1 Определения

1.1 Локальный максимум, минимум, экстремум

Определение. $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in E$ — **локальный максимум функции**, если

$$\exists U(x_0) \;\; \forall x \in U(x_0) \cap E \;\; f(x) \leq f(x_0)$$

Аналогично определеяется минимум.

Определение. **Экстремум** — точка минимума либо максимума.

1.2 ! Первообразная, неопределенный интеграл

$F, f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$
F — **первообразная** f на $\langle a, b \rangle$

$$\forall x \in \langle a, b \rangle \quad F'(x) = f(x)$$

Неопределенный интеграл f на $\langle a, b \rangle$ — множество всех первообразных f:

$$\{F + c, c \in \mathbb{R}\}, \text{ где } F \text{ — первообразная}$$

Обозначается $\int f = F + c$ или $\int f(x)dx$

1.3 Теорема о существовании первообразной

$f \in C^0(\langle a, b \rangle)$ тогда у f существует первообразная.
Теорема о существовании первообразной — следствие теоремы Барроу.

1.4 ! Таблица первообразных

$$\int x^n dx = \frac{x^{(n+1)}}{n+1}, n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \text{ — длинный логарифм}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x$$

1.5 Равномерная непрерывность

$f : \langle a,b\rangle \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **равномерно непрерывна** на $\langle a,b\rangle$:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle : |x_1 - x_2| < \delta \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Или для метрического пространства:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x_1, x_2 \;\; \rho(x_1, x_2) < \delta \quad \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

Отличие от непрерывности на отрезке в том, что δ зависит только от ε и подходит для всех x_1, x_2.

1.6 Площадь, аддитивность площади, ослабленная аддитивность

$\mathcal{E}$ — множество всех ограниченных фигур в $\mathbb{R}^2$ (“фигура” = подмножество $\mathbb{R}^2$)
Площадь это $\sigma : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$, такое что:

1. $A \in \mathcal{E} \quad A = A_1 \sqcup A_2 \quad \sigma A = \sigma A_1 + \sigma A_2$ *(конечная аддитивность)*
2. $\sigma([a,b] \times [c,d]) = (d-c)(b-a)$

$\sqcup$ — **дизъюнктное объединение**; если $x \in A_1$ и $x \in A_2$, то x “дважды $\in$” $A_1 \sqcup A_2$
Ослабленная площадь $\sigma : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$:

1. Монотонна
2. Нормирована
3. Ослабленная аддитивность: $E \in \mathcal{E} \quad E = E_1 \cup E_2 \quad E_1 \cap E_2$ — вертикальный отрезок, E_1 и E_2 лежат каждый в своей полуплоскости относительно этого отрезка $\Rightarrow \sigma E = \sigma E_1 + \sigma E_2$

Почему отрезок вертикальный? В конспекте СПбГУ допускается горизонтальный.

1.7 ! Определенный интеграл

$f : [a,b] \to \mathbb{R}; f \geq 0$

$$\text{Под графиком } (\textit{ПГ})(f, [a,b]) = \{(x,y) : x \in [a,b]; 0 \leq y \leq f(x)\}$$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, непр.

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx := \sigma\text{ПГ}(f_+, [a,b]) - \sigma\text{ПГ}(f_-, [a,b])$$

1.8 Положительная и отрицательная срезки

$f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$
$f_+ := \max(f, 0)$ — **положительная срезка**
$f_- := \max(-f, 0)$ — **отрицательная срезка**

1.9 Среднее значение функции на промежутке

Среднее значение функции на промежутке:

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

Взято с гугла, стоит спросить Кохася, верно ли это.

1.10 Кусочно-непрерывная функция

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, **кусочно непрерывна**
f — непр. на $[a, b]$ за исключением конечного числа точек, в которых разрывы I рода

Пример. $f(x) = [x], x \in [0, 2020]$

1.11 Почти первообразная

$F : [a, b] \to \mathbb{R}$ — **почти первообразная** кусочно непрерывной функции f:
F — непр. и $\exists F'(x) = f(x)$ всюду, кроме конечного числа точек

Пример. $f = \operatorname{sign} x, x \in [-1, 1]$
$F := |x|$

1.12 Функция промежутка, аддитивная функция промежутка

$Segm\langle a, b\rangle = \{[p, q] : [p, q] \subset \langle a, b\rangle\}$ — множество всевозм. отрезков, лежащих в $\langle a, b\rangle$
Функция промежутка $\Phi : Segm\langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$
Аддитивная функция промежутка: Φ — функция промежутка и

$$\forall [p, q] \in Segm\langle a, b\rangle \;\; \forall r : p < r < q \quad \Phi([p, q]) = \Phi([p, r]) + \Phi([r, q])$$

1.13 Плотность аддитивной функции промежутка

Плотность аддитивной функции промежутка: $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — плотность Φ, если:

$$\forall \delta \in Segm\langle a, b\rangle \quad \inf_{x\in\delta} f(x) \cdot len_\delta \le \Phi(\delta) \le \sup f \cdot len_\delta$$

1.14 Выпуклая функция

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — **выпуклая**

$$\forall x, y \in \langle a, b\rangle \quad \forall \alpha \in [0, 1] \quad f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

Примечание. f — выпуклая $\Leftrightarrow$ всякая хорда графика f расположена “выше” графика *(нестрого выше)* $\Leftrightarrow$ НГ$(f, \langle a, b\rangle)\{(x, y) : x \in \langle a, b\rangle \;\; y \ge f(x)\}$

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — **строго выпуклая**

$$\forall x, y \in \langle a, b\rangle \quad \forall \alpha \in (0, 1) \quad f(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

1.15 Выпуклое множество в $\mathbb{R}^m$

$A \subset \mathbb{R}^m$ — **выпуклое множество в** $\mathbb{R}^m$, если

$$\forall x, y \in A, \alpha \in [0,1] \quad \alpha x + (1-\alpha)y \in A$$

Это определение с вики

1.16 Надграфик

Надграфик функции $f : \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ это множество $\{(x,y) \mid x \in \langle a,b \rangle, y \geq f(x)\}$

