Для последовательности x_n: $y_n = \sup(x_n, x_{n+1}\ldots)$, $z_n = \inf(x_n, x_{n+1}\ldots)$. Тогда $z_n \le x_n \le y_n$ $y_n \downarrow$, $z_n \uparrow$

$$\overline{\lim} x_n := \lim y_n \quad \underline{\lim} x_n := \lim z_n$$

Теорема 1. *Техническое описание верхнего предела.*

1. $\overline{\lim} x_n = +\infty \Leftrightarrow x_n$ — *неогр. сверху*
2. $\overline{\lim} x_n = -\infty \Leftrightarrow x_n \to -\infty$
3. $\overline{\lim} x_n = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ *a и b:*
   (a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ \ x_n < l + \varepsilon$
   (b) $\forall \varepsilon > 0$ *для бесконечного множества номеров* $n : l - \varepsilon < x_n$

Доказательство. 1. Очевидно, т.к. $y_n = \sup(x_n, x_{n+1}\ldots) = +\infty \Leftrightarrow x_n$ — неогр. сверху

2. "$\Rightarrow$" $x_n \le y_n \to -\infty$
   "$\Leftarrow$" $\forall A\ \exists N\ \forall n > N\ \ y_n \le A, x_n < A$
3. "$\Rightarrow$" (a) $y_n \to l \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N \quad x_n \le y_n < l + \varepsilon$
   (b) Берём $\varepsilon > 0$, предположим противное : $\exists$ конечное мн-во $n : l - \varepsilon < x_n$
   $]n_0$ — максимальный номер, такой что $l - \varepsilon < x_{n_0}$, тогда $y_{n_0} \le l - \varepsilon$, но $y_n \downarrow \Rightarrow$ $\lim y_n \le l - \varepsilon$
   "$\Leftarrow$" $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N \quad x_n < l + \varepsilon \Rightarrow y_n \le l + \varepsilon$, но в $x_n, x_{n+1}\ldots \exists x_i : l - \varepsilon < x_i \Rightarrow y_n = \sup(x_n, x_{n+1}\ldots) > l - \varepsilon$. Итого $l + \varepsilon \ge y_n > l - \varepsilon \Rightarrow l = \lim y_n = \overline{\lim} x_n$

□

Теорема 2.

$$\exists \lim x_n \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$$

Доказательство. "$\Rightarrow$" 1. $\lim x_n = +\infty \Rightarrow \overline{\lim} x_n = \lim y_n \ge \lim x_n = +\infty$

2. $\lim x_n = -\infty$ аналогично
3. $\lim x_n = l \in \mathbb{R}$ очевидно из технического описания предела, пункт 3.

"$\Leftarrow$" $\underline{\lim} x_n \leftarrow z_n \le x_n \le y_n \to \overline{\lim} x_n$, по теореме о городовых $\exists \lim x_n = \overline{\lim} x_n$

□

Определение. $n_k : n_1 < n_2 < n_3 < \ldots \quad \lim\limits_{k \to +\infty} x_{n_k}$ — **частичный предел**

Теорема 3. *О характеризации в* *???* *как частичных.*

1. $\forall l$ — *частичный пр.* x_n $\underline{\lim} x_n \le l \le \overline{\lim} x_n$
2. $\exists (n_k) : x_{n_k} \to \overline{\lim} x_n \ \ \exists m_k : x_{m_k} \to \underline{\lim} x_n$

Доказательство. 1. $x_{n_k} \to l \quad \underline{\lim} x_n \leftarrow z_{n_k} \le x_{n_k} \le y_{n_k} \to \overline{\lim} x_n \Rightarrow \underline{\lim} x_n \le l \le \overline{\lim} x_n$

2. (a) $\overline{\lim} x_n = +\infty \Leftrightarrow x_n$ — неогр сверху $\Rightarrow$ можно выбрать $x_{n_1} < x_{n_2} < \ldots x_n \to +\infty$
   (b) $\overline{\lim} x_n = -\infty$ тривиально.
   (c) $\overline{\lim} x_n = l \in \mathbb{R}\ \exists x_{n_k} : l - \frac{1}{k} < x_{n_k} < l + \frac{1}{k}$

□

Пример. 1. $\overline{\lim} \sin n = 1, \underline{\lim} \sin n = -1$

2. $\forall l \in [-1, 1]$ — частичный передел последовательности $\sin n$

1 Простейшие свойства рядов

Определение. $a_1 + a_2 + \ldots, \sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_i$ — **числовой ряд** ($a_i \in \mathbb{R}$)

Определение. $\forall N \in \mathbb{N} \quad S_n := \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ — **частичная сумма**

Если $\exists \lim_{N\to+\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$, ряд **сходится**, иначе ряд **расходится**.

