

1 Определения и формулировки

1.1 Внутренняя точка множества, открытое множество, внутренность

a — внутренняя точка множества D , если $\exists U(a) : U(a) \subset D$, т.е. $\exists r > 0 : B(a, r) \subset D$

D — открытое множество, если $\forall a \in D : a$ — внутренняя точка D

Внутренностью множества D называется $Int(D) = \{x \in D : x \text{ — внутр. точка } D\}$

1.2 Предельная точка множества

a — предельная точка множества D , если

$$\forall \dot{U}(a) \quad \dot{U}(a) \cap D \neq \emptyset$$

1.3 Замкнутое множество, замыкание, граница

D — замкнутое множество, если оно содержит все свои предельные точки.

$\overline{D} = D \cup (\text{множество предельных точек } D)$ — замыкание.

Граница множества — множество его граничных точек. Обозначается ∂D

1.4 Изолированная точка, граничная точка

a — изолированная точка D , если $a \in D$ и a — не предельная, то есть:

$$\exists U(a) \quad U(a) \cap D = \{a\}$$

a — граничная точка D , если $\forall U(a) \quad U(a)$ содержит точки как из D , так и из D^c

1.5 Описание внутренней точки множества

1. $Int D$ — откр. множество

2. $Int D = \bigcup_{\substack{D \supset G \\ G \text{ — открыт}}} G$ — максимальное открытое множество, содержащееся в D

3. D — откр. в $X \Leftrightarrow D = Int D$

1.6 Описание замыкания множества в терминах пересечений

$\overline{D} = \bigcap_{\substack{D \subset F \\ F \text{ — замкн.}}} F$ — мин. (поinkl.) замкн. множество, содержащее D .

1.7 Верхняя, нижняя границы; супремум, инфимум

$E \subset \mathbb{R}$. E — огр. сверху, если $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in E \quad x \leq M$. Кроме того, всякие такие M называются **верхними границами** E .

Аналогично ограничение снизу.

$E \subset \mathbb{R}, E \neq \emptyset$.

Для E — огр. сверху супремум ($\sup E$) — наименьшая из верхних границ E .

Для E — огр. снизу инфимум ($\inf E$) — наибольшая из нижних границ E .

1.8 Техническое описание супремума

Техническое описание супремума: $b = \sup E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E \ x \leq b \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in E \ b - \varepsilon < x \end{cases}$

1.9 Последовательность, стремящаяся к бесконечности

В \mathbb{R} :

1. $x_n \rightarrow +\infty \quad \forall E > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ x_n > E$
2. $x_n \rightarrow -\infty \quad \forall E \ \exists N \ \forall n > N \ x_n < E$
3. $x_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow |x_n| \rightarrow +\infty$

1.10 Компактное множество

$K \subset X$ — компактное, если для любого открытого покрытия \exists конечное подпокрытие
 $\Leftrightarrow \exists \alpha_1 \dots \alpha_n \quad K \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$

1.11 Секвенциальная компактность

Секвенциально компактным называется множество $A \subset X : \forall$ посл. (x_n) точек A
 \exists подпосл. x_{n_k} , которая сходится к точке из A

1.12 Определения предела отображения (3 шт)

1. По Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D \ 0 < \rho^X(a, x) < \delta \quad \rho^Y(f(x), A) < \varepsilon$$

2. На языке окружностей:

$$\forall U(A) \ \exists V(a) \ \forall x \in \dot{V}(a) \ f(x) \in U(A)$$

3. По Гейне: $\forall (x_n)$ — посл. в X :

$$(a) \ x_n \rightarrow a$$

$$(b) \ x_n \in D$$

$$(c) \ x_n \neq a$$

$$f(x_n) \rightarrow A$$

1.13 Определения пределов в $\overline{\mathbb{R}}$

Для $Y = \overline{\mathbb{R}}, -\infty < x < +\infty$:

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty : \quad \forall E \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X : 0 < |x - a| < \delta \quad f(x) > E$
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty : \quad \forall E \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X : 0 < |x - a| < \delta \quad f(x) < E$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \quad \forall x \in X : x > \delta \quad |f(x) - c| < \varepsilon$
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \quad \forall x \in X : x < \delta \quad |f(x) - c| < \varepsilon$

1.14 Предел по множеству

Предел при $x \rightarrow x_0$ по множеству D_1 — это $\lim_{x \rightarrow x_0} f|_{D_1}$

1.15 Односторонние пределы

В \mathbb{R} одностор. = { левостор., правостор. }

Левостор. $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = L$ — это $\lim f|_{D \cap (-\infty, x_0)}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap D \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Аналогично правостор.

1.16 Непрерывное отображение

$f : D \subset X \rightarrow Y \quad x_0 \in D$

f — непрерывное в точке x_0 , если:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, либо x_0 — изолированная точка D
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \quad \rho(x, x_0) < \delta \quad \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$
3. $\forall U(f(x_0)) \exists V(x_0) \quad \forall x \in V(x_0) \cap D \quad f(x) \in U(f(x_0))$
4. По Гейне $\forall (x_n) : x_n \rightarrow x_0; x_n \in D \quad f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x_0)$

1.17 Непрерывность слева

f — непр. слева в x_0 , если $f|_{(-D, x_0] \cap D}$ — непрерывно в x_0

1.18 Разрыв, разрывы первого и второго рода

Если $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, либо $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ — точка разрыва.

Пусть $\exists f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$ и не все 3 числа равны: $f(x_0 - 0), f(x_0), f(x_0 + 0)$. Это **разрыв I рода (скачок)**.

Остальные точки разрыва — **разрыв II рода**.

1.19 О большое, о маленькое

$f, g : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ x_0 — пр. точка D

Если $\exists V(x_0) \exists \varphi : V(x_0) \cap D \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = g(x)\varphi(x)$ при $x \in V(x_0) \cap D$

1. φ — ограничена. Тогда говорят $f = O(g)$ при $x \rightarrow x_0$

“ f ограничена по сравнению с g при $x \rightarrow x_0$ ”

2. $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ f — беск. малая по отношению к g при $x \rightarrow x_0$, $f = o(g)$

3. $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1$ f и g экв. при $x \rightarrow x_0$ $f \sim_{x \rightarrow x_0} g$

Примечание. О большое и о малое — разные вопросы в табличке.

1.20 Эквивалентные функции, таблица эквивалентных

Эквивалентные функции даны выше.

Таблица эквивалентных?

1.21 Асимптотически равные (сравнимые) функции

В условиях прошлых определений $f = O(g), g = O(f) \Leftrightarrow f \asymp g$ — асимптотически сравнимы на множестве D , “величины одного порядка”.

1.22 Асимптотическое разложение

$g_n : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ x_0 — пред. точка D

$\forall n \quad g_{n+1}(x) = o(g_n), x \rightarrow x_0$

Пример. $g_n(x) = x^n, n = 0, 1, 2, \dots \quad x \rightarrow 0 \quad g_{n+1} = xg_n, x \rightarrow 0$

(g_n) называется шкала асимптотического разложения.

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ Если $f(x) = c_0g_0(x) + c_1g_1(x) + \dots + c_ng_n(x) + o(g_n)$, то это асимптотическое разложение f по шкале (g_n)

1.23 Наклонная асимптота графика

Пусть $f(x) = Ax + B + o(1), x \rightarrow +\infty$

Прямая $y = Ax + B$ — наклонная асимптота к графику f при $x \rightarrow +\infty$

1.24 Путь в метрическом пространстве

Y — метр. пр-во

$\gamma : [a, b] \rightarrow Y$ — непр. на $[a, b]$

= путь в пространстве Y

1.25 Линейно связное множество

$E \subset Y$

E — линейно связное, если $\forall A, B \in E$

\exists путь $\gamma : [a, b] \rightarrow E$

$\gamma(a) = A$

$\gamma(b) = B$