1 Определения

1.1 Локальный максимум, минимум, экстремум

Определение. $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in E$ — **локальный максимум функции**, если

$$\exists U(x_0)\ \ \forall x \in U(x_0) \cap E\ \ f(x) \leq f(x_0)$$

Аналогично определеяется минимум.

Определение. **Экстремум** — точка минимума либо максимума.

1.2 ! Первообразная, неопределенный интеграл

$F, f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$
F — **первообразная** f на $\langle a, b \rangle$

$$\forall x \in \langle a, b \rangle \quad F'(x) = f(x)$$

Неопределенный интеграл f на $\langle a, b \rangle$ — множество всех первообразных f:

$$\{F + c, c \in \mathbb{R}\}, \text{ где } F \text{ — первообразная}$$

Обозначается $\int f = F + c$ или $\int f(x)dx$

1.3 Теорема о существовании первообразной

$f \in C(\langle a, b \rangle)$ тогда у f существует первообразная.

1.4 Таблица первообразных

$$\int x^n dx = \frac{x^{(n+1)}}{n+1}, n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \text{ — длинный логарифм}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x$$

Почему где-то нет dx? Кохась забыл?

1.5 Равномерная непрерывность

$f : \langle a, b\rangle \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **равномерно непрерывна** на $\langle a, b\rangle$:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle : |x_1 - x_2| < \delta \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Или для метрического пространства:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x_1, x_2 \;\; \rho(x_1, x_2) < \delta \quad \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

Отличие от непрерывности на отрезке в том, что δ зависит только от ε и подходит для всех x_1, x_2.

2 Теоремы

2.1 Критерий монотонности функции. Следствия

$f \in C(\langle a, b\rangle)$, дифф. в (a, b)
Тогда f — возрастает $\Leftrightarrow \forall x \in (a, b) \;\; f'(x) \geq 0$

Доказательство. "$\Rightarrow$" По определению $f' \quad \frac{f(x+h)-f(h)}{h} \geq 0$
"$\Leftarrow$" $x_1 > x_2$, по т. Лагранжа: $\exists c : f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2) \geq 0$ □

Следствие. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, тогда:
$f = \text{const} \Leftrightarrow (f \in C(\langle a, b\rangle)$ — дифф. на $\langle a, b\rangle, f' \equiv 0)$

Следствие. $f \in C\langle a, b\rangle$, дифф. на (a, b). Тогда:
f строго возрастает $\Leftrightarrow$ ① и ②
① $f' \geq 0$ на (a, b)
② $f' \not\equiv 0$ ни на каком промежутке

Доказательство. "$\Rightarrow$" очевидно
"$\Leftarrow$" По лемме о возрастании в отрезке □

Следствие. О доказательстве неравенств
$g, f \in C([a, b\rangle)$, дифф. в (a, b)
$f(a) \leq g(a); \forall x \in (a, b) \;\; f'(x) \leq g'(x)$
Тогда $\forall x \in [a, b\rangle \;\; f(x) \leq g(x)$

Доказательство. $g - f$ — возр., $g(a) - f(a) \geq 0$ □

2.2 Теорема о необходимом и достаточном условиях экстремума

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R} \quad x_0 \in (a, b) \quad f$ — дифф. на (a, b)
Тогда:

1. x_0 — лок. экстремум $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

2. f — n раз дифф. в x_0
   $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$

   $$\text{Если } f^{(n)}(x_0) > 0, \text{ то } \begin{cases} n \text{ — чет. :} & x_0 \text{ — локальный максимум} \\ n \text{ — нечет. :} & x_0 \text{ — не экстремум} \end{cases}$$

   $$\text{Если } f^{(n)}(x_0) < 0, \text{ то } \begin{cases} n \text{ — чет. :} & x_0 \text{ — локальный минимум} \\ n \text{ — нечет. :} & x_0 \text{ — не экстремум} \end{cases}$$

Доказательство. 1. т. Ферма

2. ф. Тейлора

$$f(x) = \mathrm{T}_n(f, x_0)(x) + o((x-x_0)^n)$$
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

при x, близких к x_0:

$$\mathrm{sign}(f(x) - f(x_0)) = \mathrm{sign}\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right)$$

Тогда при чётном n

$$\mathrm{sign}(f(x) - f(x_0)) = \mathrm{sign}\, f^{(n)}(x_0) \Rightarrow x_0 - \text{экстр.}$$

При нечётном n

$$\mathrm{sign}(f(x) - f(x_0)) = \begin{cases} f^{(n)}(x_0), & x > x_0 \\ -f^{(n)}(x_0), & x < x_0 \end{cases} \Rightarrow x_0 - \text{не экстр.}$$

□

2.3 Теорема Кантора о равномерной непрерывности

$f : X \to Y, X$ — комп., f — непр. на X
Тогда f — равномерно непр.

