1 Определения и формулировки

1.1 Внутренняя точка множества, открытое множество, внутренность

a — **внутренняя точка** множества D, если $\exists U(a) : U(a) \subset D$, т.е. $\exists r > 0 : B(a, r) \subset D$
D — **открытое множество**, если $\forall a \in D : a$ — внутренняя точка D
Внутренностью множества D называется $Int(D) = \{x \in D : x$ — внутр. точка $D\}$

1.2 Предельная точка множества

a — **предельная точка** множества D, если

$$\forall \dot{U}(a) \;\; \dot{U}(a) \cap D \neq \varnothing$$

1.3 Замкнутое множество, замыкание, граница

D — **замкнутое множество**, если оно содержит все свои предельные точки.
$\overline{D} = D \cup$ (множество предельных точек D) — замыкание.
Граница множества — множество его граничных точек. Обозначается ∂D

1.4 Изолированная точка, граничная точка

a — **изолированная точка** D, если $a \in D$ и a — не предельная, то есть:

$$\exists U(a) \quad U(a) \cap D = \{a\}$$

a — **граничная точка** D, если $\forall U(a) \quad U(a)$ содержит точки как из D, так и из D^c

1.5 Описание внутренности множества

1. $IntD$ - откр. множество
2. $IntD = \bigcup\limits_{\substack{D \supset G \\ G \text{ — открыт}}}$ — максимальное открытое множество, содержащееся в D
3. D — откр. в $X \Leftrightarrow D = IntD$

1.6 Описание замыкания множества в терминах пересечений

$\overline{D} = \bigcap\limits_{\substack{D \subset F \\ F \text{— замкн.}}} F$ — мин. (по вкл.) замкн. множество, содержащее D.

1.7 Верхняя, нижняя границы; супремум, инфимум

$E \subset \mathbb{R}$. E — **огр. сверху**, если $\exists M \in \mathbb{R} \;\; \forall x \in E \;\; x \leq M$. Кроме того, всякие такие M называются **верхними границами** E.
Аналогично ограничение снизу.
$E \subset \mathbb{R}, E \neq \varnothing$.
Для E — огр. сверху **супремум** ($\sup E$)— наименьшая из верхних границ E.
Для E — огр. снизу **инфимум** ($\sup E$) — наибольшая из нижних границ E.

1.8 Техническое описание супремума

Техническое описание супремума: $b = \sup E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E \;\; x \le b \\ \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x \in E \;\; b - \varepsilon < x \end{cases}$

1.9 Последовательность, стремящаяся к бесконечности

В $\mathbb{R}$:

1. $x_n \to +\infty \quad \forall E > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n > N \;\; x_n > E$
2. $x_n \to -\infty \quad \forall E \;\; \exists N \;\; \forall n > N \;\; x_n < E$
3. $x_n \to \infty \Leftrightarrow |x_n| \to +\infty$

1.10 Компактное множество

$K \subset X$ — **компактное**, если для любого открытого покрытия этого множества $\exists$ конечное подпокрытие $\Leftrightarrow \exists \alpha_1 \dots \alpha_n \quad K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$

1.11 Секвенциальная компактность

Секвенциально компактным называется множество $A \subset X : \forall$ посл. (x_n) точек A
$\exists$ подпосл. x_{n_k}, которая сходится к точке из A

1.12 Определения предела отображения (3 шт)

$(X, \rho^x), (Y, \rho^y) \quad D \subset X \quad f : D \to Y$
$a \in X$, a — пред. точка множества D, $A \in Y$
Тогда $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ — **предел отображения**, если:

1. По Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D : 0 < \rho^X(a, x) < \delta \quad \rho^Y(f(x), A) < \varepsilon$$

2. На языке окрестностей:

$$\forall U(A) \;\; \exists V(a) \;\; \forall x \in \dot{V}(a) \;\; f(x) \in U(A)$$

3. По Гейне: $\forall (x_n)$ — посл. в X:

   (a) $x_n \to a$

   (b) $x_n \in D$

   (c) $x_n \neq a$

   $f(x_n) \to A$

1.13 Определения пределов в $\overline{\mathbb{R}}$

Для $Y = \overline{\mathbb{R}}, -\infty < x < +\infty$:

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty : \quad \forall E\ \ \exists\delta > 0\ \ \forall x \in X : 0 < |x-a| < \delta\ \ f(x) > E$
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty : \quad \forall E\ \ \exists\delta > 0\ \ \forall x \in X : 0 < |x-a| < \delta\ \ f(x) < E$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = c \in \mathbb{R} \quad \forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta\ \ \forall x \in X : x > \delta\ \ |f(x) - c| < \varepsilon$
4. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = c \in \mathbb{R} \quad \forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta\ \ \forall x \in X : x < \delta\ \ |f(x) - c| < \varepsilon$

1.14 Предел по множеству

$f : D \subset X \to Y, D_1 \subset D, x_0$ — пред. точка D_1
Тогда **предел по множеству** D_1 в точке x_0 — это $\lim\limits_{x\to x_0} f|_{D_1}(x)$

1.15 Односторонние пределы

В $\mathbb{R}$ одностор. $= \{$ левостор., правостор. $\}$
Левосторонний предел $\lim\limits_{x\to x_0 - 0} f(x) = L$ - это $\lim f|_{D\cap(-\infty,x_0)}$

$$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta > 0\ \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap D\ \ |f(x) - L| < \varepsilon$$

Аналогично правосторонний.

1.16 Непрерывное отображение

$f : D \subset X \to Y \quad x_0 \in D$
f — **непрерывное** в точке x_0, если:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, либо x_0 — изолированная точка D
2. $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta > 0\ \ \forall x \in D\ \ \rho(x, x_0) < \delta\ \ \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$
3. $\forall U(f(x_0))\ \ \exists V(x_0)\ \ \forall x \in V(x_0) \cap D\ \ f(x) \in U(f(x_0))$
4. По Гейне $\forall(x_n) : x_n \to x_0; x_n \in D\ \ f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_0)$

1.17 Непрерывность слева

f — непр. слева в x_0, если $f|_{(-\infty,x_0]\cap D}$ — непрерывно в x_0

1.18 Разрыв, разрывы первого и второго рода

Если $\nexists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, либо $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ — **точка разрыва**.
Пусть $\exists f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$ и не все 3 числа равны: $f(x_0 - 0), f(x_0), f(x_0 + 0)$. Это **разрыв I рода *(скачок)***.
Остальные точки разрыва — **разрыв II рода**.

Примечание.

$$f(x_0 - 0) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0 - 0} f(x)$$

1.19 О большое, о маленькое

$f, g : D \subset X \to \mathbb{R}$ x_0 — пр. точка D
Если $\exists V(x_0)$ $\exists \varphi : V(x_0) \cap D \to \mathbb{R}$ $f(x) = g(x)\varphi(x)$ при $x \in V(x_0) \cap D$

1. φ — ограничена. Тогда говорят $f = O(g)$ при $x \to x_0$
   "f **ограничена** по сравнению с g при $x \to x_0$"
2. $\varphi(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ f — **беск. малая** по отношению к g при $x \to x_0$, $f = o(g)$
3. $\varphi(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 1$ f и g **экв.** при $x \to x_0$ $f \underset{x \to x_0}{\sim} g$

Примечание. О большое и о малое — разные вопросы в табличке.

1.20 Эквивалентные функции, таблица эквивалентных

Эквивалентные функции даны выше.
Таблица эквивалентных для $x \to 0$:

$$\begin{aligned}
\sin x &\sim x \\
\operatorname{sh} x &\sim x \\
\operatorname{tg} x &\sim x \\
\operatorname{arctg} x &\sim x \\
1 - \cos x &\sim \frac{x^2}{2} \\
\operatorname{ch} x - 1 &\sim \frac{x^2}{2} \\
e^x - 1 &\sim x \\
\ln(1 + x) &\sim x \\
(1 + x)^\alpha - 1 &\sim \alpha x \\
a^x - 1 &\sim x \ln a
\end{aligned}$$

1.21 Асимптотически равные *(сравнимые)* функции

В условиях прошлых определений $f = O(g), g = O(f) \Leftrightarrow f \asymp g$ — асимптотически сравнимы на множестве D, "величины одного порядка".

