

1 Линейные операторы

1.1 Линейные операторы и их матричная запись, примеры.

$\varphi : X \rightarrow Y$, X, Y — ЛП, $\dim X = n$, $\dim Y = m$

Определение. Отображение φ называется линейным, если

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad \varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$$

$$\forall \alpha \in K \quad \varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$$

Определение. Отображение φ , обладающее свойством линейности называется **линейным оператором** (ЛОП)

Пример. • $\Theta : \Theta x = 0_Y$ — нулевой оператор

• $\mathcal{I} : \mathcal{I}x = x$ — единичный (тождественный) оператор

• $X = L_1 + L_2 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in X \quad \exists! x_1 \in L_1, x_2 \in L_2 : x = x_1 + x_2$

Проектор:

$$\mathcal{P}_{L_1}^{\|L_2} : X \rightarrow L_1 \quad \mathcal{P}_{L_1}^{\|L_2} x = x_1$$

$$\mathcal{P}_{L_2}^{\|L_1} : X \rightarrow L_2 \quad \mathcal{P}_{L_2}^{\|L_1} x = x_2$$

• $X = C^1[-1, 1]$ — первая производная \exists и непрерывна

$$\forall f \in X \quad (\varphi f)(x) = \int_{-1}^1 f(t) K(x, t) dt$$

$K(x, t)$ — интегральное ядро, например $x^2 + tx$

$\{e_j\}_{j=1}^n$ — базис X , $\{h_k\}_{k=1}^m$ — базис Y , $\varphi(e_j) = \sum_{k=1}^m a_j^k h_k$

Определение. Набор коэффициентов $\|a_j^k\|$ образует матрицу $m \times n$, которая называется **матрицей** ЛОП в паре базисов $\{e_j\}$ и $\{h_k\}$

1.2 Пространство линейных операторов.

$\varphi, \psi : X \rightarrow Y$ — ЛОП

$\chi = \varphi + \psi$, если $\forall x \in X \quad \chi(x) = (\varphi + \psi)x = \varphi(x) + \psi(x)$

$\chi = \alpha\varphi$, если $\forall x \in X \quad \chi(x) = (\alpha\varphi)x = \alpha\varphi(x)$

$$\dim \mathcal{L}(X, Y) = \dim X \cdot \dim Y = m \cdot n$$

1.3 Алгебра. Примеры. Изоморфизм алгебр.

Алгебра — модуль над коммутативным кольцом с единицей, являющийся кольцом.

Кольцо — множество, на котором заданы бинарные операции $+$ и \cdot с следующими свойствами:

1. $a + b = b + a$
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$
3. $\exists 0 \in R : \forall x \in R : x + 0 = 0 + x = x$
4. $\forall x \in R : \exists (-x) \in R : x + (-x) = (-x) + x = 0$
5. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
6. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
7. $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$

Коммутативное кольцо — кольцо с коммутативным умножением: $a \cdot b = b \cdot a$

Кольцо с единицей — кольцо с нейтральным элементом по умножению: $\exists 1 \in R : a \cdot 1 = a$

Модуль над кольцом (коммутативным, с единицей) R — множество M с операциями:

1. $+: M \times M \rightarrow M$
 - (a) $a + b = b + a$
 - (b) $a + (b + c) = (a + b) + c$
 - (c) $\exists 0 \in R : \forall x \in R : x + 0 = 0 + x = x$
 - (d) $\forall x \in R : \exists (-x) \in R : x + (-x) = (-x) + x = 0$
2. $\cdot: M \times R \rightarrow M$
 - (a) $(r_1 r_2)m = r_1(r_2 m)$
 - (b) $1m = m$
 - (c) $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$
 - (d) $(r_1 + r_2)m = r_1 m + r_2 m$

Примеры:

1. \mathbb{R}^3 с векторным произведением — алгебра над \mathbb{R}
2. \mathbb{C} — алгебра над \mathbb{R}
3. \mathbb{H} (кватернионы)
4. Многочлены

Изоморфизм алгебр — биекция $F: A \rightarrow B$, где A и B — алгебры, сохраняющая “ $+$ ” и “ \cdot ”:

1. $F(kx) = kF(x)$
2. $F(x + y) = F(x) + F(y)$
3. $F(xy) = F(x)F(y)$

Из этого следует, что $F(0_X) = 0_Y$

1.4 Алгебра операторов и матриц.

