Пример. $\langle a,b\rangle \quad f:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$
$\forall n\in\mathbb{N}\, x^n$ — непрерывно
Любой многочлен непрерывен, выражение вида

$$\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_0}$$

тоже непрерывно на области определения.

Теорема 1. *О непрерывности композиции* $f:D\subset X\to Y \quad g:E\subset Y\to Z \quad f(D)\subset E$
f — непр. в $x_0\in D$, g — непр. в $f(x_0)$
Тогда $g\circ f$ непр. в x_0

Proof. По Гейне.
Проверяем, что $\forall(x_n): x_n\in D, x_n\to x_0 \quad g(f(x_n))\overset{?}{\to} g(f(x_0))$
$y_n:=f(x_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_0)$
$y_n\in E$
$\Rightarrow g(y_n)\to g(y_0)$ □

Примечание. $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$
$g(x)=|sign(x)|$
$x\to 0\ \ f(x)\to 0$
$y\to 0\ \ g(y)\to 1$
$x\to 0\ \ g(f(x))\to 1?$ — неверно
Но: $x_n=\frac{1}{\pi n}\to 0\ \ f(x_n)=0\ \ g(f(x_n))\to 0$

Теорема 2. *О пределе композиции*
$f:D\subset X\to Y \quad g:E\subset Y\to Z \quad f(D)\subset E$
a — предельн. точка $D \quad f(x)\xrightarrow[x\to a]{} A$
A — предельн. точка $E \quad g(y)\xrightarrow[y\to A]{} B$
$\exists V(a) \quad \forall x\in\dot{V}(a)\cap D \quad f(x)\neq A \quad (*)$
Тогда $g(f(x))\xrightarrow[x\to a]{} B$

Proof. По Гейне.
Проверяем, что $\forall(x_n): \substack{x_n\in D\\ x_n\to a\\ x_n\neq a} \quad g(f(x_n))\overset{?}{\to} B$
$y_n:=f(x_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{} A$
$y_n\in E$
При больших $N \quad y_n\in V(a)\Rightarrow y_n\neq A$
$\Rightarrow g(y_n)\to B$ □

Примечание. Вместо $(*)$ можно рассмотреть условие $A\in E \quad g$ — непр. в A.

Теорема 3. *Топологическое определение непрерывности*
$f:X\to Y$ — непр. на $X\Leftrightarrow\forall G\subset Y$, откр. $f^{-1}(G)$ — откр. в X.

Proof. "$\Rightarrow$" $x_0\in f^{-1}(G) \quad ?\exists V(x_0)\subset f^{-1}(G)$
f — непр. в $x_0 \quad \forall U(f(x_0)) \quad W(x_0) \quad \forall x\in W \quad f(x)\in U$
$f(x_0)\in G$ — откр. $\Rightarrow\exists U_1(f(x_0))\subset G$
Для $U_1 \quad \exists W(x_0): x\in W \quad f(x)\in U_1\subset G$

$W(x_0) \subset f^{-1}(G)$
"$\Leftarrow$" $x_0 \in X$? непр. f в x_0
$\forall U(f(x_0)) \quad \exists W(x_0) \quad \forall x \in W \quad \forall f(x) \in U$ — надо проверить
$U(f(x_0))$ — откр. $\Rightarrow$ $f^{-1}(U(f(x_0)))$ — откр., а $x_0 \in f^{-1}(U(f(x_0)))$, значит $\exists W(x_0) \subset f^{-1}(U(f(x_0)))$
Для любого $x \in W(x_0)$ будет выполняться $f(x) \in U(f(x_0))$ □

Примечание. $f : [0,2] \to \mathbb{R}$
$f(x) = x$
$f^{-1}((1, +\infty)) = (1, 2]$ — открыто в $[0, 2]$

Теорема 4. *Вейерштрасса о непрерывном образе компакта.* $f : X \to Y$ *— непр. на* X
Если X *— комп., то* $f(X)$ *— комп.*

