

## Бесконечные произведения

**Определение.**  $\prod_{i=1}^{+\infty} p_n : \prod_N := \prod_{n=1}^N p_n \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_N = P$

- $P \in (0, +\infty) \Rightarrow \prod_{i=1}^{+\infty} p_n$  сходится к  $P$
- $P = +\infty \Rightarrow \prod_{i=1}^{+\infty} p_n$  расходится к  $+\infty$
- $P = 0 \Rightarrow \prod_{i=1}^{+\infty} p_n$  расходится к  $0$
- $\nexists \lim \prod_n$  : расходится

*Пример.*

$$\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{3}{4} \frac{8}{9} \frac{15}{16} \dots$$

$$1 - \frac{1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \quad \prod_N = \frac{1 \cdot 3}{2^2} \frac{2 \cdot 4}{3^2} \frac{3 \cdot 5}{4^2} \dots \frac{(N-1)(N+1)}{N^2} = \frac{N+1}{2N}$$

*Пример.* Формула Валлиса:

$$\frac{2}{1} \frac{2}{3} \frac{4}{3} \frac{4}{5} \frac{6}{5} \dots = \frac{\pi}{2}$$

$$\left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right) \frac{1}{2n}$$

*Пример.*

$$\cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{4} \dots \cos \frac{\varphi}{2^n} = \frac{\sin \varphi}{2^n \sin \frac{\varphi}{2^n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \varphi}{\varphi}$$

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \cos \frac{\varphi}{2^n} = \frac{\sin \varphi}{\varphi}$$

**Определение.**  $\pi_m := \prod_{n=m+1}^{+\infty} p_n$

Свойства:

1.  $\prod_{n=1}^{+\infty} p_n$  сходится  $\Leftrightarrow \forall m \pi_m$  сходится
2.  $\prod_{n=1}^{+\infty} p_n$  сходится. Тогда  $\pi_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 1$
3.  $\prod_{n=1}^{+\infty} p_n$  сходится  $\Rightarrow p_n \rightarrow 1$
4.  $\prod_{n=1}^{+\infty} p_n$  сходится  $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \ln p_n$  сходится

$$\pi_m = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\prod_{n=1}^N p_n}{\prod_{k=1}^m p_n} = \frac{P}{\prod_m}$$

$$\ln \left( \prod_{n=1}^{+\infty} p_n \right) = \sum_{n=1}^N \ln p_n$$

**Теорема 1.** 1.  $a_n > 0$  НСНМ. Тогда  $\prod 1 + a_n$  сходится  $\Leftrightarrow \sum a_n$  сходится.

2.  $\sum a_n$  сходится,  $\sum a_n^2$  сходится  $\Rightarrow \prod (1 + a_n)$  сходится.

*Доказательство.* 1.  $\prod (1 + a_n) - \text{сх.} \Leftrightarrow \sum \ln(1 + a_n) - \text{сх.} \Leftrightarrow \sum a_n - \text{сх.}$

2.  $\ln(1 + a_n) = a_n - \frac{a_n^2}{2} + o(a_n^2)$

$$\sum_{n=1}^N \ln(1 + a_n) = \sum_{n=1}^N a_n - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N a_n^2 + \underbrace{\sum_{n=1}^N o(a_n^2)}_{\text{абс.сх, т.к. } |o(a_n^2)| \leq a_n^2}$$

□

**Лемма 1.**  $\prod(n, x) := \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt, x > 0$

*Примечание.* При  $x \leq 0$  интеграл расходится.

Тогда  $\prod(n, x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{x \cdot (x+1) \cdot \dots \cdot (x+n)} n^x$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \prod(n, x) &\stackrel{t=ny}{=} n^x \int_0^1 (1-y)^n y^{x-1} dy = \\ &= n^x \left( (1-y)^n \frac{1}{x} y^x \Big|_{y=0}^{y=1} + \frac{n}{x} \int_0^1 (1-y)^{n-1} y^x dy \right) = \\ &= n^x \frac{n}{x} \int_0^1 (1-y)^{n-1} y^x dy = \\ &= n^x \frac{n}{x} \frac{n-1}{x+1} \int_0^1 (1-y)^{n-2} y^{x+1} dy = \\ &= \dots = n^x \frac{n}{x} \frac{n-1}{x+1} \dots \frac{1}{x+n-1} \int_0^1 y^{x+n-1} dy \end{aligned}$$

□

**Лемма 2.**  $0 \leq t \leq n$ . Тогда

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2 e^{-t}}{n}$$

*Доказательство.* Т.к.  $y = 1 + x$  — график касательной к  $e^x$  в  $x = 0$  и экспонента выпуклая:

$$1 + y \leq e^y$$

Произошла коллизия переменных,  $x$  стал  $y$ .