Умножение ЛОП: $(\mathcal{B} \cdot \mathcal{A})x = \mathcal{B}(\mathcal{A}x)$

Умножение матриц: $(A \cdot B)_{ik} = \sum_j a_{ij}b_{jk}$

Теорема 1.

$$\underbrace{\mathcal{C}}_C = \underbrace{\mathcal{B}}_B \underbrace{\mathcal{A}}_A \Leftrightarrow C = BA$$

Доказательство.

$$Ce_i = \mathcal{B}(\mathcal{A}e_i) = \mathcal{B}\left(\sum_j a_{ji}e_j\right) = \sum_j a_{ji}\mathcal{B}e_j = \sum_j a_{ji} \sum_k b_{kj}e_k$$

$$c_{il} = (Ce_i)_l = \sum_j a_{ji}b_{lj} \Rightarrow C = BA$$

□

Пространство ЛОП $\mathcal{F} : X \rightarrow X$ — алгебра, пространство квадратных матриц \mathbb{R}_n^n — алгебра.

1.5 Обратная матрица: критерий обратимости, метод Гаусса вычисления обратной матрицы.

В алгебре A выполняется $a_1 \cdot a_2 = e$, где e — единичный элемент матрицы. Тогда:

1. a_1 — левый обратный элемент для a_2
2. a_2 — правый обратный элемент для a_1

Если a_1 — и левый, и правый обратный к a_2 , то он называется **обратным** элементом к a_2 .

Теорема 2. $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$

Доказательство. “ \Leftarrow ”

$$\det A \neq 0 \stackrel{?}{\Rightarrow} \exists A^{-1} : AA^{-1} = E, A^{-1}A = E$$

$$\sum_j a_{ij}a_{jk}^{-1} = \delta_{ik}$$

Это система Крамера, т.к. $\det A \neq 0 \stackrel{def}{\Rightarrow}$ вектора $\in A$ ЛНЗ \Rightarrow единственное решение.

“ \Rightarrow ” то же самое, но наоборот. 😊

□

$$[A | E] \sim [E | A^{-1}]$$

Доказательство.

$$[A | E] = [T_1 A | T_1 E] = [T_2 T_1 A | T_2 T_1 E] = \dots = [T_n \dots T_1 A | T_n \dots T_1 E] = [E | T_n \dots T_1 A]$$

$$\triangleleft T_n \dots T_1 A = E \Rightarrow A^{-1} = T_n \dots T_1$$

□

Здесь T_i — матрица элементарного преобразования.

1.6 Обратная матрица: критерий обратимости, вычисление обратной матрицы методом присоединенной матрицы.

Критерий обратимости: Дано выше. (1.5, стр. 3)

Теорема 3.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^T$$

Доказательство. $AB = E \Rightarrow B = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^T$ — надо доказать.

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j^i \beta_k^j = \delta_k^i$$

$$]\delta_{k_0}^i = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1_{k_0} \ 0 \ \dots \ 0)^T = b$$

$$\beta_{k_0}^j = \xi^j \quad \alpha_j^i = a_j$$

$$\sum_{j=1}^n a_j \xi^j = b \quad \xi^j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$$

$$\Delta_j = \det A(a_j \rightarrow b)$$

□

$A(a_j \rightarrow b)$ — матрица A , где заменили j -тый вектор на b

$$\det A(a_j \rightarrow b) = 0 \cdot M_j^1 + \dots + 1 \cdot M_j^k + \dots + 0 = M_j^k$$

$$b_{jk} = \frac{(\tilde{A}^T)_k^j}{\det A} \Rightarrow B = \frac{\tilde{A}^j}{\det A}$$

1.7 Ядро и образ линейного оператора. Теорема о ядре и образе. Функции матриц и операторов.

$\varphi : X \rightarrow Y$

Определение. Ядро φ :

$$\text{Ker } \varphi = \{x \in X : \varphi x = 0\}$$

Примечание. $\text{Ker } \varphi \subset X$

Лемма 1. $\text{Ker } \varphi$ — ЛП

Определение. Образ φ :

$$\text{Im } \varphi = \{y \in Y : \exists x : \varphi(x) = y\}$$

Примечание.

$$\text{Im } \varphi \subset Y$$

Лемма 2. $\text{Im } \varphi$ — ЛП

Теорема 4. О ядре и образе

$$\varphi : X \rightarrow X \Rightarrow \dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi = \dim X$$

Доказательство.] $\dim \text{Ker } \varphi = K$

] $\{e_1 \dots e_k\}$ — базис $\text{Ker } \varphi \Rightarrow \varphi(e_j) = 0 \quad \forall j = 1..k$

