Теорема 1. Обобщенная теорема о плотности.
$\Phi : Segm\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ — аддитивная функция промежутка
$f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ — непр.
$\forall\Delta \in Segm\langle a,b\rangle \ \exists m_\Delta, M_\Delta$ — не точный минимум/максимум

1. $m_\Delta l_\Delta \leq \Phi(\Delta) \leq M_\Delta l_\Delta$
2. $m_\Delta \leq f(x) \leq M_\Delta$ при всех $x \in \Delta$
3. $\forall$ фикс. $x \quad M_\Delta - m_\Delta \xrightarrow[\text{“}\Delta\to x\text{”}]{} 0$

   $\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta > 0 \ \forall\Delta : l_\Delta < \delta \quad |M_\Delta - m_\Delta| < \varepsilon$

Тогда $\forall[p,q] \in Segm\langle a,b\rangle \quad \Phi([p,q]) = \int\limits_p^q f$

Доказательство. $F(x) = \begin{cases} 0, & x = a \\ \Phi[a,x], & x > a \end{cases}$
Докажем, что F — первообразная f.
Фиксируем x
По 1.:

$$m_\Delta \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\Phi[x, x+h]}{h} \leq M_\Delta$$

По 2.:

$$m_\Delta \leq f(x) \leq M_\Delta$$

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| \leq M_\Delta - m_\Delta \xrightarrow[\text{“}\Delta\to x\text{”}]{} 0$$

Мы не можем написать “$\Delta \to x$” без кавычек, т.к. Δ — не число, но “$\Delta \to x$”$\Leftrightarrow h \to 0$
Таким образом,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

$\square$

Объемы фигур вращения

Объем это $V : Fig \to \mathbb{R}$:

1. V — кон., адд.: $V(A_1 \sqcup A_2) = V(A_1) + V(A_2)$
2. $V(\text{ед. куб}) = 1$
3. V не меняется при движении

Проблема: такой функции не существует.
Поэтому будем использовать объем для частных случаев фигур, а не для всех.

Определение. $\lhd A \in \mathbb{R}^2$ — фигура в I квадранте.
Вращение A:

1. по оси $x : A_x = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x, \sqrt{y^2+z^2}) \in A\}$
2. по оси $y : A_y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2+z^2}, y) \in A\}$

Для непр. $f : [a,b] \to \mathbb{R}, c \mapsto \tilde{c} \geq 0$:

$$\Phi(\Delta) = V(\Pi\Gamma(f,\Delta)_x)\text{(или } y\text{)}$$

Теорема 2. $f : \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ – непр., $f \geq 0$
$\Phi_x(\Delta) =$ "объем фигуры вращения вокруг оси OX"
$\Phi_y(\Delta) =$ "объем фигуры вращения вокруг оси OY"
Тогда : $\forall \Delta = [p,q] \in Segm\langle a,b \rangle$:

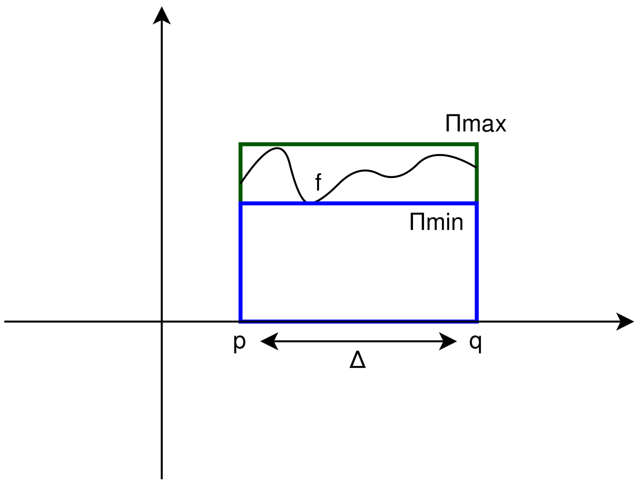
1. $\Phi_x[p,q] = \pi \int\limits_p^q f^2(x)dx$
2. $\Phi_y[p,q] = 2\pi \int\limits_p^q xf(x)dx$

Доказательство. 1. Это – упражнение, оно не использует ничего умного.

На лекции было сказано, что это доказывается через плотность аналогично площади криволинейного сектора.

2. Мы знаем, что объем цилиндра $= S(\text{основание}) \cdot h$.

Для оценки $\Phi(\Delta)$ найдем прямоугольник, который является минимальным по площади сечения и максимальный прямоугольники: Π_{min} и Π_{max}.



