Альтернативный вывод формулы Вейерштрасса (из формулы Эйлера):

Доказательство.

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim n^{-x} \frac{x(x+1)\dots(x+n)}{n!} = x \lim n^{-x} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{k}\right) = x \lim \underbrace{e^{x(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{n})-x\ln n}}_{e^{\gamma+O(1)}} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}$$

Примечание.

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \Gamma(x)(-x)\Gamma(-x) = \frac{(-x)}{xe^{\gamma x} \prod \left(1 + \frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}(-x)e^{-\gamma x} \prod \left(1 - \frac{x}{k}\right)e^{\frac{x}{k}}} = \frac{1}{x \prod \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)} = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

Пример.  $a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$ , P и Q — многочлены.

 $\prod a_n = ?$ 

Пусть P и Q разложены на множители, т.е:

$$P(n) = \alpha(n+a_1)(n+a_2)\dots(n+a_k)$$

$$Q(n) = \beta(n+b_1)(n+b_2)\dots(n+b_l)$$

$$a_n = \frac{\alpha}{\beta} \frac{(n+a_1)\dots(n+a_k)}{(n+b_1)\dots(n+b_l)}$$

Если  $k \neq l$ , то  $a_n \to 0$  или  $a_n \to +\infty \Rightarrow \prod a_n$  расходится.  $\lessdot k = l$ 

$$a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\alpha}{\beta}$$

Если  $\frac{\alpha}{\beta}$ , то  $a_n \not\to 1 \Rightarrow \prod a_n$  расходится.  $\triangleleft \frac{\alpha}{\beta} = 1$ 

$$a_n = \frac{\left(1 + \frac{a_1}{n}\right)\dots\left(1 + \frac{a_k}{n}\right)}{\left(1 + \frac{b_1}{n}\right)\dots\left(1 + \frac{b_l}{n}\right)} = 1 + \frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_k - b_1 - \dots - b_k) + O(\frac{1}{n^2})$$

Если  $\sum\limits_{i=1}^k a_i 
eq \sum\limits_{i=1}^l b_i$ , то  $\prod a_n$  расходится.  $\lessdot \sum\limits_{i=1}^k a_i = \sum\limits_{i=1}^l b_i$ 

$$\prod_{n=1}^{N} \frac{\left(1 + \frac{a_1}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{a_k}{n}\right)}{\left(1 + \frac{b_1}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{b_l}{n}\right)} = \prod_{n=1}^{N} \frac{\left(1 + \frac{a_1}{n}\right) e^{-\frac{a_1}{n}} \dots \left(1 + \frac{a_k}{n}\right) e^{-\frac{a_k}{n}}}{\left(1 + \frac{b_1}{n}\right) e^{-\frac{b_1}{n}} \dots \left(1 + \frac{b_l}{n}\right) e^{-\frac{b_l}{n}}}$$

Равенство состоялось, т.к.  $\sum a_i = \sum b_i$ .

По формуле Вейерштрасса:

$$\prod_{n=1}^{N} \left(1 + \frac{a}{n}\right) e^{-\frac{a}{n}} \xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{1}{ae^{\gamma a}\Gamma(a)}$$

$$\prod_{n=1}^{N} \frac{\left(1 + \frac{a_{1}}{n}\right) e^{-\frac{a_{1}}{n}} \dots \left(1 + \frac{a_{k}}{n}\right) e^{-\frac{a_{k}}{n}}}{\left(1 + \frac{b_{1}}{n}\right) e^{-\frac{b_{1}}{n}} \dots \left(1 + \frac{b_{l}}{n}\right) e^{-\frac{b_{l}}{n}}} \to \frac{b_{1}e^{\gamma b_{1}}\Gamma(b_{1}) \dots b_{l}e^{\gamma b_{l}}\Gamma(b_{l})}{a_{1}e^{\gamma a_{1}}\Gamma(a_{1}) \dots a_{k}e^{\gamma a_{k}}\Gamma(a_{k})} =$$

$$= \frac{e^{\gamma b_{1}}\Gamma(b_{1} + 1) \dots e^{\gamma b_{l}}\Gamma(b_{l} + 1)}{e^{\gamma a_{1}}\Gamma(a_{1} + 1) \dots e^{\gamma a_{k}}\Gamma(a_{k} + 1)} = \frac{\Gamma(b_{1} + 1) \dots \Gamma(b_{l} + 1)}{\Gamma(a_{1} + 1) \dots \Gamma(a_{k} + 1)}$$

