1 Тензорная алгебра

1.1 Напоминание теории

Напоминание: ПЛФ — штука, которая берет набор из p векторных пространств и q сопряженных пространств и эта штука линейна по всем аргументам.

$$W : X \times X \times \ldots \times X \times X^* \times X^* \times \ldots \times X^* \to K$$

Полилинейность: $W(\ldots \tilde{x}_s + \alpha \overline{x}_s \ldots) = W(\ldots \tilde{x}_s \ldots) + \alpha W(\ldots \overline{x}_s)$
$]\{e_j\}_{j=1}^n$ — базис X, $\{f^k\}_{k=1}^n$ — сопр. базис X^*

$$x_i = \sum_{j=1}^n \xi_i^j e_j, \;\; y^l = \sum_{k=1}^n \eta_k^l f^k$$

$$W(x_1 \ldots x_p, y^1 \ldots y^q) = \xi_1^{j_1} \xi_2^{j_2} \cdots \xi_p^{j_p} \eta_{k_1}^1 \eta_{k_2}^2 \cdots \eta_{k_q}^q W(e_{j_1} \ldots e_{j_p} f^{k_1} \ldots f^{k_q}) =$$
$$= \xi_1^{j_1} \xi_2^{j_2} \cdots \xi_p^{j_p} \eta_{k_1}^1 \eta_{k_2}^2 \cdots \eta_{k_q}^q w_{\vec{j}}^{\vec{k}}$$

В произвольном базисе любой ПЛФ W взаимооднозначно сопоставляется тензор w.
$\dim X = n = \dim X^*$, $\quad n^{p+q}$ — размерность пространства ПЛФ, (p, q) — валентность. $r := p + q$
Частные случаи:

- $r = 0 \quad w = \text{const}$
- $r = 1 \quad \dim = n^1 = n \Rightarrow \begin{cases} X \Rightarrow w = \begin{bmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^n \end{bmatrix} \\ X^* \Rightarrow w = \begin{bmatrix} w_1 & \ldots & w_n \end{bmatrix} \end{cases}$
- $r = 2 \quad \dim = n^2 \quad w \leftrightarrow \begin{bmatrix} w_{11} & \ldots & w_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & \ldots & w_{nn} \end{bmatrix}$

Индексы читаются слева направо и сверху вниз, сначала строка, потом столбец.
Пример. $n = 2 \quad W - (0, 2)$

$$w = \begin{bmatrix} w^{11} & w^{12} \\ w^{21} & w^{22} \end{bmatrix}$$

- $r = 3 \quad n^3$. Можно писать любым из следующих вариантов: $w^{ijk}, w_k^{ij}, w_{jk}^i, w_{ijk}$. Последний индекс называется индексом слоя.

Пример. $n = 3$

$$w = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} w_{11}^1 & w_{21}^1 & w_{31}^1 & w_{12}^1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_{11}^2 & w_{21}^2 & w_{31}^2 & \ldots & & & & & \\ w_{11}^3 & w_{21}^3 & w_{31}^3 & \ldots & & & & & \end{array}\right]$$

Пример. $\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i,j,k) \text{ — чётню} \\ -1 & (i,j,k) \text{ — нечётно} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

$$\varepsilon = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

- $r = 4, n = 2$

$$w = \left[\begin{array}{cc|cc} w^{11}_{11} & w^{12}_{11} & . & . \\ w^{21}_{11} & w^{22}_{11} & . & . \\ \hline . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{array}\right]$$

Пример. $n = 2$

$$\delta^{ijk}_l = \begin{cases} 1 & i = j \neq k = l \\ -1 & i = k \neq j = l \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$$w = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

1.2 Операции над тензорами

1.2.1 Линейные операции

Эти операции аналогичны операциям на соответствующих матрицах.

1.2.2 Тензорное произведение

$a^{ij} \cdot b_k = w^{ij}_k$

Пример. $a^i_j \to A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$b_k \to B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix}$

$]c = a \otimes b \to c^i_{jk} = a^i_j \cdot b_k$

$$c = \left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 10 & 6 & 12 \\ 15 & 20 & 18 & 24 \end{array}\right]$$

$]d = b \otimes a \to d = b_k \cdot a^i_j$

$$d = \left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 6 & 10 & 12 \\ 15 & 18 & 20 & 24 \end{array}\right]$$

Запись сначала векторов, потом форм называется консолидация.