

1 Определения

1.1 Локальный максимум, минимум, экстремум

Определение. $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in E$ — локальный максимум функции, если

$$\exists U(x_0) \quad \forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \leq f(x_0)$$

Аналогично определяется минимум.

Определение. Экстремум — точка минимума либо максимума.

1.2 ! Первообразная, неопределенный интеграл

$$F, f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$$

F — первообразная f на $\langle a, b \rangle$

$$\forall x \in \langle a, b \rangle \quad F'(x) = f(x)$$

Неопределенный интеграл f на $\langle a, b \rangle$ — множество всех первообразных f :

$$\{F + c, c \in \mathbb{R}\}, \text{ где } F \text{ — первообразная}$$

Обозначается $\int f = F + c$ или $\int f(x)dx$

1.3 Теорема о существовании первообразной

$f \in C^0(\langle a, b \rangle)$ тогда у f существует первообразная.

1.4 Таблица первообразных

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \text{ — длинный логарифм}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x$$

Почему где-то нет dx ? Кохась забыл?

1.5 Равномерная непрерывность

$f : \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **равномерно непрерывна** на $\langle a, b \rangle$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle : |x_1 - x_2| < \delta \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Или для метрического пространства:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_1, x_2 \quad \rho(x_1, x_2) < \delta \quad \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

Отличие от непрерывности на отрезке в том, что δ зависит только от ε и подходит для всех x_1, x_2 .

1.6 Площадь, аддитивность площади, ослабленная аддитивность

\mathcal{E} — множество всех ограниченных фигур в \mathbb{R}^2 (“фигура” = подмножество \mathbb{R}^2)

Площадь это $\sigma : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$, такое что:

1. $A \in \mathcal{E} \quad A = A_1 \sqcup A_2 \quad \sigma A = \sigma A_1 + \sigma A_2$ (конечная аддитивность)
2. $\sigma([a, b] \times [c, d]) = (d - c)(b - a)$

Ослабленная площадь $\sigma : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$:

1. Монотонна
2. Нормирована
3. Ослабленная аддитивность: $E \in \mathcal{E} \quad E = E_1 \cup E_2 \quad E_1 \cap E_2$ — вертикальный отрезок, E_1 и E_2 лежат каждый в своей полуплоскости относительно этого отрезка $\Rightarrow \sigma E = \sigma E_1 + \sigma E_2$

1.7 ! Определенный интеграл

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, непр.

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x) dx := \sigma \Pi(f_+, [a, b]) - \sigma \Pi(f_-, [a, b])$$

1.8 Положительная и отрицательная срезки

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

$f_+ := \max(f, 0)$ — положительная срезка

$f_- := \max(-f, 0)$ — отрицательная срезка

1.9 Среднее значение функции на промежутке

Отсутствует

1.10 Кусочно-непрерывная функция

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, кусочно непрерывна

f — непр. на $[a, b]$ за исключением конечного числа точек, в которых разрывы I рода

Пример. $f(x) = [x], x \in [0, 2020]$

1.11 Почти первообразная

$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — почти первообразная кусочно непрерывной функции f :
 F — непр. и $\exists F'(x) = f(x)$ всюду, кроме конечного числа точек

Пример. $f = \operatorname{sign} x, x \in [-1, 1]$
 $F := |x|$

1.12 Функция промежутка, аддитивная функция промежутка

$\operatorname{Segm}\langle a, b \rangle = \{[p, q] : [p, q] \subset \langle a, b \rangle\}$ — множество всевозм. отрезков, лежащих в $\langle a, b \rangle$

Функция промежутка $\Phi : \operatorname{Segm}\langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

Аддитивная функция промежутка: Φ — функция промежутка и

$$\forall [p, q] \in \operatorname{Segm}\langle a, b \rangle \quad \forall r : p < r < q \quad \Phi([p, q]) = \Phi([p, r]) + \Phi([r, q])$$

1.13 Плотность аддитивной функции промежутка

Плотность аддитивной функции промежутка: $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — плотность Φ , если:

$$\forall \delta \in \operatorname{Segm}\langle a, b \rangle \quad \inf_{x \in \delta} f(x) \cdot \operatorname{len}_{\delta} \leq \Phi(\delta) \leq \sup f \cdot \operatorname{len}_{\delta}$$

2 Теоремы

2.1 Критерий монотонности функции. Следствия

$f \in C(\langle a, b \rangle)$, дифф. в (a, b)

Тогда f — возрастает $\Leftrightarrow \forall x \in (a, b) \quad f'(x) \geq 0$

Доказательство. “ \Rightarrow ” По определению $f' \quad \frac{f(x+h)-f(h)}{h} \geq 0$

“ \Leftarrow ” $x_1 > x_2$, по т. Лагранжа: $\exists c : f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2) \geq 0$ □

