Интегральные суммы

Определение. **Дробление** отрезка $[a, b]$ это разбиение отрезка на n частей следующим образом:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b \quad [x_{i-1}, x_i]$$

Определение. **Ранг *(мелкость)*** дробления — длина самого длинного из отрезков дробления:

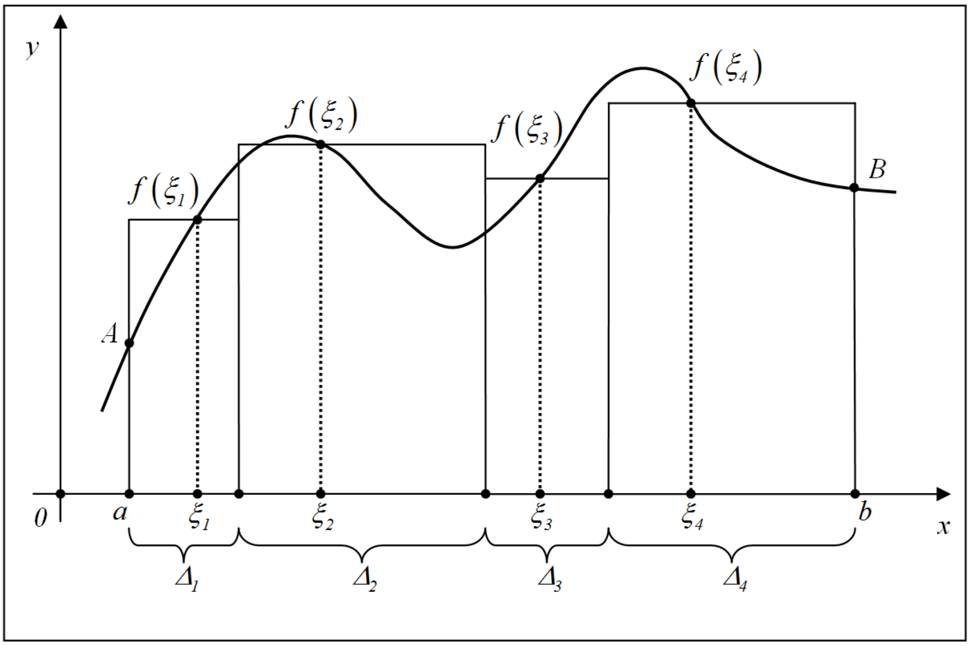
$$\tau = \{x_0 \ldots x_n\} \quad |\tau| = \max(x_i - x_{i-1})$$

Определение. **Оснащение** — множество точек $\{\xi_1 \ldots \xi_n\} : \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

Определение. **Интегральная *(риманова)* сумма** для разбиения $\{x_i\}$, произвольной функции f и оснащения $\{\xi_i\}$ это следующая сумма:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Геометрически интегральная сумма интерпретируема следующим образом:



Теорема 1. Об интеграле как пределе интегральных сумм.
$f \in C[a, b]$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \text{дробление } \tau = \{x_0 \ldots x_n\} : |\tau| < \delta \ \forall \text{оснащение } \xi_i :$$

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon$$

Доказательство. По теореме Кантора о равномерной непрерывности на компакте.
$[a, b]$ — компакт, f непрерывна на $[a, b] \Rightarrow f$ равномерно непрерывна на $[a, b]$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, \overline{x} \in [a, b] : |x - \overline{x}| < \delta \quad |f(x) - f(\overline{x})| < \varepsilon$$

По двойной бухгалтерии заменим ε на $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, \overline{x} \in [a, b] : |x - \overline{x}| < \delta \quad |f(x) - f(\overline{x})| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Разобьем интеграл на части:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx\right)$$

Запишем $(x_i - x_{i-1})$ в виде интеграла $\int_{x_{i-1}}^{x_i} dx$

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right| = \left|\sum_{i=1}^n \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - f(\xi_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i} dx\right)\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(\xi_i))dx\right| \le \sum \left|\int\right| \le \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |(f(x) - f(\xi_i))dx| \le \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\varepsilon}{b-a}dx =$$

$$= \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx = \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

