

# 1 Определения

## 1.1 Локальный максимум, минимум, экстремум

**Определение.**  $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in E$  — локальный максимум функции, если

$$\exists U(x_0) \quad \forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \leq f(x_0)$$

Аналогично определяется минимум.

**Определение.** Экстремум — точка минимума либо максимума.

## 1.2 ! Первообразная, неопределенный интеграл

$$F, f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$$

$F$  — первообразная  $f$  на  $\langle a, b \rangle$

$$\forall x \in \langle a, b \rangle \quad F'(x) = f(x)$$

**Неопределенный интеграл**  $f$  на  $\langle a, b \rangle$  — множество всех первообразных  $f$ :

$$\{F + c, c \in \mathbb{R}\}, \text{ где } F \text{ — первообразная}$$

Обозначается  $\int f = F + c$  или  $\int f(x)dx$

## 1.3 Теорема о существовании первообразной

$f \in C^0(\langle a, b \rangle)$  тогда у  $f$  существует первообразная.

Теорема о существовании первообразной — следствие теоремы Барроу.

## 1.4 ! Таблица первообразных

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C \text{ — длинный логарифм}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

## 1.5 Равномерная непрерывность

$f : \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  **равномерно непрерывна** на  $\langle a, b \rangle$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle : |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Или для метрического пространства:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \rho(x_1, x_2) < \delta \implies \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

Отличие от непрерывности на отрезке в том, что  $\delta$  зависит только от  $\varepsilon$  и подходит для всех  $x_1, x_2$ .

## 1.6 Площадь, аддитивность площади, ослабленная аддитивность

$\mathcal{E}$  — множество всех ограниченных фигур в  $\mathbb{R}^2$  (“фигура” = подмножество  $\mathbb{R}^2$ )

**Площадь** это  $\sigma : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , такое что:

1.  $A \in \mathcal{E} \implies A = A_1 \sqcup A_2 \implies \sigma A = \sigma A_1 + \sigma A_2$  (конечная аддитивность)
2.  $\sigma([a, b] \times [c, d]) = (d - c)(b - a)$

$\sqcup$  — **дизъюнктное объединение**; если  $x \in A_1$  и  $x \in A_2$ , то  $x$  “дважды  $\in$ ”  $A_1 \sqcup A_2$

**Ослабленная площадь**  $\sigma : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$ :

1. Монотонна
2. Нормирована
3. Ослабленная аддитивность:  $E \in \mathcal{E} \implies E = E_1 \cup E_2 \implies E_1 \cap E_2$  — вертикальный отрезок,  $E_1$  и  $E_2$  лежат каждый в своей полуплоскости относительно этого отрезка  $\implies \sigma E = \sigma E_1 + \sigma E_2$

Почему отрезок вертикальный? В конспекте СПбГУ допускается горизонтальный.

Что значит монотонность для площади?

## 1.7 ! Определенный интеграл

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; f \geq 0$

Под графиком  $(\Pi)(f, [a, b]) = \{(x, y) : x \in [a, b]; 0 \leq y \leq f(x)\}$

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , непр.

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x) dx := \sigma \Pi(f_+, [a, b]) - \sigma \Pi(f_-, [a, b])$$

## 1.8 Положительная и отрицательная срезки

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

$f_+ := \max(f, 0)$  — **положительная срезка**

$f_- := \max(-f, 0)$  — **отрицательная срезка**

## 1.9 Среднее значение функции на промежутке

Среднее значение функции на промежутке:

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

## 1.10 Кусочно-непрерывная функция

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , **кусочно непрерывна**

$f$  — непр. на  $[a, b]$  за исключением конечного числа точек, в которых разрывы I рода

*Пример.*  $f(x) = [x], x \in [0, 2020]$

## 1.11 Почти первообразная

$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  — **почти первообразная** кусочно непрерывной функции  $f$ :

$F$  — непр. и  $\exists F'(x) = f(x)$  всюду, кроме конечного числа точек

*Пример.*  $f = \operatorname{sign} x, x \in [-1, 1]$

$F := |x|$

## 1.12 Функция промежутка, аддитивная функция промежутка

$\operatorname{Segm}\langle a, b \rangle = \{[p, q] : [p, q] \subset \langle a, b \rangle\}$  — множество всевозм. отрезков, лежащих в  $\langle a, b \rangle$

**Функция промежутка**  $\Phi : \operatorname{Segm}\langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

**Аддитивная функция промежутка:**  $\Phi$  — функция промежутка и

$$\forall [p, q] \in \operatorname{Segm}\langle a, b \rangle \quad \forall r : p < r < q \quad \Phi([p, q]) = \Phi([p, r]) + \Phi([r, q])$$

## 1.13 Плотность аддитивной функции промежутка

**Плотность аддитивной функции промежутка:**  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  — плотность  $\Phi$ , если:

$$\forall \delta \in \operatorname{Segm}\langle a, b \rangle \quad \inf_{x \in \delta} f(x) \cdot \operatorname{len}_\delta \leq \Phi(\delta) \leq \sup f \cdot \operatorname{len}_\delta$$

## 1.14 Выпуклая функция

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  — **выпуклая**

$$\forall x, y \in \langle a, b \rangle \quad \forall \alpha \in [0, 1] \quad f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

*Примечание.*  $f$  — выпуклая  $\Leftrightarrow$  всякая хорда графика  $f$  расположена “выше” графика (*нестрого выше*)  $\Leftrightarrow \operatorname{НГ}(f, \langle a, b \rangle) \setminus \{(x, y) : x \in \langle a, b \rangle \quad y \geq f(x)\}$

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  — **строго выпуклая**

$$\forall x, y \in \langle a, b \rangle \quad \forall \alpha \in (0, 1) \quad f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

### 1.15 Выпуклое множество в $\mathbb{R}^m$

$A \subset \mathbb{R}^m$  — **выпуклое множество** в  $\mathbb{R}^m$ , если

$$\forall x, y \in A, \alpha \in [0, 1] \quad \alpha x + (1 - \alpha)y \in A$$

Это определение с вики

### 1.16 Надграфик

Надграфик функции  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  это множество  $\{(x, y) \mid x \in \langle a, b \rangle, y \geq f(x)\}$

### 1.17 Опорная прямая

$A \subset \mathbb{R}^2$  — вып.  $l \subset \mathbb{R}^2$  — прямая

$l$  — **опорная прямая** к  $A$ , если:

1.  $A$  содержится в одной полуплоскости относительно  $l$
2.  $l \cap A \neq \emptyset$

### 1.18 Гладкий путь, вектор скорости, носитель пути

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  — непр.

$\gamma(a)$  — начало;  $\gamma(b)$  — конец

$$\gamma : t \mapsto \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ \vdots \\ \gamma_m(t) \end{pmatrix}; \gamma_i \text{ — коорд. функции}$$

Если все  $\gamma_i \in C^1[a, b]$ , то  $\gamma$  — **гладкий путь**.

$C_\gamma := \gamma([a, b])$  — **носитель пути**.

Вектор скорости:

$$\gamma'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\gamma(t + \Delta t) - \gamma(t)}{\Delta t} = \lim \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1(t + \Delta t) - \gamma_1(t)}{\Delta t} \\ \vdots \\ \frac{\gamma_m(t + \Delta t) - \gamma_m(t)}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \gamma'_2(t) \\ \vdots \\ \gamma'_m(t) \end{pmatrix}$$

### 1.19 Длина гладкого пути

Длина пути — функция  $l$ , заданная на множестве гладких путей в  $\mathbb{R}^m$ , такая что:

1.  $l \geq 0$
2.  $l$  — аддитивна:  $\forall [a, b] \quad \forall \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \forall c \in (a, b) \quad l(\gamma) = l(\gamma|_{[a, c]}) + l(\gamma|_{[c, b]})$
3.  $\forall \gamma, \tilde{\gamma}$  — гладкие пути,  $C_\gamma, C_{\tilde{\gamma}}$  — носители путей  
Если  $\exists T : C_\gamma \rightarrow C_{\tilde{\gamma}}$  — сжатие:  $(\forall M, M' \quad \rho(T(M), T(M')) \leq \rho(M, M'))$ , тогда  $l(\tilde{\gamma}) \leq l(\gamma)$
4. Нормировка:  $\gamma$  — гладкий путь,  $\gamma(t) = vt + u$ ;  $u, v \in \mathbb{R}^m$ :

$$l(\gamma) = \rho(\gamma(a), \gamma(b))$$

## 1.20 Формулы для длины пути: в $\mathbb{R}^m$ , в полярных координатах, длина графика

### 1.20.1 В $\mathbb{R}^m$

$$\gamma \in C^1([a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m)$$

$$\text{Тогда } l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

### 1.20.2 В полярных координатах

Длина кривой  $r = r(\varphi)$  в полярных координатах,  $\varphi \in [\alpha, \beta]$

$$x = r(\varphi) \cos \varphi \quad y = r(\varphi) \sin \varphi$$

$$\gamma'(\varphi) = \begin{pmatrix} r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi \\ r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\|\gamma'(\varphi)\| = \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2 - 2r'(\varphi)r(\varphi) \cos \varphi \sin \varphi + 2r'(\varphi)r(\varphi) \cos \varphi \sin \varphi}$$

$$\|\gamma'(\varphi)\| = \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2}$$

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi$$

### 1.20.3 Длина графика

Длина графика  $y = f(x)$ ,  $f \in C^1$  на отрезке  $[a, b]$

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \quad \gamma'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix} \quad \|\gamma'(x)\| = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

## 1.21 Вариация функции на промежутке

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$$

$\tau = \{t_0 \dots t_n\}$  — дробление отрезка.

Тогда **вариация функции**  $\gamma$  на отрезке  $[a, b]$  это  $l$ :

$$l(\gamma) = \sup_{\tau} \left\{ \sum_{i=1}^n \rho(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \right\}$$

## 1.22 Дробление отрезка, ранг дробления, оснащение

**Дробление отрезка**  $[a, b]$  это разбиение отрезка на  $n$  частей следующим образом:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b \quad [x_{i-1}, x_i]$$

**Ранг (мелкость)** дробления — длина самого длинного из отрезков дробления:

$$\tau = \{x_0 \dots x_n\} \quad |\tau| = \max(x_i - x_{i-1})$$

**Оснащение** — множество точек  $\{\xi_1 \dots \xi_n\} : \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

### 1.23 Риманова сумма

Интегральная (**риманова**) сумма для разбиения  $\{x_i\}$ , произвольной функции  $f$  и оснащения  $\{\xi_i\}$  это следующая сумма:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

### 1.24 Постоянная Эйлера

$\gamma$  — постоянная Эйлера.  $\approx 0.577$

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)$$

### 1.25 Допустимая функция

$f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R} \quad -\infty < a < b \leq +\infty$

$f$  допустима, если  $f$  — кусочно-непрерывна на  $[a, A] \quad \forall A \in (a, b)$

### 1.26 ! Несобственный интеграл, сходимость, расходимость

$$\Phi(A) := \int_a^A f$$

$$? \exists \lim_{A \rightarrow b-0} \Phi(A)$$

- Если да, то это **несобственный интеграл**  $\int_a^{\rightarrow b} f dx$ .
- Если этот предел конечный, то тот несобственный интеграл **сходится**.
- Если этот предел бесконечный или не существует, то несобственный интеграл **расходится**.

### 1.27 Критерий Больцано–Коши сходимости несобственного интеграла

$$\lim_{A \rightarrow b-0} \int_a^A \text{кон.} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta \in (a, b) \quad \forall A, B \in (\Delta, b) \quad \left| \int_A^B f \right| < \varepsilon$$

*Доказательство.* Тривиально из определения предела. □

### 1.28 Гамма функция Эйлера

$\Gamma$  — гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$$

### 1.29 ! Верхний и нижний пределы

- Верхний предел  $x_n$ :  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n := \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$
- Нижний предел  $x_n$ :  $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n := \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n$

### 1.30 Частичный предел

Частичный предел вещественной последовательности  $x_n$  — предел вдоль подпоследовательности  $n_k$ :

$$n_k \rightarrow +\infty, n_1 < n_2 < \dots \quad \lim x_{n_k} \in \overline{\mathbb{R}}$$

### 1.31 ! Абсолютно сходящийся интеграл, ряд

$f$  — допустимая функция на  $[a, b)$

$\int_a^b f$  — абсолютно сходится, если:

1.  $\int_a^b f$  сходится
2.  $\int_a^b |f|$  — сходится

Ряд  $A$  абсолютно сходится, если 1 и 2:

1.  $\sum a_n$  сх.
2.  $\sum |a_n|$  сх.

### 1.32 Числовой ряд, сумма ряда, сходимость, расходимость

$a_1 + a_2 + \dots, \sum_{i=1}^{+\infty} a_i$  — числовой ряд ( $a_i \in \mathbb{R}$ )

$\forall N \in \mathbb{N} \quad S_n := \sum_{i=1}^n a_i$  — частичная сумма

Если  $\exists \lim_{N \rightarrow +\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$ , ряд сходится, иначе ряд расходится.

### 1.33 $N$ -й остаток ряда

$\sum_{k=N}^{+\infty} a_k$  —  $N$ -й остаток ряда

### 1.34 Критерий Больцано–Коши сходимости числового ряда

$$\sum a_n \text{ сходится} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall k > N \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad |a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{k+m}| < \varepsilon$$

Доказательство. Тривиально. □

### 1.35 Произведение рядов

$\sum a_k, \sum b_k$

$\gamma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  — биекция,  $\gamma(k) = (\varphi(k), \psi(k))$

Произведение рядов  $A$  и  $B$  — ряд  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)}$

### 1.36 Произведение степенных рядов

$x \in \mathbb{R}$ ,  $x$  — фиксированный

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \sum_{j=0}^{+\infty} b_j x^j = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$$

Это называется произведение степенных рядов.

### 1.37 Скалярное произведение, евклидова норма и метрика в $\mathbb{R}^m$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^m x_i y_i$$

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum x_i^2}$$

$$\rho(x, y) := |x - y|$$

### 1.38 Окрестность точки в $\mathbb{R}^m$ , открытое множество

$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x - a| < r\}$  — открытый шар,  $r$ -окрестность точки  $a$

$a$  — внутренняя точка множества  $D$ , если  $\exists U(a) : U(a) \subset D$ , т.е.  $\exists r > 0 : B(a, r) \subset D$

$D$  — открытое множество, если  $\forall a \in D : a$  — внутренняя точка  $D$

### 1.39 ! Сходимость последовательности в $\mathbb{R}^m$ , покомпонентная сходимость

$\langle x_n \rangle$  — посл. в  $\mathbb{R}^m$ ,  $a \in \mathbb{R}^m$

$$x_n \rightarrow a \Leftrightarrow \forall U(a) \exists N \forall n > N \ x_n \in U(a)$$

Норма и скалярное произведение сохраняют сходимость:

$$x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b \Rightarrow \langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle, |x_n| \rightarrow |a|$$

Сходимость функций:

$$f : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$a$  — предельная точка  $O$ ,  $L \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : 0 < |x - a| < \delta \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

То же самое, но по Гейне:

$$\forall (x_k) : \begin{cases} x_k \in O \subset \mathbb{R}^m \\ x_k \rightarrow a \\ \forall k \ x_k \neq a \end{cases} \quad f(x_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} L$$

Покомпонентная сходимость:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall i : 1 \leq i \leq n : \lim_{x \rightarrow a} f(x)_i = L_i$$

$$x_k \rightarrow a \Leftrightarrow \forall i : 1 \leq i \leq n : x_i^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} a_i$$



### 1.40 ! Предельная точка, замкнутое множество, замыкание

$a$  — предельная точка множества  $D$ , если  $\forall \dot{U}(a) \quad \dot{U}(a) \cap D \neq \emptyset$

$D$  — замкнутое множество, если оно содержит все свои предельные точки.

