

Конспект по дискретной математике

October 1, 2019

1 Преобразование Мёбиуса

$$\begin{aligned}
 f(x_1 \dots x_n) &= \bigoplus_{\alpha_1 \dots \alpha_n \in A_f} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \\
 x_i^1 &= x_i, x_i^0 = 1 \\
 f(\dots) = 0 &\Leftrightarrow \exists x_i : x_i = 0, \alpha_i = 1 \\
 f(\dots) = 1 &\Leftrightarrow \forall i : x_i = 1 \text{ or } \alpha_i = 0 \Leftrightarrow \bar{x} \succeq \bar{\alpha} \\
 a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} &= \begin{cases} 1, & \alpha_1 \dots \alpha_n \in A_f \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Определение. Доминирование - частичный порядок на \mathbb{B}^n , такой что $\forall i x_i \geq y_i$. Обозначается $x_1 \dots x_n \succeq y_1 \dots y_n$.

$$\begin{aligned}
 f(x_1 \dots x_n) &= \bigoplus_{\alpha_1 \dots \alpha_n} a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} = \bigoplus_{\alpha_1 \dots \alpha_n : X \succeq \alpha} a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \\
 a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} &\mapsto f(\bar{\alpha}) \\
 f(x_1 \dots x_n) &\mapsto a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}
 \end{aligned}$$

Теорема 1. Преобразование Мёбиуса: $a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \bigoplus_{\alpha_1 \dots \alpha_n : \alpha \succeq X} f(x_1 \dots x_n) - \mathbb{B}^{2^n} \rightarrow \mathbb{B}^{2^n}$

	xy	$x \vee y$	
	00	0	$\alpha_{00} = 0$
Пример $(x \vee y)$:	01	1	$\alpha_{01} = 1$
	10	1	$\alpha_{10} = 1$
	11	0	$\alpha_{11} = 1$

Proof. Индукция по числу 1 в $\alpha_1 \dots \alpha_n$.

База: $\alpha_{0\dots 0} = f(0\dots 0)$

Переход: $\bigoplus_{x: \alpha \succeq x} f(x_1 \dots x_n) = \bigoplus_{x: \alpha \succeq x} \bigoplus_{\beta: x \succeq \beta} a_{\beta_1 \dots \beta_n} = a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \bigoplus_{\substack{x, \beta \\ \alpha \succeq x \succeq \beta \\ \text{неверно: } \alpha = x = \beta}} a_{\beta_1 \dots \beta_n} = a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$

□

Определение. Инволюция — преобразование, тождественное себе обратному.

Преобразование Мёбиуса является инволюцией.

Можно заметить, что при записи через некий базис функций от множества переменных, формулы получаются длинными. Поэтому существуют другие формы записи — схемы из функциональных элементов и линейные программы.

2 Схемы из функциональных элементов

Записывается в форме ациклического ориентированного графа — direct acyclic graph — dag.

Теорема 2. Если G - ациклический ориентированный граф, тогда его вершинам можно присвоить номера так, что $uv \in E \Rightarrow \#u < \#v$. Это называется топологическая сортировка

Лемма 1. Ациклический граф содержит вершину, из которой не выходят ребра.

Определение. Схема из функциональных элементов над базисом F — ациклический ориентированный граф, у которого есть n выделенных вершин, в которые ничего не входит, помеченные “вход” и есть одна вершина, из которой ничего не выходит, помеченная “выход”. Остальные вершины называются внутренними, они — функции $f \in F$, в которые входят k ребер, каждое из которых помечено числом от 1 до k .

Чтобы построить таблицу истинности схемы из функциональных элементов, проводится следующий порядок действий:

1. Поместим во входные узлы значения аргументов схемы.
2. В остальные узлы в порядке топологической сортировки помещаются значения, равные значению функции, соответствующей этому узлу, если принять значения из входных узлов как аргументы данной функции.
3. Значение в выходном узле будет значением схемы.

Самый правый узел - выход.

Глубина: $d(u) = \max_{V: V \rightarrow u} (d(u) + 1)$

Можно заметить, что с помощью схемы можно использовать промежуточные значения несколько раз, этим эта форма записи лучше формулы.

Определение. Сложность функции f в базисе B — минимальный размер схемы, которая вычисляет эту функцию, обозначается $size_B(f) = \min\{size(C) | C \text{ вычисл. } f, C \in B\}$.

$$\begin{aligned} size_{\vee, \wedge, \neg}(\oplus_2) &\leq 5 \\ size_{\wedge, \oplus, 1}(\oplus_2) &= 1 \end{aligned}$$

Теорема 3. Пусть B_1 и B_2 - базисы. Тогда $\exists c > 0$, которая зависит от этих двух базисов и больше не зависит ни от чего, что $\forall f : size_{B_1}(f) \leq c \cdot size_{B_2}(f)$

Таким образом, выбор базиса для сложности меняет только константу, т.е. асимптотически сложность функции одинакова во всех базисах.

Лемма 2. Если B - базис, то $\forall f$ можно задать схемой из функциональных элементов над B .

Proof. Построим схему через дерево обхода - поставим стрелки вверх и объединим все входы. □

Proof. Построим для f оптимальную схему в B_2 . $B_2 = \{g_1, g_2 \dots g_t\}$. Рассмотрим схемы для функций из B_2 над базисом B_1 . Для каждой этой функции построим такую схему C_i . $C := \max size(C_i)$. Вместо каждой функции подставим соответствующую схему C . □

Proof. Глубиной функции f в базисе B называется минимальная глубина схемы, которая вычисляет f , обозначается $depth_B(f) = \min\{depth(C) | C \text{ вычисл. } f, C \in B\}$. □

U_2 - множество всех функций от 2 аргументов. $T_2 = U_2 \setminus \{\oplus, =\}$