A Diagonal principal de uma matriz quadrada A de ordem m A_m são os elementos a_{ij} tais que i=j (a_{11}, a_{22}, a_{33}, ... Na matriz 4×4 a seguir a diagonal principal contem o símbolo **:

$$\begin{pmatrix} ** & 2 & 3 & 7 \\ 1 & ** & 34 & 3 \\ 34 & 6 & ** & 12 \\ 8,7 & 1 & 1 & ** \end{pmatrix}$$

A Diagonal secundaria da matriz A_m é a diagonal que começa em a_{1m} e termina em a_{m1}, indicada na matriz 3×3 a seguir por **:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & ** \\ 0 & ** & 5 \\ ** & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

A Matriz transposta de uma matriz $A_{m \times n}$ é a matriz $(A^t)_{n \times m}$, tal que o elemento $(a^t)_{ij}$ da transposta é o elemento (a_{ji}) da matriz original, ou seja, as linhas de A viram as colunas da transposta. Para uma matriz $A_{2\times3}$ genérica:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \; A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Um exemplo prático, a transposta da matriz $A_{2\times2}$ dada a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \; A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

2 Operações com matrizes

2.1 Multiplicação por Real

Para multiplicar uma matriz A por um numero real α, se deve multiplicar todos os elementos da matriz por α, como a seguir:

$$\text{Seja a matriz A=} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

e seja α um número real qualquer, então:

$$\alpha \cdot A = \begin{bmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} \\ \alpha \cdot a_{31} & \alpha \cdot a_{32} \end{bmatrix}$$

Em relação a multiplicação de uma matriz por um número real, vale a propriedade comutativa:

$$A \cdot \alpha = \alpha \cdot A$$

Exemplo: Seja $A = \left(\begin{smallmatrix} 11 & 26 \\ \pi & 5 \end{smallmatrix}\right)$. Calcular a matriz B, tal que $B = 3A$.

$$B = 3A = 3 \cdot \begin{bmatrix} 11 & 26 \\ \pi & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 11 & 3 \cdot 26 \\ 3 \cdot \pi & 3 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 & 78 \\ 3\pi & 15 \end{bmatrix}$$

2.2 Soma e subtração

A soma (e subtração) de matrizes se faz assim: Basta somar (ou subtrair) um a um os elementos das duas matrizes. Sejam A e B duas matrizes e C = A + B, resulta $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
Para simplicidade vou usar matrizes 2×2, mas muitas dessas operações valem para matrizes $n \times m$. Para matrizes genéricas 2×2 fica:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \quad A + B = \begin{bmatrix} 1+5=6 & 2+6=8 \\ 3+7=10 & 4+8=12 \end{bmatrix}$$

Fazendo agora a subtração $B - A$, temos:

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-1 & 6-2 \\ 7-3 & 8-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Para a adição de matrizes valem as propriedades:

Comutativa $A + B = B + A$

Associativa $A + (B + C) = (A + B) + C$

2.3 Multiplicação

A multiplicação de matrizes é um pouco mais complicada. Primeiro: O número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas da segunda, sem essa condição não é possível a multiplicação de matrizes e com alguma prática, você entenderá porque. Suponha duas matrizes quadradas 2x2 A e B, a multiplicação A·B=P, resulta:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

Agora você viu que o termo p_{ij} se calcula a partir da linha i da matriz A e da coluna j da matriz B, se deve multiplicar termo a termo e somar os produtos dos elementos dessas linhas e colunas. Observe que a multiplicação de matrizes não é necessariamente comutativa, ou seja, $A \cdot B$ pode ser diferente de $B \cdot A$. Não existe divisão de matrizes.
Exemplo:
Sejam as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

O produto $A \cdot B$ é:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 6 & 1 \cdot 4 + 3 \cdot 8 \\ 5 \cdot 2 + 7 \cdot 6 & 5 \cdot 4 + 7 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 28 \\ 52 & 76 \end{bmatrix}$$

O produto $B \cdot A$ resulta:

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 22 & 34 \\ 46 & 74 \end{bmatrix}$$

Como foi falado antes você vê que $A \cdot B \neq B \cdot A$.

3 Matriz Inversa

3.1 Matriz Identidade

Existe uma matriz especial, chamada *matriz identidade*. Normalmente ela é denotada pela letra I, e ela é sempre quadrada com o número 1 na diagonal principal e 0 no resto. Ex:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \; I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2 Matrizes Equivalentes

Sejam M, M' e M" matrizes equivalentes, elas possuem as seguintes propriedades:
O Sinal $\sim$ indica uma relação de equivalência[1]. Achei interessante mencionar esse assunto para mostrar que há relação entre uma matriz (ou sistema) que sofre uma operação elementar e a matriz, ou sistema, resultante dessa operação, porque apesar de não serem idênticos, possuem entre si uma relação de equivalência, que garante certas propriedades.

