

## Продолжение доказательства

*Доказательство.* По лемме позиция выигрышна хотя бы для одного игрока. Рассмотрим случай, когда она выигрышна для белого игрока.

В точке  $A = (0, k) \rightsquigarrow (0, \frac{k}{n})$

$$\left| f_1\left(\frac{A}{n}\right) - \frac{A_1}{n} \right| \geq \varepsilon$$

$A_1 = 0; f_1\left(\frac{A}{n}\right) \geq 0 \Rightarrow$  при  $v = A$

$$f_1\left(\frac{v}{n}\right) - \frac{v_1}{n} \geq 0$$

В точке  $B = (n, l) \rightsquigarrow (1, \frac{l}{n})$

$$\left| f_1\left(\frac{B}{n}\right) - \frac{B_1}{n} \right| \geq \varepsilon$$

При  $v = B$

$$f_1\left(\frac{v}{n}\right) - \frac{v_1}{n} \geq -\varepsilon$$

□

# 1 Определенный интеграл

## 1.1 Площадь

**Определение.**  $\mathcal{E}$  — множество всех ограниченных фигур в  $\mathbb{R}^2$  (“фигура” = подмножество  $\mathbb{R}^2$ )

**Определение.** Площадь это  $\sigma : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , такое что:

1.  $A \in \mathcal{E} \quad A = A_1 \sqcup A_2 \quad \sigma A = \sigma A_1 + \sigma A_2$  (конечная аддитивность)
2.  $\sigma([a, b] \times [c, d]) = (d - c)(b - a)$

$\sqcup$  — дизъюнктное объединение; если  $x \in A_1$  и  $x \in A_2$ , то  $x$  “дважды  $\in$ ”  $A_1 \sqcup A_2$

Мы пока что не знаем, существует ли площадь.

*Примечание.* 1. Монотонность:  $A \subset B \quad \sigma A \leq \sigma B$

2.  $\sigma(\text{вертик. отр.}) = 0$

**Определение.** Ослабленная площадь  $\sigma : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$ :

1. Монотонна:  $E \subset D \Rightarrow \sigma E \leq \sigma D$
2. Нормирована
3. Ослабленная аддитивность:  $E \in \mathcal{E} \quad E = E_1 \cup E_2 \quad E_1 \cap E_2$  — вертикальный отрезок,  $E_1$  и  $E_2$  лежат каждый в своей полуплоскости относительно этого отрезка  $\Rightarrow \sigma E = \sigma E_1 + \sigma E_2$

Отрезок вертикальный, потому что этого требует определение определенного интеграла.

*Пример.* 1.  $\sigma E = \inf \left( \sum \sigma P_i : E \subset \bigcup_{\text{конечное}} P_k, P_k \text{ — прямоугольники} \right)$

2.  $\sigma E = \inf \left( \sum \sigma P_i : E \subset \bigcup_{\text{счѐтн.}} P_k, P_k \text{ — прямоугольники} \right)$

Это разные площади. Покажем это на примере фигуры “все точки в квадрате с рациональными координатами”. Первая площадь покрывает весь квадрат  $\Rightarrow \sigma_1 = 1$ .  $\sigma_2 = 0$ . Покажем это, накрыв  $n$ -тую точку квадратом размера  $\frac{\varepsilon}{2^n} \times \frac{\varepsilon}{2^n}$ .  $\sum \frac{\varepsilon}{4^n} = \varepsilon \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\varepsilon}{3} \rightarrow 0 \Rightarrow \inf = 0$

**Определение.**  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

$f_+ := \max(f, 0)$  — **положительная срезка**

$f_- := \max(-f, 0)$  — **отрицательная срезка**

**Определение.**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; f \geq 0$

Под графиком  $(\Pi\Gamma)(f, [a, b]) = \{(x, y) : x \in [a, b]; 0 \leq y \leq f(x)\}$

**Определение.**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , непр.

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx := \sigma\Pi\Gamma(f_+, [a, b]) - \sigma\Pi\Gamma(f_-, [a, b])$$

**Примечание.** 1.  $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$

$$2. f \equiv c \Rightarrow \int_a^b f = c(b - a)$$

$$3. \int_a^b -f = -\int_a^b f \text{ — верно, т.к. } (-f)_+ = f_-$$

$$4. \int_a^b 0 = 0$$

Свойства интегралов:

1. Аддитивность по промежутку  $c \in (a, b)$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

*Доказательство.*

$$\sigma\Pi\Gamma(f_+, [a, b]) = \sigma\Pi\Gamma(f_+, [a, c]) + \sigma\Pi\Gamma(f_+, [c, b])$$

□

2. Монотонность:  $f, g \in C[a, b]$   $f \leq g$ . Тогда

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

*Доказательство.*

$$\Pi\Gamma(f_+) \subset \Pi\Gamma(g_+) \Rightarrow \sigma\Pi\Gamma(f_+) \leq \sigma\Pi\Gamma(g_+)$$

$$\Pi\Gamma(f_-) \supset \Pi\Gamma(g_-) \Rightarrow \sigma\Pi\Gamma(f_-) \geq \sigma\Pi\Gamma(g_-)$$

$$\sigma\Pi\Gamma(f_+) - \sigma\Pi\Gamma(f_-) \leq \sigma\Pi\Gamma(g_+) - \sigma\Pi\Gamma(g_-)$$

□

*Следствие.*

$$\min f \cdot (b - a) \leq \int_a^b f \leq \max f \cdot (b - a)$$

3.

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f \right| &\leq \int_a^b |f| \\ -|f| &\leq f \leq |f| \\ -\int_a^b |f| &= \int_a^b -|f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f| \end{aligned}$$

**Определение.**  $f \in C[a, b]$   $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$   $\Phi(x) = \int_a^x f$  — интеграл с переменным верхним пределом

$$\Phi(a) = 0$$

**Теорема 1.**  $f \in C[a, b]$   $\Phi$  — интеграл с переменным верхним пределом. Тогда

$$\forall x \in [a, b] \quad \Phi'(x) = f(x)$$

*Доказательство.* Зафиксируем  $x \in [a, b]$   $y > x, y \leq b$

$$\frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = \frac{\int_a^y f - (\int_a^x f + \int_y^x f)}{y - x} = \frac{\int_x^y f}{y - x} \underset{\substack{\text{т.о.ср.} \\ \exists c \in [x, y]}}{=} \frac{f(c)(y - x)}{y - x} = f(c) \xrightarrow{y \rightarrow x+0} f(x)$$

$x > y$

$$\frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = \frac{1}{x - y} \int_y^x f = f(c) \xrightarrow{y \rightarrow x-0} f(x)$$

□

**Теорема о существовании первообразной** — следствие теоремы Барроу.  
Среднее значение функции на промежутке:

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}$$

*Примечание.*

$$\Psi(x) = \int_x^b f$$

$$\Psi'(x) = -f(x)$$

$$\begin{aligned} \left( \int_{x^2}^{10\sqrt{x}+1} f(t) dt \right)' &= f(10\sqrt{x}+1) \frac{5}{\sqrt{x}} - f(x^2) 2x \\ \left( \int_{\int_x^{\cos x} e^{-n^2} dn}^{\int_{x^2}^{e^x} \cos y^3 dy} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt \right)' & \end{aligned}$$

Этот интеграл не написать в word. Тех нормас, как видите. Это единственное, зачем этот интеграл был написан.

**Теорема 2.**  $f \in C[a, b]$   $F$  — первообр.  $f$

Тогда  $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

*Доказательство.*  $\Phi(x) = \int_a^x f$  — первообр.

$$\exists C : F = \Phi + C$$

$$\int_a^b f = \Phi(b) - \Phi(a) = F(b) - F(a)$$

□

*Примечание.* Все ослабленные площади совпадают на  $\Pi\Gamma(f, [a, b])$ ,  $f \in C[a, b]$

## 1.2 Правило Лопиталья

**Лемма 1. Об ускоренной сходимости**

1.  $f, g : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$   $a$  — предельная точка  $D$

$\exists U(a) : \text{при } x \in \dot{U}(a) \cap D \quad f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$

Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

Тогда

$$\forall x_k \rightarrow a \quad (x_k \neq a, x_k \in D) \quad \exists y_k \rightarrow a \quad (y_k \neq a, y_k \in D)$$

