

# 1 Определения и формулировки

## 1.1 Внутренняя точка множества, открытое множество, внутренность

$a$  — внутренняя точка множества  $D$ , если  $\exists U(a) : U(a) \subset D$ , т.е.  $\exists r > 0 : B(a, r) \subset D$

$D$  — открытое множество, если  $\forall a \in D : a$  — внутренняя точка  $D$

Внутренностью множества  $D$  называется  $Int(D) = \{x \in D : x \text{ — внутр. точка } D\}$

## 1.2 Предельная точка множества

$a$  — предельная точка множества  $D$ , если

$$\forall \dot{U}(a) \quad \dot{U}(a) \cap D \neq \emptyset$$

## 1.3 Замкнутое множество, замыкание, граница

$D$  — замкнутое множество, если оно содержит все свои предельные точки.

$\overline{D} = D \cup (\text{множество предельных точек } D)$  — замыкание.

Граница множества — множество его граничных точек. Обозначается  $\partial D$

## 1.4 Изолированная точка, граничная точка

$a$  — изолированная точка  $D$ , если  $a \in D$  и  $a$  — не предельная, то есть:

$$\exists U(a) \quad U(a) \cap D = \{a\}$$

$a$  — граничная точка  $D$ , если  $\forall U(a) \quad U(a)$  содержит точки как из  $D$ , так и из  $D^c$

## 1.5 Описание внутренней точки множества

1.  $Int D$  - откр. множество

2.  $Int D = \bigcup_{\substack{D \supset G \\ G \text{ — открыт}}} G$  — максимальное открытое множество, содержащееся в  $D$

3.  $D$  — откр. в  $X \Leftrightarrow D = Int D$

## 1.6 Описание замыкания множества в терминах пересечений

$\overline{D} = \bigcap_{\substack{D \subset F \\ F \text{ — замкн.}}} F$  — мин. (поinkl.) замкн. множество, содержащее  $D$ .

## 1.7 Верхняя, нижняя границы; супремум, инфимум

$E \subset \mathbb{R}$ .  $E$  — **огр. сверху**, если  $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in E \quad x \leq M$ . Кроме того, всякие такие  $M$  называются **верхними границами**  $E$ .

Аналогично ограничение снизу.

$E \subset \mathbb{R}, E \neq \emptyset$ .

Для  $E$  — **огр. сверху** **супремум** ( $\sup E$ ) — наименьшая из верхних границ  $E$ .

Для  $E$  — **огр. снизу** **инфимум** ( $\inf E$ ) — наибольшая из нижних границ  $E$ .

## 1.8 Техническое описание супремума

Техническое описание супремума:  $b = \sup E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E \ x \leq b \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in E \ b - \varepsilon < x \end{cases}$

## 1.9 Последовательность, стремящаяся к бесконечности

В  $\mathbb{R}$ :

1.  $x_n \rightarrow +\infty \quad \forall E > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ x_n > E$
2.  $x_n \rightarrow -\infty \quad \forall E \ \exists N \ \forall n > N \ x_n < E$
3.  $x_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow |x_n| \rightarrow +\infty$

## 1.10 Компактное множество

$K \subset X$  — **компактное**, если для любого открытого покрытия  $\exists$  конечное подпокрытие  
 $\Leftrightarrow \exists \alpha_1 \dots \alpha_n \quad K \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$

## 1.11 Секвенциальная компактность

Секвенциально компактным называется множество  $A \subset X : \forall$  посл.  $(x_n)$  точек  $A$   
 $\exists$  подпосл.  $x_{n_k}$ , которая сходится к точке из  $A$

## 1.12 Определения предела отображения (3 шт)

1. По Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D \ 0 < \rho^X(a, x) < \delta \quad \rho^Y(f(x), A) < \varepsilon$$

2. На языке окружностей:

$$\forall U(A) \ \exists V(a) \ \forall x \in \dot{V}(a) \ f(x) \in U(A)$$

3. По Гейне:  $\forall (x_n) —$  посл. в  $X$ :

$$(a) \ x_n \rightarrow a$$

$$(b) \ x_n \in D$$

$$(c) \ x_n \neq a$$

$$f(x_n) \rightarrow A$$

### 1.13 Определения пределов в $\overline{\mathbb{R}}$

Для  $Y = \overline{\mathbb{R}}, -\infty < x < +\infty$ :