Замыканием множества  $D$  называется  $\overline{D} = D \cup (\text{множество предельных точек } D)$

### 1.41 Компактность, секвенциальная компактность, принцип выбора Больцано-Вейерштрасса

$K$  компактно, если  $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} \underbrace{G_\alpha}_{\text{откр.}} \Rightarrow K \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$

В  $\mathbb{R}^m$  комп.  $\Leftrightarrow$  замкн. и огр.

Секвенциальная компактность:  $\forall (x_n), x_n \in K \Rightarrow \exists n_k, a \in K : x_{n_k} \rightarrow a$

Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса: если в  $\mathbb{R}^m$   $(x_n)$  — ограниченная последовательность, то у неё существует сходящаяся подпоследовательность.

### 1.42 Координатная функция

$\triangleleft F : X \rightarrow \mathbb{R}^m; x \mapsto F(x) = (F_1(x), \dots, F_m(x))$ , то  $F_1(x) \dots F_m(x)$  — координатные функции отображения  $F$

### 1.43 Двойной предел, повторный предел

$D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$ ,  $a$  — пр. точка  $D_1$ ,  $b$  — пр. точка  $D_2$

$(D_1 \setminus \{a\}) \times (D_2 \setminus \{b\}) \subset D \quad f : D \rightarrow \mathbb{R}$

$\forall x \in D_1 \setminus \{a\} \quad \exists \text{ кон. } \varphi(x) = \lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$

Если  $\exists \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$  — это повторный предел.

Двойной предел:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = A \Leftrightarrow \forall w(A) \quad \exists U(a), V(b) \quad \forall x \in \dot{U}(a), \forall y \in \dot{V}(b) \quad f(x, y) \in W(A)$$

### 1.44 Предел по направлению, предел вдоль пути

Предел по направлению  $l, |l| = 1$ :

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} f(a + tl)$$

Предел вдоль пути?

### 1.45 ! Предел отображения (определение по Коши и по Гейне)

Дано выше. (1.39, стр. 8)

### 1.46 Линейный оператор

Линейное отображение = линейный оператор

$$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n - \text{лин.} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^m \quad f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

### 1.47 ! Отображение бесконечно малое в точке.

Бесконечно малое отображение  $\varphi : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$

$x_0$  — предельная точка  $E$

$\varphi$  — бесконечно малое отображение при  $x \rightarrow x_0$   $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$

### 1.48 $o(h)$ при $h \rightarrow 0$

$o(h)$  (оно же  $o(|h|)$ )

$\varphi : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ ,  $0$  — предельная точка  $E$

$\varphi(h) = o(h)$  при  $h \rightarrow 0$ , если  $\frac{\varphi(h)}{|h|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

По-другому:  $\exists \alpha : E \rightarrow \mathbb{R}^l$  — бесконечно малое при  $h \rightarrow 0$ :

$$\varphi(h) = |h|\alpha(h)$$

### 1.49 ! Отображение, дифференцируемое в точке

$F : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ ,  $a \in \text{Int} E$

$F$  — дифф. в точке  $a$ , если:

$\exists$  лин. оп.  $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$   $\exists$  бесконечно малое  $\alpha : E \rightarrow \mathbb{R}^l$  :

$$F(a+h) = F(a) + Lh + |h|\alpha(h), h \rightarrow 0$$

$$F(a+h) = F(a) + Lh + o(h)$$

$$x := a + h$$

$$F(x) = F(a) + L(x-a) + |x-a|\alpha(x-a)$$

### 1.50 ! Производный оператор, матрица Якоби, дифференциал

Оператор  $L$  из определения — **производный оператор** отображения  $F$  в точке  $a$  (“производная”), обозначается  $F'(a)$ .

Матрица  $F'(a)$  — **матрица Якоби**  $F$  в точке  $a$

Выражение  $F'(a)h$  называется **дифференциалом** отображения  $F$  в точке  $a$ .

Это понимают как:

1. Производный оператор  $h \mapsto F'(a)h$
2. Отображение  $E \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$   $(x, h) \mapsto F'(x) \cdot h$

### 1.51 ! Частные производные

$f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \text{Int} E$

Фиксируем  $k \in \{1 \dots m\}$   $\varphi_k(t) := f(a_1, a_2 \dots t \dots a_m)$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_k(a_k+h) - \varphi_k(a_k)}{h} = \varphi'_k(a_k)$  называется **частной производной** функции  $f$  в точке  $a$

## 1.52 ! Бесконечное произведение

$$\prod_{i=1}^{+\infty} p_n : \prod_N := \prod_{n=1}^N p_n \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_N = P$$

- $P \in (0, +\infty) \Rightarrow \prod_{i=1}^{+\infty} p_n$  сходится к  $P$
- $P = +\infty \Rightarrow \prod_{i=1}^{+\infty} p_n$  расходится к  $+\infty$
- $P = 0 \Rightarrow \prod_{i=1}^{+\infty} p_n$  расходится к  $0$
- $\nexists \lim \prod_n$  : расходится

## 1.53 ! Классы $C^r(E)$

$E \subset \mathbb{R}^m$ , откp. Класс  $C^r(E)$ ,  $r \in \mathbb{N}$ :

$f \in C^r(E)$ , если у  $f$  существуют все частные производные порядка  $\leq r$  на всём  $E$  и они непрерывны.

$C(E)$  — непр. функции =  $C^0(E)$

$C(E) \supsetneq C^1(E) \supsetneq C^2(E) \dots$

## 1.54 Мультииндекс и обозначения с ним

Мультииндекс (для  $\mathbb{R}^m$ ) — вектор  $(k_1, k_2 \dots k_m)$ ,  $k_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

- $|k| := \sum_{i=1}^m k_i$  — высота мультииндекса
- $k! = k_1! k_2! \dots k_m!$
- $x \in \mathbb{R}^m \quad x^k = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$
- $f^{(k)} = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x^k} f = \frac{\partial^{|k|} f}{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}}$

## 2 Теоремы

### 2.1 Критерий монотонности функции. Следствия

$f \in C(\langle a, b \rangle)$ , дифф. в  $(a, b)$

Тогда  $f$  — возрастает  $\Leftrightarrow \forall x \in (a, b) \quad f'(x) \geq 0$

Доказательство. “ $\Rightarrow$ ” По определению  $f' = \frac{f(x+h)-f(h)}{h} \geq 0$

“ $\Leftarrow$ ”  $x_1 > x_2$ , по т. Лагранжа:  $\exists c : f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2) \geq 0$  □

Следствие.  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , тогда:

$f = \text{const} \Leftrightarrow (f \in C(\langle a, b \rangle) - \text{дифф. на } \langle a, b \rangle, f' \equiv 0)$

Следствие.  $f \in C\langle a, b \rangle$ , дифф. на  $(a, b)$ . Тогда:

$f$  строго возрастает  $\Leftrightarrow$  ① и ②

①  $f' \geq 0$  на  $(a, b)$

②  $f' \not\equiv 0$  ни на каком промежутке

Доказательство. " $\Rightarrow$ " очевидно

" $\Leftarrow$ " По лемме о возрастании в отрезке □

Следствие. О доказательстве неравенств

$g, f \in C([a, b])$ , дифф. в  $(a, b)$

$f(a) \leq g(a); \forall x \in (a, b) \quad f'(x) \leq g'(x)$

Тогда  $\forall x \in [a, b] \quad f(x) \leq g(x)$

Доказательство.  $g - f$  — возр.,  $g(a) - f(a) \geq 0$  □

## 2.2 Теорема о необходимом и достаточном условиях экстремума

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in (a, b) \quad f$  — дифф. на  $(a, b)$

Тогда:

1.  $x_0$  — лок. экстремум  $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

2.  $f$  —  $n$  раз дифф. в  $x_0$

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Если  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , то  $\begin{cases} n - \text{чет.} : & x_0 - \text{локальный максимум} \\ n - \text{нечет.} : & x_0 - \text{не экстремум} \end{cases}$

Если  $f^{(n)}(x_0) < 0$ , то  $\begin{cases} n - \text{чет.} : & x_0 - \text{локальный минимум} \\ n - \text{нечет.} : & x_0 - \text{не экстремум} \end{cases}$

Доказательство. 1. т. Ферма

2. ф. Тейлора

$$f(x) = T_n(f, x_0)(x) + o((x - x_0)^n)$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

при  $x$ , близких к  $x_0$ :

$$\text{sign}(f(x) - f(x_0)) = \text{sign} \left( \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \right)$$

Тогда при чётном  $n$

$$\text{sign}(f(x) - f(x_0)) = \text{sign } f^{(n)}(x_0) \Rightarrow x_0 - \text{экстр.}$$

При нечётном  $n$

$$\text{sign}(f(x) - f(x_0)) = \begin{cases} f^{(n)}(x_0), & x > x_0 \\ -f^{(n)}(x_0), & x < x_0 \end{cases} \Rightarrow x_0 - \text{не экстр.}$$

□

### 2.3 Теорема Кантора о равномерной непрерывности

$f : X \rightarrow Y$ ,  $X$  — комп.,  $f$  — непр. на  $X$

Тогда  $f$  — равномерно непр.

*Доказательство.* От противного.

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta, \bar{x}_\delta : \rho(x_\delta, \bar{x}_\delta) < \delta \quad \rho(f(x_\delta), f(\bar{x}_\delta)) \geq \varepsilon$$

$$\delta := \frac{1}{n} \quad \exists x_n, \bar{x}_n : \rho(x_n, \bar{x}_n) < \delta \quad \rho(f(x_n), f(\bar{x}_n)) \geq \varepsilon$$

Выберем  $x_{n_k} \rightarrow \tilde{x}$ ,  $\bar{x}_{n_k} \rightarrow \tilde{\bar{x}}$

$$\rho(\tilde{x}, \tilde{\bar{x}}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \delta = 0 \Rightarrow \tilde{x} = \tilde{\bar{x}}$$

Тогда  $f(x_{n_k}) \rightarrow f(\tilde{x})$ ,  $f(\bar{x}_{n_k}) \rightarrow f(\tilde{\bar{x}})$ , противоречие с  $\rho(f(x_n), f(\bar{x}_n)) \geq \varepsilon$

□

### 2.4 Теорема Брауэра о неподвижной точке

$f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ , непр.

Тогда  $\exists x \in [0, 1]^2 : f(x) = x$ , т.е. есть неподвижная точка.

Обобщенный вариант:

1.  $f : [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]^m$  — непр.
2.  $f : B(0, 1) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow B(0, 1)$  — непр.
3.  $f : S(0, 1) \subset \mathbb{R}^m$  — непр.

*Доказательство.*  $\rho : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$\rho(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$  — непр. в  $[0, 1]^2$

От противного — пусть  $\forall x \in [0, 1]^2 \quad f(x) \neq x$

Тогда  $\forall x \quad \rho(f(x), x) > 0 \quad x \mapsto \rho(f(x), x)$  — непр.,  $> 0$

По т. Вейерштрасса  $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in [0, 1] \quad \rho(f(x), x) \geq \varepsilon$

По т. Кантора для  $f$ : для этого  $\varepsilon \quad \exists \delta < \varepsilon$ :

$$\forall x, \bar{x} : \|x - \bar{x}\| < \delta \quad \|f(x) - f(\bar{x})\| < \varepsilon$$

Можно писать не  $\|\cdot\|$ , а  $\rho$ .

Возьмём  $n : \frac{\sqrt{2}}{n} < \delta$

Построим доску  $Hex(n+1, n+1)$ , где  $n+1$  — число узлов.

Логические координаты узла  $(v_1, v_2) \quad v_1, v_2 \in \{0 \dots n\}$  имеют физические координаты, то есть узлу сопоставляется точка на квадрате с координатами  $(\frac{v_1}{n}, \frac{v_2}{n})$

$K(V) := \min\{i \in \{1, 2\} : |f(\frac{v}{n}) - \frac{v_i}{n}| \geq \varepsilon\}$

Продолжение на следующей лекции.

□

Надо дописать

## 2.5 Теорема о свойствах неопределенного интеграла

$f, g$  имеют первообразную на  $\langle a, b \rangle$ . Тогда

1. Линейность:

$$\int (f + g) = \int f + \int g$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \int \alpha f = \alpha \int f$$

2.  $\varphi \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \left( \int f(x) dx \right) |_{x=\varphi(t)} = F(\varphi(t))$$

Частный случай:  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  :

$$\int f(\alpha t + \beta) dt = \frac{1}{\alpha} F(\alpha t + \beta)$$

3.  $f, g$  — дифф. на  $\langle a, b \rangle$ ;  $f'g$  — имеет первообр.

Тогда  $fg'$  имеет первообразную и

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

Доказательство. 1. Опущено

$$2. (F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

$$3. (fg - \int f'g)' = f'g + fg' - f'g = fg'$$

□

## 2.6 ! Интегрирование неравенств. Теорема о среднем

$f, g \in C[a, b]$   $f \leq g$ . Тогда

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Доказательство.

$$\Pi\Gamma(f_+) \subset \Pi\Gamma(g_+) \Rightarrow \sigma\Pi\Gamma(f_+) \leq \sigma\Pi\Gamma(g_+)$$

$$\Pi\Gamma(f_-) \supset \Pi\Gamma(g_-) \Rightarrow \sigma\Pi\Gamma(f_-) \geq \sigma\Pi\Gamma(g_-)$$

$$\sigma\Pi\Gamma(f_+) - \sigma\Pi\Gamma(f_-) \leq \sigma\Pi\Gamma(g_+) - \sigma\Pi\Gamma(g_-)$$

□

Теорема о среднем:  $f \in C[a, b] \Rightarrow \exists c \in [a, b] : \int_a^b f = f(c)(b - a)$

Доказательство.

$$\min f(b - a) \leq \int_a^b f \leq \max f(b - a)$$

$$\min f \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f \leq \max f$$

$$f(c) := \frac{1}{b - a} \int_a^b f$$

Такое  $c$  существует, т.к.  $f \in C[a, b]$

□

## 2.7 Теорема Барроу

$f \in C[a, b]$   $\Phi$  — интеграл с переменным верхним пределом. Тогда

$$\forall x \in [a, b] \quad \Phi'(x) = f(x)$$

**Доказательство.** Зафиксируем  $x \in [a, b]$   $y > x, y \leq b$

$$\frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = \frac{\int_a^y f - (\int_a^y f + \int_y^x f)}{y - x} = \frac{\int_x^y f}{y - x} \stackrel{\text{т.о.ср.}}{=} \frac{f(c)(y - x)}{y - x} = f(c) \xrightarrow{y \rightarrow x+0} f(x)$$

$x > y$

$$\frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = \frac{1}{x - y} \int_y^x f = f(c) \xrightarrow{y \rightarrow x-0} f(x)$$

□

## 2.8 Формула Ньютона-Лейбница, в том числе, для кусочно-непрерывных функций

$f \in C[a, b]$   $F$  — первообр.  $f$

Тогда  $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

Для кусочно-непрерывных  $f$  это тоже верно.