Пример. $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^\Theta}{(N+1)!} x^{N+1}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$$

Пример.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k}, k \in N, p = -k$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^p = \frac{N^{p+1}}{p+1} + \frac{N^p}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_1^N (x^p)''\{x\}(1-\{x\}) = \frac{N^{p+1}}{p+1} + \frac{N^p}{2} + \frac{1}{2} + \mathcal{O}(\max(1, N^{p-1}))$$

- $p > -1$ расходится
- $p = -1$ расходится
- $p < -1$ сходится

Определение. $\sum\limits_{k=N}^{+\infty} a_k$ — N-й **остаток ряда**

Свойства:

1. $\sum a_n, \sum b_n$ сходятся, $c_n := a_n + b_n$. Тогда $\sum c_n$ сходится
2. $\sum a_n$ — сходится, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда $\sum \lambda a_n$ сходится и $\sum \lambda a_n = \lambda \sum a_n$
3. (a) $\sum a_n$ — сходится $\Rightarrow$ любой остаток сходится
   (b) остаток сходится $\Rightarrow \sum a_n$ сходится
   (c) $r_n = \sum\limits_{n \geq N} a_n$ сходится $\Leftrightarrow r_n \to 0, N \to +\infty$

Доказательство. (a) $?m$-й остаток, $N \geq m : \sum\limits_{n=1}^{N} a_n = \sum\limits_{n=1}^{m-1} a_n + \sum\limits_{n=m}^{N} a_n$

(b)

(c)

□

Лемма 1. *Необходимое условие сходимости*
$\sum a_n$ *сходится* $\Rightarrow a_n \to 0$

Доказательство. Тривиально. $a_n = S_n - S_{n-1} \to 0$ □

Обратное неверно, например $\sum \frac{1}{n^p}$ расходится, $p \in (0, 1]$

Теорема 4. *Критерий сходимости ряда Больцано-Коши*

$$\sum a_n \text{ сходится } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \ \forall k > N \ \ \forall m \in \mathbb{N} \quad |a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{k+m}| < \varepsilon$$

Доказательство. Тривиально. □

Докажем расходимость $\sum \frac{1}{n}$ по критерию Больцано-Коши.

$$m := k \quad \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} > k\frac{1}{2k} = \frac{1}{2}$$

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{2} \ \ \forall N \ \ \exists k > N \ \ \exists m := k \quad |a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{k+k}| \geq \varepsilon$$

Лемма 2. $a_n \geq 0 \quad \sum a_n$ *сходится* $\Leftrightarrow S_n$ *ограничено сверху.*

Доказательство. $\exists$ кон. $\lim S_n \Leftrightarrow S_n$ ограничено сверху. □

Теорема 5. *Признак сравнения.*
$a_k, b_k \geq 0$

1. $\forall k \ \ a_k \leq b_k$. *Тогда* $\sum b_k$ *сх.* $\Rightarrow \sum a_k$ *сх.*, $\sum a_k$ *расх.* $\Rightarrow \sum b_k$ *расх.*
2. $\exists \lim \frac{a_k}{b_k} = l \in [0, +\infty]$. *Тогда при*

$0 < l < +\infty: \ \sum a_k$ *сх.* $\Leftrightarrow \sum b_k$ *сх.*
$l = 0: \ \sum b_k$ *сх.* $\Rightarrow \sum a_k$ *сх.*, $\sum a_k$ *расх.* $\Rightarrow \sum b_k$ *расх.*
$l = +\infty: \ \sum a_k$ *сх.* $\Rightarrow \sum b_k$ *сх.*, $\sum b_k$ *расх.* $\Rightarrow \sum a_k$ *расх.*

Доказательство. □

Пример. 1.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3 + 14n + 1}{n^5 + n^4 + \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

$a_n \sim \frac{n^3}{n^5} = \frac{1}{n^2}, 2 > 1 \Rightarrow$ ряд сходится.