1.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty : \quad \forall E \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X : 0 < |x - a| < \delta \quad f(x) > E$
2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty : \quad \forall E \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X : 0 < |x - a| < \delta \quad f(x) < E$
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \quad \forall x \in X : x > \delta \quad |f(x) - c| < \varepsilon$
4.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \quad \forall x \in X : x < \delta \quad |f(x) - c| < \varepsilon$

### 1.14 Предел по множеству

Предел при  $x \rightarrow x_0$  по множеству  $D_1$  — это  $\lim_{x \rightarrow x_0} f|_{D_1}$

### 1.15 Односторонние пределы

В  $\mathbb{R}$  одностор. = { левостор., правостор. }

Левосторонний предел  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = L$  — это  $\lim f|_{D \cap (-\infty, x_0)}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap D \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Аналогично правосторонний.

### 1.16 Непрерывное отображение

$f : D \subset X \rightarrow Y \quad x_0 \in D$

$f$  — непрерывное в точке  $x_0$ , если:

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , либо  $x_0$  — изолированная точка  $D$
2.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \quad \rho(x, x_0) < \delta \quad \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$
3.  $\forall U(f(x_0)) \exists V(x_0) \quad \forall x \in V(x_0) \cap D \quad f(x) \in U(f(x_0))$
4. По Гейне  $\forall (x_n) : x_n \rightarrow x_0; x_n \in D \quad f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x_0)$

### 1.17 Непрерывность слева

$f$  — непр. слева в  $x_0$ , если  $f|_{(-\infty, x_0] \cap D}$  — непрерывно в  $x_0$

### 1.18 Разрыв, разрывы первого и второго рода

Если  $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , либо  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$  — точка разрыва.

Пусть  $\exists f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$  и не все 3 числа равны:  $f(x_0 - 0), f(x_0), f(x_0 + 0)$ . Это **разрыв I рода (скачок)**.

Остальные точки разрыва — **разрыв II рода**.

### 1.19 О большое, о маленькое

$f, g : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$   $x_0$  — пр. точка  $D$

Если  $\exists V(x_0) \exists \varphi : V(x_0) \cap D \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = g(x)\varphi(x)$  при  $x \in V(x_0) \cap D$

1.  $\varphi$  — ограничена. Тогда говорят  $f = O(g)$  при  $x \rightarrow x_0$   
“ $f$  **ограничена** по сравнению с  $g$  при  $x \rightarrow x_0$ ”
2.  $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$   $f$  — **беск. малая** по отношению к  $g$  при  $x \rightarrow x_0$ ,  $f = o(g)$
3.  $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1$   $f$  и  $g$  экв. при  $x \rightarrow x_0$   $f \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g$

*Примечание.* О большое и о малое — разные вопросы в табличке.

### 1.20 Эквивалентные функции, таблица эквивалентных

Эквивалентные функции даны выше.

Таблица эквивалентных для  $x \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \sin x &\sim x \\ \operatorname{sh} x &\sim x \\ \operatorname{tg} x &\sim x \\ \operatorname{arctg} x &\sim x \\ 1 - \cos x &\sim \frac{x^2}{2} \\ \operatorname{ch} x - 1 &\sim \frac{x^2}{2} \\ e^x - 1 &\sim x \\ \ln(1+x) &\sim x \\ (1+x)^\alpha - 1 &\sim \alpha x \\ a^x - 1 &\sim x \ln a \end{aligned}$$

### 1.21 Асимптотически равные (сравнимые) функции

В условиях прошлых определений  $f = O(g), g = O(f) \Leftrightarrow f \asymp g$  — асимптотически сравнимы на множестве  $D$ , “величины одного порядка”.

### 1.22 Асимптотическое разложение

$g_n : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$   $x_0$  — пред. точка  $D$

$\forall n \quad g_{n+1}(x) = o(g_n), x \rightarrow x_0$

*Пример.*  $g_n(x) = x^n, n = 0, 1, 2, \dots \quad x \rightarrow 0 \quad g_{n+1} = xg_n, x \rightarrow 0$

$(g_n)$  называется шкала асимптотического разложения.

