

## Несобственные интегралы

**Определение.**  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R} \quad -\infty < a < b \leq +\infty$

$f$  допустима, если  $f$  — кусочно-непрерывна на  $[a, A] \quad \forall A \in (a, b)$

**Определение.**

$$\Phi(A) := \int_a^A f$$

$$\exists \lim_{A \rightarrow b-0} \Phi(A)$$

- Если да, то это **несобственный интеграл**  $\int_a^{\rightarrow b} f dx$ .
- Если этот предел конечный, то тот несобственный интеграл **сходится**.
- Если этот предел бесконечный или не существует, то несобственный интеграл **расходится**.

*Пример.*

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{1}{x^p} dx \\ \int_1^A \frac{1}{x^p} dx &= \begin{cases} \frac{A^{1-p} - 1^{1-p}}{1-p}, & p \neq 1 \\ \ln A - \ln 1, & p = 1 \end{cases} \\ \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{1}{x^p} dx &= \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p > 1 \\ +\infty, & p < 1 \\ +\infty, & p = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$p > 1$  — интеграл сходится,  $p \leq 1$  — интеграл расходится.

*Пример.*

$$\begin{aligned} \int_{\rightarrow 0}^1 \frac{1}{x^p} dx \\ \lim_{A \rightarrow \infty} \int_A^1 \frac{1}{x^p} dx &= \begin{cases} \text{кон.}, & p < 1 \\ +\infty, & p \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Можно разбивать интеграл с  $> 1$  причиной несобственности на части, где только одна причина:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \int_0^{10} + \int_{10}^{+\infty}$$

Если все интегралы в правой части сходятся, то в левой части тоже.

*Пример.*

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx &= \int_{-1}^0 \frac{1}{x} dx + \int_{\rightarrow 0}^1 \frac{1}{x} dx \\ \int_{-1}^0 \frac{1}{x} dx &= -\infty \quad \int_{\rightarrow 0}^1 \frac{1}{x} dx = +\infty \end{aligned}$$

Итого  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$  расходится. Хочется сократить бесконечности, особенно если посмотреть на график  $\frac{1}{x}$  — он симметричен. Кажется, что  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = 0$ . Однако мы все равно считаем этот интеграл расходящимся. Это можно обосновать так: если нагреть одну сторону стула до  $+200$  градусов, а другую охладить до  $-170$ , то вы не захотите на нем сидеть, хотя средняя температура адекватная.

## Свойства

### Критерий Больцано-Коши

$$\lim_{A \rightarrow b-0} \int_a^A \text{кон.} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \Delta \in (a, b) \forall A, B \in (\Delta, b) \left| \int_A^B f \right| < \varepsilon$$

*Доказательство.* Тривиально из определения предела. □

*Следствие.* Если  $\exists A_n, B_n \rightarrow b-0$   $\int_{A_n}^{B_n} f \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , то  $\int_a^b f$  расходится.

*Пример.*

$$\int_1^{+\infty} \sin \sqrt{x} dx$$

Это синусоида с увеличивающимся периодом.

Чтобы доказать, что интеграл расходится, возьмём  $A_n, B_n$  такие что  $\int_{A_n}^{B_n} \sin \sqrt{x} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

$$A_n := \left(2\pi n + \frac{\pi}{6}\right)^2 \quad B_n := \left(2\pi(n+1) - \frac{\pi}{6}\right)^2$$

$$\int_{A_n}^{B_n} \sin \sqrt{x} dx \geq \frac{1}{2}(B_n - A_n) \rightarrow \infty$$

### Аддитивность по промежутку

$f$  — допустима.  $[a, b)$   $c \in (a, b)$

Тогда  $\int_a^c f$  и  $\int_c^b f$  — сходятся/расходятся одновременно и, если сходятся,  $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

Берем  $A > c$   $\int_a^A = \int_a^c + \int_c^A$

*Следствие.*  $f$  — допустима.  $[a, +\infty)$ ,  $\int_a^{+\infty} f$  — сходится. Тогда

$$\int_A^{+\infty} f \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$$

Это называется “хвост”.

### Линейность

$f, g$  — допустима  $\int_a^b f, \int_a^b g$  — сход.

$\lambda \in \mathbb{R}$

Тогда  $\lambda f, f \pm g$  — допустима и  $\int_a^b \lambda f, \int_a^b f \pm g$  — сходятся.

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f \quad \int_a^b f \pm g = \int_a^b f \pm \int_a^b g$$

*Доказательство.* Тривиально. □

### Интегрирование неравенств

$f, g$  — доп.,  $\int_a^b f, \int_a^b g$  — существуют в  $\overline{\mathbb{R}}$

$f \leq g$  на  $[a, b)$ . Тогда

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Очевидно:  $\int_a^A f \leq \int_a^A g, A \rightarrow b-0$

**Пятое свойство**

$f, g$  — дифф.  $[a, b)$ ;  $f', g'$  — допустимы. Это эквивалентно  $f, g \in C^1[a, b)$ .

