Конспект по дискретной математике

October 15, 2019

1 Оценка числа элементов в схеме

Теорема 1. B_1 *и* B_2 $\exists c\ \forall f\ \ size_{B_1}(f) \leq c \cdot size_{B_2}$

Доказывалась ранее.

Теорема 2. *О нижней оценке. Почти все функции требуют* $\Omega(\frac{2^n}{n})$ *элементов в своей записи. Альтернативная формулировка:*

$$f(n) = \frac{2^n}{n} \quad g(n) : \frac{g}{f} \to 0 \quad F_g = \{\textit{булевы функции, } size \leq g(n)\}$$

Тогда

$$\frac{|F_g|}{2^{2^n}} \to 0$$

Теорема 3. *О верхней оценке.*

$$\forall f - \textit{бул. ф. } \exists \textit{схема из ф.э., содержащая } O\left(\frac{2^n}{n}\right) \textit{ элементов}$$

2 Линейная программа

Пример для $x_1 \oplus x_2$:
$y_1 = \neg x_1$
$y_2 = \neg x_2$
$y_3 = x_1 \wedge y_2$
$y_4 = x_2 \wedge y_1$
$y_5 = y_3 \vee y_4$

Линейная программа — нумерованное множество строк вида

$$(a, [i_1 \dots i_k]), \text{где } a \in B\textit{(базис)}, i_j - \text{индексы переменных}, a : \mathbb{B}^k \to \mathbb{B}$$

Теорема 4. *Для* $f \exists$ *линейная программа длины* $r \Leftrightarrow \exists$ *схема из* r *функциональных элементов.*

Оценка: сколько линейных программ над $\{\downarrow\}$ длины r?
Первая строка: n^2 вариантов *(выбор 2 объектов из* n*)*
Вторая строка: $(n+1)^2$ варинатов *(выбор 2 объектов из* n *и* y_1*)*

$\vdots$
$(n+r-1)^2$

$$K_{n,r} = \prod_{i=0}^{r-1}(n+i)^2 \leq (n+r)^{2r}$$

$$\log_2 K_{n,r} \leq \log_2(n+r)^{2r} = 2r\log_2(n+r)$$

Лемма 1.

$$\exists \text{ *функция:* } size_B(f) \geq \frac{2^n}{2n}$$

Proof. Предположим противное:

$$r < \frac{2^n}{2n}$$

$$\log_2 K_{n,r} \leq 2r\log_2(n+r) < \frac{2\cdot 2^n}{2n}\log_2(n+\frac{2^n}{2n}) \leq \frac{2^n}{n}\log_2 2^n = 2^n$$

$$\Rightarrow K_{n,r} < 2^{2^n}!!!$$

Обощим для произвольного c:

$$r < \frac{2^n}{2cn}$$

$$\log_2 K_{n,r} \leq 2r\log_2(n+r) < \frac{2\cdot 2^n}{2cn}\log_2(n+\frac{2^n}{2cn}) \leq \frac{2^n}{cn}\log_2 2^n = \frac{2^n}{c}$$

$$\Rightarrow K_{n,r} < 2^{\frac{2^n}{c}}!!!$$

□

Вернемся к доказательству теоремы 2.

Proof.

$$\frac{|F_g|}{2^{2^n}} \to 0$$

$$\frac{2^{\frac{2^n}{c}}}{2^{2^n}} = 2^{2^n\cdot(\frac{1}{n}-1)} \to 0$$

□

Теорема 5. $\forall f \;\; \exists$*схема из функ.эл.*$O(\frac{2^n}{n})$