

# 1 Определения

## 1.1 Упорядоченная пара

Для некоторого множества  $X$  и  $I$  - множество “индексов”, тогда  $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$  - **семейство элементов**  $X$ . ( $\forall \alpha \in I \ x_\alpha \in X$ )

**Упорядоченная пара** — семейство из двух элементов, построенная при  $I = \{1, 2\}$ . Обозначается  $(a, b)$ .

Кроме того,

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c, b = d$$

## 1.2 Декартово произведение

**Декартово произведение** двух множеств — множество всех упорядоченных пар элементов этих множеств.  $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$

Кроме того, декартово произведение можно обобщить для произвольного числа множеств.

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$$

## 1.3 Аксиомы вещественных чисел

### 1.3.1 Аксиомы поля

В множестве  $\mathbb{R}$  определены две операции, называемые сложением и умножением, действующие из  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$  ( $+, \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ), удовлетворяющие следующим свойствам:

**Аксиомы сложения** (здесь и далее  $\forall a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$ ):

1.  $a + b = b + a$  — коммутативность
2.  $(a + b) + c = a + (b + c)$  — ассоциативность
3.  $\exists 0 : 0 + a = a$
4.  $\exists a' : a + a' = 0$

**Аксиомы умножения:**

1.  $ab = ba$  — коммутативность
2.  $(ab)c = a(bc)$  — ассоциативность
3.  $\exists 1 \neq 0 : \forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a$
4.  $\forall a \neq 0 : \exists \tilde{a} : a \cdot \tilde{a} = 1$

**Аксиома комбинации сложения и умножения:**

1.  $(a + b)c = ac + bc$  — дистрибутивность

**Поле** — множество, в котором определены операции  $+, \cdot$ , удовлетворяющие группе аксиом

I. Например,  $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{F}_3$

### 1.3.2 Аксиомы порядка

1.  $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y$  или  $y \leq x$
2.  $x \leq y; y \leq x \Rightarrow x = y$
3.  $x \leq y; y \leq z \Rightarrow x \leq z$  — транзитивность
4.  $x \leq y \Rightarrow \forall z \in \mathbb{R} : x + z \leq y + z$
5.  $0 \leq x; 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy$

**Упорядоченное поле** — множество, для которого выполняются аксиомы групп I и II.

$\mathbb{F}_3, \mathbb{C}$  — не упорядоченные поля

$\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathcal{R}$  — упорядоченные поля

## 1.4 Аксиома Кантора, аксиома Архимеда

### 1.4.1 Аксиома Архимеда

$$\forall x, y > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : nx > y$$

Следствие: существуют сколько угодно большие натуральные числа:

$$\forall y \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : n > y$$

**Архимедовы поля** — упорядоченные поля, в которых выполняется Аксиома Архимеда.

$\mathcal{R}$  — не архимедово поле

$\mathbb{R}, \mathbb{Q}$  — архимедовы поля

### 1.4.2 Аксиома Кантора

Для последовательности вложенных отрезков  $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$  ( $\forall n \in \mathbb{N} a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ )

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$$

$\mathbb{Q}$  не удовлетворяет этой аксиоме, в отличие от  $\mathbb{R}$ .

## 1.5 Пополненное множество вещественных чисел, операции и порядок в нем

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  — пополненное множество вещественных чисел.

Свойства ( $\forall x \in \mathbb{R}$ ):

- $-\infty < +\infty$
- $\pm\infty \cdot \pm\infty = +\infty$
- $\pm\infty \cdot \mp\infty = -\infty$
- $-\infty < x < +\infty$
- $x \pm \infty = \pm\infty$

- $\pm\infty \pm \infty = \pm\infty$
- $\pm\infty \mp \infty$  – не определено

Для  $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$

- $x \cdot \pm\infty = \pm\infty$

## 1.6 Максимальный элемент множества

$M \in A$  называется **максимальным элементом** множества  $A$ , если  $\forall a \in A \quad a \leq M$