$\triangleleft \{e_1 \dots e_k; e_{k+1} \dots e_n\}$ — базис X

$$\triangleleft x = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j \quad \triangleleft \varphi(x) = \sum_{j=1}^n \xi^j \varphi(e_j) = \sum_{j=k+1}^n \xi^j \varphi(e_j)$$

$\{\varphi(e_{k+1}) \dots \varphi(e_n)\}$ — полный для $\text{Im } \varphi$, т.к. любой $x \in \text{Im } \varphi$ можно по нему разложить. Докажем ЛНЗ от обратного:

$$]\{\varphi(e_j)\}_{j=k+1}^n - \text{ЛЗ} \Rightarrow \exists \alpha^j : \sum_{j=k+1}^n \alpha^j \varphi(e_j) = 0 \Rightarrow \varphi \left(\sum_{j=k+1}^n \alpha^j e_j \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \text{или } \sum_{j=k+1}^n \alpha^j e_j \in \text{Ker } \varphi \Rightarrow \text{ЛК } e_{k+1} \dots e_n \text{ разложима по } e_1 \dots e_k - \text{противоречие} \\ \text{или } \sum_{j=k+1}^n \alpha^j e_j = 0 \Rightarrow \alpha^j = 0 \Rightarrow \text{ЛНЗ} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \{\varphi(e_j)\}_{j=k+1}^n - \text{базис } \text{Im } \varphi. \quad \square$$

1.8 Обратный оператор. Критерий существования обратного оператора.

Определение. Обратным к оператору φ называется оператор φ^{-1} :

$$\varphi^{-1} \varphi = \varphi \varphi^{-1} = \mathcal{I}$$

Теорема 5. Оператор φ обратим, если \exists базис, в котором его матрица невырождена

Теорема 6. $\triangleleft \varphi : X \rightarrow X$

$$\exists \varphi^{-1} \Leftrightarrow \dim \text{Im } \varphi = \dim X \text{ или } \dim \text{Ker } \varphi = 0$$

Доказательство. $\dim \text{Im } \varphi = \dim X \Leftrightarrow \text{Im } \varphi \simeq X \Rightarrow \varphi - \text{сюръекция}, \dim \text{Ker } \varphi = 0 \Rightarrow \forall y \exists x : \varphi x = y \Rightarrow \varphi - \text{инъекция} \quad \square$

2 Тензорная алгебра

2.1 Преобразование координат векторов X и X^* при замене базиса.

$\triangleleft \{e_j\}$ — базис X

$\triangleleft \{\tilde{e}_k\}$ — базис X^*

$$\Rightarrow \forall k \quad \tilde{e}_k = \sum_{j=1}^n t_k^j e_j$$

Определение. Набор $T = \|t_j^i\|$ образует матрицу, которая называется матрицей перехода от базиса $\{e_j\}$ к базису $\{\tilde{e}_k\}$

$$\text{Примечание. } \triangleleft E = [e_1 \quad e_2 \quad \dots \quad e_n], \tilde{E} = [\tilde{e}_1 \quad \tilde{e}_2 \quad \dots \quad \tilde{e}_n] \Rightarrow \tilde{E} = ET$$

Лемма 3.] ξ — координаты вектора x в базисе $\{e_j\}$

] $\tilde{\xi}$ — координаты вектора x в базисе $\{\tilde{e}_k\}$

$$\text{Тогда } \xi = T \tilde{\xi} \text{ или } \tilde{\xi} = S \xi, S = T^{-1}$$

$$\text{Доказательство. } x = \sum_{k=1}^n \tilde{\xi}^k \tilde{e}_k = \sum_{k=1}^n \tilde{x}^k \sum_{j=1}^n t_k^j e_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \tilde{\xi}^k t_k^j \right) e_j = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j \Rightarrow \xi = T \tilde{\xi} \quad \square$$

Лемма 4. $\{f^l\}$ — базис X^* , сопряженный $\{e_j\}$, т.е. $f^l(e_j) = \delta_j^l$
 $\{\tilde{f}^m\}$ — базис X^* , сопряженный $\{\tilde{e}_k\}$, т.е. $\tilde{f}^m(\tilde{e}_k) = \delta_k^m$
 $F = [f^1 \ f^2 \ \dots \ f^n]^T$, $\tilde{F} = [\tilde{f}^1 \ \tilde{f}^2 \ \dots \ \tilde{f}^n]^T$
 Тогда $F = T\tilde{F}$ или $f^l = \sum_{m=1}^n t_m^l \tilde{f}^m$

