$\overline{D} = D \cup$ (множество предельных точек D) — замыкание.

Примечание. $a \in \overline{D}$, тогда $\exists (x_n)$ из $D, x_n \to a$

Примечание. $\overline{D} = \bigcap\limits_{\substack{D \subset F \\ F - \text{замкн.}}} F$ — мин. (по вкл.) замкн. множество, содержащее D.

Примечание. D — замкнуто $\Leftrightarrow D = \overline{D}$

Определение. a — граничная точка D
$\forall U(a) \quad U(a)$ содержит точки как из D, так и из D^c

Определение. Граница множества — множество его граничных точек. Обозначается ∂D

Упражнение:

1. $\partial D = \overline{D} \setminus IntD$
2. ∂D — замкнута
3. $\forall$ множество предельных точек — замнуто.

Определение. T — множество, U — набор неких подмножеств T.
При этом:

1. $\varnothing \in U, T \in U$
2. $G_1, G_2 \ldots G_n \in U \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i \in U$
3. $(G_\alpha)_{\alpha \in A}, \forall \alpha G_\alpha \in U \quad \bigcup\limits_{\alpha \in A} \in U$

Тогда T называется топологическим пространством, U — “набор” открытых множеств в T *(мн-ва G^c, где $G \in U$ — замкн.)*

$a \in T, U(a)$ — любое открытое множество, содержащее a и $\neq \varnothing$.

Аксиома 1. *Об отделимости:* $\forall x, y \in T \exists U(x), U(y) : U(x) \cap U(y) = \varnothing$

Определение. В $\mathbb{R}$:

1. $x_n \to +\infty \quad \forall E > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ x_n > E$
2. $x_n \to -\infty \quad \forall E \ \exists N \ \forall n > N \ x_n < E$
3. $x_n \to \infty \Leftrightarrow |x_n| \to +\infty$

Примечание. Требование > 0 не обязательно.

Примечание. 1. $x_n \to \infty \Rightarrow x_n$ не огр. *(по модулю)*

$x_n \to +\infty \Rightarrow x_n$ не огр. сверху

$x_n \to -\infty \Rightarrow x_n$ не огр. снизу

2. $x_n \to +\infty$. Тогда $x_n \not\to -\infty$

Откр. множества:

1. Ограниченные открытые множества — те, что открыт. в $\mathbb{R}$
2. $U_E(+\infty) = (E, +\infty] \subset \overline{\mathbb{R}}$
   $U_E(-\infty) = [-\infty, E) \subset \overline{\mathbb{R}}$
3. Произвольное открытое множество — либо огр. откр., либо огр.$\cup U_E(+\infty)$, огр.$\cup U_E(-\infty)$, огр.$\cup U_E(+\infty) \cup U_E(-\infty)$

Proof. Рассмотрим $y = \tan x$
Положим $\tan(\frac{\pi}{2}) = +\infty$, $\tan(\frac{\pi}{2}) = -\infty$
$\tan$ — монотонная биекция $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ на $\overline{\mathbb{R}}$
Она обеспечивает биекцию между совокупностью открытых множеств $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ и $\ldots$ в $\overline{\mathbb{R}}$ □

В $\overline{\mathbb{R}}$ рассмотрим функцию $\rho(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$ — метрика.
Покажем, что $x_n \to +\infty$ в смысле исх. опр. $\Leftrightarrow$ $x_n \to +\infty$ в пространстве $(\overline{\mathbb{R}}, \rho)$

Proof. $x_n \to +\infty \Leftrightarrow \forall U(+\infty)\ \ \exists N\ \ \forall n > N\ \ x_n \in U(+\infty)$
$x_n \to +\infty$ в пространстве $(\overline{\mathbb{R}}, \rho) \Leftrightarrow$ высказыванию выше. □

Примечание. $a \in \mathbb{R}$, (x_n) — вещ. посл. Тогда $x_n \to a$ в смысле обычного опр. $\Leftrightarrow$ $x_n \to a$ в пространстве $(\overline{\mathbb{R}}, \rho)$

$$\begin{cases} x_n \to a, a \in \overline{\mathbb{R}} \\ x_n \to b, b \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases} \Rightarrow a = b$$

в $\mathbb{R}^m$ $\quad x_n \to \infty \quad \forall E\ \ \exists N\ \ \forall n > N\ \ ||x_n|| > E$
$U_E(+\infty) = \{x \in \mathbb{R}^m : ||x|| > E\}$

1 Ревизия

$(x_n), (y_n) \quad x_n \le y_n \quad x_n \to x, y_n \to y,\ x, y \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда $x \le y$.

- $y = +\infty$ или $x = -\infty$ — тривиально.
- $x = +\infty, y = a =\in \mathbb{R}$ — невозможно
- остальное — как в основной теореме.

Определение. Последовательность (y_n) называется **бесконечно большой**, если $y_n \to +\infty$.

Примечание. x_n — бесконечно малая ($\forall n\ \ x_n \ne 0$) $\Leftrightarrow \frac{1}{x_n}$ — бесконечно большая.

