Несколько классических неравенств

1. Неравенство Йенсена

f — выпуклая на $\langle a, b\rangle$. Тогда

$\forall x_1 \dots x_n \in \langle a, b\rangle \ \forall \alpha_1 \dots \alpha_n : \alpha_i \geq 0 \ \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1 \quad f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)$

Доказательство. Для $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ тривиально.

$$\min x_i \leq x^* := \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \leq (\alpha_1 + \dots + \alpha_n) \max(x_i) = \max(x_i)$$
$$\Rightarrow x^* \in \langle a, b\rangle$$

В x^* можно провести опорную прямую $y = kx + b$

$$f(x^*) = kx^* + b = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i k x_i) + b = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (k x_i + b) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

□

Следствие. Неравенство Коши.

$$a_i > 0 \quad \frac{1}{n} \sum a_i \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

Доказательство. $f(x) = \ln x$ — вогн., $\alpha_i = \frac{1}{n}$, по неравенству Йенсена:

$$\ln\left(\frac{1}{n} a_1 + \dots + \frac{1}{n} a_n\right) \geq \frac{1}{n} \ln a_1 + \dots + \frac{1}{n} \ln a_n$$

$$\ln\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right) \geq \frac{1}{n} \ln(a_1 \cdots a_n)$$
$$\ln\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right) \geq \ln(a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$$
$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq (a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

□

2. Интегральное неравенство Йенсена

- f — выпуклая на $\langle A, B\rangle$
- $\varphi : [a, b] \to \langle A, B\rangle$ — непрерывная
- $\lambda : [a, b] \to [0, +\infty)$ — непрерывная *(для кусочно-непрерывной тоже верно)*
- $\int_a^b \lambda(t) dt = 1$

Тогда

$$f\left(\int_a^b \lambda(t) \varphi(t) dt\right) \leq \int_a^b \lambda(t) f(\varphi(t)) dt$$

Доказательство. $m := \inf \varphi, M := \sup \varphi$

$$m \le m \int_a^b \lambda(t) \le \int_a^b \lambda(t)\varphi(t) \le M \int_a^b \lambda(t) = M$$

$$x^* := \int_a^b \lambda(t)\varphi(t)dt \Rightarrow x^* \in \langle A, B\rangle$$

Для $m = M$ тривиально.
$y = kx + b$ — опорная прямая в точке x^* графика f.

$$f(x^*) = kx^* + b = k\int_a^b \lambda\varphi + b\int_a^b \lambda = \int_a^b \lambda(t)(k\varphi(t) + b)dt \le$$

$$\le \int_a^b \lambda(t)f(\varphi(t))dt$$

□

Пример. Неравенство Коши для интегралов:

$$f > 0, f \in C[a, b] \quad \exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Правая часть — среднее арифметическое f на $[a, b]$ по интегральным суммам.
Левая часть — среднее геометрическое.

$$\exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx\right) = \exp\left(\sum \frac{1}{n}\ln f(x_i)\right) = \prod_{i=1}^n \exp\left(\frac{\ln(f(x_i))}{n}\right) = \sqrt[n]{f(x_i)\cdots f(x_n)}$$

Возьмём логарифм от искомого неравенства:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx \le \ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right)$$

Подставим в интегральное неравенство Йенсена:

- $f \leftrightarrow \ln$
- $\lambda(t) \leftrightarrow \frac{1}{b-a}$
- $\varphi \leftrightarrow f$

3. Неравенство Гёльдера

$a_1 \dots a_n, b_1 \dots b_n > 0, p > 1, q > 1 \;\; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \le \left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum b_i^q\right) \frac{1}{q}$$

Частный случай при $p = q = 2$ — неравенство Коши-Буняковского.

Доказательство. $f(x) = x^p, (p > 1)$ — строго выпуклая $\Rightarrow f'' = p(p-1)x^{p-2} > 0$
По Йенсену $(\sum \alpha_i x_i)^p \le \sum \alpha_i x_i^p$

$$\text{Левая часть}^{\frac{1}{p}} = \sum \frac{b_i^q}{\sum b_i^q} a_i b_i^{\frac{-1}{p-1}} \sum b^q = \sum a_i b_i$$

$$\text{Правая часть} = \sum \frac{b_i^q}{\sum b_i^q} a_i^p b_i^{-q} \left(\sum b_j^q\right)^p = \left(\sum a_i^p\right) \left(\sum b_j^q\right)^{\frac{p}{q}}$$

$$\text{Правая часть}^{\frac{1}{p}} = \left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum b_j^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

□

Общий вид: $a_i, b_i \in \mathbb{R}$

$$\left|\sum a_i b_i\right| \le \left(\sum |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

4. Интегральное неравенство Гёльдера

$p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad f, g \in C[a, b]$. Тогда

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Неравенство КБШ в пространстве функций — частный случай этого неравенства.

