

1 Определения

1.1 Упорядоченная пара

Для некоторого множества X и I - множество “индексов”, тогда $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ - **семейство элементов** X . ($\forall \alpha \in I \ x_\alpha \in X$)

Упорядоченная пара — семейство из двух элементов, построенная при $I = \{1, 2\}$. Обозначается (a, b) .

1.2 Декартово произведение

Декартово произведение двух множеств — множество всех упорядоченных пар элементов этих множеств. $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$

Кроме того, декартово произведение можно обобщить для произвольного числа множеств.

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2 \dots a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2 \dots a_n \in A_n\}$$

1.3 Аксиомы вещественных чисел

1.3.1 Аксиомы поля

В множестве \mathbb{R} определены две операции, называемые сложением и умножением, действующие из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в \mathbb{R} ($+, \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$), удовлетворяющие следующим свойствам:

Аксиомы сложения (здесь и далее $\forall a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$):

1. $a + b = b + a$ — коммутативность
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ — ассоциативность
3. $\exists \mathbf{0} : \mathbf{0} + a = a$
4. $\exists a' : a + a' = \mathbf{0}$

Аксиомы умножения:

1. $ab = ba$ — коммутативность
2. $(ab)c = a(bc)$ — ассоциативность
3. $\exists \mathbf{1} \neq \mathbf{0} : \forall a \in \mathbb{R} : a \cdot \mathbf{1} = a$
4. $\forall a \neq \mathbf{0} : \exists \tilde{a} : a \cdot \tilde{a} = \mathbf{1}$

Аксиома комбинации сложения и умножения:

1. $(a + b)c = ac + bc$ — дистрибутивность

Поле — множество, в котором определены операции $+, \cdot$, удовлетворяющие группе аксиом

I. Например, $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{F}_3$

1.3.2 Аксиомы порядка

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y$ или $y \leq x$
2. $x \leq y; y \leq x \Rightarrow x = y$
3. $x \leq y; y \leq z \Rightarrow x \leq z$ — транзитивность
4. $x \leq y \Rightarrow \forall z \in \mathbb{R} : x + z \leq y + z$
5. $0 \leq x; 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy$

Упорядоченное поле — множество, для которого выполняются аксиомы групп I и II.

\mathbb{F}_3, \mathbb{C} — не упорядоченные поля

$\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathcal{R}$ — упорядоченные поля

1.4 Аксиома Кантора, аксиома Архимеда

1.4.1 Аксиома Архимеда

$$\forall x, y > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : nx > y$$

Следствие: существуют сколько угодно большие натуральные числа:

$$\forall y \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : n > y$$

Архимедовы поля — упорядоченные поля, в которых выполняется Аксиома Архимеда.

\mathcal{R} — не архимедово поле

\mathbb{R}, \mathbb{Q} — архимедовы поля

1.4.2 Аксиома Кантора

Для последовательности вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ ($\forall n \in \mathbb{N} a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$)

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$$

\mathbb{Q} не удовлетворяет этой аксиоме, в отличие от \mathbb{R} .

1.5 Пополненное множество вещественных чисел, операции и порядок в нем

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ — пополненное множество вещественных чисел.

Свойства ($\forall x \in \mathbb{R}$):

- $-\infty < +\infty$
- $\pm\infty \cdot \pm\infty = +\infty$
- $\pm\infty \cdot \mp\infty = -\infty$
- $-\infty < x < +\infty$
- $x \pm \infty = \pm\infty$

- $\pm\infty \pm \infty = \pm\infty$
- $\pm\infty \mp \infty$ — не определено

Для $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$

- $x \cdot \pm\infty = \pm\infty$

1.6 Максимальный элемент множества

$M \in A$ называется **максимальным элементом** множества A , если $\forall a \in A \quad a \leq M$

1.7 Последовательность

$x : \mathbb{N} \rightarrow Y$ — **последовательность**

1.8 Образ и прообраз множества при отображении

Для $A \subset X, f : X \rightarrow Y$ **образ** — множество $\{f(x), x \in A\} \subset Y$ — обозначается $f(A)$

Для $B \subset Y$ **прообраз** — $\{x \in X : f(x) \in B\}$ — обозначается $f^{-1}(B)$

1.9 Инъекция, сюръекция, биекция

Сюръекция — такое отображение $f : X \rightarrow Y$, что $f(X) = Y$, т.е. $\forall y \in Y \quad f(x) = y$ имеет решение относительно x .

