Proof. Продолжим доказательство из прошлой лекции, докажем, $3 \Rightarrow 1$.

Рассмотрим секвенциально компактное K и пусть K — не ограничено. *(случай ограниченного множества тривиален)*

$\exists x_n : ||x_n|| \to +\infty$

Тогда в этой последовательности нет сходящейся последовательности, т.к. любая $x_{n_k} \to x_0 \in \mathbb{R}$ ограничена. Противоречие $\Rightarrow K$ — не компактно.

Таким образом, если K — секвенциально компактно, то K ограничено.

Докажем замкнутость K.

Пусть $\exists$ предельная точка $x_0 \notin K$

$\exists x_n \to x_0$

По секвенциальности $\exists$ подпоследовательность $x_{n_k} \to a \in K$. □

Следствие. Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса.

Если в $\mathbb{R}^m$ (x_n) — ограниченная последовательность, то у неё существует сходящаяся подпоследовательность.

Proof. x_n — огр. $\Rightarrow x_n$ содержится в замкнутом кубе. Так как куб секвенциально компактен, x_{n_k} сходится. □

Примечание. (x_n) — не огр. $\Rightarrow x_n \to \infty$, т.е. $||x_n|| \to +\infty$

Определение. X — метрическое пространство, (x_n) в X

x_n — **фундаментальная, последовательность Коши, сходящаяся в себе**.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall m, n > N \ \ \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Лемма 1. *1. x_n — фунд. $\Rightarrow x_n$ — ограничена*

2. x_n — фунд; $\exists x_{n_k}$ — сходящ. Тогда x_n сходится.

Proof. 1. $\varepsilon := 1 \ \exists N \ \forall m, n := N+1 > N \ \ \rho(x_m, x_{N+1}) < 1$

$R := \max(1; \rho(x_1, x_{N+1}), \dots, \rho(x_N, x_{N+1}))$

$\forall n \ \ x_n \in B(x_{N+1}, R) \Rightarrow x_n$ сходится.

2. $\begin{cases} \varepsilon > 0 \ \exists K \ \forall k > K \ \ \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon \\ \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall m, n > N \ \ \rho(x_m, x_n) < \varepsilon \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow} x_n \to a$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \tilde{N} := \max(N, K)$ при $k > \tilde{N}$ выполняется $k > K$, значит $n_k \geq k > K \Rightarrow \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon$.

При $n > \tilde{N} \geq N \ \ m := n_k > \tilde{N} \geq N \Rightarrow \rho(x_n, x_{n_k}) < \varepsilon$

Итого $\forall n > \tilde{N} \ \ \rho(x_n, a) \geq \rho(x_n, x_{n_k}) < 2\varepsilon$

□

Теорема 1. *1. В любом метрическом пространстве x_n — сходящ. $\Rightarrow x_n$ — фунд.*

2. В $\mathbb{R}^m$ x_n — фунд. $\Rightarrow x_n$ — сходящ.

Proof. 1. $x_n \to a \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ \ \rho(x_n, a) < \varepsilon$

$x_n \to a \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n, m > N \rho(x_m, x_n) \geq \rho(x_n, a) + \rho(x_m, a) < 2\varepsilon$

2. x_n — фунд. $\Rightarrow x_n$ — огр. $\overset{\text{Б.-В.}}{\Longrightarrow} \exists x_{n_k}$ — сходящ.

$$\begin{cases} \exists x_{n_k} \text{ — сходящ.} \\ x_n \text{ — фунд.} \end{cases} \Rightarrow x_n \text{ — сходящ.}$$

□

Определение. X — метрическое пространство называется **полным**, если в нём любая фундаментальная последовательность — сходящаяся.

Верно: x_n — вещ. посл.

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n, m > N \;\; |x_n - x_m| < \varepsilon \Leftrightarrow \exists \text{ конечн. } \lim_{n \to +\infty} x_n$$

Это критерий Больцано-Коши.
$f : D \subset X \to Y$, x_0 — предельная точка D.
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$
$D_1 \subset D$, x_0 — предельная точка D_1.
Предел при $x \to x_0$ по множеству D_1 — это $\lim\limits_{x \to x_0} f|_{D_1}$

Определение. В $\mathbb{R}$ одностор. $= \{$ левостор., правостор. $\}$
Левостор. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = L$ - это $\lim f|_{D \cap (-\infty, x_0)}$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap D \;\; |f(x) - L| < \varepsilon$$

Аналогично правостор.