Покажем, что $2\pi x f(x)$ подходит под обобщенную теорему о плотности для Φ:

$$V((\Pi_{\text{min}})_y) \leq \Phi(\Delta) \leq V((\Pi_{\text{max}})_y)$$

$$V((\Pi_{\text{max}})_y) = S_{\text{кольца}} \max_{x\in[p,q]} f = \pi(q-p)(q+p) \max_{x\in[p,q]} f \leq \pi(q-p) \overbrace{\max_{x\in[p,q]} 2x}^{=2q\geq q+p} \max_{x\in[p,q]} f$$

$$V((\Pi_{\text{min}})_y) \geq \pi \min 2x(q-p) \min f$$

$$M_\Delta := \pi \max_{x\in[p,q]} 2x \max_{x\in[p,q]} f(x) \quad m_\Delta := \pi \min_{x\in[p,q]} 2x \min_{x\in[p,q]} f(x)$$

На лекции было дано m_Δ и M_Δ без π.

Все три условия теоремы очевидно выполнены:

(a) $m_\Delta(q-p) \leq \Phi(\Delta) \leq M_\Delta(q-p)$

(b) $m_\Delta \le 2\pi x f(x) \le M_\Delta \quad \forall x \in \Delta$

(c) $\pi(\max f \max 2x - \min f \min 2x) \xrightarrow[\text{“}\Delta\to x\text{”}]{} 0$

$\square$

Пример. Объем тора.
Будем вращать окружность, центр которой лежат на оси OX в точке R, с радиусом r, относительно оси OY.

$$\frac{1}{2}V = 2\pi\int\limits_{R-2}^{R+2}(x\mp R)\sqrt{r^2-(x-R)^2}dx = \pi\int\limits_{R_2}^{R+2}2(x-R)\sqrt{r^2-(x-R)^2}dx + 2\pi\int\limits_{R-2}^{R+2}R\sqrt{r^2-(x-r)^2}dx =$$

$$= -\pi\frac{1}{3}(r^2-(x-R)^2)^{\frac{3}{2}}|_{x=R-2}^{x=R+2} + 2\pi R\frac{\pi r^2}{2} = 2\pi R\cdot\pi r^2$$

Длина гладкого пути

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ — непр.
$\gamma(a)$ — начало; $\gamma(b)$ — конец
$\gamma : t \mapsto \begin{pmatrix}\gamma_1(t)\\ \gamma_2(t)\\ \vdots\\ \gamma_m(t)\end{pmatrix}$; γ_i — коорд. функции
Если все $\gamma_i \in C^1[a,b]$, то γ — **гладкий путь**.
$C_\gamma := \gamma([a,b])$ — **носитель пути**.
Вектор скорости:

$$\gamma'(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\gamma(t+\Delta t)-\gamma(t)}{\Delta t} = \lim\begin{pmatrix}\frac{\gamma_1(t+\Delta t)-\gamma_1(t)}{\Delta t}\\ \vdots\\ \frac{\gamma_m(t+\Delta t)-\gamma_m(t)}{\Delta t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma_1'(t)\\ \gamma_2'(t)\\ \vdots\\ \gamma_m'(t)\end{pmatrix}$$

Кривая Пеано: $[0,1]\to[0,1]\times[0,1]$ — ломает длину пути, но она не гладкая, поэтому мы рассматриваем только гладкие пути.

Определение. **Длина пути** — фукнция l, заданная на множестве гладких путей в $\mathbb{R}^m$, такая что:

1. $l \ge 0$
2. l — аддитивна: $\forall[a,b]\ \ \forall\gamma : [a,b]\to\mathbb{R}^m\ \ \forall c\in(a,b) \quad l(\gamma) = l(\gamma|_{[a,c]}) + l(\gamma|_{[c,b]})$
3. $\forall\gamma,\tilde{\gamma}$ — гладкие пути, $C_\gamma, C_{\tilde{\gamma}}$ — носители путей
   Если $\exists T : C_\gamma \to C_{\tilde{\gamma}}$ — сжатие: $(\forall M, M'\ \ \rho(T(M),T(M')) \le \rho(M,M'))$, тогда $l(\tilde{\gamma}) \le l(\gamma)$
4. Нормировка: γ — гладкий путь, $\gamma(t) = vt+u;\ \ u,v\in\mathbb{R}^m$:

$$l(\gamma) = \rho(\gamma(a),\gamma(b))$$

Свойства:

1. “Длина пути” $\ge$ “длина хорды”

2. При растяжениях длина растет.

3. Длина не меняется при движении.

Определение. $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n \quad t_0 = a < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$
$\tau = \{t_0 \ldots t_n\}$ — дробление отрезка.
Тогда **вариация функции** γ на отрезке $[a, b]$ это l:

$$l(\gamma) = \sup_{\tau} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \rho(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \right\}$$

Лемма 1. *Вариация γ на отрезке $[a, b]$ — длина пути γ.*

Доказательство. Тривиальная проверка определения длины пути. Кохась не говорил, но надо доказать. □

Пример. Рассмотрим путь из A в B, который проходится за 1 час со скоростью 5 км/ч. Длина этого пути — 5 км.