**Доказательство.**  $\Phi(x) = \int_0^x f$  — первообр.

$\exists C : F = \Phi + C$

$$\int_a^b f = \Phi(b) - \Phi(a) = F(b) - F(a)$$

□

## 2.9 Лемма об ускоренной сходимости

1.  $f, g : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$   $a$  — предельная точка  $D$

$\exists U(a) : \text{при } x \in \dot{U}(a) \cap D \quad f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$

Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

Тогда

$$\forall x_k \rightarrow a \quad (x_k \neq a, x_k \in D) \quad \exists y_k \rightarrow a \quad (y_k \neq a, y_k \in D)$$

такое, что

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(y_k)}{g(x_k)} = 0 \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{g(y_k)}{g(x_k)} = 0$$

Таким образом,  $g(y_k) \rightarrow 0$  быстрее, чем  $g(x_k) \rightarrow 0$

2. То же самое, но  $\lim f(x) = +\infty, \lim g(x) = +\infty$

**Доказательство.** 1. Очевидно.

$$\forall k \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |f(x_n)| < |g(x_k)| \frac{1}{k} \quad |g(x_n)| < |g(x_k)| \frac{1}{k}$$

$$\varepsilon := |g(x_k)|$$

$$\begin{aligned}
 k = 1 \quad y_1 &:= \text{какой-нибудь } x_n : \left| \frac{f(x_n)}{g(x_k)} \right| < 1 \quad \left| \frac{g(x_n)}{g(x_k)} \right| < 1 \\
 k = 2 \quad y_2 &:= \text{какой-нибудь } x_n : \left| \frac{f(x_n)}{g(x_k)} \right| < \frac{1}{2} \quad \left| \frac{g(x_n)}{g(x_k)} \right| < \frac{1}{2} \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

2. (а) Частный случай: Пусть  $g(x_n)$  возрастает. Берем  $k : m := \min\{n : |f(x_n)| \geq \sqrt{g(x_k)} \text{ или } |g(x_n)| \geq \sqrt{g(x_k)}\}$   
 $y_k := x_{m-1}$

$$\left| \frac{f(y_k)}{g(x_k)} \right| \leq \frac{\sqrt{g(x_k)}}{g(x_k)} = \frac{1}{\sqrt{g(x_k)}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

Зачем нужно возрастание? Кохась не знает.

- (б) Общий случай:  $\tilde{g}(x_k) := \inf\{g(x_n), n = k, k+1, \dots\}$   $\tilde{g}(x_k) \rightarrow +\infty$   
 $\tilde{g}(x_k) \uparrow, \tilde{g}(x_k) \leq g(x_k)$ . Как в пункте (а) построим  $y_k$

$$\frac{f(y_k)}{g(x_k)} \leq \frac{f(y_k)}{\tilde{g}(x_k)} \leq \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}(x_k)}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

$$\frac{g(y_k)}{g(x_k)} \leq \frac{g(x_k)}{\tilde{g}(x_k)} \leq \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}(x_k)}} \rightarrow 0$$

□

## 2.10 Правило Лопиталя

$f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \quad a \in \overline{\mathbb{R}}$

$f, g$  — дифф.,  $g' \neq 0$  на  $(a, b)$

Пусть  $\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a+0} A \in \mathbb{R}$

Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  — неопределенность  $\left\{ \frac{0}{0}, \frac{+\infty}{+\infty} \right\}$

Тогда  $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

Доказательство.  $g' \neq 0 \Rightarrow g'$  — сохр. знак  $\Rightarrow g$  — монотонна.

Для  $\frac{0}{0}$   $g(x) \neq 0$  в  $(a, b)$

По Гейне  $x_k \rightarrow a$  ( $x_k \neq a, x_k \in (a, b)$ )

Выберем  $y_k$  по лемме

$$\frac{f(x_k) - f(y_k)}{g(x_k) - g(y_k)} = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)} \text{ — т. Коши}$$

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} - \frac{f(y_k)}{g(y_k)} = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)} \left( 1 - \frac{g(y_k)}{g(x_k)} \right)$$

$$x_k \rightarrow a \quad y_k \rightarrow a \quad \xi_k \rightarrow a$$

□



## 2.11 Теорема Штольца

Это дискретная версия правила Лопиталя.

$y_n \rightarrow 0, x_n \rightarrow 0$  — строго монот.

$$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a \in \mathbb{R}$$

Тогда  $\exists \lim \frac{x_n}{y_n} = a$

Доказательство. 1.  $a > 0$  ( $a \neq +\infty$ )

$$\forall \varepsilon > 0 \quad [\varepsilon < a] \quad \exists N_1 \quad \forall n > N_1 \quad a_\varepsilon < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < a + \varepsilon$$

Берем  $N > N_1$

$$a - \varepsilon < \frac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N} < a + \varepsilon$$

$\vdots$

$$a - \varepsilon < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < a + \varepsilon$$

По неправильному сложению: (оно применимо, т.к. все дроби положительные)

$$a - \varepsilon < \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} < a + \varepsilon$$

$n \rightarrow +\infty$

$$a - \varepsilon < \frac{x_N}{y_N} < a + \varepsilon$$

2.  $a = +\infty$  доказывается так же

3.  $a < 0$  поменяем знак и докажем так же

4.  $a = 0$  т.к. знаки  $x_n - x_{n-1}$  и  $y_n - y_{n-1}$  фикс.,  $a = +0$  или  $a = -0$

Для  $a = +0 \lim \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = +\infty$

□

## 2.12 Пример неаналитической функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0$$

$f'(0) = ?$

Следствие из теоремы Лагранжа:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = A \text{ тогда } f'(x_0) = A$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^5} = \text{больно, не надо так}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{x^3}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{6}{x^4}}{\frac{-2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{3}{x^2}}{\frac{-2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{2} x}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \frac{0}{\infty} = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Заметим, что многочлен Тейлора этой функции при  $x \rightarrow 0$  не становится точнее при увеличении числа слагаемых, т.к. они все  $= 0$ . Таким образом, эта функция по определению неаналитическая.

### 2.13 Интегральное неравенство Чебышева. Неравенство для сумм

Неравенство Чебышева

$f, g \in C[a, b]$  монот. возр.

Тогда

$$I_f \cdot I_g \leq I_{fg}$$

$$\int_a^b f \int_a^b g \leq (b-a) \int_a^b fg$$

Доказательство.  $x, y \in [a, b] \quad (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$

$$f(x)g(x) - f(y)g(x) - f(x)g(y) + f(y)g(y) \geq 0$$

Интегрируем по  $x$  по  $[a, b]$

$$I_{fg} - f(y)I_g - g(y)I_f + f(y)g(y) \geq 0$$

Интегрируем по  $y$  по  $[a, b]$

$$I_{fg} - I_f I_g - I_g I_f + I_{fg} \geq 0$$

□

Дискретное неравенство Чебышева

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

Доказательство.

$$f(x) = a_i, x \in (i-1, i], i = 1 \dots n - \text{задана на } (0, n]$$

$$g(x) = \dots b_i$$

$$I_f I_g \leq I_{fg}$$

□

## 2.14 Свойства определенного интеграла: линейность, интегрирование по частям, замена переменных

Дано выше. (2.5, стр. 14)

## 2.15 Иррациональность числа пи

$$\begin{aligned}
 H_n &:= \frac{1}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \cos t dt := \frac{1}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f g' dt \\
 H_n &= \left[ f' = -2n \left( \frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} t \quad g = \sin t \right] = \\
 &= \frac{1}{n!} \left( \frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \sin t \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{(n-1)!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} t \sin t \\
 &= 0 + \frac{2}{(n-1)!} \left( \frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} + \sin t \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \\
 &+ \frac{2}{(n-1)!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( (2n-1) \left( \frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} - \frac{\pi^2}{2} (n-1) \left( \frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-2} \right) \cos t dt = \\
 &= (4n-2)H_{n-1} - \pi^2 H_{n-2}
 \end{aligned}$$

Число  $\pi$  — иррационально

Доказательство. Пусть  $\pi = \frac{p}{q}$ ;  $H_n$  задано выше

$$H_n = (4n-2)H_{n-1} - \pi^2 H_{n-2}$$

$$H_0 = 2, \quad H_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\pi^2}{4} - t^2 \right) \cos t = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt = 2t(-\cos t) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t = 4$$

$H_n = \dots H_1 + \dots H_0 = P_n(\pi^2)$  — многочлен с целыми коэффициентами, степень  $\leq n$

$$q^{2n} P_n \left( \frac{p^2}{q^2} \right) = \text{целое число} = q^{2n} H_n = q^{2n} H_n > 0 \Rightarrow q^{2n} H_n \geq 1$$

$$1 \leq \frac{q^{2n}}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \cos t dt \leq \frac{q^2 n 4^n}{n!} \pi \rightarrow 0$$

Противоречие. □

## 2.16 ! Теорема о вычислении аддитивной функции промежутка по плотности

О вычислении аддитивной функции промежутка по плотности

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  — непр.  $\Phi : \text{Segm}\langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

$f$  — плотность  $\Phi$

Тогда  $\Phi([p, q]) = \int_b^a f$ ,  $[p, q] \subset \langle a, b \rangle$

Доказательство.

$$F(x) := \begin{cases} 0 & , x = a \\ \Phi([a, x]) & , x > a \end{cases} \text{ — первообразная } f$$

Это утверждение ещё не доказано, но если мы его докажем, то:

$$\Phi([p, q]) = \Phi[a, q] - \Phi[a, p] = F(q) - F(p) = \int_p^a f$$

Докажем утверждение:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\Phi[a, x+h] - \Phi[a, x]}{h} = \frac{\Phi[x, x+h]}{h} = [0 \leq \Theta \leq 1] = f(x + \Theta h)$$

□

## 2.17 Площадь криволинейного сектора: в полярных координатах и для параметрической кривой

$$\Phi[\alpha, \beta] = S_{\text{сектор}(\alpha, \beta)} = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi$$

$x(t), y(t)$  — кривая в  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{t_{\alpha}}^{t_{\beta}} (x(t)^2 + y(t)^2) \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t)} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_{\alpha}}^{t_{\beta}} y'(t)x(t) - y(t)x'(t) dt \end{aligned}$$

## 2.18 Изопериметрическое неравенство

Изопериметрическое неравенство

$G \subset \mathbb{R}^2$  — выпуклое замкнутое множество (ограниченное)

$\text{diam} G = \sup\{\rho(x, y), x, y \in G\}$

$\text{diam} G \leq 1$

Тогда  $\sigma(G) \leq \frac{\pi}{4}$

Доказательство. Пойдём от некоторой точки на границе  $G$  под углом  $\varphi$  внутрь фигуры по прямой. В какой-то момент мы встретим другую граничную точку. Назовем этот процесс  $r(\varphi)$  (возвращает длину пути). Очевидно, что  $r^2(\varphi) + r^2(\varphi - \frac{\pi}{2}) \leq (\text{diam} G)^2 \leq 1$

$$\begin{aligned}\sigma(G) &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 r^2(\varphi) d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi) d\varphi \right) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( r^2(\varphi) + r^2\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \right) d\varphi \leq \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 d\varphi = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

□

## 2.19 Лемма о трех хордах

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1.  $f$  — вып.  $\langle a, b \rangle$

2.  $\forall x_1, x_2, x_3 \in \langle a, b \rangle \quad x_1 < x_2 < x_3 \quad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$

**Доказательство.** Левое  $\Leftrightarrow f(x_2)(x_3 - x_1) \leq f(x_3)(x_2 - x_1) + f(x_1)(x_3 - x_1 - (x_2 - x_1))$

$$f \left( x_3 \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} + x_1 \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \right) = f(x_2) \leq f(x_3) \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} + f(x_1) \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$$

□

## 2.20 Теорема об односторонней дифференцируемости выпуклой функции

$f$  — вып.  $\langle a, b \rangle$ . Тогда  $\forall x \in (a, b) \quad \exists f'_+(x), f'_-(x)$  и  $\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$

$$f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'_-(x_2)$$

**Доказательство.**  $f'_+(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1+0} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$  — монотонно убывающая функция от  $x$

Фиксируем  $x_0 < x_1$ . По лемме о трех хордах  $\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} \leq \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$

□

## 2.21 Следствие о точках разрыва производной выпуклой функции

$f$  — вып. на  $\langle a, b \rangle \Rightarrow f$  непр. на  $(a, b)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$$

## 2.22 Описание выпуклости с помощью касательных

$f$  — вып. на  $\langle a, b \rangle$ . Тогда график  $f$  расположен не ниже любой касательной  
т.е.  $\forall x, x_0 \quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

**Доказательство.** “ $\Rightarrow$ ”

Если  $x > x_0 \quad f'(x_0) \geq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ , это неравенство 2. из предыдущей теоремы  
 $x < x_0$  аналогично

“ $\Leftarrow$ ” фиксируем  $x_0$ . Берем  $x_1 < x_0 < x_2$

$f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0); f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0)$ , т.е.  $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leq f'(x_0) \leq \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$ .  
Это верно по лемме. □

## 2.23 Дифференциальный критерий выпуклости

1.  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , дифф. в  $(a, b)$

Тогда  $f$  — вып.  $\Rightarrow f'$  возр. на  $(a, b)$

Если  $f$  — строго выпуклая  $\Rightarrow f'$  строго возрастает

2.  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , дважды дифф. на  $(a, b)$

$f$  — вып.  $\Leftrightarrow f'' \geq 0$  на  $(a, b)$

(а) “ $\Rightarrow$ ”  $f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2)$  ( $x_1 < x_2$ )

“ $\Leftarrow$ ” ?  $f$  вып.  $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c_1) < f'(c_2) = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$

Теперь утверждение 2. очевидно.

## 2.24 Обобщенная теорема о плотности

Обобщенная теорема о плотности.

$\Phi : \text{Segm}\langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  — аддитивная функция промежутка

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  — непр.

$\forall \Delta \in \text{Segm}\langle a, b \rangle \exists m_\Delta, M_\Delta$  — не точный минимум/максимум

1.  $m_\Delta l_\Delta \leq \Phi(\Delta) \leq M_\Delta l_\Delta$

2.  $m_\Delta \leq f(x) \leq M_\Delta$  при всех  $x \in \Delta$

3.  $\forall$  фикс.  $x \quad M_\Delta - m_\Delta \xrightarrow[\Delta \rightarrow x]{} 0$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \Delta : l_\Delta < \delta \quad |M_\Delta - m_\Delta| < \varepsilon$

Тогда  $\forall [p, q] \in \text{Segm}\langle a, b \rangle \quad \Phi([p, q]) = \int_p^q f$

Доказательство.  $F(x) = \begin{cases} 0, & x = a \\ \Phi[a, x], & x > a \end{cases}$

Докажем, что  $F$  — первообразная  $f$ .

Фиксируем  $x$

По 1.:

$$m_\Delta \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\Phi[x, x+h]}{h} \leq M_\Delta$$

По 2.:

$$m_\Delta \leq f(x) \leq M_\Delta$$

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \leq M_\Delta - m_\Delta \xrightarrow[\Delta \rightarrow x]{} 0$$

Мы не можем написать “ $\Delta \rightarrow x$ ” без кавычек, т.к.  $\Delta$  — не число, но “ $\Delta \rightarrow x$ ”  $\Leftrightarrow h \rightarrow 0$

Таким образом,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} f(x)$$

□

## 2.25 Вычисление длины гладкого пути

$$\gamma \in C^1([a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m)$$

$$\text{Тогда } l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

*Доказательство.* Будем считать  $\gamma' \neq 0$ ,  $\gamma$  — инъективная.

$\Phi : [p, q] \subset [a, b] \mapsto l(\gamma|_{[p, q]})$  — адд.  $\Phi$ -ция промежутка.