1.22 Асимптотическое разложение

$g_n : D \subset X \to \mathbb{R}$ x_0 — пред. точка D
$\forall n$ $g_{n+1}(x) = o(g_n), x \to x_0$

Пример. $g_n(x) = x^n, n = 0, 1, 2 \ldots$ $x \to 0$ $g_{n+1} = x g_n, x \to 0$

(g_n) называется **шкала асимптотического разложения**.
$f : D \to \mathbb{R}$
Если $f(x) = c_0 g_0(x) + c_1 g_1(x) + \ldots + c_n g_n(x) + o(g_n)$, то это асимптотическое разложение f по шкале (g_n)

1.23 Наклонная асимптота графика

Пусть $f(x) = Ax + B + o(1), x \to +\infty$
Прямая $y = Ax + B$ — наклонная асимптота к графику f при $x \to +\infty$

1.24 Путь в метрическом пространстве

Y — метр. пр-во
$\gamma : [a, b] \to Y$ — непр. на $[a, b]$
= **путь** в пространстве Y

1.25 Линейно связное множество

$E \subset Y$
E — **линейно связное**, если $\forall A, B \in E$ $\exists$ путь $\gamma : [a, b] \to E$ такой, что:

- $\gamma(a) = A$
- $\gamma(b) = B$

1.26 Функция, дифференцируемая в точке и производная

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R} \quad x_0 \in \langle a, b\rangle$
f — **дифференцируема**. в точке x_0, если $\exists A \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + o(x - x_0), x \to x_0$$

При этом A называется **производной** f в точке x_0

Примечание. Это два разных билета.

2 Теоремы

2.1 Теорема об открытых и замкнутых множествах в пространстве и в подпространстве

$Y \subset X$, X — метр.п., Y — подпространство, $D \subset Y \subset X$

1. D — откр. в $Y \Leftrightarrow \exists G$ — откр. в $X \quad D = G \cap Y$
2. D — замкн. в $Y \Leftrightarrow \exists F$ — замкн. в $X \quad D = F \cap Y$

2.2 Теорема о компактности в пространстве и в подпространстве

(X, ρ) — метрич. пространство, $Y \subset X$ — подпространство, $K \subset Y$
Тогда K — комп. в $Y \Leftrightarrow K$ — компактно в X.

2.3 Простейшие свойства компактных множеств

(X, ρ) — метрическое пространство, $K \subset X$

1. K — комп. $\Rightarrow K$ — замкн., K — огр.
2. X — комп, K — замкн. $\Rightarrow K$ — комп.

2.4 Лемма о вложенных параллелепипедах

$[a,b] = \{x + \mathbb{R}^m : \forall i = 1 \dots m \;\; a_i \le x_i \le b_i\}$ — параллелепипед.
$[a^1, b^1] \supset [a^2, b^2] \supset \dots$ — бесконечная последовательность параллелепипедов.
Тогда $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} [a^i, b^i] \neq \varnothing$
Если $diam[a^n, b^n] = ||b^n - a^n|| \to 0$, тогда $\exists! c \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} [a^i, b^i]$

2.5 Компактность замкнутого параллелепипеда в $\mathbb{R}^m$

$[a,b]$ — компактное множество в $\mathbb{R}^m$

2.6 Теорема о характеристике компактов в $\mathbb{R}^m$

$K \subset \mathbb{R}^m$. Эквивалентны следующие утверждения:

1. K — замкнуто и ограничено
2. K — компактно
3. K — секвенциально компактно

2.7 Эквивалентность определений Гейне и Коши

Определение Коши $\Leftrightarrow$ определение Гейне.

2.8 Единственность предела, локальная ограниченность отображения, имеющего предел, теорема о стабилизации знака

$f : D \subset X \to Y$, a — пред. точка D
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A; \lim\limits_{x \to a} f(x) = B$
Тогда $A = B$
О локальной ограниченности отображения, имеющего предел.
$f : D \subset X \to Y$, a — пред. точка D, $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$
Тогда $\exists V(a) : f$ — огр. на $V(a) \cap D$, т.е. $f(V(a) \cap D)$ содержится в некотором шаре.
О стабилизации знака.
$f : D \subset X \to Y$, a — пред. точка D, $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$
Пусть $B \in Y, B \neq A$
Тогда $\exists V(a) \;\; \forall x \in \dot{V}(a) \cap D \;\; f(x) \neq B$

