1 Повторение

1.1 Пространство ассиметричных ПЛФ

Рассмотрим пространство полилинейных форм Ω_0^p и базис $\{^{s_1 \dots s_p}W\}$.

$$^{s_1 \dots s_p}F := p! \operatorname{Asym}\{^{s_1 \dots s_p}W\}$$

$$\{^{s_1 \dots s_p}F | 1 \le s_1 < s_2 < \dots < s_p \le n\} - \text{базис} \Rightarrow \dim = C_n^p$$

- $p = 0 \Rightarrow \dim \Lambda^p = 1 \Rightarrow k$
- $p = 1 \Rightarrow \dim \Lambda^p = n \Rightarrow X^*$
- $p = n \Rightarrow \dim \Lambda^p = 1 \Rightarrow$ псевдоскаляр

  Единственный элемент базиса:

$$^{1 \dots n}F(x_1 \dots x_p) = p! \operatorname{Asym}(^{1 \dots n}W)(x_1 \dots x_n) = p! \frac{1}{p!} \sum_{(s_1 \dots s_n)} (-1)^{[s_1 \dots s_n] s_1 \dots s_n} W(x_{s_1} \dots x_{s_n}) =$$

$$= \sum_{(s_1 \dots s_n} (-1)^{[s_1 \dots s_n]} \xi_{s_1}^1 \xi_{s_2}^2 \dots \xi_{s_n}^n \stackrel{\triangle}{=} \det ||\xi_j^i||$$

$\forall V \subset \Lambda^n \quad V = \alpha^{1 \dots n} F$
$C_n^{n-p} = C_n^p \Rightarrow \Lambda^{n-p} \simeq \Lambda^p$

1.2 Внешнее произведение ПЛФ

$$U \in \Lambda^{p_1}, V \in \Lambda^{p_2} \quad U \cdot V \stackrel{?}{\in} \Lambda^p$$

$$\lhd Z = U \cdot V \notin \Lambda^{p_1 + p_2}$$

$$Z(x_1 \dots x_{p_1} \dots x_{p_1 + p_2}) = U(x_1 \dots x_{p_1}) \cdot V(x_{p_1 + 1} \dots X_{p_1 + p_2})$$

Обычное произведение ПЛФ не замкнуто, но мы хотим сделать алгебру над ПЛФ $\Rightarrow$ создадим **внешнее произведение**.

$$\in \Lambda^{p_1}, V \in \Lambda^{p_2} \quad U \wedge V := \frac{(p_1 + p_2)!}{p_1! p_2!} \operatorname{Asym}(U \cdot V) \in \Lambda^{p_1 + p_2}$$

Свойства:

1. $p + q > n \Rightarrow U \wedge V = \Theta$, т.к. пространство $\Lambda^{p_1 + p_2}$ есть нуль-пространство.
2. $U \wedge V = (-1)^{pq} V \wedge U$

   Доказательство.

$$U \wedge V(x_1 \dots x_{p+q}) = \frac{(p+q)!}{p!q!} \frac{1}{(p+q)!} \sum_{(i_1 \dots i_{p+q})} U(x_{i_1} \dots x_{i_p}) W(x_{i_{[+1}} \dots x_{i_{p+q}})(-1)^{[i_1 \dots i_{p+q}]} =$$

$$= (-1)^{pq} V \wedge U$$

□

3. $U \wedge (V \wedge W) = (U \wedge V) \wedge W = U \wedge V \wedge W = \frac{(p+q+s)!}{p!q!s!} \operatorname{Asym}(U \cdot V \cdot W)$

   Доказательство.
$$(U \wedge V) \wedge W = \left(\frac{(p+q)!}{p!q!} \operatorname{Asym}(U \cdot V)\right) \wedge W =$$
$$= \frac{(p+q)!}{p!q!} \frac{(p+q+s)!}{(p+q)!s!} \operatorname{Asym}(\operatorname{Asym}(U \cdot V) \cdot W) = \frac{(p+q+s)!}{p!q!s!} \operatorname{Asym}(U \cdot V \cdot W) =$$
$$= U \wedge V \wedge W$$
$\square$

4. $U \wedge (V + W) = U \wedge V + U \wedge W$
5. $(\alpha U) \wedge V = U \wedge (\alpha V) = \alpha(U \wedge V), \quad \alpha \in K$
6. $U \wedge \Theta = \Theta \wedge V = \Theta$
7. $\{f^i\}_{i=1}^n$ — базис X^*. Тогда ${}^{s_1 \dots s_p}F = f^{s_1} \wedge \ldots \wedge f^{s_p}$ — базис Λ^p

   Доказательство.
$${}^{s_1 \dots s_p}W = f^{s_1} \cdot \ldots \cdot f^{s_p}$$
$${}^{s_1 \dots s_p}F = p! \operatorname{Asym}(f^{s_1} \cdot f^{s_2} \cdot \ldots \cdot f^{s_p}) = p! \frac{2!}{2!} \operatorname{Asym}(f^{s_1} \cdot f^{s_2} \cdot \ldots \cdot f^{s_p}) =$$
$$= \operatorname{Asym}\left(\frac{p!}{2!} \frac{(1+1)!}{1!1!} \operatorname{Asym}(f^{s_1} \cdot f^{s_2}) \cdot f^{s_3} \ldots f^{s_n}\right) =$$
$$= \operatorname{Asym}\left(\frac{p!}{2!} f^{s_1} \wedge f^{s_2} \cdot f^{s_3} \ldots f^{s_n}\right) =$$
$$= \frac{p!}{2!} \operatorname{Asym}\left(f^{s_1} \wedge f^{s_2} \cdot f^{s_3} \ldots f^{s_n}\right) =$$
$$= \frac{p!}{3!} \operatorname{Asym}\left(f^{s_1} \wedge f^{s_2} \wedge f^{s_3} \cdot \ldots f^{s_n}\right) =$$
$$= f^{s_1} \wedge \ldots \wedge f^{s_p}$$
$\square$

