1 Определения

1.1 Упорядоченная пара

Для некоторого множества X и I - множество "индексов", тогда $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ - **семейство элементов** X. ($\forall\alpha \in I \ \ x_\alpha \in X$)
Упорядоченная пара — семейство из двух элементов, построенная при $I = \{1, 2\}$. Обозначается (a, b).
Кроме того,

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c, b = d$$

1.2 Декартово произведение

Декартово произведение двух множеств — множество всех упорядоченных пар элементов этих множеств. $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$
Кроме того, декартово произведение можно обобщить для произвольного числа множеств.
$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2 \ldots a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2 \ldots a_n \in A_n\}$

1.3 Аксиомы вещественных чисел

1.3.1 Аксиомы поля

В множестве $\mathbb{R}$ определены две операции, называемые сложением и умножением, действующие из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ ($+, \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), удовлетворяющие следующим свойствам:
Аксоимы сложения *(здесь и далее $\forall a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$)*:

1. $a + b = b + a$ — коммутативность
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ — ассоциативность
3. $\exists \mathbf{0} : \mathbf{0} + a = a$
4. $\exists a' : a + a' = \mathbf{0}$

Аксиомы умножения:

1. $ab = ba$ — коммутативность
2. $(ab)c = a(bc)$ — ассоциативность
3. $\exists \mathbf{1} \neq \mathbf{0} : \forall a \in \mathbb{R} : a \cdot \mathbf{1} = a$
4. $\forall a \neq \mathbf{0} : \exists \tilde{a} : a \cdot \tilde{a} = \mathbf{1}$

Аксоима комбинации сложения и умножения:

1. $(a + b)c = ac + bc$ — дистрибутивность

Поле — множество, в котором определены операции $+, \cdot$, удовлетворяющие группе аксиом I. Например, $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{F}_3$

1.3.2 Аксиомы порядка

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y$ или $y \leq x$
2. $x \leq y; y \leq x \Rightarrow x = y$
3. $x \leq y; y \leq z \Rightarrow x \leq z$ — транзитивность
4. $x \leq y \Rightarrow \forall z \in \mathbb{R} : x + z \leq y + z$
5. $0 \leq x; 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy$

Упорядоченное поле — множество, для которого выполняются аксиомы групп I и II.
$\mathbb{F}_3, \mathbb{C}$ - не упорядоченные поля
$\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathcal{R}$ - упорядоченные поля

1.4 Аксиома Кантора, аксиома Архимеда

1.4.1 Аксиома Архимеда

$$\forall x, y > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : nx > y$$

Следствие: существуют сколько угодно большие натуральные числа:

$$\forall y \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : n > y$$

Архимедовы поля — упорядоченные поля, в которых выполняется Аксиома Архимеда.
$\mathcal{R}$ - не архимедово поле
$\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ - архимедовы поля

1.4.2 Аксиома Кантора

Для последовательности вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ ($\forall n \in \mathbb{N} a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$)

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \varnothing$$

$\mathbb{Q}$ не удволетворяет этой аксиоме, в отличие от $\mathbb{R}$.

1.5 Пополненное множество вещественных чисел, операции и порядок в нем

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ — пополненное множество вещественных чисел.
Свойства ($\forall x \in \mathbb{R}$):

- $-\infty < +\infty$
- $\pm\infty \cdot \pm\infty = +\infty$
- $\pm\infty \cdot \mp\infty = -\infty$
- $-\infty < x < +\infty$
- $x \pm \infty = \pm\infty$
- $\pm\infty \pm \infty = \pm\infty$

- $\pm\infty \mp \infty$ — не определено

Для $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$

- $x \cdot \pm\infty = \pm\infty$

1.6 Максимальный элемент множества

$M \in A$ называется **максимальным элементом** множества A, если $\forall a \in A \;\; a \leq M$

1.7 Последовательность

$x : \mathbb{N} \to Y$ — **последовательность**

1.8 Образ и прообраз множества при отображении

Для $A \subset X, f : X \to Y$ **образ** — множество $\{f(x), x \in A\} \subset Y$ — обозначается $f(A)$
Для $B \subset Y$ **прообраз** — $\{x \in X : f(x) \in B\}$ — обозначается $f^{-1}(B)$

1.9 Инъекция, сюръекция, биекция

Сюръекция — такое отображение $f : X \to Y$, что $f(X) = Y$, т.е. $\forall y \in Y \;\; f(x) = y$ имеет решение относительно x.
Инъекция — такое отображение $f : X \to Y$, что $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \;\; f(x_1) \neq f(x_2)$, т.е. $\forall y \in Y \;\; f(x) = y$ имеет не более одного решения относительно x.
Биекция — отображение, являющееся одновременно сюръекцией и инъекцией, т.е. $\forall y \in Y \;\; f(x) = y$ имеет ровно одно решение относительно x.

1.10 Векторнозначаная функция, ее координатные функции

Если $F : X \to \mathbb{R}^m; x \mapsto F(x) = (F_1(x), ..., F_m(x))$, то F — **векторнозначная функция** *(значения функции - вектора)*
$F_1(x)..F_m(x)$ - координатные функции отображения F

1.11 График отображения

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$

1.12 Композиция отображений

$f : X \to Y, g : Y \to Z$, тогда **композиция** f и g *(обозначается $g \circ f$)* — такое отображение, что $g \circ f : X \to Z, x \mapsto g(f(x))$.
Также возможно определение, которое допускает $g : Y_1 \to Z, Y_1 \supset Y$

1.13 Сужение и продолжение отображений

Для $g : X \to Y \quad f$ — **сужение** g на множество A, если $f : A \to Y, A \subset X$.
g называется **продолжением** f.

1.14 Предел последовательности *(эпсилон-дельта определение)*

Если для $(x_n), a \in \mathbb{R}$ выполняется $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \ \forall n > N \ \ |x_n - a| < \varepsilon$, то a — **предел последовательности** (x_n), обозначается $x_n \to a$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

1.15 Окрестность точки, проколотая окрестность

Окрестность точки $a = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$, обозначается $U_\varepsilon(a)$
Проколотая окрестность точки $a = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$, обозначается $\dot{U}_\varepsilon(a)$

1.16 Предел последовательности (определение на языке окрестностей)

$$\forall U(a) \ \ \exists N \ \ \forall n > N \ \ x_n \in U(a)$$

1.17 Метрика, метрическое пространство, подпространство

На множестве X отображение $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ называется **метрикой**, если выполняются свойства 1-3:

1. $\forall x, y \ \ \rho(x, y) \geq 0; \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\forall x, y \ \ \rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. Неравенство треугольника: $\forall x, y, z \in X \ \ \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

Метрическое пространство — упорядоченная пара (X, ρ), где X — множество, ρ — метрика на X.
Подпространством метрического пространства (X, ρ) называется $(A, \rho|_{A\times A})$, если $A \subset X$

1.18 Шар, замкнутый шар, окрестность точки в метрическом пространстве

Шар *(открытый шар)* $B(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) < r\}$
Замкнутый шар $B(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) \leq r\}$
Окрестность точки a в метрическом пространстве: $B(a, \varepsilon) \Leftrightarrow U(a)$.

1.19 Линейное пространство

Если K — поле *($K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$)*, X — множество, то X называется **линейным пространством** над полем K (и тогда K называется полем скаляр), если определены следующие две операции:

1. $+ : X \times X \to X$ — сложение векторов
2. $\cdot : K \times X \to X$ — умножение векторов на скаляры

Для этих операций выполняются соответствующие аксиомы *(здесь $A, B, C \in X; a, b \in K$)*:

1.19.1 Аксиомы сложения векторов

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $\exists \mathbf{0} \in X : A + \mathbf{0} = A$
4. $\exists -A \in X : A + (-A) = 0$ — обратный элемент

1.19.2 Аксиомы умножения векторов на скаляры

1. $(A + B) \cdot a = A \cdot a + B \cdot a$
2. $A \cdot (a + b) = A \cdot a + A \cdot b$
3. $(ab) \cdot A = a(b \cdot A)$
4. $\exists \mathbf{1} \in K : \mathbf{1} \cdot A = A$

1.20 Норма, нормированное пространство

Норма - отображение $X \to \mathbb{R}, x \mapsto ||x||$, если X - линейное пространство (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) и выполняется следующее:

1. $\forall x \ \ ||x|| \geq 0, ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\forall x \in X \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \ \ ||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$
3. Неравенство треугольника: $\forall x, y \in X \ \ ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Нормированное пространство — упорядоченная пара $(X, || \cdot ||)$, где $||||$ - норма

1.21 Ограниченное множество в метрическом пространстве

$A \subset X$ — **ограничено**, если $\exists x_0 \in X \ \ \exists R > 0 \ \ A \subset B(x_0, R)$, т.е. если A содержится в некотором шаре в X.

1.22 Внутренняя точка множества, открытое множество, внутренность

a — **внутренняя точка** множества D, если $\exists U(a) : U(a) \subset D$, т.е. $\exists r > 0 : B(a, r) \subset D$
D — **открытое множество**, если $\forall a \in D : a$ — внутренняя точка D
Внутренностью множества D называется $Int(D) = \{x \in D : x$ — внутр. точка $D\}$

1.23 Предельная точка множества

a — **предельная точка** множества D, если

$$\forall \dot{U}(a) \ \ \dot{U}(a) \cap D \neq \varnothing$$

1.24 Замкнутое множество, замыкание, граница

D — **замкнутое множество**, если оно содержит все свои предельные точки.
$\overline{D} = D \cup$ (множество предельных точек D) — замыкание.
Граница множества — множество его граничных точек. Обозначается ∂D

1.25 Изолированная точка, граничная точка

a — **изолированная точка** D, если $a \in D$ и a — не предельная, то есть:

$$\exists U(a) \quad U(a) \cap D = \{a\}$$

a — **граничная точка** D, если $\forall U(a) \quad U(a)$ содержит точки как из D, так и из D^c

1.26 Описание внутренности множества

1. $IntD$ - откр. множество
2. $IntD = \bigcup\limits_{\substack{D \supset G \\ G - \text{открыт}}}$ — максимальное открытое множество, содержащееся в D
3. D — откр. в $X \Leftrightarrow D = IntD$

1.27 Описание замыкания множества в терминах пересечений

$\overline{D} = \bigcap\limits_{\substack{D \subset F \\ F - \text{ замкн.}}} F$ — мин. (по вкл.) замкн. множество, содержащее D.