Доказательство. $\langle \tilde{f}^m, \tilde{e}_k \rangle = \delta_k^m = (\tilde{f}^m, \sum_{j=1}^n t_k^j e_j) = \sum_{j=1}^n t_k^j (\tilde{f}^m, e_j) = \sum_{j=1}^n t_k^j \sum_{l=1}^n a_l^m (f^l, e_j) = \sum_{j=1}^n t_k^j a_j^m$
 $\Rightarrow \sum_{j=1}^n a_j^m t_k^j = \delta_k^m$ или $AT = I$ — единичная матрица $\Rightarrow A = T^{-1}$ □

Лемма 5. φ — коэфф. ЛФ в $\{e_j\}$
 $\tilde{\varphi}$ — коэфф. ЛФ в $\{\tilde{e}_k\}$
 $\Rightarrow \tilde{\varphi} = \varphi T$

Доказательство. $\varphi_j = g(e_j)$ $\tilde{\varphi}_k = g(\tilde{e}_k)$

$$\varphi_k = g(\tilde{e}_k) = g\left(\sum_{j=1}^n t_k^j e_j\right) = \sum_{j=1}^n t_k^j g(e_j) = \sum_{j=1}^n t_k^j \varphi_j$$

$\Rightarrow \tilde{\varphi} = \varphi T$ □

Итого:

$$\tilde{E} = ET \quad \tilde{F} = T^{-1}F \quad \tilde{\xi} = T^{-1}\xi \quad \tilde{\varphi} = \varphi T$$

2.2 Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса. Преобразование подобия.

$$\overline{\mathcal{A}}: \overline{X} \rightarrow \overline{Y}, \mathcal{A}: X \rightarrow Y$$

$$\mathcal{A} \leftrightarrow A, \overline{\mathcal{A}} \leftrightarrow \overline{A}$$

\mathcal{X} — матрица перехода $\overline{X} \rightarrow X$, \mathcal{Y} — матрица перехода $\overline{Y} \rightarrow Y$

$$x \in X, y := \mathcal{A}x, \overline{x} := \mathcal{X}x, \overline{y} := \mathcal{Y}y$$

$$\overline{A}\overline{x} = \overline{y} \Rightarrow Ax = y = \mathcal{Y}^{-1}\overline{y} = \mathcal{Y}^{-1}\overline{A}\overline{x} = \mathcal{Y}^{-1}\overline{A}\mathcal{X}x$$

$$\forall x \quad Ax = \mathcal{Y}^{-1}\overline{A}\mathcal{X}x \Leftrightarrow A = \mathcal{Y}^{-1}\overline{A}\mathcal{X}$$

2.3 Тензоры (ковариантность, независимое от ПЛФ определение). Пространство тензоров.

Определение. Величины, которые преобразуются при замене базиса так же, как базисные векторы, называются **ковариантными** величинами.

Величины, которые преобразуются при замене базиса противоположным базисным векторам образом, называются **контравариантными** величинами.

Примечание. ξ — контрвариантная величина. Верхний индекс называется контравариантным, нижний — ковариантным.

$$W \in \Omega_q^p - \text{ПЛФ } (p, q)$$

$$\{e_j\}_{j=1}^n - \text{базис } X, \{f^k\}_{k=1}^n - \text{базис } X^*$$

$$\Rightarrow \omega_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n} \stackrel{\text{def}}{=} W(e_{i_1} \dots e_{i_n} f^{j_1} \dots f^{j_n})$$

$$\{e_j\} \xrightarrow{T} \{\tilde{e}_k\} \quad \{f^l\} \xrightarrow{T^{-1}} \{\tilde{f}^m\}$$

Пусть в паре базисов $\{\tilde{e}_k\}$ и $\{\tilde{f}^m\}$ ПЛФ W имеет тензор $\tilde{w}_{s_1 \dots s_p}^{t_1 \dots t_q} = W(\tilde{e}_{s_1} \dots \tilde{e}_{s_p}, \tilde{f}^{t_1} \dots \tilde{f}^{t_q}) =$

$$\begin{aligned} &= \triangle W(t_{s_1}^{i_1} e_{i_1} \dots t_{s_p}^{i_p} e_{i_p}, \sigma_{j_1}^{t_1} f^{j_1} \dots \sigma_{j_q}^{t_q} f^{j_q}) = \\ &= t_{s_1}^{i_1} \dots t_{s_p}^{i_p} \sigma_{t_1}^{j_1} \dots \sigma_{t_q}^{j_q} W(e_{s_1} \dots e_{s_p}, f^{t_1} \dots f^{t_q}) \end{aligned}$$

Определение. 1. **Вектором** называется величина, преобразующаяся по контравариантному закону

2. **Линейной формой** называется величина, преобразующаяся по ковариантному закону

3. **Тензором типа (p, q)** называется величина, преобразующаяся p раз по ковариантному закону и q раз по контравариантному.