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{4n^{2}}{4n^{2} - 1} = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{(n - 0)(n - 0)}{(n - \frac{1}{2})(n + \frac{1}{2})} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(1)\Gamma(1)} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

## Градиент

Определение.  $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ , дифф. a, т.е.  $\exists L \in \mathbb{R}^m$ 

$$f(a+h) = f(a) + \langle L, h \rangle + o(h)$$

L — градиент функции f в точке a, обозначается  $\operatorname{grad} f(a), \operatorname{grad}_a f, \operatorname{grad} (f,a)$ . Физики (и млщики) обозначают  $\nabla f$ 

## Производная по направлению

"направление" = "единичный вектор"

Определение. Производная по вектору  $h \in \mathbb{R}^m, h \neq 0$ :

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}$$

- 1. f дифф.  $\Rightarrow f$  дифф. по любому вектору
- 2. Частная производная  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$  производная по направлению  $e_k=(0\dots 0,\underbrace{1}_k,0\dots 0)$

3.

$$\frac{\partial f}{\partial h} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1 + th_1, \dots x_m + th_m) - f(x_1 \dots x_m)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)th_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(x)th_m + o(t)}{t} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}h_m = \langle \nabla f, h \rangle$$

Теорема 1. Экстремальное свойство градиента.

 $f:E\subset\mathbb{R}^m o\mathbb{R},$  f дифф.  $a\in IntE,$   $\nabla f(a)
eq 0.$ 

Тогда  $l=rac{
abla f(a)}{|
abla f(a)|}$  — направление наискорейшего возрастания функции, т.е.

$$\forall h \in \mathbb{R}^m : |h| = 1 \quad -|\nabla f(a)| \le \frac{\partial f}{\partial h}(a) \le |\nabla f(a)|$$

, причем "=" достигаеся только при  $h=\pm l$ , где при "+" достигается "="

Доказательство.

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = \langle \nabla f, h \rangle$$
$$-|\nabla f(a)||h| \le \langle \nabla f, h \rangle \le |\nabla f(a)||h|$$

|h|=1 по построению:

$$-|\nabla f(a)| \le \langle \nabla f, h \rangle \le |\nabla f(a)|$$

Пример. Градиентный спуск.

$$\sphericalangle z = 1 - x^2 - y^2 -$$
 параболоид

$$\nabla z = (-2x, -2y)$$

 $\nabla(z,(0,1))=(0,-2)\Rightarrow$  с параболоида из точки (0,1) быстрее всего съезжать по направлению  $\vec{v}=(0,1)$ 

Это простейший метод нахождения локального минимума.

M3137y2019

## Частные производные высших порядков

 $f: E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, a \in IntE$ 

 $k \in \{1 \dots m\}$ . Если  $\exists g(x) = rac{\partial f}{\partial x_k}$  в окрестности точки a:

 $i\in\{1\dots m\},rac{\partial g}{\partial x_i}$  называется второй частной производной (производной второго порядка) по пе-

ременным i и k, обозначается  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_l}$ 

В общем случае:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} \stackrel{def}{=} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} \right)$$

Теорема 2. О независмости частных производных от порядка дифференциирования.

 $f: E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_0, y_0) \in E$ 

$$\exists r > 0 \ B((x_0, y_0), r) \subset E$$

Пусть в этом шаре  $\exists f''_{xy}, f''_{yx}$  и они непрерывны. Тогда  $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$ 

Доказательство.  $\Delta^2(h,k) = f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0+k) + f(x_0,y_0)$ 

 $\alpha(h) := \Delta^2(h,k)$ при фиксированном k

$$\alpha(h) = \alpha(h) - \alpha(0) \stackrel{\text{т. Лагранжа}}{=} \alpha'(\overline{h})h = (f_x'(x_0 + \overline{h}, y_0 + k) - f_x'(x_0 + \overline{h}, y))h \stackrel{\text{т. Лагранжа}}{=} f_{xy}''(x_0 + \overline{h}, y_0 + \overline{k})hk$$

 $\beta(k) := \Delta^2(h,k)$  при фиксированном h

$$\beta(k) = f_{ux}''(x_0 + \overline{\overline{h}}, y_0 + \overline{\overline{k}})hk$$

$$f_{xy}''(x_0 + \overline{h}, y_0 + \overline{k})hk = f_{yx}''(x_0 + \overline{h}, y_0 + \overline{k})hk$$

$$(h,k) \to (0,0) \Rightarrow (\overline{h},\overline{k}) \to (0,0), (\overline{\overline{h}},\overline{\overline{k}}) \to (0,0)$$

$$f_{xy}''(x_0, y_0) = f_{yx}''(x_0, y_0)$$

Примечание.  $E \subset \mathbb{R}^m$ , откр. Класс  $C^r(E), r \in \mathbb{N}$ :

 $f\in C^r(E)$ , если у f существуют все частные производные порядка  $\leq r$  на всём E и они непрерывны.