1.28 Верхняя, нижняя границы; супремум, инфимум

$E \subset \mathbb{R}$. E — **огр. сверху**, если $\exists M \in \mathbb{R}\ \ \forall x \in E\ \ x \le M$. Кроме того, всякие такие M называются **верхними границами** E.
Аналогично ограничение снизу.
$E \subset \mathbb{R}, E \ne \varnothing$.
Для E — огр. сверху **супремум** ($\sup E$)— наименьшая из верхних границ E.
Для E — огр. снизу **инфимум** ($\inf E$) — наибольшая из нижних границ E.

1.29 Техническое описание супремума

Техническое описание супремума: $b = \sup E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E\ \ x \le b \\ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists x \in E\ \ b - \varepsilon < x \end{cases}$

1.30 Последовательность, стремящаяся к бесконечности

В $\mathbb{R}$:

1. $x_n \to +\infty \quad \forall E > 0\ \ \exists N\ \ \forall n > N\ \ x_n > E$
2. $x_n \to -\infty \quad \forall E\ \ \exists N\ \ \forall n > N\ \ x_n < E$
3. $x_n \to \infty \Leftrightarrow |x_n| \to +\infty$

1.31 Компактное множество

$K \subset X$ — **компактное**, если для любого открытого покрытия этого множества $\exists$ конечное подпокрытие $\Leftrightarrow \exists \alpha_1 \dots \alpha_n \quad K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$

1.32 Секвенциальная компактность

Секвенциально компактным называется множество $A \subset X : \forall$ посл. (x_n) точек A $\exists$ подпосл. x_{n_k}, которая сходится к точке из A

1.33 Определения предела отображения (3 шт)

$(X, \rho^x), (Y, \rho^y) \quad D \subset X \quad f : D \to Y$
$a \in X$, a — пред. точка множества D, $A \in Y$
Тогда $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ — **предел отображения**, если:

1. По Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D : 0 < \rho^X(a, x) < \delta \quad \rho^Y(f(x), A) < \varepsilon$$

2. На языке окрестностей:

$$\forall U(A) \;\; \exists V(a) \;\; \forall x \in \dot{V}(a) \;\; f(x) \in U(A)$$

3. По Гейне: $\forall (x_n)$ — посл. в X:

   (a) $x_n \to a$
   (b) $x_n \in D$
   (c) $x_n \neq a$

   $f(x_n) \to A$

1.34 Определения пределов в $\overline{\mathbb{R}}$

Для $Y = \overline{\mathbb{R}}, -\infty < x < +\infty$:

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty : \quad \forall E \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in X : 0 < |x - a| < \delta \;\; f(x) > E$
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty : \quad \forall E \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in X : 0 < |x - a| < \delta \;\; f(x) < E$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = c \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta \;\; \forall x \in X : x > \delta \;\; |f(x) - c| < \varepsilon$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = c \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta \;\; \forall x \in X : x < \delta \;\; |f(x) - c| < \varepsilon$

1.35 Предел по множеству

$f : D \subset X \to Y, D_1 \subset D, x_0$ — пред. точка D_1
Тогда **предел по множеству** D_1 в точке x_0 — это $\lim\limits_{x \to x_0} f|_{D_1}(x)$

1.36 Односторонние пределы

В $\mathbb{R}$ одностор. $= \{$ левостор., правостор. $\}$
Левосторонний предел $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = L$ - это $\lim f|_{D \cap (-\infty, x_0)}$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap D \;\; |f(x) - L| < \varepsilon$$

Аналогично правосторонний.

1.37 Непрерывное отображение

$f : D \subset X \to Y \quad x_0 \in D$
f — **непрерывное** в точке x_0, если:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, либо x_0 — изолированная точка D
2. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D \ \ \rho(x, x_0) < \delta \ \ \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$
3. $\forall U(f(x_0)) \ \ \exists V(x_0) \ \ \forall x \in V(x_0) \cap D \ \ f(x) \in U(f(x_0))$
4. По Гейне $\forall (x_n) : x_n \to x_0; x_n \in D \ \ f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x_0)$

1.38 Непрерывность слева

f — непр. слева в x_0, если $f|_{(-\infty, x_0] \cap D}$ — непрерывно в x_0

1.39 Разрыв, разрывы первого и второго рода

Если $\nexists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, либо $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ — **точка разрыва**.
Пусть $\exists f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$ и не все 3 числа равны: $f(x_0 - 0), f(x_0), f(x_0 + 0)$. Это **разрыв I рода *(скачок)***.
Остальные точки разрыва — **разрыв II рода**.

Примечание.

$$f(x_0 - 0) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$$

1.40 О большое, о маленькое

$f, g : D \subset X \to \mathbb{R} \ \ x_0$ — пр. точка D
Если $\exists V(x_0) \ \ \exists \varphi : V(x_0) \cap D \to \mathbb{R} \quad f(x) = g(x)\varphi(x)$ при $x \in V(x_0) \cap D$

1. φ — ограничена. Тогда говорят $f = O(g)$ при $x \to x_0$

   "f **ограничена** по сравнению с g при $x \to x_0$"
2. $\varphi(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 \quad f$ — **беск. малая** по отношению к g при $x \to x_0$, $f = o(g)$
3. $\varphi(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 1 \quad f$ и g **экв.** при $x \to x_0 \quad f \underset{x \to x_0}{\sim} g$

Примечание. О большое и о малое — разные вопросы в табличке.

1.41 Эквивалентные функции, таблица эквивалентных

Эквивалентные функции даны выше.
Таблица эквивалентных для $x \to 0$:

$$\begin{aligned}
\sin x &\sim x \\
\operatorname{sh} x &\sim x \\
\operatorname{tg} x &\sim x \\
\operatorname{arctg} x &\sim x \\
1-\cos x &\sim \frac{x^2}{2} \\
\operatorname{ch} x - 1 &\sim \frac{x^2}{2} \\
e^x - 1 &\sim x \\
\ln(1+x) &\sim x \\
(1+x)^\alpha - 1 &\sim \alpha x \\
a^x - 1 &\sim x \ln a
\end{aligned}$$

1.42 Асимптотически равные *(сравнимые)* функции

В условиях прошлых определений $f = O(g), g = O(f) \Leftrightarrow f \asymp g$ — асимптотически сравнимы на множестве D, “величины одного порядка”.

1.43 Асимптотическое разложение

$g_n : D \subset X \to \mathbb{R} \quad x_0$ — пред. точка D
$\forall n \quad g_{n+1}(x) = o(g_n), x \to x_0$

Пример. $g_n(x) = x^n, n = 0, 1, 2 \ldots \quad x \to 0 \quad g_{n+1} = xg_n, x \to 0$

(g_n) называется **шкала асимптотического разложения**.
$f : D \to \mathbb{R}$
Если $f(x) = c_0g_0(x) + c_1g_1(x) + \ldots + c_ng_n(x) + o(g_n)$, то это асимптотическое разложение f по шкале (g_n)

1.44 Наклонная асимптота графика

Пусть $f(x) = Ax + B + o(1), x \to +\infty$
Прямая $y = Ax + B$ — наклонная асимптота к графику f при $x \to +\infty$

1.45 Путь в метрическом пространстве

Y — метр. пр-во
$\gamma : [a, b] \to Y$ — непр. на $[a, b]$
= **путь** в пространстве Y

1.46 Линейно связное множество

$E \subset Y$
E — **линейно связное**, если $\forall A, B \in E\ \exists$ путь $\gamma : [a, b] \to E$ такой, что:

- $\gamma(a) = A$
- $\gamma(b) = B$

1.47 Функция, дифференцируемая в точке и производная

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R} \quad x_0 \in \langle a, b\rangle$
f — **дифференцируема**. в точке x_0, если $\exists A \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + o(x - x_0), x \to x_0$$

При этом A называется **производной** f в точке x_0

Примечание. Это два разных билета.

1.48 Счётное множество

A — **счётное множество** $\Leftrightarrow$ равномощно $\mathbb{N}$

1.49 Мощность континуума

A равномощно $[0, 1] \Rightarrow A$ имеет мощность **континуума**.

1.50 Фундаментальная последовательность

x_n — **фундаментальная, последовательность Коши, сходящаяся в себе**, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \ \forall m, n > N \ \ \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$$

1.51 Полное метрическое пространство

X — метрическое пространство называется **полным**, если в нём любая фундаментальная последовательность — сходящаяся.

1.52 Классы функций $C^n([a, b])$

?

1.53 Производная n-го порядка

?

