1 Векторная алгебра

2 Аналитическая геометрия

3 Алгебраические структуры. СЛАУ

3.1 Алгебраические структуры: группа, кольцо, поле

Определение. Полугруппа — множество G с заданной на нём бинарной ассоциативной операцией $\circ$, т.е.

$$(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$$

Определение. Группа — полугруппа, где выбран нейтральный элемент и для каждого элемента есть обратный:

1. Нейтральный элемент $e : e \circ g = g \circ e = g$
2. Обратный элемент: $\forall g \in G \;\; \exists g^{-1} \;\; g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$

Определение. Абелева группа — группа с коммутативной операцией, т.е.

$$\forall g_1, g_2 \in G \;\; g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$$

Определение. Кольцо — множество с двумя бинарными операциями $\{R, `+', `\cdot'\}$, которое является абелевой группой относительно сложения, полугруппой относительно умножения и эти операции согласованны *(дистрибутивны)*:

$$r_1 \cdot (r_2 + r_3) = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3; \quad (r_2 + r_3) \cdot r_1 = r_2 \cdot r_1 + r_3 \cdot r_1$$

Определение. Поле — множество с двумя бинарными операциями $\{R, `+', `\cdot'\}$, где эти операции согласованны и:

1. $\{K, `+'\}$ — абелева группа
2. $\{K \setminus \{0\}, `\cdot'\}$ — абелева группа

3.2 Алгебраические структуры: линейное пространство, алгебра

Определение. Модуль над кольцом R — абелева группа $\{G, `+'\}$ с операцией $R \times G \to G$, записываемой как rg и для которой выполняется следующее:

1. $(r_1 + r_2)g = r_1 g + r_2 g$
2. $r(g_1 + g_2) = rg_1 + rg_2$
3. $(r_1 r_2)g = r_1(r_2 g)$

Определение. Линейное пространство — модуль над кольцом, которое также является полем.

Определение. Вектор — элемент линейного пространства.

Определение. Алгебра — модуль над кольцом, где сам модуль также является кольцом.

3.3 Поле комплексных чисел

$i^2 := 1$
$\mathbb{C} = \{a + bi : \forall a, b \in \mathbb{R}\}$
Модуль комплексного числа c: $|c| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$, если $c = a + bi$
Аргумент комплексного числа c: $\varphi = \arg(c) = \arg(a + bi) = 2\arctan\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}+a}\right)$
Тогда $c = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
Дополнение комплексного числа c записывается как $\overline{c} = \overline{a + bi} = a - bi$

3.4 Линейное пространство. Примеры линейных пространств.

Дано выше. *(3.2, стр. 1)*
Примеры:

1. $X = \{x = \left(\xi^1, \dots \xi^n\right)^T, \xi^i \in \mathbb{R}\}$ *(или $\mathbb{C}$)*
2. $\mathcal{P}_n = \{\text{многочлены} p(t) : \deg p(t) \leq n, n \in \mathbb{N}\}$

3.5 Линейная зависимость векторов. Основные леммы о линейной зависимости.

Определение. **Линейной комбинацией** называется следующее выражение:

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n,$$

где $\{x_i\}_{i=1}^n$ — вектора, $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ — коэффициенты.

Определение. Набор векторов $\{x_i\}_{i=1}^n$ называется **линейнонезависимым**, если не существует его линейной комбинации, где не все коэффициенты равны 0, а сама комбинация равна 0_X:

$$\nexists\{\alpha_i\}_{i=1}^n : \exists i : \alpha_i \neq 0 \quad \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0_X$$

Иначе набор называется **линейно зависимым**

Лемма 1. *Любой набор, содержащий нулевой вектор, является линейнозависимым.*

Лемма 2. *Набор, содержащий линейнозависимый поднабор, является линейнозависимым.*

Лемма 3. *Любой поднабор линейнонезависимого набора также является линенйнонезависимым.*

Лемма 4. *Набор векторов линейнозависим тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов набора выражается линейной комбинацией остальных.*

$$\exists k \in \{1 \ldots n\} : x_k = \sum_{i=1, i\neq k}^{n} \alpha^i x_i \Leftrightarrow \{x_i\}_{i=1}^n - \text{ЛЗ}$$

3.6 Базис и размерность линейного пространства.

Определение. Набор векторов называется **полным** в линейном пространстве X, если любой вектор этого пространства можно выразить как линейную комбинацию этого набора:

$$\forall x \in X \quad \exists \{\alpha_i\}_{i=1}^n \quad x = \sum_{i=1}^n \alpha^i x_i$$

Определение. Набор векторов называется **базисом** пространства X, если он является полным и ЛНЗ.

Определение. Линейное пространство называется **конечномерным**, если в нём существует конечный полный набор векторов

Определение. **Размерность пространства** $\dim X$ — количество векторов в его базисе.

3.7 Изоморфизм линейных пространств.