Тогда\*

$$\int_a^{\rightarrow b} f g' = f g \Big|_a^{\rightarrow b} - \int_a^{\rightarrow b} f' g$$

\* значит, что если два из трех пределов существуют, то существует третий и выполняется равенство.

**Шестое свойство**

$\varphi : [\alpha, \beta) \rightarrow \langle A, B \rangle, \varphi \in C^1$

$f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, f$  — непр.,  $\exists \varphi(\beta - 0) \in \overline{\mathbb{R}}$

Тогда\*

$$\int_{\alpha}^{\rightarrow \beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\rightarrow \varphi(\beta-0)} f(x) dx$$

*Примечание.*  $f$  — кусочно непрерывна на  $[a, b]$ .  $f$  можно также рассматривать на  $[a, b)$ . Тогда

$$\int_a^{\rightarrow b} f = \int_a^b f$$

Упраздняем “ $\rightarrow$ ”.

**Признаки сходимости несобственных интегралов**

$f$  — допустима на  $[a, b)$ ,  $f \geq 0$ ,  $\Phi(A) = \int_a^A f dx$

$\int_a^b f$  — сходится  $\Leftrightarrow \Phi$  ограничена.

*Доказательство.*  $\int_a^b f$  — сх.  $\Leftrightarrow \lim_{A \rightarrow b-0} \Phi(A)$  кон.  $\Leftrightarrow \Phi$  — огр. □

**Лемма 1. Признак сравнения:**

$f, g \geq 0$ , допустимы на  $[a, b)$

1.  $f \leq g$  на  $[a, b)$ . Тогда:

(a)  $\int_a^b g$  — сходится  $\Rightarrow \int_a^b f$  — сходится

(b)  $\int_a^b f$  — расходится  $\Rightarrow \int_a^b g$  — расходится

2.  $\exists \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = l < +\infty$ :

(a)  $\int_a^b g$  — сходится  $\Rightarrow \int_a^b f$  — сходится

(b)  $\int_a^b f$  — расходится  $\Rightarrow \int_a^b g$  — расходится

*Доказательство.* 1.  $\Phi(A) := \int_a^A f, \Psi(A) = \int_a^A g$

$$0 \leq \Phi(A) \leq \Psi(A)$$

(a)  $\int_a^b g$  — сходится  $\Rightarrow \Psi$  огр.  $\Rightarrow \Phi$  огр.  $\Rightarrow \int_a^b f$  — сходится

(b)  $\int_a^b f$  — расходится  $\Rightarrow \Phi$  неогр.  $\Rightarrow \Psi$  неогр.  $\Rightarrow \int_a^b g$  — расходится

2.  $l < +\infty \stackrel{def}{\Rightarrow} \exists a_1 : \forall x > a_1 \quad 0 \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq l + 1 \Rightarrow f(x) \leq g(x)(l + 1)$ , дальше тривиально (предположительно по пункту 1.)

□

Примечание.  $l > 0$ :

$$\exists a_2 : \forall x > a_2 \quad \frac{l}{2} < \frac{f(x)}{g(x)}$$

1.  $\int_a^b f$  — сходится  $\Rightarrow \int_a^b g$  — сходится
2.  $\int_a^b g$  — расходится  $\Rightarrow \int_a^b f$  — расходится

Следствие. Если  $+\infty > l > 0$ , то:

1.  $\int_a^b f$  — сходится  $\Leftrightarrow \int_a^b g$  — сходится
2.  $\int_a^b f$  — расходится  $\Leftrightarrow \int_a^b g$  — расходится

Пример.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{1+x^2} dx \text{ сходится?}$$

С трюком:

$$\frac{\cos^2 x}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} = \arctan \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

Более цинично:

$$\frac{\cos^2 x}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2} \text{ на } [2020, +\infty)$$

$$\int_{2020}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \text{ сходится} \Rightarrow \int_{2020}^{+\infty} f \text{ сходится}$$

Пример. Этот пример будет на экзамене.

При каких  $\alpha$  и  $\beta$  сходится:

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$$

Мы знаем, что  $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$  сходится при  $p > 1$  и расходится при  $p \leq 1$ .

При  $\alpha > 1, \beta > 0$

$$\frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} < \frac{1}{x^\alpha}$$

Таким же образом можно еще что-то выяснить, но мы так делать не будем. Вместо этого воспользуемся методом “удавливание логарифма”

1.  $\alpha > 1 \quad \alpha = 1 + 2a, a > 0$

$$0 \leq \frac{1}{x^{1+2a} (\ln x)^\beta} = \frac{1}{x^{1+a}} \cdot \frac{1}{x^a (\ln x)^\beta}$$

$$\beta \geq 0 \quad x^a (\ln x)^\beta \rightarrow +\infty$$

$$b := -\beta \quad \beta < 0 \quad x^a (\ln x)^\beta = \frac{x^a}{(\ln x)^b} = \left( \frac{x^{\frac{a}{b}}}{\ln x} \right)^b \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \xrightarrow{\text{Лопиталь}} \frac{\frac{a}{b} x^{\frac{a}{b}-1}}{\frac{1}{x}} \rightarrow +\infty$$

$$x^a (\ln x)^\beta \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \Rightarrow \frac{1}{x^{1+a}} \cdot \frac{1}{x^a (\ln x)^\beta} < \frac{1}{x^{1+a}} - \text{сходится}$$