## 1.7 Последовательность

$x : \mathbb{N} \rightarrow Y$  – **последовательность**

## 1.8 Образ и прообраз множества при отображении

Для  $A \subset X, f : X \rightarrow Y$  **образ** – множество  $\{f(x), x \in A\} \subset Y$  – обозначается  $f(A)$

Для  $B \subset Y$  **прообраз** –  $\{x \in X : f(x) \in B\}$  – обозначается  $f^{-1}(B)$

## 1.9 Инъекция, сюръекция, биекция

**Сюръекция** – такое отображение  $f : X \rightarrow Y$ , что  $f(X) = Y$ , т.е.  $\forall y \in Y \quad f(x) = y$  имеет решение относительно  $x$ .

**Инъекция** – такое отображение  $f : X \rightarrow Y$ , что  $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \quad f(x_1) \neq f(x_2)$ , т.е.  $\forall y \in Y \quad f(x) = y$  имеет не более одного решения относительно  $x$ .

**Биекция** – отображение, являющееся одновременно сюръекцией и инъекцией, т.е.  $\forall y \in Y \quad f(x) = y$  имеет ровно одно решение относительно  $x$ .

## 1.10 Векторнозначная функция, ее координатные функции

Если  $F : X \rightarrow \mathbb{R}^m; x \mapsto F(x) = (F_1(x), \dots, F_m(x))$ , то  $F$  – **векторнозначная функция** (значения функции – вектора)

$F_1(x) \dots F_m(x)$  – координатные функции отображения  $F$

## 1.11 График отображения

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$

## 1.12 Композиция отображений

$f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ , тогда **композиция**  $f$  и  $g$  (обозначается  $g \circ f$ ) – такое отображение, что  $g \circ f : X \rightarrow Z, x \mapsto g(f(x))$ .

Также возможно определение, которое допускает  $g : Y_1 \rightarrow Z, Y_1 \supset Y$

## 1.13 Сужение и продолжение отображений

Для  $g : X \rightarrow Y \quad f$  – **сужение**  $g$  на множество  $A$ , если  $f : A \rightarrow Y, A \subset X$ .

$g$  называется **продолжением**  $f$ .

### 1.14 Предел последовательности (эпсилон-дельта определение)

Если для  $(x_n), a \in \mathbb{R}$  выполняется  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N |x_n - a| < \varepsilon$ , то  $a$  — предел последовательности  $(x_n)$ , обозначается  $x_n \rightarrow a$  или  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

### 1.15 Окрестность точки, проколота окрестность

Окрестность точки  $a = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$ , обозначается  $U_\varepsilon(a)$

Проколота окрестность точки  $a = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ , обозначается  $\dot{U}_\varepsilon(a)$

### 1.16 Предел последовательности (определение на языке окрестностей)

$$\forall U(a) \exists N \forall n > N x_n \in U(a)$$

### 1.17 Метрика, метрическое пространство, подпространство

На множестве  $X$  отображение  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  называется метрикой, если выполняются свойства 1-3:

1.  $\forall x, y \rho(x, y) \geq 0; \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2.  $\forall x, y \rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. Неравенство треугольника:  $\forall x, y, z \in X \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

Метрическое пространство — упорядоченная пара  $(X, \rho)$ , где  $X$  — множество,  $\rho$  — метрика на  $X$ .

Подпространством метрического пространства  $(X, \rho)$  называется  $(A, \rho|_{A \times A})$ , если  $A \subset X$

### 1.18 Шар, замкнутый шар, окрестность точки в метрическом пространстве

Шар (открытый шар)  $B(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) < r\}$

Замкнутый шар  $B(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) \leq r\}$

Окрестность точки  $a$  в метрическом пространстве:  $B(a, \varepsilon) \Leftrightarrow U(a)$ .

