Примечание. $\{x_i\}_{i=1}^k$ – ЛЗ $\Leftrightarrow$ $\{x_i\}_{i=1}^k$ обнуляет все базисные ПЛФ из Λ^K (C_n^k штук)

$$\lhd C = \begin{bmatrix} \xi_1^1 & \xi_2^1 & \dots & x_n^1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^n & \xi_2^n & \dots & x_n^n \end{bmatrix}$$

$$\det C = \det\{x_1 \dots x_n\} \triangleq {}^{1\dots n}F(x_1 \dots x_n) = \sum_{(i_1 \dots i_n)} (-1)^{[i_1 \dots i_n]} \xi_1^{i_1} \dots \xi_n^{i_n}$$

Определение. **Рангом** r матрицы $A_{m\times n}$ называется порядок её наибольшего отличного от нуля минора.

Примечание. $rank(A) \quad rg(A) \quad rang(A)$
$\exists L_{j_1\dots j_r}^{i_1\dots i_r} \neq 0$, но $\rceil\exists L_{j_1\dots j_{r+1}}^{i_1\dots i_{r+1}} \neq 0$

$$\lhd C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{n2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

1. $L_1^1 = C_1 \Rightarrow rgA \geq 1$
2. $L_1^1 = C_1C_{22} \neq 0 \Rightarrow rgA \geq 2$
3. $L_1^1 = C_1C_{22}C_{33} \neq 0 \Rightarrow rgA \geq 3$

   $\vdots$
4. $L_{1\dots r}^{1\dots r+1} = \prod\limits_{i=1}^{r} c_{ii} \neq 0 \Rightarrow rgA \geq r$
5. $L_{1\dots r}^{1\dots r+1} = 0 \Rightarrow rgA = r$

$\Rightarrow rgA \leq \min(m, n)$

Теорема 1. *О базисном миноре*

1. *Число ЛНЗ строк (столбцов) матрицы A равно её рангу*
2. *Любая строка (столбец) матрицы A может быть представлена в виде ЛК строк (столбцов), входящих в её минор наибольшего порядка, отличного от нуля (базисный минор)*

Доказательство. 1. Следует из критерия ЛНЗ

2. Строки (столбцы), входящие в базисный минор, образуют максимальный ЛНЗ поднабор всех строк (столбцов) матрицы A.

$\square$

Теорема 2. *Крамера*
$\vartriangleleft$ *СЛАУ:* $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\xi^j = b_i$, *такую что* $A = ||a^i_j||^n_{i,j=1} \quad \det A \neq 0$
Тогда:

1. *СЛАУ совместна и определена*
2. $\xi^j = \frac{\triangle_j}{\triangle}, \quad \triangle_j = (a_1 \dots a_{j-1}, b, a_{j+1} \dots a_n)$

Доказательство. 1. $\det A = \det\{a_1 \dots a_n\} \neq 0 \Rightarrow \{a_j\}^n_{j=1}$ — ЛНЗ $\Rightarrow$ базис $\mathbb{R}^n \ni b$

2. $\triangle_j = \det\{a_1 \dots a_{j-1}, b, a_{j+1} \dots a_n\} = \det\{a_1 \dots a_{j-1}, \sum\limits_{j=1}^{n} a_j\xi^j, a_{j+1} \dots a_n\} =$

$$= \sum_{j=1}^{n} \xi^j \det\{a_1 \dots a_{j-1}, a_j, a_{j+1} \dots a_n\} = \xi^k \cdot \triangle$$

□

Теорема 3. *Кронекера-Капелли*
$\vartriangleleft \sum\limits_{j=1}^{n} a_j\xi^j = b,]A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}$
$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n & | & b \end{bmatrix}$
СЛАУ совместна $\Leftrightarrow rg\tilde{A} = rgA$

Доказательство. Тривиально. □

1 Тензорная алгебра

1.1 Преобразование координат в X и X^*

$]\{e_j\}$ — базис X
$]\{\tilde{e}_k\}$ — базис X
$\Rightarrow \forall k \;\; \tilde{e}_k = \sum_{j=1}^n t^j_k e_j$

Определение. Набор $T = ||t^i_j||$ образует матрицу, которая называется **матрицей перехода** от базиса $\{e_j\}$ к базису $\{\tilde{e}_k\}$

Примечание. $\vartriangleleft E = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{bmatrix}, \tilde{E} = \begin{bmatrix} \tilde{e}_1 & \tilde{e}_2 & \dots & \tilde{e}_n \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{E} = ET$

Лемма 1. $]\xi$ — *координаты вектора* x *в базисе* $\{e_j\}$
$]\tilde{\xi}$ — *координаты вектора* x *в базисе* $\{\tilde{e}_k\}$
Тогда $\xi = T\tilde{\xi}$ *или* $\tilde{\xi} = S\xi, S = T^{-1}$

Доказательство. $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{\xi}^k \tilde{e}_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{x}^k \sum\limits_{j=1}^{n} t^j_k e_j = \sum\limits_{j=1}^{n} (\sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{\xi}^k t^j_k) e_j = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi^j e_j \Rightarrow \xi = T\tilde{\xi}$ □

Лемма 2. $]\{f^l\}$ — *базис* X^**, сопряженный* $\{e_j\}$*, т.е.* $f^l(e_j) = \delta^l_j$
$]\{\tilde{f}^m\}$ — *базис* X^**, сопряженный* $\{\tilde{e}_k\}$*, т.е.* $\tilde{f}^m(\tilde{e}_k) = \delta^k_m$
$]F = \begin{bmatrix} f^1 & f^2 & \dots & f^n \end{bmatrix}^T, \quad \tilde{F} = \begin{bmatrix} \tilde{f}^1 & \tilde{f}^2 & \dots & \tilde{f}^n \end{bmatrix}^T$
Тогда $F = T\tilde{F}$ *или* $f^l = \sum\limits_{m=1}^{n} t^l_m \tilde{f}^m$

