Определение. f — допустимая функция на $[a, b)$
$\int_a^b f$ — **абсолютно сходится**, если:

1. $\int_a^b f$ сходится
2. $\int_a^b |f|$ — сходится

Теорема 1. f — доп. на $[a, b)$. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. $\int_a^b f$ абсолютно сходится
2. $\int_a^b |f|$ сходится
3. $\int_a^b f^+, \int_a^b f^-$ оба сходятся

Примечание. $f^+ = \max(f, 0), f^- = \max(-f, 0)$

Доказательство. 1⇒2 — тривиально
2⇒3 : $0 \le f^\pm \le |f|$
3⇒1 : $f = f^+ - f^- \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^b f^+ - \int_a^b f^-$ □

Пример.

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \overset{\text{по частям}}{=} \begin{bmatrix} u = \frac{1}{x} & du = -\frac{1}{x^2}dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{bmatrix} = -\cos \frac{1}{x}\Bigg|_{10}^{+\infty} - \int_{10}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

Также можно было оставить нижнюю границу 0, но использовать $v = 1 - \cos x$
Первое слагаемое очевидно конечно, а второе конечно по абсолютной сходимости: $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x}$. Тогда искомый интеграл сходится.

Пример.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$$

- При каких p сходится?
- При каких p абсолютно сходится?

1. $p > 1 \Rightarrow$ абсолютно сходится, т.к. $\left|\frac{\sin x}{x^p}\right| < \frac{1}{x^{p-1}}$
2. $p > 0 \Rightarrow$ сходится, т.к. (по частям):

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} = -\frac{\cos x}{x^p}\Bigg|_1^{+\infty} - p\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p+1}}$$

   Первое конечно, второе абсолютно сходится.

3. $p \le 0$, по критерию Коши:

$$\exists A_n, B_n \to b \quad \int_{A_n}^{B_n} f \not\to 0 \Rightarrow \int_a^b f \text{ расходится}$$

$$A_n := 2\pi n, B_n := 2\pi n + \pi \quad \int_{A_n}^{B_n} \frac{\sin x}{x^p} dx \ge (2\pi n)^{-p} \int_{A_n}^{B_n} \sin x \text{ расходится}$$

   Итого для $p \le 0$ расходится.

4. $0 < p \leq 1$, абсолютная сходимость?

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p}$$

(a) Первый способ. $A_n := \pi n, B_n := 2\pi n$

$$\int_{A_n}^{B_n} \frac{|\sin x|}{x^p} \geq \frac{1}{(2\pi n)^p} \underbrace{\int_{A_n}^{B_n} |\sin x|}_{\text{площадь } n \text{ арок синуса}} = \frac{2n}{(2\pi n)^p} = Cn^{1-p} \not\to 0$$

(b) Второй способ.

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} \geq \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^p} = \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(2x)}{2x^p} = \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^p}}_{+\infty} - \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x^p}}_{\substack{\text{При } p>0 \text{ сходится} \\ \text{как в пункте 2}}}$$

Итого абсолютной сходимости нет.

Примечание. 1. $\int_a^b f$ — сходится $\not\Rightarrow f(x) \xrightarrow{x\to b-0} 0$

$$\int_1^{+\infty} x\sin x^3 dx = \begin{bmatrix} t = x^3 \\ x = \sqrt[3]{t} \quad dx = \frac{1}{3}t^{-2/3}dt \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\int_1^{+\infty} t^{-1/3}\sin t dt = \frac{1}{3}\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{1/3}} dt$$

Этот интеграл сходится, но $f(x) \not\to 0$

2. $\int_a^b f$ — абсолютно сходится $\not\Rightarrow f(x) \xrightarrow{x\to b-0} 0$

Упражнение. $\int_1^{+\infty} x\sin x^3 dx$ не сходится абсолютно

Теорема 2. Признак Абеля-Дирихле.
f — допустима на $[a, b)$, $g \in C^1[a, b)$
Если выполняется 1 или 2, то $\int_a^b fg$ — сходится

1. (a) $F(A) := \int_a^A f(x)dx, A \in [a, b), F$ ограничена, т.е.:

$$\exists K : \forall A \in [a, b) \quad \left|\int_a^A f\right| \leq K$$

   (b) $g(x)$ монотонна, $g(x) \xrightarrow{x\to b-0} 0$

2. (a) $\int_a^b f(x)dx$ сходится, необязательно абсолютно

   (b) $g(x)$ монотонна, $g(x)$ ограничена, т.е.: $\exists L \ \ \forall x \in [a, b) \quad |g(x)| \leq L$

1 часть — Дирихле, 2 — Абель.

