Алгебра скалярных полиномов

$]K$ — поле, над которым задано множество полиномов $K_\infty[\lambda]$, также обозначается $P_\infty[K]$

$$P_\infty[K] = \{p_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda^i \quad \forall n\}$$

Примечание. $P_\infty[K]$ — линейное пространство:
$]p, q \in P_\infty[K]; \lambda \in K \Rightarrow \begin{cases} (p+q)(\lambda) = p(\lambda) + q(\lambda) \\ (\lambda p)(\lambda) = \alpha p(\lambda) \end{cases} \quad \Rightarrow P_\infty[K]$ — линейное пространство

Примечание. $P_\infty[K]$ — коммутативная алгебра
Зададим операцию умножения в $P_\infty[K]$:

$$\forall p, q \in P_\infty[K] \quad (p \cdot q)(\lambda) = p(\lambda)q(\lambda)$$

$$(p \cdot q)(\lambda) = p(\lambda)q(\lambda) = q(\lambda)p(\lambda) = (qp)(\lambda) \Rightarrow \text{коммутативность}$$

$$(p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r) = p \cdot q \cdot r$$

$$(p+q)r = pr + qr$$

$$(\lambda p)q = p(\lambda q) = \lambda(pq)$$

Нейтральный элемент:

- по сложению: $0(\lambda) = 0$
- по умножению: $1(\lambda) = 1$

Примечание. $\{1, t, t^2 \ldots t^n \ldots\}$ — базис $P_\infty[K] \Rightarrow \dim P_\infty[K] = \infty$

Определение. Идеалом J алгебры $P_\infty[K]$ называется такое её подпространство, что

$$\forall q \in J \ \ \forall p \in P_\infty[K] \quad q \cdot p \in J$$

Пример. Тривиальные идеалы:

- $\{0\}$
- $P_\infty[K]$

Лемма 1. *J — линейное подпространство $P_\infty[K]$*

Доказательство. $]q_1, q_2 \in J \quad q_1 + q_2 \in J?$
$q_1, q_2 \in J \Rightarrow \forall p \ \ q_1 p, q_2 p \in J$
$q_1 = r\tilde{q}_1, q_2 = r\tilde{q}_2 \quad (q_1 + q_2)p = r(\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2)p$
$(\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2)p \in P_\infty[K] \Rightarrow r(\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2)p \in J$ □

Лемма 2. *J — подалгебра $P_\infty[K]$*

Доказательство.

$$(q_1 \cdot q_2)p = q_1(q_2 p) \in J$$

□

Пример. $J_\alpha = \{p \in P_\infty[K] : p(\alpha) = 0\}$ — идеал

Лемма 3. $]q \in P_\infty[K] \Rightarrow J_q = q \cdot P_\infty[K]$ — *идеал в* $P_\infty[K]$

Доказательство. $]r \in J_q \Rightarrow \exists p \in P_\infty[K] : r = q \cdot p$
$]\tilde{p} \in P_\infty[K]$
$r\tilde{p} = (qp)\tilde{p} = q(p\tilde{p})$
$p\tilde{p} \in P_\infty[K] \Rightarrow q(p\tilde{p}) \in q \cdot P_\infty[K] = J_q \Rightarrow J_q$ – идеал □

Определение. Полином $q : J_q = q \cdot P_\infty[K]$ называется **порождающим полиномом** идеала J_q

Примечание. Если идеал содержит $1(\lambda)$, то данный идеал совпадает с $P_\infty[K]$:

$$J_1 = 1 \cdot P_\infty[K] = P_\infty[K]$$

Определение. $]J_1$ и J_2 – идеалы в $P_\infty[K]$

1. Суммой $J_1 + J_2$ называется множество

$$J_s = \{p \in P_\infty[K] : p = p_1 + p_2 \quad p_1 \in J_1, p_2 \in J_2\}$$

2. Пересечением $J_1 \cap J_2$ называется множество:

$$J_r = \{p \in P_\infty[K] : p \in J_1 \wedge p \in J_2\}$$

Лемма 4. *J_s и J_r – идеалы в $P_\infty[K]$*

Доказательство. $J_s = J_1 + J_2$ – идеал?
$]q \in J_s \Rightarrow q = q_1 + q_2 \quad q_1 \in J_1, q_2 \in J_2$
$]p \in P_\infty[K] \quad qp = (q_1 + q_2)p = q_1p + q_2p$
$q_1p \in J_1, q_2p \in J_2 \Rightarrow q_1p + q_2p \in J_s$
$J_r = J_1 \cap J_2$ – идеал?
$]q \in J_r \Rightarrow q \in J_1; q \in J_2$
$]p \in P_\infty[K] \quad qp \in J_1; qp \in J_2 \Rightarrow qp \in J_r$ □

Определение. Нетривиальный полином минимальной степени, содержащийся в идеале, называется **минимальным полиномом** идеала.

