

$$\varphi : X \rightarrow X$$

Определение. $x \in X$ — **собственный вектор** φ , если

$$x \neq 0 \quad \varphi x = \lambda x, \quad \lambda \in K$$

λ — **собственное значение** φ , соответствующее x

Определение. Спектр $\sigma_\varphi = \{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$ — множество всех собственных значений вектора

Пример. Найти спектр и собственные вектора оператора φ , заданного матрицей:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Найдем спектр:

$$\begin{aligned} \chi_\varphi(\lambda) &= |A_\lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 6 \\ -2 & 6-\lambda & 3 \\ 6 & 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (3-\lambda)((6-\lambda)(-2-\lambda)-9) + 2(2(2+\lambda)-18) + 6(-6-6(6-\lambda)) = \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2-4\lambda-21) + 4(\lambda-7) - 36(7-\lambda) = \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2-4\lambda-21) + 40(\lambda-7) = \\ &= (3-\lambda)(\lambda-7)(\lambda+3) + 40(\lambda-7) = \\ &= (49-\lambda^2)(\lambda-7) = (\lambda-7)^2(\lambda+7) \end{aligned}$$

$$\sigma_\varphi = \text{корни } \chi_\varphi = \{-7, 7^{(2)}\}$$

Найдем собственные вектора:

$$1. \lambda = -7$$

$$A\xi = \lambda\xi \Rightarrow (A - \lambda E)\xi = 0 - \text{однор. СЛАУ}$$

$$\begin{bmatrix} 3+7 & -2 & 6 \\ -2 & 6+7 & 3 \\ 6 & 3 & -2+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -2 & 6 \\ -2 & 13 & 3 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 13 & 3 \\ 0 & 42 & 14 \\ 0 & 63 & 21 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 13 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$]\xi^3 - \text{параметр} \Rightarrow \begin{cases} -2\xi^1 + 13\xi^2 = -3\xi^3 \\ 3\xi^2 = -\xi^3 \end{cases}$$

$$]\xi^3 = 3 \Rightarrow \xi^2 = -1, \xi^1 = -2 \Rightarrow \xi = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Собственный вектор один (см. СЛАУ)

$$2. \lambda = 7$$

$$\begin{bmatrix} 3-7 & -2 & 6 \\ -2 & 6-7 & 3 \\ 6 & 3 & -2-7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -4 & -2 & 6 \\ -2 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{два собственных вектора}$$

$$]\xi^2, \xi^3 - \text{параметры}$$

$$\xi^2 = 2, \xi^3 = 0 \Rightarrow \xi^1 = -1$$

$$\xi^2 = 0, \xi^3 = 2 \Rightarrow \xi^1 = 3$$

$$\xi_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\{\xi_j\}_{j=1}^3 - \text{базис } X$$

Проверка:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = -7 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Проверим, что A в базисе из собственных векторов диагональна:

$$\tilde{A} = T^{-1}AT$$

$$T^{-1} = \frac{1}{\det T} \tilde{T}^T$$

$$\det T = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -28$$

$$\tilde{T}^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & -5 & -3 \\ -6 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \frac{-1}{28} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & -5 & -3 \\ -6 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \frac{-1}{28} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & -5 & -3 \\ -6 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{-1}{28} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & -5 & -3 \\ -6 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & 7 & -21 \\ -7 & -14 & 0 \\ 21 & 0 & -14 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 28 & 0 & 0 \\ 0 & -28 & 0 \\ 0 & 0 & -28 \end{bmatrix} \end{aligned}$$