1.54 Многочлен Тейлора n-го порядка

Многочленом Тейлора n-той степени *(порядка)* функции f в точке a называется:

$$T_n(f, a)(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

1.55 Разложения Тейлора основных элементарных функций

Некоторые разложения по Тейлору:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$
$$\cos x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n)$$

2 Теоремы

2.1 Законы де Моргана

Пусть $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ - семейство множеств, Y - множество. Тогда:

1. $Y \setminus (\bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha)$ ①
2. $Y \setminus (\bigcap\limits_{\alpha \in A} X_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha)$ ②

Вариант 2:

1. $Y \cap (\bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in A} (Y \cap X_\alpha)$
2. $Y \cup (\bigcap\limits_{\alpha \in A} X_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha \in A} (Y \cup X_\alpha)$

Proof. Чтобы доказать, что $A = B$, можно доказать, что $A \subset B, B \subset A$. Воспользуемся этим методом, чтобы доказать ①
$\lhd x \in$ левая часть ①
$x \in Y; x \notin \bigcup X_\alpha$
$x \in Y; x \notin \{y : \exists \alpha : y \in X_\alpha\}$
$x \in Y; \forall \alpha \in A : x \notin X_\alpha$
$\lhd x \in$ правая часть ①
$\forall \alpha : x \notin Y \setminus X_\alpha$
Из чего левая и правая части эквивалентны. Аналогично доказывается ② $\square$

2.2 Неравенство Коши-Буняковского, евклидова норма в $\mathbb{R}^m$

2.2.1 Неравенство Коши-Буняковского

$$(\sum a_i b_i)^2 \leq (\sum a_i^2)(\sum b_k^2)$$

2.2.2 Евклидова норма в $\mathbb{R}^m$

$$||x|| = \sqrt{\sum_{i}^{m} x_i^2}$$

Неравенство Коши-Буняковского следует из тождества Лагранжа. Докажем его:

Proof.

$$\frac{1}{2}\sum_{(i,k)\in A\times B}(a_ib_k - a_kb_i)^2 =$$
$$\frac{1}{2}\sum_{(i,k)\in A\times B}(a_i^2b_k^2 + a_k^2b_i^2 - 2a_ia_kb_ib_k) =$$
$$\frac{1}{2}\sum_{(i,k)\in A\times B}a_i^2b_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{(i,k)\in A\times B}a_k^2b_i^2 - \sum_{(i,k)\in A\times B}a_ib_ia_kb_k =$$
$$\frac{1}{2}\sum_{(i,k)\in A\times B}a_i^2\sum_{(i,k)\in A\times B}b_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{(i,k)\in A\times B}a_i^2\sum_{(i,k)\in A\times B}b_k^2 -$$
$$\sum_{(i,k)\in A\times B}a_ib_i\sum_{(i,k)\in A\times B}a_kb_k =$$
$$\sum_{(i,k)\in A\times B}a_i^2\sum_{(i,k)\in A\times B}b_k^2 - \sum_{(i,k)\in A\times B}(a_ib_i)^2$$

Таким образом,

$$\sum_{(i,k)\in A\times B}(a_ib_i)^2 = \sum_{(i,k)\in A\times B}a_i^2\sum_{(i,k)\in A\times B}b_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{(i,k)\in A\times B}(a_ib_k - a_kb_i)^2 \geq \sum_{(i,k)\in A\times B}a_i^2\sum_{(i,k)\in A\times B}b_k^2$$

□

2.3 Аксиома Архимеда. Плотность множества рациональных чисел в $\mathbb{R}$

2.3.1 Аксиома Архимеда

$$\forall x, y > 0 : \exists n \in \mathbb{R} : nx > y$$

2.3.2 Плотность множества $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$

$$\mathbb{Q} \text{ плотно в } \mathbb{R} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b \ \ (a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$$

В любом интервале в $\mathbb{R}$ содержится число $\in \mathbb{Q}$.

Proof. $\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$, т.е. $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b \quad (a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$
Возьмем $n \in \mathbb{N} : n > \frac{1}{b-a}$. Тогда $\frac{1}{n} < b - a$
$q := \frac{[na]+1}{n} \in \mathbb{Q}$
$q \leq \frac{na+1}{n} = a + \frac{1}{n} < a + ba < b \Rightarrow q < b$
$q > \frac{na}{n} = a \Rightarrow q > a$ □

2.4 Неравенство Бернулли

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad x \geq -1, n \in \mathbb{N}$$

$$(1+x)^n \geq 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2 \quad x > 0, n \in \mathbb{N} \text{ — более сложная версия}$$

Proof. База: $n = 1: \ (1+x)^1 \geq 1+x$
Переход: Дано неравенство $(1+x)^n \geq 1+nx$, оно верно при каком-то n. Докажем, что $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$$

□

2.5 Единственность предела и ограниченность сходящейся последовательности

(X, ρ) — метрическое пр-во, $a, b \in X$, (x_n) — послед. в X, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$, тогда $a = b$

Proof.

$$\text{Докажем от противного — пусть } a \neq b. \text{ Возьмем } 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\rho(a,b)$$

$$\exists N(\varepsilon) \ \forall n > N(\varepsilon) \ \rho(x_n, a) < \varepsilon$$

$$\exists K(\varepsilon) \ \forall n > K(\varepsilon) \ \rho(x_n, b) < \varepsilon$$

$$\text{При } n > \max(N(\varepsilon), K(\varepsilon)) \quad \rho(a,b) \leq \rho(a,x_n)+\rho(b,x_n) < 2\varepsilon < \rho(a,b) \text{ — противоречие}$$

□

2.6 Теорема о предельном переходе в неравенствах для последовательностей и для функций

2.6.1 Для последовательностей

Если $(x_n), (y_n)$ — вещественные последовательности $x_n \to a, y_n \to b, \exists N \ \forall n > N \ x_n \leq y_n$, **тогда** $a \leq b$.

2.6.2 Для функций

Если $f, g : X \to \mathbb{R}$, a — предельная точка X, и $\forall x \in X \ \ f(x) \leq g(x)$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Proof.

$$\text{Докажем от противного. Пусть } a > b, 0 < \varepsilon < \frac{a-b}{2}.$$

$$\exists N(\varepsilon) \ \forall n > N \ \ a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$$

$$\exists K(\varepsilon) \ \forall n > K \ \ b-\varepsilon < y_n < b+\varepsilon$$

$$\text{При } n > \max(N,K) \ \ y_n < b+\varepsilon < a-\varepsilon < x_n \text{ — противоречие}$$

□

Proof. По Гейне.
$\forall (x_n) \to a, x_n \in X, x_n \neq a$:

$$f(x_n) \to A, g(x_n) \to B, \forall x \;\; f(x) \leq g(x) \Rightarrow f(x_n) \leq g(x_n) \Rightarrow A \leq B$$

□

2.7 Теорема о двух городовых

Если $(x_n), (y_n), (z_n)$ - вещ. посл., $\forall n \;\; x_n \leq y_n \leq z_n, \lim x_n = \lim z_n = a$, **тогда** $\exists \lim y_n = a$

Proof.

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n > N \;\; a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists K \;\; \forall n > K \;\; a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_0 = max(N, K) \;\; \forall n > N_0 \;\; a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon$$
$$\text{По определению } \lim y_n = a$$

□

2.8 Бесконечно малая последовательность

Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную — бесконечная последовательность, т.е. (x_n) — беск. малая, (y_n) — ограничена $\Rightarrow x_n y_n$ — беск. малая

Proof. Возьмём K такое, что $\forall n \;\; |y_n| \leq K$.

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n > N \;\; |x_n| \leq \frac{\varepsilon}{K}$$

$$|x_n y_n| \leq \frac{\varepsilon}{K} K = \varepsilon \Rightarrow x_n y_n \to 0$$

□

2.9 Теорема об арифметических свойствах предела последовательности в нормированном пространстве и в R

Об арифметических свойствах предела в нормированном пространстве.
Если $(X, ||\cdot||)$ — норм. пр-во, $(x_n), (y_n)$ — посл. в X, λ_n — посл. скаляров, и $x_n \to x_0, y_n \to y_0, \lambda_n \to \lambda_0$, **тогда:**

1. $x_n \pm y_n \to x_0 \pm y_0$
2. $\lambda_n x_n \to \lambda_0 x_0$
3. $||x_n|| \to ||x_0||$

Proof. Это доказательство написано не по лекциям.

1. $\forall \varepsilon \;\; \exists N_2 \;\; \forall n > N_1 \;\; ||x_n - x_0|| < \varepsilon$
   $\forall \varepsilon \;\; \exists N_2 \;\; \forall n > N_2 \;\; ||y_n - y_0|| < \varepsilon$
   $N := \max(N_1, N_2)$
   $\forall \varepsilon \;\; \forall n > N \;\; ||(x_n + y_n) - (x_0 + y_0)|| \leq ||x_n - x_0|| + ||y_n - y_0|| \leq 2\varepsilon$

2. $||\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0|| = ||\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0 + \lambda_0 x_n - \lambda_0 x_n|| = ||(\lambda_n - \lambda_0)x_n + (x_n - x_0)\lambda_0|| \leq ||(\lambda_n - \lambda_0)x_n|| + ||(x_n - x_0)\lambda_0|| = ||x_n|||\lambda_n - \lambda_0| + ||x_n - x_0|||\lambda_0|$

   $|\lambda_n - \lambda_0|$ и $||x_n - x_0||$ — бесконечно малые, $||x_n||$ и $|\lambda_n|$ — ограниченные $\Rightarrow ||x_n|||\lambda_n - \lambda_0| + ||x_n - x_0|||\lambda_0|$ — бесконечно малая

3. $|||x_n|| - ||x_0||| \leq ||x_n - x_0||$

$\square$

Об арифметических свойствах пределов в $\mathbb{R}$.
Для $(x_n), (y_n)$ — вещ.посл., $\forall n \;\; y_n \neq 0, y_0 \neq 0$:

4. $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x_0}{y_0}$

2.10 Неравенство Коши-Буняковского в линейном пространстве, норма, порожденная скалярным произведением

Для X — линейного пространства *(над* $\mathbb{R}, \mathbb{C}$*)*
$\forall x, y \in X \quad |\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$

Proof. Возьмём $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$
При $y = 0$ тривиально, пусть $y \neq 0$

$$0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle = \langle x, x\rangle + \lambda\langle y, x\rangle + \overline{\lambda}\langle x, y\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle y, y\rangle$$

$$\lambda := -\frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}, \overline{\lambda} = -\frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle}$$

$$0 \leq \langle x, x\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle y, x\rangle - \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle x, y\rangle + \frac{\langle x, y\rangle\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle}$$

$$0 \leq \langle x, x\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle y, x\rangle$$

$$\frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle y, x\rangle \leq \langle x, x\rangle$$

$$\langle x, y\rangle\langle y, x\rangle \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

$\square$

Если $(X, ||\cdot||)$ — норм. пр-во, тогда $\rho(x, y) := ||x - y||$ — метрика, порожденная нормой. Не все метрики порождены нормами, например $\rho = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$.

