Конспект 09/09/19

Организационные вопросы

Разбалловка

- практика - 70 баллов
- 2 теоретических опроса - 10 баллов (даётся только если прийти на экзамен)
- экзамен - 20 баллов

Литература

Учебник - Виноградов О.Л. "Курс математического анализа". Первый курс в этом учебнике вполне сходится, но лучше учить по конспектам/лекциям, т.к. порядок теорем важен - если сослаться на экзамене на теорему, которая идет позже в курсе, будут вопросы.

Множества

Способы задания множеств:

- Перечислением элементов: $\{1, 2, 3\}$
- Как подмножество: $\{x \in C : \text{выполняется } \rho(x)\}$

$\mathbb{U}$ - универсум - максимально крупное множество. Если не указано, из какого множества рассматриваются элементы, то они из $\mathbb{U}$.

$\varnothing$ - пустое множество - нет элементов

Часто встречающиеся множества: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Определение: $\mathbb{Z}_+ = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\}$

Определение: $\mathbb{R}_+ = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\}$

Определение (неформальное, т.к. отображения будут даны потом): Семейством называется такое множество A, в котором каждому "индексу" $i \in I$ сопоставлен ровно один элемент A. При этом каждый элемент A может соответствовать более чем одному индексу. В частности, семейство множеств содержит в себе множества. Обозначается: $(A_i)_{i \in I}$.

Определение: Упорядоченная пара - семейство из двух элементов. Обозначается: (a, b)

Определение: Декартово произведение двух множеств - множество всех упорядоченных пар элементов этих множеств. $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$. Аналогично определяется декартово произведение n множеств, например для $n = 3$: $A \times B \times C = \{(a, b, c) : a \in A, b \in B, c \in C\}$

Определение: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ - координаты на плоскости

Определения:

$A \cup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}$ - объединение множеств

$A \cap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}$ - пересечение множеств

$\bigcup\limits_{i \in I} A_i = \{x : \exists i \in I \; x \in A_i\}$ - объединение семейства множеств

$\bigcap\limits_{i \in I} A_i = \{x : \forall i \in I \; x \in A_i\}$ - пересечение семейства множеств

Некоторые тривиальные свойства $\varnothing$ и $\mathbb{U}$ для любого множества A:

$\varnothing \cup A = A$

$\varnothing \cap A = \varnothing$

$\mathbb{U} \cup A = \mathbb{U}$

$\mathbb{U} \cap A = A$

Определение: дополнением множества X в множестве Y называется множество $\{x \in Y : x \notin X\}$, если $X \subset Y$ (иначе дополнение не определено). Если множество Y опущено, вместо него используется $\mathbb{U}$, т.е. $A^c = \{x : x \notin A\}$

Определение: Разность множеств: $Y \setminus X = \{x \in Y : x \notin X\}$

Можно заметить, что разность множеств и их дополнение эквивалентны, если $X \subset Y$

Любопытный эксперимент: можно поменять обозначения операций над множествами:

$\cup \leftrightarrow +$

$\cap \leftrightarrow *$

$\varnothing \leftrightarrow 0$

$\mathbb{U} \leftrightarrow 1$ - не путать с числом 1.

Тогда:

$(A + B)C = AC + BC$ - дистрибутивность умножения относительно сложения

$(AB) + C = (A + C)(B + C)$ - дистрибутивность сложения относительно умножения

Эти свойства доказуемы кругами Эйлера, доказательство опущено.

Теорема: *закон де Моргана*. Пусть $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ - семейство множеств, Y - множество. Тогда:

$Y \setminus (\bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha)$ ①

$Y \setminus (\bigcap\limits_{\alpha \in A} X_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha)$ ②

Доказательство

Примечание: Чтобы доказать, что $A = B$, можно доказать, что $A \subset B, B \subset A$.
Воспользуемся этим методом, чтобы доказать ①

$\lhd x \in$ левая часть ①

$x \in Y; x \notin \bigcup X_\alpha$

$x \in Y; x \notin \{y : \exists \alpha : y \in X_\alpha\}$

$x \in Y; \forall \alpha \in A : x \notin X_\alpha$

$\lhd x \in$ правая часть ①

$\forall \alpha : x \notin Y \setminus X_\alpha$

Из чего левая и правая части эквивалентны. Аналогично доказывается ②

Другой вариант закона де Моргана:

$Y \cap (\bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in A} (Y \cap X_\alpha)$

$Y \cup (\bigcap\limits_{\alpha \in A} X_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha \in A} (Y \cup X_\alpha)$

Вещественные числа

Определение: Множество, в котором выполняются аксиомы I-IV, называется множеством вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Примечание: использовать $\mathbb{R}$ в этих аксиомах не совсем корректно, т.к. $\mathbb{R}$ определяется через эти аксиомы.

