1 Определения

1.1 Упорядоченная пара

Для некоторого множества X и I - множество “индексов”, тогда $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ - **семейство элементов** X. $(\forall\alpha \in I \;\; x_\alpha \in X)$
Упорядоченная пара — семейство из двух элементов, построенная для $I = \{1, 2\}$. Обозначается (a, b).

1.2 Декартово произведение

Декартово произведение двух множеств — множество всех упорядоченных пар элементов этих множеств. $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$
Кроме того, декартово произведение можно обобщить для произвольного числа множеств.
$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2 \ldots a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2 \ldots a_n \in A_n\}$

1.3 Аксиомы вещественных чисел

1.3.1 Аксиомы поля

В множестве $\mathbb{R}$ определены две операции, называемые сложением и умножением, действующие из $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ ($+, \cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$), удовлетворяющие следующим свойствам:
Аксоимы сложения *(здесь и далее $\forall a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$)*:

1. $a + b = b + a$ — коммутативность
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ — ассоциативность
3. $\exists\mathbf{0} : \mathbf{0} + a = a$
4. $\exists a' : a + a' = \mathbf{0}$

Аксиомы умножения:

1. $ab = ba$ — коммутативность
2. $(ab)c = a(bc)$ — ассоциативность
3. $\exists\mathbf{1} \neq \mathbf{0} : \forall a \in \mathbb{R} : a \cdot \mathbf{1} = a$
4. $\forall a \neq \mathbf{0} : \exists\tilde{a} : a \cdot \tilde{a} = \mathbf{1}$

Аксоима комбинации сложения и умножения:

1. $(a + b)c = ac + bc$ — дистрибутивность

Поле — множество, в котором определены операции $+, \cdot$, удовлетворяющие группе аксиом I. Например, $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{F}_3$

1.3.2 Аксиомы порядка

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y$ **или** $y \leq x$
2. $x \leq y; y \leq x \Rightarrow x = y$
3. $x \leq y; y \leq z \Rightarrow x \leq z$ — транзитивность
4. $x \leq y \Rightarrow \forall z \in \mathbb{R} : x + z \leq y + z$
5. $0 \leq x; 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy$

Упорядоченное поле — множество, для которого выполняются аксиомы групп I и II.
$\mathbb{F}_3, \mathbb{C}$ - не упорядоченные поля
$\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathcal{R}$ - упорядоченные поля

1.4 Аксиома Кантора, аксиома Архимеда

1.4.1 Аксиома Архимеда

$$\forall x, y > 0 : \exists n \in \mathbb{R} : nx > y$$

Следствие: существуют сколько угодно большие натуральные числа:

$$\forall y \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : n > y$$

Архимедовы поля — упорядоченные поля, в которых выполняется Аксиома Архимеда.
$\mathcal{R}$ - не архимедово поле
$\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ - архимедовы поля

1.4.2 Аксиома Кантора

Для последовательности вложенных отрезков $\{[a_b, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ ($\forall n \in \mathbb{N}\; a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$)

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \varnothing$$

$\mathbb{Q}$ не удволетворяет этой аксиоме, в отличие от $\mathbb{R}$.

1.5 Пополненное множество вещественных чисел, операции и порядок в нем

Это дополнение?

1.6 Максимальный элемент множества

$M \in A$ называется **максимальным элементом** множества A, если $\forall a \in A \;\; a \leq M$

1.7 Последовательность

$x : \mathbb{N} \to Y$ — **последовательность**

1.8 Образ и прообраз множества при отображении

Для $A \subset X, f : X \to Y$ **образ** — множество $\{f(x), x \in A\} \subset Y$ — обозначается $f(A)$
Для $B \subset Y$ **прообраз** — $\{x \in X : f(x) \in B\}$ — обозначается $f^{-1}(B)$

1.9 Инъекция, сюръекция, биекция

Сюръекция — такое отображение $f : X \to Y$, что $f(X) = Y$, т.е. $\forall y \in Y \;\; f(x) = y$ имеет решение относительно x.
Инъекция — такое отображение $f : X \to Y$, что $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \;\; f(x_1) \neq f(x_2)$, т.е. $\forall y \in Y \;\; f(x) = y$ имеет не более одного решения относительно x.
Биекция — отображение, являющееся одновременно сюръекцией и инъекцией, т.е. $\forall y \in Y \;\; f(x) = y$ имеет ровно одно решение относительно x.