1.17 Опорная прямая

$A \subset \mathbb{R}^2$ — вып. $l \subset \mathbb{R}^2$ — прямая
l — **опорная прямая** к A, если:

1. A содержится в одной полуплоскости относительно l
2. $l \cap A \neq \varnothing$

1.18 Гладкий путь, вектор скорости, носитель пути

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ — непр.
$\gamma(a)$ — начало; $\gamma(b)$ — конец
$\gamma : t \mapsto \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ \vdots \\ \gamma_m(t) \end{pmatrix}$; γ_i — коорд. функции
Если все $\gamma_i \in C^1[a,b]$, то γ — **гладкий путь.**
Вектор скорости:

$$\gamma'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\gamma(t+\Delta t) - \gamma(t)}{\Delta t} = \lim \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1(t+\Delta t)-\gamma_1(t)}{\Delta t} \\ \vdots \\ \frac{\gamma_m(t+\Delta t)-\gamma_m(t)}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \\ \vdots \\ \gamma_m'(t) \end{pmatrix}$$

Кто такой носитель пути — неизвестно, гугл предлагает про СПИД почитать.

1.19 Длина гладкого пути

Длина пути — фукнция l, заданная на множестве гладких путей в $\mathbb{R}^m$, такая что:

1. $l \geq 0$
2. l — аддитивна: $\forall [a,b] \;\; \forall \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m \;\; \forall c \in (a,b) \quad l(\gamma) = l(\gamma|_{[a,c]}) + l(\gamma|_{[c,b]})$
3. $\forall \gamma, \tilde{\gamma}$ — гладкие пути, $C_\gamma, C_{\tilde{\gamma}}$ — носители путей
   Если $\exists T : C_\gamma \to C_{\tilde{\gamma}}$ — сжатие: $(\forall M, M' \;\; \rho(T(M), T(M')) \leq \rho(M, M'))$, тогда $l(\tilde{\gamma}) \leq l(\gamma)$
4. Нормировка: γ — гладкий путь, $\gamma(t) = vt + u; \;\; u, v \in \mathbb{R}^m$:

$$l(\gamma) = \rho(\gamma(a), \gamma(b))$$

1.20 Формулы для длины пути: в $\mathbb{R}^m$, в полярных координатах, длина графика

1.20.1 В $\mathbb{R}^m$

$\gamma \in C^1([a,b] \to \mathbb{R}^m)$
Тогда $l(\gamma) = \int\limits_a^b ||\gamma'(t)||dt$

1.20.2 В полярных координатах

Длина кривой $r = r(\varphi)$ в полярных координатах, $\varphi \in [\alpha, \beta]$

$$x = r(\varphi)\cos\varphi \quad y = r(\varphi)\sin\varphi$$
$$\gamma'(\varphi) = \begin{pmatrix} r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi \\ r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi \end{pmatrix}$$
$$||\gamma'(\varphi)|| = \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2 - 2r'(\varphi)r(\varphi)\cos\varphi\sin\varphi + 2r'(\varphi)r(\varphi)\cos\varphi\sin\varphi}$$
$$||\gamma'(\varphi)|| = \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2}$$
$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}d\varphi$$

1.20.3 Длина графика

Длина графика $y = f(x), f \in C^1$ на отрезке $[a, b]$

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \quad \gamma'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix} \quad ||\gamma'(x)|| = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$
$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

1.21 Вариация функции на промежутке

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n \quad t_0 = a < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$
$\tau = \{t_0 \ldots t_n\}$ — дробление отрезка.
Тогда **вариация функции** γ на отрезке $[a, b]$ это l:

$$l(\gamma) = \sup_\tau \left\{ \sum_{i=1}^n \rho(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \right\}$$

1.22 Дробление отрезка, ранг дробления, оснащение

Дробление отрезка $[a, b]$ это разбиение отрезка на n частей следующим образом:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b \quad [x_{i-1}, x_i]$$

Ранг *(мелкость)* дробления — длина самого длинного из отрезков дробления:

$$\tau = \{x_0 \ldots x_n\} \quad |\tau| = \max(x_i - x_{i-1})$$

Оснащение — множество точек $\{\xi_1 \ldots \xi_n\} : \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

1.23 Риманова сумма

Интегральная *(риманова)* сумма для разбиения $\{x_i\}$, произвольной функции f и оснащения $\{\xi_i\}$ это следующая сумма:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

1.24 Постоянная Эйлера

γ — **постоянная Эйлера**. ≈ 0.577

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right)$$

1.25 Допустимая функция

2 Теоремы

2.1 Критерий монотонности функции. Следствия

$f \in C(\langle a, b\rangle)$, дифф. в (a, b)
Тогда f — возрастает $\Leftrightarrow \forall x \in (a, b)\ \ f'(x) \geq 0$

Доказательство. "$\Rightarrow$" По определению f' $\quad \frac{f(x+h)-f(h)}{h} \geq 0$
"$\Leftarrow$" $x_1 > x_2$, по т. Лагранжа: $\exists c : f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2) \geq 0$ □

Следствие. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, тогда:
$f = \text{const} \Leftrightarrow (f \in C(\langle a, b\rangle)$ — дифф. на $\langle a, b\rangle, f' \equiv 0)$

Следствие. $f \in C\langle a, b\rangle$, дифф. на (a, b). Тогда:
f строго возрастает $\Leftrightarrow$ ① и ②
① $f' \geq 0$ на (a, b)
② $f' \not\equiv 0$ ни на каком промежутке

Доказательство. "$\Rightarrow$" очевидно
"$\Leftarrow$" По лемме о возрастании в отрезке □

Следствие. О доказательстве неравенств
$g, f \in C([a, b\rangle)$, дифф. в (a, b)
$f(a) \leq g(a); \forall x \in (a, b)\ \ f'(x) \leq g'(x)$
Тогда $\forall x \in [a, b\rangle\ \ f(x) \leq g(x)$

Доказательство. $g - f$ — возр., $g(a) - f(a) \geq 0$ □

2.2 Теорема о необходимом и достаточном условиях экстремума

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R} \quad x_0 \in (a, b) \quad f$ — дифф. на (a, b)
Тогда:

