Алгебра скалярных полиномов

$]K$ — поле, над которым задано множество полиномов $K_\infty[\lambda]$, также обозначается $P_\infty[K]$

$$P_\infty[K] = \{p_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda^i \quad \forall n\}$$

Примечание. $P_\infty[K]$ — линейное пространство:
$]p, q \in P_\infty[K]; \lambda \in K \Rightarrow \begin{cases} (p+q)(\lambda) = p(\lambda) + q(\lambda) \\ (\lambda p)(\lambda) = \alpha p(\lambda) \end{cases} \quad \Rightarrow P_\infty[K]$ — линейное пространство

Примечание. $P_\infty[K]$ — коммутативная алгебра
Зададим операцию умножения в $P_\infty[K]$:

$$\forall p, q \in P_\infty[K] \quad (p \cdot q)(\lambda) = p(\lambda)q(\lambda)$$

$$(p \cdot q)(\lambda) = p(\lambda)q(\lambda) = q(\lambda)p(\lambda) = (qp)(\lambda) \Rightarrow \text{коммутативность}$$

$$(p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r) = p \cdot q \cdot r$$

$$(p+q)r = pr + qr$$

$$(\lambda p)q = p(\lambda q) = \lambda(pq)$$

Нейтральный элемент:

- по сложению: $0(\lambda) = 0$
- по умножению: $1(\lambda) = 1$

Примечание. $\{1, t, t^2 \ldots t^n \ldots\}$ — базис $P_\infty[K] \Rightarrow \dim P_\infty[K] = \infty$

Определение. **Идеалом** J алгебры $P_\infty[K]$ называется такое её подпространство, что

$$\forall q \in J \ \ \forall p \in P_\infty[K] \quad q \cdot p \in J$$

Пример. Тривиальные идеалы:

- $\{0\}$
- $P_\infty[K]$

Лемма 1. *J — линейное подпространство $P_\infty[K]$*

Доказательство. $]q_1, q_2 \in J \quad q_1 + q_2 \in J?$
$q_1, q_2 \in J \Rightarrow \forall p \ \ q_1 p, q_2 p \in J$
$q_1 = r\tilde{q}_1, q_2 = r\tilde{q}_2 \quad (q_1 + q_2)p = r(\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2)p$
$(\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2)p \in P_\infty[K] \Rightarrow r(\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2)p \in J$ □

Лемма 2. *J — подалгебра $P_\infty[K]$*

Доказательство.

$$(q_1 \cdot q_2)p = q_1(q_2 p) \in J$$

□

Пример. $J_\alpha = \{p \in P_\infty[K] : p(\alpha) = 0\}$ — идеал

Лемма 3. $]q \in P_\infty[K] \Rightarrow J_q = q \cdot P_\infty[K]$ *— идеал в* $P_\infty[K]$

Доказательство. $]r \in J_q \Rightarrow \exists p \in P_\infty[K] : r = q \cdot p$
$]\tilde{p} \in P_\infty[K]$
$r\tilde{p} = (qp)\tilde{p} = q(p\tilde{p})$
$p\tilde{p} \in P_\infty[K] \Rightarrow q(p\tilde{p}) \in q \cdot P_\infty[K] = J_q \Rightarrow J_q$ — идеал □

Определение. Полином $q : J_q = q \cdot P_\infty[K]$ называется **порождающим полиномом** идеала J_q

Примечание. Если идеал содержит $1(\lambda)$, то данный идеал совпадает с $P_\infty[K]$:

$$J_1 = 1 \cdot P_\infty[K] = P_\infty[K]$$

Определение. $]J_1$ и J_2 — идеалы в $P_\infty[K]$

1. Суммой $J_1 + J_2$ называется множество

$$J_s = \{p \in P_\infty[K] : p = p_1 + p_2 \quad p_1 \in J_1, p_2 \in J_2\}$$

2. Пересечением $J_1 \cap J_2$ называется множество:

$$J_r = \{p \in P_\infty[K] : p \in J_1 \wedge p \in J_2\}$$

Лемма 4. *J_s и J_r — идеалы в $P_\infty[K]$*

Доказательство. $J_s = J_1 + J_2$ — идеал?
$]q \in J_s \Rightarrow q = q_1 + q_2 \quad q_1 \in J_1, q_2 \in J_2$
$]p \in P_\infty[K] \quad qp = (q_1 + q_2)p = q_1p + q_2p$
$q_1p \in J_1, q_2p \in J_2 \Rightarrow q_1p + q_2p \in J_s$
$J_r = J_1 \cap J_2$ — идеал?
$]q \in J_r \Rightarrow q \in J_1; q \in J_2$
$]p \in P_\infty[K] \quad qp \in J_1; qp \in J_2 \Rightarrow qp \in J_r$ □

Определение. Нетривиальный полином минимальной степени, содержащийся в идеале, называется **минимальным полиномом** идеала.

Лемма 5. *Любой полином идеала J делится на p_J без остатка:*

$$]p \in J \Rightarrow p \mid p_J$$

Доказательство. $]\exists p : p \nmid p_J \Rightarrow p = qp_J + r; \deg r < \deg p_J \Rightarrow r = p - qp_J :$ min полином — противоречие. □

Примечание. Если p_1 и p_2 — минимальные полиномы $J \Rightarrow p_1 = \alpha p_2; \alpha \in K$

Теорема 1. *Минимальный полином идеала является его порождающим полиномом.*

Доказательство. $\forall p \in J \quad p \mid p_J \Rightarrow p = p_J \cdot q \in p_J \cdot P_\infty[K]$
$\forall p \in q \cdot P_\infty[K] \Rightarrow p = qr; r \in P_\infty[K] \Rightarrow \forall p \mid q \Rightarrow q = p_J$ □