Примеры к прошлой теореме:

1. f — непр., $\Phi([p,q]) := \sigma(\Pi\Gamma(f[p,q])) = \int\limits_p^q f dx$

   Тогда выполняется определение плотности аддитивной плотности промежутка.

2. $\Phi[\alpha,\beta] = S_{\text{сектор}(\alpha,\beta)} = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

Пример. $x(t), y(t)$ — кривая в $\mathbb{R}^2$

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\int_{t_\alpha}^{t_\beta}(x(t)^2+y(t)^2)\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{y'(t)x(t)-y(t)x'(t)}{x^2(t)}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{t_\alpha}^{t_\beta} y'(t)x(t)-y(t)x'(t)dt$$

$x := \sin t, y := \cos t$

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin^2 t - \cos^2 t dt = -\frac{\pi}{4} \text{ — проблема, отрицательная площадь}$$

1 Выпуклость функций

$\forall z \in [x,y] \ \ \exists \alpha \in [0,1] : z = \alpha x + (1-\alpha)y$
α — доля отрезка zy от xy, т.е. $\alpha = \frac{|zy|}{|xy|}$

Определение. $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ — выпуклая

$$\forall x,y \in \langle a,b\rangle \quad \forall \alpha \in [0,1] \quad f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

Примечание. f — выпуклая $\Leftrightarrow$ всякая хорда графика f расположена "выше" графика *(нестрого выше)* $\Leftrightarrow$ НГ$(f,\langle a,b\rangle)\{(x,y) : x \in \langle a,b\rangle \ \ y \ge f(x)\}$

Выпуклый = выпуклый вниз; вогнутый = выпуклый вверх

Определение. $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ — строго выпуклая

$$\forall x,y \in \langle a,b\rangle \quad \forall \alpha \in (0,1) \quad f(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

Лемма 1. *о трех хордах*
$f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$. *Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

1. f — *вып.* $\langle a,b\rangle$

2. $\forall x_1,x_2,x_3 \in \langle a,b\rangle \ \ x_1 < x_2 < x_3 \quad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$

Доказательство. Левое $\Leftrightarrow f(x_2)(x_3-x_1) \le f(x_3)(x_2-x_1) + f(x_1)(x_3-x_1-(x_2-x_1))$
$f(x_3\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1} + x_1\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}) = f(x_2) \le f(x_3)\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1} + f(x_1)\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$ $\square$

Примечание. Если f — строго выпуклая, то в лемме оба неравенства строгие.

Теорема 1. *об односторонней дифференциируемости выпуклой функции.*
f — вып. $\langle a,b\rangle$. Тогда $\forall x\in(a,b)\ \ \exists f'_+(x), f'_-(x)$ и $\forall x_1,x_2\in(a,b), x_1<x_2$Ж

$$f'_-(x_1)\le f'_+(x_1)\le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le f'_-(x_2)$$

Доказательство. $f'_+(x_1)=\lim\limits_{x\to x_1+0}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ — монотонно убывающая функция от x

Фиксируем $x_0<x_1$. По лемме о трех хордах $\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}\le\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ □

Следствие. f — вып. на $\langle a,b\rangle\Rightarrow f$ непр. на (a,b)

$$\lim_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)$$

Теорема 2. *выпуклость в терминах касательных*
f — вып. на $\langle a,b\rangle$. Тогда график f расположен не ниже любой касательной
т.е. $\forall x,x_0\quad f(x)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

Доказательство. "$\Rightarrow$"
Если $x>x_0\quad f'(x_0)\ge\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, это неравенство 2. из предыдущей теоремы
$x<x_0$ аналогично
"$\Leftrightarrow$" фиксируем x_0. Берем $x_1<x_0<x_2$
$f(x_1)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)$; $f(x_2)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0)$, т.е. $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\le f'(x_0)\le\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$.
Это верно по лемме. □

Определение. $A\subset\mathbb{R}^2$ — вып. $l\subset\mathbb{R}^2$ — прямая
l — **опорная прямая** к A, если A содержится в одной полуплоскости относительно $l, l\cap A=\varnothing$

Теорема 3. *дифференциальный критерий выпуклости*

1. *$f:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$, дифф. в (a,b)*

   Тогда f — вып. $\Rightarrow f'$ возр. на (a,b)

   Если f — строго выпуклая $\Rightarrow f'$ строго возрастает

2. *$f:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$, дважды дифф. на (a,b)*

   f — вып. $\Leftrightarrow f''\ge 0$ на (a,b)

   (a) *"$\Rightarrow$"$f'_+(x_1)\le f'_-(x_2)\quad(x_1<x_2)$*
   "$\Leftarrow$"?f вып. $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c_1)<f'(c_2)=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$
   Теперь утверждение 2. очевидно.

Примечание. $f:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$ — вып.
Тогда f — дифф. на (a,b) за исключением, может быть, счетного множества точек.
$\forall x\ \ \exists f'_+(x), f'_-(x)$
$f'_\pm$ возрастает
$f'_-(x)=f'_+(x)\Rightarrow f$ дифф. в x
$f'_-(x)<f'_+(x)\Rightarrow f$ не дифф. в x
Тогда x — точка скачка для f'_+, f'_-, их НБСЧ.

Пример. Изопериметрическое пространство
$G \subset \mathbb{R}^2$ — выпуклое замкнутое множество (ограниченное)
$diamG = \sup\{\rho(x, y),\ x, y \in G\}$
$diamG \leq 1$
Тогда $\sigma(G) \leq \frac{\pi}{4}$
Пойдём от некоторой точки на границе G под углом φ внутрь фигуры по прямой. В какой-то момент мы встретим другую граничную точку. Назовем этот процесс $r(\varphi)$ *(возвращает длину пути).* Очевидно, что $r^2(\varphi) + r^2(\varphi - \frac{\pi}{2}) \leq (diamG)^2 \leq 1$

$$\sigma(G) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \ldots + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ldots = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} r^2()$$