Лемма 5. *Любой полином идеала J делится на p_J без остатка:*

$$]p \in J \Rightarrow p \mid p_J$$

Доказательство. $]\exists p : p \nmid p_J \Rightarrow p = qp_J + r; \deg r < \deg p_J \Rightarrow r = p - qp_J : \min$ полином – противоречие. □

Примечание. Если p_1 и p_2 – минимальные полиномы $J \Rightarrow p_1 = \alpha p_2; \alpha \in K$

Теорема 1. *Минимальный полином идеала является его порождающим полиномом.*

Доказательство. $\forall p \in J \quad p \mid p_J \Rightarrow p = p_J \cdot q \in p_J \cdot P_\infty[K]$
$\forall p \in q \cdot P_\infty[K] \Rightarrow p = qr; r \in P_\infty[K] \Rightarrow \forall p \mid q \Rightarrow q = p_J$ □

Лемма 6. *Сравнение идеалов:*

$$J_1 \subset J_2 \Leftrightarrow p_{J_1} \mid p_{J_2}$$

Доказательство. "$\Rightarrow$"
$J_1 \subset J_2 \Rightarrow p_{J_1} \in J_2 \Rightarrow p_{J_1} \mid p_{J_2}$
"$\Leftarrow$"
$]p_{J_1} \mid p_{J_2} \Rightarrow p_{J_1} = rp_{J_2}$
$\forall q \in J_1 \quad q = \tilde{q}p_{J_1} = \tilde{r}P_{J_2} \Rightarrow q \mid p_{J_2} \Rightarrow J_1 \subset J_2$ □

Лемма 7. *О минимальном полиноме пересечения*

$$J_1 \leftrightarrow p_{J_1} \quad J_2 \leftrightarrow p_{J_2} \Rightarrow J_r = J_1 \cap J_2 \leftrightarrow r_J = \text{НОК}(p_{J_1}, p_{J_2})$$

Доказательство. $J_r = J_1 \cap J_2 \Rightarrow J_r \subset J_1 \wedge J_r \subset J_2 \Rightarrow r_J \mid p_{J_1} \wedge r_J \mid p_{J_2} \Rightarrow r_J = \text{НОК}(p_{J_1}, p_{J_2})$ □

Лемма 8. *О минимальном полиноме суммы*

$$J_s = J_1 + J_2 \Rightarrow S_J = \text{НОД}(p_{J_1}, p_{J_2})$$

Доказательство. $J_s = J_1 + J_2 \Rightarrow J_S \supset J_1 \wedge J_S \supset J_2 \Rightarrow p_{J_1} \mid S_J \wedge p_{J_2} \mid S_j \Rightarrow S_j = \text{НОД}(p_{J_1}, p_{J_2})$ □

Теорема 2. *О взаимно простых полиномах*
$]p_1, p_2$ *— взаимно простые, т.е.* $\text{НОД}(p_1, p_2) = 1 \Rightarrow \exists q_1, q_2 \in P_\infty[K] : p_1q_1 + p_2q_2 = 1$

Доказательство. $p_1 \leftrightarrow J_1 = p_1P_\infty[K]$
$p_2 \leftrightarrow J_2 = p_2P_\infty[K]$
$\text{НОД}(p_1, p_2) = 1 \leftrightarrow J_1 + J_2 = P_\infty[K]$
$p_1q_1 + p_2q_2 = 1$ □

Теорема 3. *Обобщение*

$$p_1 \dots p_k \in P_\infty[K], \text{НОД}(p_1 \dots p_k) = 1 \Rightarrow \exists q_1 \dots q_k : \sum_{i=1}^{k} p_iq_i = 1$$

Доказательство. Аналогично. □

Примечание. $]p = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k, \{p_i\}$ взаимно простые $\Rightarrow \exists q_1 \dots q_k : p'_1q_1 + p'_2q_2 + \dots + p'_kq_k = 1, p'_j = \frac{p}{p_j}$

Алгебра операторных полиномов

$]\varphi : X \to X$ — линейный оператор

Определение. **Операторным полиномом** $p(\varphi)$ называется полином вида:

$$p(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\varphi^i, \varphi^0 = I$$

Определение. $\mathcal{P}_\varphi = \{p_n(\varphi) \quad \forall n\}$ **— множество операторных полиномов**