Докажем, что  $f(t) = \|\gamma'(t)\|$  — плотность  $\Phi$

$$\Delta \subset [a, b] \quad m_i(\Delta) := \min_{t \in \Delta} |\gamma'_i(t)| \quad M_i(\Delta) = \max_{t \in \Delta} |\gamma'_i(t)|$$

$$m_\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^m m_i(\Delta)^2} \quad M_\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^m M_i(\Delta)^2}$$

Докажем, что  $m_\Delta l_\Delta \leq \Phi(\Delta) \leq M_\Delta l_\Delta$

$\tilde{\gamma} : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^m$  — лин. путь

$$\tilde{\gamma}(t) = \vec{M} \cdot t, \text{ где } \vec{M} = (M_1(\Delta) \quad \dots \quad M_m(\Delta))$$

$$T : C_{\gamma|_\Delta} \rightarrow C_{\tilde{\gamma}} \quad \gamma(t) \mapsto \tilde{\gamma}(t)$$

Утверждение:  $T$  — растяжение.

$$\|\vec{M}_q - \vec{M}_p\| = (q - p) \|\vec{M}\| = (q - p) M_\Delta$$

$$\begin{aligned} \rho(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) &= \sqrt{\sum_{i=1}^m (\gamma_i(t_0) - \gamma_i(t_1))^2} \stackrel{\text{т. Лагранжа}}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^m \gamma'_i(\bar{t}_i)^2 (t_0 - t_1)^2} \leq \|\vec{M}\| \cdot |t_0 - t_1| = \\ &= \rho(\tilde{\gamma}(t_0), \tilde{\gamma}(t_1)) |t_0 - t_1| \end{aligned}$$

□

## 2.26 Объем фигур вращения

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  — непр.,  $f \geq 0$

$\Phi_x(\Delta)$  = “объем фигуры вращения вокруг оси  $OX$ ”

$\Phi_y(\Delta)$  = “объем фигуры вращения вокруг оси  $OY$ ”

Тогда :  $\forall \Delta = [p, q] \in \text{Segm}\langle a, b \rangle$  :

$$1. \quad \Phi_x[p, q] = \pi \int_p^q f^2(x) dx$$

$$2. \quad \Phi_y[p, q] = 2\pi \int_p^q x f(x) dx$$

*Доказательство.* 1. Это — упражнение, оно не использует ничего умного.

2. Мы знаем, что объем цилиндра =  $S(\text{основание}) \cdot h$ .

Для оценки  $\Phi(\Delta)$  найдем прямоугольник, который является минимальным по площади сечения и максимальный прямоугольники:  $\Pi_{\min}$  и  $\Pi_{\max}$ .

$$\begin{aligned} \pi m_\Delta (q - p) &= \pi \min f \min 2x \cdot (q - p) \leq V((\Pi_{\min})_y) \leq \Phi(\Delta) \leq \\ &\leq V((\Pi_{\max})_y) \leq \pi \max_{x \in [p, q]} f \max_{x \in [p, q]} 2x \cdot (q - p) = \pi M_\Delta (q - p) \end{aligned}$$

Можем заметить, что  $\Phi$  подходит под все три пункта теоремы об обобщенной плотности.

□

## 2.27 ! Интеграл как предел интегральных сумм

$$f \in C[a, b]$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \text{дробление } \tau = \{x_0 \dots x_n\} : |\tau| < \delta \quad \forall \text{оснащение } \xi_i :$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon$$

*Доказательство.* По теореме Кантора о равномерной непрерывности на компакте.  $[a, b]$  — компакт,  $f$  непрерывна на  $[a, b] \Rightarrow f$  равномерно непрерывна на  $[a, b]$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, \bar{x} \in [a, b] : |x - \bar{x}| < \delta \quad |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$$

По двойной бухгалтерии заменим  $\varepsilon$  на  $\frac{\varepsilon}{b-a}$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, \bar{x} \in [a, b] : |x - \bar{x}| < \delta \quad |f(x) - f(\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Разобьем интеграл на части:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \right)$$

Запишем  $(x_i - x_{i-1})$  в виде интеграла  $\int_{x_{i-1}}^{x_i} dx$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - f(\xi_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \right) \right| = \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(\xi_i)) dx \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \right| \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(\xi_i)| dx \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon \end{aligned}$$

□

## 2.28 Теорема об интегральных суммах для центральных прямоугольников

$f \in C^2[a, b]$   $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$   $\delta = \max(x_i - x_{i-1})$   $\xi_i := \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ . Тогда

$$\left| \int_a^b f - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \leq \frac{\delta^2}{8} \int_a^b |f''| dx$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx &= \int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f(x) dx + \int_{\xi_i}^{x_i} f(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f(x) d(x - x_{i-1}) + \int_{\xi_i}^{x_i} f(x) d(x - x_i) = \\ &= f(x)(x - x_{i-1}) \Big|_{x=x_{i-1}}^{x=\xi_i} - \int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f'(x)(x - x_{i-1}) dx + f(x)(x - x_i) \Big|_{x=\xi_i}^{x=x_i} - \int_{\xi_i}^{x_i} f'(x)(x - x_{i-1}) dx = (*) \end{aligned}$$



Заметим, что  $\xi_i - x_{i-1} = x_i - \xi_i$ , поэтому  $f(x)(x - x_{i-1}) \Big|_{x=x_{i-1}}^{x=\xi_i} + f(x)(x - x_i) \Big|_{x=\xi_i}^{x=x_i} = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$

$$\begin{aligned}
 (*) &= f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \left( f'(x) \frac{(x - x_{i-1})^2}{2} \Big|_{x_{i-1}}^{\xi_i} - \frac{1}{2} \int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f''(x - x_{i-1})^2 dx + \right. \\
 &\quad \left. + f'(x) \frac{(x - x_i)^2}{2} \Big|_{\xi_i}^{x_i} - \frac{1}{2} \int_{\xi_i}^{x_i} f''(x - x_i)^2 dx \right) = \\
 &= f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - 0 + \frac{1}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x) \varphi(x) dx \\
 \varphi(x) &= \begin{cases} (x - x_{i-1})^2, & x \in [x_{i-1}, \xi_i] \\ (x - x_i)^2, & x \in [\xi_i, x_i] \end{cases}
 \end{aligned}$$

Итого:

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \frac{1}{2} \int_a^n f''(x) \varphi(x) dx \\
 \left| \int - \sum \right| &\leq \frac{1}{2} \int_a^b |f''(x)| \varphi(x) dx \\
 \max_{x \in [a, b]} \varphi(x) &\stackrel{\text{достигается на отрезке длины } \delta}{=} \frac{\delta}{4} \\
 \frac{1}{2} \int_a^b |f''(x)| \varphi(x) dx &\leq \frac{\delta^2}{8} \int_a^b |f''|
 \end{aligned}$$

□

## 2.29 Теорема о формуле трапеций, формула Эйлера-Маклорена

### 2.29.1 Теорема о формуле трапеций

$f \in C^2[a, b]$ ,  $\tau, \delta = |\tau|$

Тогда

$$\left| \int_a^b f dx - \sum \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} (x_i - x_{i-1}) \right| \leq \frac{\delta^2}{8} \int_a^b |f''|$$

*Доказательство.* Берем  $\xi_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$

$$\begin{aligned}
 \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) d(x - \xi_i) = f(x)(x - \xi_i) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)(x - \xi_i) dx = \\
 &= (f(x_i) + f(x_{i-1})) \frac{x_i - x_{i-1}}{2} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x) \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) d((x - x_{i-1})(x_i - x)) = (*)
 \end{aligned}$$

Проверим, что замена выражение под дифференциалом верное:

$$((x - x_{i-1})(x_i - x))' = (-x^2 + x(x_i + x_{i-1}) - x_{i-1}x)' = -2 \left( x - \frac{x_i + x_{i-1}}{2} \right)$$

Действительно верно.

$$\psi(x) := (x - x_{i-1})(x_i - x)$$

$$\begin{aligned}
(*) &= (f(x_i) + f(x_{i-1})) \frac{x_i - x_{i-1}}{2} + \frac{1}{2} f'(x)(x - x_{i-1})(x_i - x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \frac{1}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x) \psi(x) dx \\
\left| \int - \sum \right| &\leq \frac{1}{2} \int_a^b |f''| \psi(x) dx \\
\max \psi &= \frac{\delta^2}{4}
\end{aligned}$$

□

### 2.29.2 Формула Эйлера-Маклорена

$m, n \in \mathbb{Z}, f \in C^2[m, n]$ . Тогда

$$\int_m^n f(x) dx = \left( \sum_{i=m}^n \right)' f(i) - \frac{1}{2} \int f''(x) \{x\} (1 - \{x\}) dx$$

' означает, что крайние слагаемые берутся с весом  $\frac{1}{2}$ ,  $\{x\}$  — дробная часть  $x$

*Доказательство.* Это очевидно по формуле трапеций:  $x_i := i$

$$\int_m^n f(x) dx = \sum_{i=m+1}^n \frac{f(i) + f(i-1)}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \int_m^n f''(x) \psi(x)$$

$\psi(x) \stackrel{\text{def}}{=} (x - x_{i-1})(x_i - x) = (x - i + 1)(i - x) = (x - i + 1)(1 - (x - i + 1)) = \{x\}(1 - \{x\})$   
 $f(n)/2$  и  $f(m)/2$  в сумму попадают только 1 раз, остальные — 2 раза, как и в искомой формуле. □

### 2.30 Асимптотика степенных сумм

$p > -1 \quad f(x) = x^p$

$$1^p + 2^p + \dots + n^p = \int_1^n x^p dx + \frac{1}{2} 1^p + \frac{1}{2} n^p + \frac{1}{2} \int_1^n p(p-1)x^{p-2} \{x\} (1 - \{x\}) dx =$$

$\frac{1}{2} 1^p + \frac{1}{2} n^p$  добавлены, чтобы не писать слева деление крайних слагаемых на 2.

$$= \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} n^p + \mathcal{O}(\max(1, n^{p-1})) = (*)$$

Откуда появилось  $\mathcal{O}$ ?  $\{x\}(1 - \{x\}) < 1 \Rightarrow \int_1^n p(p-1)x^{p-2} \{x\} (1 - \{x\}) dx \leq C(n^{p-1} - 1)$ ,  $C$  — некоторая константа.

Занесем константы под  $\mathcal{O}$ :

$$(*) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{1}{2} n^p + \mathcal{O}(\max(1, n^{p-1}))$$

### 2.31 Асимптотика частичных сумм гармонического ряда

$$]p = -1 \quad 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \int_1^n x^{-3} \{x\} (1 - \{x\}) dx = (*)$$

$$\int_1^n x^{-3} \{x\} (1 - \{x\}) dx \leq \frac{1}{4} \int_1^n \frac{dx}{x^3} = \frac{1-1}{8 \alpha^2} \Big|_1^n = \frac{1}{8} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) < \frac{1}{8}$$

$$(*) = \ln n + \gamma + o(1) \quad \gamma \in \left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \right]$$

### 2.32 Формула Валлиса

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2k} = \frac{\pi}{2}$$

Вывод формулы Валлиса:

$$\begin{aligned} I_n &:= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \left[ \begin{array}{l} u = \sin^{n-1} x \quad du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx \\ dv = \sin x dx \quad v = -\cos x \end{array} \right] = \\ &= -\cos x \sin^{n-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x (n-1) \sin^{n-2} x dx = \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n) \\ I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} I_{n-4} = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \frac{n-5}{n-4} I_{n-6} = \dots = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2}, & n - \text{чёт.} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} 1, & n - \text{нечёт.} \end{cases} \\ \sin^{2k+1} x &\leq \sin^{2k} x \leq \sin^{2k-1} x \end{aligned}$$

Проинтегрируем по  $[0, \frac{\pi}{2}]$ :

$$\begin{aligned} \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} &\leq \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \\ \left( \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2k+1} &\leq \frac{\pi}{2} \leq \left( \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2k} \\ \text{Правая часть} - \text{левая часть} &= \left( \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right) \left( \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1} \right) = \left( \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right) \frac{1}{2k} \frac{1}{2k+1} \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{2k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Таким образом, левая и правая части стремятся друг другу и зажимают  $\pi/2$ .

### 2.33 Формула Стирлинга

$$\begin{aligned} n! &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{n} \sqrt{2\pi} \\ ]f(x) = \ln x \quad \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n &= \int_1^n \ln x dx + \frac{\ln n}{2} + \frac{1}{2} \int_1^n \frac{\{x\}(1-\{x\})}{x^2} dx \leq \\ &\leq n \ln n - n + 1 + \frac{\ln n}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{4} \int_1^n \frac{1}{x^2} = n \ln n - n + \frac{\ln n}{2} + C_1 + o(1) \\ \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n &= \ln n! \\ n! &= e^{n \ln n - n + \frac{\ln n}{2} + C_1 + o(1)} \\ n! &= n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{C_1 + o(1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C n^n e^{-n} \sqrt{n} \end{aligned}$$

Найдём  $C$ .

$$\sqrt{\pi} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k)}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)} \frac{1}{\sqrt{k}} =$$

Домножим дробь на знаменатель:

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot (2k)^2}{(2k)!} =$$

Вынесем 2 из каждого множителя в числителе:

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{(2^k k!)^2}{(2k)!} =$$

Замена на эквивалент:

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{(2^k C k^k e^{-k} \sqrt{k})^2}{C (2k)^{2k} e^{-2k} \sqrt{2k}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{C}{\sqrt{2}} = \frac{C}{\sqrt{2}}$$

$$C = \sqrt{2\pi}$$

## 2.34 Простейшие свойства несобственного интеграла

Критерий Больцано-Коши

$$\lim_{A \rightarrow b-0} \int_a^A \text{кон.} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \Delta \in (a, b) \forall A, B \in (\Delta, b) \left| \int_A^B f \right| < \varepsilon$$

**Аддитивность по промежутку**

$f$  — допустима.  $[a, b)$   $c \in (a, b)$

Тогда  $\int_a^{\rightarrow b} f$  и  $\int_c^{\rightarrow b} f$  — сходятся/расходятся одновременно и, если сходятся,  $\int_a^{\rightarrow b} f = \int_a^c f + \int_c^{\rightarrow b} f$

Берем  $A > c$   $\int_a^A = \int_a^c + \int_c^A$

*Следствие.*  $f$  — допустима.  $[a, +\infty)$ ,  $\int_a^{+\infty} f$  — сходится. Тогда

$$\int_A^{+\infty} f \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$$

Это называется “хвост”.

**Линейность**

$f, g$  — допустима  $\int_a^{\rightarrow b} f, \int_a^{\rightarrow b} g$  — сход.

$\lambda \in \mathbb{R}$

Тогда  $\lambda f, f \pm g$  — допустима и  $\int_a^{\rightarrow b} \lambda f, \int_a^{\rightarrow b} f \pm g$  — сходятся.

$$\int_a^{\rightarrow b} \lambda f = \lambda \int_a^{\rightarrow b} f \quad \int_a^{\rightarrow b} f \pm g = \int_a^{\rightarrow b} f \pm \int_a^{\rightarrow b} g$$

*Доказательство.* Тривиально. □

**Интегрирование неравенств**

$f, g$  — доп.,  $\int_a^{\rightarrow b} f, \int_a^{\rightarrow b} g$  — существуют в  $\overline{\mathbb{R}}$

$f \leq g$  на  $[a, b)$ . Тогда

$$\int_a^{\rightarrow b} f \leq \int_a^{\rightarrow b} g$$

Очевидно:  $\int_a^A f \leq \int_a^A g, A \rightarrow b-0$

**Пятое свойство**

$f, g$  — дифф.  $[a, b]$ ;  $f', g'$  — допустимы. Это эквивалентно  $f, g \in C^1[a, b]$ .

Тогда\*

$$\int_a^{\rightarrow b} f g' = f g \Big|_a^{\rightarrow b} - \int_a^{\rightarrow b} f' g$$

\* значит, что если два из трех пределов существуют, то существует третий и выполняется равенство.

