1 Определения и формулировки

1.1 Внутренняя точка множества, открытое множество, внутренность

a — **внутренняя точка** множества D, если $\exists U(a) : U(a) \subset D$, т.е. $\exists r > 0 : B(a, r) \subset D$
D — **открытое множество**, если $\forall a \in D : a$ — внутренняя точка D
Внутренностью множества D называется $Int(D) = \{x \in D : x$ — внутр. точка $D\}$

1.2 Предельная точка множества

a — **предельная точка** множества D, если

$$\forall \dot{U}(a) \ \ \dot{U}(a) \cap D \neq \varnothing$$

1.3 Замкнутое множество, замыкание, граница

D - замкнутое множество, если оно содержит все свои предельные точки.
$\overline{D} = D \cup$ (множество предельных точек D) — замыкание.
Граница множества — множество его граничных точек. Обозначается ∂D

1.4 Изолированная точка, граничная точка

a - изолированная точка D, если $a \in D$ и a — не предельная, то есть:

$$\exists U(a) \quad U(a) \cap D = \{a\}$$

a — граничная точка D, если $\forall U(a) \quad U(a)$ содержит точки как из D, так и из D^c

1.5 Описание внутренности множества

1. $IntD$ - откр. множество
2. $IntD = \bigcup\limits_{\substack{D \supset G \\ G - \text{открыт}}}$ — максимальное открытое множество, содержащееся в D
3. D — откр. в $X \Leftrightarrow D = IntD$

1.6 Описание замыкания множества в терминах пересечений

$\overline{D} = \bigcap\limits_{\substack{D \subset F \\ F - \text{замкн.}}} F$ — мин. (по вкл.) замкн. множество, содержащее D.

1.7 Верхняя, нижняя границы; супремум, инфимум

$E \subset \mathbb{R}$. E — огр. сверху, если $\exists M \in \mathbb{R} \ \ \forall x \in E \ \ x \leq M$. Кроме того, всякие такие M называются **верхними границами** E.
Аналогично ограничение снизу.
$E \subset \mathbb{R}, E \neq \varnothing$.
Для E — огр. сверху супремум ($\sup E$)— наименьшая из верхних границ E.
Для E — огр. сниху инфимум ($\sup E$) — наибольщая из нижних границ E.

1.8 Техническое описание супремума

Техническое описание супремума: $b = \sup E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E \ \ x \le b \\ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists x \in E \ \ b - \varepsilon < x \end{cases}$

1.9 Последовательность, стремящаяся к бесконечности

В $\mathbb{R}$:

1. $x_n \to +\infty \quad \forall E > 0 \ \ \exists N \ \ \forall n > N \ \ x_n > E$
2. $x_n \to -\infty \quad \forall E \ \ \exists N \ \ \forall n > N \ \ x_n < E$
3. $x_n \to \infty \Leftrightarrow |x_n| \to +\infty$

1.10 Компактное множество

$K \subset X$ — компактное, если для любого открытого покрытия $\exists$ конечное подпокрытие $\Leftrightarrow \exists \alpha_1 \dots \alpha_n \quad K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$

1.11 Секвенциальная компактность

1.12 Определения предела отображения (3 шт)

1. По Коши:
$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in D \ \ 0 < \rho^X(a, x) < \delta \quad \rho^Y(f(x), A) < \varepsilon$$
2. На языке окружностей:
$$\forall U(A) \ \ \exists V(a) \ \ \forall x \in \dot{V}(a) \ \ f(x) \in U(A)$$
3. По Гейне: $\forall (x_n)$ — посл. в X:
   (a) $x_n \to a$
   (b) $x_n \in D$
   (c) $x_n \neq a$

   $f(x_n) \to A$

1.13 Определения пределов в $\overline{\mathbb{R}}$

Для $Y = \overline{\mathbb{R}}, -\infty < x < +\infty$:

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty : \quad \forall E \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in X : 0 < |x - a| < \delta \ \ f(x) > E$
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty : \quad \forall E \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in X : 0 < |x - a| < \delta \ \ f(x) < E$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = c \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta \ \ \forall x \in X : x > \delta \ \ |f(x) - c| < \varepsilon$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = c \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta \ \ \forall x \in X : x < \delta \ \ |f(x) - c| < \varepsilon$