Proof. $|x_n| < \varepsilon \Leftrightarrow |\frac{1}{x_n}| > \frac{1}{\varepsilon}$ □

Теорема 1. *Об арифметических свойствах пределов в* $\overline{\mathbb{R}}$.
$(x_n), (y_n)$ — *вещ.*, $x_n \to a, y_n \to b, \quad a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ *Тогда:*

1. $x_n \pm y_n \to a \pm b$
2. $x_n y_n \to ab$ *Если* $\forall n\ \ y_n \ne 0; b \ne 0$

3. $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}$

При условии, что выражения в правых частях имеют смысл.

$$\lessdot x_n \to +\infty, y_n \to a \in \mathbb{R}$$

$$\forall E \ \exists N \ \forall n > N \ x_n + y_n > E$$

$$\text{Для } E - (a-1) \ \exists N_1 \ \forall n > N_1 \ x_n > E - (a-1)$$

$$\text{Для } E = 1 \ \exists N_2 \ \forall n > N_2 \ x_n > a - 1$$

Также для $x_n \to +\infty, y_n$ – огр.снизу $\Rightarrow x_n + y_n \to +\infty$.

$\begin{cases} x_n \to +\infty \\ y_n > \varepsilon, (\varepsilon > 0) \text{ при } n > N_0 \end{cases} \Rightarrow x_n y_n \to +\infty$

y_n отделено от нуля при больших n.

Примечание. Верны аналогичные теоремы, где вместо $\overline{\mathbb{R}} - \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cap \{\infty\}$

Неопределенности:

- $\begin{cases} x_n \to +\infty \\ y_n \to -\infty \end{cases} \Rightarrow x_n + y_n \to ?$
- $\begin{cases} x_n \to n + \sin n \\ y_n \to -n \end{cases} \Rightarrow x_n + y_n = \sin n, \nexists \lim$
- $\begin{cases} x_n \to n \\ y_n \to -\sqrt{n} \end{cases} \Rightarrow x_n + y_n = n - \sqrt{n} \to +\infty$
- $\begin{cases} x_n \to 0 \\ y_n \to a \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to \infty$

2 Точные границы числовых множеств

Теорема 2. *Теорема Кантора о стягивающихся отрезках.*

Дана последовательность отрезков $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$

Длины отрезков $\to 0$*, т.е.* $(b_n - a_n) \to_{n \to +\infty} 0$

Тогда $\exists! c \in \mathbb{R} \quad \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} [a_k, b_k] = \{c\}$ *и при этом* $a_n \to_{n\to+\infty} c, b_n \to_{n\to+\infty} c$

Примечание. Вместо "$b_n - a_n \to 0$" $\quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists n : b_n - a_n < \varepsilon$

Proof. Берем из аксиомы Кантора $c \in \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} [a_k, b_k]$

$\begin{cases} 0 \le b_n - c \le b_n - a_n \\ 0 \le c - a_n \le b_n - a_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_n - c \to 0 \\ c - a_n \to 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_n \to c \\ a_n \to c \end{cases}$

По теореме об единственности предела c однозначно определено. □

Определение. $E \subset \mathbb{R}$. E — огр. сверху, если $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in E\ \ x \leq M$. Кроме того, всякие такие M называются верхними границами E.

Аналогично ограничение снизу.

Определение. $E \subset \mathbb{R}, E \neq \varnothing$.
Для E — огр. сверху супремум ($\sup E$)— наименьшая из верхних границ E.
Для E — огр. сниху инфинум ($\sup E$) — наибольщая из нижних границ E.

Примечание. Техническое описание супремума: $b = \sup E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E\ \ x \leq b \\ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists x \in E\ \ b - \varepsilon < x \end{cases}$

Аналогично для inf

Определение. $M = \max E : M \in E\ \ \forall x \in E\ \ x \leq M$

Теорема 3. *О существовании супремума.*
$E \subset \mathbb{R}, E \neq \varnothing, E$ — *огр. сверху.*
Тогда $\exists \sup E \in \mathbb{R}$

Proof. Строим систему вложенных отрезков $[a_k, b_k]$ со свойствами:

1. b_k — верхняя граница E
2. $[a_k, b_k]$ содержит точки E.

a_1 — берём любую точку E, b_1 — любая верхняя граница.
Границы следующего отрезка найдём бинпоиском *(математики это называют полоивнное деление).*
Если $\frac{a_1+b_1}{2}$ — верхняя граница E, $[a_2, b_2] := [a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$.
Иначе на $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ есть элементы E, $[a_2, b_2] := [\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$
Длина $[a_k, b_k] = b_k - a_k = \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}} \to 0$
$\exists! c \in \prod [a_k, b_k]$
Проверим: $c = \sup E$

1. $\forall x \in E\ \ \forall n\ \ x \leq b_n$
2. $\forall \varepsilon > 0\ \ c - \varepsilon$ — не верхн. гран.

Доказательство 1: $x \to x, b_n \to c \Rightarrow x \leq b_n$
Доказательство 2: $\forall \varepsilon > 0$ возьмём $n : \frac{b_1 - a_1}{2^n} < \varepsilon$. $c - \varepsilon < a_n \Leftrightarrow c - a_n < \varepsilon \Leftrightarrow c - a_n < b_n - an < \varepsilon$ □