### 1.19 Линейное пространство

Если  $K$  — поле ( $K = \mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ ),  $X$  — множество, то  $X$  называется линейным пространством над полем  $K$  (и тогда  $K$  называется полем скаляр), если определены следующие две операции:

1.  $+: X \times X \rightarrow X$  — сложение векторов
2.  $\cdot: K \times X \rightarrow X$  — умножение векторов на скаляры

Для этих операций выполняются соответствующие аксиомы (здесь  $A, B, C \in X; a, b \in K$ ):

#### 1.19.1 Аксиомы сложения векторов

1.  $A + B = B + A$
2.  $A + (B + C) = (A + B) + C$
3.  $\exists 0 \in X : A + 0 = A$
4.  $\exists -A \in X : A + (-A) = 0$  — обратный элемент

### 1.19.2 Аксиомы умножения векторов на скаляры

1.  $(A + B) \cdot a = A \cdot a + B \cdot a$
2.  $A \cdot (a + b) = A \cdot a + A \cdot b$
3.  $(ab) \cdot A = a(b \cdot A)$
4.  $\exists 1 \in K : 1 \cdot A = A$

### 1.20 Норма, нормированное пространство

**Норма** - отображение  $X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$ , если  $X$  - линейное пространство (над  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ ) и выполняется следующее:

1.  $\forall x \quad \|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2.  $\forall x \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
3. Неравенство треугольника:  $\forall x, y \in X \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

**Нормированное пространство** — упорядоченная пара  $(X, \|\cdot\|)$ , где  $\|\cdot\|$  - норма

### 1.21 Ограниченное множество в метрическом пространстве

$A \subset X$  — **ограничено**, если  $\exists x_0 \in X \quad \exists R > 0 \quad A \subset B(x_0, R)$ , т.е. если  $A$  содержится в некотором шаре в  $X$ .

### 1.22 Внутренняя точка множества, открытое множество, внутренность

$a$  — **внутренняя точка** множества  $D$ , если  $\exists U(a) : U(a) \subset D$ , т.е.  $\exists r > 0 : B(a, r) \subset D$   
 $D$  — **открытое множество**, если  $\forall a \in D : a$  — внутренняя точка  $D$

**Внутренностью** множества  $D$  называется  $Int(D) = \{x \in D : x \text{ — внутр. точка } D\}$

### 1.23 Предельная точка множества

$a$  — **предельная точка** множества  $D$ , если

$$\forall \dot{U}(a) \quad \dot{U}(a) \cap D \neq \emptyset$$

### 1.24 Замкнутое множество, замыкание, граница

$D$  — **замкнутое множество**, если оно содержит все свои предельные точки.

$\overline{D} = D \cup (\text{множество предельных точек } D)$  — **замыкание**.

**Граница** множества — множество его граничных точек. Обозначается  $\partial D$

### 1.25 Изолированная точка, граничная точка

$a$  — **изолированная точка**  $D$ , если  $a \in D$  и  $a$  — не предельная, то есть:

$$\exists U(a) \quad U(a) \cap D = \{a\}$$

$a$  — **граничная точка**  $D$ , если  $\forall U(a) \quad U(a)$  содержит точки как из  $D$ , так и из  $D^c$

### 1.26 Описание внутренности множества

1.  $Int D$  - откр. множество
2.  $Int D = \bigcup_{\substack{D \supset G \\ G - \text{открыт}}} G$  — максимальное открытое множество, содержащееся в  $D$
3.  $D$  — откр. в  $X \Leftrightarrow D = Int D$

### 1.27 Описание замыкания множества в терминах пересечений

$\overline{D} = \bigcap_{\substack{D \subset F \\ F - \text{замкн.}}} F$  — мин. (по вкл.) замкн. множество, содержащее  $D$ .

### 1.28 Верхняя, нижняя границы; супремум, инфимум

$E \subset \mathbb{R}$ .  $E$  — **огр. сверху**, если  $\exists M \in \mathbb{R} \forall x \in E \ x \leq M$ . Кроме того, всякие такие  $M$  называются **верхними границами**  $E$ .

