Proof. Доказательство несчётности отрезка с помощью компактности.

Рассмотрим произвольную точку отрезка x_k и её окрестность размером $\frac{1}{10^k}$. Все такие окрестности образуют открытое покрытие отрезка, но их суммарная длина $\leq \frac{1}{9}$, что меньше длины произвольного отрезка. Почему-то это даёт противоречие. □

Следствие. (из теоремы о непрерывности монотонной функции) У монотонной функции, заданной на промежутке, имеется не более чем счётное *(НБЧС)* множество точек разрыва.

Пример. $\Theta(x) = sign(x)\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$]x_k$ это k-тое рациональное число

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\Theta(x - x_k)$$

$f(x)$ имеет скачок в каждом рациональном значении аргумента.

Proof. $f(x-0) < f(x+0)$

$(f(x-0), f(x+0)) \rightsquigarrow q_x$

т. разрыва $\to \mathbb{Q}$

$$]x < t_0 < y$$

$$f(x) \leq f(t_0) \leq f(y)$$

$$f(x) \leq f(x+0) \leq f(t_0) \leq f(y-0) \leq f(y)$$

Таким образом, $(f(x-0), f(x+0))$ не имеет общих точек, тогда q_x все разные $\Rightarrow$ взятие q_x — инъекция. □

Упражнение.

1. Существует ли на плоскости более, чем счётное множество непересекающихся окружностей?
2. Существует ли на плоскости более, чем счётное множество восьмёрок?
3. Можно ли в счётном множестве задать такое континуальное семейство (A_α), что:
   $\forall \alpha \in \mathbb{R} \;\; A_\alpha \subset A$

   $\alpha_1 \neq \alpha_2 \Rightarrow A_{\alpha_1} \neq A_{\alpha_2}$

   $\forall \alpha, \beta : \alpha < \beta \;\; A_\alpha \subset A_\beta$

Теорема 1. *О существовании и непрерывности обратной функции.*

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — непр., строго монот.

$m := \inf\limits_{\langle a,b\rangle} f(x), M := \sup\limits_{\langle a,b\rangle} f(x)$. *Тогда:*

1. *f — обратимая и $f^{-1} : \langle m, M\rangle \to \langle a, b\rangle$*
2. *f^{-1} строго монотонна и того же типа (возрастает или убывает)*
3. *f^{-1} непрерывна*

Примечание. Тип промежутка в f и f^{-1} совпадают.

Proof. Пусть $f \uparrow$

$f(\langle a, b\rangle)$ — промежуток $\langle m, M\rangle$ *(типы скобок совпадают)*

f — строго монот. $\Rightarrow f$ — инъекция. Тогда $f : \langle a, b\rangle \to \langle m, M\rangle$ — биекция

$\forall x_1 < x_2 \;\; f(x_1) < f(x_2)$

$\forall y_1 < y_2 \;\; f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ $\square$

1 Элементарные функции

Определение. Всё, для чего есть кнопочки на калькуляторе — **элементарные функции**:

$const, x^a, a^x, \log_a x, \sin x, \cos x, \arcsin, \arctan x$

+ конечное число арифметических действий и композиций

1.1 x^a

Свойства:

1. $x^{r+s} = x^r x^s$
2. $(x^r)^s = x^{rs}$
3. $(xy)^s = x^s y^s$

$$f_a(x) = x^a, a \in \mathbb{Q}$$

Докажем непрерывность:

1. $a = 1 \quad f_1(x) = x$ — непр.
2. $a \in \mathbb{N} \quad f_a(x) = f_1(x) \cdot f_1(x) \dots f_1(x)$ — непр.
3. $a \in$“$-\mathbb{N}$” $\quad f_{-a}(x) \overset{def}{=} \frac{1}{f_a(x)}$
4. $a = 0 \quad f_0(x) \equiv 1$ (при $x \neq 0$, доопределим $f_0(0) = 1$) — непр. в $\mathbb{R}$
5. $a = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n$ — нечётно

   $f_n \uparrow$ строго $\quad \inf\limits_{x \in \mathbb{R}} f_n(x) = -\infty \quad \sup f_n = +\infty, f_n$ — непр. $\Rightarrow$ по теореме о непрерывности монотонной функции f^{-1} — непр.

   $\exists f_n^{-1} : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$f_{\frac{1}{n}}(x) = f_n^{-1}(x)$$

6. $a = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n$ — чётн.

   $f_n : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ — строго монот., непр.

   $f(0) = 0 \quad \sup f_n = +\infty$

   $\exists f^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$

$$f_{\frac{1}{n}}(x) := f_n^{-1}(x)$$

7. $a = \frac{p}{q}$ *(несокр.)*, $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$

$$f_a := f_{\frac{1}{q}} \circ f_p$$

2 Производная

Определение. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R} \quad x_0 \in \langle a, b\rangle$

f — **дифференцируема.** в точке x_0, если $\exists A \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + o(x - x_0), x \to x_0$$

При этом A называется **производной** f в точке x_0

Определение. f — **дифференцируема** в точке x, если

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A \in \mathbb{R}$$

A — производная f в точке x_0

Примечание. Второе определение не обобщимо на пространство произвольной размерности, в отличие от первого.

