Определение предела дает функцию $N(\varepsilon)$, хорошо приспособленную для изучения неравенства $\rho(x_n, a) < \varepsilon$ для $n \in (N; +\infty)$. Кроме того, для последовательности $r_n = \rho(x_n, a) \quad |r_n| < \varepsilon$.

Теорема 1. ***О единственности предела.*** *(X, ρ) — метрическое пр-во, $a, b \in X$, (x_n) — послед. в X, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$, тогда $a = b$*

Доказательство.

$$\text{Докажем от противного — пусть } a \neq b. \text{ Возьмем } 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\rho(a, b)$$

$$\exists N(\varepsilon)\ \ \forall n > N(\varepsilon)\ \ \rho(x_n, a) < \varepsilon$$

$$\exists K(\varepsilon)\ \ \forall n > K(\varepsilon)\ \ \rho(x_n, b) < \varepsilon$$

$$\text{При } n > \max(N(\varepsilon), K(\varepsilon)) \quad \rho(a, b) \leq \rho(a, x_n) + \rho(b, x_n) < 2\varepsilon < \rho(a, b) \text{ — противоречие}$$

□

Определение. $A \subset X$ — **ограничено**, если $\exists x_0 \in X\ \ \exists R > 0\ \ A \subset B(x_0, R)$

Пусть $b \in X$. A — огр. $\Leftrightarrow \exists r > 0\ \ A \subset B(b, r)$
$A \subset B(x_0, R) \Rightarrow A \subset B(b, \rho(x_0, b) \pm R)$

Теорема 2. *Если (x, ρ) — метрическое пр-во, (x_n) — послед. в X, x_n сходится,* ***тогда*** *x_n - ограничен.*

Доказательство.

$$\text{Пусть } a = \lim_{n\to+\infty} x_n$$

$$\forall U(a)\ \ \exists N\ \ \forall n > N\ \ x_n \in U(a)$$

$$U(a) = \rho(a, \varepsilon)$$

$$r := max(\varepsilon, \rho(x_1, a), \rho(x_2, a) \ldots \rho(x_N, a)) + 1$$

$$\text{тогда } \forall n \in \mathbb{N}\ \ x_n \in B(a, r)$$

□

Порядковые свойства предела

Теорема 3. ***О предельном переходе в неравенствах для*** $\mathbb{R}$. *Если $(x_n), (y_n)$ — вещественные последовательности $x_n \to a, y_n \to b$, $\forall n\ x_n \leq y_n$,* ***тогда*** *$a \leq b$.*

Доказательство.

$$\text{Докажем от противного. Пусть } a > b, 0 < \varepsilon < \frac{a - b}{2}.$$

$$\exists N(\varepsilon)\ \ \forall n > N\ \ a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

$$\exists K(\varepsilon)\ \ \forall n > K\ \ b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon$$

$$\text{При } n > \max(N, K)\ \ y_n < b + \varepsilon < a - \varepsilon < x_n \text{ — противоречие}$$

□

Примечание. Если вместо "$\forall n \;\; x_n \leq y_n$"потребовать: "$\exists M \;\; \forall n > M \;\; x_n \leq y_n$ то утв. попрежнему верно

Примечание. $x_n = -\frac{1}{n} \;\; y_n = \frac{1}{n}$. тогда $x_n \to 0, y_n \to 0$. $x_n < y_n$, но пределы совпадают. То есть даже если $x_n < y_n$ строго, $a \leq b$ — нестрого.

Следствие. (x_n) — вещественная последовательность, $a, b \in \mathbb{R}$

1. $\forall n \;\; x_n \leq a \Rightarrow \lim x_n \leq a$
2. $\forall n \;\; x_n \geq b \Rightarrow \lim x_n \geq b$
3. $\forall n \;\; x_n \in [a, b] \Rightarrow \lim x_n \in [a, b]$

Теорема 4. ***О двух городовых*** *(о сжатой последовательности). Если $(x_n), (y_n), (z_n)$ - вещ. посл., $\forall n \;\; x_n \leq y_n \leq z_n, \lim x_n = \lim z_n = a$,* ***тогда*** $\exists \lim y_n = a$

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n > N \;\; a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists K \;\; \forall n > K \;\; a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_0 = max(N, K) \;\; \forall n > N_0 \;\; a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon$$

$$\text{По определению } \lim y_n = a$$

□

Следствие. $(y_n), (z_n) \;\; \forall n \;\; |y_n| \leq z_n, \;\; \exists \lim z_n = 0,$ тогда $y_n \to 0$. Доказательство тривиально, т.к. y_n ограничено z_n и $-z_n$.

Определение. (x_n) — вещ. посл. называется **бесконечно малой**, если $x_n \to 0$

Теорема 5. *Если $(x_n), (y_n)$ — вещ. посл., x_n — беск.мал., y_n — огр.,* ***тогда*** *$x_n y_n$ — беск.мал.*

Доказательство.

$$\exists R \;\; \forall n \;\; |y_n| < R, \text{т.к.} y_n \text{— огр.}$$

$$|x_n y_n| \leq R|x_n|, R|x_n| \to 0 \Rightarrow y_n \to 0$$

□

Нормированные пространства

Определение. Если K — поле ($K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), X — множество, то X называется линейным пространством над полем K (и тогда K называется полем скаляр), если определены следующие две операции:

1. $+ : X \times X \to X$ — сложение векторов
2. $\cdot : K \times X \to X$ — умножение векторов на скаляры

Для этих операций выполняются соответствующие аксиомы *(здесь $A, B, C \in X; a, b \in \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$)*:

Аксиомы сложения векторов

1. $A + B = B + A$

2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $\exists \mathbf{0} \in X : A + \mathbf{0} = a$

Аксиомы умножения векторов на скаляры

1. $(A + B) \cdot a = A \cdot a + B \cdot a$
2. $A \cdot (a + b) = A \cdot a + A \cdot b$
3. $(ab) \cdot A = a(b \cdot A)$
4. $\exists \mathbf{1} \in X : \mathbf{1} \cdot a = a$

Ещё есть аксиома $\exists - A \in X : A + (-A) = 0$, но у нас её не было.