Аналогично ограничение снизу.

$E \subset \mathbb{R}, E \neq \emptyset$ .

Для  $E$  — **огр. сверху** **супремум** ( $\sup E$ ) — наименьшая из верхних границ  $E$ .

Для  $E$  — **огр. снизу** **инфимум** ( $\inf E$ ) — наибольшая из нижних границ  $E$ .

### 1.29 Техническое описание супремума

Техническое описание супремума:  $b = \sup E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E \ x \leq b \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in E \ b - \varepsilon < x \end{cases}$

### 1.30 Последовательность, стремящаяся к бесконечности

В  $\mathbb{R}$ :

1.  $x_n \rightarrow +\infty \iff \forall E > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ x_n > E$
2.  $x_n \rightarrow -\infty \iff \forall E \ \exists N \ \forall n > N \ x_n < E$
3.  $x_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow |x_n| \rightarrow +\infty$

### 1.31 Компактное множество

$K \subset X$  — **компактное**, если для любого открытого покрытия этого множества  $\exists$  конечное подпокрытие  $\Leftrightarrow \exists \alpha_1 \dots \alpha_n \ K \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$

### 1.32 Секвенциальная компактность

**Секвенциально компактным** называется множество  $A \subset X : \forall$  посл.  $(x_n)$  точек  $A$   $\exists$  подпосл.  $x_{n_k}$ , которая сходится к точке из  $A$

### 1.33 Определения предела отображения (3 шт)

$(X, \rho^x), (Y, \rho^y) \quad D \subset X \quad f : D \rightarrow Y$

$a \in X, a$  — пред. точка множества  $D, A \in Y$

Тогда  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  — **предел отображения**, если:

1. По Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : 0 < \rho^X(a, x) < \delta \quad \rho^Y(f(x), A) < \varepsilon$$

2. На языке окрестностей:

$$\forall U(A) \quad \exists V(a) \quad \forall x \in \dot{V}(a) \quad f(x) \in U(A)$$

3. По Гейне:  $\forall (x_n)$  — посл. в  $X$ :

(a)  $x_n \rightarrow a$

(b)  $x_n \in D$

(c)  $x_n \neq a$

$$f(x_n) \rightarrow A$$

### 1.34 Определения пределов в $\overline{\mathbb{R}}$

Для  $Y = \overline{\mathbb{R}}, -\infty < x < +\infty$ :

1.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty : \quad \forall E \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X : 0 < |x - a| < \delta \quad f(x) > E$

2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty : \quad \forall E \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X : 0 < |x - a| < \delta \quad f(x) < E$

3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \quad \forall x \in X : x > \delta \quad |f(x) - c| < \varepsilon$

4.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \quad \forall x \in X : x < -\delta \quad |f(x) - c| < \varepsilon$

### 1.35 Предел по множеству

$f : D \subset X \rightarrow Y, D_1 \subset D, x_0$  — пред. точка  $D_1$

Тогда **предел по множеству**  $D_1$  в точке  $x_0$  — это  $\lim_{x \rightarrow x_0} f|_{D_1}(x)$

### 1.36 Односторонние пределы

В  $\mathbb{R}$  одностор. = { левостор., правостор. }

**Левосторонний предел**  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = L$  — это  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f|_{D \cap (-\infty, x_0)}$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap D \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Аналогично правосторонний.

### 1.37 Непрерывное отображение

$f : D \subset X \rightarrow Y \quad x_0 \in D$

$f$  — непрерывное в точке  $x_0$ , если:

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , либо  $x_0$  — изолированная точка  $D$
2.  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \quad \rho(x, x_0) < \delta \quad \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$
3.  $\forall U(f(x_0)) \quad \exists V(x_0) \quad \forall x \in V(x_0) \cap D \quad f(x) \in U(f(x_0))$
4. По Гейне  $\forall (x_n) : x_n \rightarrow x_0; x_n \in D \quad f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x_0)$

### 1.38 Непрерывность слева

$f$  — непр. слева в  $x_0$ , если  $f|_{(-\infty, x_0] \cap D}$  — непрерывно в  $x_0$

### 1.39 Разрыв, разрывы первого и второго рода

Если  $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , либо  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$  — точка разрыва.

