

# 1 Монотонные экстремумы

## Теорема 1. Критерий монотонности

$f \in C(\langle a, b \rangle)$ , дифф. в  $(a, b)$

Тогда  $f$  — возрастает  $\Leftrightarrow \forall x \in (a, b) \quad f'(x) \geq 0$

*Доказательство.* “ $\Rightarrow$ ” По определению  $f' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$

“ $\Leftarrow$ ”  $x_1 > x_2$ , по т. Лагранжа:  $\exists c : f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2) \geq 0$  □

*Следствие.*  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , тогда:

$f = \text{const} \Leftrightarrow (f \in C(\langle a, b \rangle) - \text{дифф. на } \langle a, b \rangle, f' \equiv 0)$

*Следствие.*  $f \in C[a, b]$ , дифф. на  $(a, b)$ . Тогда:

$f$  строго возрастает  $\Leftrightarrow$  ① и ②

①  $f' \geq 0$  на  $(a, b)$

②  $f' \not\equiv 0$  ни на каком промежутке

*Доказательство.* “ $\Rightarrow$ ” очевидно

“ $\Leftarrow$ ” По лемме о возрастании в отрезке □

*Следствие.* О доказательстве неравенств

$g, f \in C([a, b])$ , дифф. в  $(a, b)$

$f(a) \leq g(a); \forall x \in (a, b) \quad f'(x) \leq g'(x)$

Тогда  $\forall x \in [a, b] \quad f(x) \leq g(x)$

*Доказательство.*  $g - f$  — возр.,  $g(a) - f(a) \geq 0$  □

**Определение.**  $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in E$  — локальный максимум функции, если

$$\exists U(x_0) \quad \forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \leq f(x_0)$$

Аналогично определяется минимум.

**Определение.** Экстремум — точка минимума либо максимума.

**Теорема 2.**  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in (a, b) \quad f$  — дифф. на  $(a, b)$

Тогда:

1.  $x_0$  — лок. экстремум  $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

2.  $f$  —  $n$  раз дифф. в  $x_0$

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Если  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , то  $\begin{cases} n - \text{чет.} : & x_0 - \text{локальный максимум} \\ n - \text{нечет.} : & x_0 - \text{не экстремум} \end{cases}$

Если  $f^{(n)}(x_0) < 0$ , то  $\begin{cases} n - \text{чет.} : & x_0 - \text{локальный минимум} \\ n - \text{нечет.} : & x_0 - \text{не экстремум} \end{cases}$

*Доказательство.* 1. т. Ферма

## 2. ф. Тейлора

$$f(x) = T_n(f, x_0)(x) + o((x - x_0)^n)$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

при  $x$ , близких к  $x_0$ :

$$\text{sign}(f(x) - f(x_0)) = \text{sign} \left( \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \right)$$

Тогда при чётном  $n$

$$\text{sign}(f(x) - f(x_0)) = \text{sign } f^{(n)}(x_0) \Rightarrow x_0 - \text{экстр.}$$

При нечётном  $n$

$$\text{sign}(f(x) - f(x_0)) = \begin{cases} f^{(n)}(x_0), & x > x_0 \\ -f^{(n)}(x_0), & x < x_0 \end{cases} \Rightarrow x_0 - \text{не экстр.}$$

□

## 2 Интеграл

### 2.1 Неопределенный интеграл

**Определение.**  $F, f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

$F$  — первообразная  $f$  на  $\langle a, b \rangle$

$$\forall x \in \langle a, b \rangle \quad F'(x) = f(x)$$

**Теорема 3. О существовании первообразной**

$f \in C^0(\langle a, b \rangle)$  тогда у  $f$  существует первообразная.

*Доказательство.* Чуть позже.