1. x_0 — лок. экстремум $\Rightarrow f'(x_0) = 0$
2. f — n раз дифф. в x_0
   $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$
   Если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то $\begin{cases} n \text{ — чет. :} & x_0 \text{ — локальный максимум} \\ n \text{ — нечет. :} & x_0 \text{ — не экстремум} \end{cases}$
   Если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то $\begin{cases} n \text{ — чет. :} & x_0 \text{ — локальный минимум} \\ n \text{ — нечет. :} & x_0 \text{ — не экстремум} \end{cases}$

Доказательство. 1. т. Ферма

2. ф. Тейлора

$$f(x) = \mathrm{T}_n(f, x_0)(x) + o((x - x_0)^n)$$
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

при x, близких к x_0:

$$\operatorname{sign}(f(x) - f(x_0)) = \operatorname{sign}\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\right)$$

Тогда при чётном n

$$\operatorname{sign}(f(x) - f(x_0)) = \operatorname{sign} f^{(n)}(x_0) \Rightarrow x_0 \text{ — экстр.}$$

При нечётном n

$$\operatorname{sign}(f(x) - f(x_0)) = \begin{cases} f^{(n)}(x_0), & x > x_0 \\ -f^{(n)}(x_0), & x < x_0 \end{cases} \Rightarrow x_0 \text{ — не экстр.}$$

□

2.3 Теорема Кантора о равномерной непрерывности

$f : X \to Y, X$ — комп., f — непр. на X
Тогда f — равномерно непр.

Доказательство. От противного.

$$\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall \delta > 0 \;\; \exists x_\delta, \overline{x}_\delta : \rho(x_\delta, \overline{x}_\delta) < \delta \quad \rho(f(x_\delta), f(\overline{x}_\delta)) \geq \varepsilon$$
$$\delta := \frac{1}{n} \;\; \exists x_n, \overline{x}_n : \rho(x_n, \overline{x}_n) < \delta \quad \rho(f(x_n), f(\overline{x}_n)) \geq \varepsilon$$

Выберем $x_{n_k} \to \tilde{x}, \overline{x}_{n_k} \to \tilde{\tilde{x}}$

$$\rho(\tilde{x}, \tilde{\tilde{x}}) \leq \lim_{n\to\infty} \delta = 0 \Rightarrow \tilde{x} = \tilde{\tilde{x}}$$

Тогда $f(x_{n_k}) \to f(\tilde{x}), f(\overline{x}_{n_k}) \to f(\tilde{x})$, противоречие с $\rho(f(x_n), f(\overline{x}_n)) \geq \varepsilon$ □

2.4 Теорема Брауэра о неподвижной точке

$f : [0,1] \times [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$, непр.
Тогда $\exists x \in [0,1]^2 : f(x) = x$, т.е. есть неподвижная точка.
Обобщенный вариант:

1. $f : [0,1]^m \to [0,1]^m$ — непр.
2. $f : B(0,1) \subset \mathbb{R}^m \to B(0,1)$ — непр.
3. $f : S(0,1) \subset \mathbb{R}^m$ — непр.

Доказательство. $\rho : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$
$\rho(x,y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$ — непр. в $[0,1]^2$
От противного — пусть $\forall x \in [0,1]^2 \quad f(x) \neq x$
Тогда $\forall x \quad \rho(f(x),x) > 0 \quad x \mapsto \rho(f(x),x)$ — непр., > 0
По т. Вейерштрасса $\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall x \in [0,1] \;\; \rho(f(x),x)) \geq \varepsilon$
По т. Кантора для f: для этого $\varepsilon \;\; \exists \delta < \varepsilon$:

$$\forall x, \overline{x} : ||x - \overline{x}|| < \delta \quad ||f(x) - f(\overline{x})|| < \varepsilon$$

Можно писать не $|| \cdot ||$, а ρ.
Возьмём $n : \frac{\sqrt{2}}{n} < \delta$
Построим доску $Hex(n+1, n+1)$, где $n+1$ — число узлов.
Логические координаты узла $(v_1, v_2) \quad v_1, v_2 \in \{0 \dots n\}$ имеют физические координаты, то есть узлу сопоставляется точка на квадрате с координатами $\left(\frac{v_1}{n}, \frac{v_2}{n}\right)$
$K(V) := \min\{i \in \{1,2\} : |f(\frac{v}{n}) - \frac{v_i}{n}| \geq \varepsilon\}$
Продолжение на следующей лекции. □

2.5 Теорема о свойствах неопределенного интеграла

f, g имеют первообразную на $\langle a, b\rangle$. Тогда

1. Линейность:
$$\int (f+g) = \int f + \int g$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \int \alpha f = \alpha \int f$$
2. $\varphi \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$
$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \left(\int f(x) dx\right)|_{x=\varphi(t)} = F(\varphi(t))$$
Частный случай: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:
$$\int f(\alpha t + \beta) dt = \frac{1}{\alpha} F(\alpha t + \beta)$$
3. f, g — дифф. на $\langle a, b\rangle$; $f'g$ — имеет первообр.
Тогда fg' имеет первообразную и
$$\int fg' = fg - \int f'g$$

Доказательство.
1. Опущено
2. $(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$
3. $(fg - \int f'g)' = f'g + fg' - f'g = fg'$

□

2.6 ! Интегрирование неравенств. Теорема о среднем

$f, g \in C[a,b] \quad f \le g$. Тогда

$$\int_a^b f \le \int_a^b g$$

Доказательство.

$$\Pi\Gamma(f_+) \subset \Pi\Gamma(g_+) \Rightarrow \sigma\Pi\Gamma(f_+) \le \sigma\Pi\Gamma(g_+)$$
$$\Pi\Gamma(f_-) \supset \Pi\Gamma(g_-) \Rightarrow \sigma\Pi\Gamma(f_-) \ge \sigma\Pi\Gamma(g_-)$$
$$\sigma\Pi\Gamma(f_+) - \sigma\Pi\Gamma(f_-) \le \sigma\Pi\Gamma(g_+) - \sigma\Pi\Gamma(g_-)$$