1.10 Векторнозначаная функция, ее координатные функции

Если $F : X \to \mathbb{R}^m; x \mapsto F(x) = (F_1(x), ..., F_m(x))$, то F — **векторнозначная функция** *(значения функции - вектора)*
$F_1(x)..F_m(x)$ - координатные функции отображения F

1.11 График отображения

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$

1.12 Композиция отображений

$f : X \to Y, g : Y \to Z$, тогда **композиция** f и g *(обозначается $g \circ f$)* — такое отображение, что $g \circ f : X \to Z, x \mapsto g(f(x))$.
Также возможно определение, которое допускает $g : Y_1 \to Z, Y_1 \subset Y$

1.13 Сужение и продолжение отображений

Для $g : X \to Y \quad f$ — **сужение** g на множество A, если $f : A \to Y, A \subset X$.
g называется **продолжением** f.

1.14 Предел последовательности *(эпсилон-дельта определение)*

Если для $(x_n), a \in \mathbb{R}$ выполняется $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n > N \;\; |x_n - a| < \varepsilon$, то a — **предел последовательности** (x_n), обозначается $x_n \to a$ или $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$

1.15 Окрестность точки, проколотая окрестность

Окрестность точки $a = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$, обозначается $U_\varepsilon(a)$
Проколотая окрестность точки $a = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$, обозначается $\dot{U}_\varepsilon(a)$

1.16 Предел последовательности (определение на языке окрестностей)

$$\forall U(a) \;\; \exists N \;\; \forall n > N \;\; x_n \in U(a)$$

1.17 Метрика, метрическое пространство, подпространство

На множестве X отображение $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ называется **метрикой**, если выполняются свойства 1-3:

1. $\forall x, y \;\; \rho(x, y) \geq 0; \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\forall x, y \;\; \rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. Неравенство треугольника: $\forall x, y, z \in X \;\; \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

Метрическое пространство — упорядоченная пара (X, ρ), где X — множество, ρ — метрика на X.
Подпространством метрического пространства (X, ρ) называется (A, ρ), если $A \subset X$

1.18 Шар, замкнутый шар, окрестность точки в метрическом пространстве

Шар *(открытый шар)* $B(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) < r\}$
Замкнутый шар $B(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) \leq r\}$
Окрестность точки a в метрическом пространстве: $B(a, \varepsilon) \Leftrightarrow U(a)$.

1.19 Линейное пространство

Если K — поле *($K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$)*, X — множество, то X называется **линейным пространством** над полем K (и тогда K называется полем скаляр), если определены следующие две операции:

1. $+ : X \times X \to X$ — сложение векторов

2. $\cdot : K \times X \to X$ — умножение векторов на скаляры

Для этих операций выполняются соответствующие аксиомы *(здесь $A, B, C \in X; a, b \in \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$)*:

1.19.1 Аксиомы сложения векторов

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $\exists \mathbf{0} \in X : A + \mathbf{0} = A$
4. $\exists -A \in X : A + (-A) = 0$ — обратный элемент

1.19.2 Аксиомы умножения векторов на скаляры

1. $(A + B) \cdot a = A \cdot a + B \cdot a$
2. $A \cdot (a + b) = A \cdot a + A \cdot b$
3. $(ab) \cdot A = a(b \cdot A)$
4. $\exists \mathbf{1} \in \mathbb{R}$ или $\mathbb{C} : \mathbf{1} \cdot A = A$

1.20 Норма, нормированное пространство

Норма - отображение $X \to \mathbb{R}, x \mapsto ||x||$, если X - линейное пространство (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) и выполняется следующее:

1. $\forall x \;\; ||x|| \geq 0, ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\forall x \in X \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \;\; ||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$
3. Неравенство треугольника: $\forall x, y \in X \;\; ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Нормированное пространство — упорядоченная пара $(X, || \cdot ||)$, где $||||$ - норма

1.21 Ограниченное множество в метрическом пространстве

$A \subset X$ — **ограничено**, если $\exists x_0 \in X \;\; \exists R > 0 \;\; A \subset B(x_0, R)$, т.е. если A содержится в некотором шаре в X.