Reflexiva M $\sim$ M.

Simétrica $M \sim M' \Rightarrow M' \sim M$.

Transitiva $Se\, M \sim M'$ e $M' \sim M''$, então $M \sim M''$.

3.3 Operações elementares

Existem 3 operações que se pode fazer com as linhas de uma matriz M e transformam M em M' que é equivalente à M, essas operações são chamadas de *operações elementares*. As operações elementares são:

1. Trocar duas linhas de uma matriz entre si. Por exemplo: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
2. Multiplicar uma linha por um número diferente de 0.
3. Multiplicar uma linha por um número diferente de 0 e somar a outra linha.

3.4 Definição de Matriz Inversa

A matriz inversa de A é a matriz A^{-1}, tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$. Se existe A e A^{-1}, então é dito que a matriz A é *inversível*, mas cuidado, porque nem toda matriz é inversível. Mais a frente será visto um algoritmo (método) para se obter a inversa de uma matriz.

[1] Esse tópico é objeto de estudo da álgebra e tem importância também no estudo de sistemas lineares. Sistemas lineares são vistos na seção 4.

Uma matriz com determinante[2] nulo *não é inversível.* Se uma matriz possui uma linha (ou coluna) inteira nula (somente com o número 0), ou se ela possui 2 linhas ou colunas iguais, então ela possui determinante nulo e *não possui inversa.*

3.5 Determinação da Inversa

Existe um teorema que garante que o mesmo conjunto de operações elementares que transformam A em I, também transformam I em A^{-1}, caso exista. Então basta escrever a Matriz A ao lado da I, separadas por um traço vertical para melhor visualização, e aplicar operações elementares[3] simultaneamente na atriz A e na $Identidade$ até que A se torne a $Identidade$, então do outro lado estará a inversa. Exemplo:

$$\text{Seja A=}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Vamos calcular a matriz A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Dividindo por 4 a 2^a linha, resulta:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 & 1/4 \end{array}\right)$$

Multiplicando a 1^a linha por -3/4 e somando com a 2^a, obtemos o resultado final:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3/4 & 1/4 \end{array}\right)$$

Do lado esquerdo temos a matriz identidade e do direito a inversa da matriz inicial. A matriz A^{-1} resulta:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

3.5.1 Outro método

Matriz adjunta Também conhecida como *adjunta clássica.* Dada uma matriz A de ordem n, com elementos a_{ij}, a adjunta é a matriz formada pelos cofatores[4] de A, denotados A_{ij}.

$$adj(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

[2] Os determinantes são vistos mais a frente na seção 5.
[3] Aquelas operações definidas em 3.3
[4] Os cofatores são vistos na seção 5.4

A matriz inversa de A, A^{-1} pode ser calculada a partir da seguinte fórmula:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$$

4 Sistemas Lineares

Um sistema linear é qualquer agrupamento de equações com variáveis de expoente 1, como por exemplo:

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x + 5y = 3 \end{cases}$$

Um sistema pode ter, a principio, qualquer número de variáveis e equações, como veremos mais a frente. Um sistema linear pode ser expresso de forma matricial. Usando o sistema do exemplo anterior, podemos re-escreve-lo como:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Todo sistema linear pode ser escrito como $A \cdot X = B$, onde A é chamada de *matriz dos coeficientes*, X é chamada de *matriz das incógnitas* e B é chamada de *matriz dos termos independentes*.

Em sistemas se podem aplicar operações elementares às equações do sistema, de forma idêntica ao que se pode fazer com matrizes e o sistema resultante será um sistema equivalente, com as mesmas propriedades da equivalência de matrizes.

$$\text{O sistema:} \begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 5x + y = 3 \end{cases} \sim \begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

Onde subtrai a 2^a equação da 1^a e o sinal $\sim$ representa a relação de equivalência.

4.1 Resolução de Sistemas Lineares

Método da substituição

Resolver um sistema linear significa determinar o valor das incógnitas de forma que todas as equações do sistema sejam simultaneamente verdadeiras ou verificar que isso é impossível, como será visto mais adiante.
Vamos resolver o sistema a seguir:

$$\begin{cases} 3x + y = 1 & (1) \\ x + y = 3 & (2) \end{cases}$$

Da equação (2), temos que y=3-x (3). Substituindo (3) na equação (1), resulta:

$3x + y = 1$
$3x + 3 - x = 1$
$2x = -2$
$x = -1$
Usando (3) descobrimos que y=4

Esse é o método da substituição. Para mais de 2 variáveis o processo é similar, no entanto vai resultar em contas mais complicadas. Nesses casos, com mais de 2 variáveis, é melhor usar o método de Gauss, explicado mais a frente.