□

Теорема о среднем: $f \in C[a,b], m \le f(x) \le M \Rightarrow \exists c : m \le c \le M \quad \int_a^b f = c(b-a)$

Доказательство. По монотонности интеграла

$$m(b-a) \le \int_a^b f \le M(b-a)$$

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f \le M$$

$$c := \frac{1}{b-a}\int_a^b f$$

□

Взято с вики

2.7 Теорема Барроу

$f \in C[a,b] \quad \Phi$ — интеграл с переменным верхним пределом. Тогда

$$\forall x \in [a,b] \quad \Phi'(x) = f(x)$$

Доказательство. Зафиксируем $x \in [a,b] \quad y > x, y \le b$

$$\frac{\Phi(y)-\Phi(x)}{y-x} = \frac{\int_a^y f - (\int_a^y f + \int_y^x f)}{y-x} = \frac{\int_x^y f}{y-x} \underset{\substack{\text{т.о.ср.} \\ \exists c \in [x,y]}}{=} \frac{c(y-x)}{y-x} = c \xrightarrow[y \to x+0]{} f(x)$$

$x > y$

$$\frac{\Phi(y)-\Phi(x)}{y-x} = \frac{1}{x-y}\int_y^x f = c \xrightarrow[y \to x-0]{} f(x)$$

□

2.8 Формула Ньютона-Лейбница, в том числе, для кусочно-непрерывных функций

Теорема 1. $f \in C[a,b] \quad F$ — первообр. f
Тогда $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

Доказательство. $\Phi(x) = \int_0^x f$ — первообр.
$\exists C : F = \Phi + C$

$$\int_a^b f = \Phi(b) - \Phi(a) = F(b) - F(a)$$

□

Что с кусочно-непрерывными?

2.9 Лемма об ускоренной сходимости

1. $f, g : D \subset X \to \mathbb{R} \quad a$ — предельная точка D
   $\exists U(a)$: при $x \in \dot{U}(a) \cap D \quad f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$
   Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \quad \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$
   Тогда
   $$\forall x_k \to a \quad (x_k \neq a, x_k \in D) \quad \exists y_k \to a (y_k \neq a, y_k \in D)$$
   такое, что
   $$\lim_{k\to+\infty} \frac{f(y_k)}{g(x_k)} = 0 \quad \lim_{k\to+\infty} \frac{g(y_k)}{g(x_k)} = 0$$
   Таким образом, $g(y_k) \to 0$ быстрее, чем $g(x_k) \to 0$
2. То же самое, но $\lim f(x) = +\infty, \lim g(x) = +\infty$

Доказательство. 1. Очевидно.

$$\forall k \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |f(x_n)| < |g(x_k)|\frac{1}{k} \quad |g(x_n)| < |g(x_k)|\frac{1}{k}$$

$\varepsilon := |g(x_k)|$

$$k = 1 \quad y_1 := \text{какой-нибудь } x_n : \left|\frac{f(x_n)}{g(x_k)}\right| < 1 \quad \left|\frac{g(x_n)}{g(x_k)}\right| < 1$$
$$k = 2 \quad y_2 := \text{какой-нибудь } x_n : \left|\frac{f(x_n)}{g(x_k)}\right| < \frac{1}{2} \quad \left|\frac{g(x_n)}{g(x_k)}\right| < \frac{1}{2}$$
$$\vdots$$

2. (a) Частный случай: Пусть $g(x_n)$ возрастает. Берем $k : m := \min\{n : |f(x_n)| \geq \sqrt{g(x_k)}$ или $|g(x_n)| \geq \sqrt{g(x_k)}\}$
   $y_k := x_{m-1}$
   $$\left|\frac{f(y_k)}{g(x_k)}\right| \leq \frac{\sqrt{g(x_k)}}{g(x_k)} = \frac{1}{\sqrt{g(x_k)}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$
   Зачем нужно возрастание? Кохась не знает.

(b) Общий случай: $\tilde{g}(x_k) := \inf\{g(x_n), n = k, k+1\ldots\} \quad \tilde{g}(x_k) \to +\infty$
$\tilde{g}(x_k) \uparrow, \tilde{g}(x_k) \le g(x_k)$. Как в пункте (a) построим y_k

$$\frac{f(y_k)}{g(x_k)} \le \frac{f(y_k)}{\tilde{g}(x_k)} \le \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}(x_k)}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

$$\frac{g(y_k)}{g(x_k)} \le \frac{g(x_k)}{\tilde{g}(x_k)} \le \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}(x_k)}} \to 0$$

□

2.10 Правило Лопиталя

$f, g : (a,b) \to \mathbb{R} \quad a \in \overline{\mathbb{R}}$
f, g — дифф., $g' \ne 0$ на (a,b)
Пусть $\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow[x\to a+0]{} A \in \overline{\mathbb{R}}$
Пусть $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ — неопределенность $\left\{\frac{0}{0}, \frac{+\infty}{+\infty}\right\}$
Тогда $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

Доказательство. $g' \ne 0 \Rightarrow g'$ — сохр. знак $\Rightarrow g$ — монотонна.
Для $\frac{0}{0} \quad g(x) \ne 0$ в (a,b)
По Гейне $x_k \to a \ \ (x_k \ne a, x_k \in (a,b))$
Выберем y_k по лемме

$$\frac{f(x_k) - f(y_k)}{g(x_k) - g(y_k)} = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)} \text{ — т. Коши}$$

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} - \frac{f(y_k)}{g(x_k)} = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}\left(1 - \frac{g(y_k)}{g(x_k)}\right)$$

$x_k \to a \quad y_k \to a \quad \xi_k \to a$ □

2.11 Теорема Штольца

Это дискретная версия правила Лопиталя.
$y_n \to 0, x_n \to 0$ — строго монот.

$$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a \in \mathbb{R}$$

Тогда $\exists \lim \dfrac{x_n}{y_n} = a$

Доказательство. 1. $a > 0 \quad (a \ne +\infty)$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ [\varepsilon < a] \ \ \exists N_1 \ \ \forall n > N_1 \ \ a_\varepsilon < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < a + \varepsilon$$