Инъекция — такое отображение $f : X \rightarrow Y$, что $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \quad f(x_1) \neq f(x_2)$, т.е. $\forall y \in Y \quad f(x) = y$ имеет не более одного решения относительно x .

Биекция — отображение, являющееся одновременно сюръекцией и инъекцией, т.е. $\forall y \in Y \quad f(x) = y$ имеет ровно одно решение относительно x .

1.10 Векторнозначная функция, ее координатные функции

Если $F : X \rightarrow \mathbb{R}^m; x \mapsto F(x) = (F_1(x), \dots, F_m(x))$, то F — **векторнозначная функция** (значения функции — вектора)

$F_1(x) \dots F_m(x)$ — координатные функции отображения F

1.11 График отображения

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$

1.12 Композиция отображений

$f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$, тогда **композиция** f и g (обозначается $g \circ f$) — такое отображение, что $g \circ f : X \rightarrow Z, x \mapsto g(f(x))$.

Также возможно определение, которое допускает $g : Y_1 \rightarrow Z, Y_1 \supset Y$

1.13 Сужение и продолжение отображений

Для $g : X \rightarrow Y \quad f$ — **сужение** g на множество A , если $f : A \rightarrow Y, A \subset X$.

g называется **продолжением** f .

1.14 Предел последовательности (эпсилон-дельта определение)

Если для $(x_n), a \in \mathbb{R}$ выполняется $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N |x_n - a| < \varepsilon$, то a — предел последовательности (x_n) , обозначается $x_n \rightarrow a$ или $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

1.15 Окрестность точки, проколота окрестность

Окрестность точки $a = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$, обозначается $U_\varepsilon(a)$

Проколота окрестность точки $a = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$, обозначается $\dot{U}_\varepsilon(a)$

1.16 Предел последовательности (определение на языке окрестностей)

$$\forall U(a) \exists N \forall n > N x_n \in U(a)$$

1.17 Метрика, метрическое пространство, подпространство

На множестве X отображение $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ называется метрикой, если выполняются свойства 1-3:

1. $\forall x, y \rho(x, y) \geq 0; \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\forall x, y \rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. Неравенство треугольника: $\forall x, y, z \in X \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

Метрическое пространство — упорядоченная пара (X, ρ) , где X — множество, ρ — метрика на X .

Подпространством метрического пространства (X, ρ) называется $(A, \rho|_{A \times A})$, если $A \subset X$

1.18 Шар, замкнутый шар, окрестность точки в метрическом пространстве

Шар (открытый шар) $B(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) < r\}$

Замкнутый шар $B(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) \leq r\}$

Окрестность точки a в метрическом пространстве: $B(a, \varepsilon) \Leftrightarrow U(a)$.

1.19 Линейное пространство

Если K — поле ($K = \mathbb{R}$ или \mathbb{C}), X — множество, то X называется линейным пространством над полем K (и тогда K называется полем скаляров), если определены следующие две операции:

1. $+: X \times X \rightarrow X$ — сложение векторов
2. $\cdot: K \times X \rightarrow X$ — умножение векторов на скаляры

Для этих операций выполняются соответствующие аксиомы (здесь $A, B, C \in X; a, b \in K$):

1.19.1 Аксиомы сложения векторов

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $\exists 0 \in X : A + 0 = A$
4. $\exists -A \in X : A + (-A) = 0$ — обратный элемент

1.19.2 Аксиомы умножения векторов на скаляры

1. $(A + B) \cdot a = A \cdot a + B \cdot a$
2. $A \cdot (a + b) = A \cdot a + A \cdot b$
3. $(ab) \cdot A = a(b \cdot A)$
4. $\exists 1 \in K : 1 \cdot A = A$

1.20 Норма, нормированное пространство

Норма - отображение $X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$, если X - линейное пространство (над \mathbb{R} или \mathbb{C}) и выполняется следующее:

1. $\forall x \quad \|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\forall x \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
3. Неравенство треугольника: $\forall x, y \in X \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Нормированное пространство — упорядоченная пара $(X, \|\cdot\|)$, где $\|\cdot\|$ - норма

1.21 Ограниченное множество в метрическом пространстве

$A \subset X$ — **ограничено**, если $\exists x_0 \in X \quad \exists R > 0 \quad A \subset B(x_0, R)$, т.е. если A содержится в некотором шаре в X .

