Лекция 6

Интегральные суммы

Определение. **Дробление** отрезка [a,b] это разбиение отрезка на n частей следующим образом:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b \quad [x_{i-1}, x_i]$$

Определение. Ранг (мелкость) дробления — длина самого длинного из отрезков дробления:

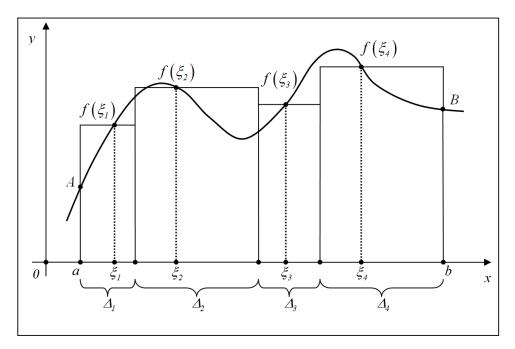
$$\tau = \{x_0 \dots x_n\} \quad |\tau| = \max(x_i - x_{i-1})$$

Определение. Оснащение — множество точек $\{\xi_1 \dots \xi_n\}: \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

Определение. Интегральная (риманова) сумма для разбиения $\{x_i\}$, произвольной функции f и оснащения $\{\xi_i\}$ это следующая сумма:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Геометрически интегральная сумма интерпретируема следующим образом:



Теорема 1. Об интеграле как пределе интегральных сумм.

$$f \in C[a,b]$$

$$\forall \varepsilon>0 \;\; \exists \delta>0 \;\; \forall$$
дробление $\tau=\{x_0\dots x_n\}: |\tau|<\delta \;\; \forall$ оснащение $\xi_i:$

$$\left| \int_{a}^{b} f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_{i})(x_{i} - x_{i-1}) \right| < \varepsilon$$

Доказательство. По теореме Кантора о равномерной непрерывности на компакте. [a,b] — компакт, f непрерывна на [a,b] \Rightarrow f равномерно непрерывна на [a,b]:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, \overline{x} \in [a, b] : |x - \overline{x}| < \delta \ |f(x) - f(\overline{x})| < \varepsilon$$

По двойной бухгалтерии заменим ε на $\frac{\varepsilon}{b-a}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, \overline{x} \in [a, b] : |x - \overline{x}| < \delta \quad |f(x) - f(\overline{x})| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

M3137y2019

Разобьем интеграл на части:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \right)$$

Запишем (x_i-x_{i-1}) в виде интеграла $\int_{x_{i-1}}^{x_i} dx$

$$\left| \int_{a}^{b} f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_{i})(x_{i} - x_{i-1}) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_{i}} f(x)dx - f(\xi_{i}) \int_{x_{i-1}}^{x_{i}} dx \right) \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_{i}} (f(x) - f(\xi_{i}))dx \right| \le \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_{i}} |(f(x) - f(\xi_{i}))dx| \le \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_{i}} \frac{\varepsilon}{b - a} dx =$$

$$= \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_{i}} dx = \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{i=1}^{n} (x_{i} - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b - a} (b - a) = \varepsilon$$

Примечание. $f \in C^1[a,b]; M := \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|$

$$|f(x) - f(\overline{x})| = |f'(\overline{x})(x - \overline{x})| \le M|x - \overline{x}|$$

Следствие. Равномерное дробление: $x_i = a + \frac{b-a}{n}i; |\tau| = \frac{b-a}{n}$

$$\int -\sum \leq M(b-a)^2 \frac{1}{n}$$

Теорема 2. Об интегральных суммах центральных прямоугольников

 $f \in C^2[a,b]$ $x_0 = a < x_1 \ldots < x_n = b$ $\delta = \max(x_i - x_{i-1})$ $\xi_i := \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$. Тогда

$$\left| \int_{a}^{b} f - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_{i})(x_{i} - x_{i-1}) \right| \le \frac{\delta^{2}}{8} \int_{a}^{b} |f''| dx$$

Доказательство.