Берем $N > N_1$

$$a - \varepsilon < \frac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N} < a + \varepsilon$$

$$\vdots$$

$$a - \varepsilon < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < a + \varepsilon$$

По неправильному сложению:*(оно применимо, т.к. все дроби положительные)*

$$a - \varepsilon < \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} < a + \varepsilon$$

$n \to +\infty$

$$a - \varepsilon < \frac{x_N}{y_N} < a + \varepsilon$$

2. $a = +\infty$ доказывается так же
3. $a < 0$ поменяем знак и докажем так же
4. $a = 0$ т.к. знаки $x_n - x_{n-1}$ и $y_n - y_{n-1}$ фикс., $a = +0$ или $a = -0$

   Для $a = +0 \lim \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = +\infty$

□

2.12 Пример неаналитической функции

Отсутствует

2.13 Интегральное неравенство Чебышева. Неравенство для сумм

Неравенство Чебышева
$f, g \in C[a, b]$ монот. возр.
Тогда

$$I_f \cdot I_g \leq I_{fg}$$

$$\int\limits_a^b f \int\limits_a^b g \leq (b - a) \int\limits_a^b fg$$

Доказательство. $x, y \in [a, b] \quad (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$

$$f(x)g(x) - f(y)g(x) - f(x)g(y) + f(y)g(y) \geq 0$$

Интегрируем по x по $[a, b]$

$$I_{fg} - f(y)I_g - g(y)I_f + f(y)g(y) \geq 0$$

Интегрируем по y по $[a, b]$

$$I_{fg} - I_f I_g - I_g I_f + I_{fg} \geq 0$$

□

Дискретное неравенство Чебышева
$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \frac{1}{n}\sum b_i \leq \frac{1}{n}\sum a_i b_i$$

Доказательство.

$$f(x) = a_i, x \in (i-1, i], i = 1 \dots n - \text{задана на } (0, n]$$

$$g(x) = \dots b_i$$

$$I_f I_g \leq I_{fg}$$

□

2.14 Свойства определенного интеграла: линейность, интегрирование по частям, замена переменных

Дано выше. (2.5, стр. 8)

2.15 Иррациональность числа пи

$$H_n := \frac{1}{n!} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos t dt := \frac{1}{n!} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f g' dt$$

$$H_n = \left[f' = -2n \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} t \quad g = \sin t \right] =$$

$$= \frac{1}{n!} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \sin t \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{(n-1)!} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} t \sin t$$

$$= 0 + \frac{2}{(n-1)!} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} + \sin t \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$+ \frac{2}{(n-1)!} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left((2n-1) \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} - \frac{\pi^2}{2}(n-1) \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2} \right) \cos t dt =$$

$$= (4n-2) H_{n-1} - \pi^2 H_{n-2}$$

Число π — иррационально

Доказательство. Пусть $\pi = \frac{p}{q}$; H_n задано выше

$$H_n = (4n-2) H_{n-1} - \pi^2 H_{n-2}$$

$$H_0 = 2, \quad H_1 = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi^2}{4} - t^2) \cos t = 2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi^2} t \sin t dt = 2t(-\cos t) \Big|_{\dots}^{\dots} + 2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t = 4$$

$$H_n = \dots H_1 + \dots H_0 = P_n(\pi^2) - \text{многочлен с целыми коэффициентами, степень} \leq n$$

$$q^{2n} P_n \left(\frac{p^2}{q^2}\right) = \text{ целое число } = q^{2n} H_n = q^{2n} H_n > 0 \Rightarrow q^{2n} H_n \geq 1$$

$$1 \leq \frac{q^{2n}}{n!} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos t dt \leq \frac{q^2 n 4^n}{n!} \pi \to 0$$

Противоречие. □

2.16 ! Теорема о вычислении аддитивной функции промежутка по плотности

О вычислении аддитивной функции промежутка по плотности
$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — непр. $\quad \Phi : Segm\langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$
f — плотность Φ
Тогда $\Phi([p, q]) = \int\limits_b^a f, \quad [p, q] \subset \langle a, b\rangle$

Доказательство.

$$F(x) := \begin{cases} 0 & , x = a \\ \Phi([a, x]) & , x > a \end{cases} \text{ — первообразная } f$$

Это утверждение ещё не доказано, но если мы его докажем, то:

$$\Phi([p, q]) = \Phi[a, q] - \Phi[a, p] = F(q) - F(p) = \int\limits_p^a f$$

Докажем утверждение:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\Phi[a, x+h] - \Phi[a, x]}{h} = \frac{\Phi[x, x+h]}{h} = [0 \le \Theta \le 1] = f(x + \Theta h)$$

□

2.17 Площадь криволинейного сектора: в полярных координатах и для параметрической кривой

$$\Phi[\alpha, \beta] = S_{\text{сектор}(\alpha,\beta)} = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$$

$x(t), y(t)$ — кривая в $\mathbb{R}^2$

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\int_{t_\alpha}^{t_\beta}(x(t)^2 + y(t)^2)\frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t)}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{t_\alpha}^{t_\beta} y'(t)x(t) - y(t)x'(t)dt$$

2.18 Изопериметрическое неравенство

Изопериметрическое неравенство
$G \subset \mathbb{R}^2$ — выпуклое замкнутое множество (ограниченное)
$diamG = \sup\{\rho(x, y),\ x, y \in G\}$
$diamG \le 1$
Тогда $\sigma(G) \le \frac{\pi}{4}$

Доказательство. Пойдём от некоторой точки на границе G под углом φ внутрь фигуры по прямой. В какой-то момент мы встретим другую граничную точку. Назовем этот процесс $r(\varphi)$ *(возвращает длину пути)*. Очевидно, что $r^2(\varphi) + r^2(\varphi - \frac{\pi}{2}) \le (diamG)^2 \le 1$

$$\sigma(G) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} r^2(\varphi)d\varphi + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi)d\varphi\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(r^2(\varphi) + r^2\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right)d\varphi \le \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1d\varphi = \frac{\pi}{4}$$

□

2.19 Лемма о трех хордах

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. f — вып. $\langle a, b\rangle$
2. $\forall x_1, x_2, x_3 \in \langle a, b\rangle \;\; x_1 < x_2 < x_3 \quad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$

