

1 Определения

1.1 Локальный максимум, минимум, экстремум

Определение. $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in E$ — локальный максимум функции, если

$$\exists U(x_0) \quad \forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \leq f(x_0)$$

Аналогично определяется минимум.

Определение. Экстремум — точка минимума либо максимума.

1.2 ! Первообразная, неопределенный интеграл

$F, f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

F — первообразная f на $\langle a, b \rangle$

$$\forall x \in \langle a, b \rangle \quad F'(x) = f(x)$$

Неопределенный интеграл f на $\langle a, b \rangle$ — множество всех первообразных f :

$$\{F + c, c \in \mathbb{R}\}, \text{ где } F \text{ — первообразная}$$

Обозначается $\int f = F + c$ или $\int f(x)dx$

1.3 Теорема о существовании первообразной

$f \in C(\langle a, b \rangle)$ тогда у f существует первообразная.

1.4 Таблица первообразных

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \text{длинный логарифм}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x$$

Почему где-то нет dx ? Кохась забыл?

1.5 Равномерная непрерывность

$f : \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **равномерно непрерывна** на $\langle a, b \rangle$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle : |x_1 - x_2| < \delta \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Или для метрического пространства:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_1, x_2 \quad \rho(x_1, x_2) < \delta \quad \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

Отличие от непрерывности на отрезке в том, что δ зависит только от ε и подходит для всех x_1, x_2 .

1.6 Площадь, аддитивность площади, ослабленная аддитивность

\mathcal{E} — множество всех ограниченных фигур в \mathbb{R}^2 (“фигура” = подмножество \mathbb{R}^2)

Площадь это $\sigma : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$, такое что:

1. $A \in \mathcal{E} \quad A = A_1 \sqcup A_2 \quad \sigma A = \sigma A_1 + \sigma A_2$ (конечная аддитивность)
2. $\sigma([a, b] \times [c, d]) = (d - c)(b - a)$

Ослабленная площадь $\sigma : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$:

1. Монотонна
2. Нормирована
3. Ослабленная аддитивность: $E \in \mathcal{E} \quad E = E_1 \cup E_2 \quad E_1 \cap E_2$ — вертикальный отрезок, E_1 и E_2 лежат каждый в своей полуплоскости относительно этого отрезка $\Rightarrow \sigma E = \sigma E_1 + \sigma E_2$

1.7 ! Определенный интеграл

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, непр.

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x) dx := \sigma \Pi(f_+, [a, b]) - \sigma \Pi(f_-, [a, b])$$

1.8 Положительная и отрицательная срезки

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

$f_+ := \max(f, 0)$ — положительная срезка

$f_- := \max(-f, 0)$ — отрицательная срезка

1.9 Среднее значение функции на промежутке

Отсутствует

1.10 Кусочно-непрерывная функция

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, кусочно непрерывна

f — непр. на $[a, b]$ за исключением конечного числа точек, в которых разрывы I рода

Пример. $f(x) = [x], x \in [0, 2020]$

2 Теоремы

2.1 Критерий монотонности функции. Следствия

$f \in C(\langle a, b \rangle)$, дифф. в (a, b)

Тогда f — возрастает $\Leftrightarrow \forall x \in (a, b) \ f'(x) \geq 0$

Следствие. $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, тогда:

$f = \text{const} \Leftrightarrow (f \in C(\langle a, b \rangle) - \text{дифф. на } \langle a, b \rangle, f' \equiv 0)$

Следствие. $f \in C[a, b]$, дифф. на (a, b) . Тогда:

f строго возрастает \Leftrightarrow ① и ②

① $f' \geq 0$ на (a, b)

② $f' \not\equiv 0$ ни на каком промежутке

Следствие. О доказательстве неравенств

$g, f \in C([a, b])$, дифф. в (a, b)

$f(a) \leq g(a); \forall x \in (a, b) \ f'(x) \leq g'(x)$

Тогда $\forall x \in [a, b] \ f(x) \leq g(x)$

2.2 Теорема о необходимом и достаточном условиях экстремума

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in (a, b) \quad f - \text{дифф. на } (a, b)$

Тогда:

1. x_0 — лок. экстремум $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

2. $f - n$ раз дифф. в x_0

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то $\begin{cases} n - \text{чет.} : & x_0 - \text{локальный максимум} \\ n - \text{нечет.} : & x_0 - \text{не экстремум} \end{cases}$

Если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то $\begin{cases} n - \text{чет.} : & x_0 - \text{локальный минимум} \\ n - \text{нечет.} : & x_0 - \text{не экстремум} \end{cases}$

2.3 Теорема Кантора о равномерной непрерывности

$f : X \rightarrow Y, X - \text{комп.}, f - \text{непр. на } X$

Тогда f — равномерно непр.

2.4 Теорема Брауэра о неподвижной точке

$f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$, непр.

Тогда $\exists x \in [0, 1]^2 : f(x) = x$, т.е. есть неподвижная точка.

Обобщенный вариант:

1. $f : [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]^m - \text{непр.}$

2. $f : B(0, 1) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow B(0, 1) - \text{непр.}$

3. $f : S(0, 1) \subset \mathbb{R}^m - \text{непр.}$

2.5 Теорема о свойствах неопределенного интеграла

f, g имеют первообразную на $\langle a, b \rangle$. Тогда

1. Линейность:

$$\int (f + g) = \int f + \int g$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \int \alpha f = \alpha \int f$$

2. $\varphi \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \left(\int f(x) dx \right) \big|_{x=\varphi(t)} = F(\varphi(t))$$

Частный случай: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\int f(\alpha t + \beta) dt = \frac{1}{\alpha} F(\alpha t + \beta)$$

3. f, g — дифф. на $\langle a, b \rangle$; $f'g$ — имеет первообр.

Тогда fg' имеет первообразную и

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

2.6 Интегрирование неравенств. Теорема о среднем

$f, g \in C[a, b]$ $f \leq g$. Тогда

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Кто такая теорема о среднем

2.7 Теорема Барроу

$f \in C[a, b]$ Φ — интеграл с переменным верхним пределом. Тогда

$$\forall x \in [a, b] \quad \Phi'(x) = f(x)$$

2.8 Формула Ньютона-Лейбница, в том числе, для кусочно-непрерывных функций

Теорема 1. $f \in C[a, b]$ F — первообр. f

Тогда $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

Что с кусочно-непрерывными?