1 Определения

1.1 Локальный максимум, минимум, экстремум

Определение. $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in E$ — **локальный максимум функции**, если

$$\exists U(x_0)\ \ \forall x \in U(x_0) \cap E\ \ f(x) \leq f(x_0)$$

Аналогично определеяется минимум.

Определение. **Экстремум** — точка минимума либо максимума.

1.2 ! Первообразная, неопределенный интеграл

$F, f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$
F — **первообразная** f на $\langle a, b\rangle$

$$\forall x \in \langle a, b\rangle \quad F'(x) = f(x)$$

Неопределенный интеграл f на $\langle a, b\rangle$ — множество всех первообразных f:

$$\{F + c, c \in \mathbb{R}\}, \text{ где } F \text{ — первообразная}$$

Обозначается $\int f = F + c$ или $\int f(x)dx$

1.3 Теорема о существовании первообразной

$f \in C^0(\langle a, b\rangle)$ тогда у f существует первообразная.

1.4 Таблица первообразных

$$\int x^n dx = \frac{x^{(n+1)}}{n+1}, n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \text{ — длинный логарифм}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x$$

1.5 Равномерная непрерывность

$f : \langle a, b\rangle \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **равномерно непрерывна** на $\langle a, b\rangle$:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle : |x_1 - x_2| < \delta \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Или для метрического пространства:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x_1, x_2 \;\; \rho(x_1, x_2) < \delta \quad \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

Отличие от непрерывности на отрезке в том, что δ зависит только от ε и подходит для всех x_1, x_2.

1.6 Площадь, аддитивность площади, ослабленная аддитивность

$\mathcal{E}$ — множество всех ограниченных фигур в $\mathbb{R}^2$ (“фигура” = подмножество $\mathbb{R}^2$)
Площадь это $\sigma : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$, такое что:

1. $A \in \mathcal{E} \quad A = A_1 \sqcup A_2 \quad \sigma A = \sigma A_1 + \sigma A_2$ *(конечная аддитивность)*
2. $\sigma([a, b] \times [c, d]) = (d - c)(b - a)$

$\sqcup$ — **дизьюнктное объединение**; если $x \in A_1$ и $x \in A_2$, то x “дважды $\in$” $A_1 \sqcup A_2$
Ослабленная площадь $\sigma : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$:

1. Монотонна
2. Нормирована
3. Ослабленная аддитивность: $E \in \mathcal{E} \quad E = E_1 \cup E_2 \quad E_1 \cap E_2$ — вертикальный отрезок, E_1 и E_2 лежат каждый в своей полуплоскости относительно этого отрезка $\Rightarrow \sigma E = \sigma E_1 + \sigma E_2$

Почему отрезок вертикальный?

1.7 ! Определенный интеграл

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, непр.

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx := \sigma\Pi\Gamma(f_+, [a, b]) - \sigma\Pi\Gamma(f_-, [a, b])$$

1.8 Положительная и отрицательная срезки

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$
$f_+ := \max(f, 0)$ — **положительная срезка**
$f_- := \max(-f, 0)$ — **отрицательная срезка**

1.9 Среднее значение функции на промежутке

Отсутствует

1.10 Кусочно-непрерывная функция

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, **кусочно непрерывна**
f — непр. на $[a, b]$ за исключением конечного числа точек, в которых разрывы I рода

Пример. $f(x) = [x], x \in [0, 2020]$

1.11 Почти первообразная

$F : [a, b] \to \mathbb{R}$ — **почти первообразная** кусочно непрерывной функции f:
F — непр. и $\exists F'(x) = f(x)$ всюду, кроме конечного числа точек

Пример. $f = \operatorname{sign} x, x \in [-1, 1]$
$F := |x|$

1.12 Функция промежутка, аддитивная функция промежутка

$Segm\langle a, b\rangle = \{[p, q] : [p, q] \subset \langle a, b\rangle\}$ — множество всевозм. отрезков, лежащих в $\langle a, b\rangle$
Функция промежутка $\Phi : Segm\langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$
Аддитивная функция промежутка: Φ — функция промежутка и

$$\forall [p, q] \in Segm\langle a, b\rangle \;\; \forall r : p < r < q \quad \Phi([p, q]) = \Phi([p, r]) + \Phi([r, q])$$

