

1 Линейные операторы

1.1 Линейные операторы и их матричная запись, примеры.

$\varphi : X \rightarrow Y, X, Y - \text{ЛП}, \dim X = n, \dim Y = m$

Определение. Отображение φ называется линейным, если

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad \varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$$

$$\forall \alpha \in K \quad \varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$$

Определение. Отображение φ , обладающее свойством линейности называется **линейным оператором** (ЛОп)

Пример. • $\Theta : \Theta x = 0_Y$ — нулевой оператор

- $\mathcal{I} : \mathcal{I}x = x$ — единичный (тождественный) оператор
- $X = L_1 \dot{+} L_2 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in X \quad \exists! x_1 \in L_1, x_2 \in L_2 : x = x_1 + x_2$

Проектор:

$$\mathcal{P}_{L_1}^{\|L_2} : X \rightarrow L_1 \quad \mathcal{P}_{L_1}^{\|L_2} x = x_1$$

$$\mathcal{P}_{L_2}^{\|L_1} : X \rightarrow L_2 \quad \mathcal{P}_{L_2}^{\|L_1} x = x_2$$

- $X = C^1[-1, 1]$ — первая производная \exists и непрерывна

$$\forall f \in X \quad (\varphi f)(x) = \int_{-1}^1 f(t) K(x, t) dt$$

$K(x, t)$ — интегральное ядро, например $x^2 + tx$

$\{e_j\}_{j=1}^n$ — базис X , $\{h_k\}_{k=1}^m$ — базис Y , $\varphi(e_j) = \sum_{k=1}^m a_j^k h_k$

Определение. Набор коэффициентов $\|a_j^k\|$ образует матрицу $m \times n$, которая называется **матрицей ЛОп** в паре базисов $\{e_j\}$ и $\{h_k\}$

1.2 Пространство линейных операторов.

$\varphi, \psi : X \rightarrow Y$ — ЛОп

$\chi = \varphi + \psi$, если $\forall x \in X \quad \chi(x) = (\varphi + \psi)x = \varphi(x) + \psi(x)$

$\chi = \alpha\varphi$, если $\forall x \in X \quad \chi(x) = (\alpha\varphi)x = \alpha\varphi(x)$

$$\dim \mathcal{L}(X, Y) = \dim X \cdot \dim Y = m \cdot n$$

1.3 Алгебра. Примеры. Изоморфизм алгебр.

Алгебра — модуль над коммутативным кольцом с единицей, являющийся кольцом.

Кольцо — множество, на котором заданы бинарные операции $+$ и \cdot с следующими свойствами:

1. $a + b = b + a$
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$
3. $\exists 0 \in R : \forall x \in R : x + 0 = 0 + x = x$
4. $\forall x \in R : \exists (-x) \in R : x + (-x) = (-x) + x = 0$
5. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
6. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
7. $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$

Коммутативное кольцо — кольцо с коммутативным умножением: $a \cdot b = b \cdot a$

Кольцо с единицей — кольцо с нейтральным элементом по умножению: $\exists 1 \in R : a \cdot 1 = a$

Модуль над кольцом (коммутативным, с единицей) R — множество M с операциями:

1. $+: M \times M \rightarrow M$
 - (a) $a + b = b + a$
 - (b) $a + (b + c) = (a + b) + c$
 - (c) $\exists 0 \in R : \forall x \in R : x + 0 = 0 + x = x$
 - (d) $\forall x \in R : \exists (-x) \in R : x + (-x) = (-x) + x = 0$
2. $\cdot: M \times R \rightarrow M$
 - (a) $(r_1 r_2)m = r_1(r_2 m)$
 - (b) $1m = m$
 - (c) $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$
 - (d) $(r_1 + r_2)m = r_1 m + r_2 m$

Примеры:

1. \mathbb{R}^3 с векторным произведением — алгебра над \mathbb{R}
2. \mathbb{C} — алгебра над \mathbb{R}
3. \mathbb{H} (кватернионы)
4. Многочлены

Изоморфизм алгебр — биекция $F: A \rightarrow B$, где A и B — алгебры, сохраняющая “ $+$ ” и “ \cdot ”:

1. $F(kx) = kF(x)$
2. $F(x + y) = F(x) + F(y)$
3. $F(xy) = F(x)F(y)$

Из этого следует, что $F(0_X) = 0_Y$

1.4 Алгебра операторов и матриц.

