Конспект лекции 16/09/19

Теорема: неравенство Бернулли

$(1+x)^n \geq 1+nx \quad x > -1, n \in \mathbb{N}$

Также $(1+x)^n \geq 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2$

Докажем неравенство Бернулли через индукцию.

База: $n=1: \ (1+x)^1 \geq 1+x$

Переход: Дано неравенство $(1+x)^n \geq 1+nx$, оно верно при каком-то n. Докажем, что $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = \\ 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x \quad \blacksquare$$

Опр. если множество $A \subset \mathbb{R}$, то A называется ограниченным сверху, если $\exists c \in \mathbb{R} \quad \forall a \in A \quad a \leq c$. c называется верхней границей A.

A - ограничено снизу $\exists c_1 \in \mathbb{R} \quad \forall a \in A \quad a \geq c_1$. c называется нижней границей A.

A - ограничено, если оно ограничено сверху и снизу: $\exists c_2 \in \mathbb{R} \quad \forall a \in A \quad |a| \geq c_2$

Если c - верхняя граница, $\alpha > 0$: $c+\alpha$ - верхняя граница.

$M \in A$ называется максимальным элементом, если $\forall a \in A \ \ a \leq M$

Антипример: $A=(0,1) \subset \mathbb{R}$ - не имеет максимального элемента

A - конечное множество, $A \subset \mathbb{R} \Rightarrow \exists$ максимальный элемент. *Упражнение*: доказать по индукции.

Следствие: $A \subset \mathbb{Z}$, ограничено сверху -> $\exists$ максимальный элемент множества A.

Следствие следствия: $A \subset \mathbb{N}, A \neq \mathbb{N} \Rightarrow \exists min A$

Опр. $[x] = max\{k \in \mathbb{Z} k \leq x\}$ - округление вверх

Следствие: $[x] \leq x < [x]+1, \quad x-1 < [x] \leq x$

ЧТО ЭТО ТАКОЕ?

$\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$, т.е. $\forall a,b \in \mathbb{R}, a<b \quad (a,b) \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$

Возьмем $n \in \mathbb{N} : n > \frac{1}{b-a}$

$q = \frac{[na]+1}{n}$

$q \leq \frac{na+1}{n} = a + \frac{1}{n} < a + ba < b$

$q > \frac{na}{n} = a$

Отображения

1.

Отображение - тройка (X, Y, f)

- X - множество (область определения)
- Y - множество (область значений)
- f - правило

$\forall x \in X$ оно "вычисляет" элемент $f(x) \in Y$

На $Y = \mathbb{R}\ \ f$ назывется "функция"

2.

$x : \mathbb{N} \to Y$ - такое отображение называется последовательностью $x : \mathbb{Z} \to Y$ - двусторонняя последовательность *(индексы могут быть отрицательными)*

Семейство элементов некоторого множества: X - множество, A - множество "индексов" $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ - семейство элементов X. (здесь $\forall \alpha \in A\ \ x_\alpha \in X$)

т.е. отображение $x \in A \to X$, $x \mapsto x(\alpha) = x_\alpha$

Упорядоченная пара: $\{1, 2\} \to X$, $1 \mapsto x_1, 2 \mapsto x_2 \quad (x_1, x_2)$

$\{1, .., m\} \to X \quad (x_1, ..., x_m)$

$a, f : X \to \mathbb{R}$. Сумма функций $f + g$: $\forall x\ (f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$F : X \to \mathbb{R}^m$
$x \mapsto F(x) = (F_1(x), ..., F_m(x))$

F - векторнозначная функция (*значения функции - вектора*)

$F_1(x)..F_m(x)$ - координатные функции отображения F

Опр. Образ для $A \subset X, f : X \to Y$ "Образ множества A под действием f" - множество $\{f(x), x \in A\} \subset Y$ - обозначается $f(A)$

Прообраз: Дано $B \subset Y$ "Прообраз B при отображении f" = $\{x \in X : f(x) \in B\}$ - обозначается $f^{-1}(B)$

Инъекция "инъективное отображение", f - взаимно однозначное. $f : X \to Y\ \text{ инъ }\ \forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \quad f(x_1) \neq f(x_2)$

На языке уравнений: $\forall y \in Y$ уравнение $f(x) = y$ имеет не более одного решения относительно x

Сюръекция $f: X \to Y$ сюръ $f(X) = Y$

На языке уравнений: $\forall y \in Y$ $f(x) = y$ имеет решение относительно x

f действует из X на Y - отображение "на"

Биекция: отображение одновременно сюръекция и биекция, т.е. на языке уравнений $\forall y \in Y f(x) = y$ имеет ровно одно решение относительно x. Также называют взаимнооднозначное соответствие.

