

# 1 Определения

## 1.1 Локальный максимум, минимум, экстремум

**Определение.**  $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in E$  — локальный максимум функции, если

$$\exists U(x_0) \quad \forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \leq f(x_0)$$

Аналогично определяется минимум.

**Определение.** Экстремум — точка минимума либо максимума.

## 1.2 ! Первообразная, неопределенный интеграл

$$F, f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$$

$F$  — первообразная  $f$  на  $\langle a, b \rangle$

$$\forall x \in \langle a, b \rangle \quad F'(x) = f(x)$$

**Неопределенный интеграл**  $f$  на  $\langle a, b \rangle$  — множество всех первообразных  $f$ :

$$\{F + c, c \in \mathbb{R}\}, \text{ где } F \text{ — первообразная}$$

Обозначается  $\int f = F + c$  или  $\int f(x)dx$

## 1.3 Теорема о существовании первообразной

$f \in C(\langle a, b \rangle)$  тогда у  $f$  существует первообразная.

## 1.4 Таблица первообразных

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \text{длинный логарифм}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$$

Почему где-то нет  $dx$ ? Кохась забыл?

## 1.5 Равномерная непрерывность

$f : \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  **равномерно непрерывна** на  $\langle a, b \rangle$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle : |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Или для метрического пространства:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \rho(x_1, x_2) < \delta \implies \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

## 2 Теоремы

### 2.1 Критерий монотонности функции. Следствия

$f \in C(\langle a, b \rangle)$ , дифф. в  $(a, b)$

Тогда  $f$  — возрастает  $\Leftrightarrow \forall x \in (a, b) f'(x) \geq 0$

*Доказательство.* “ $\Rightarrow$ ” По определению  $f' = \frac{f(x+h)-f(h)}{h} \geq 0$

“ $\Leftarrow$ ”  $x_1 > x_2$ , по т. Лагранжа:  $\exists c : f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2) \geq 0$  □

*Следствие.*  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , тогда:

$f = \text{const} \Leftrightarrow (f \in C(\langle a, b \rangle) - \text{дифф. на } \langle a, b \rangle, f' \equiv 0)$

*Следствие.*  $f \in C[a, b]$ , дифф. на  $(a, b)$ . Тогда:

$f$  строго возрастает  $\Leftrightarrow$  ① и ②

①  $f' \geq 0$  на  $(a, b)$

②  $f' \neq 0$  ни на каком промежутке

*Доказательство.* “ $\Rightarrow$ ” очевидно

“ $\Leftarrow$ ” По лемме о возрастании в отрезке □

*Следствие.* О доказательстве неравенств

$g, f \in C([a, b])$ , дифф. в  $(a, b)$

$f(a) \leq g(a); \forall x \in (a, b) f'(x) \leq g'(x)$

Тогда  $\forall x \in [a, b] f(x) \leq g(x)$

*Доказательство.*  $g - f$  — возр.,  $g(a) - f(a) \geq 0$  □

### 2.2 Теорема о необходимом и достаточном условиях экстремума

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in (a, b) \quad f$  — дифф. на  $(a, b)$

Тогда:

1.  $x_0$  — лок. экстремум  $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

2.  $f$  —  $n$  раз дифф. в  $x_0$

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Если  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , то  $\begin{cases} n - \text{чет.} : & x_0 - \text{локальный максимум} \\ n - \text{нечет.} : & x_0 - \text{не экстремум} \end{cases}$

Если  $f^{(n)}(x_0) < 0$ , то  $\begin{cases} n - \text{чет.} : & x_0 - \text{локальный минимум} \\ n - \text{нечет.} : & x_0 - \text{не экстремум} \end{cases}$

Доказательство. 1. т. Ферма

2. ф. Тейлора

$$f(x) = \text{Tn}(f, x_0)(x) + o((x - x_0)^n)$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

при  $x$ , близких к  $x_0$ :

$$\text{sign}(f(x) - f(x_0)) = \text{sign}\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\right)$$

□

### 2.3 Теорема Кантора о равномерной непрерывности

$f : X \rightarrow Y$ ,  $X$  — комп.,  $f$  — непр. на  $X$

Тогда  $f$  — непр.