Заменим  $y$  на  $-y$ :

$$1 - y \leq e^{-y}$$

Возведем в степень  $-1$ :

$$(1 - y)^{-1} \geq e^y$$

Итого:

$$1 + y \leq e^y \leq (1 - y)^{-1}$$

$$y := \frac{t}{n}$$

$$1 + \frac{t}{n} \leq e^{\frac{t}{n}} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{-1}$$

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^{-n} \geq e^{-t} \geq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

По правому неравенству:

$$e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \geq 0$$

Возведем левое неравенство в степень  $-1$ :

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leq e^t$$

$$e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t} \left(1 - e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) \leq e^{-t} \left(1 - \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) = e^{-t} \left(1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right)$$

$$e^{-t} \left(1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right) \stackrel{\text{неравенство Бернулли}}{\leq} \frac{t^2}{n} e^{-t}$$

*Примечание.* Неравенство Бернулли:  $(1 + a)^n \geq 1 + an$ ,  $a \geq -1$ , в данном случае  $a = -\frac{t^2}{n^2}$

В неравенстве Бернулли  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$  **предположительно** в лемме  $n \in \mathbb{N}$ , на лекции этого не было сказано.  $\square$

**Теорема 2.** Формула Эйлера:

При  $x > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{x(x+1) \cdots (x+n)} n^x = \Gamma(x)$$

*Примечание.*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

Доказательство.

$$\Gamma(x) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \Pi(n, x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \underbrace{\int_0^n \left( e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right) t^{x-1} dt}_I + \underbrace{\int_n^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt}_II \right) \stackrel{?}{=} 0$$

$\Pi \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , т.к. это “остаточный интеграл”, при  $n \rightarrow +\infty$  интеграл “берется по нулевому промежутку”.

По лемме о приближении  $e$  пределом:

$$0 \leq I \leq \int_0^n \frac{1}{n} t^2 e^{-t} t^{x-1} dt \leq \frac{1}{n} \int_0^n e^{-t} t^{x+1} dt \leq \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x+1} dt = \frac{\Gamma(x+2)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

□

**Теорема 3.** Формула Вейерштрасса.

При  $x > 0$ :

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}$$

где  $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \dots + \frac{1}{n} - \ln n)$  — постоянная Эйлера.

$\prod (1 + a_k)$  сходится, если  $\sum a_k$  сходится, поэтому распишем “ $1 + a_k$ ”:

$$“1 + a_k” = \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} = \left(1 + \frac{x}{k}\right) \left(1 - \frac{x}{k} + \frac{x^2}{2k^2} + \dots\right) = 1 - \frac{x^2}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$\sum -\frac{x^2}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)$  очевидно сходится, кроме того,  $x$  может быть  $\leq 0$ , сходимость не изменится.  $\Gamma(x)$  не определено для  $x < 0$ , но если рассматривать формулу Вейерштрасса как определение  $\Gamma$ , то для  $x \in \mathbb{N}^-$   $\Gamma(x) = +\infty$ , т.к.  $\prod 1 + a_k = 0$ . Кроме того, можно подставлять и  $x \in \mathbb{C}$ .

Доказательство будет на следующей лекции.

**Лемма 3.** Об оценке нормы линейного отображения.

$A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$   $A = (a_{ij})$ . Тогда  $\forall x \in \mathbb{R}^m: |Ax| \leq C_A |x|$ , где  $C_A = \left(\sum_{i,j} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Доказательство.

$$|Ax|^2 = \sum_j \left(\sum_i a_{ij} x_j\right)^2 \stackrel{\text{КБШ}}{\leq} \sum_i \left(\left(\sum_j a_{ij}^2\right) \left(\sum_j x_j^2\right)\right) = |x|^2 \sum_i \sum_j a_{ij}^2$$

□

**Следствие.** Линейное отображение непрерывно всюду:

$$|Ax - Ax_0| = |A(x - x_0)| \leq C_A |x - x_0|$$

**Теорема 4.** •  $F : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$

- $G : I \subset \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$
- $F(E) \subset I$
- $a \in \text{Int} E$
- $F$  дифф. в  $a$
- $F(a) \in \text{Int} I$
- $G$  дифф. в  $F(a)$

Тогда  $G \circ F$  дифф. в  $a$ ,  $(G \circ F)'(a) = G'(F(a))F'(a)$

*Доказательство.*  $b := F(a)$ . По определению:

$$F(a+h) = \underbrace{F(a)}_b + \underbrace{F'(a)h + \alpha(h)|h|}_k$$

$$G(b+k) = G(b) + G'(b)k + \beta(k)|k|$$

$$\begin{aligned} G(F(a+h)) &= G(F(a)) + G'(F(a))(F'(a)h + \alpha(h)|h|) + \beta(k)|k| = \\ &= G(F(a)) + G'(F(a))F'(a)h + G'(b)\alpha(h)|h| + \beta(k)|F'(a)h + \alpha(h)|h|| \end{aligned}$$

