Рассмотрим такой ряд:

$$1-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\underbrace{-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}_{4\text{ раза}}+\underbrace{-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}_{8\text{ раз}}+\ldots$$

Сходится ли этот ряд? Да, потому что можно разбить на скобки из 3х слагаемых (кроме 1), каждая из которых $=0$.
Рассмотрим похожий ряд:

$$-1+1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\underbrace{+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}}_{4\text{ раза}}+\underbrace{\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}}_{8\text{ раз}}+\ldots=-1$$

Произошла магия — сумма ряда $=-1$, т.к. $b_n=-a_n$, где b_n — слагаемое этого ряда, a_n — прошлого ряда. Но мы просто переставили слагаемые предыдущего ряда $\Rightarrow$ перестановка бесконечного числа слагаемых меняет результат.

Определение. $\sum a_k, w:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ — биекция
$b_k:=a_{w(k)}$, $\sum b_k$ называется **перестановкой** ряда $\sum a_k$

Теорема 1. Ряд A абсолютно сходится, тогда его перестановка B тоже абсолютно сходится и имеет ту же сумму.

Доказательство. 1. $a_k\geq 0$

$$S_n^{(b)}=b_1+\ldots+b_n=a_{w(1)}+\ldots+a_{w(n)}\leq S_N^{(a)}, N=\max(w(1)\ldots w(n))$$

Предельный переход: $S^{(b)}\leq S^{(a)}$

Т.к. A — перестановка B, то $S^{(a)}\leq S^{(b)}\Rightarrow S^{(a)}=S^{(b)}$

2. Общий случай

   $a_k^+=\max(a_k,0), a_k^-=\max(-a_k,0)$

   $\sum b_k^+$ — перестановка $\sum a_k^+$; $\sum b_k^-$ — перестановка $\sum a_k^-$

   Срезки сходятся по пункту 1., в силу абсолютной сходимости $\sum a_k^+$ и $\sum a_k^-$ конечны $\Rightarrow$ $S^{(a)}=S^{(b)}$

□

Теорема 2. Римана.
$\sum a_k$ — сходится неабсолютно. Тогда:

1. $\exists$ перестановка ряда A, которая не имеет предела частичной суммы

2. $\forall S\in\overline{\mathbb{R}}\ \exists$ перестанвка ряда A с суммой S

Доказательство. 2. Т.к. $\sum a_k$ сходится неабсолютно, существует две кучи - одна из положительных a_k, другая из отрицательных. Обе кучи бесконечные и имеют бесконечную сумму. Тогда будем брать элементы из положительной кучи, пока частичная сумма $<S$, потом берем элементы из отрицательной кучи, пока сумма $>S$. Получаем ряд, осциллирующий вокруг S. Если есть нулевые элементы, то будем их добавлять в сумму, когда меняем направление.
1. Будем осциллировать не вокруг S, а между T и S. □

Пример.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{2n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots\right) - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \ldots =$$

$$= 2 - 1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$$

Разложим $f(x) = \ln(1+x)$ по Тейлору:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) x^n$$

$$f^{(n+1)}(c) = \frac{(-1)^n n!}{(1+c)^{n+1}}$$

$$R_n \leq \frac{1}{n+1} \frac{1}{(1+c)^{n+1}} \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$$

Проблема: сумма этого ряда должна быть > 1, но мы получили обратное. Это произошло, потому что мы переставили слагаемые неабсолютно сходящегося ряда.

Произведение рядов

$(a_1 + \ldots + a_k)(b_1 + \ldots + b_l) = \sum \sum a_i b_j$

Определение. $\sum a_k, \sum b_k$
$\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ – биекция, $\gamma(k) = (\varphi(k), \psi(k))$
Произведение рядов A и B – ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)}$

Теорема 3. Коши.
Пусть ряды $\sum a_k, \sum b_k$ абсолютно сходятся. Тогда $\forall$ биекции $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ произведение рядов абсолютно сходится и его сумма $= AB$

Доказательство. $\sum |a_k| = A^*, \sum |b_k| = B^*, 0 \leq A^*, B^* < +\infty$

$$\sum_{k=1}^{N} |a_{\varphi(x)} b_{\psi(x)}| \leq \sum_{i=1}^{M} |a_i| \sum_{j=1}^{L} |b_j| \leq A^* B^*$$

$$M := \max(\varphi(1) \ldots \varphi(N)) \quad N := \max(\psi(1) \ldots \psi(N))$$

Итого произведение сходится абсолютно.
Произведение для $\overline{\gamma} \neq \gamma$ есть перестановка произведения для $\gamma \Rightarrow \forall \gamma$ произведение рядов имеет одинаковую сумму.
Возьмём γ такое, что оно обходит точки $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ “по квадратам”, т.е. не заходит в следующий квадрат, пока не обошло предыдущий. Тогда:

$$\sum_{k=1}^{n^2} a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)} = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} b_j \xrightarrow[n \to +\infty]{} AB$$

$\square$

Пример. $x \in \mathbb{R}, x$ — фиксированный

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \sum_{j=0}^{+\infty} b_j x^j = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$$

Это называется произведение степенных рядов.