I - аксиомы поля

В множестве $\mathbb{R}$ определены две операции, называемые сложением и умножением, действующие из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ ($+, \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), удовлетворяющие следующим свойствам:

Аксиомы +

В разделе про аксиомы поля опущены $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}$.

1. $a + b = b + a$ - коммутативность
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ - ассоциативность
3. $\exists 0 : 0 + a = a$
4. $\exists a' : a + a' = 0$

Примечание: 0 - единственный. Докажем это: пусть существуют различные 0_1 и 0_2, удовлетворяющие условию 3. Тогда по этому условию $0_1 + 0_2 = 0_2$, $0_2 + 0_1 = 0_1$. Но по условию 1 эти выражения равны, поэтому $0_1 = 0_2$ - противоречие.

Аксиомы *

1. $ab = ba$ - коммутативность
2. $(ab)c = a(bc)$ - ассоциативность
3. $\exists 1 \neq 0 : \forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a$
4. $\forall a \neq 0 : \exists \tilde{a} : a \cdot \tilde{a} = 1$

Аксиома комбинации + и *

1. $(a+b)c = ac + bc$ - дистрибутивность

Определение: Поле - множество, в котором определены операции $+, \cdot$, удовлетворяющие группе аксиом I. Например, $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{F}_3$

$\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$, умножение и сумма определены как на $\mathbb{R}$, но по модулю 3.

Тождество Лагранжа

Пусть A, B - поля. Тогда:

$$\frac{1}{2} \sum_{(i,k) \in A \times B} (a_i b_k - a_k b_i)^2$$

$$\frac{1}{2} \sum_{(i,k) \in A \times B} (a_i^2 b_k^2 + a_k^2 b_i^2 - 2 a_i a_k b_i b_k)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{(i,k) \in A \times B} (a_i^2 b_k^2) + \frac{1}{2} \sum_{(i,k) \in A \times B} (a_k^2 b_i^2) - \sum_{(i,k) \in A \times B} (a_i b_i a_k b_k)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{(i,k) \in A \times B} (a_i^2) \sum_{(i,k) \in A \times B} (b_k^2) + \frac{1}{2} \sum_{(i,k) \in A \times B} (a_i^2) \sum_{(i,k) \in A \times B} (b_k^2) - \sum_{(i,k) \in A \times B} (a_i b_i) \sum_{(i,k) \in A \times B} (a_k b_k)$$

$$\sum_{(i,k) \in A \times B} (a_i^2) \sum_{(i,k) \in A \times B} (b_k^2) - \sum_{(i,k) \in A \times B} (a_i b_i)^2$$

Следствие: $(\sum a_i b_i)^2 \leq (\sum a_i^2)(\sum b_k^2)$ (неравенство Коши-Буняковского)

Примечание автора: молитесь всем богам, которых знаете, чтобы этого не было на экзамене

II - Аксиомы порядка

Между элементами $\mathbb{R}$ определено отношение $\leq$ со следующими свойствами:

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y$ или $y \leq x$
2. $x \leq y; y \leq x \Rightarrow x = y$
3. $x \leq y; y \leq z \Rightarrow x \leq z$ - транзитивность
4. $x \leq y \Rightarrow \forall z \in \mathbb{R} : x + z \leq y + z$
5. $0 \leq x; 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy$

Определение: упорядоченное поле - множество, для которого выполняются аксиомы групп I и II.

$\mathbb{F}_3, \mathbb{C}$ - не упорядоченные поля

$\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathcal{R}$ - упорядоченные поля

$\mathcal{R}$ - множество функций с вещественными коэффициентами $\dfrac{a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_0}{b_m X^m + \ldots + b_0}$. На $\mathcal{R}$ операции $+, \cdot$ - умножение и сложение соответствующих многочленов. $\leq$ на $\mathcal{R}$ задано следующим образом: $f \leq g$, если при больших $x > 0$ $f(x) \leq g(x)$. Более формально: $\exists x_0 : \forall x \geq x_0 : f(x) \leq g(x)$. Например, $\frac{x+1}{x^2+1} \geq \frac{x^2+x+1}{x^1 0 - x - 1}$.

