Первая половина лекции не была записана

Некоторые разложения по Тейлору:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})\\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)\\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n)
\end{aligned}$$

Лемма 1. e^2 *— ирр.*

Доказательство. Предположим обратное: e^2 — рационально. Тогда e^2 представимо следующим образом:

$$e^2 = \frac{2k}{n}$$

$$ne = 2ke^{-1}$$

$$n(2k-1)!e = (2k)!e^{-1}$$

$$n(2k-1)!e = n(2k-1)!\left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{(2k-1)!} + \frac{e^c}{(2k)!}\right) = \text{целое число} + \frac{me^c}{2k}$$

$$\frac{me^c}{2k} \le \frac{me}{2k} = e \cdot e^{-2} = e^{-1} \le \frac{1}{2}$$

$$(2k)!e^{-1} = (2k)!\left(1 - 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{(2k)!} - \frac{e^d}{(2k+1)!}\right) = \text{целое число} - \frac{e^d}{2k+1}$$

$$\frac{e^d}{2k+1} \le \frac{1}{2k+1} \le \frac{1}{3}e^d \le 1$$

□

Лемма 2. *Метод Ньютона*

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *— дважды дифф.*

$m := \inf\limits_{\langle a,b\rangle} |f'| > 0$

$M := \sup |f''|$

$\xi \in (a, b) : f(\xi) = 0$

$x_1 \in (a, b) : |x_1 - \xi|\frac{M}{2m} < 1$

Рассмотрим последовательность $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
Тогда $\exists \lim x_n = \xi$ *и при этом !. Кроме того, оно очень быстро сходится.*

$$|x_n - \xi| \leq \left(\frac{M}{2m}|x_1 - \xi|\right)^{2n}$$

$$x_{n+1} - \xi = x_n - \xi - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{(x_n - \xi)f'(x_n) - f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$|x_{n+1} - \xi| = \frac{|f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n)|}{|f'(x_n)|} = \frac{\frac{1}{2}|f''(c)||\xi - x_n|^2}{|f'(x_n)|} \leq \frac{2M}{m}|\xi - x_n|^2$$

Теорема 1. *О разложении рациональной дроби на простейшие.*
$P(x), Q(x)$ *— многочлен* $\deg P < \deg Q = n$
$Q(x) = (x - a_1)^{k_1} \dots (x - a_m)^{k_m} \quad (k_1 + \dots + k_m = n; a_i \neq a_j)$
Тогда $\exists$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{A_1}{(x - a_1)} + \frac{A_2}{(x - a_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x - a_1)^{k_1}}\right) + \left(\frac{B_1}{(x - a_2)} + \frac{B_2}{(x - a_2)^2} + \dots + \frac{B_{k_2}}{(x - a_2)^{k_2}}\right) +$$

$$+ \dots + \left(\frac{C_1}{(x - a_m)} + \frac{C_2}{(x - a_m)^2} + \dots + \frac{C_{k_m}}{(x - a_m)^{k_m}}\right)$$

Доказательство.

$$\frac{P(x)}{(x - a_1)^{k_1} \dots (x - a_m)^{k_m}} = \frac{1}{(x - a_1)^{k_1}} \frac{P(x)}{(x - a_2)^{k_2} \dots (x - a_m)^{k_m}} =$$

$$= \frac{1}{(x - a_1)^{k_1}}(A_{k_1} + A_{k_1+1}(x - a_1) + A_{k_1-2}(x - a_1)^2 + \dots + A_1(x - a_1)^{k_1} + o((x - a_1)^{k_1}))$$

$$\frac{P}{Q} - \left(\frac{A_1}{x - a_1} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x - a_1)^{k_1}}\right) = \frac{o((x - a_1)^{k_1})}{(x - a_1)^{k_1}}$$

$\frac{P}{Q}-$ (Пр. часть) = знам. сократится $\Rightarrow$ многочлен $\equiv 0$ $\square$