1.13 Плотность аддитивной функции промежутка

Плотность аддитивной функции промежутка: $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — плотность Φ, если:

$$\forall \delta \in Segm\langle a, b\rangle \quad \inf_{x \in \delta} f(x) \cdot len_\delta \leq \Phi(\delta) \leq \sup f \cdot len_\delta$$

2 Теоремы

2.1 Критерий монотонности функции. Следствия

$f \in C(\langle a, b\rangle)$, дифф. в (a, b)
Тогда f — возрастает $\Leftrightarrow \forall x \in (a, b) \;\; f'(x) \geq 0$

Доказательство. "$\Rightarrow$" По определению f' $\quad \frac{f(x+h) - f(h)}{h} \geq 0$
"$\Leftarrow$" $x_1 > x_2$, по т. Лагранжа: $\exists c : f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2) \geq 0$ □

Следствие. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, тогда:
$f = \mathrm{const} \Leftrightarrow (f \in C(\langle a, b\rangle)$ — дифф. на $\langle a, b\rangle, f' \equiv 0)$

Следствие. $f \in C\langle a, b\rangle$, дифф. на (a, b). Тогда:
f строго возрастает $\Leftrightarrow$ ① и ②
① $f' \geq 0$ на (a, b)
② $f' \not\equiv 0$ ни на каком промежутке

Доказательство. "$\Rightarrow$" очевидно
"$\Leftarrow$" По лемме о возрастании в отрезке □

Следствие. О доказательстве неравенств
$g, f \in C([a, b\rangle)$, дифф. в (a, b)
$f(a) \leq g(a); \forall x \in (a, b) \;\; f'(x) \leq g'(x)$
Тогда $\forall x \in [a, b\rangle \;\; f(x) \leq g(x)$

Доказательство. $g - f$ — возр., $g(a) - f(a) \geq 0$ □

2.2 Теорема о необходимом и достаточном условиях экстремума

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R} \quad x_0 \in (a, b) \quad f$ — дифф. на (a, b)
Тогда:

1. x_0 — лок. экстремум $\Rightarrow f'(x_0) = 0$
2. f — n раз дифф. в x_0
   $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$
   Если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то $\begin{cases} n - \text{чет.}: & x_0 - \text{локальный максимум} \\ n - \text{нечет.}: & x_0 - \text{не экстремум} \end{cases}$
   Если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то $\begin{cases} n - \text{чет.}: & x_0 - \text{локальный минимум} \\ n - \text{нечет.}: & x_0 - \text{не экстремум} \end{cases}$

Доказательство.
1. т. Ферма
2. ф. Тейлора

$$f(x) = \mathrm{T}_n(f, x_0)(x) + o((x - x_0)^n)$$
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

при x, близких к x_0:

$$\operatorname{sign}(f(x) - f(x_0)) = \operatorname{sign}\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\right)$$

Тогда при чётном n

$$\operatorname{sign}(f(x) - f(x_0)) = \operatorname{sign} f^{(n)}(x_0) \Rightarrow x_0 - \text{экстр.}$$

При нечётном n

$$\operatorname{sign}(f(x) - f(x_0)) = \begin{cases} f^{(n)}(x_0), & x > x_0 \\ -f^{(n)}(x_0), & x < x_0 \end{cases} \Rightarrow x_0 - \text{не экстр.}$$

□

2.3 Теорема Кантора о равномерной непрерывности

$f : X \to Y, X$ — комп., f — непр. на X
Тогда f — равномерно непр.