Если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f = L \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f = L$
$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f \overset{\text{обозн.}}{=} f(x_0 - 0)$
$\lim\limits_{x \to 0 - 0} f = \lim\limits_{x \to -0} f$
В $\mathbb{R}^2$ $\lim\limits_{(x_1, x_2) \to (a_1, a_2)} f$
Предел вдоль прямой: $\lim_{r \to 0} f(a_1 + r\cos\alpha, a_2 + r\sin\alpha)$

Теорема 2. *О пределе монотонной функции*
$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, монотонная, $a \in \overline{\mathbb{R}}$
$D_1 := D \cap (-\infty, a)$, a — пред. точка D_1

1. *f — возрастает, огр. сверху D_1. Тогда $\exists$ конечный предел $\lim\limits_{x \to a - 0} f(x)$*

2. *f — убывает, огр. снизу D_1. Тогда $\exists$ конечный предел $\lim\limits_{x \to a - 0} f(x)$*

Proof. 1. $L := \sup\limits_{D_1} f \quad L \overset{?}{=} \lim\limits_{x \to a - 0} f(x)$

$\forall \varepsilon > 0$ $L - \varepsilon$ — не верхн. граница для $\{f(x) : x \in D_1\}$ $\exists x_1 : L_\varepsilon < f(x_1)$.

Тогда при $x \in (x_1, a) \cap D_1$ $L - \varepsilon < f(x_1) \le f(x) \le L$

$\exists \delta := |x_1 - a|$ $\forall x : x \in (x_1, a)$ $L_\varepsilon \le f(x) < L + \varepsilon$

Аналогично доказывается пункт 2.

□

Критерий Больцано-Коши для отображений.

Теорема 3. *$f : D \subset X \to Y$, a — пр. точка D, Y — полное метрическое пространство.*
Тогда

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) \in Y \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x_1, x_2 \in D \ \ \rho(x_1, a) < \delta; \rho(x_2, a) < \delta \ \ \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

Proof. "$\Rightarrow$" как для последовательностей.
Докажем "$\Leftarrow$" по Гейне.
Заметим, что последовательность $f(x_n)$ — фундаментальная, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \ \forall m, n > N \ \ \rho(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$$

$$x_n \to a \Rightarrow \exists N \ \ \forall n > N \ \ \rho(x_n, a) < \delta$$

$$\forall m, n > N \ \ \rho(x_n, a) < \delta; \rho(x_m, a) < \delta \xRightarrow{\text{Фунд.}} \rho(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$$

$\square$

Примечание. В $\mathbb{R}$ критерий Больцано-Коши для функций
$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a$ — пред. точка D

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x_1, x_2 \in D \setminus \{a\} \ \ |x_1 - a| < \delta; |x_2 - a| < \delta$$

Для $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ критерий Больцано-Коши:

$$\forall E \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x_1, x_2 \in D \setminus \{a\} \ \ |x_1 - a| < \delta; |x_2 - a| < \delta \ \ f(x_1) > E; f(x_2) > E$$

неинтересно.
Для $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \Delta \ \ \forall x_1, x_2 \in D \ \ x_1 > \Delta; x_2 > \Delta \ \ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

1 Непрерывные отображения

Определение. $f : D \subset X \to Y \quad x_0 \in D$
f — **непрерывное** в точке x_0, если:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, либо x_0 — изолированная точка D
2. $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in D \ \ \rho(x, x_0) < \delta \ \ \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$
3. $\forall U(f(x_0)) \ \ \exists V(x_0) \ \ \forall x \in V(x_0) \cap D \ \ f(x) \in U(f(x_0))$
4. По Гейне $\forall (x_n) : x_n \to x_0; x_n \in D \ \ f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x_0)$

Определение. Если $\nexists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, либо $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ — **точка разрыва**.

Для $\mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in D \ \ |x - x_0| < \delta \ \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Определение. Непр. слева и непр. справа f — непр. слева в x_0, если $f|_{(-D,x_0]\cap D}$ — непрерывно в x_0

Если f непрерывно слева и непрерывно справа в x_0, то f непрерывно в x_0.

Определение. Пусть $\exists f(x_0-0), f(x_0+0)$ и не все 3 числа равны: $f(x_0-0), f(x_0), f(x_0+0)$. Это **разрыв I рода *(скачок)***.

Остальные точки разрыва — **разрыв II рода**.

Пример.

1. $f(x) = sign(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$ 0 — разрыв I рода.
2. $f(x) = sin(\frac{1}{x})$ 0 — разрыв II рода.

Определение. Отображение непрерывно на множестве D = непрерывно в каждой точке множества D.

1. Арифметические свойства
   (a) $f, g : D \subset X \to Y \;\; x_0 \in D$ (X — норм. пространство)
   f, g — непр. в D; $\lambda : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ — непр. x_0
   Тогда $f \pm g, ||f||, \lambda f$ — непр. x_0
   (b) $f, g : D \subset X \to \mathbb{R} \;\; x_0 \in D$
   f, g — непр. в x_0
   Тогда $f \pm g, |f|, fg$ — непр. в x_0
   $g(x_0) \neq 0$, тогда $\frac{f}{g}$ — непр. x_0