Доказательство. 1.

$$\int_a^b fg = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

$$\lim_{x\to b-0} \underbrace{F(x)}_{\text{огр.}}\underbrace{g(x)}_{\text{б.м.}} = 0 \Rightarrow F(x)g(x)\Big|_a^b \text{ — конечн.}$$

Покажем абсолютную сходимость, из нее следует обычная сходимость:

$$\int_a^b |F(x)g'(x)|dx \leq \int_a^b K \int_a^b |g'| =$$

Можно снять модуль, т.к. g монотонна $\Rightarrow \text{sign}(g') = \text{const}$

$$= \pm K \int_a^b g' = \pm K g(x)\Big|_a^b = \pm K(\underbrace{\lim_{x\to b-0} g(x)}_{0} - \underbrace{g(a)}_{\text{кон.}})$$

2. $\alpha := \lim\limits_{x\to b-0} g(x)$ – кон.

$$\int_a^b fg = \underbrace{\int_a^b f\alpha}_{\text{кон. по (a)}} + \underbrace{\int_a^b f(g-\alpha)}_{\text{сходится по 1}}$$

Пояснение насчет сходимости $\int_a^b f(g-\alpha)$:

(a) $F : A \mapsto \int_a^A f$ – ограничена, т.к. $\int_a^b f$ сходится

(b) $g \to \alpha \Rightarrow (g-\alpha) \to 0$

□

Упражнение.

$$\int_{10}^{+\infty} \sin(x^3 - x)dx = \int_{10}^{+\infty} \underbrace{(3x^2-1)\sin(x^3-x)}_{f} \underbrace{\frac{1}{3x^2-1}}_{g} dx$$

Сходится по признаку Дирихле.
Дальше в лекции была проверка на абсолютную сходимость.

Пример. Интеграл Дирихле.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Доказательство.

$$\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$$

Проверим формулу:

$$2\sin\frac{x}{2}\cos x + 2\sin\frac{x}{2}\cos 2x + \ldots + 2\sin\frac{x}{2}\cos nx = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}$$

$$\sin\frac{3}{2}x - \sin\frac{1}{2}x + \ldots + \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}$$

$$\int_0^\pi \cos kx = \frac{1}{k}\sin kx\Big|_0^\pi = 0$$

Проинтегрируем исходное выражение по $[0,\pi]$:

$$0 = \int_0^\pi \ldots = \int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}dx - \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{x}dx = \left[\begin{array}{ll} y = \left(n+\frac{1}{2}\right)x & \\ x = \frac{1}{n+\frac{1}{2}}y & dx = \frac{1}{n+\frac{1}{2}}dy \end{array}\right] =$$

$$= \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{\sin y}{\frac{1}{n+\frac{1}{2}}y}\frac{1}{n+\frac{1}{2}}dy = \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{\sin y}{y}dy$$

Итого:

$$\int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{x}dx = \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{\sin y}{y}dy$$

Проверим:

$$\int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}dx - \int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{x}dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\int_0^\pi \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)xh(x)dx$$

$$h(x) = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{x} = \frac{x-2\sin\frac{x}{2}}{2x\sin\frac{x}{2}} = \frac{\mathcal{O}(x^3)}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

$$\int_0^\pi \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)xh(x)dx = \left[\begin{array}{l} f = h(x) \\ g' = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x \end{array}\right] =$$

$$= \frac{-1}{n+\frac{1}{2}}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)xh(x)\Big|_0^\pi + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^\pi \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)h'(x)dx$$

$$h'(x) = -\frac{\cos\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2\cos\frac{x}{2} - 4\sin^2\frac{x}{2}}{4x^2\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{x^2\left(1-\frac{x^2}{4}+o(x^3)\right) - 4\left(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{48}+o(x^3)\right)}{4x^2\sin^2\frac{x}{2}} \xrightarrow[x\to 0]{} \text{const}$$