Теорема 3. $\gamma \in C^1([a, b] \to \mathbb{R}^m)$
Тогда $l(\gamma) = \int\limits_a^b ||\gamma'(t)||dt$

Доказательство. Будем считать $\gamma' \neq 0$, γ — инъективная.
$\Phi : [p, q] \subset [a, b] \mapsto l(\gamma|_{[p,q]})$ — адд. ф-ция промежутка.
Докажем, что $f(t) = ||\gamma'(t)||$ — плотность Φ

$$\Delta \subset [a, b] \quad m_i(\Delta) := \min_{t \in \Delta} |\gamma_i'(t)| \quad M_i(\Delta) = \max |\gamma_i'(t)|$$

$$m_\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} m_i(\Delta)^2} \quad M_\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} M_i(\Delta)^2}$$

Докажем, что $m_\Delta l_\Delta \leq \Phi(\Delta) \leq M_\Delta l_\Delta$
$\tilde{\gamma} : \Delta \to \mathbb{R}^m$ — лин. путь
$\tilde{\gamma}(t) = \vec{M} \cdot t$, где $\vec{M} = \begin{pmatrix} M_1(\Delta) & \ldots & M_m(\Delta) \end{pmatrix}$
$T : C_{\gamma|_\Delta} \to C_{\tilde{\gamma}} \quad \gamma(t) \mapsto \tilde{\gamma}(t)$
Утверждение: T — растяжение.

$$||\vec{M}q - \vec{M}p|| = (q - p)||\vec{M}|| = (q - p)M_\Delta$$

$$\rho(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (\gamma_i(t_0) - \gamma_i(t_1))^2} \overset{\text{т. Лагранжа}}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \gamma_i'(\bar{t}_i)^2 (t_0 - t_1)^2} \leq ||\vec{M}|| \cdot |t_0 - t_1| =$$
$$= \rho(\tilde{\gamma}(t_0), \tilde{\gamma}(t_1)) = \rho(T(\gamma(t_0)), T(\gamma(t_1)))$$

□

Доказательство. (альтернативное).
Покажем, что $\int ||\gamma'||$ удовлетворяет всем требованиям длины гладкого пути:

1. $\forall \gamma \;\; l(\gamma) \geq 0$ — очевидно, т.к. $||\gamma'|| \geq 0$

2. Линейность: очевидно по линейности определенного интеграла.

3. Сжатие: $\exists T : C_\gamma \to C_{\tilde{\gamma}}$

$$\gamma'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$$

$$||\gamma'(t)|| = \lim_{h\to 0} \frac{||\gamma(t+h), \gamma(t)||}{|h|}$$

$$||\gamma'(t)|| = \lim_{h\to 0} \frac{\rho(\gamma(t+h), \gamma(t))}{|h|} \quad ||\tilde{\gamma}'(t)|| = \lim_{h\to 0} \frac{\rho(\tilde{\gamma}(t+h), \tilde{\gamma}(t))}{|h|}$$

$$\rho(\gamma(t+h), \gamma(t)) \geq \rho(\tilde{\gamma}(t+h), \tilde{\gamma}(t)) \Rightarrow ||\gamma'(t)|| \geq ||\tilde{\gamma}'(t)|| \Rightarrow l(\gamma) \geq l(\tilde{\gamma})$$

4. Нормировка. $\triangleleft \gamma : \gamma(t) = \vec{u} + \vec{v}t$

$$l(\gamma) = \int_a^b ||\vec{v}||dt = ||\vec{v}||(b-a)$$

$$\rho(\gamma(a), \gamma(b)) = ||\vec{u} + \vec{v}a - \vec{u} - \vec{v}b|| = ||\vec{v}(a-b)|| = \sqrt{\sum_{i=1}^m v_i^2 (b-a)^2} = (b-a)||\vec{v}||$$

$\square$

Пример. Длина графика $y = f(x), f \in C^1$ на отрезке $[a, b]$

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \quad \gamma'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix} \quad ||\gamma'(x)|| = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Пример. Длина кривой $r = r(\varphi)$ в полярных координатах, $\varphi \in [\alpha, \beta]$

$$x = r(\varphi)\cos\varphi \quad y = r(\varphi)\sin\varphi$$

$$\gamma'(\varphi) = \begin{pmatrix} r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi \\ r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$||\gamma'(\varphi)|| = \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2 - 2r'(\varphi)r(\varphi)\cos\varphi\sin\varphi + 2r'(\varphi)r(\varphi)\cos\varphi\sin\varphi}$$

$$||\gamma'(\varphi)|| = \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2}$$

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi$$