□

Примечание. $f \in C^1[a,b]$; $M := \max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$

$$|f(x) - f(\overline{x})| = |f'(\overline{x})(x - \overline{x})| \le M|x - \overline{x}|$$

Следствие. Равномерное дробление: $x_i = a + \frac{b-a}{n}i$; $|\tau| = \frac{b-a}{n}$

$$\int - \sum \le M(b-a)^2\frac{1}{n}$$

Теорема 2. Об интегральных суммах центральных прямоугольников
$f \in C^2[a,b]$ $x_0 = a < x_1 \ldots < x_n = b$ $\delta = \max(x_i - x_{i-1})$ $\xi_i := \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$. Тогда

$$\left|\int_a^b f - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right| \le \frac{\delta^2}{8}\int_a^b |f''|dx$$

Доказательство.

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f(x)dx + \int_{\xi_i}^{x_i} f(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f(x)d(x - x_{i-1}) + \int_{\xi_i}^{x_i} f(x)d(x - x_i) =$$

$$= f(x)(x - x_{i-1})\Big|_{x=x_{i-1}}^{x=\xi_i} - \int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f'(x)(x - x_{i-1})dx + f(x)(x - x_i)\Big|_{x=\xi_i}^{x=x_i} - \int_{\xi_i}^{x_i} f'(x)(x - x_{i-1})dx = (*)$$

Заметим, что $\xi_i - x_{i-1} = x_i - \xi_i$, поэтому $f(x)(x - x_{i-1})\Big|_{x=x_{i-1}}^{x=\xi_i} + f(x)(x - x_i)\Big|_{x=\xi_i}^{x=x_i} = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$

$$(*) = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \Big(f'(x)\frac{(x - x_{i-1})^2}{2}\Big|_{x_{i-1}}^{\xi_i} - \frac{1}{2}\int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f''(x - x_{i-1})^2dx +$$

$$+ f'(x)\frac{(x - x_i)^2}{2}\Big|_{\xi_i}^{x_i} - \frac{1}{2}\int_{\xi_i}^{x_i} f''(x - x_i)^2dx\Big) =$$

$$= f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - 0 + \frac{1}{2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x)\varphi(x)dx$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} (x - x_{i-1})^2, & x \in [x_{i-1}, \xi_i] \\ (x - x_i)^2, & x \in [\xi_i, x_i] \end{cases}$$

Итого:

$$\int_a^b f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \frac{1}{2}\int_a^n f''(x)\varphi(x)dx$$

$$\left|\int - \sum\right| \leq \frac{1}{2}\int_a^b |f''(x)|\varphi(x)dx$$

$$\max_{x\in[a,b]} \varphi(x) \overset{\text{достигается на отрезке длины } \delta}{=} \frac{\delta}{4}$$

$$\frac{1}{2}\int_a^b |f''(x)|\varphi(x)dx \leq \frac{\delta^2}{8}\int_a^b |f''|$$

□

Теорема 3. О формуле трапеций.
$f \in C^2[a,b], \tau, \delta = |\tau|$
Тогда

$$\left|\int_a^b f dx - \sum \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1})\right| \leq \frac{\delta^2}{8}\int_a^b |f''|$$

Доказательство. Берем $\xi_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)d(x-\xi_i) = f(x)(x-\xi_i)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)(x-\xi_i)dx =$$

$$= (f(x_i) + f(x_{i-1}))\frac{x_i - x_{i-1}}{2} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) d((x-x_{i-1})(x_i - x)) = (*)$$

Проверим, что замена выражение под дифференциалом верное:

$$((x-x_{i-1})(x_i - x))' = (-x^2 + x(x_i + x_{i-1}) - x_{i-1}x)' = -2\left(x - \frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)$$

Действительно верно.

$$\psi(x) := (x - x_{i-1})(x_i - x)$$

$$(*) = (f(x_i) + f(x_{i-1}))\frac{x_i - x_{i-1}}{2} + \frac{1}{2}f'(x)(x-x_{i-1})(x_i - x)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \frac{1}{2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f''\psi(x)dx$$

$$\left|\int - \sum\right| \leq \frac{1}{2}\int_a^b |f''|\psi(x)dx$$

$$\max \psi = \frac{\delta^2}{4}$$

□

Примечание. f — выпуклая ($f'' \geq 0$)
Тогда $\int - \sum_{\text{пр}} \geq 0, \int - \sum_{\text{тр}} \leq 0$

Пример.