такое, что

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(y_k)}{g(y_k)} = 0 \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{g(y_k)}{g(x_k)} = 0$$

Таким образом,  $g(y_k) \rightarrow 0$  быстрее, чем  $g(x_k) \rightarrow 0$

2. То же самое, но  $\lim f(x) = +\infty, \lim g(x) = +\infty$

**Доказательство.** 1. Очевидно.

$$\forall k \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |f(x_n)| < |g(x_k)| \frac{1}{k} \quad |g(x_n)| < |g(x_k)| \frac{1}{k}$$

$$\varepsilon := |g(x_k)|$$

$$k = 1 \quad y_1 := \text{какой-нибудь } x_n : \left| \frac{f(x_n)}{g(x_k)} \right| < 1 \quad \left| \frac{g(x_n)}{g(x_k)} \right| < 1$$

$$k = 2 \quad y_2 := \text{какой-нибудь } x_n : \left| \frac{f(x_n)}{g(x_k)} \right| < \frac{1}{2} \quad \left| \frac{g(x_n)}{g(x_k)} \right| < \frac{1}{2}$$

⋮

2. (а) Частный случай: Пусть  $g(x_n)$  возрастает. Берем  $k : m := \min\{n : |f(x_n)| \geq \sqrt{g(x_k)} \text{ или } |g(x_n)| \geq \sqrt{g(x_k)}\}$

$$y_k := x_{m-1} \Rightarrow |f(y_k)| \leq \sqrt{g(x_k)} \quad |g(y_k)| \leq \sqrt{g(x_k)}$$

$$\left| \frac{f(y_k)}{g(x_k)} \right| \leq \frac{\sqrt{g(x_k)}}{g(x_k)} = \frac{1}{\sqrt{g(x_k)}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

$$\left| \frac{g(y_k)}{g(x_k)} \right| \leq \frac{\sqrt{g(x_k)}}{g(x_k)} = \frac{1}{\sqrt{g(x_k)}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

**Зачем нужно возрастание?**

(б) Общий случай:  $\tilde{g}(x_k) := \inf\{g(x_n), n = k, k+1, \dots\} \quad \tilde{g}(x_k) \rightarrow +\infty$

$\tilde{g}(x_k) \uparrow, \tilde{g}(x_k) \leq g(x_k)$ . Как в пункте (а) построим  $y_k$

$$\frac{f(y_k)}{g(x_k)} \leq \frac{f(y_k)}{\tilde{g}(x_k)} \leq \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}(x_k)}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

$$\frac{g(y_k)}{g(x_k)} \leq \frac{g(y_k)}{\tilde{g}(x_k)} \leq \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}(x_k)}} \rightarrow 0$$

□

**Теорема 3.**  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \quad a \in \overline{\mathbb{R}}$

$f, g$  — дифф.,  $g' \neq 0$  на  $(a, b)$

Пусть  $\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a+0} A \in \overline{\mathbb{R}}$

Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  — неопределенность  $\left\{ \frac{0}{0}, \frac{+\infty}{+\infty} \right\}$

Тогда  $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

*Доказательство.*  $g' \neq 0 \Rightarrow g'$  — сохр. знак  $\Rightarrow g$  — монотонна.

Для  $\frac{0}{0} \quad g(x) \neq 0$  в  $(a, b)$

По Гейне  $x_k \rightarrow a \quad (x_k \neq a, x_k \in (a, b))$

Выберем  $y_k$  по лемме об ускоренной сходимости.

$$\frac{f(x_k) - f(y_k)}{g(x_k) - g(y_k)} = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)} \quad \text{т. Коши}$$

$$f(x_k) - f(y_k) = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)} (g(x_k) - g(y_k))$$

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} - \frac{f(y_k)}{g(y_k)} = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)} \left( 1 - \frac{g(y_k)}{g(x_k)} \right)$$

$$\frac{f(y_k)}{g(y_k)} \rightarrow 0 \quad \frac{g(y_k)}{g(x_k)} \rightarrow 0$$

$$x_k \rightarrow a \quad y_k \rightarrow a \quad \xi_k \rightarrow a$$

□

*Пример.*  $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2+1}}{g'(x)} = 1$$

$$\int_0^x e^{t^2} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{g'(x)} = 1$$