Определение. f — допустимая функция на $[a, b)$
$\int_a^b f$ — **абсолютно сходится**, если:

1. $\int_a^b f$ сходится
2. $\int_a^b |f|$ — сходится

Теорема 1. *f — доп. на $[a, b)$. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

1. *$\int_a^b f$ сходится*
2. *$\int_a^b |f|$ сходится*
3. *$\int_a^b f^+, \int_a^b f^-$ оба сходятся*

Доказательство. 1⇒2 — тривиально
2⇒3 : $0 \leq f^\pm \leq |f|$
3⇒1 : $f = f^+ - f^- \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^b f^+ - \int_a^b f^-$ □

Пример.

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \overset{\text{по частям}}{=} \begin{bmatrix} u = \frac{1}{x} & du = -\frac{1}{x^2}dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{bmatrix} = -\cos \frac{1}{x}\Big|_{10}^{+\infty} - \int_{10}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

Также можно было оставить нижнюю границу 0, но использовать $v = 1 - \cos x$
Первое слагаемое очевидно конечно, а второе конечно по абсолютной сходимости: $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x}$.
Тогда искомый интеграл сходится.

Пример.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}$$

- При каких p сходится?
- При каких p абсолютно сходится?

1. $p > 1 \Rightarrow$ абсолютно сходится, т.к. $\left|\frac{\sin x}{x^p}\right| < \frac{1}{x^{p-1}}$
2. $p > 0 \Rightarrow$ сходится, т.к. (по частям):

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} = -\frac{\cos x}{x^p}\Big|_1^{+\infty} - p\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p+1}}$$

Первое конечно, второе абсолютно сходится.

3. $p \leq 0$, по критерию Коши:

$$\exists A_n, B_n \to b \quad \int_{A_n}^{B_n} f \not\to 0 \Rightarrow \int_a^b f \text{ расходится}$$

$$A_n := 2\pi n, B_n := 2\pi n + \pi \quad \int_{A_n}^{B_n} \frac{\sin x}{x^p} dx \geq (2\pi n)^{-p} \int_{A_n}^{B_n} \sin x \text{ расходится}$$

Итого для $p \leq 0$ расходится.

4. $0 < p \leq 1$

Скипнуто до конца лекции

Пример. Интеграл Дирихле.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$