1.22 Внутренняя точка множества, открытое множество, внутренность

a — **внутренняя точка** множества D, если $\exists U(a) : U(a) \subset D$, т.е. $\exists r > 0 : B(a, r) \subset D$
D — **открытое множество**, если $\forall a \in D : a$ — внутренняя точка D
Внутренностью множества D называется $Int(D) = \{x \in D : x$ — внутр. точка $D\}$

1.23 Предельная точка множества

a — **предельная точка** множества D, если $\forall \dot{U}(a) \;\; \dot{U}(a) \cap D \neq \varnothing$

1.24 Замкнутое множество, замыкание, граница

D — **замкнутое множество**, если оно содержит все свои предельные точки.
Замыканием множества D называется $\overline{D} = D \cup$(множество предельных точек D)
Граница множества — множество его граничных точек. Обозначается $\partial D = \overline{D} \; IntD$

1.25 Изолированная точка, граничная точка

a — **изолированная** точка D, если $a \in D$ и a — не предельная.
a — **граничная** точка D, если $\forall U(a) \;\; U(a)$ содержит точки как из D, так и из D^c

1.26 Описание внутренности множества

1. $IntD$ — открыто
2. $IntD = \bigcup\limits_{\substack{D \supset G \\ G - \text{открыт}}}$ — минимальное открытое множество, содержащее D
3. D — открыто в $X \Leftrightarrow D = IntD$

1.27 Описание замыкания множества в терминах пересечений

$\overline{D} = \bigcap\limits_{\substack{F \supset D \\ F - \text{замкн.}}} F$ – минимальное *(по включению)* замкнутое множество, содержащее D.
Если D замкнуто, $\overline{D} = D$.

1.28 Верхняя, нижняя границы; супремум, инфимум

$E \subset \mathbb{R}$. E — огр. сверху, если $\exists M \in \mathbb{R}\ \ \forall x \in E\ \ x \leq M$. Кроме того, всякие такие M называются **верхними границами** E.
Аналогично ограничение снизу.
Для E — огр. сверху **супремум** ($\sup E$)— наименьшая из верхних границ E.
Для E — огр. снизу **инфинум** ($\sup E$) — наибольшая из нижних границ E.

1.29 Техническое описание супремума

$$b = \sup E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E\ \ x \leq b \\ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists x \in E\ \ b - \varepsilon < x \end{cases}$$

1.30 Последовательность, стремящаяся к бесконечности

$$x_n \to +\infty \quad \forall E > 0\ \ \exists N\ \ \forall n > N\ \ x_n > E$$

$$x_n \to -\infty \quad \forall E\ \ \exists N\ \ \forall n > N\ \ x_n < E$$

$$x_n \to \infty \Leftrightarrow |x_n| \to +\infty$$

1.31 Компактное множество

$K \subset X$ — **компактное**, если для любого открытого покрытия $\exists$ конечное подпокрытие $\Leftrightarrow \exists \alpha_1 \ldots \alpha_n \quad K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$

1.32 Секвенциальная компактность

Секвенциально компактным называется множество $A \subset X : \forall$ посл. (x_n) точек A
$\exists$ подпосл. x_{n_k}, которая сходится к точке из A

1.33 Определения предела отображения (3 шт)

1.33.1 По Коши

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall x \in D\ \ 0 < \rho^X(a, x) < \delta \quad \rho^Y(f(x), A) < \varepsilon$$

1.33.2 На языке окружностей

$$\forall U(A)\ \ \exists V(a)\ \ \forall x \in \dot{V}(a)\ \ f(x) \in U(A)$$

1.33.3 По Гейне

$\forall (x_n)$ — посл. в X:

1. $x_n \to a$
2. $x_n \in D$
3. $x_n \neq a$

$f(x_n) \to A$

1.34 Определения пределов в $\overline{\mathbb{R}}$