1.22 Внутренняя точка множества, открытое множество, внутренность

a — **внутренняя точка** множества D , если $\exists U(a) : U(a) \subset D$, т.е. $\exists r > 0 : B(a, r) \subset D$

D — **открытое множество**, если $\forall a \in D : a$ — внутренняя точка D

Внутренностью множества D называется $Int(D) = \{x \in D : x \text{ — внутр. точка } D\}$

1.23 Предельная точка множества

a — **предельная точка** множества D , если $\forall \dot{U}(a) \quad \dot{U}(a) \cap D \neq \emptyset$

1.24 Замкнутое множество, замыкание, граница

D — **замкнутое множество**, если оно содержит все свои предельные точки.

Замыканием множества D называется $\overline{D} = D \cup (\text{множество предельных точек } D)$

Граница множества — множество его граничных точек. Обозначается $\partial D = \overline{D} \setminus Int D$

1.25 Изолированная точка, граничная точка

a — **изолированная точка** D , если $a \in D$ и a — не предельная.

a — **граничная точка** D , если $\forall U(a) \quad U(a)$ содержит точки как из D , так и из D^c

1.26 Описание внутренности множества

1. $Int D$ – открыто
2. $Int D = \bigcup_{\substack{D \supset G \\ G - \text{открыт}}} G$ – максимальное открытое множество, содержащееся в D
3. D – открыто в $X \Leftrightarrow D = Int D$

1.27 Описание замыкания множества в терминах пересечений

$\overline{D} = \bigcap_{\substack{F \supset D \\ F - \text{замкн.}}} F$ – минимальное (по включению) замкнутое множество, содержащее D .

Если D замкнуто, $\overline{D} = D$.

1.28 Верхняя, нижняя границы; супремум, инфимум

$E \subset \mathbb{R}$. E – огр. сверху, если $\exists M \in \mathbb{R} \forall x \in E \ x \leq M$. Кроме того, всякие такие M называются **верхними границами** E .

Аналогично ограничение снизу.

Для E – огр. сверху **супремум** ($\sup E$) – наименьшая из верхних границ E .

Для E – огр. снизу **инфимум** ($\inf E$) – наибольшая из нижних границ E .

1.29 Техническое описание супремума

$$b = \sup E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E \ x \leq b \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in E \ b - \varepsilon < x \end{cases}$$

1.30 Последовательность, стремящаяся к бесконечности

$$x_n \rightarrow +\infty \iff \forall E > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ x_n > E$$

$$x_n \rightarrow -\infty \iff \forall E \ \exists N \ \forall n > N \ x_n < E$$

$$x_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow |x_n| \rightarrow +\infty$$

1.31 Компактное множество

$K \subset X$ – **компактное**, если для любого открытого покрытия \exists конечное подпокрытие

$$\Leftrightarrow \exists \alpha_1 \dots \alpha_n \quad K \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$$

1.32 Секвенциальная компактность

Секвенциально компактным называется множество $A \subset X : \forall$ посл. (x_n) точек A \exists подпол. x_{n_k} , которая сходится к точке из A

1.33 Определения предела отображения (3 шт)

1.33.1 По Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D \ 0 < \rho^X(a, x) < \delta \implies \rho^Y(f(x), A) < \varepsilon$$

1.33.2 На языке окрестностей

$$\forall U(A) \exists V(a) \forall x \in \dot{V}(a) f(x) \in U(A)$$

1.33.3 По Гейне

$\forall(x_n)$ — посл. в X :

1. $x_n \rightarrow a$
2. $x_n \in D$
3. $x_n \neq a$

$$f(x_n) \rightarrow A$$

1.34 Определения пределов в $\overline{\mathbb{R}}$

2 Теоремы

2.1 Законы де Моргана

Пусть $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ - семейство множеств, Y - множество. Тогда:

1. $Y \setminus (\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha)$
2. $Y \cap (\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in A} (Y \cap X_\alpha)$

2.2 Неравенство Коши-Буняковского, евклидова норма в \mathbb{R}^m

2.2.1 Неравенство Коши-Буняковского

$$(\sum a_i b_i)^2 \leq (\sum a_i^2)(\sum b_k^2)$$

2.2.2 Евклидова норма в \mathbb{R}^m

$$\|x\| = \sqrt{\sum_i^m x_i^2}$$

2.3 Аксиома Архимеда. Плотность множества \mathbb{Q} в \mathbb{R}

2.3.1 Аксиома Архимеда

$$\forall x, y > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : nx > y$$

2.3.2 Плотность множества \mathbb{Q} в \mathbb{R}

$$\mathbb{Q} \text{ плотно в } \mathbb{R} \stackrel{def}{\iff} \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b \quad (a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$$

В любом интервале в \mathbb{R} содержится число $\in \mathbb{Q}$.

2.4 Неравенство Бернулли

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad x > -1, n \in \mathbb{N}$$

2.5 Единственность предела и ограниченность сходящейся последовательности

2.5.1 Единственность предела

(X, ρ) — метрическое пр-во, $a, b \in X$, (x_n) — послед. в X , $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$, $x_n \rightarrow b$, тогда $a = b$

2.5.2 Ограниченность сходящейся последовательности

Если (x, ρ) — метрическое пр-во, (x_n) — послед. в X , x_n сходится, тогда x_n — ограничена.

2.6 Теорема о предельном переходе в неравенствах для последовательностей и для функций

Если $(x_n), (y_n)$ — вещественные последовательности $x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b, \exists N \forall n > N x_n \leq y_n$, тогда $a \leq b$.

Если $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$, a — предельная точка X , и $\forall x \in X f(x) \leq g(x)$. Тогда $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

2.7 Теорема о двух городских

Если $(x_n), (y_n), (z_n)$ — вещ. посл., $\forall n \ x_n \leq y_n \leq z_n, \lim x_n = \lim z_n = a$, тогда $\exists \lim y_n = a$

2.8 Бесконечно малая последовательность

(x_n) — вещ. посл. называется бесконечно малой, если $x_n \rightarrow 0$

2.9 Теорема об арифметических свойствах предела последовательности в нормированном пространстве и в \mathbb{R}

Если $(X, \|\cdot\|)$ — норм. пр-во, $(x_n), (y_n)$ — посл. в X , λ_n — посл. скаляров, и $x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0, \lambda_n \rightarrow \lambda_0$, тогда:

$$1. \ x_n \pm y_n \rightarrow x_0 \pm y_0$$

$$2. \ \lambda_n x_n \rightarrow \lambda x_0$$

$$3. \ \|x_n\| \rightarrow \|x_0\|$$

Для $(x_n), (y_n)$ — вещ. посл., $\forall n \ y_n \neq 0, y_0 \neq 0$:

$$4. \ \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{x_0}{y_0}$$

2.10 Неравенство Коши-Буняковского в линейном пространстве, норма, порожденная скалярным произведением

2.10.1 Неравенство Коши-Буняковского в линейном пространстве

$$\forall x, y \in X \quad |\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

2.10.2 Норма, порожденная скалярным произведением

Для лин. пространства X , скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$
 $\rho : X \rightarrow \mathbb{R} \quad \rho(x) = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ — норма

2.11 Леммы о непрерывности скалярного произведения и по координатной сходимости в \mathbb{R}^m

2.11.1 О непрерывности скалярного произведения

X — лин. пространство со скалярным произведением, $\|\cdot\|$ — норма, порожденная скалярным произведением.

Тогда $\forall (x_n) : x_n \rightarrow x, \forall (y_n) : y_n \rightarrow y \quad \langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$

2.11.2 О по координатной сходимости в \mathbb{R}^n

$(x^{(n)})$ — последовательность векторов в \mathbb{R}^m , где задано евклидово скалярное пространство и норма.