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$  Если  $f(x) = c_0g_0(x) + c_1g_1(x) + \dots + c_ng_n(x) + o(g_n)$ , то это асимптотическое разложение  $f$  по шкале  $(g_n)$

### 1.23 Наклонная асимптота графика

Пусть  $f(x) = Ax + B + o(1), x \rightarrow +\infty$

Прямая  $y = Ax + B$  — наклонная асимптота к графику  $f$  при  $x \rightarrow +\infty$

### 1.24 Путь в метрическом пространстве

$Y$  — метр. пр-во

$\gamma : [a, b] \rightarrow Y$  — непр. на  $[a, b]$

= путь в пространстве  $Y$

### 1.25 Линейно связное множество

$E \subset Y$

$E$  — линейно связное, если  $\forall A, B \in E$

$\exists$  путь  $\gamma : [a, b] \rightarrow E$

$\gamma(a) = A$

$\gamma(b) = B$

### 1.26 Функция, дифференцируемая в точке и производная

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in \langle a, b \rangle$

$f$  — дифференцируема. в точке  $x_0$ , если  $\exists A \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + o(x - x_0), x \rightarrow x_0$$

При этом  $A$  называется **производной**  $f$  в точке  $x_0$

*Примечание.* Это два разных билета.

## 2 Теоремы

### 2.1 Теорема об открытых и замкнутых множествах в пространстве и в подпространстве

$Y \subset X, X$  — метр.п.,  $Y$  — подпространство,  $D \subset Y \subset X$

1.  $D$  — откр. в  $Y \Leftrightarrow \exists G$  — откр. в  $X \quad D = G \cap Y$

2.  $D$  — замкн. в  $Y \Leftrightarrow \exists F$  — замкн. в  $X \quad D = F \cap Y$

### 2.2 Теорема о компактности в пространстве и в подпространстве

$(X, \rho)$  — метрич. пространство,  $Y \subset X$  — подпространство,  $K \subset Y$

Тогда  $K$  — комп. в  $Y \Leftrightarrow K$  — компактно в  $X$ .

### 2.3 Простейшие свойства компактных множеств

$(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $K \subset X$

1.  $K$  — комп.  $\Rightarrow K$  — замкн.,  $K$  — огр.

2.  $X$  — комп,  $K$  — замкн.  $\Rightarrow K$  — комп.

## 2.4 Лемма о вложенных параллелепипедах

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall i = 1 \dots m \ a_i \leq x_i \leq b_i\}$  — параллелепипед.

$[a^1, b^1] \supset [a^2, b^2] \supset \dots$  — бесконечная последовательность параллелепипедов.

Тогда  $\bigcap_{i=1}^{+\infty} [a^i, b^i] \neq \emptyset$

Если  $\text{diam}[a^n, b^n] = \|b^n - a^n\| \rightarrow 0$ , тогда  $\exists! c \in \bigcap_{i=1}^{\infty} [a^i, b^i]$

## 2.5 Компактность замкнутого параллелепипеда в $\mathbb{R}^m$

$[a, b]$  — компактное множество в  $\mathbb{R}^m$

## 2.6 Теорема о характеристике компактов в $\mathbb{R}^m$

$K \subset \mathbb{R}^m$ . Эквивалентны следующие утверждения:

1.  $K$  — замкнуто и ограничено
2.  $K$  — компактно
3.  $K$  — секвенциально компактно

## 2.7 Эквивалентность определений Гейне и Коши

Определение Коши  $\Leftrightarrow$  определение Гейне.

## 2.8 Единственность предела, локальная ограниченность отображения, имеющего предел, теорема о стабилизации знака

$f : D \subset X \rightarrow Y$ ,  $a$  — пред. точка  $D$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ;  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$

Тогда  $A = B$

О локальной ограниченности отображения, имеющего предел.

$f : D \subset X \rightarrow Y$ ,  $a$  — пред. точка  $D$ ,  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$

Тогда  $\exists V(a) : f$  — огр. на  $V(a) \cap D$ , т.е.  $f(V(a) \cap D)$  содержится в некотором шаре.

О стабилизации знака.

