Продолжение доказательства

Доказательство. По лемме позиция выигрышна хотя бы для одного игрока. Рассмотрим случай, когда она выигрышна для белого игрока.
В точке $A = (0, k) \rightsquigarrow (0, \frac{k}{n})$

$$\left| f_1(\frac{A}{n}) - \frac{A_1}{n} \right| \geq \varepsilon$$

$A_1 = 0$; $f_1(\frac{A}{n}) \geq 0 \Rightarrow$ при $v = A$

$$f_1(\frac{v}{n}) - \frac{v_1}{n} \geq 0$$

В точке $B = (n, l) \rightsquigarrow (1, \frac{l}{n})$

$$\left| f_1\left(\frac{B}{n}\right) - \frac{B_1}{n} \right| \geq \varepsilon$$

При $v = B$

$$f_1\left(\frac{v}{n}\right) - \frac{v_1}{n} \geq -\varepsilon$$

$\square$

1 Определенный интеграл

1.1 Площадь

Определение. $\mathcal{E}$ — множество всех ограниченных фигур в $\mathbb{R}^2$ (“фигура” = подмножество $\mathbb{R}^2$)

Определение. **Площадь** это $\sigma : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$, такое что:

1. $A \in \mathcal{E} \quad A = A_1 \sqcup A_2 \quad \sigma A = \sigma A_1 + \sigma A_2$ *(конечная аддитивность)*
2. $\sigma([a, b] \times [c, d]) = (d - c)(b - a)$

$\sqcup$ — **дизъюнктное объединение**; если $x \in A_1$ и $x \in A_2$, то x “дважды $\in$” $A_1 \sqcup A_2$
Мы пока что не знаем, существует ли площадь.

Примечание. 1. Монотонность: $A \subset B \quad \sigma A \leq \sigma B$

2. $\sigma(\text{вертик. отр.}) = 0$

Определение. **Ослабленная площадь** $\sigma : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$:

1. Монотонна
2. Нормирована: $E \subset D \Rightarrow \sigma E \leq \sigma D$
3. Ослабленная аддитивность: $E \in \mathcal{E} \quad E = E_1 \cup E_2 \quad E_1 \cap E_2$ — вертикальный отрезок, E_1 и E_2 лежат каждый в своей полуплоскости относительно этого отрезка $\Rightarrow \sigma E = \sigma E_1 + \sigma E_2$

Почему отрезок вертикальный? В конспекте СПбГУ допускается горизонтальный.

Пример. 1. $\sigma E = \inf\left(\sum \sigma P_i : E \subset \bigcup\limits_{\text{конечное}} P_k, P_k - \text{прямоугольники} \right)$

2. $\sigma E = \inf\left(\sum \sigma P_i : E \subset \bigcup\limits_{\text{счётн.}} P_k, P_k - \text{прямоугольники} \right)$

Это разные площади. Покажем это на примере фигуры “все точки в квадрате с рациональными координатами”. Первая площадь накрывает весь квадрат $\Rightarrow \sigma_1 = 1$. $\sigma_2 = 0$. Покажем это, накрыв n-тую точку квадратом размера $\frac{\varepsilon}{2^n} \times \frac{\varepsilon}{2^n}$. $\sum \frac{\varepsilon}{4^n} = \varepsilon \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\varepsilon}{3} \to 0 \Rightarrow \inf = 0$

Определение. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$
$f_+ := \max(f, 0)$ — **положительная срезка**
$f_- := \max(-f, 0)$ — **отрицательная срезка**

Определение. $f : [a, b] \to \mathbb{R}; f \geq 0$

$$\text{Под графиком } (\textit{ПГ})(f, [a, b]) = \{(x, y) : x \in [a, b]; 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Определение. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, непр.

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx := \sigma\Pi\Gamma(f_+, [a, b]) - \sigma\Pi\Gamma(f_-, [a, b])$$

Примечание.