2.11 Леммы о непрерывности скалярного произведения и покоординатной сходимости в $\mathbb{R}^n$

2.11.1 О покоординатной сходимости в $\mathbb{R}^m$

О покоординатной сходимости в $\mathbb{R}^m$
$(x^{(n)})$ — последовательность векторов в $\mathbb{R}^m$
в $\mathbb{R}^m$ задано евклидово скалярное пространство и норма.
Тогда $(x^{(n)}) \to x \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \dots m\}\ \ x_i^{(n)} \underset{n\to+\infty}{\to} x_i$

Proof. Модуль координаты $\leq$ нормы всего вектора:

$$|x_i^{(n)} - x_i| \leq ||x^{(n)} - x|| \leq \sqrt{m} \max_{1\leq i\leq m} |x_i^n - x_i|$$

Первое неравенство доказывает $\Rightarrow$, второе неравенство доказывает $\Leftarrow$ □

2.11.2 О непрерывности скалярного произведения

X - лин. пространство со скалярным произведением, $||\cdot||$ — норма, порожденная скалярным произведением.
Тогда $\forall (x_n) x_n \to x, \forall (y_n) y_n \to y, \quad \langle x_n, y_m\rangle \to \langle x, y\rangle$

Proof.

$$|\langle x_n, y_m\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| \leq |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle| + |\langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle \leq$$

$$\leq |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| \leq ||x_n|| \cdot ||y_n - y|| + ||x_n - x|| \cdot ||y|| \to 0$$

По теореме о двух городовых чтд. □

2.12 Открытость открытого шара

$B(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) < r\}$ — открыт

Proof. $x_0 \in B(a, r)$
Докажем, что x_0 — внутренняя, т.е. $\exists U(x_0) \subset B(a, r)$
$k := r - \rho(a, x_0)$
Докажем, что $B(x_0, k) \subset B(a, r)$

$$\forall x \in B(x_0, k) \quad \rho(x, x_0) < k$$

$$\rho(a, x_0) + \rho(x, x_0) < r$$

$$\rho(x, a) \leq \rho(a, x_0) + \rho(x, x_0) < r$$

□

2.13 Теорема о свойствах открытых множеств

1. $(G_\alpha)_{\alpha\in A}$ - семейство открытых множеств в (X,ρ)

   Тогда $\bigcup\limits_{\alpha\in A} G_\alpha$ - открыто в X.

2. $G_1, G_2, \dots G_n$ - открыто в X.

   Тогда $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$ - открыто в X.

Proof. 1. $x_0 \in \bigcup\limits_{\alpha\in A} G_\alpha$

$\exists \alpha_0 : x_0 \in G_{\alpha_0}$

G_{α_0} — открыто $\Rightarrow \exists U(x_0) \subset G_{\alpha_0} \subset \bigcup\limits_{\alpha\in A} G_\alpha \Rightarrow x_0$ — внтуренняя точка $\bigcup\limits_{\alpha\in A} G_\alpha \Rightarrow$ $\bigcup\limits_{\alpha\in A} G_\alpha$ — открыто, т.к. в нём все точки внутренние.

2. $x_0 \in \bigcap\limits_{\alpha\in A} G_\alpha$

   $\forall \alpha \in A : x_0 \in G_\alpha$

   $\forall \alpha \in A\ \ G_\alpha$ — открыто $\Rightarrow \exists B_\alpha(x_0, r_\alpha) \subset G_\alpha$

   $\forall x_0 : \exists U(x_0) = B(x_0, \min\limits_\alpha r_\alpha) \subset \bigcap\limits_{\alpha\in A} G_\alpha \Rightarrow x_0$ — внутренняя точка $\bigcap\limits_{\alpha\in A} G_\alpha \Rightarrow \bigcap\limits_{\alpha\in A} G_\alpha$ — открыто, т.к. в нём все точки внутренние.

□

2.14 Теорема о связи открытых и замкнутых множеств, свойства замкнутых множеств

D — замкнуто $\Leftrightarrow D^c = X \setminus D$ *(дополнение)* — открыто.
Свойства:

1. $(F_\alpha)_{\alpha\in A}$ — замкн. в X

   Тогда $\bigcap F_\alpha$ — замкн. в X

2. $F_1 \dots F_n$ — замкн. в X

   Тогда $\bigcup F_i$ — замкн. в X

Proof. Докажем $\Rightarrow$: D — замкн. $\Rightarrow^? X \setminus D$
$x \in X \setminus D \Rightarrow x$ — не пред. точка D, т.к. D содержит все свои пред. точки и $x \notin D$
$\Rightarrow \exists r : B(x,r) \subset X \setminus D$
Докажем $\Leftarrow$: $X \setminus D$ — откр., D — замкн.?, т.е. $\forall x \in \{\text{пр.точки D}\}\ \ ?x \in D$
Если $x \in D$ — тривиально.
$x \notin D \quad x \in X \setminus D$
$\exists U(x) \subset X \setminus D \Rightarrow x$ - не пред. точка □

Proof. 1. $(\bigcap F_\alpha)^c = X \setminus (\bigcap F_\alpha) = \bigcup (X \setminus F_\alpha)$

F_α — закрыто $\Rightarrow X \setminus F_\alpha$ — открыто $\Rightarrow \bigcup (X \setminus F_\alpha)$ — открыто

$(\bigcap F_\alpha)^c$ — открыто $\Rightarrow \bigcap F_\alpha$ — закрыто

2. $(\bigcup F_i)^c = \bigcap (F_i)^c$
   $\bigcap (F_i)^c$ — открыто, т.к. F_i^c — открыто $\Rightarrow (\bigcup F_i)^c$ — открыто $\Rightarrow \bigcup F_i$ — закрыто

□

2.15 Теорема об арифметических свойствах предела последовательности (в $\overline{\mathbb{R}}$). Неопределенности

2.15.1 Теорема об арифметических свойствах предела последовательности (в $\overline{\mathbb{R}}$)

$(x_n), (y_n)$ — вещ., $x_n \to a, y_n \to b, \quad a, b \in \overline{\mathbb{R}}$
Тогда:

1. $x_n \pm y_n \to a \pm b$
2. $x_n y_n \to ab$, *если* $\forall n \;\; y_n \neq 0; b \neq 0$
3. $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}$

При условии, что выражения в правых частях имеют смысл.

2.15.2 Неопределенности

- $\begin{cases} x_n \to +\infty \\ y_n \to -\infty \end{cases} \Rightarrow x_n + y_n \to ?$
- $\begin{cases} x_n \to n + \sin n \\ y_n \to -n \end{cases} \Rightarrow x_n + y_n = \sin n, \nexists \lim$
- $\begin{cases} x_n \to n \\ y_n \to -\sqrt{n} \end{cases} \Rightarrow x_n + y_n = n - \sqrt{n} \to +\infty$
- $\begin{cases} x_n \to 0 \\ y_n \to a \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to \infty$

2.16 Теорема Кантора о стягивающихся отрезках

Дана последовательность отрезков $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$
Длины отрезков $\to 0$, т.е. $(b_n - a_n) \to_{n \to +\infty} 0$
Тогда $\exists! c \in \mathbb{R} \quad \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} [a_k, b_k] = \{c\}$ и при этом $a_n \to_{n\to+\infty} c, b_n \to_{n\to+\infty} c$

Proof. Берем из аксиомы Кантора $c \in \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} [a_k, b_k]$

$$\begin{cases} 0 \le b_n - c \le b_n - a_n \\ 0 \le c - a_n \le b_n - a_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_n - c \to 0 \\ c - a_n \to 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_n \to c \\ a_n \to c \end{cases}$$

По теореме об единственности предела c однозначно определено. □

2.17 Теорема о существовании супремума

$E \subset \mathbb{R}, E \neq \varnothing, E$ — огр. сверху.
Тогда $\exists \sup E \in \mathbb{R}$

Proof. Строим систему вложенных отрезков $[a_k, b_k]$ со свойствами:

1. b_k — верхняя граница E
2. $[a_k, b_k]$ содержит точки E.

a_1 — берём любую точку E, b_1 — любая верхняя граница.
Границы следующего отрезка найдём бинпоиском *(математики это называют полоивное деление)*.
Если $\frac{a_1+b_1}{2}$ — верхняя граница E, $[a_2, b_2] := [a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$.
Иначе на $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ есть элементы E, $[a_2, b_2] := [\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$
Длина $[a_k, b_k] = b_k - a_k = \frac{b_1-a_1}{2^{k-1}} \to 0$
$\exists! c \in \prod [a_k, b_k]$
Проверим: $c = \sup E$

1. $\forall x \in E \;\; \forall n \;\; x \leq b_n$
2. $\forall \varepsilon > 0 \;\; c - \varepsilon$ — не верхн. гран.

