1.3 Алгебра. Примеры. Изоморфизм алгебр.

Алгебра — модуль над коммутативным кольцом с единицей, являющийся кольцом.
Кольцо — множество, на котором заданы бинарные операции $+$ и $\cdot$ с следующими свойствами:

1. $a + b = b + a$
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$
3. $\exists 0 \in R : \forall x \in R : x + 0 = 0 + x = x$
4. $\forall x \in R : \exists(-x) \in R : x + (-x) = (-x) + x = 0$
5. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
6. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
7. $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$

Коммутативное кольцо — кольцо с коммутативным умножением: $a \cdot b = b \cdot a$
Кольцо с единицей — кольцо с нейтральным элементом по умножению: $\exists 1 \in R : a \cdot 1 = a$
Модуль над кольцом *(коммутативным, с единицей)* R — множество M с операциями:

1. $+ : M \times M \to M$
   (a) $a + b = b + a$
   (b) $a + (b + c) = (a + b) + c$
   (c) $\exists 0 \in R : \forall x \in R : x + 0 = 0 + x = x$
   (d) $\forall x \in R : \exists(-x) \in R : x + (-x) = (-x) + x = 0$
2. $\cdot : M \times R \to M$
   (a) $(r_1 r_2)m = r_1(r_2 m)$
   (b) $1m = m$
   (c) $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$
   (d) $(r_1 + r_2)m = r_1 m + r_2 m$

Примеры:

1. $\mathbb{R}$
2. $\mathbb{C}$
3. $\mathbb{H}$
4. Многочлены

Изоморфизм алгебр — биекция $F : A \to B$, где A и B — алгебры, сохраняющая “+” и “·”:

1. $F(kx) = kF(x)$
2. $F(x + y) = F(x) + F(y)$
3. $F(xy) = F(x)F(y)$

Из этого следует, что $F(0_X) = 0_Y$

1.4 Алгебра операторов и матриц.

Умножение ЛОП: $(\mathcal{B} \cdot \mathcal{A})x = \mathcal{B}(\mathcal{A}x)$
Умножение матриц: $(A \cdot B)_{ik} = \sum\limits_j a_{ij} b_{jk}$

Теорема 1.

$$\underbrace{\mathcal{C}}_{C} = \underbrace{\mathcal{B}}_{B} \underbrace{\mathcal{A}}_{A} \Leftrightarrow C = BA$$

Доказательство.

$$\mathcal{C}e_i = \mathcal{B}(\mathcal{A}e_i) = \mathcal{B}\left(\sum_j a_{ji} e_j\right) = \sum_j a_{ji} \mathcal{B} e_j = \sum_j a_{ji} \sum_k b_{kj} e_k$$

$$c_{il} = (\mathcal{C}e_i)_l = \sum_j a_{ji} b_{lj} \Rightarrow C = BA$$

□

Пространство ЛОП $\mathcal{F} : X \to X$ — алгебра, пространство квадратных матриц $\mathbb{R}_n^n$ — алгебра.

1.5 Обратная матрица: критерий обратимости, метод Гаусса вычисления обратной матрицы.

В алгебре A выполняется $a_1 \cdot a_2 = e$, где e — единичный элемент матрицы. Тогда:

1. a_1 — **левый обратный** элемент для a_2
2. a_2 — **правый обратный** элемент для a_1

Если a_1 — и левый, и правый обратный к a_2, то он называется **обратным** элементом к a_2.

Теорема 2. $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$