Доказательство. От противного.

$$\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall \delta > 0 \ \ \exists x_\delta, \overline{x}_\delta : \rho(x_\delta, \overline{x}_\delta) < \delta \quad \rho(f(x_\delta), f(\overline{x}_\delta)) \geq \varepsilon$$
$$\delta := \frac{1}{n} \ \ \exists x_n, \overline{x}_n : \rho(x_n, \overline{x}_n) < \delta \quad \rho(f(x_n), f(\overline{x}_n)) \geq \varepsilon$$

Выберем $x_{n_k} \to \tilde{x}, \overline{x}_{n_k} \to \tilde{\tilde{x}}$

$$\rho(\tilde{x}, \tilde{\tilde{x}}) \leq \lim_{n\to\infty} \delta = 0 \Rightarrow \tilde{x} = \tilde{\tilde{x}}$$

Тогда $f(x_{n_k}) \to f(\tilde{x}), f(\overline{x}_{n_k}) \to f(\tilde{x})$, противоречие с $\rho(f(x_n), f(\overline{x}_n)) \geq \varepsilon$ □

2.4 Теорема Брауэра о неподвижной точке

$f : [0,1] \times [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$, непр.
Тогда $\exists x \in [0,1]^2 : f(x) = x$, т.е. есть неподвижная точка.
Обобщенный вариант:

1. $f : [0,1]^m \to [0,1]^m$ — непр.
2. $f : B(0,1) \subset \mathbb{R}^m \to B(0,1)$ — непр.
3. $f : S(0,1) \subset \mathbb{R}^m$ — непр.

Доказательство. $\rho : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$
$\rho(x,y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$ — непр. в $[0,1]^2$
От противного — пусть $\forall x \in [0,1]^2 \quad f(x) \neq x$
Тогда $\forall x \quad \rho(f(x), x) > 0 \quad x \mapsto \rho(f(x), x)$ — непр., > 0
По т. Вейерштрасса $\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall x \in [0,1] \ \ \rho(f(x), x)) \geq \varepsilon$
По т. Кантора для f: для этого $\varepsilon \ \ \exists \delta < \varepsilon$:

$$\forall x, \overline{x} : ||x - \overline{x}|| < \delta \quad ||f(x) - f(\overline{x})|| < \varepsilon$$

Можно писать не $|| \cdot ||$, а ρ.
Возьмём $n : \frac{\sqrt{2}}{n} < \delta$
Построим доску $Hex(n+1, n+1)$, где $n+1$ — число узлов.
Логические координаты узла $(v_1, v_2) \quad v_1, v_2 \in \{0 \dots n\}$ имеют физические координаты, то есть узлу сопоставляется точка на квадрате с координатами $\left(\frac{v_1}{n}, \frac{v_2}{n}\right)$
$K(V) := \min\{i \in \{1,2\} : |f(\frac{v}{n}) - \frac{v_i}{n}| \geq \varepsilon\}$
Продолжение на следующей лекции. □

2.5 Теорема о свойствах неопределенного интеграла

f, g имеют первообразную на $\langle a, b \rangle$. Тогда

1. Линейность:
$$\int (f+g) = \int f + \int g$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \int \alpha f = \alpha \int f$$
2. $\varphi \langle c, d \rangle \to \langle a, b \rangle$
$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \left(\int f(x) dx \right) |_{x = \varphi(t)} = F(\varphi(t))$$
Частный случай: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:
$$\int f(\alpha t + \beta) dt = \frac{1}{\alpha} F(\alpha t + \beta)$$
3. f, g — дифф. на $\langle a, b \rangle$; $f'g$ — имеет первообр.
Тогда fg' имеет первообразную и
$$\int fg' = fg - \int f'g$$

Доказательство. 1. Опущено

2. $(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$
3. $(fg - \int f'g)' = f'g + fg' - f'g = fg'$

□

2.6 Интегрирование неравенств. Теорема о среднем

$f, g \in C[a,b] \quad f \le g$. Тогда

$$\int_a^b f \le \int_a^b g$$

Доказательство.

$$\Pi\Gamma(f_+) \subset \Pi\Gamma(g_+) \Rightarrow \sigma\Pi\Gamma(f_+) \le \sigma\Pi\Gamma(g_+)$$
$$\Pi\Gamma(f_-) \supset \Pi\Gamma(g_-) \Rightarrow \sigma\Pi\Gamma(f_-) \ge \sigma\Pi\Gamma(g_-)$$
$$\sigma\Pi\Gamma(f_+) - \sigma\Pi\Gamma(f_-) \le \sigma\Pi\Gamma(g_+) - \sigma\Pi\Gamma(g_-)$$