2.  $\alpha < 1 \quad \alpha = 1 - 2a, a > 0$

$$\frac{1}{x^{1-2a}(\ln x)^\beta} = \frac{1}{x^{1-a}} \cdot \frac{x^a}{(\ln x)^\beta} > \frac{1}{x^{1-a}}$$

3.  $\alpha = 1$

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} \stackrel{y=\ln x}{=} \int_{\ln 10}^{+\infty} \frac{dy}{y^\beta}$$

Сходится при  $\beta > 1$ , расходится при  $\beta \leq 1$

## Гамма-функция Эйлера

$\Gamma$  — гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$$

### Область определения

1.  $\int_1^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$  — сходится при всех  $t \in \mathbb{R}^+$ :

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_1^{+\infty} = e$$

$$0 \leq x^{t-1} e^{-x} \leq x^{t-1} e^{-\frac{x}{2}} e^{-\frac{x}{2}}$$

$$x^{t-1} e^{-\frac{x}{2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow \text{при больших } x \quad x^{t-1} e^{-\frac{x}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \leq e^{-\frac{x}{2}}$$

2.  $\int_{\rightarrow 0}^1 x^{t-1} e^{-x} dx$

$$x^{t-1} e^{-x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^{t-1} \quad t > 0 \text{ сходится, } t \leq 0 \text{ расходится}$$

### Выпуклость

Подынтегральное выражение как функция от  $t$  является выпуклой функцией (при  $x \geq 0$ )

$$t \mapsto x^{t-1} e^{-x} = f_x(t)$$

$$f(\alpha t_1 + (1 - \alpha)t_2) \leq \alpha f_x(t_1) + (1 - \alpha)f_x(t_2)$$

$$\int_0^{+\infty} f_x dx \leq \alpha \int_0^{+\infty} f_x(t_1) dx + (1 - \alpha) \int_0^{+\infty} f_x(t_2) dx$$

Определение выпуклости:

$$x^{(\alpha t_1 + (1 - \alpha)t_2) - 1} e^{-x} \leq \alpha x^{t_1 - 1} e^{-x} + (1 - \alpha)x^{t_2 - 1} e^{-x}$$

Зафиксируем  $\alpha, t_1, t_2$ . Проинтегрируем по  $x$  от 0 до  $+\infty$ :

$$\Gamma(\alpha t_1 + (1 - \alpha)t_2) \leq \alpha \Gamma(t_1) + (1 - \alpha)\Gamma(t_2)$$

$\Gamma$  — выпуклая  $\Rightarrow \Gamma$  — непрерывная

**Третье свойство**

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$$

$$\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} x^t e^{-x} dx = -x^t e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + t \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx = 0 + t\Gamma(t)$$

*Следствие.*  $\Gamma(n+1) = n!$

*Доказательство.*

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \dots = n(n-1) \dots 1\Gamma(1) = n!$$

□

**Четвертое свойство**

$$\Gamma(t) = \frac{\Gamma(t+1)}{t} \underset{t \rightarrow +0}{\sim} \frac{1}{t}$$

**Пятое свойство**

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx \stackrel{x=y^2}{=} 2 \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = 2 \frac{1}{2} \sqrt{\pi} - \text{интеграл Эйлера-Пуассона}$$

*Доказательство.*

$$1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Оба неравенства следуют из неравенства  $e^t \geq 1+t \quad \forall t$ .

Зафиксируем  $n \in \mathbb{N}$

$$(1-x^2)^n \leq e^{-nx^2} \leq \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx \leq \int_0^1 e^{-nx^2} dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$$

Казалось бы, переход от интеграла  $\int_0^1$  к  $\int_0^{+\infty}$  очень грубый, но это не так.

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx \stackrel{y=\sqrt{n}x}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} I$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx \stackrel{x=\cos y}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} y dy$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} dx \stackrel{x=\tan y}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos y)^{2n-2} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n-2} dt$$

$$\sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} y dy \leq I \leq \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n-2} dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \frac{(n-1)!!}{n!!} \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n \text{ чет.} \\ 1, & n \text{ нечет.} \end{cases}$$

$$\sqrt{n} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leq I \leq \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2} \sqrt{n}$$

По формуле Валлиса  $\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \rightarrow \sqrt{\pi}$ :

$$\sqrt{n} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right) \frac{n}{2n+1} \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2} \sqrt{n} = \frac{\frac{\pi}{2} \sqrt{n} \frac{1}{\sqrt{n-1}}}{\frac{(2n-2)!!}{(2n-3)!!} \frac{1}{\sqrt{n-1}}} \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

□