Доказательство. Левое $\Leftrightarrow f(x_2)(x_3 - x_1) \le f(x_3)(x_2 - x_1) + f(x_1)(x_3 - x_1 - (x_2 - x_1))$

$$f\left(x_3\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} + x_1\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\right) = f(x_2) \le f(x_3)\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} + f(x_1)\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$$

□

2.20 Теорема об односторонней дифференцируемости выпуклой функции

f — вып. $\langle a, b\rangle$. Тогда $\forall x \in (a, b) \;\; \exists f'_+(x), f'_-(x)$ и $\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$

$$f'_-(x_1) \le f'_+(x_1) \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le f'_-(x_2)$$

Доказательство. $f'_+(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1+0} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ — монотонно убывающая функция от x

Фиксируем $x_0 < x_1$. По лемме о трех хордах $\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} \le \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ □

2.21 Следствие о точках разрыва производной выпуклой функции

f — вып. на $\langle a, b\rangle \Rightarrow f$ непр. на (a, b)

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0)$$

2.22 Описание выпуклости с помощью касательных

f — вып. на $\langle a, b\rangle$. Тогда график f расположен не ниже любой касательной
т.е. $\forall x, x_0 \quad f(x) \ge f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Доказательство. "$\Rightarrow$"
Если $x > x_0 \quad f'(x_0) \ge \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, это неравенство 2. из предыдущей теоремы
$x < x_0$ аналогично
"$\Leftrightarrow$" фиксируем x_0. Берем $x_1 < x_0 < x_2$
$f(x_1) \ge f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$; $f(x_2) \ge f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0)$, т.е. $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \le f'(x_0) \le \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$.
Это верно по лемме. □

2.23 Дифференциальный критерий выпуклости

1. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, дифф. в (a, b)

   Тогда f — вып. $\Rightarrow f'$ возр. на (a, b)

   Если f — строго выпуклая $\Rightarrow f'$ строго возрастает

2. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, дважды дифф. на (a, b)

   f — вып. $\Leftrightarrow f'' \geq 0$ на (a, b)

   (a) "$\Rightarrow$" $f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2) \quad (x_1 < x_2)$
   "$\Leftarrow$" $?f$ вып. $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c_1) < f'(c_2) = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$
   Теперь утверждение 2. очевидно.

2.24 Обобщенная теорема о плотности

Обобщенная теорема о плотности.
$\Phi : Segm\langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — аддитивная функция промежутка
$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — непр.
$\forall \Delta \in Segm\langle a, b\rangle \;\; \exists m_\Delta, M_\Delta$ — не точный минимум/максимум

1. $m_\Delta l_\Delta \leq \Phi(\Delta) \leq M_\Delta l_\Delta$

2. $m_\Delta \leq f(x) \leq M_\Delta$ при всех $x \in \Delta$

3. $\forall$ фикс. $x \quad M_\Delta - m_\Delta \xrightarrow[\text{“}\Delta \to x\text{”}]{} 0$

   $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall \Delta : l_\Delta < \delta \quad |M_\Delta - m_\Delta| < \varepsilon$

Тогда $\forall [p, q] \in Segm\langle a, b] \quad \Phi([p, q]) = \int\limits_p^q f$

Доказательство. $F(x) = \begin{cases} 0, & x = a \\ \Phi[a, x], & x > a \end{cases}$
Докажем, что F — первообразная f.
Фиксируем x
По 1.:

$$m_\Delta \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\Phi[x, x+h]}{h} \leq M_\Delta$$

По 2.:

$$m_\Delta \leq f(x) \leq M_\Delta$$

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| \leq M_\Delta - m_\Delta \xrightarrow[\text{“}\Delta \to x\text{”}]{} 0$$

Мы не можем написать "$\Delta \to x$" без кавычек, т.к. Δ — не число, но "$\Delta \to x$"$\Leftrightarrow h \to 0$
Таким образом,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \xrightarrow[h \to 0]{} f(x)$$

□

2.25 Вычисление длины гладкого пути

$\gamma \in C^1([a,b] \to \mathbb{R}^m)$

Тогда $l(\gamma) = \int\limits_a^b ||\gamma'(t)||dt$

Доказательство. Будем считать $\gamma' \neq 0$, γ — инъективная.
$\Phi : [p,q] \subset [a,b] \mapsto l(\gamma|_{[p,q]})$ — адд. ф-ция промежутка.
Докажем, что $f(t) = ||\gamma'(t)||$ — плотность Φ

$$\Delta \subset [a,b] \quad m_i(\Delta) := \min_{t\in\Delta} |\gamma_i'(t)| \quad M_i(\Delta) = \max |\gamma_i'(t)|$$

$$m_\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^m m_i(\Delta)^2} \quad M_\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^m M_i(\Delta)^2}$$

Докажем, что $m_\Delta l_\Delta \leq \Phi(\Delta) \leq M_\Delta l_\Delta$
$\tilde{\gamma} : \Delta \to \mathbb{R}^m$ — лин. путь
$\tilde{\gamma}(t) = \vec{M} \cdot t$, где $\vec{M} = \begin{pmatrix} M_1(\Delta) & \dots & M_m(\Delta) \end{pmatrix}$
$T : C_{\gamma|_\Delta} \to C_{\tilde{\gamma}} \quad \gamma(t) \mapsto \tilde{\gamma}(t)$
Утверждение: T — растяжение.

$$||\vec{M}_q - \vec{M}_p|| = (q-p)||\vec{M}|| = (q-p)M_\Delta$$

$$\rho(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (\gamma_i(t_0) - \gamma_i(t_1))^2} \overset{\text{т. Лагранжа}}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^m \gamma_i'(\bar{t}_i)^2 (t_0 - t_1)^2} \leq ||\vec{M}|| \cdot |t_0 - t_1| =$$
$$= \rho(\tilde{\gamma}(t_0), \tilde{\gamma}(t_1))|t_0 - t_1|$$

□

2.26 Объем фигур вращения

$f : \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ — непр., $f \geq 0$
$\Phi_x(\Delta) =$ "объем фигуры вращения вокруг оси OX"
$\Phi_y(\Delta) =$ "объем фигуры вращения вокруг оси OY"
Тогда : $\forall \Delta = [p,q] \in Segm\langle a,b \rangle$:

1. $\Phi_x[p,q] = \pi \int\limits_p^q f^2(x)dx$

2. $\Phi_y[p,q] = 2\pi \int\limits_p^q xf(x)dx$

Доказательство. 1. Это — упражнение, оно не использует ничего умного.