Функции нескольких переменных

Лемма 1. *О дифференциируемости отображения и его координатных функций.*
$F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \quad a \in IntE$
$F(x) = (f_1(x), f_2(x) \ldots f_n(x))$. *Тогда:*

1. F *— дифф. в* $a \Leftrightarrow$ *все* f_i *дифференциируемы в* a
2. $\forall i = 1 \ldots n \quad i$*-я строка матрицы Якоби* F *есть матрица Якоби* f_i

Доказательство.

$$F(x) = F(a) + L(x-a) + \varphi(x)|x-a|$$

$$\forall i \quad f_i(x) = f_i(a) + (L_{1i}, L_{2i}, \ldots L_{mi}) \cdot (x-a) + \varphi_i(x)|x-a|$$

Очевидно оба выражения эквивалентны. □

Пример.

1. $F = \text{const} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$
   $\forall x \in \mathbb{R}^m$ F дифф. в x, $F'(x) = \mathbf{0}$

$$F(x) = F(a) + \underbrace{L}_{\mathbf{0}}(x-a) + \underbrace{\varphi(x)}_{\mathbf{0}}|x-a|$$

2. $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ — линейный оператор
   $\forall x \in \mathbb{R}^m$ A дифф. в x, $A'(x) = A$

$$A(x) = Aa + A(x-a) + \underbrace{\varphi(x)}_{\mathbf{0}}|x-a|$$

3. $F(x) = v_0 + Ax$ — афинное отображение. $F'(x) = A$

1. Частные производные

Определение. $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, a \in IntE$
Фиксируем $k \in \{1 \ldots m\}$ $\varphi_k(t) := f(a_1, a_2 \ldots t \ldots a_m)$
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{\varphi_k(a_k+h) - \varphi_k(a_k)}{h} = \varphi_k'(a_k)$ называется **частной производной** функции f в точке a

$$f_k'(a) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = D_k f(a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, a_2 \ldots a_k + h \ldots a_m) - f(a_1 \ldots a_m)}{h}$$

Пример. 1.

$$f(x,y) = x + (y-\alpha)\operatorname{arctg}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{xy}+1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 1$$

2.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{df}{dx}(x,0) = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Теорема 4. Необходимое условие дифференциируемости.
$f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, a \in IntE, f -$ дифф. a
Тогда $\exists f'_1(a), \dots, f'_m(a)$ и матрица Якоби f в точке $a = (f'_1(a), \dots, f'_m(a))$

Доказательство.

$$f(x) = f(a) + (l_1 \dots l_m)(x-a) + \alpha(x)|x-a|$$

$$\lim_{x \to a}\frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{|x-a|} = 0$$

Посчитаем предел по направлению $x = a + te_k, e_k = (0 \dots 0, 1, 0 \dots 0)$

$$f(a+te_k) - f(a) + l_x t + \alpha_k(t)|t| \Rightarrow \exists\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = l_k$$

□

Следствие. $F : F \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l, a \in IntE, F -$ дифф. в a
Тогда все координатные функции F_i дифференциируемы в a и $F'(a) = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a)\right)$

Теорема 5. Достаточное условие дифференциирования.
$f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \;\; \exists r > 0 \;\; B(a,r) \subset E$ и в этом шаре $\exists f'_1 \dots f_m$ (конечные) и они непрерывны в точке a. Тогда f дифф. в a

Доказательство. $\lhd m = 2$

$$f(x_1,x_2) - f(a_1,a_2) =$$
$$= f(x_1,x_2) - f(x_1,a_2) + f(x_1,a_2) - f(a_1,a_2) =$$
$$= f'_2(x_1,\overline{x}_2)(x_2-a_2) + f'_1(\overline{x}_1,a_2)(x_1-a_1) =$$
$$= f'_2(a_1,a_2)(x_2-a_2) + f'_1(a_1,a_2)(x_1-a_2) + (f'_2(x_1,\overline{x}_2) - f'_2(a_1,a_2))\frac{x_2-a_1}{|x-a|}|x-a| + \text{ аналогично}$$

□

Правила дифференциирования

2. Линейность

$F, G : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, дифф. в $a \in IntE$. Тогда
$F + G, \forall \lambda \in \mathbb{R} \ \ \lambda F -$ дифф. в a

$$(F+G)'(a) = F'(a) + G'(a) \quad (\lambda F)'(a) = \lambda F'(a)$$

Доказательство. Сложить определения дифференциирования

$$F(a+h) = F(a) + F'(a)h + \alpha(h)|h|$$

$$F(a+h) = G(a) + G'(a)h + \beta(h)|h|$$

$$(F+G)(a+h) = (F+G)(a) + (F'+G')(a)h + (\alpha+\beta)(h)|h|$$

$\square$