Лемма 1. $A \subset \mathbb{R}, A$ *— ограничено и замкнуто* $\Rightarrow \sup A \in A$

Proof. По техническому описанию $\sup A$ если $\sup A \notin A \Rightarrow \sup A$ — предельная точка A.
Для $\varepsilon = \frac{1}{n} \quad \exists x_n \in A : \sup A - \frac{1}{n} < x_n \leq \sup A$, т.е. $x_n \to \sup A$ □

Proof. $?f(X)$ — комп.
$f(X) \subset \bigcup G_\alpha \quad G_\alpha$ — откр. в Y.
$X \subset \bigcup f^{-1}(G_\alpha)$ — откр. т.к. f — непр. $\xRightarrow[X \text{ — комп.}]{} \exists \alpha_1 \dots \alpha_n \quad X \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} f^{-1}(G_{\alpha_i}) \Rightarrow$ $f(X) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$ □

Следствие. Непрерывный образ компакта замкнут и ограничен.

Следствие. (1-я теорема Вейерштрасса)
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — непр.
Тогда f — огр.

Следствие. $f : X \to \mathbb{R}$
X — комп., f — непр. на X
Тогда $\exists \max\limits_X f, \min\limits_X f$
$\exists x_0, x_1 : \forall x \in X \quad f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$

Следствие. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — непр.
$\exists \max f, \min f$

1 O-символика

Определение. $f, g : D \subset X \to \mathbb{R} \quad x_0$ — пр. точка D
Если $\exists V(x_0) \;\; \exists \varphi : V(x_0) \cap D \to \mathbb{R} \quad f(x) = g(x)\varphi(x)$ при $x \in V(x_0) \cap D$

1. φ — ограничена. Тогда говорят $f = O(g)$ при $x \to x_0$
   "f **ограничена** по сравнению с g при $x \to x_0$"
2. $\varphi(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 \quad f$ — **беск. малая** по отношению к g при $x \to x_0$, $f = o(g)$
3. $\varphi(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 1 \quad f$ и g **экв.** при $x \to x_0 \quad f \underset{x \to x_0}{\sim} g$

$g, f : D \subset X \to \mathbb{R}$

Определение. $\exists c > 0 \ \forall x \in D \ \ f = O(g) \ \ |f(x)| < c|g(x)| - f$ **ограничена** по сравнению с g на множестве D.

Определение. В условиях прошлых определений $f = O(g), g = O(f) \Leftrightarrow f \asymp g$ — асимптотически сравнимы на множестве D, "величины одного порядка".

Примечание. Первое определение $\Leftrightarrow f = O(g)$ на $V(x_0) \cap D$ в смысле второго определения $\Leftrightarrow \frac{f}{g}$ — огр. на $V(x_0) \cap D$ *(если $g \neq 0$)*

Второе определение $\underset{g \neq 0}{\Longleftrightarrow} \frac{f}{g} \to 0$

Третье определение $\frac{f}{g} \to 1$ *(если $g \neq 0$)*

Следствие. 1. $f \sim g, x \to x_0 \Leftrightarrow f = g + o(g), x \to x_0 \Leftrightarrow f = g + o(f), x \to x_0$

Proof.

$$\frac{f}{g} \to 1, x \to x_0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \alpha(x)$$

$$\alpha(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$$f(x) = g(x) + \alpha(x)g(x) = g(x) + o(x)$$

□

Аналогично для $\frac{g}{f} = 1$.

2. $f = o(g) \Rightarrow f = O(g)$

Proof. $f(x) = \alpha(x)g(x) \quad \alpha(x) = 0 \Rightarrow \alpha(x)$ — огр. □

3. $\alpha \neq 0 \quad f \underset{x \to x_0}{\sim} \alpha g$. Тогда $f \asymp g, x \to x_0$

Proof.

$$\varepsilon := \frac{\alpha}{2} \quad \exists V(x_0) \quad \forall x \in V(x_0) \cap D \quad \frac{\alpha}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2}\alpha$$

□

Пример. 1.

$$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1 \quad \sin x = x + o(x), x \to 0$$

2.