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f(x)dx + \int_{\xi_i}^{x_i} f(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f(x)d(x-x_{i-1}) + \int_{\xi_i}^{x_i} f(x)d(x-x_i) =$$

$$= f(x)(x-x_{i-1})\Big|_{x=x_{i-1}}^{x=\xi_i} - \int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f'(x)(x-x_{i-1})dx + f(x)(x-x_i)\Big|_{x=\xi_i}^{x=x_i} - \int_{\xi_i}^{x_i} f'(x)(x-x_{i-1})dx = (*)$$
Заметим, что $\xi_i - x_{i-1} = x_i - \xi_i$, поэтому $f(x)(x-x_{i-1})\Big|_{x=x_{i-1}}^{x=\xi_i} + f(x)(x-x_i)\Big|_{x=\xi_i}^{x=x_i} = f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$

$$(*) = f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) - \Big(f'(x)\frac{(x-x_{i-1})^2}{2}\Big|_{\xi_i}^{\xi_i} - \frac{1}{2}\int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f''(x)(x-x_i)^2dx\Big) =$$

$$= f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) - 0 + \frac{1}{2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x)\varphi(x)dx$$

М3137у2019 Лекция 6

 $\varphi(x) = \begin{cases} (x - x_{i-1})^2, & x \in [x_{i-1}, \xi_i] \\ (x - x_i)^2, & x \in [\xi_i, x_i] \end{cases}$

Итого:

$$\int_a^b f(x) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \frac{1}{2} \int_a^b f''(x)\varphi(x)dx$$

$$\left| \int -\sum \right| \le \frac{1}{2} \int_a^b |f''(x)|\varphi(x)dx$$

$$\max_{x \in [a,b]} \varphi(x) \overset{\text{достигается на отрезке длины } \delta}{=} \frac{\delta^2}{4}$$

$$\frac{1}{2} \int_a^b |f''(x)|\varphi(x)dx \le \frac{\delta^2}{8} \int_a^b |f''|$$

Теорема 3. О формуле трапеций.

$$f \in C^2[a,b], \tau, \delta = |\tau|$$

Тогда

$$\left| \int_{a}^{b} f dx - \sum \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} (x_i - x_{i-1}) \right| \le \frac{\delta^2}{8} \int_{a}^{b} |f''|$$

Доказательство. Берем $\xi_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)d(x - \xi_i) = f(x)(x - \xi_i) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)(x - \xi_i)dx =$$

$$= (f(x_i) + f(x_{i-1})) \frac{x_i - x_{i-1}}{2} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) d((x - x_{i-1})(x_i - x)) = (*)$$

Проверим, что замена выражения под дифференциалом верная:

$$((x - x_{i-1})(x_i - x))' = (-x^2 + x(x_i + x_{i-1}) - x_{i-1}x)' = -2\left(x - \frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)$$

Действительно верно.

$$\psi(x) := (x - x_{i-1})(x_i - x)$$

$$(*) = (f(x_i) + f(x_{i-1}))\frac{x_i - x_{i-1}}{2} + \frac{1}{2}f'(x)(x - x_{i-1})(x_i - x)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \frac{1}{2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f''\psi(x)dx$$

$$\left| \int -\sum \right| \le \frac{1}{2}\int_a^b |f''|\psi(x)dx$$

$$\max \psi = \frac{\delta^2}{4}$$

Примечание. f — выпуклая $(f'' \ge 0)$ Тогда $\int -\sum_{\mathrm{пp}} \ge 0, \int -\sum_{\mathrm{тp}} \le 0$

M3137y2019 Лекция 6

Пример.

