

Пример. $\langle a, b \rangle \quad f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad x^n$ — непрерывно

Любой многочлен непрерывен, выражение вида

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0}$$

тоже непрерывно на области определения.

Теорема 1. *О непрерывности композиции*

$f : D \subset X \rightarrow Y \quad g : E \subset Y \rightarrow Z \quad f(D) \subset E$

f — непр. в $x_0 \in D$, g — непр. в $f(x_0)$

Тогда $g \circ f$ непр. в x_0

Proof. По Гейне.

Проверяем, что $\forall (x_n) : x_n \in D, x_n \rightarrow x_0 \quad g(f(x_n)) \xrightarrow{?} g(f(x_0))$

$y_n := f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x_0)$

$y_n \in E$

$\Rightarrow g(y_n) \rightarrow g(y_0)$

□

Примечание. $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$

$g(x) = |\operatorname{sign}(x)|$

$x \rightarrow 0 \quad f(x) \rightarrow 0$

$y \rightarrow 0 \quad g(y) \rightarrow 1$

$x \rightarrow 0 \quad g(f(x)) \rightarrow 1?$ — неверно

Но: $x_n = \frac{1}{\pi n} \rightarrow 0 \quad f(x_n) = 0 \quad g(f(x_n)) \rightarrow 0$

Теорема 2. *О пределе композиции*

$f : D \subset X \rightarrow Y \quad g : E \subset Y \rightarrow Z \quad f(D) \subset E$

a — предельн. точка $D \quad f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} A$

A — предельн. точка $E \quad g(y) \xrightarrow[y \rightarrow A]{} B$

$\exists V(a) \quad \forall x \in \dot{V}(a) \cap D \quad f(x) \neq A \quad (*)$

Тогда $g(f(x)) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} B$

Proof. По Гейне.

Проверяем, что $\forall (x_n) : \begin{smallmatrix} x_n \in D \\ x_n \rightarrow a \\ x_n \neq a \end{smallmatrix} \quad g(f(x_n)) \xrightarrow{?} B$

$y_n := f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} A$

$y_n \in E$

При больших $N \quad y_n \in V(a) \Rightarrow y_n \neq A$

$\Rightarrow g(y_n) \rightarrow B$

□

Примечание. Вместо $(*)$ можно рассмотреть условие $A \in E \quad g$ — непр. в A .

Теорема 3. *Топологическое определение непрерывности*

$f : X \rightarrow Y$ — непр. на $X \Leftrightarrow \forall G \subset Y$, откp. $f^{-1}(G)$ — откp. в X .

Proof. “ \Rightarrow ” $x_0 \in f^{-1}(G) \Rightarrow \exists V(x_0) \subset f^{-1}(G)$
 f — непр. в $x_0 \quad \forall U(f(x_0)) \quad W(x_0) \quad \forall x \in W \quad f(x) \in U$
 $f(x_0) \in G$ — откp. $\Rightarrow \exists U_1(f(x_0)) \subset G$
 Для $U_1 \quad \exists W(x_0) : x \in W \quad f(x) \in U_1 \subset G$
 $W(x_0) \subset f^{-1}(G)$
 “ \Leftarrow ” $x_0 \in X$? непр. f в x_0
 $\forall U(f(x_0)) \quad \exists W(x_0) \quad \forall x \in W \quad \forall f(x) \in U$ — надо проверить
 $U(f(x_0))$ — откp. $\Rightarrow f^{-1}(U(f(x_0)))$ — откp., а $x_0 \in f^{-1}(U(f(x_0)))$, значит $\exists W(x_0) \subset f^{-1}(U(f(x_0)))$
 Для любого $x \in W(x_0)$ будет выполняться $f(x) \in U(f(x_0))$ □

Примечание. $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = x$
 $f^{-1}((1, +\infty)) = (1, 2]$ — открыто в $[0, 2]$

Теорема 4. Вейерштрасса о непрерывном образе компакта.

$f : X \rightarrow Y$ — непр. на X
 Если X — комп., то $f(X)$ — комп.

Лемма 1. $A \subset \mathbb{R}$, A — ограничено и замкнуто $\Rightarrow \sup A \in A$

Proof. По техническому описанию $\sup A$ если $\sup A \notin A \Rightarrow \sup A$ — предельная точка A .
 Для $\varepsilon = \frac{1}{n} \quad \exists x_n \in A : \sup A - \frac{1}{n} < x_n \leq \sup A$, т.е. $x_n \rightarrow \sup A$ □

Proof. $f(X)$ — комп.
 $f(X) \subset \bigcup G_\alpha \quad G_\alpha$ — откp. в Y .
 $X \subset \bigcup f^{-1}(G_\alpha)$ — откp. т.к. f — непр. $\xRightarrow{X \text{ — комп.}} \exists \alpha_1 \dots \alpha_n \quad X \subset \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(G_{\alpha_i}) \Rightarrow$
 $f(X) \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$ □

Следствие. Непрерывный образ компакта замкнут и ограничен.

Следствие. (1-я теорема Вейерштрасса)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — непр.
 Тогда f — огp.