Определение. Норма - отображение $X \to \mathbb{R}, x \mapsto ||x||$, если X - линейное пространство (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) и выполняется следующее:

1. $\forall x \ \ ||x|| \geq 0, ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\forall x \in X \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \ \ ||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$
3. Неравенство треугольника: $\forall x, y \in X \ \ ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Определение. Полунорма - норма без свойства $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Определение. Нормированное пространство — $(X, || \cdot ||)$, где $||||$ - норма

Лемма 1. *О свойстве полунормы.*

1. $p(\sum\limits_{finite} \lambda_k x_k) \leq \sum \lambda_k p(x_k)$
2. $p(0) = 0$ - *тут* $0 \in X$
3. $p(-x) = p(x)$
4. $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$

Доказательство.
1. $p(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ...) \leq p(\lambda_1 x_1) + p(\lambda_2 x_2 + ...)$
2. тривиально
3. тривиально
4. $-p(x - y) \leq p(x) - p(y) \leq p(x - y)$
   $p(x) = p(y + (x - y)) \leq p(y) + p(x - y)$

$\square$

Примеры норм:

1. $X = \mathbb{R}^m \ \ ||x|| = \sqrt{\sum\limits_i^m x_i^2}$
   $X = \mathbb{C}^m \ \ ||x|| = \sqrt{\sum\limits_i^m |x_i|^2}$
2. $(\mathbb{R}^m, || \cdot ||_\infty) \ \ ||x||_\infty = max(|x_1|, |x_2|, ..., |x_m|)$

3. $(\mathbb{R}^m, ||\cdot||_1)$ $||x||_1 = \sum\limits_{i}^{m} |x_i|$

   (a) $p(x) = |x_1|$ — полунорма, но не норма

Примечание. Если $(X, ||\cdot||)$ — норм. пр-во, тогда $\rho(x,y) := ||x-y||$ — метрика, порожденная нормой. Не все метрики порождены нормами, например $\rho = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$.

Арифметические свойства предела

Теорема 6. ***Об арифметических свойствах предела в нормированном пространстве.***
Если $(X, ||\cdot||)$ — норм. пр-во, $(x_n), (y_n)$ — посл. в X, λ_n — посл. скаляров, и $x_n \to x_0, y_n \to y_0, \lambda_n \to \lambda_0$, ***тогда:***

1. $x_n \pm y_n \to x_0 \pm y_0$
2. $\lambda_n x_n \to \lambda_0 x_0$
3. $||x_n|| \to ||x_0||$

Доказательство.

1. $\forall \varepsilon \;\; \exists N_2 \;\; \forall n > N_1 \;\; ||x_n - x_0|| < \varepsilon$

   $\forall \varepsilon \;\; \exists N_2 \;\; \forall n > N_2 \;\; ||y_n - y_0|| < \varepsilon$

   $N := \max(N_1, N_2)$

   $\forall \varepsilon \;\; \forall n > N \;\; ||(x_n + y_n) - (x_0 + y_0)|| \le ||x_n - x_0|| + ||y_n - y_0|| \le 2\varepsilon$

2. $||\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0|| = ||\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0 + \lambda_0 x_n - \lambda_0 x_n|| = ||(\lambda_n - \lambda_0)x_n + (x_n - x_0)\lambda_0|| \le ||(\lambda_n - \lambda_0)x_n|| + ||(x_n - x_0)\lambda_0|| = ||x_n|||\lambda_n - \lambda_0| + ||x_n - x_0|||\lambda_0|$

   $|\lambda_n - \lambda_0|$ и $||x_n - x_0||$ — бесконечно малые, $||x_n||$ и $|\lambda_n|$ — ограниченные $\Rightarrow ||x_n|||\lambda_n - \lambda_0| + ||x_n - x_0|||\lambda_0|$ — бесконечно малая

3. Докажем, что $|||x_n|| - ||x_0||| \le ||x_n - x_0||$.

   $$||x_n|| = ||x_0 + (x_n - x_0)|| \le ||x_0|| + ||x_n - x_0|| \Rightarrow ||x_n|| - ||x_0|| \le ||x_n - x_0||$$

   Аналогично $||x_0|| - ||x_n|| \le ||x_n - x_0||$.

   Тогда $|||x_n|| - ||x_0||| \le ||x_n - x_0||$

□

Теорема 7. ***Об арифметических свойствах пределов в*** $\mathbb{R}$.
Для $(x_n), (y_n)$ — вещ.посл., $\forall n \;\; y_n \ne 0, y_0 \ne 0$:

4. $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x_0}{y_0}$

Доказательство взято из воздуха.

Доказательство. Докажем, что $\frac{1}{y_n} \to \frac{1}{y_0}$, если $\forall n \;\; y_n \ne 0, y_0 \ne 0$.

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_0}\right| = \left|\frac{y_0 - y_n}{y_n y_0}\right|$$

В числителе бесконечно малая последовательность, в знаменателе ограниченная $\Rightarrow$ дробь — бесконечно малая последовательность. □