□

**Теорема 4.**  $F$  — первообразная  $f$  на  $\langle a, b \rangle$ . Тогда:

1.  $\forall c \in \mathbb{R} \quad F + c$  — тоже первообразная
2. Никаких других первообразных нет, т.е. если  $G$  — перв.  $f$ , то  $\exists c \in \mathbb{R} : G = F + c$

*Доказательство.* 1. очевидно

$$2. F' = f, G' = f \quad (G - F)' \equiv 0 \Rightarrow G - F = \text{const}$$

□

**Определение.** Неопределенный интеграл  $f$  на  $\langle a, b \rangle$  — множество всех первообразных  $f$ :

$$\{F + c, c \in \mathbb{R}\}, \text{ где } F - \text{первообразная}$$

Обозначается  $\int f = F + c$  или  $\int f(x)dx$

$$\int x^n dx = \frac{x^{(n+1)}}{n+1} + C, n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C - \text{длинный логарифм}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

**Теорема 5.**  $f, g$  имеют первообразную на  $\langle a, b \rangle$ . Тогда

1. Линейность:

$$\int (f + g) = \int f + \int g$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \int \alpha f = \alpha \int f$$

2.  $\varphi \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \left( \int f(x) dx \right) \big|_{x=\varphi(t)} = F(\varphi(t))$$

Частный случай:  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  :

$$\int f(\alpha t + \beta) dt = \frac{1}{\alpha} F(\alpha t + \beta)$$

3.  $f, g$  — дифф. на  $\langle a, b \rangle$ ;  $f'g$  — имеет первообр.

Тогда  $fg'$  имеет первообразную и

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

**Доказательство.** 1. Опущено

$$2. (F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

$$3. (fg - \int f'g)' = f'g + fg' - f'g = fg'$$

□

*Примечание.* Если  $\varphi$  обратима, то:

$$\int f(x)dx = \left( \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \right) \Big|_{t:=\varphi^{-1}(x)}$$

$$df := f'(x)dx$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx &= [x := \operatorname{tg} t] = \int \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t}}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int \frac{1}{\frac{1}{\cos t}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt = \\ &= \int \frac{\cos t dt}{\cos^2 t} = \int \frac{\cos t dt}{1 - \sin^2 t} = [y := \sin t] = \int \frac{dy}{1-y^2} = \int \frac{1}{1-y} \cdot \frac{1}{1+y} = \int \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y} \right) dy = \\ &= \frac{1}{2} (-\ln(1-y) + \ln(1+y)) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin t}{1-\sin t} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin \operatorname{arctg} x}{1-\sin \operatorname{arctg} x} \end{aligned}$$

## 2.2 Гиперболические тригонометрические функции

$$\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad \operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

Они полезны тем, что по ним висит нить, закрепленная в двух точках.

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} 2t &= 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t \\ (\operatorname{ch} t)^2 + \left( \frac{\operatorname{sh} t}{i} \right)^2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = [x = \operatorname{sh} t] = \int \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t}} \operatorname{ch} t dt = \int 1 dt = t$$

## 2.3 Равномерно непрерывные функции

**Определение.**  $f : \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  равномерно непрерывна на  $\langle a, b \rangle$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle : |x_1 - x_2| < \delta \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Или для метрического пространства:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_1, x_2 \quad \rho(x_1, x_2) < \delta \quad \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

Отличие от непрерывности на отрезке в том, что  $\delta$  зависит только от  $\varepsilon$  и подходит для всех  $x_1, x_2$ .

*Пример.* 1.  $f(x) = x$  равномерно непрерывна.

2.  $f(x) = x^2$   $\langle a, b \rangle = \mathbb{R}$   $\varepsilon := 1$   $\exists? \delta$

$$x_1 := \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}, x_2 := \frac{1}{\delta}$$

$$x_1^2 - x_2^2 = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1 \Rightarrow f - \text{не равномерно непрерывна.}$$

**Теорема 6.**  $f : X \rightarrow Y$ ,  $X$  — комп.,  $f$  — непр. на  $X$

Тогда  $f$  — равномерно непр.

*Доказательство.* От противного.