2 Определители и их свойства

Определение. $\det\{x_1 \ldots x_n\} = {}^{1 \dots n}F(x_1 \ldots x_n) = f^1 \wedge \ldots \wedge f^n(x_1 \ldots x_n)$

$x_i = \sum\limits_{j_i=1}^{n} \xi_i^{j_i} e_{j_i}$ — разложение $\Rightarrow \det\{x_1 \ldots x_n\} = \sum\limits_{(j_1 \dots j_n)} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} \xi_1^{j_1} \ldots \xi_n^{j_n}$

$\lhd C = \begin{bmatrix} \xi_1^1 & \xi_2^1 & \ldots & x_n^1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^n & \xi_2^n & \ldots & x_n^n \end{bmatrix}$

Свойства:

1. $\det C = \det C^T$

Доказательство. $\det C = \sum\limits_{(i_1 \dots i_n)} (-1)^{[i_1 \dots i_n]} \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \dots \xi_n^{i_n} = \sum\limits_{(j_1 \dots j_n)} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} \xi_{j_1}^1 \xi_{j_2}^2 \dots \xi_{j_n}^n = \det C^T$ □

2. $\det\{x_1 \dots x_s \dots x_t \dots x_n\} = -\det\{x_1 \dots x_t \dots x_s \dots x_n\}$
3. $\{x_i\}_{i=1}^n$ – ЛЗ $\Rightarrow \det\{x_1 \dots x_n\} = 0$
4. $\det\{x_1 \dots x_s + \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i x_i \dots x_n\} = \det\{x_1 \dots x_n\}$
5.

$$\det\{x_1 \dots x_k \dots x_n\} = f^1 \wedge f^2 \wedge \dots f^n(x_1 \dots \sum_{m=1}^n \xi_k^m e_m \dots x_n) =$$

$$= \sum_{m=1}^n \xi_k^m f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^n(x_1 \dots e_m \dots x_n) = \sum_{m=1}^n \xi_k^m (-1) = \dots$$

Примечание. $f^1 \cdot f^2 \cdot \dots \cdot f^n(x_1 \dots x_k \dots x_n) = f^1(x_1) f^1(x_2) \dots f^k(x_k) \dots f^n(x_n)$
$\lhd \operatorname{Asym}(f^1 \cdot f^2 \cdot \dots \cdot f^n(x_1 \dots x_n)) = \frac{1}{n!} \sum\limits_{(s_1 \dots s_n)} (-1)^{[s_1 \dots s_n]} f^1 \cdot \dots f^n(x_{s_1} \dots x_{x_n}) =$
$= \frac{1}{n!} \sum\limits_{(s_1 \dots s_n)} (-1)^{[s_1 \dots s_n]} f^{s_1} \cdot \dots f^{s_n}(x_1 \dots x_n)$

Заметим, что если $m \neq k$, то результат 0. Когда $m = k$, остается n вариантов.

$$\dots = \sum_{m=1}^n \xi_k^m (-1)^{|m-k|} f^1 \wedge \dots f^{k-1} \wedge f^{k+1} \wedge \dots \wedge f^n(x_1 \dots x_{k-1}, x_{k+1} \dots x_n) =$$

$$\sum_{m=1}^n \xi_k^m (-1)^{|m-k|} M_k^m$$

Определение. **Минор** элемента ξ_k^m – $\det M_k^m$ матрицы, полученной из матрицы C вычеркиванием столбца номер K и строки с номером m.

Определение. **Алгебраическим дополнением** элемента ξ_k^m называется число $(-1)^{m+k} M_k^m$
$\det C = \sum\limits_{k=1}^n \xi_k^m A_k^m$
$\det C = \sum\limits_{k=1}^n \xi_m^k A_m^k$

Теорема 1. *Лапласа*

$$\det C = \sum_{k_1 \dots k_s} (-1)^{m_1 + k_1 + m_2 + k_2 + \dots + m_s + k_s} = L_{k_1 \dots k_s}^{m_1 \dots m_s} M_{k_1 \dots k_s}^{m_1 \dots m_s}$$

L – минор порядка s, M – доп. минор порядка $n - s$.

Следствие.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Теорема 2. *Критерий линейной зависимости набора векторов*
$\{x_i\}_{i=1}^k$ − *ЛЗ* $\Leftrightarrow \forall V \in \Lambda^k \quad V(x_1 \dots x_k) = 0$

Доказательство. "$\Leftarrow$" очевидно
"$\Rightarrow$" докажем от противного.
$]\{x_i\}_{i=1}^k$ − ЛНЗ : $\forall V \in \Lambda^k \quad V(x_1 \dots x_k) = 0$
$\lhd \{x_1 \dots x_k, y_1 \dots y_{n-k}\}$ − базис X
$]\{f^1 \dots f^n\}$ − базис X^*
$\lhd \{f^j\}_{j=1}^k \quad f^1 \wedge \dots \wedge f^k(x_1 \dots x_k) = \tilde{C} \neq 0 \Rightarrow$ противоречие. □