- Сложение тензоров и умножение тензора на скаляр — поэлементное
- Нулевой элемент по сложению — тензор, принимающий значение 0 на любом входе
- Очевидно $w + \alpha v$ — тензор того же типа, что и $w \Rightarrow$ тензоры образуют линейное пространство $T_q^p, \dim T_q^p = p + q$

2.4 Свертка тензора.

Свертка:

$$\omega_{i_1 \dots i_n}^{k \wedge s j_1 \dots j_n} = \sum_{m=1}^n \omega_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \omega_{i_{p+1} \dots i_n}^{k \wedge s j_{p+1} \dots j_n}$$

Примечание. Операцию свертки можно выполнять только по индексам разных типов

Лемма 6. *Свертка сохраняет тензорную природу*

Лемма 7.

$$\omega = \omega$$

Доказательство. От перестановки мест слагаемых конечная сумма не меняется. □

2.5 Транспонирование тензора.

Транспонирование

$$t^{(st)} : \omega_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_s \dots j_t \dots j_q} \mapsto \omega_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_t \dots j_s \dots j_q}$$

Примечание. Транспонировать можно только по индексам одного типа

Лемма 8. *Транспонирование сохраняет тензорную природу величины.*

2.6 Определитель линейного оператора. Внешняя степень оператора.

$\triangleleft \Lambda^p = \{i_1 \dots i_p F\}_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n}$ — базис Λ^p

$$i_1 \dots i_p F = f^{i_1} \wedge f^{i_2} \wedge \dots \wedge f^{i_p} \quad \dim \Lambda^p = C_n^p$$

$] \{x_i\}_{i=1}^n$ — набор векторов

$$\det\{x_1 \dots x_n\} := {}^{1\dots n}F(x_1 \dots x_n)$$

$\triangleleft \Lambda_p = \{i_1 \dots i_p F\}_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n}$ — базис Λ_p

$$\dim \Lambda_p = C_n^p \quad i_1 \dots i_p F = \hat{x}_{i_1} \wedge \hat{x}_{i_2} \wedge \dots \wedge \hat{x}_{i_p} \simeq x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n$$

$] \{e_j\}_{j=1}^n$ — базис $X \Rightarrow x_i = \xi_i^{j_i} e_{j_i}$

$$\begin{aligned} {}^{1\dots n}F &= \xi_1^{j_1} \xi_2^{j_2} \dots \xi_n^{j_n} (e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \dots \wedge e_{j_n}) = \sum_{(j_1 \dots j_n)} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} \xi_{j_1}^1 \dots \xi_{j_n}^n (e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n) = \\ &= \det[\xi_{j_1}^1 \dots \xi_{j_n}^n] (e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n) \end{aligned}$$

Определение. Определителем набора векторов $\{x_i\}_{i=1}^n$ называется число $\det[x_1 \dots x_n]$, такое, что:

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n = \det[x_1 \dots x_n] e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$$

Лемма 9.

$$om \Lambda^p \quad \det\{x_1 \dots x_n\} = \det[x_1 \dots x_n] \quad om \Lambda_p$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \det\{x_1 \dots x_n\} &= {}^{1\dots n}F(x_1 \dots x_n) = \sum_{(j_1 \dots j_n)} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} \xi_1^{j_1} \xi_2^{j_2} \dots \xi_n^{j_n} e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n = \\ &= \det\{x_1 \dots x_n\} e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \\ &= \det[x_1 \dots x_n] e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \end{aligned}$$

□

Определение. $\triangleleft \varphi : X \rightarrow X$

Внешней степенью φ^{Λ_p} оператора φ называется отображение:

$$\varphi^{\Lambda_p}(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n) = \varphi(x_1) \wedge \dots \wedge \varphi(x_p)$$

Примечание.