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+n^2+1}=?$$

$[a,b]:=[0,1], x_i=\frac{i}{n}, \xi_k=\frac{k}{n}$ (дробление равномерное)

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+n^2+1}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1+\frac{1}{n^2}}\frac{1}{n}\overset{\text{по рукомаханию}}{\approx}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}\frac{1}{n}=$$

По теореме $\sum f\left(\xi_k\right)\frac{1}{n}=\sum f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}\int_0^1 f(x)dx$

$$=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln 2$$

Вернемся к рукомаханию. Мы заменили $\frac{1}{n^2}$ на 0 *(эквивалентную)* при $n\to\infty$, тем самым совершив “небольшую ошибку”. Но эта ошибка совершена в n слагаемых, т.е. у нас много небольших ошибок, а это может быть большой ошибкой. Докажем, что разность выражения с заменой и выражения без замены бесконечно мала:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1+\frac{1}{n^2}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}\right|\le\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{1}{n}\frac{k}{n}\frac{-\frac{1}{n^2}}{((\frac{k}{n})^2+1+\frac{1}{n^2})((\frac{k}{n})^2+1)}\right|\le$$

$$\le\sum\frac{1}{n^3}1\frac{1}{1\cdot 1}=\frac{1}{n^2}\xrightarrow{n\to+\infty}0$$

Простейший случай формулы Эйлера-Маклорена
$m,n\in\mathbb{Z}, f\in C^2[m,n]$. Тогда

$$\int_m^n f(x)dx=\left(\sum_{i=m}^{n}\right)' f(i)-\frac{1}{2}\int f''(x)\{x\}(1-\{x\})dx$$

$'$ означает, что крайние слагаемые берутся с весом $\frac{1}{2}$, $\{x\}$ — дробная часть x

Доказательство. Это очевидно по формуле трапеций: $x_i:=i$

$$\int_m^n f(x)dx=\sum_{i=m+1}^{n}\frac{f(i)+f(i-1)}{2}\cdot 1-\frac{1}{2}\int_m^n f''(x)\psi(x)$$

$$\psi(x)\overset{def}{=}(x-x_{i-1})(x_i-x)=(x-i+1)(i-x)=(x-i+1)(1-(x-i+1))=\{x\}(1-\{x\})$$

$f(n)/2$ и $f(m)/2$ в сумму попадают только 1 раз, остальные — 2 раза, как и в искомой формуле. □

Обычно эта формула используется, чтобы из суммы получить интеграл, а не наоборот.

Пример. $p>-1\quad f(x)=x^p$

$$1^p+2^p+\dots n^p=\int_1^n x^p dx+\frac{1}{2}1^p+\frac{1}{2}n^p+\frac{1}{2}\int_1^n p(p-1)x^{p-2}\{x\}(1-\{x\})=$$

$\frac{1}{2}1^p+\frac{1}{2}n^p$ добавлены, чтобы не писать слева деление крайних слагаемых на 2.

$$=\frac{n^{p+1}}{p+1}-\frac{1}{p+1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}n^p+\mathcal{O}(\max(1,n^{p-1}))=(*)$$

Откуда появилось $\mathcal{O}$? $\{x\}(1-\{x\}) < 1 \Rightarrow \int_1^n p(p-1)x^{p-2}\{x\}(1-\{x\}) \le C(n^{p-1}-1)$, C — некоторая константа.
Занесем константы под $\mathcal{O}$:

$$(*) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{1}{2}n^p + \mathcal{O}(\max(1, n^{p-1}))$$

$$]p = -\frac{1}{2} \quad 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{n} + \mathcal{O}(1)$$

$$]p = \pi \quad 1^\pi + 2^\pi + \ldots + n^\pi = \frac{n^{\pi+1}}{\pi+1} + \frac{1}{2}n^\pi + \mathcal{O}(n^{\pi-1})$$

$$]p = 1 \quad 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + \mathcal{O}(1) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