Определение. **Изоморфизм** — биекция, сохраняющая линейность, установленная между двумя линейными пространствами над одним и тем же полем:

$$\begin{cases} x_1 \leftrightarrow y_1 \\ x_2 \leftrightarrow y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \leftrightarrow y_1 + y_2 \\ \alpha x_1 \leftrightarrow \alpha y_1 \end{cases}$$

3.8 Подпространства линейного пространства: определение, примеры, линейная оболочка, линейное многообразие.

Определение. **Подпространство** линейного пространства X — замкнутое множество $L \subset X$

Пример.

1. X и $\{0\}$ называются тривиальными подпространствами
2. Прямая и плоскость, содержащие начало координат — подпространство E_3
3. $\mathbb{R}^{m<n}$ — подпространство $\mathbb{R}^n$
4. Множество симметричных $n \times n$ матриц — подпространство $\mathbb{R}^n_n$
5. Множество полиномов с членами только чётных степеней — подпространство $\mathcal{P}_n$

Определение. **Линейная оболочка** набора векторов — множество всех линейных комбинаций этих векторов:

$$\mathcal{L}(x_1 \dots x_n) = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha^i x_i \mid \forall \alpha_1 \dots \alpha_n \right\}$$

Определение. **Линейное многообразие**, параллельное подпространству L линейного пространства X — множество M:

$$M = \{y \in X : y = x_0 + x \quad \forall x \in L\}$$

3.9 Подпространства линейного пространства: сумма и пересечение подпространств, прямая сумма, дополнение.

Определение. **Пересечение подпространств** L_1 и L_2 — множество L', такое что:

$$L' = \{x \in X : x \in L_1 \text{ и } x \in L_2\}$$

Определение. **Сумма подпространств** L_1 и L_2 — множество L'', такое что:

$$L' = \{x \in X : x = x_1 + x_2 \ \ \forall x_1 \in L_1, x_2 \in L_2\}$$

Определение. **Прямая сумма подпространств** L_1 и L_2 — множество $L = L_1 \dot{+} L_2$, такое что:

$$L = \{x \in X : x! = x_1 + x_2 \ \ \forall x_1 \in L_1, x_2 \in L_2\}$$

Определение. Если $X = L_1 \dot{+} L_2$, L_1 — **дополнение** L_2 до X

3.10 Линейные алгебраические системы. Геометрическое исследование систем. Теорема Крамера *(геометрическая формулировка)*.

Определение.

$$\begin{cases} \alpha_1^1\xi^1 + \alpha_2^1\xi^2 + \ldots + \alpha_n^1\xi^n = \beta^1 \\ \alpha_1^2\xi^1 + \alpha_2^2\xi^2 + \ldots + \alpha_n^2\xi^n = \beta^2 \\ \vdots \\ \alpha_1^m\xi^1 + \alpha_2^m\xi^2 + \ldots + \alpha_n^m\xi^n = \beta^m \end{cases}$$

— **линейная алгебраическая система**, α — коэффициенты, β — свободные члены, ξ — неизвестные

Определение. **Решение системы** — такой набор, при подстановке которого равенства становятся верными.

Определение. **Совместная система** — система, у которой есть решение.

Определение. **Определенная система** — совместная система, которая имеет единственное решение.

Определение. **Однородная система** — система, у которой все свободные члены равны 0.

Запишем в векторной форме: $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\xi^i = b$

Теорема 1. *Если $m = n$ и $\{a_i\}_{i=1}^n$ — ЛНЗ, система совместна и определена, т.е. есть единственное решение.*

3.11 Геометрическое исследование систем. Теорема Кронекера-Капелли *(геометрическая формулировка)* и ее следствия.

Рассмторим случай, когда $\dim \mathcal{L}\{a_1 \dots a_n\} = r \leq m$. Тогда можно переписать систему как:

$$a_1\xi^1 + \dots + a_r\xi^r = b - a_{r+1}\xi^{r+1} - \dots - a_n\xi^n$$

Теорема 2. *$b \in \mathcal{L} \Leftrightarrow$ система совместна. Если $r = n$, система определена, иначе — нет.*

Следствие. Однородная система:

1. Всегда совместна, т.к. существует тривиальное решение
2. Имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда $r < n$
3. Является неопределенной тогда и только тогда, когда $m < n$

3.12 Альтернатива Фредгольма для линейной системы уравнений.

Теорема 3. *Если $m = n$, то:*

1. *Или однородная система имеет только тривиальное решение, и неоднородная система совместна и определена для любого b*
2. *Или существуют нетривиальные решения однородной системы и неоднородная система совместна не при любых b*

3.13 Фундаментальная система решений линейной однородной системы. Общее решение однородных и неоднородных систем.

Определение. **Фундаментальной системой решений** линейной однородной системы уравнений называется любая система из $n-r$ линейнонезависимых решений этой системы, то есть базис пространтва решений однородной системы.

Любое решение можно представить в виде общего решения:

$$z = z' + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i,$$

где $\{x_i\}_{i=1}^n$ — ФСР.

4 Полилинейные формы. Определители