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2 + n^2 + 1} = ?$$

 $[a,b] := [0,1], x_i = \frac{i}{n}, \xi_k = \frac{k}{n}$ (дробление равномерное)

$$\lim_{n\to +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2+n^2+1} = \lim_{n\to +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1+\frac{1}{n^2}} \frac{1}{n} \overset{\text{по рукомаханию}}{\approx} \lim_{n\to +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1} \frac{1}{n} = \lim_{n\to +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} = \lim_{n\to +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n$$

По теореме $\sum f(\xi_k) \frac{1}{n} = \sum f(\frac{k}{n}) \frac{1}{n} \xrightarrow{n \to \infty} \int_0^1 f(x) dx$

$$= \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$$

Вернемся к рукомаханию. Мы заменили $\frac{1}{n^2}$ на 0 (эквивалентную) при $n \to \infty$, тем самым совершив "небольшую ошибку". Но эта ошибка совершена в n слагаемых, т.е. у нас много небольших ошибок, а это может быть большой ошибкой. Докажем, что разность выражения с заменой и выражения без замены бесконечно мала:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^{2} + 1 + \frac{1}{n^{2}}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^{2} + 1} \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{1}{n} \frac{k}{n} \frac{-\frac{1}{n^{2}}}{\left(\left(\frac{k}{n}\right)^{2} + 1 + \frac{1}{n^{2}}\right)\left(\left(\frac{k}{n}\right)^{2} + 1\right)} \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^{2}} \frac{1}{1 \cdot 1} = \frac{1}{n^{2}} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

Простейший случай формулы Эйлера-Маклорена $m,n\in\mathbb{Z},f\in C^2[m,n].$ Тогда

$$\int_{m}^{n} f(x)dx = \left(\sum_{i=m}^{n}\right)' f(i) - \frac{1}{2} \int f''(x)\{x\}(1 - \{x\})dx$$

' означает, что крайние слагаемые берутся с весом $\frac{1}{2}$, $\{x\}$ — дробная часть x

Доказательство. Это очевидно по формуле трапеций: $x_i := i$

$$\int_{m}^{n} f(x)dx = \sum_{i=m+1}^{n} \frac{f(i) + f(i-1)}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \int_{m}^{n} f''(x)\psi(x)$$

$$\psi(x) \stackrel{def}{=} (x - x_{i-1})(x_i - x) = (x - i + 1)(i - x) = (x - i + 1)(1 - (x - i + 1)) = \{x\}(1 - \{x\})$$

f(n)/2 и f(m)/2 в сумму попадают только 1 раз, остальные — 2 раза, как и в искомой формуле. \Box

Обычно эта формула используется, чтобы из суммы получить интеграл, а не наоборот.

Пример. p > -1 $f(x) = x^p$

$$1^{p} + 2^{p} + \dots + n^{p} = \int_{1}^{n} x^{p} dx + \frac{1}{2} 1^{p} + \frac{1}{2} n^{p} + \frac{1}{2} \int_{1}^{n} p(p-1) x^{p-2} \{x\} (1 - \{x\}) = 0$$

 $\frac{1}{2}1^p + \frac{1}{2}n^p$ добавлены, чтобы не писать слева деление крайних слагаемых на 2.

$$=\frac{n^{p+1}}{p+1}-\frac{1}{p+1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}n^p+\mathcal{O}(\max(1,n^{p-1}))=(*)$$

M3137y2019

Откуда появилось \mathcal{O} ? $\{x\}(1-\{x\})<1\Rightarrow\int_1^np(p-1)x^{p-2}\{x\}(1-\{x\})\leq C(n^{p-1}-1)$, C — некоторая константа.