Доказательство. От противного.

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta, \bar{x}_\delta : \rho(x_\delta, \bar{x}_\delta) < \delta \quad \rho(f(x_\delta), f(\bar{x}_\delta)) \geq \varepsilon$$

$$\delta := \frac{1}{n} \quad \exists x_n, \bar{x}_n : \rho(x_n, \bar{x}_n) < \delta \quad \rho(f(x_n), f(\bar{x}_n)) \geq \varepsilon$$

Выберем  $x_{n_k} \rightarrow \tilde{x}$ ,  $\bar{x}_{n_k} \rightarrow \tilde{\bar{x}}$

$\rho(\tilde{x}, \tilde{\bar{x}}) \leq 0$ , т.е.  $\tilde{x} = \tilde{\bar{x}}$ . Тогда  $f(x_{n_k}) \rightarrow f(\tilde{x})$ ,  $f(\bar{x}_{n_k}) \rightarrow f(\tilde{x})$ , противоречие с  $\rho(f(x_n), f(\bar{x}_n)) \geq \varepsilon$  □

### 2.4 Теорема Брауэра о неподвижной точке

$f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ , непр.

Тогда  $\exists x \in [0, 1]^2 : f(x) = x$ , т.е. есть неподвижная точка.

Обобщенный вариант:

1.  $f : [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]^m$  — непр.
2.  $f : B(0, 1) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow B(0, 1)$  — непр.
3.  $f : S(0, 1) \subset \mathbb{R}^m$  — непр.

Доказательство.  $\rho : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$\rho(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$  — непр. в  $[0, 1]^2$

От противного — пусть  $\forall x \in [0, 1]^2 \quad f(x) \neq x$

Тогда  $\forall x \quad \rho(f(x), x) > 0 \quad x \mapsto \rho(f(x), x)$  — непр.,  $> 0$

По т. Вейерштрасса  $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in [0, 1] \quad \rho(f(x, x)) \geq \varepsilon$

По т. Кантора для  $f$ : для этого  $\varepsilon \quad \exists \delta < \varepsilon$ :

$$\forall x, \bar{x} : \|x - \bar{x}\| < \delta \quad \|f(x) - f(\bar{x})\| < \varepsilon$$

Можно писать не  $\|\cdot\|$ , а  $\rho$ .

Возьмём  $n : \frac{\sqrt{2}}{n} < \delta$

Построим доску  $\text{Hex}(n+1, n+1)$ , где  $n+1$  — число узлов.

Логические координаты узла  $(v_1, v_2) \quad v_1, v_2 \in \{0 \dots n\}$  имеют физические координаты, то есть узлу сопоставляется точка на квадрате с координатами  $(\frac{v_1}{n}, \frac{v_2}{n})$

$$K(V) := \min\{i \in \{1, 2\} : |f(\frac{v}{n}) - \frac{v_i}{n}| \geq \varepsilon\}$$

Продолжение на следующей лекции. □

## 2.5 Теорема о свойствах неопределенного интеграла

$f, g$  имеют первообразную на  $\langle a, b \rangle$ . Тогда

1. Линейность:

$$\int (f + g) = \int f + \int g$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \int \alpha f = \alpha \int f$$

2.  $\varphi \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \left( \int f(x) dx \right) \Big|_{x=\varphi(t)} = F(\varphi(t))$$

Частный случай:  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  :

$$\int f(\alpha t + \beta) dt = \frac{1}{\alpha} F(\alpha t + \beta)$$

3.  $f, g$  — дифф. на  $\langle a, b \rangle$ ;  $f'g$  — имеет первообр.

Тогда  $fg'$  имеет первообразную и

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

Доказательство. 1. Опущено

2.  $(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$

3.  $(fg - \int f'g)' = f'g + fg' - f'g = fg'$

□