Доказательство 1: $x \to x, b_n \to c \Rightarrow x \leq b_n$
Доказательство 2: $\forall \varepsilon > 0$ возьмём $n : \frac{b_1-a_1}{2^n} < \varepsilon$. $c - \varepsilon < a_n \Leftrightarrow c - a_n < \varepsilon \Leftrightarrow c - a_n < b_n - an < \varepsilon$ □

2.18 Лемма о свойствах супремума

О свойствах sup, inf

1. $\varnothing \neq D \subset E \subset \mathbb{R} \quad \sup D \leq \sup E$
2. $\lambda \in \mathbb{R} \quad (\lambda E = \{\lambda x, x \in E\})$
   Пусть $\lambda > 0$, тогда $\sup \lambda E = \lambda \sup E$
3. $\sup(-E) = -\inf E$

Proof.
1. Множество верхних границ $E \subset$ множество верхних границ D.
2. $\lambda \cdot$ Множество верхних границ $E =$ множество верхних границ λE
3. Множество верхних границ $-E = -$ множество верхних границ E

□

2.19 Теорема о пределе монотонной последовательности

1. x_n — вещ. посл., огр. сверху, возрастает. $\Rightarrow \exists \lim x_n \in \mathbb{R}$
2. x_n — убывает, огр. снизу. $\Rightarrow \exists \lim x_n \in \mathbb{R}$
3. x_n — монотонна, огр. $\Rightarrow \exists \lim x_n \in \mathbb{R}$

Proof. Достаточно доказать 1.
Проверяем $\lim x_n = \sup x_n = M \in \mathbb{R}$
По определению sup:

$$\forall \varepsilon \ \exists N \ \ M - \varepsilon < x_N$$

$$x_N \leq x_{N+1} \leq x_{N+2} \leq x_{n+3} \ldots \leq M$$

$$\forall \varepsilon \ \exists \ N \ \forall n > N \ \ M_\varepsilon < x_n \leq M < M + \varepsilon$$

По определению $M = \lim x_n$ □

2.20 Определение числа e, соответствующий замечательный предел

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

2.21 Теорема об открытых и замкнутых множествах в пространстве и в подпространстве

$Y \subset X$, X — метр.п., Y — подпространство, $D \subset Y \subset X$

1. D — откр. в $Y \Leftrightarrow \exists G$ — откр. в $X \quad D = G \cap Y$
2. D — замкн. в $Y \Leftrightarrow \exists F$ — замкн. в $X \quad D = F \cap Y$

Докажем 1.

Proof. Докажем “$\Rightarrow$”.
$\forall$ точка D внутр. в Y
$\forall x \in D \ \exists r_x \ \ B^Y(x, 2x) \subset D$
Очевидно $D = \bigcup\limits_{x \in D} B^Y(x, 2x) \quad G := \bigcup\limits_{X \in D} B^X(x, r_x)$ — откр. в X.

$$G \cap Y = (\bigcup_{x \in D} B^X(r, r_x)) \cap Y = \bigcup_{x \in D} B^Y(x, 2x) = D$$

Докажем “$\Leftarrow$”.
G — откр. в $X \quad D := G \cap Y \quad ?D$ — откр. в Y
$x \in D$? x — внутр. точка D (в Y)
$x \in D \Rightarrow \exists B^X(x, r) \subset G \Rightarrow B^X(x, r) \cap Y = B^Y(x, r) \subset G \cap Y = D$ □

Докажем 2.

Proof. Докажем “$\Rightarrow$”
D — замкн. в $Y \Rightarrow D^c = Y \setminus D$ — откр. в Y
$\exists G$ — откр. в X, такое что $D^c = G \cap Y$
Тогда $G^c = X \setminus G$ — замкнуто в X, кроме того $D = G^c \cap Y$, т.к. $D^c = G \cap Y$
Возьмём в качестве F G^c.
Докажем “$\Leftarrow$”.

$$F - \text{замкн. в } X$$

$$F \cap Y - \text{замкн. в } Y?$$

$$F^c = X \setminus F - \text{откр. в } X$$

$$F^c \cap Y - \text{откр. в } Y$$

$$Y \setminus (F^c \cap Y) - \text{замкн. в } Y$$

$$Y \setminus (F^c \cap Y) =^? F \cap Y$$

$$Y \setminus ((X \setminus F) \cap Y) =^? F \cap Y$$

Докажем это.

$$Y \cdot \overline{\overline{F} \cdot Y} = Y \cdot (\overline{\overline{F}} + \overline{Y}) = YF + Y\overline{Y} = F \cap Y$$

□

2.22 Теорема о компактности в пространстве и в подпространстве

(X, ρ) — метрич. пространство, $Y \subset X$ — подпространство, $K \subset Y$
Тогда K — комп. в $Y \Leftrightarrow K$ — компактно в X.

Proof. Докажем “$\Rightarrow$”

$$K - \text{комп. в } X \Leftrightarrow K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha, G_\alpha - \text{откр. в } X$$

Доказать: $\exists$ кон. $\alpha_1 \dots \alpha_n \quad K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} (G_\alpha \cap Y) \Rightarrow \exists \text{ кон. } \alpha_1 \dots \alpha_n : K \subset \bigcup_{i=1}^{n} (G_{\alpha_i} \cap Y)$$

Тогда $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$
Докажем “$\Leftarrow$”
Дано: K — комп. в X, доказать: K — комп. в Y.

$$K \in \bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha, O_\alpha - \text{откр. в } Y$$

$$\exists G_\alpha : O_\alpha = G_\alpha \cap Y (G_\alpha - \textit{откр. в } Y)$$

По двум выражениям выше:

$$\exists K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$$

Надо дописать доказательство

□

2.23 Лемма о вложенных параллелепипедах

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall i = 1 \dots m \;\; a_i \le x_i \le b_i\}$ — параллелепипед.
$[a^1, b^1] \supset [a^2, b^2] \supset \dots$ — бесконечная последовательность параллелепипедов.
Тогда $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} [a^i, b^i] \neq \emptyset$

Если $diam[a^n, b^n] = ||b^n - a^n|| \to 0$, тогда $\exists! c \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} [a^i, b^i]$

Proof. $\forall i = 1 \dots m \quad [a_i^1, b_i^1] \supset [a_i^2, b_i^2] \supset \dots \quad \exists c_i \in \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} [a_i^n, b_i^n]$. $c = (c_1 \dots c_m)$ — общая точка всех параллелепипедов.

$|a_i^n - b_i^n| \le ||a^n - b^n|| \to 0 \Rightarrow_{\text{т. Кантора}} \exists! c_i \in \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} [a_i^n, b_i^n] \Rightarrow \exists! c = (c_1 \dots c_m)$ □

2.24 Компактность замкнутого параллелепипеда в $\mathbb{R}^m$

$[a, b]$ — компактное множество в $\mathbb{R}^m$

Proof. Докажем, что $\exists$ кон. $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n) : [a, b] \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$

Допустим, что не $\exists$
$[a^1, b^1] := [a, b] \Rightarrow [a^1, b^1]$ нельзя покрыть кон. набором
$[a^2, b^2]$:= делим $[a^1, b^1]$ на 2^m частей, берем любую "часть", которую нельзя покрыть конечным набором G_α

$\vdots$

$$diam = [a^n, b^n] = \frac{1}{2} diam[a^{n-1}, b^{n-1}] = \frac{1}{2^{n-1}} diam[a^1, b^1]$$

$$\exists c \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a^n, b^n]$$

$$c \in [a, b] \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$$

$$\exists \alpha_0 \quad c \in G_{\alpha_0} - \text{откр.}$$

$$\exists U_\varepsilon(c) \subset G_{\alpha_0}$$

$$\exists n \quad diam[a^n, b^n] \ll \varepsilon$$

$$\text{и тогда } [a^n, b^n] \subset U_\varepsilon(c) \subset G_{\alpha_0}$$

□

2.25 Теорема о характеристике компактов в $\mathbb{R}^m$

$K \subset \mathbb{R}^m$. Эквивалентны следующие утверждения:

1. K — замкнуто и ограничено
2. K — компактно
3. K — секвенциально компактно

Proof. Докажем $1 \Rightarrow 2$
K — огр. $\Rightarrow K$ содержится в $[a, b]$
K — замкн. в $\mathbb{R}^m \Rightarrow K$ — замкн. в $[a, b]$
Т.к. $[a, b]$ — комп., по простейшему свойству компактов K — комп. □

Proof. Докажем $2 \Rightarrow 3$
$\forall (x_n)$ — точки из K.
?сходящаяся последовательность
Если множество значений $D = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ — конечно, то $\exists$ сход. подпосл. очевидно.
Пусть D — бесконечно
Если D имеет предельную точку, то $x_{m_k} \to a$
Если D — бесконечно и не имеет предельных точек, $K \subset \bigcup\limits_{x \in K} B(x, \varepsilon_x)$, радиус такой, что в этом шаре нет точек D, кроме x *(его может тоже не быть)* □

Proof. Продолжим доказательство из прошлой лекции, докажем, $3 \Rightarrow 1$.
Рассмотрим секвенциально компактное K и пусть K — не ограничено. *(случай ограниченного множества тривиален)*
$\exists x_n : ||x_n|| \to +\infty$
Тогда в этой последовательности нет сходящейся последовательности, т.к. любая $x_{n_k} \to x_0 \in \mathbb{R}$ ограничена. Противоречие $\Rightarrow K$ — не компактно.
Таким образом, если K — секвенциально компактно, то K ограничено.
Докажем замкнутость K.
Пусть $\exists$ предельная точка $x_0 \notin K$
$\exists x_n \to x_0$
По секвенциальности $\exists$ подпоследовательность $x_{n_k} \to a \in K$. □

2.26 Эквивалентность определений Гейне и Коши

Определение Коши $\Leftrightarrow$ определение Гейне.

Proof. Докажем "$\Rightarrow$".
Если дана (x_n), удовл. определению Коши, доказать

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ 0 < \rho(f(x_n), A) < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D \ 0 < \rho(x, a) < \delta \ \rho(f(x), A) < \varepsilon$$

$$\text{Для этого } \delta \ \exists N \ \forall n > N \rho(x_n, a) < \delta$$

, где $x_n \in D, x_n \neq a$
$\Rightarrow \rho(f(x_n), A) < \varepsilon$ □

Proof. Докажем "$\Leftarrow$"
Пусть определение Коши не выполняется.