Следствие. $f : X \rightarrow \mathbb{R}$
 X — комп., f — непр. на X
 Тогда $\exists \max_X f, \min_X f$
 $\exists x_0, x_1 : \forall x \in X \quad f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$

Следствие. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — непр.
 $\exists \max f, \min f$

1 O -символика

Определение. $f, g : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ x_0 — пр. точка D

Если $\exists V(x_0) \quad \exists \varphi : V(x_0) \cap D \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = g(x)\varphi(x)$ при $x \in V(x_0) \cap D$

1. φ — ограничена. Тогда говорят $f = O(g)$ при $x \rightarrow x_0$

“ f ограничена по сравнению с g при $x \rightarrow x_0$ ”

2. $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ f — **беск. малая** по отношению к g при $x \rightarrow x_0$, $f = o(g)$

3. $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1$ f и g **экв.** при $x \rightarrow x_0$ $f \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g$

$$g, f : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$$

Определение. $\exists c > 0 \forall x \in D \quad f = O(g) \quad |f(x)| < c|g(x)|$ — f **ограничена** по сравнению с g на множестве D .

Определение. В условиях прошлых определений $f = O(g), g = O(f) \Leftrightarrow f \asymp g$ — асимптотически сравнимы на множестве D , “величины одного порядка”.

Примечание. Первое определение $\Leftrightarrow f = O(g)$ на $V(x_0) \cap D$ в смысле второго определения $\Leftrightarrow \frac{f}{g}$ — **огр.** на $V(x_0) \cap D$ (если $g \neq 0$)

Второе определение $\Leftrightarrow \underset{g \neq 0}{\frac{f}{g}} \rightarrow 0$

Третье определение $\frac{f}{g} \rightarrow 1$ (если $g \neq 0$)

Следствие. 1. $f \sim g, x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow f = g + o(g), x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow f = g + o(f), x \rightarrow x_0$

Proof.

$$\frac{f}{g} \rightarrow 1, x \rightarrow x_0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \alpha(x)$$

$$\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$f(x) = g(x) + \alpha(x)g(x) = g(x) + o(x)$$

□

Аналогично для $\frac{g}{f} = 1$.

2. $f = o(g) \Rightarrow f = O(g)$

Proof. $f(x) = \alpha(x)g(x) \quad \alpha(x) = 0 \Rightarrow \alpha(x)$ — **огр.**

□

3. $\alpha \neq 0 \quad f \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \alpha g$. Тогда $f \asymp g, x \rightarrow x_0$

Proof.

$$\varepsilon := \frac{\alpha}{2} \quad \exists V(x_0) \quad \forall x \in V(x_0) \cap D \quad \frac{\alpha}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2}\alpha$$

□

Пример. 1.

$$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \quad \sin x = x + o(x), x \rightarrow 0$$

2.

$$\begin{aligned}\frac{1 - \cos x}{x^2} &\xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{2}\right), x \rightarrow 0 \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^2 o\left(\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

3.

$$\frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \quad e^x = 1 + x + o(x)$$

4.

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \quad \ln(1+x) = x + o(x)$$

5.

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha o(x), x \rightarrow 0$$

Теорема 5. $f, \tilde{f}, g, \tilde{g} : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ x_0 — предельная точка D $f \sim \tilde{f}, g \sim \tilde{g}$ при $x \rightarrow x_0$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)$$

, т.е. если \exists один из пределов, то \exists и второй и имеет место равенство

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}$$

, если x_0 лежит в области определения $\frac{f}{g}$ *Proof.*

$$f(x)g(x) = \tilde{f}(x)\tilde{g}(x) \frac{f}{\tilde{f}} \frac{g}{\tilde{g}} \rightarrow \tilde{f}(x)\tilde{g}(x) \cdot 1 \cdot 1$$

□

Примечание. В условиях теоремы $\lim_{x \rightarrow x_0} f + g \neq \lim_{x \rightarrow x_0} (\tilde{f} + \tilde{g})$

1.1 Асимптотическое разложение

Определение. $g_n : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ x_0 — пред. точка D

$$\forall n \quad g_{n+1}(x) = o(g_n), x \rightarrow x_0$$

Пример. $g_n(x) = x^n, n = 0, 1, 2, \dots$ $x \rightarrow 0$ $g_{n+1} = xg_n, x \rightarrow 0$ (g_n) называется шкала асимптотического разложения. $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ Если $f(x) = c_0g_0(x) + c_1g_1(x) + \dots + c_ng_n(x) + o(g_n)$, то это асимптотическое разложение f по шкале (g_n)

Теорема 6. $f, g_n : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ x_0 — предельная точка D

$$\forall n \quad g_{n+1} = o(g_n), x \rightarrow x_0$$

$$\exists U(x_0) \quad \forall n \quad \forall x \in U(x_0) \quad g(x) \neq 0$$

$$\text{Если } f(x) = c_0 g_0(x) + \dots + c_n g_n(x) + o(g_n(x))$$

$$f(x) = d_0 g_0(x) + \dots + d_m g_m(x) + o(g_m(x))$$

$$n \leq m$$

$$\text{Тогда } c_0 = d_0, c_1 = d_1 \dots c_n = d_n$$

Proof. $k := \min\{i : c_i \neq d_i\}$

$$f(x) = c_0 g_0 + \dots + c_{k-1} g_{k-1} + c_k g_k + o(g_k)$$

$$f(x) = c_0 g_0 + \dots + c_{k-1} g_{k-1} + d_k g_k + o(g_k)$$

$$0 = (c_k - d_k) g_k + o(g_k)$$

$$d_k - c_k = \frac{o(g_k)}{g_k(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

□

Пример. Пусть $f(x) = Ax + B + o(1), x \rightarrow +\infty$

Прямая $y = Ax + B$ — наклонная асимптота к графику f при $x \rightarrow +\infty$