2. Мы знаем, что объем цилиндра $= S(\text{основание}) \cdot h$.

   Для оценки $\Phi(\Delta)$ найдем прямоугольник, который является минимальным по площади сечения и максимальный прямоугольники: Π_{min} и Π_{max}.

$$\pi m_\Delta (q-p) = \pi \min f \min 2x \cdot (q-p) \leq V((\Pi_{min})_y) \leq \Phi(\Delta) \leq$$
$$\leq V((\Pi_{max})_y) \leq \pi \max_{x\in[p,q]} f \max_{x\in[p,q]} 2x \cdot (q-p) = \pi M_\Delta (q-p)$$

   Можем заметить, что Φ подходит под все три пункта теоремы об обобщенной плотности.

□

2.27 ! Интеграл как предел интегральных сумм

$f \in C[a,b]$

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall \text{дробление } \tau = \{x_0 \dots x_n\} : |\tau| < \delta\ \ \forall \text{оснащение } \xi_i :$$
$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon$$

Доказательство. По теореме Кантора о равномерной непрерывности на компакте.
$[a,b]$ — компакт, f непрерывна на $[a,b] \Rightarrow f$ равномерно непрерывна на $[a,b]$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall x, \overline{x} \in [a,b] : |x - \overline{x}| < \delta \quad |f(x) - f(\overline{x})| < \varepsilon$$

По двойной бухгалтерии заменим ε на $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall x, \overline{x} \in [a,b] : |x - \overline{x}| < \delta \quad |f(x) - f(\overline{x})| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Разобьем интеграл на части:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \right)$$

Запишем $(x_i - x_{i-1})$ в виде интеграла $\int_{x_{i-1}}^{x_i} dx$

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| = \left| \sum_{i=1}^n \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - f(\xi_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \right) \right| =$$
$$= \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(\xi_i))dx \right| \le \sum \left| \int \right| \le \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |(f(x) - f(\xi_i))dx| \le \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\varepsilon}{b-a} dx =$$
$$= \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

□

2.28 Теорема об интегральных суммах для центральных прямоугольников

$f \in C^2[a,b]$ $x_0 = a < x_1 \dots < x_n = b$ $\delta = \max(x_i - x_{i-1})$ $\xi_i := \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$. Тогда

$$\left| \int_a^b f - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \le \frac{\delta^2}{8} \int_a^b |f''| dx$$

Доказательство.

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f(x)dx + \int_{\xi_i}^{x_i} f(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f(x)d(x - x_{i-1}) + \int_{\xi_i}^{x_i} f(x)d(x - x_i) =$$
$$= f(x)(x - x_{i-1})\Big|_{x=x_{i-1}}^{x=\xi_i} - \int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f'(x)(x - x_{i-1})dx + f(x)(x - x_i)\Big|_{x=\xi_i}^{x=x_i} - \int_{\xi_i}^{x_i} f'(x)(x - x_{i-1})dx = (*)$$

Заметим, что $\xi_i - x_{i-1} = x_i - \xi_i$, поэтому $f(x)(x-x_{i-1})\Big|_{x=x_{i-1}}^{x=\xi_i} + f(x)(x-x_i)\Big|_{x=\xi_i}^{x=x_i} = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$

$$(*) = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \Big(f'(x)\frac{(x-x_{i-1})^2}{2}\Big|_{x_{i-1}}^{\xi_i} - \frac{1}{2}\int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f''(x-x_{i-1})^2 dx +$$

$$+ f'(x)\frac{(x-x_i)^2}{2}\Big|_{\xi_i}^{x_i} - \frac{1}{2}\int_{\xi_i}^{x_i} f''(x-x_i)^2 dx\Big) =$$

$$= f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - 0 + \frac{1}{2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x)\varphi(x)dx$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} (x-x_{i-1})^2, & x \in [x_{i-1}, \xi_i] \\ (x-x_i)^2, & x \in [\xi_i, x_i] \end{cases}$$

Итого:

$$\int_a^b f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \frac{1}{2}\int_a^n f''(x)\varphi(x)dx$$

$$\left|\int - \sum\right| \le \frac{1}{2}\int_a^b |f''(x)|\varphi(x)dx$$

$$\max_{x\in[a,b]} \varphi(x) \overset{\text{достигается на отрезке длины } \delta}{=} \frac{\delta}{4}$$

$$\frac{1}{2}\int_a^b |f''(x)|\varphi(x)dx \le \frac{\delta^2}{8}\int_a^b |f''|$$

□

2.29 Теорема о формуле трапеций, формула Эйлера-Маклорена

2.29.1 Теорема о формуле трапеций

$f \in C^2[a,b], \tau, \delta = |\tau|$
Тогда

$$\left|\int_a^b f dx - \sum \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1})\right| \le \frac{\delta^2}{8}\int_a^b |f''|$$

Доказательство. Берем $\xi_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)d(x-\xi_i) = f(x)(x-\xi_i)\Bigg|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)(x-\xi_i)dx =$$

$$= (f(x_i) + f(x_{i-1}))\frac{x_i - x_{i-1}}{2} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)d((x-x_{i-1})(x_i - x)) = (*)$$

Проверим, что замена выражение под дифференциалом верное:

$$((x-x_{i-1})(x_i-x))' = (-x^2 + x(x_i + x_{i-1}) - x_{i-1}x)' = -2\left(x - \frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)$$

Действительно верно.

