# 1 Пределы

Теорема 1. Определение Коши ⇔ определение Гейне.

*Proof.* Докажем " $\Rightarrow$ ".

Если дана  $(x_n)$ , удовл. определению Коши, доказать

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ 0 < \rho(f(x_n), A) < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D \ 0 < \rho(x, a) < \delta \ \rho(f(x), A) < \varepsilon$$

Для этого 
$$\delta \ \exists N \ \forall n > N \rho(x_n, a) < \delta$$

, где 
$$x_n \in D, x_n \neq a$$
  $\Rightarrow \rho(f(x_n), A) < \varepsilon$ 

Proof. Докажем "←"

Пусть определение Коши не выполняется.

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in D \ 0 < \rho(x, a) < \delta \ \rho(f(x), A) \ge \varepsilon$$

$$\delta := \frac{1}{n} \exists x_n \in D \ 0 < \rho(x, a) < \frac{1}{\delta} \ \rho(f(x_n), A) \le \varepsilon$$

Построена последовательность  $(x_n): x_n \in D$   $x_n \neq a$   $\rho(x_n,a) < \frac{1}{n} \Rightarrow \rho(x_n,a) \to 0 \Rightarrow x_n \to a$ . Кроме того,  $\rho(f(x_n),A) \geq \varepsilon$  — противоречит утверждению Гейне, что  $x_n \to A$ .

Теорема 2. О единственности предела.

$$f:D\in X o Y$$
,  $a$  — пред. точка  $D$   $\lim_{x o a}f(x)=A;\lim_{x o a}f(x)=B$  Тогда  $A=B$ 

*Proof.* По Гейне.  $\forall (x_n)$ :

- $x_n \to a$
- $x_n \in D$
- $x_n \neq a$

$$f(x_n) \to A, f(x_n) \to B \Rightarrow_{\text{теор. o ед. предела посл.}} A = B$$

Теорема 3. О локальной ограниченности отображения, имеющего предел.

$$f:D\in X o Y$$
,  $a$  — пред. точка  $D$ ,  $\exists\lim_{x o a}f(x)=A$ 

Тогда  $\exists V(a): f$  — огр. на  $V(a)\cap D$ , т.е.  $f(V(a)\cap D)$  содержится в некотором шаре.

Proof. Для 
$$\varepsilon=1$$
  $\exists V(a) \ \forall x \in \dot{V}(a) \cap D \ f(x) \in U_{\varepsilon}(A)$  Для  $x \in V(a) \cap D \ f(x) \in U_{\tilde{\varepsilon}}(A)$ , где  $\tilde{\varepsilon}=\max(\varepsilon,\rho(A,f(a))+1)$ 

M3137y2019 November 4, 2019

Теорема 4. О стабилизации знака.

$$f:D\in X o Y,$$
  $a-$  пред. точка  $D,$   $\exists\lim_{x o a}f(x)=A$  Пусть  $B\in Y,$   $B\neq A$  Тогда  $\exists V(a)\; \forall x\in \dot{V}(a)\cap D\; f(x)\neq B$ 

Proof. Для

$$0 < \varepsilon < \rho(A, B) \ \exists V(a) \ \forall x \in \dot{V}(a) \cap D \ f(x) \in U_{\varepsilon}(A)$$

 $U_{\varepsilon}(A)$  не содержит B.

 $\mathit{Спедствие}.\ f:D\subset X\to\mathbb{R},$  a – пред. точка,  $\lim_{x\to a}f(x)=A>0\ \ B=0$ 

$$\exists \dot{V}(a) \cap D : f(x) \neq 0$$

В доказательстве  $0 < \varepsilon < A$   $f(x) \in U_{\varepsilon}(A) = (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ 

#### Теорема 5. Об арифметических свойствах предела

 $f,g:D\subset X o Y$ , X — метрич. пространство, Y — норм. пространство над  $\mathbb{R}$ , a пред. точка D

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \lim_{x \to \varphi} g(x) = B$$
$$\lambda : D \to \mathbb{R}, \lim_{x \to \varphi} \lambda(x) = \lambda_0$$

$$\lambda: D \to \mathbb{R}, \lim_{x \to \omega} \lambda(x) = \lambda_0$$

Тогда:

1. 
$$\exists \lim_{x \to a} f(x) \pm g(x)$$
  $u \lim_{x \to a} f(x) \pm g(x) = A \pm B$ 