Пусть  $\exists f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$  и не все 3 числа равны:  $f(x_0 - 0), f(x_0), f(x_0 + 0)$ . Это **разрыв I рода (скачок)**.

Остальные точки разрыва — **разрыв II рода**.

*Примечание.*

$$f(x_0 - 0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$$

### 1.40 О большое, о маленькое

$f, g : D \subset X \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0$  — пр. точка  $D$

Если  $\exists V(x_0) \quad \exists \varphi : V(x_0) \cap D \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = g(x)\varphi(x)$  при  $x \in V(x_0) \cap D$

1.  $\varphi$  — ограничена. Тогда говорят  $f = O(g)$  при  $x \rightarrow x_0$   
“ $f$  ограничена по сравнению с  $g$  при  $x \rightarrow x_0$ ”
2.  $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$   $f$  — беск. малая по отношению к  $g$  при  $x \rightarrow x_0$ ,  $f = o(g)$
3.  $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1$   $f$  и  $g$  экв. при  $x \rightarrow x_0$   $f \sim_{x \rightarrow x_0} g$

*Примечание.* О большое и о малое — разные вопросы в табличке.

### 1.41 Эквивалентные функции, таблица эквивалентных

Эквивалентные функции даны выше.

Таблица эквивалентных для  $x \rightarrow 0$ :



$$\begin{aligned}
\sin x &\sim x \\
\operatorname{sh} x &\sim x \\
\operatorname{tg} x &\sim x \\
\operatorname{arctg} x &\sim x \\
1 - \cos x &\sim \frac{x^2}{2} \\
\operatorname{ch} x - 1 &\sim \frac{x^2}{2} \\
e^x - 1 &\sim x \\
\ln(1+x) &\sim x \\
(1+x)^\alpha - 1 &\sim \alpha x \\
a^x - 1 &\sim x \ln a
\end{aligned}$$

### 1.42 Асимптотически равные (сравнимые) функции

В условиях прошлых определений  $f = O(g), g = O(f) \Leftrightarrow f \asymp g$  — асимптотически сравнимы на множестве  $D$ , “величины одного порядка”.

### 1.43 Асимптотическое разложение

$g_n : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$   $x_0$  — пред. точка  $D$

$\forall n \quad g_{n+1}(x) = o(g_n), x \rightarrow x_0$

*Пример.*  $g_n(x) = x^n, n = 0, 1, 2, \dots \quad x \rightarrow 0 \quad g_{n+1} = x g_n, x \rightarrow 0$

$(g_n)$  называется шкала асимптотического разложения.

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$

Если  $f(x) = c_0 g_0(x) + c_1 g_1(x) + \dots + c_n g_n(x) + o(g_n)$ , то это асимптотическое разложение  $f$  по шкале  $(g_n)$

### 1.44 Наклонная асимптота графика

Пусть  $f(x) = Ax + B + o(1), x \rightarrow +\infty$

Прямая  $y = Ax + B$  — наклонная асимптота к графику  $f$  при  $x \rightarrow +\infty$

### 1.45 Путь в метрическом пространстве

$Y$  — метр. пр-во

$\gamma : [a, b] \rightarrow Y$  — непр. на  $[a, b]$

= путь в пространстве  $Y$

### 1.46 Линейно связное множество

$E \subset Y$

$E$  — линейно связное, если  $\forall A, B \in E \exists$  путь  $\gamma : [a, b] \rightarrow E$  такой, что:

- $\gamma(a) = A$
- $\gamma(b) = B$

## 1.47 Функция, дифференцируемая в точке и производная

$$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in \langle a, b \rangle$$

$f$  — дифференцируема. в точке  $x_0$ , если  $\exists A \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + o(x - x_0), x \rightarrow x_0$$

При этом  $A$  называется **производной**  $f$  в точке  $x_0$

*Примечание.* Это два разных билета.