Определения:

$[a, b] = x : a \leq x, x \leq b$

$[a, b) = x : a \leq x, x < b$

$[a, +\infty) = \{x : a \leq x\}$

$< a, b >$ - любой тип краев ("[" или "(")

$x < y$, если $x \leq y, x \neq y$

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ - расширенные вещественные числа

Свойства бесконечностей

Сложение

1. $\pm\infty + x = \pm\infty$
2. $\pm\infty + \pm\infty = \pm\infty$
3. $\pm\infty + \mp\infty =$ ☹ - не определено

Умножение

Здесь рассматирвается $x \in \mathbb{R}, x > 0$

1. $x \cdot \pm\infty = \pm\infty$
2. $\pm\infty \cdot \pm\infty = +\infty$
3. $\pm\infty \cdot \mp\infty = -\infty$
4. $0 \cdot (\pm\infty) =$ ☹ - не определено

III - Аксиома Архимеда

На самом деле теорема была впервые высказана Евдоксом

$\forall x, y > 0 : \exists n \in \mathbb{R} : nx > y$

Следствие: существуют сколько угодно большие натуральные числа - $\forall y \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : n > y$

Определение: Архимедовы поля - упорядоченные поля, в которых выполняется Аксиома Архимеда.

$\mathcal{R}$ - не архимедово поле

$\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ - архимедовы поля

IV - Аксиома Кантора

В роли четвертой аксиомы могут выступать разные утверждения, но результирующие $\mathbb{R}$ равны.

Определение: $\{[a_b, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность вложенных отрезков, если $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$

Аксиома Кантора: Для любой бесконечной последовательности вложенных отрезков их пересечение не пусто, т.е. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \varnothing$

Замечание: аксиома Кантора не выполняется для последовательность вложенных промежутков, например: $(a_k, b_k) = (0, \frac{1}{k})$. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (0, \frac{1}{k}) = \varnothing$. Докажем это от противного - пусть существует $\alpha > 0$ (очевидно, что $\alpha \leq 0$ не подходит) такая, что $\alpha \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (0, \frac{1}{k})$.

$$\forall k : \alpha < \frac{1}{k}$$

$$\forall k : k\alpha < 1$$

Это - противоречие по теореме Архимеда

$\mathbb{Q}$ не удовлетворяет аксиоме IV, $\mathbb{R}$ удовлетворяет.

Теорема Кантора

$\forall \alpha > 0 : \exists [a_k, b_k] : b_k - a_k < \alpha$

Тогда $\exists ! c : c \in \bigcap [a_k, b_k]$

Десятичная запись

$\lhd y \in \mathbb{R}, y > 0$

Подберем $k \in \mathbb{Z}_+ : k < y < k+1$

Определение: k - целая часть y.

```
 0 1... 5  ...  9  - каждому отрезку соответствует цифра от 0 до 9
 ⊢─⊢─⊢─⊢─⊢─⊢─⊢─⊢─⊢─⊢|
 k      y       k+1
```

Таким образом выбирается цифра, которая пишется после запятой (в данном случае - 5), после чего рассматривается отрезок, в который попал y. Колесо сансары дает оборот.

При попадании на стык частей (т.е. число - конечная десятичная дробь) - либо рассматриваем левый промежуток, либо правый. Тогда запись будет оканчиваться на 999..., либо на 000... Эти записи - эквивалентны. Таким образом, каждому числу сопоставляется запись как десятичной дроби и наоборот.

Целые числа

Определение: $M \subset R$ - индуктивное множество, если: R - упорядоченное поле, $1 \in M$, $x \in M \Rightarrow x+1 \in M$

Пример: $R = \mathbb{R}, M = (0; +\infty)$

Определение: $\mathbb{N}$ - наименьшее индуктивное множество над $\mathbb{R}$, т.е. $\mathbb{N} = \bigcap\limits_{M:\text{инд}} M$, где инд - множество всех индуктивных множеств над $\mathbb{R}$