

## Несколько классических неравенств

### 1. Неравенство Йенсена

$f$  — выпуклая на  $\langle a, b \rangle$ . Тогда

$$\forall x_1 \dots x_n \in \langle a, b \rangle \quad \forall \alpha_1 \dots \alpha_n : \alpha_i \geq 0 \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1 \quad f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)$$

*Доказательство.* Для  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$  тривиально.

$$\begin{aligned} \min x_i \leq x^* := \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n &\leq (\alpha_1 + \dots + \alpha_n) \max(x_i) = \max(x_i) \\ &\Rightarrow x^* \in \langle a, b \rangle \end{aligned}$$

В  $x^*$  можно провести опорную прямую  $y = kx + b$

$$f(x^*) = kx^* + b = \sum_{i=1}^n (\alpha_i kx_i) + b = \sum_{i=1}^n \alpha_i (kx_i + b) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$$

□

*Следствие.* Неравенство Коши.

$$a_i > 0 \quad \frac{1}{n} \sum a_i \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

*Доказательство.*  $f(x) = \ln x$  — вогн.

$$\ln \left( \frac{1}{n} a_1 + \dots + \frac{1}{n} a_n \right) \geq \frac{1}{n} \ln a_1 + \dots + \frac{1}{n} \ln a_n$$

Как это доказывает?

□

### 2. Интегральное неравенство Йенсена

- $f$  — выпуклая на  $\langle A, B \rangle$
- $\varphi : [a, b] \rightarrow \langle A, B \rangle$  — непрерывная
- $\lambda : [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$  — непрерывная (для кусочно-непрерывной тоже верно)
- $\int_a^b \lambda(t) dt = 1$

Тогда

$$f \left( \int_a^b \lambda(t) \varphi(t) dt \right) \leq \int_a^b \lambda(t) f(\varphi(t)) dt$$

*Доказательство.*  $m := \inf \varphi, M := \sup \varphi$

$$m \leq m \int_a^b \lambda(t) \leq \int_a^b \lambda(t) \varphi(t) \leq M \int_a^b \lambda(t) = M$$

$$x^* := \int_a^b \lambda(t) \varphi(t) dt \Rightarrow x^* \in \langle A, B \rangle$$

Для  $m = M$  тривиально.

$y = kx + b$  — опорная прямая в точке  $x^*$  графика  $f$ .

$$\begin{aligned} f(x^*) = kx^* + b &= k \int_a^b \lambda \varphi + b \int_a^b \lambda = \int_a^b \lambda(t)(k\varphi(t) + b)dt \leq \\ &\leq \int_a^b \lambda(t)f(\varphi(t))dt \end{aligned}$$

□

Пример.

$$f > 0, f \in C[a, b] \quad \exp \left( \frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f(x) dx \right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Возьмём логарифм от искомого неравенства:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f(x) dx \leq \ln \left( \frac{1}{b-a} \int_a^b f \right)$$

Подставим в интегральное неравенство Йенсена:

- $f \leftrightarrow \ln$
- $\lambda(t) \leftrightarrow \frac{1}{b-a}$
- $\varphi \leftrightarrow ??$

### 3. Неравенство Гёльдера

$a_1 \dots a_n, b_1 \dots b_n > 0, p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Тогда

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left( \sum a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Частный случай при  $p = q = 2$  — неравенство Коши-Буняковского.

Доказательство.  $f(x) = x^p, (p > 1)$  — строго выпуклая  $\Rightarrow f'' = p(p-1)x^{p-2} > 0$

По Йенсену  $(\sum \alpha_i x_i)^p \leq \sum \alpha_i x_i^p$

$$\text{Левая часть}^{\frac{1}{p}} = \sum \frac{b_i^q}{\sum b_i^q} a_i b_i^{\frac{-1}{p-1}} \sum b_i^q = \sum a_i b_i$$

$$\text{Правая часть} = \sum \frac{b_i^q}{\sum b_i^q} a_i^p b_i^{-q} \left( \sum b_j^q \right)^p = \left( \sum a_i^p \right) \left( \sum b_j^q \right)^{\frac{p}{q}}$$

$$\text{Правая часть}^{\frac{1}{p}} = \left( \sum a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum b_j^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

□

Общий вид:  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$

$$\left| \sum a_i b_i \right| \leq \left( \sum |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

#### 4. Интегральное неравенство Гёльдера

$p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$   $f, g \in C[a, b]$ . Тогда

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left( \int_a^b |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_a^b |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

*Доказательство.* По интегральным суммам:

$$x_i := a + i \frac{b-a}{n} \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad a_i := f(x_i)(\Delta x_i)^{\frac{1}{p}} \quad b_i = g(x_i)(\Delta x_i)^{\frac{1}{q}}$$

$$a_i b_i = f(x_i)g(x_i)(\Delta x_i)$$

$$\left| \sum_{i=1}^n f(x_i)g(x_i)\Delta x_i \right| \leq \left( \sum_{i=1}^n |f(x_i)|^p \Delta x_i \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n |g(x_i)|^q \Delta x_i \right)^{\frac{1}{q}}$$

Предельный переход доказывает искомое. □

Неравенство КБШ в пространстве функций — частный случай этого неравенства.