Следствие. $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, тогда:

$f = \operatorname{const} \Leftrightarrow (f \in C(\langle a, b \rangle) - \text{дифф. на } \langle a, b \rangle, f' \equiv 0)$

Следствие. $f \in C\langle a, b \rangle$, дифф. на (a, b) . Тогда:

f строго возрастает \Leftrightarrow ① и ②

① $f' \geq 0$ на (a, b)

② $f' \not\equiv 0$ ни на каком промежутке

Доказательство. “ \Rightarrow ” очевидно

“ \Leftarrow ” По лемме о возрастании в отрезке □

Следствие. О доказательстве неравенств

$g, f \in C([a, b])$, дифф. в (a, b)

$f(a) \leq g(a); \forall x \in (a, b) \quad f'(x) \leq g'(x)$

Тогда $\forall x \in [a, b] \quad f(x) \leq g(x)$

Доказательство. $g - f$ — возр., $g(a) - f(a) \geq 0$ □

2.2 Теорема о необходимом и достаточном условиях экстремума

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in (a, b) \quad f - \text{дифф. на } (a, b)$

Тогда:

1. $x_0 - \text{лок. экстремум} \Rightarrow f'(x_0) = 0$

2. $f - n$ раз дифф. в x_0

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то $\begin{cases} n - \text{чет.} : & x_0 - \text{локальный максимум} \\ n - \text{нечет.} : & x_0 - \text{не экстремум} \end{cases}$

Если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то $\begin{cases} n - \text{чет.} : & x_0 - \text{локальный минимум} \\ n - \text{нечет.} : & x_0 - \text{не экстремум} \end{cases}$

Доказательство. 1. т. Ферма

2. ф. Тейлора

$$f(x) = T_n(f, x_0)(x) + o((x - x_0)^n)$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

при x , близких к x_0 :

$$\text{sign}(f(x) - f(x_0)) = \text{sign} \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \right)$$

Тогда при чётном n

$$\text{sign}(f(x) - f(x_0)) = \text{sign } f^{(n)}(x_0) \Rightarrow x_0 - \text{экстр.}$$

При нечётном n

$$\text{sign}(f(x) - f(x_0)) = \begin{cases} f^{(n)}(x_0), & x > x_0 \\ -f^{(n)}(x_0), & x < x_0 \end{cases} \Rightarrow x_0 - \text{не экстр.}$$

□

2.3 Теорема Кантора о равномерной непрерывности

$f : X \rightarrow Y, X - \text{комп.}, f - \text{непр. на } X$

Тогда $f - \text{равномерно непр.}$

Доказательство. От противного.

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta, \bar{x}_\delta : \rho(x_\delta, \bar{x}_\delta) < \delta \quad \rho(f(x_\delta), f(\bar{x}_\delta)) \geq \varepsilon$$

$$\delta := \frac{1}{n} \quad \exists x_n, \bar{x}_n : \rho(x_n, \bar{x}_n) < \delta \quad \rho(f(x_n), f(\bar{x}_n)) \geq \varepsilon$$

Выберем $x_{n_k} \rightarrow \tilde{x}, \bar{x}_{n_k} \rightarrow \tilde{\tilde{x}}$

$$\rho(\tilde{x}, \tilde{\tilde{x}}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \delta = 0 \Rightarrow \tilde{x} = \tilde{\tilde{x}}$$

Тогда $f(x_{n_k}) \rightarrow f(\tilde{x}), f(\bar{x}_{n_k}) \rightarrow f(\tilde{\tilde{x}})$, противоречие с $\rho(f(x_n), f(\bar{x}_n)) \geq \varepsilon$

□

2.4 Теорема Брауэра о неподвижной точке

$f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$, непр.

Тогда $\exists x \in [0, 1]^2 : f(x) = x$, т.е. есть неподвижная точка.

Обобщенный вариант:

1. $f : [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]^m$ — непр.
2. $f : B(0, 1) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow B(0, 1)$ — непр.
3. $f : S(0, 1) \subset \mathbb{R}^m$ — непр.

Доказательство. $\rho : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$\rho(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$ — непр. в $[0, 1]^2$

От противного — пусть $\forall x \in [0, 1]^2 \quad f(x) \neq x$

Тогда $\forall x \quad \rho(f(x), x) > 0 \quad x \mapsto \rho(f(x), x)$ — непр., > 0

По т. Вейерштрасса $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in [0, 1] \quad \rho(f(x), x) \geq \varepsilon$

По т. Кантора для f : для этого $\varepsilon \quad \exists \delta < \varepsilon$:

$$\forall x, \bar{x} : \|x - \bar{x}\| < \delta \quad \|f(x) - f(\bar{x})\| < \varepsilon$$

Можно писать не $\|\cdot\|$, а ρ .