1.14 Предел по множеству

Предел при $x \to x_0$ по множеству D_1 — это $\lim\limits_{x \to x_0} f|_{D_1}$

1.15 Односторонние пределы

В $\mathbb{R}$ одностор. $= \{$ левостор., правостор.$\}$
Левостор. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = L$ - это $\lim f|_{D \cap (-\infty, +\infty)}$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap D \;\; |f(x) - L| < \varepsilon$$

Аналогично правостор.

1.16 Непрерывное отображение

$f : D \subset X \to Y \quad x_0 \in D$
f — **непрерывное** в точке x_0, если:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, либо x_0 — изолированная точка D
2. $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D \;\; \rho(x, x_0) < \delta \;\; \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$
3. $\forall U(f(x_0)) \;\; \exists V(x_0) \;\; \forall x \in V(x_0) \cap D \;\; f(x) \in U(f(x_0))$
4. По Гейне $\forall (x_n) : x_n \to x_0; x_n \to D \;\; f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x_0)$

1.17 Непрерывность слева

f — непр. слева в x_0, если $f|_{(-D, x_0] \cap D}$ — непрерывно в x_0

1.18 Разрыв, разрывы первого и второго рода

Если $\nexists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, либо $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ — **точка разрыва**.
Пусть $\exists f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$ и не все 3 числа равны: $f(x_0 - 0), f(x_0), f(x_0 + 0)$. Это **разрыв I рода *(скачок)***.
Остальные точки разрыва — **разрыв II рода**.

1.19 О большое, о маленькое

$f, g : D \subset X \to \mathbb{R} \;\; x_0$ — пр. точка D
Если $\exists V(x_0) \;\; \exists \varphi : V(x_0) \cap D \to \mathbb{R} \quad f(x) = g(x)\varphi(x)$ при $x \in V(x_0) \cap D$

1. φ — ограничена. Тогда говорят $f = O(g)$ при $x \to x_0$
   "f ограничена по сравнению с g при $x \to x_0$"
2. $\varphi(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 \quad f$ — беск. малая по отношению к g при $x \to x_0$, $f = o(g)$
3. $\varphi(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 1 \quad f$ и g экв. при $x \to x_0 \quad f \underset{x \to x_0}{\sim} g$

Примечание. О большое и о малое — разные вопросы в табличке.

1.20 Эквивалентные функции, таблица эквивалентных

Эквивалентные функции даны выше.
Таблица эквивалентных?

1.21 Асимптотически равные *(сравнимые)* функции

В условиях прошлых определений $f = O(g), g = O(f) \Leftrightarrow f \asymp g$ — асимптотически сравнимы на множестве D, "величины одного порядка".

1.22 Асимптотическое разложение

$g_n : D \subset X \to \mathbb{R} \quad x_0$ — пред. точка D
$\forall n \quad g_{n+1}(x) = o(g_n), x \to x_0$

Пример. $g_n(x) = x^n, n = 0, 1, 2 \dots \quad x \to 0 \quad g_{n+1} = xg_n, x \to 0$

(g_n) называется **шкала асимптотического разложения**.
$f : D \to \mathbb{R}$ Если $f(x) = c_0g_0(x) + c_1g_1(x) + \dots + c_ng_n(x) + o(g_n)$, то это асимптотическое разложение f по шкале (g_n)

1.23 Наклонная асимптота графика

Пусть $f(x) = Ax + B + o(1), x \to +\infty$
Прямая $y = Ax + B$ — наклонная асимптота к графику f при $x \to +\infty$

1.24 Путь в метрическом пространстве

Y — метр. пр-во
$\gamma : [a, b] \to Y$ — непр. на $[a, b]$
= путь в пространстве Y

1.25 Линейно связное множество

$E \subset Y$
E — **линейно связное**, если $\forall A, B \in E$
$\exists$ путь $\gamma : [a, b] \to E$
$\gamma(a) = A$
$\gamma(b) = B$