# Интегральные суммы

**Определение.** **Дробление** отрезка $[a, b]$ это разбиение отрезка на $n$ частей следующим образом:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b \quad [x_{i-1}, x_i]$$

**Определение.** **Ранг *(мелкость)*** дробления — длина самого длинного из отрезков дробления:

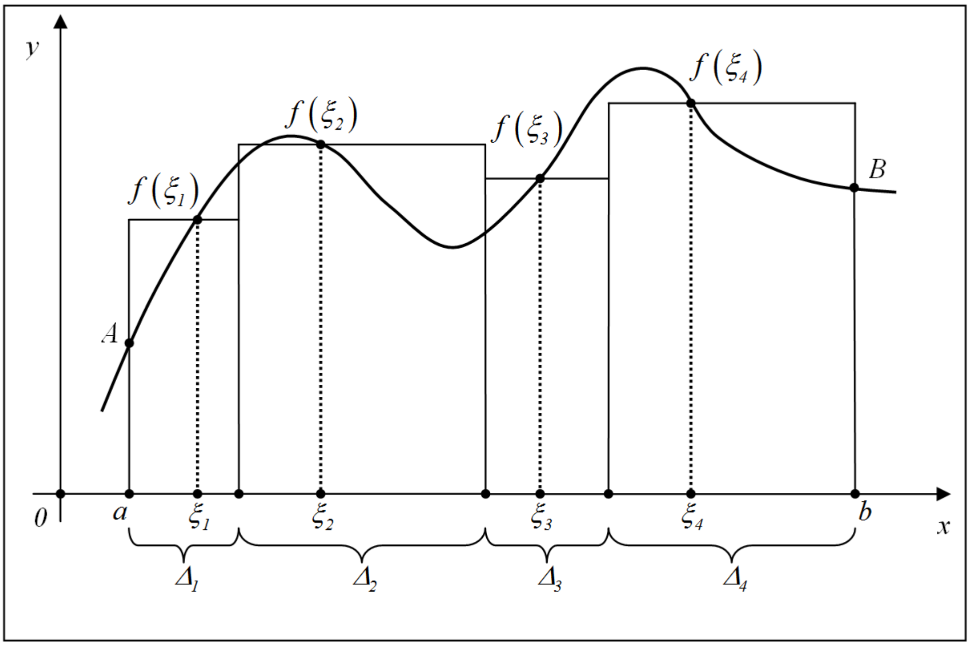
$$\tau = \{x_0 \ldots x_n\} \quad |\tau| = \max(x_i - x_{i-1})$$

**Определение.** **Оснащение** — множество точек $\{\xi_1 \ldots \xi_n\} : \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

**Определение.** **Интегральная сумма** для разбиения $\{x_i\}$, произвольной функции $f$ и оснащения $\{\xi_i\}$ это следующая сумма:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Геометрически интегральная сумма интерпретируема следующим образом:




**Теорема 1.** *Об интеграле как пределе интегральных сумм.*
$f \in C[a, b]$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall$*дробление* $\tau = \{x_0 \ldots x_n\} : |\tau| < \delta\ \forall$*оснащение* $\xi_i$ $\quad \left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon$

*Доказательство.* По теореме Кантора о равномерной непрерывности на компакте.
$[a, b]$ — компакт, $f$ непрерывна на $[a, b] \Rightarrow f$ равномерно непрерывна на $[a, b]$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall x, \overline{x} \in [a, b] : |x - \overline{x}| < \delta \quad |f(x) - f(\overline{x})| < \varepsilon$$

По двойной бухгалтерии заменим $\varepsilon$ на $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall x, \overline{x} \in [a, b] : |x - \overline{x}| < \delta \quad |f(x) - f(\overline{x})| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Разобьем интеграл на части:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx\right)$$

Запишем $(x_i - x_{i-1})$ в виде интеграла $\int_{x_{i-1}}^{x_i} dx$

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right| = \left|\sum_{i=1}^n \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - f(\xi_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i} dx\right)\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(\xi_i))dx\right| \leq \sum \left|\int\right| \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |(f(x) - f(\xi_i))dx| \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\varepsilon}{b-a}dx =$$

$$= \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx = \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

□

*Примечание.* $f \in C^1[a,b]$; $M := \max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$

$$|f(x) - f(\overline{x})| = |f'(\overline{x})(x - \overline{x})| \leq M|x - \overline{x}|$$

*Следствие.* Равномерное дробление: $x_i = a + \frac{b-a}{n}i; |\tau| = \frac{b-a}{n}$

$$\int - \sum \leq M(b-a)^2\frac{1}{n}$$

**Теорема 2.** *Об интегральных суммах центральных прямоугольников*
$f \in C^2[a,b]$ $x_0 = a < x_1 \ldots < x_n = b$ $\delta = \max(x_i - x_{i-1})$ $\xi_i := \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$. *Тогда*

$$\left|\int_a^b f - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right| \leq \frac{\delta^2}{8}\int_a^b |f''|dx$$

*Доказательство.*

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f(x)dx + \int_{\xi_i}^{x_i} f(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f(x)d(x - x_{i-1}) + \int_{\xi_i}^{x_i} f(x)d(x - x_i) =$$

$$= f(x)(x - x_{i-1})|_{x=x_{i-1}}^{x=\xi_i} - \int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f'(x)(x - x_{i-1})dx + f(x)(x - x_{i-1})|_{x=\xi_i}^{x=x_i}$$

□