1. $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$
2. $f \equiv c \Rightarrow \int_a^b f = c(b - a)$
3. $\int_a^b -f = -\int_a^b f$ — верно, т.к. $(-f)_+ = f_-$
4. $\int_a^b 0 = 0$

Свойства интегралов:

1. Аддитивность по промежутку $c \in (a, b)$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Доказательство.

$$\sigma\Pi\Gamma(f_+, [a, b]) = \sigma\Pi\Gamma(f_+, [a, c]) + \sigma\Pi\Gamma(f_+, [c, b])$$

□

2. Монотонность: $f, g \in C[a, b] \quad f \leq g$. Тогда

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Доказательство.

$$\Pi\Gamma(f_+) \subset \Pi\Gamma(g_+) \Rightarrow \sigma\Pi\Gamma(f_+) \leq \sigma\Pi\Gamma(g_+)$$
$$\Pi\Gamma(f_-) \supset \Pi\Gamma(g_-) \Rightarrow \sigma\Pi\Gamma(f_-) \geq \sigma\Pi\Gamma(g_-)$$
$$\sigma\Pi\Gamma(f_+) - \sigma\Pi\Gamma(f_-) \leq \sigma\Pi\Gamma(g_+) - \sigma\Pi\Gamma(g_-)$$

□

Следствие.

$$\min f \cdot (b - a) \leq \int_a^b f \leq \max f \cdot (b - a)$$

3.
$$\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$$
$$-|f| \le f \le |f|$$
$$-\int_a^b |f| = \int_a^b -|f| \le \int_a^b f \le \int_a^b |f|$$

Определение. $f \in C[a,b] \quad \Phi : [a,b] \to \mathbb{R} \quad \Phi(x) = \int_a^x f$ — **интеграл с переменным верхним пределом**
$\Phi(a) = 0$

Теорема 1. $f \in C[a,b] \quad \Phi$ — интеграл с переменным верхним пределом. Тогда
$$\forall x \in [a,b] \quad \Phi'(x) = f(x)$$

Доказательство. Зафиксируем $x \in [a,b] \quad y > x, y \le b$
$$\frac{\Phi(y)-\Phi(x)}{y-x} = \frac{\int_a^y f - (\int_a^y f + \int_y^x f)}{y-x} = \frac{\int_x^y f}{y-x} \underset{\substack{\text{т.о.ср.}\\ \exists c \in [x,y]}}{=} \frac{f(c)(y-x)}{y-x} = f(c) \xrightarrow[y \to x+0]{} f(x)$$
$x > y$
$$\frac{\Phi(y)-\Phi(x)}{y-x} = \frac{1}{x-y}\int_y^x f = f(c) \xrightarrow[y \to x-0]{} f(x)$$
□

Теорема о существовании первообразной — следствие теоремы Барроу.
Среднее значение функции на промежутке:
$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

Примечание.
$$\Psi(x) = \int_x^b f$$
$$\Psi'(x) = -f(x)$$
$$\left(\int_{x^2}^{10\sqrt{x}+1} f(t)dt\right)' = f(10\sqrt{x}+1)\frac{5}{\sqrt{x}} - f(x^2)2x$$
$$\left(\int_{\int_x^{\cos x} e^{-n^2}dn}^{\int_{x^2}^{e^x} \cos y^3 dy} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt\right)'$$
Этот интеграл не написать в word. Тех нормас, как видите. Это единственное, зачем Кохась написал этот интеграл.

Теорема 2. $f \in C[a,b] \quad F$ — первообр. f
Тогда $\int_a^b f = F(b) - F(a)$
Для кусочно-непрерывных f это тоже верно.

