

Примеры к прошлой теореме:

$$1. f - \text{непр.}, \Phi([p, q]) := \sigma(\Pi(f[p, q])) = \int_p^q f dx$$

Тогда выполняется определение плотности аддитивной плотности промежутка.

2.

$$\Phi[\alpha, \beta] = S_{\text{сектор}(\alpha, \beta)} = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi$$

Пример. $x(t), y(t)$ — кривая в \mathbb{R}^2

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{t_{\alpha}}^{t_{\beta}} r^2(\varphi(t)) d\varphi(t) = \frac{1}{2} \int_{t_{\alpha}}^{t_{\beta}} r^2(t) \varphi'(t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_{\alpha}}^{t_{\beta}} \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}^2 \left(\arctg \frac{y(t)}{x(t)} \right)' dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_{\alpha}}^{t_{\beta}} (x^2(t) + y^2(t)) \frac{1}{1 + \left(\frac{y(t)}{x(t)} \right)^2} \left(\frac{y(t)}{x(t)} \right)' dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_{\alpha}}^{t_{\beta}} (x^2(t) + y^2(t)) \frac{1}{1 + \left(\frac{y(t)}{x(t)} \right)^2} \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t)} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_{\alpha}}^{t_{\beta}} (x^2(t) + y^2(t)) \frac{x^2(t)}{x^2(t) + y^2(t)} \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t)} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_{\alpha}}^{t_{\beta}} (y'(t)x(t) - y(t)x'(t)) dt \end{aligned}$$

$$x := \sin t, y := \cos t$$

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin^2 t - \cos^2 t dt = -\frac{\pi}{4} - \text{проблема, отрицательная площадь}$$

1 Выпуклость функций

$$\forall z \in [x, y] \quad \exists \alpha \in [0, 1] : z = \alpha x + (1 - \alpha)y$$

α — доля отрезка zy от xy , т.е. $\alpha = \frac{|zy|}{|xy|}$

Определение. $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — **выпуклая**

$$\forall x, y \in \langle a, b \rangle \quad \forall \alpha \in [0, 1] \quad f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

Примечание. f — выпуклая \Leftrightarrow всякая хорда графика f расположена “выше” графика (*нестрого выше*) $\Leftrightarrow \Pi(f, \langle a, b \rangle) \{ (x, y) : x \in \langle a, b \rangle \quad y \geq f(x) \}$

Выпуклый = выпуклый вниз; вогнутый = выпуклый вверх

Определение. $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — **строго выпуклая**

$$\forall x, y \in \langle a, b \rangle \quad \forall \alpha \in (0, 1) \quad f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

Определение. $A \subset \mathbb{R}^m$ — **выпуклое множество** в \mathbb{R}^m , если

$$\forall x, y \in A, \alpha \in [0, 1] \quad \alpha x + (1 - \alpha)y \in A$$

Это определение с вики

Определение. Надграфик функции $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ это множество $\{(x, y) \mid x \in \langle a, b \rangle, y \geq f(x)\}$

Лемма 1. о трех хордах

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. f — вып. $\langle a, b \rangle$

$$2. \forall x_1, x_2, x_3 \in \langle a, b \rangle \quad x_1 < x_2 < x_3 \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

Доказательство. Левое $\Leftrightarrow f(x_2)(x_3 - x_1) \leq f(x_3)(x_2 - x_1) + f(x_1)(x_3 - x_1 - (x_2 - x_1))$

$$f \left(x_3 \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} + x_1 \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \right) = f(x_2) \leq f(x_3) \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} + f(x_1) \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$$

□

Примечание. Если f — строго выпуклая, то в лемме оба неравенства строгие.

Теорема 1. об односторонней дифференцируемости выпуклой функции.

f — вып. $\langle a, b \rangle$. Тогда $\forall x \in (a, b) \quad \exists f'_+(x), f'_-(x)$ и $\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$

$$f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'_-(x_2)$$

Доказательство. $f'_+(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1+0} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ — монотонно убывающая функция от x

Фиксируем $x_0 < x_1$. По лемме о трех хордах $\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$

□

Следствие. f — вып. на $\langle a, b \rangle \Rightarrow f$ непр. на (a, b)

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$$

Теорема 2. выпуклость в терминах касательных

f — вып. на $\langle a, b \rangle$. Тогда график f расположен не ниже любой касательной

т.е. $\forall x, x_0 \quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Доказательство. “ \Rightarrow ”

Если $x > x_0 \quad f'(x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, это неравенство 2. из предыдущей теоремы

$x < x_0$ аналогично

“ \Leftarrow ” фиксируем x_0 . Берем $x_1 < x_0 < x_2$

$f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0); f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0)$, т.е. $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq f'(x_0) \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$.

Это верно по лемме.

□

Определение. $A \subset \mathbb{R}^2$ — вып. $l \subset \mathbb{R}^2$ — прямая

l — **опорная прямая** к A , если:

1. A содержится в одной полуплоскости относительно l

2. $l \cap A \neq \emptyset$

Теорема 3. дифференциальный критерий выпуклости

1. $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, дифф. в (a, b)

Тогда f — вып. $\Rightarrow f'$ возр. на (a, b)

Если f — строго выпуклая $\Rightarrow f'$ строго возрастает

2. $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, дважды дифф. на (a, b)

f — вып. $\Leftrightarrow f'' \geq 0$ на (a, b)

(a) “ \Rightarrow ” $f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2)$ ($x_1 < x_2$)

“ \Leftarrow ” ? f вып. $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c_1) < f'(c_2) = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$

Теперь утверждение 2. очевидно.

Примечание. $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — вып.

Тогда f — дифф. на (a, b) за исключением, может быть, счетного множества точек.

Доказательство. $\forall x \exists f'_+(x), f'_-(x)$

f'_\pm возрастает

$f'_-(x) = f'_+(x) \Rightarrow f$ дифф. в x

$f'_-(x) < f'_+(x) \Rightarrow f$ не дифф. в x

Тогда x — точка скачка для f'_+, f'_- , их НБСЧ. □

Почему не более чем счётное?

Пример. Изопериметрическое неравенство

$G \subset \mathbb{R}^2$ — выпуклое замкнутое множество (ограниченное)

$\text{diam} G = \sup\{\rho(x, y), x, y \in G\}$

$\text{diam} G \leq 1$

Тогда $\sigma(G) \leq \frac{\pi}{4}$

Доказательство. Пойдём от некоторой точки на границе G под углом φ внутрь фигуры по прямой. В какой-то момент мы встретим другую граничную точку. Назовем этот процесс $r(\varphi)$ (возвращает длину пути). Очевидно, что $r^2(\varphi) + r^2(\varphi - \frac{\pi}{2}) \leq (\text{diam} G)^2 \leq 1$

$$\begin{aligned} \sigma(G) &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 r^2(\varphi) d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi) d\varphi \right) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(r^2(\varphi) + r^2\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \right) d\varphi \leq \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 d\varphi = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$
□