2. 
$$\lim_{x \to a} \lambda(x) f(x) = \lambda_0 = A$$

3. 
$$\lim_{x \to a} ||f(x)|| = ||A||$$

4. Для случая  $Y=\mathbb{R}$  и для  $B\neq 0$ 

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$

 $\frac{f}{g}$  задано на множестве  $D'=D\setminus\{x:g(x)=0\}$ 

a — np. точка D' по теореме о стабилизации знака  $\exists V(a) \ \forall x \in V(a) \cap D \ g(x)$  того же знака, что и B, т.е.  $g(x) \neq 0$ 

$$\dot{V}(a)\cap D'=\dot{V}(a)\cap D\Rightarrow a$$
 — пред. точка для  $D'$ 

*Proof.* По Гейне.  $\forall (x_n)$ :

• 
$$x_n \to a$$

• 
$$x_n \in D$$

• 
$$x_n \neq a$$

 $f(x_n) + g(x_n) \rightarrow^? A + B$  верно по теореме последовательности.

Аналогично прочие пункты, кроме 4.

$$f(x_n) \to A$$

$$g(x_n) o B 
eq 0 \Rightarrow \exists n_0 \ \forall n > n_0 \ g(x_n) 
eq 0$$
 корректно задано при  $n > n_0$ .

M3137y2019 November 4, 2019 Примечание. Для  $\overline{\mathbb{R}}$ 

Если  $Y=\mathbb{R}$ , можно "разрешить" случай  $A,B=\pm\infty$ 

Тогда 3. тривиально, 1., 2. и 4. верно, если выражения  $A \pm B$ ,  $\lambda_0 A$ ,  $\frac{A}{B}$  корректны.

Докажем 1. как в теореме об арифметических свойствах последовательности.

$$\lim_{\substack{x \to a \\ 0 \ \forall x \in D \cap V_{\delta_2}(a)}} f(x) = +\infty; \lim_{\substack{x \to a \\ x \to a}} g(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall E_1 \ \exists \delta_1 > 0 \ \forall x \in D \cap V_{\delta_1}(a) \ f(x) > E_1 \ \forall E_2 \ \exists \delta_2 > 0 \ \forall x \in D \cap V_{\delta_2}(a) \ g(x) > E_2$$

Это доказательство не будет спрашиваться.

## 2 Компактные множества

Теорема 6. О простейших свойствах компактных множеств.

$$(X, \rho)$$
 — метрическое пространство,  $K \subset X$ 

1. 
$$K - \kappa$$
омп.  $\Rightarrow K - 3$ амкн.,  $K - 0$ гр.

2. 
$$X$$
 — комп,  $K$  — замкн.  $\Rightarrow K$  — комп.

*Proof.* 1. 
$$?K$$
 — замкн.  $?K^c$  — откр.

$$a \notin K$$
, проверим, что  $\exists U(a) \subset K^c$ 

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, \frac{1}{2} \rho(x, a))$$
 — откр. покрытие

$$K$$
 — комп.  $\Rightarrow \exists x_1 \dots x_n \quad K \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \frac{1}{2}\rho(x_i, a))$  — открытое покрытие

$$r := \min(\frac{1}{2}\rho(x_1, a)) \dots \frac{1}{2}\rho(x_n, a)))$$

B(a,r) не пересекается ни с одним  $B(x_i, \frac{1}{2}\rho(x_i,a)) \Rightarrow B(a,r) \subset K^c$ 

$$?K - \text{orp.}$$

$$b \in X$$

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} B(b,n) = X$$

$$K$$
 — комп.  $\Rightarrow K \subset \bigcup_{n=1}^m \Rightarrow K \subset B(b, \max(n_1 \dots n_m))$ 

2. 
$$?K - \text{комп}$$

$$\begin{cases} K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_{\alpha}, G_{\alpha} - \text{откр.} \\ K - \text{замкн.}, K^{c} - \text{откр.} \end{cases} \Rightarrow K^{c} \cup \bigcup_{\alpha \in A} G_{\alpha} - \text{откр. покрытие } X \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X \subset ($$
может быть  $K^c) \cup igcup_{i=1}^n G_{lpha_i}$ 

Лемма 1. О вложенных параллелепипедах.

$$[a,b]=\{x+\mathbb{R}^m: \forall i=1\dots m \ a_i\leq x_i\leq b_i\}$$
 — параллелепипед.