Substituição retroativa Quando se tem um sistema escalonado, como:

$$\begin{cases} ax + by + cz = l \\ \quad dy + ez = m \\ \qquad fz = n \end{cases}$$

Então as soluções serão:

$z = \dfrac{n}{f}$
Conhecendo z, achamos y:
$y = \dfrac{m - ez}{d}$
Sabendo z e y, x resulta:
$x = \dfrac{e - cz - by}{a}$

Esse algoritmo de encontrar as incógnitas por substituições sucessivas se chama *substituição retroativa*.

Método de Gauss

O método de Gauss é um algoritmo para fazer uma matriz (ou um sistema) adquirir a forma triangular superior. Ele usa *pivôs* na diagonal principal. A cada operação se deve zerar todos os elementos abaixo do pivô, e para isso se deve multiplicar a linha do pivô por um número conveniente (o multiplicador) e adiciona-la à linha que se quer zerar os termos. Para encontrar o multiplicador você deve dividir o número que você quer zerar pelo pivô e usar o sinal inverso. Por exemplo na matriz $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ você tem como 1^o pivô o 2 e o multiplicador da 1^a linha será -(1/2). A seguir vamos fazer um exemplo completo:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ \quad 3y + 2z = 1 \\ 5x + y + z = 5 \end{cases}$$

O 1º pivô é o coeficiente de x na 1^a equação. O multiplicador da 3^a linha é $-5/1 = -5$. Então, multiplicamos a 1^a linha por -5 e somamos na última, resultando:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ \quad 3y + 2z = 1 \\ \quad -9y - 4z = - - 5 \end{cases}$$

Agora o pivô é o coeficiente de y na 2^a equação, 3, e o multiplicador da 3^a linha é $-(-9)/3 = 3$. Multiplicando a 2^a linha por 3 e somando na 3^a, temos:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ \quad 3y + 2z = 1 \\ \qquad 2z = -2 \end{cases}$$

Fazendo a substituição retroativa temos como solução $z = 1$, $y = -\frac{1}{3}$ e $x = \frac{1}{3}$.

4.2 Discussão de Sistemas Lineares

Um sistema linear pode ser:

Possível e Determinado É quando um sistema admite 1 única solução, como foi o caso do exemplo visto na seção anterior.

Possível e Indeterminado É quando um sistema admite infinitas soluções.

Impossível É quando o sistema não admite solução. Por exemplo:

$\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$ É um sistema sem solução.

Sistema Possível e Indeterminado Este tipo de sistema é reconhecido quando na forma escalonada ele apresenta uma linha do tipo $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$, onde x_i são as n variáveis do sistema. A notação de chamar as variáveis por $x_1, x_2, \cdots, x_n$ é mais versátil, às vezes, do que $x, y, z, ...$ A solução desse sistema é escrita em função de uma ou mais variáveis, que são chamadas de *variáveis livres*. Por exemplo o sistema:

$$\begin{cases} 4x+y+z=2 \\ 2x+5y+3z=3 \\ 6x+6y+4z=5 \end{cases}$$

Na forma escalonada fica:

$$\begin{cases} 4x+y+z=2 \\ 0x+4,5y+2,5z=2 \\ 0x+0y+0z=0 \end{cases}$$

Selecionando z como a variável livre, podemos escrever x e y em função de z, resultando como conjunto solução:

$$S = \left\{ \left(x = \frac{7}{18} - \frac{1}{9}z, y = \frac{4}{9} - \frac{5}{9}z \right) \right\}$$

Você percebe que existe um par de soluções para cada valor de z, e existem infinitos valores de z possíveis, logo existem infinitas soluções.

Sistemas Impossíveis Um sistema é impossível quando uma das linhas do sistema escalonado é do tipo: $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = \beta$ onde β é um número real.

Seja o sistema: $\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=3 \end{cases} \sim \begin{cases} x+y=2 \\ 0x+0y=1 \end{cases}$

Você percebe claramente que como $0 \neq 1$ para quaisquer valores de x e y, então não existe solução para esse sistema.

5 Determinantes

O determinante é uma função definida de forma bem específica sobre os elementos de uma matriz. Essa função associa a matriz à um número real. Somente matrizes quadradas possuem determinantes. O determinante de uma matriz A se escreve, como det(A) ou como |A|, ou ainda como ||A||. A definição matemática dessa função é complicada e vou omitir nesse texto. Meu objetivo é mostrar como se calcula o determinante de uma matriz. Informações mais específicas podem ser encontradas na referencia 1.