$f : D \subset X \rightarrow Y$ ,  $a$  — пред. точка  $D$ ,  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$

Пусть  $B \in Y, B \neq A$

Тогда  $\exists V(a) \ \forall x \in V(a) \cap D \ f(x) \neq B$

## 2.9 Арифметические свойства пределов отображений. Формулировка для $\overline{\mathbb{R}}$

$f, g : D \subset X \rightarrow Y$ ,  $X$  — метрич. пространство,  $Y$  — норм. пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $a$  — пред. точка  $D$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$

$\lambda : D \rightarrow \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow a} \lambda(x) = \lambda_0$

Тогда:

1.  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm g(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm g(x) = A \pm B$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} \lambda(x)f(x) = \lambda_0 = A$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} ||f(x)|| = ||A||$$

4. Для случая  $Y = \mathbb{R}$  и для  $B \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$

$\frac{f}{g}$  задано на множестве  $D' = D \setminus \{x : g(x) = 0\}$

$a$  — пр. точка  $D'$  по теореме о стабилизации знака  $\exists V(a) \forall x \in V(a) \cap D \quad g(x) —$   
того же знака, что и  $B$ , т.е.  $g(x) \neq 0$

$\dot{V}(a) \cap D' = \dot{V}(a) \cap D \Rightarrow a$  — пред. точка для  $D'$

## 2.10 Принцип выбора Больцано–Вейерштрасса

Если в  $\mathbb{R}^m$   $(x_n)$  — ограниченная последовательность, то у неё существует сходящаяся подпоследовательность.

## 2.11 Сходимость в себе и ее свойства

$x_n$  — фундаментальная, последовательность Коши, сходящаяся в себе, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m, n > N \quad \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$$

1. Сходящаяся в себе последовательность ограничена.
2. Если у сходящейся в себе последовательности есть сходящаяся подпоследовательность, то сама последовательность сходится.

## 2.12 Критерий Коши для последовательностей и отображений

$f : D \subset X \rightarrow Y$ ,  $a$  — пр. точка  $D$ ,  $Y$  — полное метрическое пространство.

Тогда

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \in Y \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in D \quad \rho(x_1, a) < \delta; \rho(x_2, a) < \delta \quad \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

Для последовательностей?

## 2.13 Теорема о пределе монотонной функции

$f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , монотонная,  $a \in \overline{\mathbb{R}}$

$D_1 := D \cap (-\infty, a)$ ,  $a$  — пред. точка  $D_1$ . Тогда:

1.  $f$  — возрастает, огр. сверху  $D_1$ . Тогда  $\exists$  конечный предел  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$
2.  $f$  — убывает, огр. снизу  $D_1$ . Тогда  $\exists$  конечный предел  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$

## 2.14 Свойства непрерывных отображений: арифметические, стабилизация знака, композиция

1.  $f, g : D \subset X \rightarrow Y$   $x_0 \in D$  ( $X$  — норм. пространство)

$f, g$  — непр. в  $D$ ;  $\lambda : D \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$  — непр.  $x_0$

Тогда  $f \pm g, \|f\|, \lambda f$  — непр.  $x_0$

2.  $f, g : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$   $x_0 \in D$

$f, g$  — непр. в  $x_0$

Тогда  $f \pm g, |f|, fg$  — непр. в  $x_0$

$g(x_0) \neq 0$ , тогда  $\frac{f}{g}$  — непр.  $x_0$

### 2.14.1 Стабилизация знака

Если функция  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна в точке  $x_0$  и  $f(x_0) \neq 0$ , то:

$$\exists V(x_0) : \forall x \in V(x_0) \cap D \quad \text{sign } f(x) = \text{sign } f(x_0)$$

### 2.14.2 Непрерывность композиции непрерывных отображений

$f : D \subset X \rightarrow Y$   $g : E \subset Y \rightarrow Z$   $f(D) \subset E$

$f$  — непр. в  $x_0 \in D$ ,  $g$  — непр. в  $f(x_0)$

Тогда  $g \circ f$  непр. в  $x_0$

## 2.15 Непрерывность композиции и соответствующая теорема для пределов

Непрерывность композиции дана выше.