Доказательство. По интегральным суммам:

$$x_i := a + i\frac{b-a}{n} \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad a_i := f(x_i)(\Delta x_i)^{\frac{1}{p}} \quad b_i = g(x_i)(\Delta x_i)^{\frac{1}{q}}$$

$$a_i b_i = f(x_i)g(x_i)(\Delta x_i)$$

$$\left|\sum_{i=1}^n f(x_i)g(x_i)\Delta x_i\right| \le \left(\sum |f(x_i)|^p \Delta x_i\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |g(x_i)|^q \Delta x_i\right)^{\frac{1}{q}}$$

Предельный переход доказывает искомое. □

5. Неравенство Минковского

$p \ge 1, \;\; a_i, b_i \in \mathbb{R}$

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Это неравенство треугольника для нормы $||a||_p = (\sum |a_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

Доказательство. $p = 1$ тривиально, $|a_i + b_i| \le |a_i| + |b_i|$
Докажем для положительных a_i, b_i, другие случаи сводятся к этому.
По неравенству Гёльдера для $q = p/(p-1)$:

$$\sum a_i(a_i + b_i)^{p-1} \le \left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum (a_i + b_i)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\sum b_i(a_i + b_i)^{p-1} \le \left(\sum b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum (a_i + b_i)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

Сложим эти два неравенства:

$$\sum(a_i+b_i)^p \le \left(\left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\right)\left(\sum(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left(\sum(a_i+b_i)^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \le \left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left(\sum(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

□

6. Интегральное неравенство Минковского

$f, g \in C[a,b], p \ge 1$

$$\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Доказательство. Оставлено как упражнение читателю. □

Теорема 1. Признак Коши
$a_n \ge 0, K_n := \sqrt[n]{a_n}$. Тогда:
Lite:

1. Если $\exists q < 1 : K_n \le q$, начиная с некоторого места *(НСНМ)* $(\exists N : \forall n > N) \Rightarrow \sum a_n$ сходится.
2. $K_n \ge 1$ для бесконечного множества $\Rightarrow \sum a_n$ расходится.

Pro: $K := \overline{\lim} K_n$

1. $K < 1 \Rightarrow \sum a_n$ сходится
2. $K > 1 \Rightarrow \sum a_n$ расходится

Доказательство. Lite:

1. НСНМ $\sqrt[n]{a_n} \le q \Leftrightarrow a_n \le q^n$, q_n сх. $\Rightarrow \sum a_n$ сх.
2. $\sqrt[n]{a_n} \ge 1 \Leftrightarrow a_n \ge 1 \Rightarrow a_n \not\to 0 \Rightarrow \sum a_n$ расх.

Pro:

1. По техническому описанию $\overline{\lim}$ $\exists N \ \ \forall n > N \ \ K_n < q \Rightarrow$ по Lite.1 сходится.
2. $l = \overline{\lim} K_n > 1, 1 = l - \varepsilon$. Тогда $K_n \ge 1$ для бесконечного множества $n \Rightarrow$ по Lite.2 расходится.

□

Теорема 2. Признак Даламбера.
$a_n > 0, D_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$
Lite:

1. $\exists q < 1 : D_n < q$ НСНМ $\Rightarrow \sum a_n$ сх.
2. $D_n \ge 1$ НСНМ $\Rightarrow \sum a_n$ расх.

Pro: $D := \lim D_n$

1. $D < 1 \Rightarrow \sum a_n$ сх.
2. $D > 1 \Rightarrow \sum a_n$ расх.

Доказательство. Lite:

1. $\exists N : \frac{a_{N+1}}{a_N} < q, \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < q, \dots$
$$\frac{a_n}{a_N} < q^{n-N}$$
$$a_n < q^n \left(\frac{a_N}{q^N}\right)$$
$\sum q^n$ сх. $\Rightarrow \sum a_n$ сх.
2. $D_n \geq 1 \Leftrightarrow a_{n+1} \geq a_n$, при $n > N$ $a_n \geq a_N \Rightarrow a_n \geq A_N \Rightarrow a_n \not\to 0$. Также можно аналогично пункту 1.

Pro:

1. $q := \frac{1+D}{2}$. По определению предела $\varepsilon := q - D$ $\exists N$ $\forall n > N$ $D_n < q \xRightarrow{Lite1} \sum a_n$ сх.
2. $\varepsilon := D - 1$ $\exists N$ $\forall n > N$ $D_n > 1 \xRightarrow{Lite2} \sum a_n$ расх.

□

Лемма 1. $a_n, b_n > 0$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ *НСНМ.*
Тогда:

1. $\sum b_n$ *сх.* $\Rightarrow \sum a_n$ *сх.*
2. $\sum a_n$ *расх.* $\Rightarrow \sum b_n$ *расх.*

Доказательство. Будем игнорировать “НСНМ”
$$\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1} \quad \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2} \quad \dots$$
$$a_n \leq b_n \frac{a_1}{b_1}$$
По признаку сравнения все работает. □

Теорема 3. Признак Раабе
$a_n > 0, R_n := n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$. Тогда:

1. $\exists r > 1$ $R_n \geq r$ НСНМ $\Rightarrow \sum a_n$ сх.
2. $R_n \leq 1$ НСНМ $\Rightarrow \sum a_n$ сх.

Еще следствие

Доказательство. 1. $R_n \geq r \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 + \frac{r}{n}$
$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^s - 1}{\frac{1}{n}} < r \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s < 1 + \frac{r}{n}$$
$$b_n := \frac{1}{n^s} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\frac{a_n}{a_{n+1}}} \leq \frac{1}{1+\frac{r}{n}} < \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^s} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$
$\sum b_n$ сх. $\Rightarrow \sum a_n$ сх. по лемме 1.

2. $R_n \leq 1 \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$$

$b_n = \frac{1}{n}$ расх. $\Rightarrow \sum a_n$ расх.

$\square$