Доказательство. $\Phi(x) = \int_a^x f$ — первообр.
$\exists C : F = \Phi + C$
$$\int_a^b f = \Phi(b) - \Phi(a) = F(b) - F(a)$$
□

Примечание. Все ослабленные площади совпадают на ПГ$(f, [a,b])$, $\quad f \in C[a,b]$

1.2 Правило Лопиталя

Лемма 1. *Об ускоренной сходимости*

1. $f, g : D \subset X \to \mathbb{R}$ $\quad a$ *— предельная точка* D
   $\exists U(a)$: *при* $x \in \dot{U}(a) \cap D \quad f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$
   Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0 \quad \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$
   Тогда
   $$\forall x_k \to a \quad (x_k \neq a, x_k \in D) \quad \exists y_k \to a \quad (y_k \neq a, y_k \in D)$$
   такое, что
   $$\lim_{k \to +\infty} \frac{f(y_k)}{g(x_k)} = 0 \quad \lim_{k \to +\infty} \frac{g(y_k)}{g(x_k)} = 0$$
   Таким образом, $g(y_k) \to 0$ *быстрее, чем* $g(x_k) \to 0$
2. *То же самое, но* $\lim f(x) = +\infty, \lim g(x) = +\infty$

Доказательство. 1. Очевидно.

$$\forall k \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |f(x_n)| < |g(x_k)| \frac{1}{k} \quad |g(x_n)| < |g(x_k)| \frac{1}{k}$$

$\varepsilon := |g(x_k)|$

$$k = 1 \quad y_1 := \text{какой-нибудь } x_n : \left| \frac{f(x_n)}{g(x_k)} \right| < 1 \quad \left| \frac{g(x_n)}{g(x_k)} \right| < 1$$

$$k = 2 \quad y_2 := \text{какой-нибудь } x_n : \left| \frac{f(x_n)}{g(x_k)} \right| < \frac{1}{2} \quad \left| \frac{g(x_n)}{g(x_k)} \right| < \frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

2. (a) Частный случай: Пусть $g(x_n)$ возрастает. Берем $k : m := \min\{n : |f(x_n)| \geq \sqrt{g(x_k)}$ или $|g(x_n)| \geq \sqrt{g(x_k)}\}$
   $y_k := x_{m-1}$
   $$\left| \frac{f(y_k)}{g(x_k)} \right| \leq \frac{\sqrt{g(x_k)}}{g(x_k)} = \frac{1}{\sqrt{g(x_k)}} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$
   Зачем нужно возрастание? Кохась не знает.

   (b) Общий случай: $\tilde{g}(x_k) := \inf\{g(x_n), n = k, k+1 \ldots\} \quad \tilde{g}(x_k) \to +\infty$
   $\tilde{g}(x_k) \uparrow, \tilde{g}(x_k) \leq g(x_k)$. Как в пункте (a) построим y_k
   $$\frac{f(y_k)}{g(x_k)} \leq \frac{f(y_k)}{\tilde{g}(x_k)} \leq \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}(x_k)}} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$
   $$\frac{g(y_k)}{g(x_k)} \leq \frac{g(y_k)}{\tilde{g}(x_k)} \leq \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}(x_k)}} \to 0$$

$\square$

Теорема 3. $f, g : (a, b) \to \mathbb{R} \quad a \in \overline{\mathbb{R}}$
f, g — дифф., $g' \neq 0$ на (a, b)
Пусть $\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow[x \to a+0]{} A \in \overline{\mathbb{R}}$
Пусть $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ — неопределенность $\left\{\frac{0}{0}, \frac{+\infty}{+\infty}\right\}$
Тогда $\exists \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

Доказательство. $g' \neq 0 \Rightarrow g'$ — сохр. знак $\Rightarrow g$ — монотонна.
Для $\frac{0}{0} \quad g(x) \neq 0$ в (a, b)
По Гейне $x_k \to a \ \ (x_k \neq a, x_k \in (a, b))$
Выберем y_k по лемме

$$\frac{f(x_k) - f(y_k)}{g(x_k) - g(y_k)} = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)} \text{ — т. Коши}$$

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} - \frac{f(y_k)}{g(x_k)} = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)} \left(1 - \frac{g(y_k)}{g(x_k)}\right)$$

$x_k \to a \quad y_k \to a \quad \xi_k \to a$ □

Пример. $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \underset{x \to +\infty}{\sim} g(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x^2+1}}{g'(x)} = 1$$

$$\int_0^x e^{t^2} dt \underset{x \to +\infty}{\sim} g(x)$$

$$\lim \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{g(x)} = \lim \frac{e^{x^2}}{g'(x)} = 1$$