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} + o(\frac{1}{2}), x \to 0$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^2 o(\frac{1}{2})$$

3.
$$\frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \quad e^x = 1 + x + o(x)$$

4.
$$\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \quad \ln(1+x) = x + o(x)$$

5.
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha o(x), x \to 0$$

Пример. Таблица эквивалентных для $x \to 0$:

$$\begin{aligned}\sin x &\sim x\\ \operatorname{sh} x &\sim x\\ \operatorname{tg} x &\sim x\\ \operatorname{arctg} x &\sim x\\ 1-\cos x &\sim \frac{x^2}{2}\\ \operatorname{ch} x - 1 &\sim \frac{x^2}{2}\\ e^x - 1 &\sim x\\ \ln(1+x) &\sim x\\ (1+x)^\alpha - 1 &\sim \alpha x\\ a^x - 1 &\sim x \ln a\end{aligned}$$

Теорема 5. $f, \tilde{f}, g, \tilde{g} : D \subset X \to \mathbb{R}$
x_0 — предельная точка D
$f \sim \tilde{f}, g \sim \tilde{g}$ при $x \to x_0$
Тогда
$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)$$
, т.е. если $\exists$ один из пределов, то $\exists$ и второй и имеет место равенство
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}$$
, если x_0 лежит в области определения $\frac{f}{g}$

Proof.
$$f(x)g(x) = \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)\frac{f}{\tilde{f}}\frac{g}{\tilde{g}} \to \tilde{f}(x)\tilde{g}(x) \cdot 1 \cdot 1$$
□

Примечание. В условиях теоремы $\lim\limits_{x\to x_0} f + g \neq \lim\limits_{x\to x_0} (\tilde{f} + \tilde{g})$

1.1 Асимптотическое разложение

Определение. $g_n : D \subset X \to \mathbb{R} \quad x_0$ — пред. точка D
$\forall n \quad g_{n+1}(x) = o(g_n), x \to x_0$

Пример. $g_n(x) = x^n, n = 0, 1, 2 \ldots \quad x \to 0 \quad g_{n+1} = xg_n, x \to 0$

(g_n) называется **шкала асимптотического разложения**.
$f : D \to \mathbb{R}$ Если $f(x) = c_0g_0(x) + c_1g_1(x) + \ldots + c_ng_n(x) + o(g_n)$, то это асимптотическое разложение f по шкале (g_n)

Теорема 6. *О единственности асимптотического разложения*
$f, g_n : D \subset X \to \mathbb{R} \quad x_0$ *— предельная точка* D
$\forall n \;\; g_{n+1} = o(g_n), x \to x_0$
$\exists U(x_0) \;\; \forall x \in \dot{U}(x_0) \cap D \;\; \forall i \;\; g_i(x) \neq 0$
Если $f(x) = c_0g_0(x) + \ldots + c_ng_n(x) + o(g_n(x))$
$f(x) = d_0g_0(x) + \ldots + d_mg_m(x) + o(g_m(x))$
$]n \leq m$
Тогда $\forall i \;\; c_i = d_i$

Proof. $k := min\{i : c_i \neq d_i\}$

$$f(x) = c_0g_0 + \ldots + c_{k-1}g_{k-1} + c_kg_k + o(g_k)$$

$$f(x) = c_0g_0 + \ldots + c_{k-1}g_{k-1} + d_kg_k + o(g_k)$$

$$0 = (c_k - d_k)g_k + o(g_k)$$

$$d_k - c_k = \frac{o(g_k)}{g_k(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

□

Пример. Пусть $f(x) = Ax + B + o(1), x \to +\infty$
Прямая $y = Ax + B$ — наклонная асимптота к графику f при $x \to +\infty$