$$\varphi^{\Lambda_p} : \Lambda_p \rightarrow \Lambda_p$$

$$\triangleleft p = n$$

$$\begin{aligned} \varphi^{\Lambda_n}(e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n) &= \varphi(e_1) \wedge \varphi(e_2) \wedge \dots \wedge \varphi(e_n) = a_1^{j_1} e_{j_1} \wedge \dots \wedge a_1^{j_n} e_{j_n} = \\ &= a_1^{j_1} \dots a_n^{j_n} (e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_n}) = \sum_{(j_1 \dots j_n)} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} a_{j_1}^1 a_{j_2}^2 \dots a_{j_n}^n e_1 \wedge \dots \wedge e_n = \det A_\varphi e_1 \wedge \dots \wedge e_n \end{aligned}$$

Определение. Определителем линейного оператора φ называется число, такое что:

$$\det \varphi = \det[\varphi(e_1) \wedge \dots \wedge \varphi(e_n)] = \det A_\varphi e_1 \wedge \dots \wedge e_n$$

Примечание.

$$\begin{aligned} \forall \omega \in \Lambda_n \quad \varphi^{\Lambda_n} \omega &= \det \varphi \cdot \omega \\ \omega \in \Lambda_n \Rightarrow \omega &= \alpha e_1 \wedge \dots \wedge e_n \\ \varphi^{\Lambda_n} \omega &= \alpha \varphi^{\Lambda_n}(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) = \alpha \det \varphi e_1 \wedge \dots \wedge e_n = \det \varphi \cdot \omega \end{aligned}$$

2.7 Независимость определителя оператора от базиса. Теорема умножения определителей.

Пример. $\det \varphi$ — инвариант

$$\begin{aligned}\varphi^{\Lambda_n} z &= \det \varphi \cdot z \quad \forall z \in \Lambda_n \\ \det \varphi &= \det A_\varphi \text{ — в некотором фиксированном базисе} \\ \tilde{A}_\varphi &= T^{-1} A_\varphi T \quad \det \tilde{A}_\varphi = \det T^{-1} \det A_\varphi \det T = \det A_\varphi\end{aligned}$$

Теорема 7.

$$\det(\varphi\psi) = \det \varphi \det \psi$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\triangleleft \det(\varphi\psi) e_1 \wedge \dots \wedge e_n &= (\varphi\psi)^{\Lambda_n} e_1 \wedge \dots \wedge e_n = \varphi(\psi(e_1)) \wedge \dots \wedge \varphi(\psi(e_n)) = \\ &= \varphi^{\Lambda_n}(\psi(e_1) \wedge \dots \wedge \psi(e_n)) = \det \varphi \det \psi e_1 \wedge \dots \wedge e_n\end{aligned}$$

□

3 Спектральный анализ линейных операторов в конечномерных пространствах

3.1 Инварианты линейного оператора. Инвариантные подпространства.

Определение. Инвариантом линейного оператора φ называется его числовая функция значений, которая не зависит от выбора базиса

$\triangleleft \varphi : X \rightarrow X$ — автоморфизм

Определение. Подпространство L линейного пространства X называется **инвариантным подпространством** φ , если

$$\forall x \in L \quad \varphi x \in L$$

Пример. 1. $\varphi : X \rightarrow X$, тогда инвариантные подпространства:

- X
- $\{0\}$

2. $\varphi = \mathfrak{I}$, $\forall x \quad \mathfrak{I}x = x \Rightarrow$ любое подпространство X — инвариантное

3. $\varphi = \Theta$, $\forall x \quad \Theta x = 0 \Rightarrow$ любое подпространство X — инвариантное

$$4. \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \Leftrightarrow A_\varphi = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \triangleq \text{diag}\{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$$

$\triangleleft \{e_j\}$ — базис $X \Rightarrow \forall j \quad A_\varphi e_j = \lambda_j e_j \quad e_j \rightarrow \mathcal{L}\{e_j\}$ — инв.