□

Кто такая теорема о среднем

2.7 Теорема Барроу

$f \in C[a,b] \quad \Phi$ — интеграл с переменным верхним пределом. Тогда

$$\forall x \in [a,b] \quad \Phi'(x) = f(x)$$

Доказательство. Зафиксируем $x \in [a,b] \quad y > x, y \le b$

$$\frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = \frac{\int_a^y f - (\int_a^y f + \int_y^x f)}{y - x} = \frac{\int_x^y f}{y - x} \underset{\substack{\text{т.о.ср.} \\ \exists c \in [x,y]}}{=} \frac{c(y-x)}{y-x} = c \xrightarrow[y \to x+0]{} f(x)$$

$x > y$

$$\frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = \frac{1}{x - y} \int_y^x f = c \xrightarrow[y \to x-0]{} f(x)$$

□

2.8 Формула Ньютона-Лейбница, в том числе, для кусочно-непрерывных функций

Теорема 1. $f \in C[a,b] \quad F$ — первообр. f
Тогда $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

Доказательство. $\Phi(x) = \int_0^x f$ — первообр.
$\exists C : F = \Phi + C$

$$\int_a^b f = \Phi(b) - \Phi(a) = F(b) - F(a)$$

□

Что с кусочно-непрерывными?

2.9 Лемма об ускоренной сходимости

1. $f, g : D \subset X \to \mathbb{R} \quad a$ — предельная точка D
   $\exists U(a)$: при $x \in \dot{U}(a) \cap D \quad f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$
   Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0 \quad \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$
   Тогда
   $$\forall x_k \to a \quad (x_k \neq a, x_k \in D) \quad \exists y_k \to a (y_k \neq a, y_k \in D)$$
   такое, что
   $$\lim_{k \to +\infty} \frac{f(y_k)}{g(x_k)} = 0 \quad \lim_{k \to +\infty} \frac{g(y_k)}{g(x_k)} = 0$$
   Таким образом, $g(y_k) \to 0$ быстрее, чем $g(x_k) \to 0$
2. То же самое, но $\lim f(x) = +\infty, \lim g(x) = +\infty$

Доказательство. 1. Очевидно.

$$\forall k \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |f(x_n)| < |g(x_k)| \frac{1}{k} \quad |g(x_n)| < |g(x_k)| \frac{1}{k}$$

$\varepsilon := |g(x_k)|$

$$k = 1 \quad y_1 := \text{какой-нибудь } x_n : \left| \frac{f(x_n)}{g(x_k)} \right| < 1 \quad \left| \frac{g(x_n)}{g(x_k)} \right| < 1$$
$$k = 2 \quad y_2 := \text{какой-нибудь } x_n : \left| \frac{f(x_n)}{g(x_k)} \right| < \frac{1}{2} \quad \left| \frac{g(x_n)}{g(x_k)} \right| < \frac{1}{2}$$
$$\vdots$$

2. (a) Частный случай: Пусть $g(x_n)$ возрастает. Берем $k : m := \min\{n : |f(x_n)| \geq \sqrt{g(x_k)}$ или $|g(x_n)| \geq \sqrt{g(x_k)}\}$
   $y_k := x_{m-1}$
   $$\left| \frac{f(y_k)}{g(x_k)} \right| \leq \frac{\sqrt{g(x_k)}}{g(x_k)} = \frac{1}{\sqrt{g(x_k)}} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$
   Зачем нужно возрастание? Кохась не знает.
   (b) Общий случай: $\tilde{g}(x_k) := \inf\{g(x_n), n = k, k+1 \ldots\} \quad \tilde{g}(x_k) \to +\infty$
   $\tilde{g}(x_k) \uparrow, \tilde{g}(x_k) \leq g(x_k)$. Как в пункте (a) построим y_k
   $$\frac{f(y_k)}{g(x_k)} \leq \frac{f(y_k)}{\tilde{g}(x_k)} \leq \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}(x_k)}} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$
   $$\frac{g(y_k)}{g(x_k)} \leq \frac{g(x_k)}{\tilde{g}(x_k)} \leq \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}(x_k)}} \to 0$$