**Шестое свойство**

$\varphi : [\alpha, \beta) \rightarrow \langle A, B \rangle, \varphi \in C^1$

$f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, f$  — непр.,  $\exists \varphi(\beta - 0) \in \overline{\mathbb{R}}$

Тогда\*

$$\int_{\alpha}^{\rightarrow \beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\rightarrow \varphi(\beta-0)} f(x) dx$$

*Примечание.*  $f$  — кусочно непрерывна на  $[a, b]$ .  $f$  можно также рассматривать на  $[a, b]$ . Тогда

$$\int_a^{\rightarrow b} f = \int_a^b f$$

**2.35 ! Признаки сравнения сходимости несобственного интеграла**

$f, g \geq 0$ , допустимы на  $[a, b)$

1.  $f \leq g$  на  $[a, b)$ . Тогда:

(a)  $\int_a^b g$  — сходится  $\Rightarrow \int_a^b f$  — сходится

(b)  $\int_a^b f$  — расходится  $\Rightarrow \int_a^b g$  — расходится

2.  $\exists \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = l < +\infty$ :

(a)  $\int_a^b g$  — сходится  $\Rightarrow \int_a^b f$  — сходится

(b)  $\int_a^b f$  — расходится  $\Rightarrow \int_a^b g$  — расходится

*Доказательство.* 1.  $\Phi(A) := \int_a^B f, \Psi(a) = \int_a^A g$

$$0 \leq \Phi(A) \leq \Psi(A)$$

(a)  $\int_a^b g$  — сходится  $\Rightarrow \Psi$  огр.  $\Rightarrow \Phi$  огр.  $\Rightarrow \int_a^b f$  — сходится

(b)  $\int_a^b f$  — расходится  $\Rightarrow \Phi$  неогр.  $\Rightarrow \Psi$  неогр.  $\Rightarrow \int_a^b g$  — расходится

2.  $l < +\infty \xRightarrow{\text{def}} \exists a_1 : \forall x > a_1 \quad 0 \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq l + 1 \Rightarrow f(x) \leq g(x)(l + 1)$ , дальше тривиально  
(предположительно по пункту 1.)

□

*Примечание.*  $l > 0$ :

$$\exists a_2 : \forall x > a_2 \quad \frac{l}{2} < \frac{f(x)}{g(x)}$$

1.  $\int_a^b f$  — сходится  $\Rightarrow \int_a^b g$  — сходится

2.  $\int_a^b g$  — расходится  $\Rightarrow \int_a^b f$  — расходится

Следствие. Если  $+\infty > l > 0$ , то:

1.  $\int_a^b f$  — сходится  $\Leftrightarrow \int_a^b g$  — сходится

2.  $\int_a^b f$  — расходится  $\Leftrightarrow \int_a^b g$  — расходится

### 2.36 Интеграл Эйлера–Пуассона

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx \stackrel{x=y^2}{=} 2 \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = 2 \frac{1}{2} \sqrt{\pi} = \sqrt{\pi} \text{ — интеграл Эйлера–Пуассона}$$

Доказательство.

$$1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{1 + x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Оба неравенства следуют из неравенства  $e^t \geq 1 + t \quad \forall t$ .

Зафиксируем  $n \in \mathbb{N}$

$$(1 - x^2)^n \leq e^{-nx^2} \leq \left(\frac{1}{1 + x^2}\right)^n$$

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n dx \leq \int_0^1 e^{-nx^2} dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + x^2)^n} dx$$

Казалось бы, переход от интеграла  $\int_0^1$  к  $\int_0^{+\infty}$  очень грубый, но это не так.

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx \stackrel{y=\sqrt{n}x}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} I$$

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n dx \stackrel{x=\cos y}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} y dy$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + x^2)^n} dx \stackrel{x=\tan y}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos y)^{2n-1} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n-2} dt$$

$$\sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} y dy \leq I \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n-2} dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \frac{(n-1)!!}{n!!} \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n \text{ чет.} \\ 1, & n \text{ нечет.} \end{cases}$$

$$\sqrt{n} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leq I \leq \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2} \sqrt{n}$$

По формуле Валлиса  $\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \rightarrow \sqrt{\pi}$ :

$$\sqrt{n} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right) \frac{n}{2n+1} \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2} \sqrt{n} = \frac{\frac{\pi}{2} \sqrt{n} \frac{1}{\sqrt{n-1}}}{\frac{(2n-2)!!}{(2n-3)!!} \frac{1}{\sqrt{n-1}}} \rightarrow \frac{\sqrt{n}}{2}$$

□

## 2.37 ! Гамма функция Эйлера. Простейшие свойства.

### Область определения

1.  $\int_1^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$  — сходится при всех  $t \in \mathbb{R}$ :

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_1^{+\infty} = e$$

$$0 \leq x^{t-1} e^{-x} \leq x^{t-1} e^{-\frac{x}{2}} e^{-\frac{x}{2}}$$

$$x^{t-1} e^{-\frac{x}{2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow \text{при больших } x \quad x^{t-1} e^{-\frac{x}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \leq e^{-\frac{x}{2}}$$

2.  $\int_0^1 x^{t-1} e^{-x} dx$

$$x^{t-1} e^{-x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^{t-1} \quad t > 0 \text{ сходится, } t \leq 0 \text{ расходится}$$

### Выпуклость

Подынтегральное выражение как функция от  $t$  является выпуклой функцией (при  $x \geq 0$ )

$$t \mapsto x^{t-1} e^{-x} = f_x(t)$$

$$f(\alpha t_1 + (1 - \alpha)t_2) \leq \alpha f_x(t_1) + (1 - \alpha)f_x(t_2)$$

$$\int_0^{+\infty} f_x dx \leq \alpha \int_0^{+\infty} f_x(t_1) dx + (1 - \alpha) \int_0^{+\infty} f_x(t_2) dx$$

Определение выпуклости:

$$x^{(\alpha t_1 + (1 - \alpha)t_2) - 1} e^{-x} \leq \alpha x^{t_1 - 1} e^{-x} + (1 - \alpha) x^{t_2 - 1} e^{-x}$$

Зафиксируем  $\alpha, t_1, t_2$ . Проинтегрируем по  $x$  от 0 до  $+\infty$ :

$$\Gamma(\alpha t_1 + (1 - \alpha)t_2) \leq \alpha \Gamma(t_1) + (1 - \alpha)\Gamma(t_2)$$

$\Gamma$  — выпуклая  $\Rightarrow \Gamma$  — непрерывная

### Третье свойство

$$\Gamma(t + 1) = t\Gamma(t)$$

$$\Gamma(t + 1) = \int_0^{+\infty} x^t e^{-x} dx = -x^t e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + t \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx = 0 + t\Gamma(t)$$

Следствие.  $\Gamma(n + 1) = n!$

Доказательство.

$$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) = n(n - 1)\Gamma(n - 1) = \dots = n(n - 1) \dots 1\Gamma(1) = n!$$

□

### Четвертое свойство

$$\Gamma(t) = \frac{\Gamma(t + 1)}{t} \underset{t \rightarrow +0}{\sim} \frac{1}{t}$$

**Пятое свойство**

Дано выше. (2.36, стр. 30)

**2.38 Изучение сходимости интеграла  $\int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}}$** 

При каких  $\alpha$  и  $\beta$  сходится:

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}}$$

Мы знаем, что  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$  сходится при  $p > 1$  и расходится при  $p \leq 1$ .  
При  $\alpha > 1, \beta > 0$

$$\frac{1}{x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}} < \frac{1}{x^{\alpha}}$$

Таким же образом можно еще что-то выяснить, но мы так делать не будем. Вместо этого воспользуемся методом “удавливание логарифма”

$$1. \alpha > 1 \quad \alpha = 1 + 2a, a > 0$$

$$0 \leq \frac{1}{x^{1+2a}(\ln x)^{\beta}} = \frac{1}{x^{1+a}} \cdot \frac{1}{x^a(\ln x)^{\beta}}$$

$$\beta \geq 0 \quad x^a(\ln x)^{\beta} \rightarrow +\infty$$

$$b := -\beta \quad \beta < 0 \quad x^a(\ln x)^{\beta} = \frac{x^a}{(\ln x)^b} = \left( \frac{x^{\frac{a}{b}}}{\ln x} \right)^b \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \xrightarrow{\text{Лопиталь}} \frac{\frac{a}{b} x^{\frac{a}{b}-1}}{\frac{1}{x}} \rightarrow +\infty$$

$$x^a(\ln x)^{\beta} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \Rightarrow \frac{1}{x^{1+a}} \cdot \frac{1}{x^a(\ln x)^{\beta}} < \frac{1}{x^{1+a}} - \text{сходится}$$

$$2. \alpha < 1 \quad \alpha = 1 - 2a, a > 0$$

$$\frac{1}{x^{1-2a}(\ln x)^{\beta}} = \frac{1}{x^{1-a}} \cdot \frac{x^a}{(\ln x)^{\beta}} > \frac{1}{x^{1-a}}$$

$$3. \alpha = 1$$

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{\beta}} \stackrel{y=\ln x}{=} \int_{\ln 10}^{+\infty} \frac{dy}{y^{\beta}}$$

Сходится при  $\beta > 1$ , расходится при  $\beta \leq 1$

**2.39 Теорема об абсолютно сходящихся интегралах и рядах.**

$f$  — доп. на  $[a, b)$ . Тогда эквивалентны следующие утверждения:

$$1. \int_a^b f \text{ абсолютно сходится}$$

$$2. \int_a^b |f| \text{ сходится}$$

$$3. \int_a^b f^+, \int_a^b f^- \text{ оба сходятся}$$

*Примечание.*  $f^+ = \max(f, 0), f^- = \max(-f, 0)$

*Доказательство.*  $1 \Rightarrow 2$  — тривиально

$$2 \Rightarrow 3 : 0 \leq f^{\pm} \leq |f|$$

$$3 \Rightarrow 1 : f = f^+ - f^- \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^b f^+ - \int_a^b f^-$$

□

Ряд  $A$  абсолютно сходится, если 1 и 2:

$$1. \sum a_n \text{ сх.}$$

$$2. \sum |a_n| \text{ сх.}$$



## 2.40 Изучение интеграла $\int_1^{\infty} \frac{\sin x \, dx}{x^p}$ на сходимость и абсолютную сходимость

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$$

- При каких  $p$  сходится?
- При каких  $p$  абсолютно сходится?

1.  $p > 1 \Rightarrow$  абсолютно сходится, т.к.  $\left| \frac{\sin x}{x^p} \right| < \frac{1}{x^{p-1}}$

2.  $p > 0 \Rightarrow$  сходится, т.к. (по частям):

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} = -\frac{\cos x}{x^p} \Big|_1^{+\infty} - p \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p+1}}$$

Первое конечно, второе абсолютно сходится.

3.  $p \leq 0$ , по критерию Коши:

$$\exists A_n, B_n \rightarrow b \quad \int_{A_n}^{B_n} f \not\rightarrow 0 \Rightarrow \int_a^b f \text{ расходится}$$

$$A_n := 2\pi n, B_n := 2\pi n + \pi \quad \int_{A_n}^{B_n} \frac{\sin x}{x^p} dx \geq (2\pi n)^{-p} \int_{A_n}^{B_n} \sin x \text{ расходится}$$

Итого для  $p \leq 0$  расходится.

4.  $0 < p \leq 1$ , абсолютная сходимость?

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p}$$

(a) Первый способ.  $A_n := \pi n, B_n := 2\pi n$

$$\int_{A_n}^{B_n} \frac{|\sin x|}{x^p} \geq \frac{1}{(2\pi n)^p} \underbrace{\int_{A_n}^{B_n} |\sin x|}_{\text{площадь } n \text{ арков синуса}} = \frac{2n}{(2\pi n)^p} = Cn^{1-p} \not\rightarrow 0$$

(b) Второй способ.

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} \geq \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^p} = \int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos(2x)}{2x^p} = \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^p}}_{+\infty} - \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x^p}}_{\text{При } p > 0 \text{ сходится как в пункте 2}}$$

Итого абсолютной сходимости нет.

## 2.41 Признак Абеля–Дирихле сходимости несобственного интеграла

$f$  — допустима на  $[a, b)$ ,  $g \in C^1[a, b)$

Если выполняется 1 или 2, то  $\int_a^b fg$  — сходится

1. (a)  $F(A) := \int_a^A f(x) dx$ ,  $A \in [a, b)$ ,  $F$  ограничена, т.е.:

$$\exists K : \forall A \in [a, b) \quad \left| \int_a^A f \right| \leq K$$

(b)  $g(x)$  монотонна,  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow b-0} 0$

2. (a)  $\int_a^b f(x)dx$  сходится, необязательно абсолютно

(b)  $g(x)$  монотонна,  $g(x)$  ограничена, т.е.:  $\exists L \forall x \in [a, b) \quad |g(x)| \leq L$

1 часть — Дирихле, 2 — Абель.

Доказательство. 1.

$$\int_a^b fg = F(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

$$\lim_{x \rightarrow b-0} \underbrace{F(x)}_{\text{огр.}} \underbrace{g(x)}_{\text{б.м.}} = 0 \Rightarrow F(x)g(x) \Big|_a^b - \text{конечн.}$$

Покажем абсолютную сходимость, из нее следует обычная сходимость:

$$\int_a^b |F(x)g'(x)|dx \leq \int_a^b K \int_a^b |g'| =$$

Можно снять модуль, т.к.  $g$  монотонна  $\Rightarrow \text{sign}(g') = \text{const}$

$$= \pm K \int_a^b g' = \pm K g(x) \Big|_a^b = \pm K \left( \underbrace{\lim_{x \rightarrow b-0} g(x)}_0 - \underbrace{g(a)}_{\text{кон.}} \right)$$

2.  $\alpha := \lim_{x \rightarrow b-0} g(x) - \text{кон.}$

$$\int_a^b fg = \underbrace{\int_a^b f\alpha}_{\text{кон. по а}} + \underbrace{\int_a^b f(g-\alpha)}_{\text{сс сходится по 1}}$$

Пояснение насчет сходимости  $\int_a^b f(g-\alpha)$ :

(a)  $F : A \mapsto \int_a^A f - \text{ограничена, т.к. } \int_a^b f \text{ сходится}$

(b)  $g \rightarrow \alpha \Rightarrow (g - \alpha) \rightarrow 0$

□

## 2.42 Интеграл Дирихле

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Доказательство.

$$\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$$

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos x + 2 \sin \frac{x}{2} \cos 2x + \dots + 2 \sin \frac{x}{2} \cos nx = \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) x - \frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{3}{2}x - \sin \frac{1}{2}x + \dots + \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) x - \sin \left(n - \frac{1}{2}\right) x = \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) x - \frac{1}{2}$$

$$\int_0^\pi \cos kx = \frac{1}{k} \sin kx \Big|_0^\pi = 0$$

Проинтегрируем исходное выражение по  $[0, \pi]$ :

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_0^\pi \dots = \int_0^\pi \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} dx - \frac{\pi}{2} \\
 &\quad \int_0^\pi \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \\
 \int_0^\pi \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{\sin x} dx &= \left[ \begin{array}{l} y = \left(n + \frac{1}{2}\right)x \\ x = \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \\ dx = \frac{1}{n + \frac{1}{2}} dy \end{array} \right] = \\
 &= \int_0^{(n + \frac{1}{2})\pi} \frac{\sin y}{\frac{1}{n + \frac{1}{2}} y} \frac{1}{n + \frac{1}{2}} dy = \int_0^{(n + \frac{1}{2})\pi} \frac{\sin y}{y} dy
 \end{aligned}$$

Итого:

$$\int_0^\pi \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{x} dx = \int_0^{(n + \frac{1}{2})\pi} \frac{\sin y}{y} dy$$

Проверим:

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} dx - \int_0^\pi \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{x} dx &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\
 \int_0^\pi \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x h(x) dx \\
 h(x) = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{x} &= \frac{x - 2 \sin \frac{x}{2}}{2x \sin \frac{x}{2}} = \frac{\mathcal{O}(x^3)}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \\
 \int_0^\pi \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x h(x) dx &= \left[ \begin{array}{l} f = h(x) \\ g' = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x \end{array} \right] = \\
 = \frac{-1}{n + \frac{1}{2}} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x h(x) \Big|_0^\pi &+ \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \int_0^\pi \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x h'(x) dx \\
 h'(x) = -\frac{\cos \frac{x}{2}}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{x^2} &= \frac{x^2 \cos \frac{x}{2} - 4 \sin^2 \frac{x}{2}}{4x^2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{x^2 \left(1 - \frac{x^2}{4} + o(x^3)\right) - 4 \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48} + o(x^3)\right)}{4x^2 \sin^2 \frac{x}{2}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \text{const} \\
 \Rightarrow h'(0) = \text{const (той, которая lim)} &\text{ и } h \in C^1[0, \pi]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x h(x) dx &= \underbrace{\frac{-1}{n + \frac{1}{2}} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x \underbrace{h(x)}_{\text{огр.}} \Big|_0^\pi}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{1}{n + \frac{1}{2}} \int_0^\pi \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x \underbrace{h'(x)}_{\text{огр., т.к. } \in C^1} dx}_{\substack{\text{огр., непр.} \\ \text{огр. как ф-ция от } n \\ \rightarrow 0}}
 \end{aligned}$$

$$\underbrace{\int_0^{(n + \frac{1}{2})\pi} \frac{\sin x}{x} dx}_{\rightarrow \text{инт. Дирихле}} = \underbrace{\int_0^\pi \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{x} dx - \int_0^\pi \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} dx}_{\rightarrow 0} + \int_0^\pi \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} dx \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

□

### 2.43 Неравенство Йенсена для сумм

$f$  — выпуклая на  $\langle a, b \rangle$ . Тогда

$$\forall x_1 \dots x_n \in \langle a, b \rangle \quad \forall \alpha_1 \dots \alpha_n : \alpha_i \geq 0 \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1 \quad f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)$$

*Доказательство.* Для  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$  тривиально.

$$\begin{aligned} \min x_i \leq x^* := \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n &\leq (\alpha_1 + \dots + \alpha_n) \max(x_i) = \max(x_i) \\ &\Rightarrow x^* \in \langle a, b \rangle \end{aligned}$$

В  $x^*$  можно провести опорную прямую  $y = kx + b$

$$f(x^*) = kx^* + b = \sum_{i=1}^n (\alpha_i kx_i) + b = \sum_{i=1}^n \alpha_i (kx_i + b) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$$

□

### 2.44 Неравенство Йенсена для интегралов

- $f$  — выпуклая на  $\langle A, B \rangle$
- $\varphi : [a, b] \rightarrow \langle A, B \rangle$  — непрерывная
- $\lambda : [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$  — непрерывная (для кусочно-непрерывной тоже верно)
- $\int_a^b \lambda(t) dt = 1$

Тогда

$$f\left(\int_a^b \lambda(t) \varphi(t) dt\right) \leq \int_a^b \lambda(t) f(\varphi(t)) dt$$

*Доказательство.*  $m := \inf \varphi, M := \sup \varphi$

$$m \leq m \int_a^b \lambda(t) \leq \int_a^b \lambda(t) \varphi(t) \leq M \int_a^b \lambda(t) = M$$

$$x^* := \int_a^b \lambda(t) \varphi(t) dt \Rightarrow x^* \in \langle A, B \rangle$$

Для  $m = M$  тривиально.

$y = kx + b$  — опорная прямая в точке  $x^*$  графика  $f$ .

$$\begin{aligned} f(x^*) = kx^* + b &= k \int_a^b \lambda \varphi + b \int_a^b \lambda = \int_a^b \lambda(t) (k\varphi(t) + b) dt \leq \\ &\leq \int_a^b \lambda(t) f(\varphi(t)) dt \end{aligned}$$

□

### 2.45 Неравенство Коши (для сумм и для интегралов)

$$a_i > 0 \quad \frac{1}{n} \sum a_i \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

Доказательство.  $f(x) = \ln x$  — вогн.,  $\alpha_i = \frac{1}{n}$ , по неравенству Йенсена:

$$\ln \left( \frac{1}{n} a_1 + \dots + \frac{1}{n} a_n \right) \geq \frac{1}{n} \ln a_1 + \dots + \frac{1}{n} \ln a_n$$

$$\ln \left( \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right) \geq \frac{1}{n} \ln(a_1 \cdots a_n)$$

$$\ln \left( \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right) \geq \ln(a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq (a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

□

Для интегралов?

### 2.46 Неравенство Гельдера для сумм

$a_1 \dots a_n, b_1 \dots b_n > 0, p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Тогда

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left( \sum a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Частный случай при  $p = q = 2$  — неравенство Коши-Буняковского.

Доказательство.  $f(x) = x^p, (p > 1)$  — строго выпуклая  $\Rightarrow f'' = p(p-1)x^{p-2} > 0$

По Йенсену  $(\sum \alpha_i x_i)^p \leq \sum \alpha_i x_i^p$

$$\text{Левая часть}^{\frac{1}{p}} = \sum \frac{b_i^q}{\sum b_i^q} a_i b_i^{\frac{-1}{p-1}} \sum b_i^q = \sum a_i b_i$$

$$\text{Правая часть} = \sum \frac{b_i^q}{\sum b_i^q} a_i^p b_i^{-q} \left( \sum b_j^q \right)^p = \left( \sum a_i^p \right) \left( \sum b_j^q \right)^{\frac{p}{q}}$$

$$\text{Правая часть}^{\frac{1}{p}} = \left( \sum a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum b_j^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

□

### 2.47 Неравенство Гельдера для интегралов

$p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, f, g \in C[a, b]$ . Тогда

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left( \int_a^b |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_a^b |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Неравенство КБШ в пространстве функций — частный случай этого неравенства.

*Доказательство.* По интегральным суммам:

$$x_i := a + i \frac{b-a}{n} \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad a_i := f(x_i)(\Delta x_i)^{\frac{1}{p}} \quad b_i = g(x_i)(\Delta x_i)^{\frac{1}{q}}$$

$$a_i b_i = f(x_i)g(x_i)(\Delta x_i)$$

$$\left| \sum_{i=1}^n f(x_i)g(x_i)\Delta x_i \right| \leq \left( \sum |f(x_i)|^p \Delta x_i \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum |g(x_i)|^q \Delta x_i \right)^{\frac{1}{q}}$$

Предельный переход доказывает искомое. □

## 2.48 Неравенство Минковского

$p \geq 1, \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}$

$$\left( \sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Это неравенство треугольника для нормы  $\|a\|_p = \left( \sum |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

*Доказательство.*  $p = 1$  тривиально,  $|a_i + b_i| \leq |a_i| + |b_i|$

Докажем для положительных  $a_i, b_i$ , другие случаи сводятся к этому.

По неравенству Гёльдера для  $q = p/(p-1)$ :

$$\sum a_i(a_i + b_i)^{p-1} \leq \left( \sum a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum (a_i + b_i)^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} = \left( \sum a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\sum b_i(a_i + b_i)^{p-1} \leq \left( \sum b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum (a_i + b_i)^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} = \left( \sum b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

Сложим эти два неравенства:

$$\sum (a_i + b_i)^p \leq \left( \left( \sum a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \left( \sum (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left( \sum (a_i + b_i)^p \right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left( \sum a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum b_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left( \sum (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum b_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

□

## 2.49 Свойства верхнего и нижнего пределов

1.  $\underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$

2.  $\forall n \quad x_n \leq \tilde{x}_n \Rightarrow$

(a)  $\overline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} \tilde{x}_n$

(b)  $\underline{\lim} x_n \leq \underline{\lim} \tilde{x}_n$

3.  $\lambda \geq 0 \Rightarrow \overline{\lim}(\lambda x_n) = \lambda \overline{\lim} x_n; \underline{\lim} \lambda x_n = \lambda \underline{\lim} x_n$ , считаем что  $0 \cdot (\pm\infty) = 0$

4.  $\overline{\lim} -x_n = -\underline{\lim} x_n; \underline{\lim} -x_n = -\overline{\lim} x_n$

5.  $\overline{\lim}(x_n + y_n) \leq \overline{\lim}x_n + \overline{\lim}y_n$ , если правая часть имеет смысл, т.е. нет ситуации вида  $+\infty - \infty$   
 $\underline{\lim}(x_n + y_n) \leq \underline{\lim}x_n + \underline{\lim}y_n$
6.  $t_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{\lim}(x_n + t_n) = \overline{\lim}x_n + l$
7.  $t_n \rightarrow l \in (0, +\infty) \Rightarrow \overline{\lim}(t_n x_n) = l \overline{\lim}x_n$

**Доказательство.** 1.  $y_n \leq x_n \leq z_n$ , по предельному переходу тривиально.

2.  $z_n = \sup(x_n, x_{n+1}, \dots), \tilde{z}_n = \sup(\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n+1}, \dots) \Rightarrow z_n \leq \tilde{z}_n$
3.  $\sup \lambda E = \lambda \sup E$
4.  $\sup -E = -\inf E$
5.  $\sup(x_n + y_n, x_{n+1} + y_{n+1}, \dots) \leq \sup(x_n, x_{n+1}, \dots) + \sup(y_n, y_{n+1}, \dots)$
6.  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \forall k > N_0 \quad x_k + l - \varepsilon < x_k + t_k < x_k + l + \varepsilon$   
 $\langle N \rangle N_0$ , перейдем к  $\sup$  по  $k \geq N$ :

$$y_N + l - \varepsilon < \sup(x_N + t_N, x_{N+1} + t_{N+1}, \dots) \leq y_N + l + \varepsilon$$

Предельный переход:

$$\overline{\lim}x_N + l - \varepsilon \leq \overline{\sup}(x_N + t_N) \leq \overline{\lim}x_N + l + \varepsilon$$

$$\lim(x_n + t_n) = \overline{\lim}x_n + l$$

7. То же самое.

□

## 2.50 Техническое описание верхнего предела

1.  $\overline{\lim}x_n = +\infty \Leftrightarrow x_n$  — неогр. сверху
2.  $\overline{\lim}x_n = -\infty \Leftrightarrow x_n \rightarrow -\infty$
3.  $\overline{\lim}x_n = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$  а и б:
- (а)  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad x_n < l + \varepsilon$
- (б)  $\forall \varepsilon > 0$  для бесконечного множества номеров  $n : l - \varepsilon < x_n$

**Доказательство.** 1. Очевидно, т.к.  $y_n = \sup(x_n, x_{n+1}, \dots) = +\infty \Leftrightarrow x_n$  — неогр. сверху

2. “ $\Rightarrow$ ”  $x_n \leq y_n \rightarrow -\infty$   
 “ $\Leftarrow$ ”  $\forall A \exists N \forall n > N \quad y_n \leq A, x_n < A$
3. “ $\Rightarrow$ ” (а)  $y_n \rightarrow l \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad x_n \leq y_n < l + \varepsilon$   
 (б) Берём  $\varepsilon > 0$ , предположим противное :  $\exists$  конечное мн-во  $n : l - \varepsilon < x_n$   
 $]n_0$  — максимальный номер, такой что  $l - \varepsilon < x_{n_0}$ , тогда  $y_{n_0} \leq l - \varepsilon$ , но  $y_n \downarrow \Rightarrow$   
 $\lim y_n \leq l - \varepsilon$
- “ $\Leftarrow$ ”  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad x_n < l + \varepsilon \Rightarrow y_n \leq l + \varepsilon$ , но в  $x_n, x_{n+1}, \dots \exists x_i : l - \varepsilon < x_i \Rightarrow y_n = \sup(x_n, x_{n+1}, \dots) > l - \varepsilon$ . Итого  $l + \varepsilon \geq y_n > l - \varepsilon \Rightarrow l = \lim y_n = \overline{\lim}x_n$

□

### 2.51 Теорема о существовании предела в терминах верхнего и нижнего пределов

$$\exists \lim x_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$$

**Доказательство.** “ $\Rightarrow$ ” 1.  $\lim x_n = +\infty \Rightarrow \overline{\lim} x_n = \lim y_n \geq \lim x_n = +\infty$   
 2.  $\lim x_n = -\infty$  аналогично  
 3.  $\lim x_n = l \in \mathbb{R}$  очевидно из технического описания предела, пункт 3.  
 “ $\Leftarrow$ ”  $\underline{\lim} x_n \leftarrow z_n \leq x_n \leq y_n \rightarrow \overline{\lim} x_n$ , по теореме о городских  $\exists \lim x_n = \overline{\lim} x_n$

□

### 2.52 Теорема о характеристизации верхнего предела как частичного

1.  $\forall l$  — частичный пр.  $x_n$   $\underline{\lim} x_n \leq l \leq \overline{\lim} x_n$
2.  $\exists (n_k) : x_{n_k} \rightarrow \overline{\lim} x_n \quad \exists m_k : x_{m_k} \rightarrow \underline{\lim} x_n$

**Доказательство.** 1.  $x_{n_k} \rightarrow l \quad \underline{\lim} x_n \leftarrow z_{n_k} \leq x_{n_k} \leq y_{n_k} \rightarrow \overline{\lim} x_n \Rightarrow \underline{\lim} x_n \leq l \leq \overline{\lim} x_n$   
 2. (a)  $\overline{\lim} x_n = +\infty \Leftrightarrow x_n$  — неогр сверху  $\Rightarrow$  можно выбрать  $x_{n_1} < x_{n_2} < \dots x_n \rightarrow +\infty$   
 (b)  $\overline{\lim} x_n = -\infty$  тривиально.  
 (c)  $\overline{\lim} x_n = l \in \mathbb{R} \exists x_{n_k} : l - \frac{1}{k} < x_{n_k} < l + \frac{1}{k}$

□

### 2.53 Частичные пределы последовательности $\sin(n)$

1.  $\overline{\lim} \sin n = 1, \underline{\lim} \sin n = -1$
2.  $\forall l \in [-1, 1]$  — частичный предел последовательности  $\sin n$

**Доказательство.** 1. Тривиально

2.  $n_k := \arcsin l + 2\pi k$

**У Кохася было непонятное длинное доказательство**

□

### 2.54 Свойства рядов: линейность, свойства остатка, необх. условие сходимости, критерий Больцано–Коши

1.  $\sum a_n, \sum b_n$  сходятся,  $c_n := a_n + b_n$ . Тогда  $\sum c_n$  сходится
2.  $\sum a_n$  — сходится,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Тогда  $\sum \lambda a_n$  сходится и  $\sum \lambda a_n = \lambda \sum a_n$
3. (a)  $\sum a_n$  — сходится  $\Rightarrow$  любой остаток сходится  
 (b) остаток сходится  $\Rightarrow \sum a_n$  сходится  
 (c)  $r_N = \sum_{n \geq N} a_n$  сходится  $\Leftrightarrow r_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$

**Доказательство.** (a) ? $m$ -й остаток,  $N \geq m : \sum_{n=1}^N a_n = \sum_{n=1}^{m-1} a_n + \sum_{n=m}^N a_n$

(b) Аналогично.