График отображения: $\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$

Обратное отображение: $f: X \to Y$ - биекция, тогда $f^{-1}: Y \to X, y \mapsto x$

Композиция отображений: $f: X \to Y, g: Y \to Z$, тогда $g \circ f: x \to z, x \mapsto g(f(x))$. Также возможно $g: Y_1 \to Z, Y_1 \subset Y$

f - сужение $g. y: X \to Y, A \subset X$. Отображение $f: A \to Y, x \mapsto g(x)$ называется сужением g на множество A.

$f: X \to Y, X \subset B, g: B \to Y$ и g удовлетворяет свойству $\forall x \in X$ $g(x) = f(x)$, g называется продолжение отображения.

Тождественное отображение $id: X \to X, x \mapsto x$ - ничего не делает.

Пределы в метрических пространствах

Предел последовательности

Примечание: свойства модуля.

- $|xy| = |x||y|$
- $|x| - |y| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$

Предел последовательности в $\mathbb{R}$

$(x_n), a \in \mathbb{R}$ Опр.: $x_n \to a, \lim_{n \to \infty} x_n = a$

$\forall \epsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ |x_n - a| < \epsilon$

Примечание: N можно называть "номер", но оно не обязательно целое.

Если существует предел, то последовательность называется сходящейся (последовательность сходится), если $\forall a$ не является пределом - расходящейся.

Пример:

1. $x_n === a \quad (\forall n\ \ x_n = a)$ - постоянная (стационарная) последовательность, $\lim x_n = a$
2. $x_n := \frac{1}{n} \quad x_n \to 0 \quad \forall \epsilon > 0\, \exists N := \frac{1}{\epsilon}\, \forall n > N = \frac{1}{\epsilon}\ \frac{1}{n} < \epsilon$
3. $x_n = (-1)^n$ - предела нет, докажем от противного. $x_n \to a$ Для $\epsilon = 1 \exists N\ \forall n > N\ |x_n - a| < 1$
   $2 = |x_n - x_{n+1}| \leq |x_n - a| + |x_{n+1} - a| < 1 + 1$ - противоречие $\blacksquare$.

"Двойная бухгалтерия": $\forall \epsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ |x_n - a| < 10\epsilon$ - это все равно одно и то же

Сокращение: $x_n = y_n$ начиная с некоторого места $\Leftrightarrow$ НСМН $\Leftrightarrow$ $\exists K\ \forall n > K\ x_n = y_n$

$a \in \mathbb{R}\ \ \forall \epsilon > 0\ \ (a - \epsilon, a + \epsilon)$ = ϵ-окрестность точки $a = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \epsilon\}$

U, W, V - зарезервированы под окрестности. $U_\epsilon(a)$ - ϵ-окрестность точки a

Последовательности в метрическом пространстве

Опр. На множестве X отображение $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ называется метрикой *(расстоянием)*, если выполняются свойства 1-3.

1. $\forall x, y\ \rho(x, y) \geq 0$; $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\forall x, y\ \rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. Неравенство треугольника: $\forall x, y, z \in X \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

Опр. (x, ρ) - метрическое пространство

Пример:

1. Симплициальная метрика: $\forall x, y \neq x\ \rho(x, y) = 1$
2. Метрика Хемминга: $X = \{0, 1\}^8$ - 8 бит, $\rho(a, b)$ = число разрядов, где они различаются.
3. $\mathbb{R}\ \ \rho(x, y) = |x - y|$
   $\mathbb{R}^m\ \ x \in \mathbb{R}^m\ \ x = (x_1, ..., x_m)$
   $\rho_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + ... + |x_m - y_m|$
   $\rho_2(x, y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + ... + |x_m - y_m|^2}$
   $\rho_\infty(x, y) = max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, ..., |x_m - y_m|)$

$\rho_1, \rho_2, \rho_\infty$ так же определены для $\mathbb{C}^m$

Опр. **Подпространством** метрического пространства (X, ρ) называется (A, ρ), если $A \subset X$

Опр. **Открытый шар**: $B(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) < r\}$

Опр. **Замкнутый шар**: $\overline{B(a, r)} = \{x \in X : \rho(a, x) \leq r\}$

Опр. **Сфера**: $S(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) = r\}$

Опр. ϵ**-окрестность точки** $\mathbf{a}$: $B(a, \epsilon) \Leftrightarrow U(a)$.

Опр. **Проколотая ϵ-окрестность точки $\mathbf{a}$**: $B(a,\epsilon) \cap \{a\} \Leftrightarrow \dot{U}(a) \Leftrightarrow \dot{B}(a,\epsilon)$.

Определим предел через ϵ-окрестность: $\forall U(a) \ \ \exists N \ \ \forall n > N \ \ x_n \in U(a)$

Зам. $x_n \to a \Leftrightarrow \rho(x_n, a) \to 0$