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in D \ 0 < \rho(x, a) < \delta \ \rho(f(x), A) \geq \varepsilon$$

$$\delta := \frac{1}{n} \ \exists x_n \in D \ 0 < \rho(x, a) < \frac{1}{\delta} \ \rho(f(x_n), A) \leq \varepsilon$$

Построена последовательность $(x_n) : x_n \in D \ x_n \neq a \ \rho(x_n, a) < \frac{1}{n} \Rightarrow \rho(x_n, a) \to 0 \Rightarrow x_n \to a$. Кроме того, $\rho(f(x_n), A) \geq \varepsilon$ – противоречит утверждению Гейне, что $x_n \to A$. □

2.27 Единственность предела, локальная ограниченность отображения, имеющего предел, теорема о стабилизации знака

2.27.1 Единственность предела

оединственностипредела

Proof. По Гейне. $\forall (x_n)$:

- $x_n \to a$
- $x_n \in D$
- $x_n \neq a$

$f(x_n) \to A, f(x_n) \to B \xrightarrow[\text{теор. о ед. предела посл.}]{} A = B$ □

2.27.2 Локальная ограниченность отображения, имеющего предел

О локальной ограниченности отображения, имеющего предел.
$f : D \subset X \to Y$, a – пред. точка D, $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$
Тогда $\exists V(a) : f$ – огр. на $V(a) \cap D$, т.е. $f(V(a) \cap D)$ содержится в некотором шаре.

Proof. Для $\varepsilon = 1 \ \exists V(a) \ \forall x \in \dot{V}(a) \cap D \ \ f(x) \in U_\varepsilon(A)$
Для $x \in V(a) \cap D \ \ f(x) \in U_{\tilde{\varepsilon}}(A)$, где $\tilde{\varepsilon} = \max(\varepsilon, \rho(A, f(a)) + 1)$ □

2.27.3 Теорема о стабилизации знака

О стабилизации знака.
$f : D \subset X \to Y$, a — пред. точка D, $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$
Пусть $B \in Y, B \neq A$
Тогда $\exists V(a) \;\; \forall x \in \dot{V}(a) \cap D \;\; f(x) \neq B$

Proof. Для

$$0 < \varepsilon < \rho(A, B) \;\; \exists V(a) \;\; \forall x \in \dot{V}(a) \cap D \;\; f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

$U_\varepsilon(A)$ не содержит B. □

2.28 Арифметические свойства пределов отображений. Формулировка для $\overline{\mathbb{R}}$

$f, g : D \subset X \to Y$, X — метрич. пространство, Y — норм. пространство над $\mathbb{R}$, a — пред. точка D
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A, \lim\limits_{x \to a} g(x) = B$
$\lambda : D \to \mathbb{R}, \lim\limits_{x \to a} \lambda(x) = \lambda_0$
Тогда:

1. $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm g(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} f(x) \pm g(x) = A \pm B$
2. $\lim\limits_{x \to a} \lambda(x) f(x) = \lambda_0 A$
3. $\lim\limits_{x \to a} ||f(x)|| = ||A||$
4. Для случая $Y = \mathbb{R}$ и для $B \neq 0$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$

$\frac{f}{g}$ задано на множестве $D' = D \setminus \{x : g(x) = 0\}$

a — пр. точка D' по теореме о стабилизации знака $\exists V(a) \;\; \forall x \in V(a) \cap D \;\; g(x)$ — того же знака, что и B, т.е. $g(x) \neq 0$

$\dot{V}(a) \cap D' = \dot{V}(a) \cap D \Rightarrow a$ — пред. точка для D'

Proof. По Гейне. $\forall (x_n)$:

- $x_n \to a$
- $x_n \in D$
- $x_n \neq a$

$f(x_n) + g(x_n) \to^? A + B$ верно по теореме последовательности.
Аналогично прочие пункты, кроме 4.
$f(x_n) \to A$
$g(x_n) \to B \neq 0 \Rightarrow \exists n_0 \;\; \forall n > n_0 \;\; g(x_n) \neq 0$
$\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ корректно задано при $n > n_0$. □

Если $Y = \overline{\mathbb{R}}$, можно "разрешить" случай $A, B = \pm\infty$ Тогда 3. тривиально, 1., 2. и 4. верно, если выражения $A \pm B$, $\lambda_0 A$, $\frac{A}{B}$ корректны.
Докажем 1. как в теореме об арифметических свойствах последовательности.
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty; \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall E_1 \ \exists\delta_1 > 0 \ \forall x \in D \cap V_{\delta_1}(a) \ f(x) > E_1 \ \forall E_2 \ \exists\delta_2 > 0 \ \forall x \in D \cap V_{\delta_2}(a) \ g(x) > E_2$

2.29 Принцип выбора Больцано–Вейерштрасса

Если в $\mathbb{R}^m$ (x_n) — ограниченная последовательность, то у неё существует сходящаяся подпоследовательность.

Proof. x_n — огр. $\Rightarrow x_n$ содержится в замкнутом кубе. Так как куб секвенциально компактен, x_{n_k} сходится. □

2.30 Сходимость в себе и ее свойства

x_n — **фундаментальная, последовательность Коши, сходящаяся в себе**, если:

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall m, n > N \ \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$$

1. x_n — фунд. $\Rightarrow x_n$ — ограничена
2. x_n — фунд; $\exists x_{n_k}$ — сходящ. Тогда x_n сходится.

Proof. 1. $\varepsilon := 1 \ \exists N \ \forall m, n := N+1 > N \ \rho(x_m, x_{N+1}) < 1$
$R := \max(1; \rho(x_1, x_{N+1}), \ldots, \rho(x_N, x_{N+1}))$
$\forall n \ x_n \in B(x_{N+1}, R) \Rightarrow x_n$ сходится.

2. $\begin{cases} \varepsilon > 0 \ \exists K \ \forall k > K \ \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon \\ \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall m, n > N \ \rho(x_m, x_n) < \varepsilon \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow} x_n \to a$

$\forall\varepsilon > 0 \ \exists\tilde{N} := \max(N, K)$ при $k > \tilde{N}$ выполняется $k > K$, значит $n_k \geq k > K \Rightarrow \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon$.

При $n > \tilde{N} \geq N \ m := n_k > \tilde{N} \geq N \Rightarrow \rho(x_n, x_{n_k}) < \varepsilon$

Итого $\forall n > \tilde{N} \ \rho(x_n, a) \geq \rho(x_n, x_{n_k}) < 2\varepsilon$

□

2.31 Критерий Коши для последовательностей и отображений

2.31.1 Для последовательностей

1. В любом метрическом пространстве x_n — сходящ. $\Rightarrow x_n$ — фунд.
2. В $\mathbb{R}^m$ x_n — фунд. $\Rightarrow x_n$ — сходящ.

Proof. 1. $x_n \to a \quad \forall\varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ \rho(x_n, a) < \varepsilon$
$x_n \to a \quad \forall\varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n, m > N \rho(x_m, x_n) \geq \rho(x_n, a) + \rho(x_m, a) < 2\varepsilon$

2. x_n — фунд. $\Rightarrow x_n$ — огр. $\overset{\text{Б.-В.}}{\Longrightarrow} \exists x_{n_k}$ — сходящ.

$\begin{cases} \exists x_{n_k} - \text{сходящ.} \\ x_n - \text{фунд.} \end{cases} \Rightarrow x_n - \text{сходящ.}$

□

2.31.2 Для отображений

$f : D \subset X \to Y$, a — пр. точка D, Y — полное метрическое пространство.
Тогда

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) \in Y \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x_1, x_2 \in D \;\; \rho(x_1, a) < \delta; \rho(x_2, a) < \delta \;\; \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

Proof. "$\Rightarrow$" как для последовательностей.
Докажем "$\Leftarrow$" по Гейне.
Заметим, что последовательность $f(x_n)$ — фундаментальная, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall m, n > N \;\; \rho(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$$

$$x_n \to a \Rightarrow \exists N \;\; \forall n > N \;\; \rho(x_n, a) < \delta$$

$$\forall m, n > N \;\; \rho(x_n, a) < \delta; \rho(x_m, a) < \delta \overset{\text{Фунд.}}{\Longrightarrow} \rho(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$$

□

2.32 Теорема о пределе монотонной функции

$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, монотонная, $a \in \overline{\mathbb{R}}$
$D_1 := D \cap (-\infty, a)$, a — пред. точка D_1. Тогда:

1. f — возрастает, огр. сверху D_1. Тогда $\exists$ конечный предел $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$

2. f — убывает, огр. снизу D_1. Тогда $\exists$ конечный предел $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$

Proof. 1. $L := \sup\limits_{D_1} f \quad L \overset{?}{=} \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$

$\forall \varepsilon > 0 \;\; L - \varepsilon$ — не верхн. граница для $\{f(x) : x \in D_1\}$ $\exists x_1 : L_\varepsilon < f(x_1)$.

Тогда при $x \in (x_1, a) \cap D_1 \;\; L - \varepsilon < f(x_1) \leq f(x) \leq L$

$\exists \delta := |x_1 - a| \;\; \forall x : x \in (x_1, a) \;\; L_\varepsilon \leq f(x) < L + \varepsilon$

Аналогично доказывается пункт 2.

□

2.33 Свойства непрерывных отображений: арифметические, стабилизация знака, композиция

2.33.1 Арифметические

1. $f, g : D \subset X \to Y \;\; x_0 \in D$ (Y — норм. пространство)
   f, g — непр. в D; $\lambda : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ — непр. x_0
   Тогда $f \pm g, ||f||, \lambda f$ — непр. x_0
2. $f, g : D \subset X \to \mathbb{R} \;\; x_0 \in D$
   f, g — непр. в x_0
   Тогда $f \pm g, |f|, fg$ — непр. в x_0
   $g(x_0) \neq 0$, тогда $\frac{f}{g}$ — непр. x_0

Доказательство отсутствует

2.33.2 Стабилизация знака

Если функция $f : D \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то:

$$\exists V(x_0) : \forall x \in V(x_0) \cap D \quad \text{sign}\, f(x) = \text{sign}\, f(x_0)$$

Proof. Докажем для $f(x_0) > 0$.
Докажем от противного:

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; \exists x_n \in U_{x_0}\left(\frac{1}{n}\right) \cap D : g(x_n) \leq 0$$

Противоречие. □

2.33.3 Непрерывность композиции непрерывных отображений

$f : D \subset X \to Y \quad g : E \subset Y \to Z \quad f(D) \subset E$
f — непр. в $x_0 \in D$, g — непр. в $f(x_0)$
Тогда $g \circ f$ непр. в x_0

Proof. По Гейне.
Проверяем, что $\forall (x_n) : x_n \in D, x_n \to x_0 \quad g(f(x_n)) \xrightarrow{?} g(f(x_0))$
$y_n := f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x_0)$
$y_n \in E$
$\Rightarrow g(y_n) \to g(y_0)$ □

2.34 Непрерывность композиции и соответствующая теорема для пределов

2.34.1 Непрерывность композиции

Дана выше.