□

2.10 Правило Лопиталя

$f, g : (a,b) \to \mathbb{R} \quad a \in \overline{\mathbb{R}}$
f, g — дифф., $g' \neq 0$ на (a,b)
Пусть $\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow[x\to a+0]{} A \in \overline{\mathbb{R}}$
Пусть $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ — неопределенность $\left\{\frac{0}{0}, \frac{+\infty}{+\infty}\right\}$
Тогда $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

Доказательство. $g' \neq 0 \Rightarrow g'$ — сохр. знак $\Rightarrow g$ — монотонна.
Для $\frac{0}{0} \quad g(x) \neq 0$ в (a,b)
По Гейне $x_k \to a \ \ (x_k \neq a, x_k \in (a,b))$
Выберем y_k по лемме

$$\frac{f(x_k) - f(y_k)}{g(x_k) - g(y_k)} = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)} \text{ — т. Коши}$$

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} - \frac{f(y_k)}{g(x_k)} = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}\left(1 - \frac{g(y_k)}{g(x_k)}\right)$$

$x_k \to a \quad y_k \to a \quad \xi_k \to a$ □

2.11 Теорема Штольца

Это дискретная версия правила Лопиталя.
$y_n \to 0, x_n \to 0$ — строго монот.

$$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a \in \mathbb{R}$$

Тогда $\exists \lim \dfrac{x_n}{y_n} = a$

Доказательство. 1. $a > 0 \quad (a \neq +\infty)$

$$\forall \varepsilon > 0 \ [\varepsilon < a] \ \exists N_1 \ \forall n > N_1 \ a_\varepsilon < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < a + \varepsilon$$

Берем $N > N_1$

$$a - \varepsilon < \frac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N} < a + \varepsilon$$

$$\vdots$$

$$a - \varepsilon < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < a + \varepsilon$$

По неправильному сложению:*(оно применимо, т.к. все дроби положительные)*

$$a - \varepsilon < \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} < a + \varepsilon$$

$n \to +\infty$

$$a - \varepsilon < \frac{x_N}{y_N} < a + \varepsilon$$

2. $a = +\infty$ доказывается так же

3. $a < 0$ поменяем знак и докажем так же

4. $a = 0$ т.к. знаки $x_n - x_{n-1}$ и $y_n - y_{n-1}$ фикс., $a = +0$ или $a = -0$

   Для $a = +0 \lim \dfrac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = +\infty$

□

2.12 Пример неаналитической функции

Отсутствует

2.13 Интегральное неравенство Чебышева. Неравенство для сумм

Неравенство Чебышева
$f, g \in C[a, b]$ монот. возр.
Тогда

$$I_f \cdot I_g \leq I_{fg}$$

$$\int_a^b f \int_a^b g \leq (b - a) \int_a^b fg$$

Доказательство. $x, y \in [a, b] \quad (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$

$$f(x)g(x) - f(y)g(x) - f(x)g(y) + f(y)g(y) \geq 0$$

Интегрируем по x по $[a, b]$

$$I_{fg} - f(y)I_g - g(y)I_f + f(y)g(y) \geq 0$$

Интегрируем по y по $[a, b]$

$$I_{fg} - I_f I_g - I_g I_f + I_{fg} \geq 0$$

□

Дискретное неравенство Чебышева
$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \frac{1}{n} \sum b_i \leq \frac{1}{n} \sum a_i b_i$$

Доказательство.

$$f(x) = a_i, x \in (i - 1, i], i = 1 \ldots n - \text{задана на } (0, n]$$

$$g(x) = \ldots b_i$$

$$I_f I_g \leq I_{fg}$$

□

2.14 Свойства определенного интеграла: линейность, интегрирование по частям, замена переменных

Дано выше. (2.5, стр. 5)