5.1 Algumas propriedades

- O determinante de uma matriz de ordem 1, é o próprio elemento da matriz.
- Uma matriz com uma linha ou coluna inteira composta de 0's possui determinante nulo.
- Se uma matriz é triangular (superior ou inferior), então seu determinante será o produto dos elementos da diagonal principal[5].
- Se A possui 2 linhas ou colunas iguais, então $det(A) = 0$.
- Quando se multiplica uma linha (ou coluna) da matriz A por um real λ, o determinante da matriz resultante é igual a $\lambda \cdot det(A)$.
- Ao permutar 2 linhas ou colunas da matriz A, o determinante da matriz resultante vale $-det(A)$.
- Somar à uma linha (ou coluna) de A uma linha (ou coluna) de A multiplicada por um real não altera o valor do determinante de A.
- Se A possui inversa, então $det(A^{-1}) = 1/det(A)$.
- Se 1 linha ou coluna do determinante for combinação linear das outras, então o determinante é nulo.

5.2 Determinantes de matrizes de ordem 2

Suponha a matriz: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Seu determinante é obtido multiplicando os elementos da diagonal principal e subtraindo o resultado do produto dos elementos da diagonal secundaria, ou de forma mais simples:

$$det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

[5] Essa propriedade é muito útil para calcular o determinante de uma matriz de ordem maior que 3

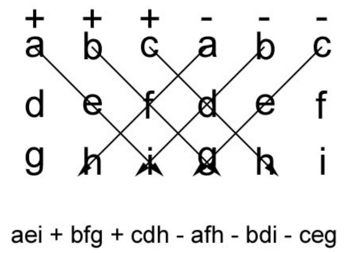

Figura 1: Regra de Sarrus, note que a repetição da 3^a coluna não é necessária. Fonte: Wikipedia, citado nas referencias.

5.3 Determinantes de matrizes de ordem 3

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$
Seu determinante é: $det(A) = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg$
Uma forma prática de calcular esse determinante é a *regra de Sarrus*, na qual se copiam as duas primeiras colunas da matriz ao final da mesma e se atribuem os sinais de acordo com a figura 1

5.4 Determinantes de ordem maior que 3

Método de Laplace

Cofator O cofator A_{ij} obtido a partir do elemento a_{ij} da matriz A é obtido multiplicando-se o fator -1^{i+j} pelo determinante da matriz A, excluídas a linha i e coluna j. Por exemplo:

$$\text{Seja A=} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

O cofator $A_{11} = -1^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} \quad A_{12} = -1^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}$

O método de Laplace consiste em escolher 1 linha (ou coluna) da matriz A e somar os produtos dos elementos da linha (ou coluna) escolhida pelos respectivos cofatores. Usando a matriz $A_{3\times 3}$ definida antes, vamos calcular seu determinante pelo método de Laplace, vou escolher a linha 1 para eliminar:

$$\begin{aligned} det(A) =& a \cdot A_{11} + b \cdot A_{12} + c \cdot A_{13} \\ &= a \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + b \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Método da triangularização

Este método se baseia na propriedade vista na seção 5.1 que diz que o determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal principal.

Então o trabalho é transformar o determinante da matriz A no determinante de uma matriz triangular usando operações elementares e lembrando que:

- Quando se multiplica uma linha (ou coluna) da matriz A por um real λ, o determinante da matriz resultante é igual a $\lambda \cdot det(A)$.
- Ao permutar 2 linhas ou colunas da matriz A, o determinante da matriz resultante vale $-det(A)$.
- Somar à uma linha (ou coluna) de A uma linha (ou coluna) de A multiplicada por um real não altera o valor do determinante de A.

Um exemplo: Seja A= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, calcule $det(A)$

Vamos usar o método de Gauss usando os elementos da diagonal principal como pivôs para triangularizar este determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

Neste exemplo sempre somamos o produto de uma linha por um número real à outra linha, e portanto o valor do determinante não é alterado. Um caso um pouco mais complicado: Calcular: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

Primeiro vou trocar de lugar a 1^a com a 2^a linhas:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

Agora vou colocar o 2 da 3^a linha para fora do determinante:

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

Usando o método de Gauss para triangularizar o determinante, resulta:

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -2 \cdot 4 = -8$$

6 Referencias Bibliográficas

1. Álgebra Linear e Aplicações; Callioli,A. C., Domingues, H. H., Costa, R. C. F., $6^{\underline{a}}$ edição.
2. http://pt.wikipedia.org/wiki/Determinante
3. http://mathworld.wolfram.com/MatrixInverse.html - artigo sobre matrizes inversas, em inglês.