## 2 Теоремы

### 2.1 Законы де Моргана

Пусть  $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$  — семейство множеств,  $Y$  — множество. Тогда:

$$1. Y \setminus \left( \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha) \quad ①$$

$$2. Y \setminus \left( \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha) \quad ②$$

Вариант 2:

$$1. Y \cap \left( \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in A} (Y \cap X_\alpha)$$

$$2. Y \cup \left( \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in A} (Y \cup X_\alpha)$$

*Proof.* Чтобы доказать, что  $A = B$ , можно доказать, что  $A \subset B, B \subset A$ . Воспользуемся этим методом, чтобы доказать ①

$\triangleleft x \in$  левая часть ①

$$x \in Y; x \notin \bigcup X_\alpha$$

$$x \in Y; x \notin \{y : \exists \alpha : y \in X_\alpha\}$$

$$x \in Y; \forall \alpha \in A : x \notin X_\alpha$$

$\triangleleft x \in$  правая часть ①

$$\forall \alpha : x \notin Y \setminus X_\alpha$$

Из чего левая и правая части эквивалентны. Аналогично доказывается ② □

### 2.2 Неравенство Коши-Буняковского, евклидова норма в $\mathbb{R}^m$

#### 2.2.1 Неравенство Коши-Буняковского

$$\left( \sum a_i b_i \right)^2 \leq \left( \sum a_i^2 \right) \left( \sum b_k^2 \right)$$

### 2.2.2 Евклидова норма в $\mathbb{R}^m$

$$||x|| = \sqrt{\sum_i^m x_i^2}$$

Неравенство Коши-Буняковского следует из тождества Лагранжа. Докажем его:

*Proof.*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{(i,k) \in A \times B} (a_i b_k - a_k b_i)^2 = \\ & \frac{1}{2} \sum_{(i,k) \in A \times B} (a_i^2 b_k^2 + a_k^2 b_i^2 - 2a_i a_k b_i b_k) = \\ & \frac{1}{2} \sum_{(i,k) \in A \times B} a_i^2 b_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{(i,k) \in A \times B} a_k^2 b_i^2 - \sum_{(i,k) \in A \times B} a_i b_i a_k b_k = \\ & \frac{1}{2} \sum_{(i,k) \in A \times B} a_i^2 \sum_{(i,k) \in A \times B} b_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{(i,k) \in A \times B} a_i^2 \sum_{(i,k) \in A \times B} b_k^2 - \\ & \sum_{(i,k) \in A \times B} a_i b_i \sum_{(i,k) \in A \times B} a_k b_k = \\ & \sum_{(i,k) \in A \times B} a_i^2 \sum_{(i,k) \in A \times B} b_k^2 - \sum_{(i,k) \in A \times B} (a_i b_i)^2 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sum_{(i,k) \in A \times B} (a_i b_i)^2 = \sum_{(i,k) \in A \times B} a_i^2 \sum_{(i,k) \in A \times B} b_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{(i,k) \in A \times B} (a_i b_k - a_k b_i)^2 \geq \sum_{(i,k) \in A \times B} a_i^2 \sum_{(i,k) \in A \times B} b_k^2$$

□

## 2.3 Аксиома Архимеда. Плотность множества рациональных чисел в $\mathbb{R}$

### 2.3.1 Аксиома Архимеда

$$\forall x, y > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : nx > y$$

### 2.3.2 Плотность множества $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$

$$\mathbb{Q} \text{ плотно в } \mathbb{R} \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b \quad (a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$$

В любом интервале в  $\mathbb{R}$  содержится число  $\in \mathbb{Q}$ .

