Теорема 1. Обобщенная теорема о плотности.
$\Phi : Segm\langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — аддитивная функция промежутка
$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — непр.
$\forall \Delta \in Segm\langle a, b\rangle \;\; \exists m_\Delta, M_\Delta$ — не точный минимум/максимум

1. $m_\Delta l_\Delta \le \Phi(\Delta) \le M_\Delta l_\Delta$
2. $m_\Delta \le f(x) \le M_\Delta$ при всех $x \in \Delta$
3. $\forall$ фикс. $x \quad M_\Delta - m_\Delta \xrightarrow[\text{“}\Delta\to x\text{”}]{} 0$

   $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall \Delta : l_\Delta < \delta \quad |M_\Delta - m_\Delta| < \varepsilon$

Тогда $\forall [p, q] \in Segm\langle a, b] \quad \Phi([p, q]) = \int\limits_p^q f$

Доказательство. $F(x) = \begin{cases} 0, & x = a \\ \Phi[a, x], & x > a \end{cases}$
Докажем, что F — первообразная f.
Фиксируем x
По 1.:

$$m_\Delta \le \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\Phi[x, x+h]}{h} \le M_\Delta$$

По 2.:

$$m_\Delta \le f(x) \le M_\Delta$$

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| \le M_\Delta - m_\Delta \xrightarrow[\text{“}\Delta\to x\text{”}]{} 0$$

Мы не можем написать “$\Delta \to x$” без кавычек, т.к. Δ — не число, но “$\Delta \to x$”$\Leftrightarrow h \to 0$
Таким образом,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \xrightarrow[h\to 0]{} f(x)$$

$\square$

Объемы фигур вращения

Объем это $V : Fig \to \mathbb{R}$:

1. V — кон., адд.: $V(A_1 \sqcup A_2) = V(A_1) + V(A_2)$
2. $V(\text{ед. куб}) = 1$
3. V не меняется при движении

Проблема: такой функции не существует.
Поэтому будем использовать объем для частных случаев фигур, а не для всех.

Определение. $\lhd A \in \mathbb{R}^2$ — фигура в I квадранте.
Вращение A:

1. по оси $x : A_x = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, \sqrt{y^2 + z^2}) \in A\}$
2. по оси $y : A_y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + z^2}, y) \in A\}$

Для непр. $f : [a, b] \to \mathbb{R}, c \mapsto \tilde{c} \geq 0$:

$$\Phi(\Delta) = V(\Pi\Gamma(f, \Delta)_x)\textit{(или } y\textit{)}$$

Теорема 2. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — непр., $f \geq 0$
$\Phi_x(\Delta) =$ "объем фигуры вращения вокруг оси OX"
$\Phi_y(\Delta) =$ "объем фигуры вращения вокруг оси OY"
Тогда : $\forall \Delta = [p, q] \in Segm\langle a, b\rangle$:

1. $\Phi_x[p, q] = \pi \int\limits_p^q f^2(x)dx$

2. $\Phi_y[p, q] = 2\pi \int\limits_p^q xf(x)dx$

Доказательство.

1. Это — упражнение, оно не использует ничего умного.
2. Мы знаем, что объем цилиндра $= S$(основание) $\cdot h$.

   Для оценки $\Phi(\Delta)$ найдем прямоугольник, который является минимальным по площади сечения и максимальный прямоугольники: Π_{min} и Π_{max}.

$$\pi m_\Delta(q-p) = \pi \min f \min 2x \cdot (q-p) \leq V((\Pi_{min})_y) \leq \Phi(\Delta) \leq$$
$$\leq V((\Pi_{max})_y) \leq \pi \max_{x\in[p,q]} f \max_{x\in[p,q]} 2x \cdot (q-p) = \pi M_\Delta(q-p)$$

   Можем заметить, что Φ подходит под все три пункта теоремы об обобщенной плотности.

□

Пример. Объем тора.
Будем вращать окружность, центр которой лежат на оси OX в точке R, с радиусом r, относительно оси OY.

$$\frac{1}{2}V = 2\pi \int\limits_{R-2}^{R+2} (x\mp R)\sqrt{r^2-(x-R)^2}dx = \pi \int\limits_{R_2}^{R+2} 2(x-R)\sqrt{r^2-(x-R)^2}dx + 2\pi \int\limits_{R-2}^{R+2} R\sqrt{r^2-(x-r)^2}dx =$$

$$= -\pi\frac{1}{3}(r^2-(x-R)^2)^{\frac{3}{2}}|_{x=R-2}^{x=R+2} + 2\pi R\frac{\pi r^2}{2} = 2\pi R \cdot \pi r^2$$

Длина гладкого пути

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — непр.
$\gamma(a)$ — начало; $\gamma(b)$ — конец
$\gamma : t \mapsto \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ \vdots \\ \gamma_m(t) \end{pmatrix}$; γ_i — коорд. функции
Если все $\gamma_i \in C^1[a, b]$, то γ — **гладкий путь**.
$C_\gamma := \gamma([a, b])$ — **носитель пути**.

