

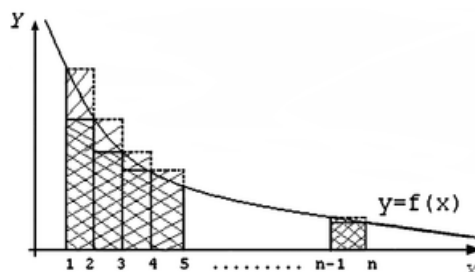
Теорема 1. Интегральный признак Коши.

$f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ монотонно убывает, $f \geq 0$, f непр.

Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ и $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходятся/расходятся одновременно.

Доказательство.

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^{n+1} f(x)dx + \Delta_n$$



Δ_n — площадь криволинейных треугольников, получаемых отсечением кривой $y = f(x)$.

$$0 \leq \Delta_n \leq f(1) - f(n) \leq f(1)$$

$\Delta_n \uparrow \Rightarrow \exists \text{ кон. } \lim \Delta_n$

Более формальный вариант, без картинок:

$$\sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^{n+1} f(x)dx = \sum_{k=1}^n \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(x)dx \right)$$

Т.к. $f \downarrow$:

$$\int_k^{k+1} f(x)dx \geq \int_k^{k+1} f(k+1)dx = f(k+1)$$

$$\sum_{k=1}^n \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(x)dx \right) \leq \sum_{k=1}^n f(k) - f(k+1) = f(1) - f(n+1)$$

□

Пример. $\sum \frac{1}{k^\alpha (\ln k)^\beta}$

Способы:

1. “Удавить логарифм”
2. Покажем, что $\frac{1}{k^\alpha (\ln k)^\beta}$ монотонна НСНМ:

$$f' = \frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}(\ln x)^\beta} - \frac{\beta}{x^{\alpha+1}(\ln x)^\beta \ln x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}(\ln x)^\beta} \Rightarrow f' < 0 \text{ НСНМ}$$

Перейдем к интегралу:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} dx$$

- $\alpha > 1$ сходится
- $\alpha < 1$ расходится
- $\alpha = 1$:

- $\beta > 1$ сходится
- $\beta \leq 1$ расходится

По другим признакам сходимость ряда нельзя выяснить.

Определение. Ряд A абсолютно сходится, если 1 и 2:

1. $\sum a_n$ сх.
2. $\sum |a_n|$ сх.

Пример.

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$$

Возьмём интеграл на $[0, 1]$:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots - \frac{(-1)^n}{2n+1} + \underbrace{\int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2} dx}_{\Delta_n}$$

Устремим $n \rightarrow +\infty$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Таким образом, мы посчитали сумму ряда, это ряд Лейбница. По модулю этот ряд не сходится.

Теорема 2. $\sum a_n, a_n \in \mathbb{R}$. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. $\sum a_n$ абс. сх.
2. $\sum |a_n|$ сх.
3. Оба ряда $\sum a_n^+, \sum a_n^-$ сх.

Сходимость рядов ...

Теорема 3. Признак Лейбница.

$c_n \geq 0, c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq \dots, c_n \rightarrow 0$

Тогда $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n c_n$ сх.

Доказательство.

$$\begin{aligned} S_{2N} &= c_1 - c_2 + \dots + c_{2N-1} - c_{2N} \\ S_{2N+2} &= S_{2N} + (c_{2N+1} - c_{2N+2}) \geq S_{2N} \\ S_{2N} &\uparrow, S_{2N} \leq c_1 \end{aligned}$$

□

Примечание. Секретное приложение к признаку Лейбница.

В условиях признака Лейбница:

$$\left| \sum_{n=N}^{+\infty} (-1)^{n-1} C_n \right| \leq |C_N|$$

Пример.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k} + (-1)^k}$$

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{k} + (-1)^k}$$

Не монотонно.

Для незнакостабильных рядов признак эквивалентности не работает.

Функции и отображения в \mathbb{R}^m

1. Структуры в \mathbb{R}^m

- Линейное пространство $x = (x_1 \dots x_m)$, $x_i \in \mathbb{R}$. Строка/столбец — не важно.

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^m x_i y_i$$

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum x_i^2}$$

$$\rho(x, y) := |x - y|$$

- Окрестности, шар

$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x - a| < r\}$ — открытый шар, r -окрестность точки a

Открытые множества, замкнутые множества.

Внутренняя точка, предельная точка множества.

- Сходимость, предел

$$x_n \rightarrow a, x_n - \text{посл. в } \mathbb{R}^m, a \in \mathbb{R}^m$$

$$\forall U(a) \exists N \forall n > N \ x_n \in U(a)$$

$$x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b \Rightarrow \langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$$

Немного скипнуто

В \mathbb{R}^m комп. \Leftrightarrow замкн. и огр.

Секвенциальная компактность: $\forall (x_n), x_n \in K \Rightarrow \exists n_k, a \in K : x_{n_k} \rightarrow a$

Применение компактности : принцип выбора Больцано-Вейерштрасса, теорема Вейерштрасса.

$$\lim_{y \rightarrow 0, x \rightarrow 0} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{y \rightarrow 0} -1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x+y}{x-y} = \lim 1 = 1$$

Получили противоречие. Что мы сделали не так?

Теорема 4. О повторных пределах

$D_1, D_2 \in \mathbb{R}$, a — пр. точка D_1 , b — пр. точка D_2

$$D = (D_1 \setminus \{a\}) \times (D_2 \setminus \{b\})$$

Пусть:

$$1. \exists \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = A \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$2. \forall x \in D_1 \setminus \{a\} \exists \text{ кон. } \varphi(x) = \lim_{y \rightarrow b} f(x,y)$$

$$\text{Тогда } \exists \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = A$$

Доказательство. Пусть $A \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D_1 \quad |x - a| < \delta$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in D_2 \quad |y - b| < \delta$$

$$|f(x,y) - A| < \varepsilon \xrightarrow{y \rightarrow b} |\varphi(x) - A| \leq \varepsilon$$

□

Пример. $f(x,y) = (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$

$$D = \mathbb{R}^2 \setminus (\{\text{ось } Ox\} \cup \{\text{ось } Oy\})$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \underbrace{(x+y)}_{\text{б.м.}} \underbrace{\sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}}_{\text{огр.}} = 0$$

$$\varphi(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \underbrace{(x+y)}_{\rightarrow x} \sin \frac{1}{x} \underbrace{\sin \frac{1}{y}}_{\nexists \lim}$$

Загадка:

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim 0 = 0$$

По теореме если предел \exists , то он = 0. Но существует ли он?