Всего 2^n инвариантных подпространств

5. $]X = L_1 \dot{+} L_2$

$$\forall x! = x_1 + x_2 \quad \varphi x = \mathcal{P}_{L_1}^{\|L_2} x = x_1 \in L_1$$

L_1 — инв., $\forall x \in L_1 \quad \mathcal{P}_{L_1}^{\|L_2} x = x \quad \forall$ подпространство L_1 инвариантно

L_2 — инв., $\forall x \in L_2 \quad \mathcal{P}_{L_1}^{\|L_2} x = 0 \quad \forall$ подпространство L_2 инвариантно

3.2 Собственные векторы и собственные значения линейного оператора: основные определения и свойства.

$$\varphi : X \rightarrow X$$

Определение. $x \in X$ — **собственный вектор** φ , если

$$x \neq 0 \quad \varphi x = \lambda x, \quad \lambda \in K$$

λ — **собственное значение** φ , соответствующее x

Определение. Спектр $\sigma_\varphi = \{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$ — множество всех собственных значений вектора

Определение. $x \in X$ — **собственный вектор** φ , если этот вектор ненулевой и принадлежит одномерному инвариантному подпространству: $x \neq 0, x \in L^{(1)}$

Лемма 10. Эти определения собственного вектора эквивалентны.

Доказательство. Опр. 1 \Rightarrow Опр. 2:

$$\triangleleft x : \varphi x = \lambda x, L^{(1)} = \mathcal{L}(x)$$

$$\forall y \in L^{(1)} \quad y = \beta x \Rightarrow \varphi y = \varphi \beta x = \beta \varphi x = \beta \lambda x$$

Опр. 2 \Rightarrow Опр. 1:

$$\triangleleft x \in L^{(1)} = \mathcal{L}v \xrightarrow{\text{def}} \varphi x \in L^{(1)}$$

$$\forall y \in L^{(1)} \quad y = \alpha v \quad \varphi y = \alpha \varphi v = \beta v$$

□

Лемма 11. Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям линейно независимы:

$$\lambda_i \rightarrow x_i, \lambda_i \neq \lambda_{j \neq i} \Rightarrow \{x_i\} \text{ ЛНЗ}$$

Доказательство. По индукции:

База: $m = 1 \Rightarrow \{x_1\}$ ЛНЗ, т.к. $x_1 \neq 0$

Переход: $\{x_i\}_{i=1}^m$ — ЛНЗ, тогда $\sum \alpha_i x_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i$

$$\triangleleft \{\alpha_i\} : \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = 0$$

$$0 = \mathcal{A}0 = \mathcal{A} \left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i \right) = \sum \alpha_i \lambda_i x_i$$

$$0 = \lambda_{n+1} \left(\sum \alpha_i x_i \right)$$

Вычтем второе выражение из первого:

$$0 = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i (\lambda_{n+1} - \lambda_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i (\lambda_{n+1} - \lambda_i) + 0$$

Т.к. $\{x_i\}_{i=1}^n$ ЛНЗ, $\forall i \in [1, n] \quad \alpha_i = 0$

$$0 = \alpha_{n+1} x_{n+1}, x_{n+1} \neq 0 \Rightarrow \alpha_{n+1} = 0$$

□

Лемма 12. Линейный оператор в конечномерном пространстве не может иметь более n различных собственных значений.

Доказательство. Тривиально в силу ЛНЗ соответствующих векторов.

□

3.3 Собственные векторы и собственные значения линейного оператора: существование, вычисление.

Вычислим СВ и СЗ.

$$x = \sum \xi^i e_i \quad \xi = (\xi^1 \ \dots \ \xi^n)^T \quad A \leftrightarrow A = \|a_j^i\|$$

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow A\xi = \lambda \xi \Leftrightarrow A\xi - \lambda E\xi = 0$$

Таким образом, задача нахождения СЗ сводится к нахождению λ , для которых существуют нетривиальные решения СЛАУ $A - \lambda E$, что эквивалентно нахождению корней характеристического полинома $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$

Нахождение СВ \Leftrightarrow нахождение нетривиальных решений СЛАУ $A - \lambda E$ для каждого СЗ λ

Лемма 13. $\triangleleft A : X \rightarrow X, X - \text{ЛП над } \mathbb{C}, \text{ тогда у } A \text{ существует по крайней мере один собственный вектор и одно собственное значение.}$

Доказательство. У любого многочлена есть хотя бы один корень $\in \mathbb{C}$. □

3.4 Спектральный анализ линейного оператора с простым спектром: спектр, диагональный вид матрицы, спектральные проекторы, спектральная теорема.

Определение. Собственное значение λ — простое, если оно — корень $\chi_A(\lambda)$ единичной кратности.

Определение. Спектр σ называется простым, если все собственные значения в нём простые.