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta, \bar{x}_\delta : \rho(x_\delta, \bar{x}_\delta) < \delta \quad \rho(f(x_\delta), f(\bar{x}_\delta)) \geq \varepsilon \\ \delta := \frac{1}{n} \quad \exists x_n, \bar{x}_n : \rho(x_n, \bar{x}_n) < \delta \quad \rho(f(x_n), f(\bar{x}_n)) \geq \varepsilon \end{aligned}$$

Выберем  $x_{n_k} \rightarrow \tilde{x}, \bar{x}_{n_k} \rightarrow \tilde{\bar{x}}$

$$\rho(\tilde{x}, \tilde{\bar{x}}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \delta = 0 \Rightarrow \tilde{x} = \tilde{\bar{x}}$$

Тогда  $f(x_{n_k}) \rightarrow f(\tilde{x}), f(\bar{x}_{n_k}) \rightarrow f(\tilde{\bar{x}})$ , противоречие с  $\rho(f(x_n), f(\bar{x}_n)) \geq \varepsilon$  □

*Пример.*  $f(x) = \sqrt{x}$   $X = [0, +\infty)$

По т. Кантора:  $f$  равномерно непрерывна на  $[0, 1]$

При  $x \geq \frac{1}{2}$   $|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \frac{1}{2\sqrt{c}}|x_1 - x_2| < |x_1 - x_2|$ , т.е. тоже равномерно непрерывна.

## 2.4 Конфетка: т. Брауэра о неподвижной точке

Статья от Matousek, Zigler, Bjorner (arxiv: 1409.7890v1)

Игра Нех: два игрока — чёрный и белый, на своем ходе красят один шестиугольник в свой цвет. Условие выигрыша — путь искомого цвета с одной стороны в сторону нужного цвета — две противоположные стороны имеют черный цвет, две другие — белый.

**Теорема 7.** Дана доска для Нех — параллелограм  $k \times l$ , покрашенная в 2 цвета.

Это выигрышная доска для одного из игроков.

*Доказательство.* Рассмотрим первый ряд (*прилегающий к чёрной стороне*). Если в нём нет черных клеток, белый выиграл. Пойдём по границе черных и белых клеток так, что справа всегда черная клетка, слева белая. В этом пути нет самопересечений, т.к. в точке самопересечения с обеих сторон черные клетки, мы так не идём.

Представим доску в виде прямоугольной сетки, где вершины соединены, если из соответствующего шестиугольника можно прийти в другой соответствующий шестиугольник. □

**Теорема 8.**  $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ , непр.

Тогда  $\exists x \in [0, 1]^2 : f(x) = x$ , т.е. есть неподвижная точка.

Обобщенный вариант:

1.  $f : [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]^m$  — непр.
2.  $f : B(0, 1) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow B(0, 1)$  — непр.
3.  $f : S(0, 1) \subset \mathbb{R}^m$  — непр.

*Доказательство.*  $\rho : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$\rho(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$  — непр. в  $[0, 1]^2$

От противного — пусть  $\forall x \in [0, 1]^2 \quad f(x) \neq x$

Тогда  $\forall x \quad \rho(f(x), x) > 0 \quad x \mapsto \rho(f(x), x)$  — непр.,  $> 0$

По т. Вейерштрасса  $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in [0, 1] \quad \rho(f(x), x) \geq \varepsilon$

По т. Кантора для  $f$ : для этого  $\varepsilon \quad \exists \delta < \varepsilon :$

$$\forall x, \bar{x} : \|x - \bar{x}\| < \delta \quad \|f(x) - f(\bar{x})\| < \varepsilon$$

Можно писать не  $\|\cdot\|$ , а  $\rho$ .

Возьмём  $n : \frac{\sqrt{2}}{n} < \delta$

Построим доску  $Hex(n+1, n+1)$ , где  $n+1$  — число узлов.

Логические координаты узла  $(v_1, v_2)$   $v_1, v_2 \in \{0 \dots n\}$  имеют физические координаты, то есть узлу сопоставляется точка на квадрате с координатами  $(\frac{v_1}{n}, \frac{v_2}{n})$

$$K(V) := \min\{i \in \{1, 2\} : |f(\frac{v}{n}) - \frac{v_i}{n}| \geq \varepsilon\}$$

Продолжение на следующей лекции.

□