2.34.2 Соответствующая теорема для пределов

$f : D \subset X \to Y \quad g : E \subset Y \to Z \quad f(D) \subset E$
a — предельн. точка $D \quad f(x) \xrightarrow[x \to a]{} A$
A — предельн. точка $E \quad g(y) \xrightarrow[y \to A]{} B$
$\exists V(a) \quad \forall x \in \dot{V}(a) \cap D \quad f(x) \neq A \quad (*)$
Тогда $g(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} B$

Proof. По Гейне.
Проверяем, что $\forall (x_n) : \substack{x_n \in D \\ x_n \to a \\ x_n \neq a} \quad g(f(x_n)) \xrightarrow{?} B$
$y_n := f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} A$
$y_n \in E$
При больших $N \quad y_n \in V(a) \Rightarrow y_n \neq A$
$\Rightarrow g(y_n) \to B$ □

2.35 Теорема о замене на эквивалентную при вычислении пределов. Таблица эквивалентных

2.35.1 Теорема о замене на эквивалентную при вычислении пределов

$f, \tilde{f}, g, \tilde{g} : D \subset X \to \mathbb{R}$
x_0 — предельная точка D
$f \sim \tilde{f}, g \sim \tilde{g}$ при $x \to x_0$
Тогда

$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \to x_0} \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)$$

, т.е. если $\exists$ один из пределов, то $\exists$ и второй и имеет место равенство

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}$$

, если x_0 лежит в области определения $\frac{f}{g}$

Proof.

$$f(x)g(x) = \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)\frac{f}{\tilde{f}}\frac{g}{\tilde{g}} \to \tilde{f}(x)\tilde{g}(x) \cdot 1 \cdot 1$$

□

2.35.2 Таблица эквивалентных

Дана выше. (1.41, стр. 8)

2.36 Теорема единственности асимптотического разложения

$f, g_n : D \subset X \to \mathbb{R} \quad x_0$ — предельная точка D
$\forall n \;\; g_{n+1} = o(g_n), x \to x_0$
$\exists U(x_0) \;\; \forall x \in \dot{U}(x_0) \cap D \;\; \forall i \;\; g_i(x) \neq 0$
Если $f(x) = c_0 g_0(x) + \ldots + c_n g_n(x) + o(g_n(x))$
$f(x) = d_0 g_0(x) + \ldots + d_m g_m(x) + o(g_m(x))$

$]n \le m$
Тогда $\forall i \ \ c_i = d_i$

Proof. $k := min\{i : c_i \ne d_i\}$

$$f(x) = c_0 g_0 + \ldots + c_{k-1} g_{k-1} + c_k g_k + o(g_k)$$

$$f(x) = c_0 g_0 + \ldots + c_{k-1} g_{k-1} + d_k g_k + o(g_k)$$

$$0 = (c_k - d_k) g_k + o(g_k)$$

$$d_k - c_k = \frac{o(g_k)}{g_k(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

□

2.37 Теорема о топологическом определении непрерывности

$f : X \to Y$ — непр. на $X \Leftrightarrow \forall G \subset Y$, откр. $f^{-1}(G)$ — откр. в X.

Proof. "$\Rightarrow$" $x_0 \in f^{-1}(G) \quad ?\exists V(x_0) \subset f^{-1}(G)$
f — непр. в $x_0 \quad \forall U(f(x_0)) \quad W(x_0) \quad \forall x \in W \quad f(x) \in U$
$f(x_0) \in G$ — откр. $\Rightarrow \exists U_1(f(x_0)) \subset G$
Для $U_1 \quad \exists W(x_0) : x \in W \quad f(x) \in U_1 \subset G$
$W(x_0) \subset f^{-1}(G)$
"$\Leftarrow$" $x_0 \in X$? непр. f в x_0
$\forall U(f(x_0)) \quad \exists W(x_0) \quad \forall x \in W \quad \forall f(x) \in U$ — надо проверить
$U(f(x_0))$ — откр. $\Rightarrow$ $f^{-1}(U(f(x_0)))$ — откр., а $x_0 \in f^{-1}(U(f(x_0)))$, значит $\exists W(x_0) \subset f^{-1}(U(f(x_0)))$
Для любого $x \in W(x_0)$ будет выполняться $f(x) \in U(f(x_0))$ □

2.38 Теорема Вейерштрасса о непрерывном образе компакта. Следствия

$f : X \to Y$ — непр. на X
Если X — комп., то $f(X)$ — комп.

Proof. $?f(X)$ — комп.
$f(X) \subset \bigcup G_\alpha \quad G_\alpha$ — откр. в Y.
$X \subset \bigcup f^{-1}(G_\alpha)$ — откр. т.к. f — непр. $\xRightarrow[X - \text{комп.}]{}$

$$\exists \alpha_1 \ldots \alpha_n \quad X \subset \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(G_{\alpha_i}) \Rightarrow f(X) \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$$

□

Следствие. Непрерывный образ компакта замкнут и ограничен.

Следствие. (1-я теорема Вейерштрасса)
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — непр.
Тогда f — огр.

Следствие. $f : X \to \mathbb{R}$
X — комп., f — непр. на X
Тогда $\exists \max\limits_X f, \min\limits_X f$
$\exists x_0, x_1 : \forall x \in X \quad f(x_0) \le f(x) \le f(x_1)$

Следствие. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — непр.
$\exists \max f, \min f$

2.39 Лемма о связности отрезка

Промежуток $\langle a, b\rangle$ *(границы могут входить, могут не входить)* — не представим в виде объединения двух непересекающихся непустых открытых множеств
Т.е. $\nexists G_1, G_2 \subset \mathbb{R}$ — откр.:

- $G_1 \cap G_2 = \varnothing$
- $\langle a, b\rangle \cap G_1 \ne \varnothing \quad \langle a, b\rangle \cap G_2 \ne \varnothing$
- $\langle a, b\rangle \subset G_1 \cup G_2$

Proof. От противного: $\alpha \in \langle a, b\rangle \cap G_1 \quad \beta \in \langle a, b\rangle \cap G_2$, пусть $\alpha < \beta$

$$t := \sup\{x : [\alpha, x] \subset G_1\} \quad \alpha \le t \le \beta$$

$t \in G_1$? нет, т.к. если да, то $t \ne \beta$ и $\exists U(t) = (t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subset G_1 \cap [\alpha, \beta]$, это противоречит определению t:
$[\alpha, t - \frac{\varepsilon}{2}] \subset G_1$
$(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subset G_1$
$[\alpha, t + \frac{\varepsilon}{2}] \subset G_1$
$t \in G_2$? нет, т.к. если лежит, то $t \ne \alpha \quad \exists (t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subset G_2 \cap [\alpha, \beta)$
$\sup\{x : [\alpha, x] \subset G_1\} \le t - \varepsilon$ □

2.40 Теорема Больцано-Коши о промежуточном значении

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, непр. на $[a, b]$. Тогда

$$\forall t \text{ между } f(a) \text{ и } f(b) \;\; \exists x \in [a, b] : f(x) = t$$

Традиционное доказательство — бинпоиск.

Proof. Сразу следует из леммы о связности отрезка и топологического определения непрерывности.
Если нашлось t, для которого доказуемое утверждение неверно, то

$$[a, b] = f^{-1}(-\infty, t) \cup f^{-1}(t, +\infty)$$

Оба множества открыты, т.к. они — прообразы открытых множеств. Кроме того, они непусты, т.к. одно из них содержит a, другое содержит b. Итого, мы представили отрезок $[a, b]$ в виде двух непересекающихся непустых открытых множеств, противоречие по предыдущей лемме. □

2.41 Теорема о сохранении промежутка

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, непр.
Тогда $f(\langle a, b\rangle)$ — промежуток. Доказательство отсутствует.

2.42 Теорема Больцано-Коши о сохранении линейной связности

X, Y — метрические пространства, $f : X \to Y$ — непрерывное и сюръекция
X — линейно связное множество. Тогда Y — линейно связное множество.

Proof. Надо доказать, что $\exists$ путь $[a, b] \to [A, B]$
$f(a) = A; f(b) = B$
X — линейно связное $\Rightarrow \exists\gamma : [\alpha, \beta] \to X, \gamma(\alpha) = a, \gamma(\beta) = b, \gamma$ — непрерывное

$$f \circ \gamma[a, b] \to Y; f \circ \gamma(\alpha) = A, f \circ \gamma(\beta) = B$$

Т.к. композиция непрерывных функций непрерывна, $f \circ \gamma$ — непрерывна. □

2.43 Описание линейно связных множеств в $\mathbb{R}$

В $\mathbb{R}$ линейно связанными множествами являются только промежутки.

Proof. 1. Промежуток линейно связен.

$$\forall A, B \in \langle a, b\rangle \quad \exists \text{ путь: } \gamma : [A, B] \Rightarrow \langle a, b\rangle; t \mapsto t$$

2. $E \subset \mathbb{R}$ — линейно связное $\overset{?}{\Rightarrow}$ E — промежуток

   Пусть E — не промежуток

   $\exists a, b, t : a, b \in E; a < b \quad a < t < b; t \neq E$

   Линейная связность: $\gamma : [\alpha, \beta] \to E$

   $\gamma(\alpha) = a \quad \gamma(\beta) = b \quad \gamma$ — непр.