Доказательство. От противного.

$$\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall \delta > 0 \;\; \exists x_\delta, \overline{x}_\delta : \rho(x_\delta, \overline{x}_\delta) < \delta \quad \rho(f(x_\delta), f(\overline{x}_\delta)) \geq \varepsilon$$
$$\delta := \frac{1}{n} \;\; \exists x_n, \overline{x}_n : \rho(x_n, \overline{x}_n) < \delta \quad \rho(f(x_n), f(\overline{x}_n)) \geq \varepsilon$$

Выберем $x_{n_k} \to \tilde{x}, \overline{x}_{n_k} \to \tilde{\tilde{x}}$

$$\rho(\tilde{x}, \tilde{\tilde{x}}) \leq \lim_{n\to\infty} \delta = 0 \Rightarrow \tilde{x} = \tilde{\tilde{x}}$$

Тогда $f(x_{n_k}) \to f(\tilde{x}), f(\overline{x}_{n_k}) \to f(\tilde{x})$, противоречие с $\rho(f(x_n), f(\overline{x}_n)) \geq \varepsilon$ □

2.4 Теорема Брауэра о неподвижной точке

$f : [0,1] \times [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$, непр.
Тогда $\exists x \in [0,1]^2 : f(x) = x$, т.е. есть неподвижная точка.
Обобщенный вариант:

1. $f : [0,1]^m \to [0,1]^m$ — непр.
2. $f : B(0,1) \subset \mathbb{R}^m \to B(0,1)$ — непр.
3. $f : S(0,1) \subset \mathbb{R}^m$ — непр.

Доказательство. $\rho : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$
$\rho(x,y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$ — непр. в $[0,1]^2$
От противного — пусть $\forall x \in [0,1]^2 \quad f(x) \neq x$
Тогда $\forall x \quad \rho(f(x), x) > 0 \quad x \mapsto \rho(f(x), x)$ — непр., > 0
По т. Вейерштрасса $\exists \varepsilon > 0\ \ \forall x \in [0,1]\ \ \rho(f(x), x)) \geq \varepsilon$
По т. Кантора для f: для этого $\varepsilon\ \ \exists \delta < \varepsilon$:

$$\forall x, \overline{x} : ||x - \overline{x}|| < \delta \quad ||f(x) - f(\overline{x})|| < \varepsilon$$

Можно писать не $|| \cdot ||$, а ρ.
Возьмём $n : \frac{\sqrt{2}}{n} < \delta$
Построим доску $Hex(n+1, n+1)$, где $n+1$ — число узлов.
Логические координаты узла $(v_1, v_2) \quad v_1, v_2 \in \{0 \dots n\}$ имеют физические координаты, то есть узлу сопоставляется точка на квадрате с координатами $\left(\frac{v_1}{n}, \frac{v_2}{n}\right)$
$K(V) := \min\{i \in \{1,2\} : |f(\frac{v}{n}) - \frac{v_i}{n}| \geq \varepsilon\}$
Продолжение на следующей лекции. □

2.5 Теорема о свойствах неопределенного интеграла

f, g имеют первообразную на $\langle a, b \rangle$. Тогда

1. Линейность:
$$\int (f+g) = \int f + \int g$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \ \int \alpha f = \alpha \int f$$

2. $\varphi \langle c, d \rangle \to \langle a, b \rangle$
$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \left(\int f(x) dx \right) |_{x = \varphi(t)} = F(\varphi(t))$$
Частный случай: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:
$$\int f(\alpha t + \beta) dt = \frac{1}{\alpha} F(\alpha t + \beta)$$

3. f, g — дифф. на $\langle a, b \rangle$; $f'g$ — имеет первообр.
Тогда fg' имеет первообразную и
$$\int fg' = fg - \int f'g$$

Доказательство. 1. Опущено

2. $(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$

3. $(fg - \int f'g)' = f'g + fg' - f'g = fg'$

□