1 Ранг матрицы

$]A, B$ — матрицы $n \times n$

$C = A \cdot B \quad c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

В матрице C j-тый столбец является линейной комбинацией столбцов матрицы A с коэффициентами из j-того столбца матрицы $B \Rightarrow rgC \leq rgA, rg \leq rgB \quad rgC = \min(rgA, rgB)$.

Определение. Назовем **элементарными** матрицы, которые получаются из E элементарными преобразованиями её строк.

$E \cdot B = B$

1. Перестановка строк

   $E \to E'$

   Если у матрицы E поменять строки i и j местами, то то же случится с матрицей B.

2. Умножение строки на число $\neq 0$ — то же случится с матрицей B.

3. Сложение строк — то же самое.

Это доказывает, что при решении СЛАУ методом Гаусса не изменяется rg матрицы.

Пример. Сформулировать в терминах рангов критерий того, что три точки A, B, C не лежат на одной прямой.

$A(x_1, y_1) \quad B(x_2, y_2) \quad C(x_3, y_3)$

Предположим, что существует такая прямая, на которой лежат эти точки, вида $Ax + By = C$

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + C = 0 \\ Ax_2 + By_2 + C = 0 \\ Ax_3 + By_3 + C = 0 \end{cases}$$

$$\lhd A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$$

- $rgA = 3$ — не лежат
- $rgA = 2$ — лежат
- $rgA = 1$ — совпали

$\lhd \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix}$$

Докажем, что через 4 точки, не лежащие на одной плоскости, можно провести единственную сферу.

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

$$x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 + z^2 - 2zz_0 + z_0^2 = R^2$$

$$2xx_0 + 2yy_0 + 2zz_0 + b = x^2 + y^2 + z^2 \quad b = R^2 - x_0^2 - y_0^2 - z_0^2$$

$$\begin{bmatrix} 2x_1 & 2y_1 & 2z_1 & 1 & x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \\ 2x_2 & 2y_2 & 2z_2 & 1 & x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \\ 2x_3 & 2y_3 & 2z_3 & 1 & x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 \\ 2x_4 & 2y_4 & 2z_4 & 1 & x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 \end{bmatrix}$$

$rgA = 4 \quad \exists!$ сфера

$$rg(AB) = min(rgA, rgB)$$

$$rg(A^T) = rgA$$