Теорема 2. *Определение 1* $\Leftrightarrow$ *определению 2.*

Proof. Докажем “$\Leftarrow$”.

$$f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + o(x - x_0), x \to x_0$$

$$A = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{o(x - x_0)}{x - x_0}$$

Докажем “$\Rightarrow$”.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \alpha(x) \quad \alpha(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$$

$\square$

Примечание. 1. f — дифф. в $x_0 \Rightarrow f$ — непр. в x_0

2. $f'(x_0)$ — обозн. для производной

   Если $x_0 \in (a, b)$ в опр. 1, 2 $\quad x \to x_0 + 0$

   f — дифф. справа $\Rightarrow A$ — правостор. производная $f'_+(x)$

   $x \to x_0 - 0$ слева $f'_-(x_0)$

$$\exists f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f \text{ — дифф. в} x_0$$

3. $A = \pm\infty : f'(x_0) = \pm\infty$, но f не дифф.

Пример.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \ x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} & , \ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\nexists \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Определение.

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

— называется **касательной** к графику $y = f(x)$ в точке x_0

Теорема 3. *$f, g : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$, дифф. в x_0*

Тогда указанные ниже в левых частях дифференцируемы в x_0 и их производные равны.

1. $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$
3. $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
4. *Если $g(x_0) \neq 0$:*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Proof. Докажем 4 по определению.

$$\frac{\frac{f}{g}(x_0) + h - \frac{f}{g}(x_0)}{h} = \frac{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} g(x_0) - f(x_0) \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}}{g(x_0 + h)g(x_0)} \xrightarrow[h \to 0]{} \text{OK}$$

$\square$

Теорема 4. *О производной композиции.*

$f : \langle a, b \rangle \to \langle c, d \rangle \quad x \in \langle a, b \rangle \quad f$ — дифф. в x

$g : \langle c, d \rangle \to \mathbb{R} \quad g$ — дифф. $y = f(x)$

Тогда $g \circ f$ — дифф. в x; $(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Proof.

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \alpha(h)h, \alpha(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

$$g(y + k) = g(y) + g'(y)k + \beta(k)k$$

$$]f'(x)h + \alpha(h)h = k; \quad k \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

$$g(f(x + h)) = g(f(x) + f'(x)h + \alpha(h)h) =$$

$$= g(f(x)) + g'(f(x))(f'(x)h + \alpha(h)h) + \beta(k)(f'(x)h + \alpha(h)h) =$$

$$= g(f(x)) + g'(f(x))f'(x)h + g'(f(x))\alpha(h)h + \beta(k)f'(x)h + \beta(k)\alpha(h)h$$

$$]g'(f(x))\alpha(h)h + \beta(k)f'(x)h + \beta(k)\alpha(h)h = \gamma(h) \cdot h; \quad \gamma(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

$\square$

Теорема 5. *О производной обратной функции.*
$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — непр., сторого монот. $x \in \langle a, b\rangle$ f — дифф. в x; $f'(x) \neq 0$
По определению f $\exists f^{-1}$
Тогда f^{-1} — дифф. в $y = f(x)$ и

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Примечание. f^{-1} — дифф. $\Rightarrow$ ф-ция очев.: $(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = (f^{-1}(f(x)))' = (x)' = 1$

Proof. $\forall k\ \exists h : f(x + h) = y + k$

$$h = (x + h) - x = f^{-1}(y + k) - f^{-1}(y) = \tau(k)$$

$$\frac{f^{-1}(y + k) - f^{-1}(y)}{k} = \frac{\tau(k)}{f(x + \tau(k)) - f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x+\tau(k)) - f(x)}{(x + \tau(k)) - x}} \xrightarrow[\substack{k\to 0\\ \tau(k)\to 0}]{\text{по т.о непр. обр. ф}} \frac{1}{f'(x)}$$

□

Пример.

$$y = \sin x$$

$$\arcsin' y = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

Упражнение. $\arctan' y = 0$

3 Теоремы о среднем

Лемма 1. *$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — дифф. в $x_0 \in (a, b)$; $f'(x_0) > 0$*
Тогда $\exists \varepsilon > 0\ \forall x : x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)\ \ f(x_0) < f(x)$
и $\forall x : x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)\ \ f(x_0) > f(x)$

Примечание. Это не монотонность.

Proof.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x\to x_0]{} f'(x_0) > 0$$

$$x \to x_0 + 0 \quad x - x_0 > 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) > 0 \text{ вблизи } x_0 \text{ \textit{(по теор. о стабилизации знака)}}$$

$$x \to x_0 - 0 \quad x - x_0 < 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) < 0 \text{ вблизи } x_0$$

□

Теорема 6. *Ферма.*
$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$
$x_0 \in (a, b)$ — *точка максимума*
f — *дифференцируема в* x_0
Тогда $f'(x_0) = 0$

Proof. Из леммы.
Если $f'(x_0) > 0$, то справа от x_0 есть $x : f(x) > f(x_0)$
Если $f'(x_0) < 0$, то слева от x_0 есть $x : f(x) > f(x_0)$ □

Теорема 7. *Ролля.*
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — *непр. на* $[a, b]$, *дифф. на* (a, b)
$f(a) = f(b)$. *Тогда* $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$

Proof. По теореме Вейерштрасса.
$x_0 = \max f(x); x_1 = \min f(x)$
$\{x_0, x_1\} = \{a, b\} \Rightarrow f = const; f' \equiv 0$
Иначе: пусть $x_0 \in (a, b) \xRightarrow[\text{т. Ферма}]{} f'(x_0) = 0$ □

Примечание. $f(x) = (x - a)^k g(x)$, где $g(a) \neq 0$

$$f'(x) = k(x - a)^{k-1} g(x) + (x - a)^k g'(x) = (x - a)^{k-1}(k \cdot g(x) + (x - a) \cdot g'(x))$$

Пример. $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{Ln}(x) = ((x^2 - 1)^n)^{(n)}$$

— это полиномы Лежандра *(с точностью до умножения на константу)*
$\deg \mathrm{Ln} = n$
Утверждение: Ln имеет n различных вещественных корней.