2.9 Арифметические свойства пределов отображений. Формулировка для $\overline{\mathbb{R}}$

$f, g : D \subset X \to Y$, X — метрич. пространство, Y — норм. пространство над $\mathbb{R}$, a — пред. точка D
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A, \lim\limits_{x \to a} g(x) = B$
$\lambda : D \to \mathbb{R}, \lim\limits_{x \to a} \lambda(x) = \lambda_0$
Тогда:

1. $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm g(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} f(x) \pm g(x) = A \pm B$

2. $\lim\limits_{x \to a} \lambda(x) f(x) = \lambda_0 = A$
3. $\lim\limits_{x \to a} ||f(x)|| = ||A||$
4. Для случая $Y = \mathbb{R}$ и для $B \neq 0$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$

$\frac{f}{g}$ задано на множестве $D' = D \setminus \{x : g(x) = 0\}$

a — пр. точка D' по теореме о стабилизации знака $\exists V(a) \ \ \forall x \in V(a) \cap D \ \ g(x)$ — того же знака, что и B, т.е. $g(x) \neq 0$

$\dot{V}(a) \cap D' = \dot{V}(a) \cap D \Rightarrow a$ — пред. точка для D'

2.10 Принцип выбора Больцано–Вейерштрасса

Если в $\mathbb{R}^m$ (x_n) — ограниченная последовательность, то у неё существует сходящаяся подпоследовательность.

2.11 Сходимость в себе и ее свойства

x_n — **фундаментальная, последовательность Коши, сходящаяся в себе**, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \ \forall m, n > N \ \ \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$$

1. Сходящаяся в себе последовательность ограничена.
2. Если у сходящейся в себе последовательности есть сходящаяся подпоследовательность, то сама последовательность сходится.

2.12 Критерий Коши для последовательностей и отображений

$f : D \subset X \to Y$, a — пр. точка D, Y — полное метрическое пространство.
Тогда

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) \in Y \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x_1, x_2 \in D \ \ \rho(x_1, a) < \delta; \rho(x_2, a) < \delta \ \ \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

2.12.1 Для последовательностей

1. В любом метрическом пространстве x_n — сходящ. $\Rightarrow x_n$ — фунд.
2. В $\mathbb{R}^m$ x_n — фунд. $\Rightarrow x_n$ — сходящ.

2.13 Теорема о пределе монотонной функции

$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, монотонная, $a \in \overline{\mathbb{R}}$
$D_1 := D \cap (-\infty, a)$, a — пред. точка D_1. Тогда:

1. f — возрастает, огр. сверху D_1. Тогда $\exists$ конечный предел $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$
2. f — убывает, огр. снизу D_1. Тогда $\exists$ конечный предел $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$

2.14 Свойства непрерывных отображений: арифметические, стабилизация знака, композиция

1. $f, g : D \subset X \to Y \ \ x_0 \in D$ (X — норм. пространство)
   f, g — непр. в D; $\lambda : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ — непр. x_0
   Тогда $f \pm g, ||f||, \lambda f$ — непр. x_0
2. $f, g : D \subset X \to \mathbb{R} \ \ x_0 \in D$
   f, g — непр. в x_0
   Тогда $f \pm g, |f|, fg$ — непр. в x_0
   $g(x_0) \neq 0$, тогда $\frac{f}{g}$ — непр. x_0

2.14.1 Стабилизация знака

Если функция $f : D \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то:

$$\exists V(x_0) : \forall x \in V(x_0) \cap D \quad \text{sign}\, f(x) = \text{sign}\, f(x_0)$$

2.14.2 Непрерывность композиции непрерывных отображений

$f : D \subset X \to Y \quad g : E \subset Y \to Z \quad f(D) \subset E$
f — непр. в $x_0 \in D$, g — непр. в $f(x_0)$
Тогда $g \circ f$ непр. в x_0

2.15 Непрерывность композиции и соответствующая теорема для пределов

Непрервыность композиции дана выше.