Возьмём $n : \frac{\sqrt{2}}{n} < \delta$

Построим доску $Hex(n+1, n+1)$, где $n+1$ — число узлов.

Логические координаты узла $(v_1, v_2) \quad v_1, v_2 \in \{0 \dots n\}$ имеют физические координаты, то есть узлу сопоставляется точка на квадрате с координатами $(\frac{v_1}{n}, \frac{v_2}{n})$

$$K(V) := \min\{i \in \{1, 2\} : |f(\frac{v}{n}) - \frac{v_i}{n}| \geq \varepsilon\}$$

Продолжение на следующей лекции. □

2.5 Теорема о свойствах неопределенного интеграла

f, g имеют первообразную на $\langle a, b \rangle$. Тогда

1. Линейность:

$$\int (f + g) = \int f + \int g$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \int \alpha f = \alpha \int f$$

2. $\varphi : \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \left(\int f(x) dx \right) |_{x=\varphi(t)} = F(\varphi(t))$$

Частный случай: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\int f(\alpha t + \beta) dt = \frac{1}{\alpha} F(\alpha t + \beta)$$

3. f, g — дифф. на $\langle a, b \rangle$; $f'g$ — имеет первообр.

Тогда fg' имеет первообразную и

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

Доказательство. 1. Опущено

2. $(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$
3. $(fg - \int f'g)' = f'g + fg' - f'g = fg'$

□

2.6 Интегрирование неравенств. Теорема о среднем

$f, g \in C[a, b]$ $f \leq g$. Тогда

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Доказательство.

$$\Pi\Gamma(f_+) \subset \Pi\Gamma(g_+) \Rightarrow \sigma\Pi\Gamma(f_+) \leq \sigma\Pi\Gamma(g_+)$$

$$\Pi\Gamma(f_-) \supset \Pi\Gamma(g_-) \Rightarrow \sigma\Pi\Gamma(f_-) \geq \sigma\Pi\Gamma(g_-)$$

$$\sigma\Pi\Gamma(f_+) - \sigma\Pi\Gamma(f_-) \leq \sigma\Pi\Gamma(g_+) - \sigma\Pi\Gamma(g_-)$$

□

Кто такая теорема о среднем

2.7 Теорема Барроу

$f \in C[a, b]$ Φ — интеграл с переменным верхним пределом. Тогда

$$\forall x \in [a, b] \quad \Phi'(x) = f(x)$$

Доказательство. Зафиксируем $x \in [a, b]$ $y > x, y \leq b$

$$\frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = \frac{\int_a^y f - (\int_a^x f + \int_x^y f)}{y - x} = \frac{\int_x^y f}{y - x} = \frac{c(y - x)}{y - x} = c \xrightarrow{y \rightarrow x+0} f(x)$$

т.о.ср.
 $\exists c \in [x, y]$

$x > y$

$$\frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = \frac{1}{x - y} \int_y^x f = c \xrightarrow{y \rightarrow x-0} f(x)$$

□

2.8 Формула Ньютона-Лейбница, в том числе, для кусочно-непрерывных функций

Теорема 1. $f \in C[a, b]$ F — первообр. f

Тогда $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

Доказательство. $\Phi(x) = \int_0^x f$ — первообр.

$\exists C : F = \Phi + C$

$$\int_a^b f = \Phi(b) - \Phi(a) = F(b) - F(a)$$

□

Что с кусочно-непрерывными?

2.9 Лемма об ускоренной сходимости

1. $f, g : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ a — предельная точка D

$\exists U(a) : \text{при } x \in \dot{U}(a) \cap D \quad f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

Тогда

$$\forall x_k \rightarrow a \quad (x_k \neq a, x_k \in D) \quad \exists y_k \rightarrow a (y_k \neq a, y_k \in D)$$

такое, что

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(y_k)}{g(x_k)} = 0 \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{g(y_k)}{g(x_k)} = 0$$

Таким образом, $g(y_k) \rightarrow 0$ быстрее, чем $g(x_k) \rightarrow 0$

2. То же самое, но $\lim f(x) = +\infty, \lim g(x) = +\infty$

Доказательство. 1. Очевидно.

$$\forall k \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |f(x_n)| < |g(x_k)| \frac{1}{k} \quad |g(x_n)| < |g(x_k)| \frac{1}{k}$$

$$\varepsilon := |g(x_k)|$$

$$k = 1 \quad y_1 := \text{какой-нибудь } x_n : \left| \frac{f(x_n)}{g(x_k)} \right| < 1 \quad \left| \frac{g(x_n)}{g(x_k)} \right| < 1$$

$$k = 2 \quad y_2 := \text{какой-нибудь } x_n : \left| \frac{f(x_n)}{g(x_k)} \right| < \frac{1}{2} \quad \left| \frac{g(x_n)}{g(x_k)} \right| < \frac{1}{2}$$

⋮

2. (а) Частный случай: Пусть $g(x_n)$ возрастает. Берем $k : m := \min\{n : |f(x_n)| \geq \sqrt{g(x_k)} \text{ или } |g(x_n)| \geq \sqrt{g(x_k)}\}$

$$y_k := x_{m-1}$$

$$\left| \frac{f(y_k)}{g(x_k)} \right| \leq \frac{\sqrt{g(x_k)}}{g(x_k)} = \frac{1}{\sqrt{g(x_k)}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

Зачем нужно возрастание? Кохась не знает.