Вектор скорости:

$$\gamma'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\gamma(t+\Delta t) - \gamma(t)}{\Delta t} = \lim \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1(t+\Delta t) - \gamma_1(t)}{\Delta t} \\ \vdots \\ \frac{\gamma_m(t+\Delta t) - \gamma_m(t)}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \\ \vdots \\ \gamma_m'(t) \end{pmatrix}$$

Кривая Пеано: $[0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ — ломает длину пути, но она не гладкая, поэтому мы рассматриваем только гладкие пути.

Определение. **Длина пути** — фукнция l, заданная на множестве гладких путей в $\mathbb{R}^m$, такая что:

1. $l \geq 0$
2. l — аддитивна: $\forall [a,b] \;\; \forall \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m \;\; \forall c \in (a,b) \quad l(\gamma) = l(\gamma|_{[a,c]}) + l(\gamma|_{[c,b]})$
3. $\forall \gamma, \tilde{\gamma}$ — гладкие пути, $C_\gamma, C_{\tilde{\gamma}}$ — носители путей
   Если $\exists T : C_\gamma \to C_{\tilde{\gamma}}$ — сжатие: $(\forall M, M' \;\; \rho(T(M), T(M')) \leq \rho(M, M'))$, тогда $l(\tilde{\gamma}) \leq l(\gamma)$
4. Нормировка: γ — гладкий путь, $\gamma(t) = vt + u; \;\; u, v \in \mathbb{R}^m$:

$$l(\gamma) = \rho(\gamma(a), \gamma(b))$$

Свойства:

1. "Длина пути" $\geq$ "длина хорды"
2. При растяжениях длина растет.
3. Длина не меняется при движении.

Определение. $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n \quad t_0 = a < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$
$\tau = \{t_0 \ldots t_n\}$ — дробление отрезка.
Тогда **вариация функции** γ на отрезке $[a,b]$ это l:

$$l(\gamma) = \sup_\tau \left\{ \sum_{i=1}^n \rho(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \right\}$$

Лемма 1. *Вариация γ на отрезке $[a,b]$ — длина пути γ.*

Доказательство. Тривиальная проверка определения длины пути. Кохась не говорил, но надо доказать. □

Пример. Рассмотрим путь из A в B, который проходится за 1 час со скоростью 5 км/ч. Длина этого пути — 5 км.

Теорема 3. $\gamma \in C^1([a,b] \to \mathbb{R}^m)$
Тогда $l(\gamma) = \int\limits_a^b ||\gamma'(t)|| dt$

Доказательство. Будем считать $\gamma' \neq 0$, γ — инъективная.
$\Phi : [p,q] \subset [a,b] \mapsto l(\gamma|_{[p,q]})$ — адд. ф-ция промежутка.
Докажем, что $f(t) = ||\gamma'(t)||$ — плотность Φ

$$\Delta \subset [a,b] \quad m_i(\Delta) := \min_{t\in\Delta} |\gamma_i'(t)| \quad M_i(\Delta) = \max |\gamma_i'(t)|$$

$$m_\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} m_i(\Delta)^2} \quad M_\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} M_i(\Delta)^2}$$

Докажем, что $m_\Delta l_\Delta \leq \Phi(\Delta) \leq M_\Delta l_\Delta$
$\tilde{\gamma} : \Delta \to \mathbb{R}^m$ — лин. путь
$\tilde{\gamma}(t) = \vec{M} \cdot t$, где $\vec{M} = \begin{pmatrix} M_1(\Delta) & \dots & M_m(\Delta) \end{pmatrix}$
$T : C_{\gamma|_\Delta} \to C_{\tilde{\gamma}} \quad \gamma(t) \mapsto \tilde{\gamma}(t)$
Утверждение: T — растяжение.

$$||\vec{M}q - \vec{M}p|| = (q-p)||\vec{M}|| = (q-p)M_\Delta$$

$$\rho(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (\gamma_i(t_0) - \gamma_i(t_1))^2} \overset{\text{т. Лагранжа}}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \gamma_i'(\bar{t}_i)^2 (t_0 - t_1)^2} \leq ||\vec{M}|| \cdot |t_0 - t_1| =$$
$$= \rho(\tilde{\gamma}(t_0), \tilde{\gamma}(t_1))|t_0 - t_1|$$

□

Пример. Длина графика $y = f(x)$, $f \in C^1$ на отрезке $[a,b]$

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \quad \gamma'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix} \quad ||\gamma'(x)|| = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Пример. Длина кривой $r = r(\varphi)$ в полярных координатах, $\varphi \in [\alpha, \beta]$

$$x = r(\varphi)\cos\varphi \quad y = r(\varphi)\sin\varphi$$

$$\gamma'(\varphi) = \begin{pmatrix} r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi \\ r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$||\gamma'(\varphi)|| = \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2 - 2r'(\varphi)r(\varphi)\cos\varphi\sin\varphi + 2r'(\varphi)r(\varphi)\cos\varphi\sin\varphi}$$
$$||\gamma'(\varphi)|| = \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2}$$
$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi$$