Умножение ЛОП: $(\mathcal{B} \cdot \mathcal{A})x = \mathcal{B}(\mathcal{A}x)$

Умножение матриц: $(A \cdot B)_{ik} = \sum_j a_{ij}b_{jk}$

Теорема 1.

$$\underbrace{\mathcal{C}}_C = \underbrace{\mathcal{B}}_B \underbrace{\mathcal{A}}_A \Leftrightarrow C = BA$$

Доказательство.

$$Ce_i = \mathcal{B}(\mathcal{A}e_i) = \mathcal{B}\left(\sum_j a_{ji}e_j\right) = \sum_j a_{ji}\mathcal{B}e_j = \sum_j a_{ji} \sum_k b_{kj}e_k$$

$$c_{il} = (Ce_i)_l = \sum_j a_{ji}b_{lj} \Rightarrow C = BA$$

□

Пространство ЛОП $\mathcal{F} : X \rightarrow X$ — алгебра, пространство квадратных матриц \mathbb{R}_n^n — алгебра.

1.5 Обратная матрица: критерий обратимости, метод Гаусса вычисления обратной матрицы.

В алгебре A выполняется $a_1 \cdot a_2 = e$, где e — единичный элемент матрицы. Тогда:

1. a_1 — **левый обратный** элемент для a_2
2. a_2 — **правый обратный** элемент для a_1

Если a_1 — и левый, и правый обратный к a_2 , то он называется **обратным** элементом к a_2 .

Теорема 2. $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$

Доказательство. “ \Leftarrow ”

$$\det A \neq 0 \stackrel{?}{\Rightarrow} \exists A^{-1} : AA^{-1} = E, A^{-1}A = E$$

$$\sum_j a_{ij}a_{jk}^{-1} = \delta_{ik}$$

Это система Крамера, т.к. $\det A \neq 0 \stackrel{def}{\Rightarrow}$ вектора $\in A$ ЛНЗ \Rightarrow единственное решение.

“ \Rightarrow ” то же самое, но наоборот.



□

$$\left[A \mid E \right] \sim \left[E \mid A^{-1} \right]$$

Доказательство.

$$\left[A \mid E \right] = \left[T_1 A \mid T_1 E \right] = \left[T_2 T_1 A \mid T_2 T_1 E \right] = \dots = \left[T_n \dots T_1 A \mid T_n \dots T_1 E \right] = \left[E \mid T_n \dots T_1 \right]$$

$$\triangleleft T_n \dots T_1 A = E \Rightarrow A^{-1} = T_n \dots T_1$$

□

Здесь T_i — матрица элементарного преобразования.

1.6 Обратная матрица: критерий обратимости, вычисление обратной матрицы методом присоединенной матрицы.

Критерий обратимости: Дано выше. (1.5, стр. 3)

Теорема 3.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^T$$

Доказательство. $AB = E \Rightarrow B = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^T$ — надо доказать.

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j^i \beta_k^j = \delta_k^i$$

$$] \delta_{k_0}^i = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1_{k_0} \ 0 \ \dots \ 0)^T = b$$

$$\beta_{k_0}^j = \xi^j \quad \alpha_j^i = a_j$$

$$\sum_{j=1}^n a_j \xi^j = b \quad \xi^j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$$

$$\Delta_j = \det A(a_j \rightarrow b)$$

□

$A(a_j \rightarrow b)$ — матрица A , где заменили j -тый вектор на b

$$\det A(a_j \rightarrow b) = 0 \cdot M_j^1 + \dots + 1 \cdot M_j^k + \dots + 0 = M_j^k$$

$$b_{jk} = \frac{(\tilde{A}^T)_k^j}{\det A} \Rightarrow B = \frac{\tilde{A}^j}{\det A}$$

1.7 Ядро и образ линейного оператора. Теорема о ядре и образе. Функции матриц и операторов.