(b) Общий случай: $\tilde{g}(x_k) := \inf\{g(x_n), n = k, k+1, \dots\} \quad \tilde{g}(x_k) \rightarrow +\infty$

$\tilde{g}(x_k) \uparrow, \tilde{g}(x_k) \leq g(x_k)$. Как в пункте (а) построим y_k

$$\frac{f(y_k)}{g(x_k)} \leq \frac{f(y_k)}{\tilde{g}(x_k)} \leq \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}(x_k)}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

$$\frac{g(y_k)}{g(x_k)} \leq \frac{g(x_k)}{\tilde{g}(x_k)} \leq \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}(x_k)}} \rightarrow 0$$

□

2.10 Правило Лопиталья

$f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \quad a \in \overline{\mathbb{R}}$

f, g — дифф., $g' \neq 0$ на (a, b)

Пусть $\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a+0} A \in \overline{\mathbb{R}}$

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ — неопределенность $\left\{ \frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \right\}$

Тогда $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

Доказательство. $g' \neq 0 \Rightarrow g'$ — сохр. знак $\Rightarrow g$ — монотонна.

Для $\frac{0}{0} \quad g(x) \neq 0$ в (a, b)

По Гейне $x_k \rightarrow a \quad (x_k \neq a, x_k \in (a, b))$

Выберем y_k по лемме

$$\frac{f(x_k) - f(y_k)}{g(x_k) - g(y_k)} = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)} \quad \text{т. Коши}$$

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} - \frac{f(y_k)}{g(y_k)} = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)} \left(1 - \frac{g(y_k)}{g(x_k)} \right)$$

$$x_k \rightarrow a \quad y_k \rightarrow a \quad \xi_k \rightarrow a$$

□

2.11 Теорема Штольца

Это дискретная версия правила Лопиталья.

$y_n \rightarrow 0, x_n \rightarrow 0$ — строго монот.

$$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a \in \mathbb{R}$$

Тогда $\exists \lim \frac{x_n}{y_n} = a$

Доказательство. 1. $a > 0 \quad (a \neq +\infty)$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad [\varepsilon < a] \quad \exists N_1 \quad \forall n > N_1 \quad a_\varepsilon < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < a + \varepsilon$$

Берем $N > N_1$

$$a - \varepsilon < \frac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N} < a + \varepsilon$$

$$\vdots$$

$$a - \varepsilon < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < a + \varepsilon$$

По неправильному сложению: (оно применимо, т.к. все дроби положительные)

$$a - \varepsilon < \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} < a + \varepsilon$$

$n \rightarrow +\infty$

$$a - \varepsilon < \frac{x_N}{y_N} < a + \varepsilon$$

2. $a = +\infty$ доказывается так же
3. $a < 0$ поменяем знак и докажем так же
4. $a = 0$ т.к. знаки $x_n - x_{n-1}$ и $y_n - y_{n-1}$ фикс., $a = +0$ или $a = -0$

$$\text{Для } a = +0 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = +\infty$$

□

2.12 Пример неаналитической функции

Отсутствует

2.13 Интегральное неравенство Чебышева. Неравенство для сумм

Неравенство Чебышева

$f, g \in C[a, b]$ монот. возр.

Тогда

$$I_f \cdot I_g \leq I_{fg}$$

$$\int_a^b f \int_a^b g \leq (b-a) \int_a^b fg$$

Доказательство. $x, y \in [a, b] \quad (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$

$$f(x)g(x) - f(y)g(x) - f(x)g(y) + f(y)g(y) \geq 0$$

Интегрируем по x по $[a, b]$

$$I_{fg} - f(y)I_g - g(y)I_f + f(y)g(y) \geq 0$$

Интегрируем по y по $[a, b]$

$$I_{fg} - I_f I_g - I_g I_f + I_{fg} \geq 0$$

□

Дискретное неравенство Чебышева

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

Доказательство.

$$f(x) = a_i, x \in (i-1, i], i = 1 \dots n - \text{задана на } (0, n]$$

$$g(x) = \dots b_i$$

$$I_f I_g \leq I_{fg}$$

□

2.14 Свойства определенного интеграла: линейность, интегрирование по частям, замена переменных

Дано выше. (2.5, стр. 5)