(с) “ $\Leftarrow$ ” Тривиально.

$$\text{“}\Rightarrow\text{”} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{m-1} a_n + r_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + r_{+\infty} \Rightarrow r_N \rightarrow 0$$

□

$$\sum a_n \text{ сходитс} \Rightarrow a_n \rightarrow 0$$

$$\sum a_n \text{ сходитс} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall k > N \forall m \in \mathbb{N} |a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{k+m}| < \varepsilon$$

## 2.55 ! Признак сравнения сходимости положительных рядов

$$a_k, b_k \geq 0$$

1.  $\forall k \ a_k \leq b_k$ , или  $\exists c > 0 \ \forall k \ a_k \leq cb_k$ . Тогда  $\sum b_k \text{ сх.} \Rightarrow \sum a_k \text{ сх.}, \sum a_k \text{ расх.} \Rightarrow \sum b_k \text{ расх.}$

2.  $\exists \lim \frac{a_k}{b_k} = l \in [0, +\infty]$ . Тогда при

$$0 < l < +\infty : \sum a_k \text{ сх.} \Leftrightarrow \sum b_k \text{ сх.}$$

$$l = 0 : \sum b_k \text{ сх.} \Rightarrow \sum a_k \text{ сх.}, \sum a_k \text{ расх.} \Rightarrow \sum b_k \text{ расх.}$$

$$l = +\infty : \sum a_k \text{ сх.} \Rightarrow \sum b_k \text{ сх.}, \sum b_k \text{ расх.} \Rightarrow \sum a_k \text{ расх.}$$

Доказательство.

**Лемма 1.**  $a_n \geq 0 \quad \sum a_n \text{ сходитс} \Leftrightarrow S_n \text{ ограничено сверху.}$

Доказательство.  $\exists \text{ кон. } \lim S_n \Leftrightarrow S_n \text{ ограничено сверху.}$

□

1.  $S_n^{(a)} \leq S_n^{(b)}$ ;  $S_n^{(b)} \text{ огр.} \Rightarrow S_n^{(a)} \text{ огр.}$ , по лемме  $a_n$  сходитс. Аналогично расходимость.

2. (а)  $0 < l < +\infty$ : Для  $\varepsilon = \frac{l}{2} \exists N \forall n > N \ \frac{1}{2}lb_n < a_n < \frac{3}{2}lb_n$ , дальше по 1 пункту.

(б)  $l = 0$ :  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \ \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon \Rightarrow a_n < \varepsilon b_n \Rightarrow$  по 1 пункту.

(с)  $l = +\infty$ :  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \ \frac{a_n}{b_n} > \varepsilon \Rightarrow a_n > b_n \varepsilon \Rightarrow$  по 1 пункту.

□

## 2.56 ! Признак Коши сходимости положительных рядов

$$a_n \geq 0, K_n := \sqrt[n]{a_n}. \text{ Тогда:}$$

Lite:

1. Если  $\exists q < 1 : K_n \leq q$ , начиная с некоторого места (НСМ)  $(\exists N : \forall n > N) \Rightarrow \sum a_n \text{ сходитс.}$

2.  $K_n \geq 1$  для бесконечного множества  $\Rightarrow \sum a_n \text{ расходитс.}$

$$\text{Pro: } K := \overline{\lim} K_n$$

1.  $K < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ сходитс}$

2.  $K > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ расходитс}$

Доказательство. Lite:

1. НСМ  $\sqrt[n]{a_n} \leq q \Leftrightarrow a_n \leq q^n, q_n \text{ сх.} \Rightarrow \sum a_n \text{ сх.}$

$$2. \sqrt[n]{a_n} \geq 1 \Leftrightarrow a_n \geq 1 \Rightarrow a_n \not\rightarrow 0 \Rightarrow \sum a_n \text{ расх.}$$

Pro:

1. По техническому описанию  $\overline{\lim} \exists N \forall n > N \ K_n < q \Rightarrow$  по Lite.1 сходится.

2.  $l = \overline{\lim} K_n > 1, 1 = l - \varepsilon$ . Тогда  $K_n \geq 1$  для бесконечного множества  $n \Rightarrow$  по Lite.2 расходится.

□

## 2.57 Признак Коши сходимости положительных рядов (pro)

Дано выше. (2.56, стр. 42)

## 2.58 Признак Даламбера сходимости положительных рядов

$$a_n > 0, D_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Lite:

1.  $\exists q < 1 : D_n < q \text{ НСНМ} \Rightarrow \sum a_n \text{ сх.}$

2.  $D_n \geq 1 \text{ НСНМ} \Rightarrow \sum a_n \text{ расх.}$

Pro:  $D := \lim D_n$

1.  $D < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ сх.}$

2.  $D > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ расх.}$

Доказательство. Lite:

1.  $\exists N : \frac{a_{N+1}}{a_N} < q, \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < q, \dots$

$$\frac{a_n}{a_N} < q^{n-N}$$

$$a_n < q^n \left( \frac{a_N}{q^N} \right)$$

$$\sum q^n \text{ сх.} \Rightarrow \sum a_n \text{ сх.}$$

2.  $D_n \geq 1 \Leftrightarrow a_{n+1} \geq a_n$ , при  $n > N \ a_n \geq a_N \Rightarrow a_n \geq A_N \Rightarrow a_n \not\rightarrow 0$ . Также можно аналогично пункту 1.

Pro:

1.  $q := \frac{1+D}{2}$ . По определению предела  $\varepsilon := q - D \exists N \forall n > N \ D_n < q \xrightarrow{\text{Lite1}} \sum a_n \text{ сх.}$

2.  $\varepsilon := D - 1 \exists N \forall n > N \ D_n > 1 \xrightarrow{\text{Lite2}} \sum a_n \text{ расх.}$

□

## 2.59 Признак Раабе сходимости положительных рядов

$a_n > 0, R_n := n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$ . Тогда:

$$1. \exists r > 1 \quad R_n \geq r \text{ НСНМ} \Rightarrow \sum a_n \text{ сх.}$$

$$2. R_n \leq 1 \text{ НСНМ} \Rightarrow \sum a_n \text{ сх.}$$

*Доказательство.* 1.  $R_n \geq r \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 + \frac{r}{n}$

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s - 1}{\frac{1}{n}} < r \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s < 1 + \frac{r}{n}$$

$$b_n := \frac{1}{n^s} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\frac{a_n}{a_{n+1}}} \leq \frac{1}{1 + \frac{r}{n}} < \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

$$\sum b_n \text{ сх.} \Rightarrow \sum a_n \text{ сх. по лемме 1.}$$

$$2. R_n \leq 1 \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n}{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{n+1}}$$

$$b_n = \frac{1}{n} \text{ расх.} \Rightarrow \sum a_n \text{ расх.}$$

□

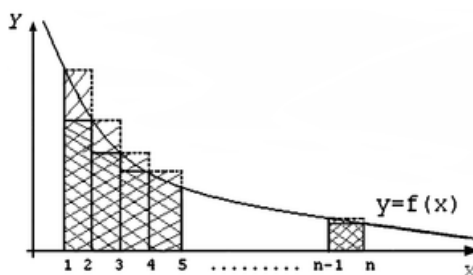
## 2.60 Интегральный признак Коши сходимости числовых рядов

$f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  монотонно убывает,  $f \geq 0, f$  непр.

Тогда  $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$  и  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$  сходятся/расходятся одновременно.

*Доказательство.*

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^{n+1} f(x)dx + \Delta_n$$



$\Delta_n$  — площадь криволинейных треугольников, получаемых отсечением кривой  $y = f(x)$ .

$$0 \leq \Delta_n \leq f(1) - f(n) \leq f(1)$$

$$\Delta_n \uparrow \Rightarrow \exists \text{ кон. } \lim \Delta_n$$

Более формальный вариант, без картинок:

$$\sum_{k=1}^n - \int_1^{n+1} = \sum_{k=1}^n \left( f(k) - \int_k^{k+1} f(x)dx \right)$$

Т.к.  $f \downarrow$ :

$$\int_k^{k+1} f(x) dx \geq \int_k^{k+1} f(k+1) dx = f(k+1)$$

$$\sum_{k=1}^n \left( f(k) - \int_k^{k+1} f(x) dx \right) \leq \sum_{k=1}^n f(k) - f(k+1) = f(1) - f(n+1)$$

□

## 2.61 ! Признак Лейбница

$c_n \geq 0, c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq \dots, c_n \rightarrow 0$

Тогда  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n c_n$  сх.

Доказательство.

$$S_{2N} = c_1 - c_2 + \dots + c_{2N-1} - c_{2N}$$

$$S_{2N+2} = S_{2N} + (c_{2N+1} - c_{2N+2}) \geq S_{2N}$$

$$S_{2N} \uparrow, S_{2N} \leq c_1$$

□

## 2.62 Признаки Дирихле и Абеля сходимости числового ряда

Дирихле:

1. Последовательность  $A_k = \sum_{i=1}^k a_i$  ограничена:  $\exists C_A > 0 \forall k |A_k| < C_A$
2.  $b_k$  монотонна и  $\rightarrow 0$

Абеля:

1. Ряд  $\sum a_k$  сходится
2.  $b_k$  монотонна, ограничена:  $\exists C_B > 0 \forall k |A_k| < C_B$

Если хотя бы один из этих признаков состоялся,  $\sum_{k=1}^n a_k b_k$  сходится.

Доказательство.

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \underbrace{A_n b_n}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})}_{\substack{\exists \text{ конечный предел,} \\ \text{т.к. ряд абсолютно сходится}}}$$

Докажем Дирихле.

$$\sum_{k=1}^{n-1} |A_k| |b_k - b_{k+1}| \leq C_A \sum_{k=1}^{n-1} |b_k - b_{k+1}| = \pm C_A \sum_{k=1}^{n-1} b_k - b_{k+1} = \pm \underbrace{C_A (b_1 - b_n)}_{\text{огр.}} \leq C_A C_B$$

Докажем Абеля.

$\exists$  конечный  $\beta = \lim_{k \rightarrow +\infty} b_k$

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \beta \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n a_k (b_k - \beta)$$

Второй ряд сходится по признаку Дирихле, первый сходится по условию.

□

### 2.63 Теорема о перестановке слагаемых

Ряд  $A$  абсолютно сходится, тогда его перестановка  $B$  тоже абсолютно сходится и имеет ту же сумму.

*Доказательство.* 1.  $a_k \geq 0$

$$S_n^{(b)} = b_1 + \dots + b_n = a_{w(1)} + \dots + a_{w(n)} \leq S_N^{(a)}, N = \max(w(1) \dots w(n))$$

Предельный переход:  $S^{(b)} \leq S^{(a)}$

Т.к.  $A$  — перестановка  $B$ , то  $S^{(a)} \leq S^{(b)} \Rightarrow S^{(a)} = S^{(b)}$

2. Общий случай

$$a_k^+ = \max(a_k, 0), a_k^- = \max(-a_k, 0)$$

$$\sum b_k^+ - \text{перестановка} \sum a_k^+; \sum b_k^- - \text{перестановка} \sum a_k^-$$

Срезки сходятся по пункту 1., в силу абсолютной сходимости частичные суммы конечны  
 $\Rightarrow S^{(a)} = S^{(b)}$

□

### 2.64 Теорема о произведении рядов

*Доказательство.*  $\sum |a_k| = A^*, \sum |b_k| = B^*, 0 \leq A^*, B^* < +\infty$

$$\sum_{k=1}^N |a_{\varphi(x)} b_{\psi(x)}| \leq \sum_{i=1}^M |a_i| \sum_{j=1}^L |b_j| \leq A^* B^*$$

$$M := \max(\varphi(1) \dots \varphi(N)) \quad N := \max(\psi(1) \dots \psi(N))$$

Итого произведение сходится абсолютно  $\Rightarrow \forall \gamma$  произведение рядов имеет одинаковую сумму.

Возьмём  $\gamma$  такое, что оно обходит точки  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  “по квадратам”, т.е. не заходит в следующий квадрат, пока не обошло предыдущий. Тогда:

$$\sum_{k=1}^{n^2} a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)} = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n b_j \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} AB$$

□

### 2.65 Теорема об условиях сходимости бесконечного произведения

1.  $a_n > 0$  НСНМ. Тогда  $\prod 1 + a_n$  сходится  $\Leftrightarrow \sum a_n$  сходится.

2.  $\sum a_n$  сходится,  $\sum a_n^2$  сходится  $\Rightarrow \prod (1 + a_n)$  сходится.

*Доказательство.* 1.  $\prod (1 + a_n) - \text{сх.} \Leftrightarrow \sum \ln(1 + a_n) - \text{сх.} \Leftrightarrow \sum a_n - \text{сх.}$

$$2. \ln(1 + a_n) = a_n - \frac{a_n^2}{2} + o(a_n^2)$$

$$\sum_{n=1}^N \ln(1 + a_n) = \sum_{n=1}^N a_n - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N a_n^2 + \underbrace{\sum_{n=1}^N o(a_n^2)}_{\text{абс.сх}}$$

□

## 2.66 Лемма об оценке приближения экспоненты ее замечательным пределом

$0 \leq t \leq n$ . Тогда

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2 e^{-t}}{n}$$

*Доказательство.* Т.к.  $y = 1 + x$  — график касательной к  $e^x$  в  $x = 0$  и экспонента выпуклая:

$$1 + y \leq e^y$$

Произошла коллизия переменных,  $x$  стал  $y$ .

Заменим  $y$  на  $-y$ :

$$1 - y \leq e^{-y}$$

Возведем в степень  $-1$ :

$$(1 - y)^{-1} \geq e^y$$

Итого:

$$1 + y \leq e^y \leq (1 - y)^{-1}$$

$$y := \frac{t}{n}$$

$$1 + \frac{t}{n} \leq e^{\frac{t}{n}} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{-1}$$

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^{-n} \geq e^{-t} \geq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

По правому неравенству:

$$e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \geq 0$$

Возведем левое неравенство в степень  $-1$ :

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leq e^t$$

$$e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t} \left(1 - e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) \leq e^{-t} \left(1 - \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) = e^{-t} \left(1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right)$$

$$e^{-t} \left(1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right) \stackrel{\text{неравенство Бернулли}}{\leq} \frac{t^2}{n} e^{-t}$$

*Примечание.* Неравенство Бернулли:  $(1 + a)^n \geq 1 + an$ ,  $a \geq -1$ , в данном случае  $a = -\frac{t^2}{n^2}$

В неравенстве Бернулли  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$  **предположительно** в лемме  $n \in \mathbb{N}$ , на лекции этого не было сказано.  $\square$

## 2.67 Формула Эйлера для $\Gamma$ -функции

При  $x > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{x(x+1) \cdots (x+n)} n^x = \Gamma(x)$$

Доказательство.

$$\Gamma(x) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \Pi(n, x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \underbrace{\int_0^n \left( e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right) t^{x-1} dt}_I + \underbrace{\int_n^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt}_II \right) \stackrel{?}{=} 0$$

$II \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , т.к. это “остаточный интеграл”, при  $n \rightarrow +\infty$  интеграл “берется по нулевому промежутку”.

По лемме о приближении  $e$  пределом:

$$0 \leq I \leq \int_0^n \frac{1}{n} t^2 e^{-t} t^{x-1} dt \leq \frac{1}{n} \int_0^n e^{-t} t^{x+1} dt \leq \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x+1} dt = \frac{\Gamma(x+2)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

□

## 2.68 Формула Вейерштрасса для $\Gamma$ -функции

При  $x > 0$ :

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}$$

где  $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \dots + \frac{1}{n} - \ln n)$  — постоянная Эйлера.

Вывод формулы Вейерштрасса (из формулы Эйлера):

Доказательство.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(x)} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-x} \frac{x(x+1) \dots (x+n)}{n!} = x \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-x} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) = \\ &= x \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{e^{x(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n})-x \ln n}}_{e^{\gamma+o(1)}} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} = e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} \end{aligned}$$

□

## 2.69 Вычисление произведений с рациональными сомножителями

$a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$ ,  $P$  и  $Q$  — многочлены.