Теорема 8. $\triangleleft A : X \rightarrow X - \text{ЛОП с простым спектром } \sigma_A = \{\lambda_i\}_{i=1}^n, \{x_i\}_{i=1}^n - \text{СВ.}$

Тогда A можно привести к диагональной форме A^d :

$$A^d = T^{-1}AT$$

где T — матрица перехода от базиса $\{e_i\}$ к $\{x_i\}$

Доказательство. Очевидно, т.к. A в базисе $\{x_i\}$ имеет диагональную матрицу $\text{diag}\{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$ □

Определение. $\triangleleft \lambda_i$ — собственное значение ЛОП $A : X \rightarrow X$.

Спектральным проектором $\mathcal{P}_{\lambda_i}^{\parallel}$ называется оператор проектирования на подпространство L_{λ_i} (множество векторов, отвечающих λ_i)

Лемма 14. Спектральные проекторы оператора с простым спектром имеют вид:

$$\mathcal{P}_{\lambda_i} = x_i \cdot f^i$$

где $\{x_i\}$ — базис X из СВ, $\{f^i\}$ — сопряженный ему базис.

Доказательство. Необходимо показать, что для $x \in L_{\lambda_i} \mathcal{P}_{\lambda_i}^{\parallel} x = x$, для $y \in \mathcal{L}\{x_1 \dots x_{i-1}, x_{i+1} \dots x_n\} \mathcal{P}_{\lambda_i}^{\parallel} y = 0$

$$\mathcal{P}_{\lambda_i} x = x_i \cdot f^i x = x_i \cdot \alpha f^i x_i = \alpha x_i$$

$$\mathcal{P}_{\lambda_i} y = x_i \cdot f^i \left(\sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_j x_j \right) = x_i \cdot 0$$

□

Теорема 9. Спектральная теорема для скалярного оператора:

$$\mathcal{A} = \sum_i \lambda_i \mathcal{P}_{\lambda_i}$$

Доказательство.

$$\mathcal{A}x = \mathcal{A} \left(\sum_i \mathcal{P}_{\lambda_i}^{\parallel} x \right) = \sum_i \mathcal{A} \mathcal{P}_{\lambda_i}^{\parallel} x = \sum_i \lambda_i \mathcal{P}_{\lambda_i}^{\parallel} x$$

□

3.5 Спектральный анализ скалярного оператора: спектр, диагональный вид матрицы, спектральные проекторы, спектральная теорема.

Спектр, диагональный вид матрицы, спектральная теорема: см. выше.

Лемма 15. Спектральные проекторы оператора скалярного типа имеют вид:

$$\mathcal{P}_{\lambda_i} = \sum_{j=1}^{m_j} x_j^{(i)} \cdot f_{(i)}^j$$

где $\{x_j^{(i)}\}_{j=1}^{m_j}$ — СВ, отвечающие λ_i , $\{f_{(i)}^j\}_{j=1}^{m_j}$ — сопряженный ему базис.

3.6 Спектральная теорема и функциональное исчисление для скалярного оператора.

Спектральная теорема: см. выше

$p(\lambda)$ — скалярный полином. Тогда

$$p(\mathcal{A}) = \sum p(\lambda_i) \mathcal{P}_{\lambda_i}$$

Доказательство.

$$\mathcal{A} + \mathcal{A} = \sum (\lambda_i + \lambda_i) \mathcal{P}_{\lambda_i} = 2\mathcal{A}$$

$$\alpha \mathcal{A} = \sum (\alpha \lambda_i) \mathcal{P}_{\lambda_i}$$

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{A} = \left(\sum_i \lambda_i \mathcal{P}_{\lambda_i} \right) \left(\sum_j \lambda_j \mathcal{P}_{\lambda_j} \right) = \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j \mathcal{P}_{\lambda_i} \mathcal{P}_{\lambda_j} = \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j \mathcal{P}_{\lambda_i} \delta_j^i = \sum_i \lambda_i^2 \mathcal{P}_{\lambda_i} = \mathcal{A}^2$$

□

3.7 Спектральная теорема и инварианты скалярного оператора. Тождество Кэли.

Спектральная теорема, инварианты скалярного оператора: см. выше.

Лемма 16. Тождество Кэли.

$\chi_{\mathcal{A}}(\lambda)$ — характеристический полином ЛОП \mathcal{A} , то $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = 0$

Доказательство.

$$\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \sum \chi_{\mathcal{A}}(\lambda_i) \mathcal{P}_{\lambda_i} = \sum 0 \mathcal{P}_{\lambda_i} = 0$$

□

4 Спектральный анализ линейных операторов в конечномерном пространстве: операторы общего вида