$$\psi(x) := (x-x_{i-1})(x_i - x)$$

$$(*) = (f(x_i) + f(x_{i-1}))\frac{x_i - x_{i-1}}{2} + \frac{1}{2}f'(x)(x - x_{i-1})(x_i - x)\Bigg|_{x_{i-1}}^{x_i} - \frac{1}{2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f''\psi(x)dx$$

$$\left|\int - \sum\right| \le \frac{1}{2}\int_a^b |f''|\psi(x)dx$$

$$\max\psi = \frac{\delta^2}{4}$$

□

2.29.2 Формула Эйлера-Маклорена

$m, n \in \mathbb{Z}, f \in C^2[m, n]$. Тогда

$$\int_m^n f(x)dx = \left(\sum_{i=m}^{n}\right)' f(i) - \frac{1}{2}\int f''(x)\{x\}(1 - \{x\})dx$$

$'$ означает, что крайние слагаемые берутся с весом $\frac{1}{2}$, $\{x\}$ — дробная часть x

Доказательство. Это очевидно по формуле трапеций: $x_i := i$

$$\int_m^n f(x)dx = \sum_{i=m+1}^{n} \frac{f(i) + f(i-1)}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2}\int_m^n f''(x)\psi(x)$$

$$\psi(x) \overset{def}{=} (x - x_{i-1})(x_i - x) = (x - i + 1)(i - x) = (x - i + 1)(1 - (x - i + 1)) = \{x\}(1 - \{x\})$$

$f(n)/2$ и $f(m)/2$ в сумму попадают только 1 раз, остальные — 2 раза, как и в искомой формуле. □

2.30 Асимптотика степенных сумм

$p > -1 \quad f(x) = x^p$

$$1^p + 2^p + \dots n^p = \int_1^n x^p dx + \frac{1}{2}1^p + \frac{1}{2}n^p + \frac{1}{2}\int_1^n p(p-1)x^{p-2}\{x\}(1 - \{x\}) =$$

$\frac{1}{2}1^p + \frac{1}{2}n^p$ добавлены, чтобы не писать слева деление крайних слагаемых на 2.

$$= \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}n^p + \mathcal{O}(\max(1, n^{p-1})) = (*)$$

Откуда появилось $\mathcal{O}$? $\{x\}(1-\{x\}) < 1 \Rightarrow \int_1^n p(p-1)x^{p-2}\{x\}(1-\{x\}) \le C(n^{p-1} - 1)$, C — некоторая константа.
Занесем константы под $\mathcal{O}$:

$$(*) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{1}{2}n^p + \mathcal{O}(\max(1, n^{p-1}))$$

2.31 Асимптотика частичных сумм гармонического ряда

$$]p = -1 \quad 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \int_1^n x^{-3}\{x\}(1 - \{x\}) = (*)$$

$$\int_1^n x^{-3}\{x\}(1 - \{x\}) \le \frac{1}{4}\int_1^n \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{8}\frac{-1}{\alpha^2}\Bigg|_1^n = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) < \frac{1}{8}$$

$$(*) = \ln n + \gamma + o(1) \quad \gamma \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right]$$

2.32 Формула Валлиса

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2\frac{1}{2k}=\frac{\pi}{2}$$

Вывод формулы Валлиса:

$$I_n:=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\left[\begin{array}{ll} u=\sin^{n-1}x & du=(n-1)\sin^{n-2}x\cos xdx \\ dv=\sin xdx & v=-\cos x\end{array}\right]=$$

$$=-\cos x\sin^{n-1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x(n-1)\sin^{n-2}xdx=$$

$$(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-sin^2x)\sin^{n-2}x=(n-1)(I_{n-2}-I_n)$$

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}=\frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}I_{n-4}=\frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\frac{n-5}{n-4}I_{n-6}=\ldots=\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}, & n-\text{чёт.}\\ \frac{(n-1)!!}{n!!}1, & n-\text{нечет.}\end{cases}$$

$$\sin^{2k+1}x\le\sin^{2k}x\le\sin^{2k-1}x$$

Проинтегрируем по $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$:

$$\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\le\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2}\le\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}$$

$$\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2\frac{1}{2k+1}\le\frac{\pi}{2}\le\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2\frac{1}{2k}$$

Правая часть − левая часть $=\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+1}\right)=\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)\frac{1}{2k}\frac{1}{2k+1}\le\frac{\pi}{2}\frac{1}{2k}\xrightarrow{k\to+\infty}0$

Таким образом, левая и правая части стремятся друг другу и зажимают $\pi/2$.

2.33 Формула Стирлинга

$$n!\underset{n\to+\infty}{\sim}n^ne^{-n}\sqrt{n}\sqrt{2\pi}$$

$$]f(x)=\ln x\quad \ln 1+\ln 2+\ldots+\ln n=\int_1^n\ln xdx+\frac{\ln n}{2}+\frac{1}{2}\int_1^n\frac{\{x\}(1-\{x\})}{x^2}dx\le$$

$$\le n\ln n-n+1+\frac{\ln n}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{4}\int_1^n\frac{1}{x^2}=n\ln n-n+\frac{\ln n}{2}+C_1+o(1)$$

$$\ln 1+\ln 2+\ldots+\ln n=\ln n!$$

$$n!=e^{n\ln n-n+\frac{\ln n}{2}+C_1+o(1)}$$

$$n!=n^ne^{-n}\sqrt{n}e^{C_1+o(1)}\underset{n\to+\infty}{\sim}Cn^ne^{-n}\sqrt{n}$$

Найдём C.

$$\sqrt{\pi}=\lim_{k\to+\infty}\frac{2\cdot 4\cdots(2k)}{1\cdot 3\cdots(2k-1)}\frac{1}{\sqrt{k}}=$$

Домножим дробь на знаменатель:

$$=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{2^2\cdot 4^2\cdots(2k)^2}{(2k)!}=$$

Вынесем 2 из каждого множителя в числителе:

$$= \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{(2^k k!)^2}{(2k)!} =$$

Замена на эквивалент:

$$= \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{(2^k C k^k e^{-k} \sqrt{k})^2}{C(2k)^{2k} e^{-2k} \sqrt{2k}} = \lim_{k \to +\infty} \frac{C}{\sqrt{2}} = \frac{C}{\sqrt{2}}$$

$$C = \sqrt{2\pi}$$