 $[a^1,b^1]\supset [a^2,b^2]\supset\ldots$  — бесконечная последовательность параллелепипедов.

Тогда 
$$\bigcap_{i=1}^{+\infty} [a^i, b^i] \neq \emptyset$$

$$\mathit{Если}\ diam[a^n,b^n] = ||b^n-a^n|| o 0$$
, тогда  $\exists ! c \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} [a^i,b^i]$ 

M3137y2019 November 4, 2019

Proof. Покоординатное

 $\forall i=1\dots m \quad [a_i^1,b_i^1]\supset [a_i^2,b_i^2]\supset \dots \quad \exists c_i\in \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_i^n,b_i^n]. \ c=(c_1\dots c_m)$  — общая точка всех параллелепипедов.

$$|a_i^n - b_i^n| \le ||a^n - b^n|| \to 0 \Rightarrow_{\mathsf{T. Kahtopa}} \exists ! c_i \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_i^n, b_i^n] \Rightarrow \exists ! c = (c_1 \dots c_m)$$

**Пемма 2.** [a,b] — компактное множество в  $\mathbb{R}^m$ 

$$[a,b]\subset \bigcup_{lpha\in A}^{}G_lpha-$$
 откр. в  $\mathbb{R}^m$ 

*Proof.* Докажем, что 
$$\exists$$
 кон.  $\alpha=(\alpha_1\dots\alpha_n):[a,b]\subset\bigcup\limits_{i=1}^nG_{\alpha_i}$ 

Допустим, что не ∃

 $[a^1,b^1]:=[a,b]\Rightarrow [a^1,b^1]$  нельзя покрыть кон. набором

 $[a^2,b^2]:=$  делим  $[a^1,b^1]$  на  $2^m$  частей, берем любую "часть", которую нельзя покрыть конечным набором  $G_\alpha$ 

:

$$diam = [a^n, b^n] = \frac{1}{2} diam[a^{n-1}, b^{n-1}] = \frac{1}{2^{n-1}} diam[a^1, b^1]$$

$$\exists c \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a^n, b^n]$$

$$c \in [a, b] \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_{\alpha}$$

$$\exists \alpha_0 \quad c \in G_{\alpha_0}$$
 — откр.

$$\exists U_{\varepsilon}(c) \subset G_{\alpha_0}$$

$$\exists n \quad diam[a^n,b^n] \ll \varepsilon$$

и тогда 
$$[a^n,b^n]\subset U_{\varepsilon}(c)\subset G_{\alpha_0}$$

Примечание.  $x_n \to a$ 

 $\forall$  подпосл.  $n_k$   $x_{n_k} \to a$ 

Примечание.  $\{n_k\} \cap \{m_k\} = \mathbb{N}$ 

$$\begin{cases} x_{n_k} \to a \\ x_{m_k} \to a \end{cases} \Rightarrow x_n \to a$$

Определение. Секвенциально компактным называется множество  $A\subset X$  :

$$\int \forall$$
 посл.  $(x_n)$  точек  $A$ 

 $iggr\}$   $\exists$  подпосл.  $x_{n_k}$ , которая сходится к точке из A

M3137y2019 November 4, 2019

## **Теорема** 7. *О характеристике компактов в* $\mathbb{R}^m$ .

 $K \subset \mathbb{R}^m$ . Эквивалентны следующие утверждения:

- 1. K замкнуто и ограничено
- 2. K компактно
- 3. K секвенциально компактно

### *Proof.* Докажем $1 \Rightarrow 2$

K — orp.  $\Rightarrow K$  содержится в [a, b]

K — замкн. в  $\mathbb{R}^m \Rightarrow K$  — замкн. в [a,b]

Т.к. [a,b] — комп., по простейшему свойству компактов K — комп.

#### *Proof.* Докажем $2 \Rightarrow 3$

 $\forall (x_n)$  — точки из K.

?сходящаяся последовательность

Если множество значений  $D=\{x_n, n\in \mathbb{N}\}$  — конечно, то  $\exists$  сход. подпосл. очевидно.

Пусть D — бесконечно

Если D имеет предельную точку, то  $x_{m_k} \to a$ 

Если D — бесконечно и не имеет предельных точек,  $K\subset\bigcup_{x\in K}B(x,\varepsilon_x)$ , радиус такой,

что в этом шаре нет точек D, кроме x (его может тоже не быть)

M3137y2019 November 4, 2019