$\Rightarrow h'(0) = \text{const}$ (той, которая lim) и $h \in C^1[0,\pi]$

$$\int_0^\pi \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)xh(x)dx = \underbrace{\frac{-1}{n+\frac{1}{2}}\underbrace{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}_{\text{огр.}}\underbrace{h(x)}_{\text{огр.}}\Big|_0^\pi}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\underbrace{\int_0^\pi \underbrace{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\underbrace{h'(x)}_{\text{огр., т.к.}\in C^1}}_{\text{огр., непр.}}dx}_{\text{огр. как ф-ция от } n}}_{\to 0}$$

$$\underbrace{\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{\sin x}{x}dx}_{\to\text{инт. Дирихле}} = \underbrace{\int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{x}dx - \int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}dx}_{\to 0} + \int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}dx \to \frac{\pi}{2}$$

$\square$

Верхний предел и нижний предел последовательности

Определение. **Частичный предел** вещественной последовательности x_n — предел вдоль подпоследовательности n_k:

$$n_k \to +\infty, n_1 < n_2 < \ldots \quad \lim x_{n_k} \in \overline{\mathbb{R}}$$

Пример. $x_n = (-1)^n, n_i = 2i$

Определение. Дана последовательность x_n.

- $y_n := \sup(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$
- $z_n := \inf(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$

Примечание. 1. $y_n \downarrow, z_n \uparrow$

2. $z_n \le x_n \le y_n$

3. Если изменить конечное число элементов x_n, то изменится конечное число элементов y_n, z_n

Пример. 1. $x_n = (-1)^n, y_n \equiv 1, z_n \equiv -1$

2. $x_n = (1 + (-1)^n)n, y_n \equiv +\infty, z_n \equiv 0$

- **Верхний предел** x_n: $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n := \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$
- **Нижний предел** x_n: $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n := \lim\limits_{n\to+\infty} z_n$

Верхний и нижний пределы всегда существуют.

Теорема 3. Свойства верхнего и нижнего пределов

1. $\underline{\lim} x_n \le \overline{\lim} x_n$
2. $\forall n \;\; x_n \le \tilde{x}_n \Rightarrow$:
   (a) $\overline{\lim} x_n \le \overline{\lim} \tilde{x}_n$
   (b) $\underline{\lim} x_n \le \underline{\lim} \tilde{x}_n$
3. $\lambda \ge 0 \Rightarrow \overline{\lim}(\lambda x_n) = \lambda \overline{\lim} x_n; \underline{\lim} \lambda x_n = \lambda \underline{\lim} x_n$, считаем что $0 \cdot (\pm\infty) = 0$
4. $\overline{\lim} - x_n = -\underline{\lim} x_n; \underline{\lim} - x_n = -\overline{\lim} x_n$
5. $\overline{\lim}(x_n + y_n) \le \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} y_n$, если правая часть имеет смысл, т.е. нет ситуации вида $+\infty - \infty$
   $\underline{\lim}(x_n + y_n) \le \underline{\lim} x_n + \underline{\lim} y_n$
6. $t_n \to l \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{\lim}(x_n + t_n) = \overline{\lim} x_n + l$
7. $t_n \to l \in (0, +\infty) \Rightarrow \overline{\lim}(t_n x_n) = l \overline{\lim} x_n$

Доказательство. 1. $y_n \le x_n \le z_n$, по предельному переходу тривиально.

2. $z_n = \sup(x_n, x_{n+1}, \ldots), \tilde{z}_n = \sup(\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n+1} \ldots) \Rightarrow z_n \le \tilde{z}_n$

3. $\sup \lambda E = \lambda \sup E$

4. $\sup -E = -\inf E$

5. $\sup(x_n + y_n, x_{n+1} + y_{n+1}, \dots) \le \sup(x_n, x_{n+1} \dots) + \sup(y_n, y_{n+1} \dots)$
6. $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_0 \;\; \forall k > N_0 \quad x_k + l - \varepsilon < x_k + t_k < x_k + l + \varepsilon$
   $\lhd N > N_0$, перейдем к sup по $k \ge N$:

$$y_N + l - \varepsilon < \sup(x_N + t_N, x_{N+1} + t_{N+1}, \dots) \le y_N + l + \varepsilon$$

   Предельный переход:

$$\overline{\lim} x_N + l - \varepsilon \le \overline{\sup}(x_N + t_N) \le \overline{\lim} x_N + l + \varepsilon$$

$$\lim(x_n + t_n) = \overline{\lim} x_n + l$$

7. То же самое.

$\square$