□

2.44 Теорема о бутерброде

Кусок хлеба и кусок колбасы, лежащие на столе, можно разрезать прямой на две равные по площади части каждый.

Proof. Рассмотрим угол φ и разделим прямой под углом φ колбасу на две равные по площади части.
$S(\varphi) = S_\text{л} - S_\text{п}$ *(для хлеба)*
S — непр.

$$|S(\varphi + h) - S(\varphi)| \leq 2ab \sin h \leq 2d^2 \sin h$$

Берём произвольный угол $\varphi_0; \varphi_0 + \pi$
$\varphi_0 : S_\text{л} - S_\text{п}$
$\varphi_0 + \pi : S_\text{п} - S_\text{л}$
$\exists\varphi \;\; S(\varphi) = 0$ □

2.45 Теорема о вписанном n-угольнике максимальной площади

Вписанный n-угольник максимальной площади — правильный.

Proof. Чего-то геометрическое □

2.46 Теорема о непрерывности монотонной функции. Следствие о множестве точек разрыва

2.46.1 Теорема о непрерывности монотонной функции

$f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$, монотонна. Тогда

1. Точки разрыва f (если есть) — I рода
2. f — непр. на $\langle a, b \rangle \Leftrightarrow f(\langle a, b \rangle)$ — промежуток

Proof. Рассмотрим $f \uparrow$

1. $x_1 < x < x_2 \quad f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$

   $$x \to x_1 \quad f(x_1) \le f(x_1 + 0) \le f(x_2) \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_1 + 0} f(x)$$

   , аналогично для $x_1 - 0$
2. "$\Rightarrow$" следует из теоремы о сохранении промежутка.
   "$\Leftarrow$" $x_0 \in \langle a, b \rangle \quad ?f$ — непр. в x_0?

   $$f(x_0 - 0) \le f(x_0) \le f(x_0 + 0)$$

□

2.46.2 Следствие о множестве точек разрыва

У монотонной функции, заданной на промежутке, имеется не более чем счётное *(НБЧС)* множество точек разрыва.

Proof. $f(x - 0) < f(x + 0)$
$(f(x - 0), f(x + 0)) \rightsquigarrow q_x$
т. разрыва $\to \mathbb{Q}$

$$]x < t_0 < y$$

$$f(x) \le f(t_0) \le f(y)$$

$$f(x) \le f(x + 0) \le f(t_0) \le f(y - 0) \le f(y)$$

Таким образом, $(f(x - 0), f(x + 0))$ не имеет общих точек, тогда q_x все разные $\Rightarrow$ взятие q_x — инъекция. □

2.47 Теорема о существовании и непрерывности обратной функции

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — непр., строго монот.
$m := \inf\limits_{\langle a,b\rangle} f(x), M := \sup\limits_{\langle a,b\rangle} f(x)$. Тогда:

1. f — обратимая и $f^{-1} : \langle m, M\rangle \to \langle a, b\rangle$
2. f^{-1} строго монотонна и того же типа *(возрастает или убывает)*
3. f^{-1} непрерывна

Proof. Пусть $f \uparrow$
$f(\langle a, b\rangle)$ — промежуток $\langle m, M\rangle$ *(типы скобок совпадают)*
f — строго монот. $\Rightarrow$ f — инъекция. Тогда $f : \langle a, b\rangle \to \langle m, M\rangle$ — биекция
$\forall x_1 < x_2\ \ f(x_1) < f(x_2)$
$\forall y_1 < y_2\ \ f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ □

2.48 Счетность множества рациональных чисел

$\mathbb{Q}$ — счётное

Proof.

$$\mathbb{Q}_+ := \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\},\ \ \mathbb{Q}_- := \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}$$

$$\forall q \in \mathbb{N}\ \ Q_p = \left\{\frac{1}{q}, \frac{2}{q} \dots\right\} \text{ — счётно}$$

$$\mathbb{Q}_+ = \bigcup_{q=1}^{\infty} Q_p \text{ — счётно}$$

$$\mathbb{Q}_- \sim \mathbb{Q}_+ \Rightarrow \mathbb{Q}_- \text{ — счётно}$$

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- \cup \{0\} \text{ — счётно}$$

□

2.49 Несчетность отрезка

$[0, 1]$ — несчётно

Proof. Пусть $\exists \varphi : \mathbb{N} \to [0, 1]$ — биекция
$[a_1, b_1]$ — любая из частей, где нет $\varphi(1)$
$[a_2, b_2]$ — любая из частей, где нет $\varphi(2)$
$\bigcap [a_k, b_k] \supset \{x\}\quad x$ — не имеет номера
$\forall k\ \ x \in [a_k, b_k] \Rightarrow x \neq \varphi(k)$ □

2.50 Континуальность множества бинарных последовательностей

$Bin =$ множество бинарных последовательностей
Bin имеет мощность континуума

Proof. $\varphi : Bin \to [0, 1] \cap Bin_{\text{кон.}}$
$0101\ldots \mapsto 0.0101\ldots$ — это отображение не иньективно ($0100\ldots \mapsto 0.01$; $0011\ldots \mapsto 0.01$)
Иньекция достигается тем, что конечные дроби идут в $Bin_{\text{кон.}}$, а бесконечные в $[0, 1]$ □

2.51 Равносильность двух определений производной. Правила дифференцирован

Определение 1 $\Leftrightarrow$ определению 2, т.е.

$$f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + o(x - x_0), x \to x_0$$

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = B \in \mathbb{R}$$

$$A = B$$

Proof. Докажем “$\Leftarrow$”.

$$f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + o(x - x_0), x \to x_0$$

$$A = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{o(x - x_0)}{x - x_0}$$

Докажем “$\Rightarrow$”.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \alpha(x) \quad \alpha(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

$\square$

2.52 Дифференцирование композиции и обратной функции

2.52.1 Дифференцирование композиции

$f : \langle a, b\rangle \to \langle c, d\rangle \quad x \in \langle a, b\rangle \quad f$ — дифф. в x
$g : \langle c, d\rangle \to \mathbb{R} \quad g$ — дифф. $y = f(x)$
Тогда $g \circ f$ — дифф. в x; $(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Proof.

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \alpha(h)h, \alpha(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

$$g(y + k) = g(y) + g'(y)k + \beta(k)k$$

$$]f'(x)h + \alpha(h)h = k; \quad k \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

$$g(f(x + h)) = g(f(x) + f'(x)h + \alpha(h)h) =$$

$$= g(f(x)) + g'(f(x))(f'(x)h + \alpha(h)h) + \beta(k)(f'(x)h + \alpha(h)h) =$$

$$= g(f(x)) + g'(f(x))f'(x)h + g'(f(x))\alpha(h)h + \beta(k)f'(x)h + \beta(k)\alpha(h)h$$

$$]g'(f(x))\alpha(h)h + \beta(k)f'(x)h + \beta(k)\alpha(h)h = \gamma(h) \cdot h; \quad \gamma(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

$\square$

2.52.2 Дифференцирование обратной функции

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — непр., строго монот. $x \in \langle a, b\rangle$ f — дифф. в x; $f'(x) \neq 0$
По определению f $\exists f^{-1}$
Тогда f^{-1} — дифф. в $y = f(x)$ и

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Proof. $\forall k\ \exists h : f(x+h) = y+k$

$$h = (x+h) - x = f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) = \tau(k)$$

$$\frac{f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)}{k} = \frac{\tau(k)}{f(x+\tau(k)) - f(x)} = \frac{1}{\dfrac{f(x+\tau(k)) - f(x)}{(x+\tau(k)) - x}} \xrightarrow[\substack{k\to 0\\ \tau(k)\to 0}]{\text{по т.о непр. обр. ф}} \frac{1}{f'(x)}$$

□

2.53 Теорема Ферма *(с леммой)*

2.53.1 Лемма

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — дифф. в $x_0 \in (a, b)$; $f'(x_0) > 0$
Тогда $\exists \varepsilon > 0\ \ \forall x : x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)\ \ f(x_0) < f(x)$
и $\forall x : x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)\ \ f(x_0) > f(x)$

Примечание. Это не монотонность.

Proof.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x\to x_0]{} f'(x_0) > 0$$

$$x \to x_0 + 0 \quad x - x_0 > 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) > 0 \text{ вблизи } x_0 \textit{ (по теор. о стабилизации знака)}$$

$$x \to x_0 - 0 \quad x - x_0 < 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) < 0 \text{ вблизи } x_0$$

□

2.53.2 Теорема Ферма

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$
$x_0 \in (a, b)$ — точка максимума
f — дифференцируема в x_0
Тогда $f'(x_0) = 0$

Proof. Из леммы.
Если $f'(x_0) > 0$, то справа от x_0 есть $x : f(x) > f(x_0)$
Если $f'(x_0) < 0$, то слева от x_0 есть $x : f(x) > f(x_0)$ □

2.54 Теорема Ролля. Вещественность корней многочлена Лежандра

2.54.1 Теорема Ролля

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — непр. на $[a, b]$, дифф. на (a, b)
$f(a) = f(b)$. Тогда $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$

Proof. По теореме Вейерштрасса.
$x_0 = \max f(x); x_1 = \min f(x)$
$\{x_0, x_1\} = \{a, b\} \Rightarrow f = const; f' \equiv 0$
Иначе: пусть $x_0 \in (a, b) \xRightarrow[\text{т. Ферма}]{} f'(x_0) = 0$ □

2.54.2 Вещественность корней многочлена Лежандра

$n \in \mathbb{N}$
$\mathrm{Ln}(x) = ((x^2 - 1)^n)^{(n)}$ — **полиномы Лежандра** *(с точностью до умножения на константу)*
$\deg \mathrm{Ln} = n$
Утверждение: Ln имеет n различных вещественных корней.

Proof. Чего-то про получение корней кратности □