Конспект лекции 17/9/19

Булевы функции

Функцией $f : X \to Y$ называется такое $f \subset X \times Y$, что $\forall x \exists! y : (x, y) \in f. y = f(x)$ - значение функции.

Функция называется **инъекцией**, если она различные значения переводит в различные: $x_1 \not= x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Функция называется **сюрьекцией**, если $\forall y \ \ \exists x : y = f(x)$. Часто произносится "отображение на"

Пример: $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, h(x) = x + 17$ - сюрьекция и инъекция одновременно. Такие функции называются биекцией.

Множество всех функций из X в Y, $\{f : X \to Y\}$ обозначается Y^X. Можно заметить, что всех возможных способов задать функцию y^n, где $|Y| = y, |X| = n$. Это одна из причин такой записи.

В этой главе рассматривается $Y = \mathbb{B} = \{0, 1\}$, $X = \mathbb{B}^n$, т.е. рассматриваются функции $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}, f(x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto y$

Таблица истинности - таблица, сопоставляющая каждому возможному набору аргументов $y \in \mathbb{B}$

Различных функций от булевых аргументов n всего 2^{2^n}

Для $n = 0 : \mathbb{B}^0 = \{[]\}, 2^{2^0} = 2$

Примеры булевых функций

Примечание: Столбцы кроме первого - значения соотвествующих функций

Примечание: 0 и 1 должны быть жирные

аргумент	0	1
[]	0	1

Примечание: тут 0 не тот же, что в первой таблице:

```
bool zero_first()
    return 0;
bool zero_second(bool x)
    return 0;
```

аргумент	0	x	отрицание	1
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Отрицание обозначается также $!x, \overline{x}, \neg x$

$P-1$ - первый проектор - возвращает первый аргумент

Штрих Шерфера должен быть более вытянутым, но тех так не умеет

аргумент x	аргумент y	0	конъюнкция (*и*), & $\wedge$	$\not\to$	P_1	$\not\leftarrow$	P_2	xor, $\oplus$	дизъюнкция, *или*, $\vee$, $\mid\downarrow$, стрелка Пирса, nor	=	$\neg P_2$	обр. импликация $\leftarrow$	$\neg P_1$	импл., след. $\to$	штрих Шерфера ∇, nand	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

На любое число аргументов обобщаются $0, 1, P_n$, xor (=1, если среди аргументов нечетное число единиц (как сложение по модулю 2)), и проч. Стрелка Пирса и штрих Шерфера не обобщаются. Общепринятого обобщения равенства нет.

Некоторые булевы функции трех аргументов

$< x, y, z >$ - большинство, медиана, majority, median - равна 1, если большинство аргументов равно 1.

Тернарный оператор: $!x?y : z$ - возвращает либо y, либо z в зависимости от x. Немного отличается от его записи в java/C, там $x?z : y$. Также называется демультиплексор.

x,y,z	<x,y,z>	(!x)?y:z
000	0	0
001	0	0
010	0	1

x,y,z	<x,y,z>	(!x)?y:z
011	1	1
100	0	0
101	1	1
110	1	0
111	1	1

Представление функции формулой

F - множество булевых функций. Будем называть его элементы связками, а F - системой связок.

Формулой называется строка, построенная по следующим правилам:

$f(x_1, .., x_n)$, x_i - формула

g - связка, $g \in F$, $g : \mathbb{B}^k \to \mathbb{B}$

$h_1, h_2, ..h_k$ - формула

Тогда $g(h_1, h_2, .., h_k)$ - формула

Прим. в скобки один аргумент можно не брать, инфиксная запись - когда бинарный оператор ставится между операндами.

Пример: $F = \{\wedge, \vee, \neg\}.\ x, y$ - аргументы

$\wedge(\neg(x), x) \Leftrightarrow \neg x \wedge x$
$\vee(\wedge(\neg(x), x), y) \Leftrightarrow (\neg x \wedge x) \vee y$

φ - формула, $\varphi(x_1..x_n) \quad \varphi = x_i \Rightarrow \varphi(x_1..x_n) = x_i$

Для одной и той же функции может быть несколько различных формул.

Какими системами связок можно задать все функции $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$?

Опр. f сохраняет 0, если $f(0, ..0) = 0$. Множество всех таких f называется F_0

Опр. f сохраняет 1, если $f(1, ..1) = 1$. Множество всех таких f называется F_1

Лемма Если $F \subset F_0$ и g построено с помощью формулы с использованием системы связок F, то $g \in F_0$

Докажем это индукцией обходом дерева разбора.

База: высота = 1, подходят только $f(x) = x$ и $f(x) = 0$

Переход: понятия не имею, честно

Лемма 2: то же самое, только для F_1

Опр. Дано: аргументы $x_1..x_n$. Формула является совершенной дизъюктивной нормальной формой, если она состоит из произвольного числа скобок, между каждой из которых производится $\vee$, в каждой из этих скобок расположено n литералов$\in \{x_1..x_n, \neg x_1, ..\neg x_n\}$, между которыми происходит только $\wedge$ и в каждой скобке каждый аргумент встречается только один раз.

Теорема Любая функция, кроме тождественного нуля, может быть записана в СДНФ.

Д-во: рассмотрим таблицу истинности f. Так как это не тожд. 0, хотя бы одна строка соответствует 1. Рассмотрим эти строки. Для каждой из этих строк выпишем переменные, равные 1 без отрицания, а переменные равные 0, с отрицанием, и проведем **И** над всеми.

Пример: строка 0011, $f(0,0,1,1) = 1$. Тогда выпишем $(\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4)$.

Докажем, что *или* по всем этим термам равно исходной f.

Опр. Система связок F называется **базисом**, если любую функцию можно представить в виде формулы в этой системе связок. Множество всех функций, представимых в виде формулы в F, обозначается $\overline{F}$. Более научно: $\forall f \in \overline{F}$.

Теорема $\{\wedge, \vee, \neg\}$ - базис