

1 Определения

1.1 Локальный максимум, минимум, экстремум

Определение. $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in E$ — локальный максимум функции, если

$$\exists U(x_0) \forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \leq f(x_0)$$

Аналогично определяется минимум.

Определение. Экстремум — точка минимума либо максимума.

1.2 ! Первообразная, неопределенный интеграл

$$F, f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$$

F — первообразная f на $\langle a, b \rangle$

$$\forall x \in \langle a, b \rangle \quad F'(x) = f(x)$$

Неопределенный интеграл f на $\langle a, b \rangle$ — множество всех первообразных f :

$$\{F + c, c \in \mathbb{R}\}, \text{ где } F \text{ — первообразная}$$

Обозначается $\int f = F + c$ или $\int f(x)dx$

1.3 Теорема о существовании первообразной

$f \in C(\langle a, b \rangle)$ тогда у f существует первообразная.

1.4 Таблица первообразных

$$\int x^n dx = \frac{x^{(n+1)}}{n+1}, n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \text{длинный логарифм}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$$

Почему где-то нет dx ? Кохась забыл?

1.5 Равномерная непрерывность

$f : \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **равномерно непрерывна** на $\langle a, b \rangle$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle : |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Или для метрического пространства:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \rho(x_1, x_2) < \delta \implies \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

2 Теоремы

2.1 Критерий монотонности функции. Следствия

$f \in C(\langle a, b \rangle)$, дифф. в (a, b)

Тогда f — возрастает $\Leftrightarrow \forall x \in (a, b) f'(x) \geq 0$

Доказательство. “ \Rightarrow ” По определению $f' = \frac{f(x+h)-f(h)}{h} \geq 0$

“ \Leftarrow ” $x_1 > x_2$, по т. Лагранжа: $\exists c : f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2) \geq 0$ □

Следствие. $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, тогда:

$f = \text{const} \Leftrightarrow (f \in C(\langle a, b \rangle) - \text{дифф. на } \langle a, b \rangle, f' \equiv 0)$

Следствие. $f \in C[a, b]$, дифф. на (a, b) . Тогда:

f строго возрастает \Leftrightarrow ① и ②

① $f' \geq 0$ на (a, b)

② $f' \not\equiv 0$ ни на каком промежутке

Доказательство. “ \Rightarrow ” очевидно

“ \Leftarrow ” По лемме о возрастании в отрезке □

Следствие. О доказательстве неравенств

$g, f \in C([a, b])$, дифф. в (a, b)

$f(a) \leq g(a); \forall x \in (a, b) f'(x) \leq g'(x)$

Тогда $\forall x \in [a, b] f(x) \leq g(x)$

$g - f$ — возр., $g(a) - f(a) \geq 0$

2.2 Теорема о необходимом и достаточном условиях экстремума

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in (a, b) \quad f$ — дифф. на (a, b)

Тогда:

1. x_0 — лок. экстремум $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

2. f — n раз дифф. в x_0

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то $\begin{cases} n - \text{чет.} : & x_0 - \text{локальный максимум} \\ n - \text{нечет.} : & x_0 - \text{не экстремум} \end{cases}$

Если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то $\begin{cases} n - \text{чет.} : & x_0 - \text{локальный минимум} \\ n - \text{нечет.} : & x_0 - \text{не экстремум} \end{cases}$

Доказательство. 1. т. Ферма

2. ф. Тейлора

$$f(x) = \text{Tn}(f, x_0)(x) + o((x - x_0)^n)$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

при x , близких к x_0 :

$$\text{sign}(f(x) - f(x_0)) = \text{sign}\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\right)$$

□

2.3 Теорема Кантора о равномерной непрерывности

$f : X \rightarrow Y$, X — комп., f — непр. на X

Тогда f — непр.

Доказательство. От противного.

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta, \bar{x}_\delta : \rho(x_\delta, \bar{x}_\delta) < \delta \quad \rho(f(x_\delta), f(\bar{x}_\delta)) \geq \varepsilon$$

$$\delta := \frac{1}{n} \quad \exists x_n, \bar{x}_n : \rho(x_n, \bar{x}_n) < \delta \quad \rho(f(x_n), f(\bar{x}_n)) \geq \varepsilon$$

Выберем $x_{n_k} \rightarrow \tilde{x}$, $\bar{x}_{n_k} \rightarrow \tilde{\bar{x}}$

$\rho(\tilde{x}, \tilde{\bar{x}}) \leq 0$, т.е. $\tilde{x} = \tilde{\bar{x}}$. Тогда $f(x_{n_k}) \rightarrow f(\tilde{x})$, $f(\bar{x}_{n_k}) \rightarrow f(\tilde{x})$, противоречие с $\rho(f(x_n), f(\bar{x}_n)) \geq \varepsilon$ □

2.4 Теорема Брауэра о неподвижной точке

$f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$, непр.

Тогда $\exists x \in [0, 1]^2 : f(x) = x$, т.е. есть неподвижная точка.

Обобщенный вариант:

1. $f : [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]^m$ — непр.
2. $f : B(0, 1) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow B(0, 1)$ — непр.
3. $f : S(0, 1) \subset \mathbb{R}^m$ — непр.

Доказательство. $\rho : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$\rho(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$ — непр. в $[0, 1]^2$

От противного — пусть $\forall x \in [0, 1]^2 \quad f(x) \neq x$

Тогда $\forall x \quad \rho(f(x), x) > 0 \quad x \mapsto \rho(f(x), x)$ — непр., > 0

По т. Вейерштрасса $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in [0, 1] \quad \rho(f(x), x) \geq \varepsilon$

По т. Кантора для f : для этого $\varepsilon \quad \exists \delta < \varepsilon$:

$$\forall x, \bar{x} : \|x - \bar{x}\| < \delta \quad \|f(x) - f(\bar{x})\| < \varepsilon$$

Можно писать не $\|\cdot\|$, а ρ .

Возьмём $n : \frac{1}{n} < \delta$

Построим доску $Hex(n+1, n+1)$, где $n+1$ — число узлов.

Логические координаты узла $(v_1, v_2) \quad v_1, v_2 \in \{0 \dots n\}$ имеют физические координаты $(\frac{v_1}{n}, \frac{v_2}{n})$

$K(V) := \min\{i \in \{1, 2\} : |f(\frac{v}{n}) - \frac{v_i}{n}|\}$

Продолжение на следующей лекции. □

2.5 Теорема о свойствах неопределенного интеграла

f, g имеют первообразную на $\langle a, b \rangle$. Тогда

1. Линейность:

$$\int (f + g) = \int f + \int g$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \int \alpha f = \alpha \int f$$

2. $\varphi \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \left(\int f(x) dx \right) \Big|_{x=\varphi(t)} = F(\varphi(t))$$

Частный случай: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\int f(\alpha t + \beta) dt = \frac{1}{\alpha} F(\alpha t + \beta)$$

3. f, g — дифф. на $\langle a, b \rangle$; $f'g$ — имеет первообр.

Тогда fg' имеет первообразную и

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

Доказательство. 1. Опущено

2. $(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$

3. $(fg - \int f'g)' = f'g + fg' - f'g = fg'$

□