### 2.15.1 Теорема о пределе композиции непрерывных отображений

$f : D \subset X \rightarrow Y$   $g : E \subset Y \rightarrow Z$   $f(D) \subset E$

$a$  — предельн. точка  $D$   $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A$

$A$  — предельн. точка  $E$   $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow A} B$

$\exists V(a) \quad \forall x \in V(a) \cap D \quad f(x) \neq A \quad (*)$

Тогда  $g(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} B$

## 2.16 Теорема о замене на эквивалентную при вычислении пределов. Таблица эквивалентных

$f, \tilde{f}, g, \tilde{g} : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$

$x_0$  — предельная точка  $D$

$f \sim \tilde{f}, g \sim \tilde{g}$  при  $x \rightarrow x_0$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)$$



, т.е. если  $\exists$  один из пределов, то  $\exists$  и второй и имеет место равенство

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}$$

, если  $x_0$  лежит в области определения  $\frac{f}{g}$

Таблица эквивалентных дана выше.

## 2.17 Теорема единственности асимптотического разложения

$f, g_n : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$   $x_0$  — предельная точка  $D$

$\forall n \quad g_{n+1} = o(g_n), x \rightarrow x_0$

$\exists U(x_0) \quad \forall n \quad \forall x \in U(x_0) \cap D \quad g(x) \neq 0$

Если  $f(x) = c_0 g_0(x) + \dots + c_n g_n(x) + o(g_n(x))$

$f(x) = d_0 g_0(x) + \dots + d_m g_m(x) + o(g_m(x))$

$n \leq m$

Тогда  $\forall i \quad c_i = d_i$

## 2.18 Теорема о топологическом определении непрерывности

$f : X \rightarrow Y$  — непр. на  $X \Leftrightarrow \forall G \subset Y$ , откp.  $f^{-1}(G)$  — откp. в  $X$ .

## 2.19 Теорема Вейерштрасса о непрерывном образе компакта. Следствия

$f : X \rightarrow Y$  — непр. на  $X$

Если  $X$  — комп., то  $f(X)$  — комп.

*Следствие.* Непрерывный образ компакта замкнут и ограничен.

*Следствие. (1-я теорема Вейерштрасса)*

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  — непр.

Тогда  $f$  — огp.

*Следствие.*  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$

$X$  — комп.,  $f$  — непр. на  $X$

Тогда  $\exists \max_X f, \min_X f$

$\exists x_0, x_1 : \forall x \in X \quad f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$

*Следствие.*  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  — непр.

$\exists \max f, \min f$

## 2.20 Лемма о связности отрезка

Промежуток  $\langle a, b \rangle$  (границы могут входить, могут не входить) — не представим в виде объединения двух непересекающихся непустых открытых множеств

Т.е.  $\nexists G_1, G_2 \subset \mathbb{R}$  — откp.:  $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$

- $\langle a, b \rangle \subset G_1 \cap G_2$
- $\langle a, b \rangle \cap G_1 \neq \emptyset \quad \langle a, b \rangle \cap G_2 \neq \emptyset$

### 2.21 Теорема Больцано-Коши о промежуточном значении

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , непр. на  $[a, b]$ . Тогда

$$\forall t \text{ между } f(a) \text{ и } f(b) \quad \exists x \in [a, b] : f(x) = t$$

### 2.22 Теорема о сохранении промежутка

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , непр.

Тогда  $f(\langle a, b \rangle)$  — промежуток.

### 2.23 Теорема Больцано-Коши о сохранении линейной связности?

### 2.24 Описание линейно связных множеств в $\mathbb{R}$

В  $\mathbb{R}$  линейно связными множествами являются только промежутки.

### 2.25 Теорема о бутерброде

Кусок хлеба и кусок колбасы, лежащие на столе, можно разрезать прямой на две равные по площади части каждый.

### 2.26 Теорема о вписанном $n$ -угольнике максимальной площади?

### 2.27 Теорема о непрерывности монотонной функции. Следствие о множестве точек разрыва

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , монотонна. Тогда

1. Точки разрыва  $f$  (если есть) — I рода
2.  $f$  — непр. на  $\langle a, b \rangle \Leftrightarrow f(\langle a, b \rangle)$  — промежуток

У монотонной функции, заданной на промежутке, имеется не более чем счётное (НБЧС) множество точек разрыва.