Надо доказать, что  $\underbrace{G'(b)\alpha(h)|h|}_I + \beta(k) \underbrace{|F'(a)h + \alpha(h)|h|}_{II} = \gamma(h)|h|$ .

$$|I| = |G'(b)\alpha(h)|h| \leq C_{G'(b)}|\alpha(h)||h|$$

$$|F'(a)h + \alpha(h)|h| \leq |F'(a)h| + |\alpha(h)||h| \leq \underbrace{(C_{F'(a)} + |\alpha(h)|)}_{\text{огр.}} \underbrace{|h|}_{\rightarrow 0}$$

$$k \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 0$$

$$|II| \leq \underbrace{|\beta(k)|}_{\rightarrow 0} \underbrace{(C_{F'(a)} + |\alpha(h)|)}_{\text{огр.}} \underbrace{|h|}_{\rightarrow 0}$$

$$|I| + |II| \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 0$$

□

*Примечание.*  $(F \circ G \circ H)'(x) = F'(G(H(x))) \cdot G'(H(x)) \cdot H'(x)$

$$F = (f_1, f_2 \dots f_l) \quad G = (g_1, g_2 \dots g_n) \quad H = G \circ F = (h_1 \dots h_n)$$

$$h_j(x_1 \dots x_m) = g_j(f_1(x_1 \dots x_m), f_2(x_1 \dots x_m) \dots f_l(x_1 \dots x_m))$$

$$\frac{\partial h_j}{\partial x_i} = \sum_k \frac{\partial g_j}{\partial y_k} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}$$

$$h'(x) = \frac{\partial g}{\partial y_1} \frac{df_1}{dx} + \frac{\partial g}{\partial y_2} \frac{df_2}{dx} + \dots \frac{\partial g}{\partial y_m} \frac{df_m}{dx}$$

Скipped

**Лемма 4.** •  $F, G : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$

- $a \in \text{Int} E$

- $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}$
- $F, G, \lambda$  дифф. в  $a$

Тогда  $\lambda F, \langle F, G \rangle$  — дифф. в  $a$ :

1.  $(\lambda F)'(a)(h) = (\lambda'(a)h)F(a) + \lambda(a)F'(a)h$
2.  $\langle F, G \rangle'(a)(h) = \langle F'(a)h, G(a) \rangle + \langle F(a), G'(a)h \rangle$

Здесь  $h$  нигде не умножается, на него действуют операторы дифференцирования.

**Доказательство.** 1. Для координатной функции  $l = 1$ :

$$\begin{aligned}\lambda f(a+h) - \lambda f(a) &= (\lambda(a) + \lambda'(a)h + o(h))(f(a) + f'(a)h + o(h)) - \lambda(a)f(a) = \\ &= (\lambda'(a)h)f(a) + \lambda(a)f'(a)h + o(h) \\ |(\lambda'(a)h)(f'(a)h)| &\leq C_{\lambda'(a)}|h|C_{f'(a)}|h|\end{aligned}$$

2.

$$\langle F, G \rangle = \sum_{i=1}^l f_i g_i$$

По линейности всего и пункту 1:

$$\langle F, G \rangle'(a)h = \sum_i (f_i g_i)'(a)h \stackrel{1.}{=} \sum_i f'_i(a)h g_i(a) + f(a)g'_i(a)(h) = \langle F'(a)h, G(a) \rangle + \langle F(a), G'(a)h \rangle$$

□

**Примечание.**  $m = 1$ :

$$\langle F, G \rangle'(a) = \langle F'(a), G(a) \rangle + \langle F(a), G'(a) \rangle$$

**Теорема 5.** Лагранжа для векторнозначных функций.

$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  — непр. на  $[a, b]$ , дифф. на  $(a, b)$

Тогда  $\exists c \in (a, b) : |F(b) - F(a)| \leq |F'(c)|(b-a)$

**Доказательство.**

$$\varphi(t) := \langle F(b) - F(a), F(t) - F(a) \rangle, t \in [a, b]$$

$$\varphi(a) = 0 \quad \varphi(b) = |F(b) - F(a)|^2$$

$$\varphi'(t) = \langle F(b) - F(a), F'(t) \rangle$$

**Теорема Лагранжа (для обычных функций):**

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(c)(b-a)$$

$$|F(b) - F(a)|^2 = (b-a) \langle F(b) - F(a), F'(c) \rangle \stackrel{\text{КБШ}}{\leq} (b-a) |F(b) - F(a)| |F'(c)|$$

□

**Примечание.** “=” не достигается, если ехать быстро и криво.

**Пример.**  $F : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad t \mapsto (\cos t, \sin t) \quad F'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$a := 0, b := 2\pi$

$$F(b) - F(a) = 0 \stackrel{?}{=} |F'(c)|(b-a)$$

Нет.