$\mathcal{O}(1) = 0$ в данной ситуации, т.к. при интеграле $p-1 = 0$ и $\frac{1}{2}$ сократилось с подстановкой в первый интеграл 1.

$$]p = -1 \quad 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \int_1^n x^{-3}\{x\}(1-\{x\}) = (*)$$

$$\int_1^n x^{-3}\{x\}(1-\{x\}) \le \frac{1}{4}\int_1^n \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{8}\frac{-1}{\alpha^2}\Bigg|_1^n = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) < \frac{1}{8}$$

$$(*) = \ln n + \gamma + o(1) \quad \gamma \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right]$$

Определение. γ — **постоянная Эйлера**. ≈ 0.577

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n\right)$$

$$]f(x) = \ln x \quad \ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n = \int_1^n \ln x dx + \frac{\ln n}{2} + \frac{1}{2}\int_1^n \frac{\{x\}(1-\{x\})}{x^2}dx \le$$

$$\le n\ln n - n + 1 + \frac{\ln n}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{4}\int_1^n \frac{1}{x^2} = n\ln n - n + \frac{\ln n}{2} + C_1 + o(1)$$

$$\ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n = \ln n!$$

$$n! = e^{n\ln n - n + \frac{\ln n}{2} + C_1 + o(1)}$$

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{n}e^{C_1+o(1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} Cn^n e^{-n}\sqrt{n}$$

Найдём C.

Формула Валлиса

Вывод формулы Валлиса:

$$I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{bmatrix} u = \sin^{n-1} x & du = (n-1)\sin^{n-2} x\cos x dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{bmatrix} =$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x(n-1)\sin^{n-2} x dx =$$

$$(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-sin^2x)\sin^{n-2}x=(n-1)(I_{n-2}-I_n)$$

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}=\frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}I_{n-4}=\frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\frac{n-5}{n-4}I_{n-6}=\ldots=\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}, & n-\text{чёт.}\\ \frac{(n-1)!!}{n!!}1, & n-\text{нечет.}\end{cases}$$

$$\sin^{2k+1}x\le\sin^{2k}x\le\sin^{2k-1}x$$

Проинтегрируем по $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$:

$$\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\le\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2}\le\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}$$

$$\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2\frac{1}{2k+1}\le\frac{\pi}{2}\le\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2\frac{1}{2k}$$

Правая часть $-$ левая часть $=\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+1}\right)=\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)\frac{1}{2k}\frac{1}{2k+1}\le\frac{\pi}{2}\frac{1}{2k}\xrightarrow{k\to+\infty}0$

Таким образом, левая и правая части стремятся друг другу и зажимают $\pi/2$.

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2\frac{1}{2k}=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\frac{1}{\sqrt{k}}=\sqrt{\pi}$$

Вернемся к нахождению C.

$$\sqrt{\pi}=\lim_{k\to+\infty}\frac{2\cdot4\cdots(2k)}{1\cdot3\cdots(2k-1)}\frac{1}{\sqrt{k}}=$$

Домножим дробь на знаменатель:

$$=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{2^2\cdot4^2\cdots(2k)^2}{(2k)!}=$$

Вынесем 2 из каждого множителя в числителе:

$$=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{(2^kk!)^2}{(2k)!}=$$

Замена на эквивалент:

$$=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{(2^kCk^ke^{-k}\sqrt{k})^2}{C(2k)^{2k}e^{-2k}\sqrt{2k}}=\lim_{k\to+\infty}\frac{C}{\sqrt{2}}=\frac{C}{\sqrt{2}}$$

$$C=\sqrt{2\pi}$$

$$n!\underset{n\to+\infty}{\sim}n^ne^{-n}\sqrt{n}\sqrt{2\pi}$$

Это формула Стирлинга.