*Proof.*  $\mathbb{Q}$  плотно в  $\mathbb{R}$ , т.е.  $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b \quad (a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$

Возьмем  $n \in \mathbb{N} : n > \frac{1}{b-a}$ . Тогда  $\frac{1}{n} < b - a$

$$q := \frac{[na] + 1}{n} \in \mathbb{Q}$$

$$q \leq \frac{na+1}{n} = a + \frac{1}{n} < a + (b-a) = b \Rightarrow q < b$$

$$q > \frac{na}{n} = a \Rightarrow q > a$$

□

## 2.4 Неравенство Бернулли

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad x \geq -1, n \in \mathbb{N}$$

$$(1+x)^n \geq 1+nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 \quad x > 0, n \in \mathbb{N} \text{ — более сложная версия}$$

*Proof.* База:  $n = 1 : (1+x)^1 \geq 1+x$

Переход: Дано неравенство  $(1+x)^n \geq 1+nx$ , оно верно при каком-то  $n$ . Докажем, что  $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$$

□

## 2.5 Единственность предела и ограниченность сходящейся последовательности

$(X, \rho)$  — метрическое пр-во,  $a, b \in X$ ,  $(x_n)$  — послед. в  $X$ ,  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ ,  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b$ , тогда  $a = b$

*Proof.*

Докажем от противного — пусть  $a \neq b$ . Возьмем  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\rho(a, b)$

$$\exists N(\varepsilon) \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad \rho(x_n, a) < \varepsilon$$

$$\exists K(\varepsilon) \quad \forall n > K(\varepsilon) \quad \rho(x_n, b) < \varepsilon$$

При  $n > \max(N(\varepsilon), K(\varepsilon)) \quad \rho(a, b) \leq \rho(a, x_n) + \rho(b, x_n) < 2\varepsilon < \rho(a, b)$  — противоречие

□

## 2.6 Теорема о предельном переходе в неравенствах для последовательностей и для функций

### 2.6.1 Для последовательностей

Если  $(x_n), (y_n)$  — вещественные последовательности  $x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b, \exists N \quad \forall n > N \quad x_n \leq y_n$ , тогда  $a \leq b$ .

### 2.6.2 Для функций

Если  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a$  — предельная точка  $X$ , и  $\forall x \in X \quad f(x) \leq g(x)$ . Тогда  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

*Proof.*

Докажем от противного. Пусть  $a > b, 0 < \varepsilon < \frac{a-b}{2}$ .

$$\exists N(\varepsilon) \quad \forall n > N \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

$$\exists K(\varepsilon) \quad \forall n > K \quad b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon$$

При  $n > \max(N, K) \quad y_n < b + \varepsilon < a - \varepsilon < x_n$  — противоречие

□

*Proof.* По Гейне.

$\forall (x_n) \rightarrow a, x_n \in X, x_n \neq a$ :

$$f(x_n) \rightarrow A, g(x_n) \rightarrow B, \forall x \ f(x) \leq g(x) \Rightarrow f(x_n) \leq g(x_n) \Rightarrow A \leq B$$

□

## 2.7 Теорема о двух городских

Если  $(x_n), (y_n), (z_n)$  - вещ. посл.,  $\forall n \ x_n \leq y_n \leq z_n, \lim x_n = \lim z_n = a$ , тогда  $\exists \lim y_n = a$

*Proof.*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists K \ \forall n > K \ a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 = \max(N, K) \ \forall n > N_0 \ a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon$$

По определению  $\lim y_n = a$

□

## 2.8 Бесконечно малая последовательность

Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную — бесконечная последовательность, т.е.  $(x_n)$  — беск. малая,  $(y_n)$  — ограничена  $\Rightarrow x_n y_n$  — беск. малая

*Proof.* Возьмём  $K$  такое, что  $\forall n \ |y_n| \leq K$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ |x_n| \leq \frac{\varepsilon}{K}$$

$$|x_n y_n| \leq \frac{\varepsilon}{K} K = \varepsilon \Rightarrow x_n y_n \rightarrow 0$$

□