#### 5. Неравенство Минковского

$p \geq 1, a_i, b_i \in \mathbb{R}$

$$\left( \sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{i=1}^n |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Это неравенство треугольника для нормы  $\|a\|_p = \left( \sum |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

*Доказательство.*  $p = 1$  тривиально.

Докажем для положительных  $a_i, b_i$ , другие случаи сводятся к этому.

$$\sum a_i (a_i + b_i)^{p-1} \leq \left( \sum a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum (a_i + b_i)^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\sum b_i (a_i + b_i)^{p-1} \leq \left( \sum b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum (a_i + b_i)^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}}$$

Сложим эти два неравенства:

$$\sum (a_i + b_i)^p \leq \left( \left( \sum a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \left( \sum (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

Как это доказывает? □

#### 6. Интегральное неравенство Минковского

$f, g \in C[a, b], p \geq 1$

$$\left( \int_a^b |f + g|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_a^b |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_a^b |g|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

*Доказательство.* Оставлено как упражнение читателю. □

**Теорема 1. Признак Коши**

$a_n \geq 0, K_n := \sqrt[n]{a_n}$ . Тогда:

Lite:

1. Если  $\exists q < 1 : K_n \leq q$ , начиная с некоторого места (НСМ)  $(\exists N : \forall n > N) \Rightarrow \sum a_n$  сходится.
2.  $K_n \geq 1$  для бесконечного множества  $\Rightarrow \sum a_n$  расходится.

Pro:  $K := \overline{\lim} K_n$

1.  $K < 1 \Rightarrow \sum a_n$  сходится
2.  $K > 1 \Rightarrow \sum a_n$  расходится

Доказательство. Lite:

1. НСМ  $\sqrt[n]{a_n} \leq q \Leftrightarrow a_n \leq q^n, q_n \text{ сх.} \Rightarrow \sum a_n \text{ сх.}$
2.  $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \Leftrightarrow a_n \geq 1 \Rightarrow a_n \not\rightarrow 0 \Rightarrow \sum a_n \text{ расх.}$

Pro:

1. По техническому описанию  $\overline{\lim} \exists N \forall n > N K_n < 1$
2. **надо написать**

□

**Теорема 2. Признак Даламбера.**

$a_n > 0, D_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Lite:

1.  $\exists q < 1 : D_n < q$  НСМ  $\Rightarrow \sum a_n \text{ сх.}$
2.  $D_n \geq 1$  НСМ  $\Rightarrow \sum a_n \text{ расх.}$

Pro:  $D := \lim D_n$

1.  $D < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ сх.}$
2.  $D > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ расх.}$

Доказательство. Lite:

1.  $\exists N : \frac{a_{N+1}}{a_N} < q, \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < q, \dots$

$$\frac{a_n}{a_N} < q^{n-N}$$

$$a_n < q^n \left( \frac{a_N}{q^N} \right)$$

$$\sum q^n \text{ сх.} \Rightarrow \sum a_n \text{ сх.}$$

2. **надо написать**

Pro:

1.  $q := \frac{1+D}{2}$ . По определению предела  $\varepsilon := q - D \exists N \forall n > N D_n < q \xrightarrow{\text{Lite1}} \sum a_n \text{ сх.}$
2.  $\varepsilon := D - 1 \exists N \forall n > N D_n > 1 \xrightarrow{\text{Lite2}} \sum a_n \text{ расх.}$

□

**Лемма 1.**  $a_n, b_n > 0$   $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}$  HCHM.

Тогда:

1.  $\sum b_n$  сх.  $\Rightarrow \sum a_n$  сх.

2.  $\sum a_n$  расх.  $\Rightarrow \sum b_n$  расх.

Доказательство. Будем игнорировать “HCHM”

$$\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1} \quad \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2} \quad \dots$$
$$a_n \leq b_n \frac{a_1}{b_1}$$

По признаку сравнения все работает.

□

**Теорема 3.** Признак Раабе

$a_n > 0, R_n := n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$ . Тогда:

1.  $\exists r > 1 \quad R_n \geq r$  HCHM  $\Rightarrow \sum a_n$  сх.

2.  $R_n \leq r$  HCHM  $\Rightarrow \sum a_n$  сх.

Еще следствие