$\prod a_n = ?$

Пусть  $P$  и  $Q$  разложены на множители, т.е:

$$P(n) = \alpha(n+a_1)(n+a_2) \dots (n+a_k)$$

$$Q(n) = \beta(n+b_1)(n+b_2) \dots (n+b_l)$$

$$a_n = \frac{\alpha(n+a_1) \dots (n+a_k)}{\beta(n+b_1) \dots (n+b_l)}$$

Если  $k \neq l$ , то  $a_n \rightarrow 0$  или  $a_n \rightarrow +\infty \Rightarrow \prod a_n$  расходится.  $\triangleleft k = l$

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{\beta}$$

Если  $\frac{\alpha}{\beta}$ , то  $a_n \not\rightarrow 1 \Rightarrow \prod a_n$  расходится.  $\triangleleft \frac{\alpha}{\beta} = 1$

$$a_n = \frac{(1 + \frac{a_1}{n}) \dots (1 + \frac{a_k}{n})}{(1 + \frac{b_1}{n}) \dots (1 + \frac{b_l}{n})} = 1 + \frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_k - b_1 - \dots - b_k) + O(\frac{1}{n^2})$$

Если  $\sum_{i=1}^k a_i \neq \sum_{i=1}^l b_i$ , то  $\prod a_n$  расходится.  $\triangleleft \sum_{i=1}^k a_i = \sum_{i=1}^l b_i$

$$\prod_{n=1}^N \frac{(1 + \frac{a_1}{n}) \dots (1 + \frac{a_k}{n})}{(1 + \frac{b_1}{n}) \dots (1 + \frac{b_l}{n})} = \prod_{n=1}^N \frac{(1 + \frac{a_1}{n}) e^{-\frac{a_1}{n}} \dots (1 + \frac{a_k}{n}) e^{-\frac{a_k}{n}}}{(1 + \frac{b_1}{n}) e^{-\frac{b_1}{n}} \dots (1 + \frac{b_l}{n}) e^{-\frac{b_l}{n}}}$$

Равенство состоялось, т.к.  $\sum a_i = \sum b_i$ .

По формуле Вейерштрасса:

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{a}{n}\right) e^{-\frac{a}{n}} &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{ae^{\gamma a} \Gamma(a)} \\ \prod_{n=1}^N \frac{(1 + \frac{a_1}{n}) e^{-\frac{a_1}{n}} \dots (1 + \frac{a_k}{n}) e^{-\frac{a_k}{n}}}{(1 + \frac{b_1}{n}) e^{-\frac{b_1}{n}} \dots (1 + \frac{b_l}{n}) e^{-\frac{b_l}{n}}} &\rightarrow \frac{b_1 e^{\gamma b_1} \Gamma(b_1) \dots b_l e^{\gamma b_l} \Gamma(b_l)}{a_1 e^{\gamma a_1} \Gamma(a_1) \dots a_k e^{\gamma a_k} \Gamma(a_k)} = \\ &= \frac{e^{\gamma b_1} \Gamma(b_1 + 1) \dots e^{\gamma b_l} \Gamma(b_l + 1)}{e^{\gamma a_1} \Gamma(a_1 + 1) \dots e^{\gamma a_k} \Gamma(a_k + 1)} = \frac{\Gamma(b_1 + 1) \dots \Gamma(b_l + 1)}{\Gamma(a_1 + 1) \dots \Gamma(a_k + 1)} \end{aligned}$$

## 2.70 Единственность производной

Производный оператор единственный.

Доказательство.

$$\exists \delta > 0 \quad \forall h : |h| < \delta \quad a + h \in E$$

Возьмём  $v \in \mathbb{R}^m \quad h := tv, t < \frac{\delta}{|v|}$

По определению дифференциала:

$$F(a + tv) = F(a) + F'(a)tv + |tv|\alpha(tv) = F(a) + tF'(a)v + |t||v|\alpha(tv)$$

$$\begin{aligned} F'(a)v &= \frac{F(a + tv) - F(a)}{t} - \overbrace{\frac{|t|}{t} |v|\alpha(tv)}^{\xrightarrow{t \rightarrow 0} \pm |v|0} \\ &= \underbrace{\frac{|t|}{t}}_{\pm 1} |v|\alpha(tv) \\ F'(a)v &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(a + tv) - F(a)}{t} \end{aligned}$$

Т.к. по всем направлениям производная равна, оператор единственный. □



### 2.71 Лемма о дифференцируемости отображения и его координатных функций

$F : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \quad a \in \text{Int}E$

$F(x) = (f_1(x), f_2(x) \dots f_n(x))$ . Тогда:

1.  $F$  — дифф. в  $a \Leftrightarrow$  все  $f_i$  дифференцируемы в  $a$
2.  $\forall i = 1 \dots n \quad i$ -я строка матрицы Якоби  $F$  есть матрица Якоби  $f_i$

### 2.72 Необходимое условие дифференцируемости.

$f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, a \in \text{Int}E, f$  — дифф. в  $a$

Тогда  $\exists f'_1(a), \dots, f'_m(a)$  и матрица Якоби  $f$  в точке  $a = (f'_1(a), \dots, f'_m(a))$

Доказательство.

$$f(x) = f(a) + (l_1 \dots l_m)(x - a) + \alpha(x)|x - a|$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - L(x - a)}{|x - a|} = 0$$

Посчитаем предел по направлению  $x = a + te_k, e_k = (0 \dots 0, 1, 0 \dots 0)$

$$f(a + te_k) - f(a) + l_x t + \alpha_k(t)|t| \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = l_k$$

□

### 2.73 ! Достаточное условие дифференцируемости

$f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \quad \exists r > 0 \quad B(a, r) \subset E$  и в этом шаре  $\exists f'_1 \dots f'_m$  (конечные) и они непрерывны в точке  $a$ . Тогда  $f$  дифф. в  $a$

Доказательство.  $\triangleleft m = 2$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2) &= \\ &= f(x_1, x_2) - f(x_1, a_2) + f(x_1, a_2) - f(a_1, a_2) = \\ &= f'_2(x_1, \bar{x}_2)(x_2 - a_2) + f'_1(\bar{x}_1, a_2)(x_1 - a_1) = \\ &= f'_2(a_1, a_2)(x_2 - a_2) + f'_1(a_1, a_2)(x_1 - a_2) + (f'_2(x_1, \bar{x}_2) - f'_2(a_1, a_2)) \frac{x_2 - a_1}{|x - a|} |x - a| + \text{аналогично} \end{aligned}$$

□

### 2.74 Лемма об оценке нормы линейного оператора

$A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l \quad A = (a_{ij})$ . Тогда  $\forall x \in \mathbb{R}^m: |Ax| \leq C_A |x|$ , где  $C_A = \left( \sum_{i,j} a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

Доказательство.

$$|Ax|^2 = \sum_j \left( \sum_i a_{ij} x_j \right)^2 \stackrel{\text{КБШ}}{\leq} \sum_i \left( \left( \sum_j a_{ij}^2 \right) \left( \sum_j x_j^2 \right) \right)$$

□

### 2.75 ! Дифференцирование композиции

- $F : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$
- $G : I \subset \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$
- $F(E) \subset I$
- $a \in \text{Int}E$
- $F$  дифф. в  $a$
- $F(a) \in \text{Int}I$
- $G$  дифф. в  $F(a)$

Тогда  $G \circ F$  дифф. в  $a$ ,  $(G \circ F)'(a) = G'(F(a))F'(a)$

Доказательство.  $b := F(a)$ . По определению:

$$F(a+h) = F(a) + F'(a)h + \alpha(h)|h|$$

$$G(b+k) = G(b) + G'(b)k + \beta(k)|k|$$

$$\begin{aligned} G(F(a+h)) &= G(F(a)) + G'(F(a))(F'(a)h + \alpha(h)|h|) + \beta(k)|k| = \\ &= G(F(a)) + G'(F(a))F'(a)h + G'(b)\alpha(h)|h| + \beta(k)|F'(a)h + \alpha(h)|h|| \end{aligned}$$

Надо доказать, что  $\underbrace{G'(b)\alpha(h)|h|}_{\text{I}} + \underbrace{\beta(k)|F'(a)h + \alpha(h)|h|}_{\text{II}} = \gamma(h)|h|$ .

$$|\text{I}| = |G'(b)\alpha(h)|h| \leq C_{G'(b)}|\alpha(h)||h|$$

$$|F'(a)h + \alpha(h)|h| \leq |F'(a)h| + |\alpha(h)||h| \leq \underbrace{(C_{F'(a)} + \alpha(h))}_{\text{огр.}} \underbrace{|h|}_{\rightarrow 0}$$

$$k \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$|\text{II}| \leq \underbrace{|\beta(k)|}_{\rightarrow 0} \underbrace{(C_{F'(a)} + \alpha(h))}_{\text{огр.}} \underbrace{|h|}_{\rightarrow 0}$$

$$|\text{I}| + |\text{II}| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

□

### 2.76 Дифференцирование “произведений”

- $F, G : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$
- $a \in \text{Int}E$
- $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}$
- $F, G, \lambda$  дифф. в  $a$

Тогда  $\lambda F, \langle F, G \rangle$  — дифф. в  $a$ :

$$1. (\lambda F)'(a)(h) = (\lambda'(a)h)F(a) + \lambda(a)F'(a)h$$

$$2. \langle F, G \rangle'(a)(h) = \langle F'(a)h, G(a) \rangle + \langle F(a), G'(a)h \rangle$$

Здесь  $h$  нигде не умножается, на него действуют операторы дифференцирования.

*Доказательство.* 1. Для координатной функции  $l = 1$ :

$$\begin{aligned} \lambda f(a+h) - \lambda f(a) &= (\lambda(a) + \lambda'(a)h + o(h))(f(a) + f'(a)h + o(h)) - \lambda(a)f(a) = \\ &= (\lambda'(a)h)f(a) + \lambda(a)f'(a)h + o(h) \\ |(\lambda'(a)h)(f'(a)h)| &\leq C_{\lambda'(a)}|h|C_{f'(a)}|h| \end{aligned}$$

2.

$$\langle F, G \rangle = \sum_{i=1}^l f_i g_i$$

По линейности всего и пункту 1:

$$\langle F, G \rangle'(a)h = \sum_i (f_i g_i)'(a)h \stackrel{1.}{=} \sum_i f'_i(a)h g_i(a) + f(a)g'_i(a)(h) = \langle F'(a)h, G(a) \rangle + \langle F(a), G'(a)h \rangle$$

□

## 2.77 ! Теорема Лагранжа для векторнозначных функций

$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  — непр. на  $[a, b]$ , дифф. на  $(a, b)$

Тогда  $\exists c \in (a, b) : |F(b) - F(a)| \leq |F'(c)|(b-a)$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \varphi(t) &:= \langle F(b) - F(a), F(t) - F(a) \rangle, t \in [a, b] \\ \varphi(a) &= 0 \quad \varphi(b) = |F(b) - F(a)|^2 \\ \varphi'(t) &= \langle F(b) - F(a), F'(t) \rangle \end{aligned}$$

Теорема Лагранжа (для обычных функций):

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(c)(b-a)$$

$$|F(b) - F(a)|^2 = (b-a) \langle F(b) - F(a), F'(c) \rangle \stackrel{\text{КБШ}}{\leq} (b-a) |F(b) - F(a)| |F'(c)|$$

□

## 2.78 Экстремальное свойство градиента

$f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  дифф.  $a \in \text{Int} E$ ,  $\nabla f(a) \neq 0$ .

Тогда  $l = \frac{\nabla f(a)}{|\nabla f(a)|}$  — направление наискорейшего возрастания функции, т.е.

$$\forall h \in \mathbb{R}^m : |h| = 1 \quad -|\nabla f(a)| \leq \frac{\partial f}{\partial h}(a) \leq |\nabla f(a)|$$

, причем “=” достигается только при  $h = \pm l$ , где при “+” достигается “=”

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial h}(a) &= \langle \nabla f, h \rangle \\ -|\nabla f(a)||h| &\leq \langle \nabla f, h \rangle \leq |\nabla f(a)||h| \end{aligned}$$

$|h| = 1$  по построению:

$$-|\nabla f(a)| \leq \langle \nabla f, h \rangle \leq |\nabla f(a)|$$

□

## 2.79 Независимость частных производных от порядка дифференцирования

$f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_0, y_0) \in E$

$\exists r > 0 \ B((x_0, y_0), r) \subset E$

Пусть в этом шаре  $\exists f''_{xy}, f''_{yx}$  и они непрерывны. Тогда  $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$

*Доказательство.*  $\Delta^2(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$

$\alpha(h) := \Delta^2(h, k)$  при фиксированном  $k$

$\alpha(h) = \alpha(h) - \alpha(0) \stackrel{\text{т. Лагранжа}}{=} \alpha'(\bar{h})h = (f'_x(x_0 + \bar{h}, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \bar{h}, y_0))h \stackrel{\text{т. Лагранжа}}{=} f''_{xy}(x_0 + \bar{h}, y_0 + \bar{k})hk$

$\beta(k) := \Delta^2(h, k)$  при фиксированном  $h$

$\beta(k) = f''_{yx}(x_0 + \bar{h}, y_0 + \bar{k})hk$

$$f''_{xy}(x_0 + \bar{h}, y_0 + \bar{k})hk = f''_{yx}(x_0 + \bar{h}, y_0 + \bar{k})hk$$

$$(h, k) \rightarrow (0, 0) \Rightarrow (\bar{h}, \bar{k}) \rightarrow (0, 0), (\bar{h}, \bar{k}) \rightarrow (0, 0)$$

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

□

## 2.80 Полиномиальная формула

$a_i \in \mathbb{R}$  (верно для любого кольца). Тогда  $\forall r \in \mathbb{N}$ :

$$(a_1 + \dots + a_m)^r \stackrel{\text{очев}}{=} \sum_{n_1=1}^m \dots \sum_{n_r=1}^m a_{n_1} a_{n_2} \dots a_{n_r} = \sum_{j: |j|=r} \frac{r!}{j!} a^j$$

*Доказательство.* По индукции.

База:  $\triangleleft r = 1$

$$a_1 + \dots + a_m = \frac{1!}{1!0! \dots 0!} a_1 + \frac{1!}{0!1! \dots 0!} a_2 + \dots + a_m$$

$$a_1 + \dots + a_m = a_1 + \dots + a_m$$

Переход:

$$\begin{aligned} (a_1 + \dots + a_m)^{r+1} &= (a_1 + \dots + a_m) \sum_{\substack{j_1 \dots j_m \geq 0 \\ j_1 + \dots + j_m = r}} \frac{r!}{j_1! \dots j_m!} a_1^{j_1} \dots a_m^{j_m} = \\ &= \sum \frac{r!}{j_1! \dots j_m!} a_1^{j_1+1} \dots a_m^{j_m} + \dots + \sum \frac{r!}{j_1! \dots j_m!} a_1^{j_1} \dots a_m^{j_m+1} = \\ &= \sum_{\substack{k_1 \geq 1 \\ k_2 \dots k_m \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_m = r+1}} \frac{r!k_1}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1} \dots a_m^{k_m} + \dots + \sum_{\substack{k_2 \geq 1 \\ k_1, k_3, k_4 \dots k_m \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_m = r+1}} \frac{r!k_2}{j_1! \dots j_m!} a_1^{j_1} \dots a_m^{j_m+1} = \\ &= \sum_{\substack{k_1 \geq 0 \\ k_2 \dots k_m \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_m = r+1}} \frac{r!k_1}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1} \dots a_m^{k_m} + \dots + \sum_{\substack{k_2 \geq 0 \\ k_1, k_3, k_4 \dots k_m \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_m = r+1}} \frac{r!k_2}{j_1! \dots j_m!} a_1^{j_1} \dots a_m^{j_m+1} = \\ &= \sum_{\substack{k_1 \dots k_m \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_m = r+1}} \frac{r!(k_1 + \dots + k_m)}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1} \dots a_m^{k_m} = \\ &= \sum_{\substack{k_1 \dots k_m \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_m = r+1}} \frac{(r+1)!}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1} \dots a_m^{k_m} \end{aligned}$$

□