C(E) — непр. функции =  $C^0(E)$ 

$$C(E) \stackrel{\neq}{\supset} C^1(E) \stackrel{\neq}{\supset} C^2(E) \dots$$

Общий вид теоремы:  $f \in C^r(E) \ \forall k \leq r$ 

 $\forall x \in E \ \, \forall i_1 \dots i_k$  : Если  $(j_1 \dots j_k)$  — перестановка  $(i_1 \dots i_k)$ , то:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}(x)$$

Определение. Мультииндекс (для  $\mathbb{R}^m$ ) — вектор  $(k_1,k_2\dots k_m),\,k_i\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 

- $|k| := \sum_{i=1}^m k_i$  высота мультииндекса
- $k! = k_1!k_2!\dots k_m!$
- $x \in \mathbb{R}^m$   $x^k = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$
- $f^{(k)} = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x^k} f = \frac{\partial^{|k|} f}{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}}$

Лемма 1. Полиномиальная формула.

 $a_i \in \mathbb{R}$  (верно для любого кольца). Тогда  $\forall r \in \mathbb{N}$ :

$$(a_1 + \ldots + a_m)^r \stackrel{\text{oues}}{=} \sum_{n_1=1}^m \ldots \sum_{n_r=1}^m a_{n_1} a_{n_2} \ldots a_{n_r} = \sum_{j:|j|=r} \frac{r!}{j!} a^j$$

Доказательство. По индукции.

База:  $\triangleleft r = 1$ 

$$a_1 + \ldots + a_m = \frac{1!}{1!0! \ldots 0!} a_1 + \frac{1!}{0!1! \ldots 0!} a_2 + \ldots + a_m$$
  
 $a_1 + \ldots + a_m = a_1 + \ldots + a_m$ 

Переход:

$$(a_{1} + \ldots + a_{m})^{r+1} = (a_{1} + \ldots + a_{m}) \sum_{\substack{j_{1} \ldots j_{m} \geq 0 \\ j_{1} + \ldots + j_{m} = r}} \frac{r!}{j_{1}! \ldots j_{m}!} a_{1}^{j_{1}} \ldots a_{m}^{j_{m}} =$$

$$= \sum_{\substack{k_{1} \geq 1 \\ k_{2} \ldots k_{m} \geq 0 \\ k_{1} + \ldots k_{m} = r+1}} \frac{r!}{k_{1}! \ldots k_{m}!} a_{1}^{j_{1}+1} \ldots a_{m}^{j_{m}} + \ldots + \sum_{\substack{k_{2} \geq 1 \\ k_{1}, k_{3}, k_{4} \ldots k_{m} \geq 0 \\ k_{1} + \ldots k_{m} = r+1}} \frac{r! k_{2}}{j_{1}! \ldots j_{m}!} a_{1}^{j_{1}} \ldots a_{m}^{j_{m}+1} =$$

$$= \sum_{\substack{k_{1} \geq 0 \\ k_{2} \ldots k_{m} \geq 0 \\ k_{1} + \ldots k_{m} = r+1}} \frac{r! k_{1}}{k_{1}! \ldots k_{m}!} a_{1}^{k_{1}} \ldots a_{m}^{k_{m}} + \ldots + \sum_{\substack{k_{2} \geq 0 \\ k_{1}, k_{3}, k_{4} \ldots k_{m} \geq 0 \\ k_{1} + \ldots k_{m} = r+1}} \frac{r! k_{2}}{j_{1}! \ldots j_{m}!} a_{1}^{j_{1}} \ldots a_{m}^{j_{m}+1} =$$

$$= \sum_{\substack{k_{1} \ldots k_{m} \geq 0 \\ k_{1} + \ldots k_{m} = r+1}} \frac{r! (k_{1} + \ldots + k_{m})}{k_{1}! \ldots k_{m}!} a_{1}^{k_{1}} \ldots a_{m}^{k_{m}} =$$

$$= \sum_{\substack{k_{1} \ldots k_{m} \geq 0 \\ k_{1} + \ldots k_{m} = r+1}} \frac{(r+1)!}{k_{1}! \ldots k_{m}!} a_{1}^{k_{1}} \ldots a_{m}^{k_{m}}$$

М3137у2019 Лекция 15