Занесем константы под \mathcal{O} :

$$(*) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{1}{2}n^p + \mathcal{O}(\max(1, n^{p-1}))$$

$$]p = -\frac{1}{2} \quad 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{n} + \mathcal{O}(1)$$

$$]p = \pi \quad 1^{\pi} + 2^{\pi} + \dots + n^{\pi} = \frac{n^{\pi+1}}{\pi+1} + \frac{1}{2}n^{\pi} + \mathcal{O}(n^{\pi-1})$$

$$]p = 1 \quad 1 + 2 + \dots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + \mathcal{O}(1) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

 $\mathcal{O}(1) = 0$ в данной ситуации, т.к. при интеграле p-1 = 0 и $\frac{1}{2}$ сократилось с подстановкой в первый интеграл 1.

$$\begin{aligned}]p &= -1 \quad 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \int_{1}^{n} x^{-3} \{x\} (1 - \{x\}) = (*) \\ \int_{1}^{n} x^{-3} \{x\} (1 - \{x\}) &\leq \frac{1}{4} \int_{1}^{n} \frac{dx}{x^{3}} = \frac{1}{8} \frac{-1}{\alpha^{2}} \bigg|_{1}^{n} = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{n^{2}} \right) < \frac{1}{8} \\ (*) &= \ln n + \gamma + o(1) \quad \gamma \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \right] \end{aligned}$$

Определение. γ — постоянная Эйлера. ≈ 0.577

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right)$$

$$] f(x) = \ln x \quad \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n = \int_{1}^{n} \ln x dx + \frac{\ln n}{2} - \frac{1}{2} \int_{1}^{n} \frac{\{x\}(1 - \{x\})}{x^{2}} dx =$$

$$= n \ln n - n + 1 + \frac{\ln n}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{4} \int_{1}^{n} \frac{1}{x^{2}} + o(1) = n \ln n - n + \frac{\ln n}{2} + C_{1} + o(1)$$

$$\ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n = \ln n!$$

$$n! = e^{n \ln n - n + \frac{\ln n}{2} + C_{1} + o(1)}$$

$$n! = n^{n} e^{-n} \sqrt{n} e^{C_{1} + o(1)} \underset{n \to +\infty}{\sim} Cn^{n} e^{-n} \sqrt{n}$$

Найдём C.

Формула Валлиса

Вывод формулы Валлиса:

$$I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{bmatrix} u = \sin^{n-1} x & du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{bmatrix} =$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x (n-1)\sin^{n-2} x dx =$$

M3137y2019 Лекция 6

$$(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x) \sin^{n-2} x = (n-1)(I_{n-2}-I_n)$$

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} I_{n-4} = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \frac{n-5}{n-4} I_{n-6} = \dots = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2}, & n-\text{чёт.} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} 1, & n-\text{нечет.} \end{cases}$$

$$\sin^{2k+1} x < \sin^{2k} x < \sin^{2k} x < \sin^{2k-1} x$$

Проинтегрируем по $[0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \le \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{\pi}{2} \le \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}$$

$$\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2k+1} \le \frac{\pi}{2} \le \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2k}$$

Правая часть — левая часть =
$$\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1}\right) = \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2k} \frac{1}{2k+1} \le \frac{\pi}{2} \frac{1}{2k} \xrightarrow{k \to +\infty} 0$$

Таким образом, левая и правая части стремятся друг другу и зажимают $\pi/2$

$$\lim_{k \to +\infty} \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2k} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sqrt{\pi}$$

Вернемся к нахождению C.

$$\sqrt{\pi} = \lim_{k \to +\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdots (2k)}{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)} \frac{1}{\sqrt{k}} =$$

Домножим дробь на числитель:

$$= \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot \cdot \cdot (2k)^2}{(2k)!} =$$

Вынесем 2 из каждого множителя в числителе:

$$=\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{(2^k k!)^2}{(2k)!} =$$

Замена на эквивалент:

$$=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{(2^kCk^ke^{-k}\sqrt{k})^2}{C(2k)^{2k}e^{-2k}\sqrt{2k}}=\lim_{k\to+\infty}\frac{C}{\sqrt{2}}=\frac{C}{\sqrt{2}}$$

$$C=\sqrt{2\pi}$$

$$n!\underset{n\to+\infty}{\sim}n^ne^{-n}\sqrt{n}\sqrt{2\pi}$$

Это формула Стирлинга.

М3137у2019 Лекция 6