Конспект лекции 10/9/19

Отношения

Конспекты по многим темам есть на neerc.

Опр. *(нестрогое)* **Множество** - объединение неких объектов, каждый $x \in X$ либо $x \notin X$

$\mathbb{U}$ - **универсум** - множество всех объектов

Прямое *(декартово)* произведение $X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$

$R \subset X \times Y$ - (*бинарное*) **отношение между** X **и** Y *(подмножество прямого произведения)*, в частности $R \subset X \times X$ - отношение на X.

Свойства отношений

1. $\forall x : xRx$ - рефлексивность
2. $\forall x : x\not{R}x$ - антирефлексивность
3. $\forall x, y : xRy \Rightarrow yRx$ - симметричность
4. $\forall x, y : xRy$ и $yRx \Rightarrow x = y$ - антисимметричность
5. $\forall x, y, z : xRy, yRz \Rightarrow xRz$ - транзитивность

Тоже определение антисимметричности: $\forall x \neq y : xRy \Rightarrow y\not{R}x$

Эквивалентность:

- рефлексивность
- транзитивность
- симметричность

Теорема: Дано отношение эквивалентности X на множестве R. $\exists Y = X/R$ и функция $f : X \to Y$, такие что $xRy \Leftrightarrow f(x) = f(y)$. Y называется множеством классов эквивалентности X относительно R.

Это можно понять следующей аналогией: Покрасим эквивалентные элементы в однаквые цвета, не эквивалентные элементы в разные.

Пример $X = \mathbb{Z}$, R - сравнимость по модулю 17.

$\mathbb{Z} \equiv_{17} = \{\text{ост.}0, \text{ост.}1, ...\text{ост.}16\}$

Частичный порядок:

- рефлексивность
- транзитивность
- антисимметричность

Теорема В графе частичного порядка нет циклов, кроме петель.

Доказательство: от противного. Пусть в этом графе есть цикл длины k. Тогда по транзитивности в графе есть цикл длины $k-1$. Тогда есть цикл длины 2 - противоречие по антисимметричности. ■

Опр. Линейный порядок - частичный порядок, где любые два элемента находятся в сравнении.

Опр. Композицией отношений R и S, определенных на X, называется отношение RS такое, что $xRSy$, если $\exists z : xRz, zSy$.

$RS \not\Leftrightarrow SR$

Частный случай: xR^2y - значит, что в графе отношений от x до y можно дойти за 2 шага.

$R^0 = I$ - отношение равенства, $I = \{(x,x)|x \in X\}$ - минимальное рефлексивное отношение

$\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} R^i$ - рефлексивное транзитивное замыкание отношения R, обозначается R^*

$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} R^i$ - транзитивное замыкание отношения R, обозначается R^+

Лемма R, S - транзитивное отношение на X, тогда $R \cap S$ - транзитивное отношение на X.

Доказательство: $T := R \cap S \quad xTy, yTz \Rightarrow xRy, xSy, yRz, ySz \Rightarrow xRz, xSz \Rightarrow xTz$■

Эта лемма верна для пересечения произвольного количества отношений.

$T(R) = \{S|R \subset S, S - \text{транз.}\}$ - множество всех транзитивных надмножеств R.
$TC(R) := \bigcap\limits_{S \in T(R)} S$

Теорема $TC(R) = R^+$

Доказательство: $TC(R) = R^+ \Leftrightarrow TC(R) \subset R^+, R^+ \subset TC(R)$
$R^+ - \text{транз.}, R \subset R^+ \Rightarrow R^+ \in T(R) \Rightarrow TC(R) \subset R^+$

Докажем, что $R^i \subset TC(R)$ по мат.инд.

База: $i = 1 \quad R^1 = R \subset TC(R)$

Переход: $R^{i+1} = R^iR \quad R^i \subset TC(R), R \subset TC(R)$
$\exists z : xR^iz, zRy \Rightarrow xTC(R)z, zTC(R)y \Rightarrow xTC(R)y \Rightarrow R^{i+1} \subset TC(R)$