$\varphi : X \rightarrow Y$

Определение. Ядро φ :

$$\text{Ker } \varphi = \{x \in X : \varphi x = 0\}$$

Примечание. $\text{Ker } \varphi \subset X$

Лемма 1. $\text{Ker } \varphi$ — ЛП

Определение. Образ φ :

$$\text{Im } \varphi = \{y \in Y : \exists x : \varphi(x) = y\}$$

Примечание.

$$\text{Im } \varphi \subset Y$$

Лемма 2. $\text{Im } \varphi$ — ЛП

Теорема 4. О ядре и образе

$$] \varphi : X \rightarrow X \Rightarrow \dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi = \dim X$$

Доказательство.] $\dim \operatorname{Ker} \varphi = K$

] $\{e_1 \dots e_k\}$ — базис $\operatorname{Ker} \varphi \Rightarrow \varphi(e_j) = 0 \quad \forall j = 1..k$

$\triangleleft \{e_1 \dots e_k; e_{k+1} \dots e_n\}$ — базис X

$$\triangleleft x = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j \quad \triangleleft \varphi(x) = \sum_{j=1}^n \xi^j \varphi(e_j) = \sum_{j=k+1}^n \xi^j \varphi(e_j)$$

$\{\varphi(e_{k+1}) \dots \varphi(e_n)\}$ — полный для $\operatorname{Im} \varphi$, т.к. любой $x \in \operatorname{Im} \varphi$ можно по нему разложить. Докажем ЛНЗ от обратного:

$$]\{\varphi(e_j)\}_{j=k+1}^n - \text{ЛЗ} \Rightarrow \exists \alpha^j : \sum_{j=k+1}^n \alpha^j \varphi(e_j) = 0 \Rightarrow \varphi \left(\sum_{j=k+1}^n \alpha^j e_j \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{или } \sum_{j=k+1}^n \alpha^j e_j \in \operatorname{Ker} \varphi \Rightarrow \text{ЛК } e_{k+1} \dots e_n \text{ разложима по } e_1 \dots e_k - \text{противоречие} \\ \text{или } \sum_{j=k+1}^n \alpha^j e_j = 0 \Rightarrow \alpha^j = 0 \Rightarrow \text{ЛНЗ} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \{\varphi(e_j)\}_{j=k+1}^n - \text{базис } \operatorname{Im} \varphi. \quad \square$$

1.8 Обратный оператор. Критерий существования обратного оператора.

Определение. Обратным к оператору φ называется оператор φ^{-1} :

$$\varphi^{-1} \varphi = \varphi \varphi^{-1} = \mathcal{I}$$

Теорема 5. Оператор φ обратим, если \exists базис, в котором его матрица невырождена

Теорема 6. $\triangleleft \varphi : X \rightarrow X$

$$\exists \varphi^{-1} \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} \varphi = \dim X \text{ или } \dim \operatorname{Ker} \varphi = 0$$

Доказательство. $\dim \operatorname{Im} \varphi = \dim X \Leftrightarrow \operatorname{Im} \varphi \simeq X \Rightarrow \varphi - \text{сюръекция}, \dim \operatorname{Ker} \varphi = 0 \Rightarrow \forall y \exists x : \varphi x = y \Rightarrow \varphi - \text{инъекция} \quad \square$

2 Тензорная алгебра

2.1 Преобразование координат векторов и * при замене базиса.

2.2 Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса. Преобразование подобия.

2.3 Тензоры (*ковариантность, независимое от ПЛФ определение*). Пространство тензоров.

2.4 Свертка тензора.

2.5 Транспонирование тензора.

2.6 Определитель линейного оператора. Внешняя степень оператора.

2.7 Независимость определителя оператора от базиса. Теорема умножения определителей.