Тогда $(x^{(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x^{(0)} \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad x_i^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_i^{(0)}$

2.12 Открытость открытого шара

$\forall x \in B(a, r) \quad x$ — внутренняя точка $B(a, r)$

2.13 Теорема о свойствах открытых множеств

1. $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ — семейство открытых множеств в (X, ρ)

Тогда $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ — открыто в X .

2. G_1, G_2, \dots, G_n — открыто в X .

Тогда $\bigcap_{i=1}^n G_i$ — открыто в X .

Примечание. В 1. семейство может быть бесконечным, а в 2. — нет.

2.14 Теорема о связи открытых и замкнутых множеств, свойства замкнутых множеств

D — замкнуто $\Leftrightarrow D^c = X \setminus D$ (дополнение) — открыто.

Свойства:

1. $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ — замкн. в X

Тогда $\bigcap F_\alpha$ — замкн. в X

2. $F_1 \dots F_n$ — замкн. в X

Тогда $\bigcup F_i$ — замкн. в X

2.15 Теорема об арифметических свойствах предела последовательности (в $\overline{\mathbb{R}}$). Неопределенности

$(x_n), (y_n)$ – вещ., $x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b \quad a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда:

1. $x_n \pm y_n \rightarrow a \pm b$
2. $x_n y_n \rightarrow ab$, если $\forall n \quad y_n \neq 0; b \neq 0$
3. $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{a}{b}$

При условии, что выражения в правых частях имеют смысл.

Также для $x_n \rightarrow +\infty, y_n$ – огр.снизу $\Rightarrow x_n + y_n \rightarrow +\infty$.

$$\begin{cases} x_n \rightarrow +\infty \\ y_n > \varepsilon, (\varepsilon > 0) \text{ при } n > N_0 \end{cases} \Rightarrow x_n y_n \rightarrow +\infty$$

Понятия не имею, что ниже произошло.

Неопределенности:

- $\begin{cases} x_n \rightarrow +\infty \\ y_n \rightarrow -\infty \end{cases} \Rightarrow x_n + y_n \rightarrow ?$
- $\begin{cases} x_n \rightarrow n + \sin n \\ y_n \rightarrow -n \end{cases} \Rightarrow x_n + y_n = \sin n, \nexists \lim$
- $\begin{cases} x_n \rightarrow n \\ y_n \rightarrow -\sqrt{n} \end{cases} \Rightarrow x_n + y_n = n - \sqrt{n} \rightarrow +\infty$
- $\begin{cases} x_n \rightarrow 0 \\ y_n \rightarrow a \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow 0$

2.16 Теорема Кантора о стягивающихся отрезках

Дана последовательность отрезков $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$

Длины отрезков $\rightarrow 0$, т.е. $(b_n - a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Тогда $\exists! c \in \mathbb{R} \quad \bigcap_{k=1}^{+\infty} [a_k, b_k] = \{c\}$ и при этом $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} c, b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} c$

2.17 Теорема о существовании супремума

$E \subset \mathbb{R}, E \neq \emptyset, E$ – огр. сверху.

Тогда $\exists \sup E \in \mathbb{R}$

2.18 Лемма о свойствах супремума

1. $\emptyset \neq D \subset E \subset \mathbb{R} \quad \sup D \leq \sup E$
2. $\lambda \in \mathbb{R} \quad (\lambda E = \{\lambda x, x \in E\})$
Пусть $\lambda > 0$, тогда $\sup \lambda E = \lambda \sup E$
3. $\sup(-E) = -\inf E$

2.19 Теорема о пределе монотонной последовательности

1. x_n — вещ. посл., огр. сверху, возрастает. $\Rightarrow \exists \lim x_n \in \mathbb{R}$
2. x_n — убывает, огр. снизу. $\Rightarrow \exists \lim x_n \in \mathbb{R}$
3. x_n — монотонна, огр. $\Rightarrow \exists \lim x_n \in \mathbb{R}$

2.20 Определение числа e , соответствующий замечательный предел

А оно было вообще?

2.21 Теорема об открытых и замкнутых множествах в пространстве и в подпространстве