Доказательство. $\vartriangleleft (\tilde{f}^m, \tilde{e}_k) = \delta^m_k = (\tilde{f}^m, \sum\limits_{j=1}^{n} t^j_k e_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} t^j_k (\tilde{f}^m, e_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} t^j_k \sum\limits_{l=1}^{n} a^m_l (f^l, e_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} t^j_k a^m_j$

$\Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{n} a^m_j t^j_k = \delta^m_k$ или $AT = I$ — единичная матрица $\Rightarrow A = T^{-1}$ □

Лемма 3. $]\varphi$ — *коэфф. ЛФ в* $\{e_j\}$
$]\tilde{\varphi}$ — *коэфф. ЛФ в* $\{\tilde{e}_k\}$
$\Rightarrow \tilde{\varphi} = \varphi T$

Доказательство. $]g$ — ЛФ, $\varphi_j = g(e_j) \quad \tilde{\varphi}_k = g(\tilde{e}_k)$

$$\varphi_k = g(\tilde{e}_k) = g\left(\sum_{j=1}^{n} t_k^j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} t_k^j g(e_j) = \sum_{j=1}^{n} t_k^j \varphi_j$$

$\Rightarrow \tilde{\varphi} = \varphi T$ □

Итого:

$$\tilde{E} = ET \quad \tilde{F} = T^{-1}F \quad \tilde{\xi} = T^{-1}\xi \quad \tilde{\varphi} = \varphi T$$

Определение. Величины, которые преобразуются при замене базиса так же, как базисные векторы, называются **ковариантными** величинами.
Величины, которые преобразуются при замене базиса противоположным базисным векторам образом, называются **контравариантными** величинами.

Примечание. ξ — контрвариантная величина. Верхний индекс называется контравариантным, нижний — ковариантным.

$]W \in \Omega_q^p$ — ПЛФ (p, q)
$]\{e_j\}_{j=1}^n$ — базис X, $\{f^k\}_{k=1}^n$ — базис X^*

$$\Rightarrow \omega_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n} \overset{def}{=} W(e_{i_1} \dots e_{i_p} f^{j_1} \dots f^{j_q})$$

$$\{e_j\} \xrightarrow{T} \{\tilde{e}_k\} \quad \{f^l\} \xrightarrow{T^{-1}} \{\tilde{f}^m\}$$

Пусть в паре базисов $\{\tilde{e}_k\}$ и $\{\tilde{f}^m\}$ ПЛФ W имеет тензор $\tilde{w}_{s_1 \dots s_p}^{t_1 \dots t_q} = W(\tilde{e}_{s_1} \dots \tilde{e}_{s_p}, \tilde{f}^{t_1} \dots \tilde{f}^{t_q}) =$

$$= W(t_{s_1}^{i_1} e_{i_1} \dots t_{s_p}^{i_p} e_{i_p}, \sigma_{j_1}^{t_1} f^{j_1} \dots \sigma_{j_q}^{t_q} f^{j_q}) =$$
$$= t_{s_1}^{i_1} \dots t_{s_p}^{i_p} \sigma_{t_1}^{j_1} \dots \sigma_{t_q}^{j_q} W(e_{s_1} \dots e_{s_p}, f^{t_1} \dots f^{t_q})$$

Определение.
1. **Вектором** называется величина, преобразующаяся по контравариантному закону
2. **Линейной формой** называется величина, преобразующаяся по ковариантному закону
3. **Тензором** типа (p, q) называется величина, преобразующаяся p раз по ковариантному закону и q раз по контравариантному.

1.2 Операции с тензорами

1. $]w, v$ — тензоры типа (p, q). Тогда $w + \alpha w$ — тензор (p, q)

   Доказательство. Тривиально. □

2. Транспонирование
   $t^{(st)} : \omega_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_s \dots j_t \dots j_q} \mapsto \omega_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_t \dots j_s \dots j_q}$

Примечание. Переставлять можно только индексы одного типа

Лемма 4. *Транспонирование сохраняет тензорную природу величины.*

3. Свертка:

$$\overset{k\wedge s}{\omega}{}^{j_1\ldots j_n}_{i_1\ldots i_n} = \sum_{m=1}^{n} \omega^{j_1\ldots \overset{k}{\cancel{m}}\ldots j_q}_{i_1\ldots \underset{s}{\cancel{m}}\ldots i_p}$$

Примечание. Операцию свертки можно выполнять только по индексам разных типов

Лемма 5. *Свертка сохраняет тензорную природу*

Лемма 6.

$$\overset{\overset{l\wedge m}{k\wedge s}}{\omega} = \overset{\overset{k\wedge s}{l\wedge m}}{\omega}$$

Доказательство. От перестановки мест слагаемых конечная сумма не меняется. □

4. Тензорное произведение

   $\omega(p_1, q_1); v(p_2, q_2) \quad \omega \otimes v = a$

$$w^{j_1\ldots j_{q_1}}_{i_1\ldots i_{p_1}} \cdot v^{j_{q_1+1}\ldots j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1}\ldots i_{p_1+p_2}} = a^{j_1\ldots j_{q_1+q_2}}_{i_1\ldots i_{p_1+p_2}}$$

Лемма 7. *Результат тензорного произведения является тензором типа* $(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$