Лемма 9. $\mathcal{P}_\varphi$ *— линейное пространство*

Лемма 10. $\mathcal{P}_\varphi$ *— коммутативная алгебра*

Доказательство.
$$\forall p(\varphi), q(\varphi) \quad p(\varphi)q(\varphi) = q(\varphi)p(\varphi) \Leftrightarrow \varphi^m\varphi^n = \varphi^n\varphi^m$$
□

$\triangleleft S_\varphi : P_\infty[K] \to \mathcal{P}_\varphi$

$$p(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\lambda^i \overset{S_\varphi}{\mapsto} p(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\varphi^i$$

Лемма 11. S_φ *— гомоморфизм алгебр* $P_\infty[K]$ *и* $\mathcal{P}_\varphi$

Доказательство.

$$p(\lambda)+q(\lambda)=(p+q)(\lambda)=\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i+\beta_i)\lambda^i\mapsto\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i+\beta_i)\varphi^i=(p+q)(\varphi)=p(\varphi)+q(\varphi)$$

$$\alpha p(\lambda)\mapsto\alpha p(\varphi)\text{ аналогично}$$

$$p(\lambda)q(\lambda)=(pq)(\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\beta_j\lambda^{i+j}\mapsto\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\beta_j\varphi^{i+j}=(pq)(\varphi)=p(\varphi)q(\varphi)$$

$$1\mapsto\varphi^0=I$$

□

Лемма 12. $p_1,p_2\in P_\infty[K],\text{\textit{НОД}}(p_1,p_2)=1\Rightarrow\exists q_1,q_2\in P_\infty[K]:p_1(\varphi)q_1(\varphi)+p_2(\varphi)q_2(\varphi)=I$

Доказательство. Применим к обеим частям $p_1(\lambda)q_1(\lambda)+p_2(\lambda)q_2(\lambda)=1$ отображение S_φ :

$$p_1(\varphi)q_1(\varphi)+p_2(\varphi)q_2(\varphi)=I$$

□

Теорема 4. *О сумме ядер.*
$]p=p_1\cdot p_2,\ \ p_1,p_2\in P_\infty[K]$
$]p_1,p_2$ *— взаимно простые*
Тогда

$$\text{\textit{Ker}}\,p(\varphi)=\text{\textit{Ker}}\,p_1(\varphi)\dot{+}\text{\textit{Ker}}\,p_2(\varphi)$$

Т.е., по определению $\dot{+}$*:*

$$\forall x\in\text{\textit{Ker}}\,p(\varphi)\ \ \exists!x_1\in\text{\textit{Ker}}\,p_1(\varphi),x_2\in\text{\textit{Ker}}\,p_2(\varphi)\quad x=x_1+x_2$$

Доказательство. Покажем, что $\text{Ker }p_1(\varphi)+\text{Ker }p_2(\varphi)\subset\text{Ker }p(\varphi)$
$]x_j\in\text{Ker }p_j(\varphi)\Rightarrow$

$$p(\varphi)(x)=p(\varphi)(x_1+x_2)=p_1(\varphi)p_2(\varphi)x_1+p_1(\varphi)p_2(\varphi)x_2=0+0=0$$

Покажем, что $\text{Ker }p(\varphi)\subset\text{Ker }p_1(\varphi)+\text{Ker }p_2(\varphi)$
$]x\in\text{Ker }p(\varphi)$

$$\text{НОД}(p_1,p_2)=1\Rightarrow p_1(\varphi)q_1(\varphi)+p_2(\varphi)q_2(\varphi)=I$$

$$x=Ix=p_1(\varphi)q_1(\varphi)x+p_2(\varphi)q_2(\varphi)x$$

$$p_2(\varphi)q_2(\varphi)x\in\text{Ker }p_1(\varphi)\Leftarrow p_1(\varphi)p_2(\varphi)q_2(\varphi)x=p(\varphi)q_2(\varphi)x=0$$

Покажем, что $\text{Ker }p_1(\varphi)+\text{Ker }p_2(\varphi)$ — прямая сумма
$\lhd\text{Ker }p_1(\varphi)\cap\text{Ker }p_2(\varphi)\ni z$

$$z=Iz=p_1(\varphi)q_1(\varphi)z+p_2(\varphi)q_2(\varphi)z=0+0=0\Rightarrow\dim\text{Ker }p_1(\varphi)\cap\text{Ker }p_2(\varphi)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\text{Ker }p_1(\varphi)+\text{Ker }p_2(\varphi)-\text{прямая сумма}$$

□

Примечание. Пусть $p=p_1\dots p_k,\{p_k\}$ — взаимно простые $\Rightarrow$

$$\text{Ker }p(\varphi)=\dot{+}\sum_{j=1}^{k}\text{Ker }p_j(\varphi)$$