2.15.1 Теорема о пределе композиции непрерывных отображений

$f : D \subset X \to Y \quad g : E \subset Y \to Z \quad f(D) \subset E$
a — предельн. точка $D \quad f(x) \xrightarrow[x \to a]{} A$
A — предельн. точка $E \quad g(y) \xrightarrow[y \to A]{} B$
$\exists V(a) \quad \forall x \in \dot{V}(a) \cap D \quad f(x) \neq A \quad (*)$
Тогда $g(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} B$

2.16 Теорема о замене на эквивалентную при вычислении пределов. Таблица эквивалентных

$f, \tilde{f}, g, \tilde{g} : D \subset X \to \mathbb{R}$
x_0 — предельная точка D
$f \sim \tilde{f}, g \sim \tilde{g}$ при $x \to x_0$
Тогда

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)$$

, т.е. если $\exists$ один из пределов, то $\exists$ и второй и имеет место равенство

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}$$

, если x_0 лежит в области определения $\frac{f}{g}$
Таблица эквивалентных дана выше.

2.17 Теорема единственности асимптотического разложения

$f, g_n : D \subset X \to \mathbb{R} \quad x_0$ — предельная точка D
$\forall n \;\; g_{n+1} = o(g_n), x \to x_0$
$\exists U(x_0) \;\; \forall x \in \dot{U}(x_0) \cap D \;\; \forall i \;\; g_i(x) \neq 0$
Если $f(x) = c_0 g_0(x) + \ldots + c_n g_n(x) + o(g_n(x))$
$f(x) = d_0 g_0(x) + \ldots + d_m g_m(x) + o(g_m(x))$
$]n \leq m$
Тогда $\forall i \;\; c_i = d_i$

2.18 Теорема о топологическом определении непрерывности

$f : X \to Y$ — непр. на $X \Leftrightarrow \forall G \subset Y$, откр. $f^{-1}(G)$ — откр. в X.

2.19 Теорема Вейерштрасса о непрерывном образе компакта. Следствия

$f : X \to Y$ — непр. на X
Если X — комп., то $f(X)$ — комп.

Следствие. Непрерывный образ компакта замкнут и ограничен.

Следствие. (1-я теорема Вейерштрасса)
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — непр.
Тогда f — огр.

Следствие. $f : X \to \mathbb{R}$
X — комп., f — непр. на X
Тогда $\exists \max\limits_X f, \min\limits_X f$
$\exists x_0, x_1 : \forall x \in X \quad f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$

Следствие. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — непр.
$\exists \max f, \min f$

2.20 Лемма о связности отрезка

Промежуток $\langle a, b\rangle$ *(границы могут входить, могут не входить)* — не представим в виде объединения двух непересекающихся непустых открытых множеств
Т.е. $\nexists G_1, G_2 \subset \mathbb{R}$ — откр.:

- $G_1 \cap G_2 = \varnothing$
- $\langle a, b\rangle \cap G_1 \neq \varnothing \quad \langle a, b\rangle \cap G_2 \neq \varnothing$
- $\langle a, b\rangle \subset G_1 \cup G_2$

2.21 Теорема Больцано-Коши о промежуточном значении

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, непр. на $[a, b]$. Тогда

$$\forall t \text{ между } f(a) \text{ и } f(b)\ \ \exists x \in [a, b] : f(x) = t$$

2.22 Теорема о сохранении промежутка

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, непр.
Тогда $f(\langle a, b\rangle)$ — промежуток.

2.23 Теорема Больцано-Коши о сохранении линейной связности

X, Y — метрические пространства, $f : X \to Y$ — непрерывное и сюръекция
X — линейно связное множество. Тогда Y — линейно связное множество.

2.24 Описание линейно связных множеств в $\mathbb{R}$

В $\mathbb{R}$ линейно связанными множествами являются только промежутки.

2.25 Теорема о бутерброде

Кусок хлеба и кусок колбасы, лежащие на столе, можно разрезать прямой на две равные по площади части каждый.

2.26 Теорема о вписанном n-угольнике максимальной площади

Вписанный n-угольник максимальной площади — правильный.

2.27 Теорема о непрерывности монотонной функции. Следствие о множестве точек разрыва

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, монотонна. Тогда

1. Точки разрыва f (если есть) — I рода
2. f — непр. на $\langle a, b\rangle \Leftrightarrow f(\langle a, b\rangle)$ — промежуток

У монотонной функции, заданной на промежутке, имеется не более чем счётное *(НБЧС)* множество точек разрыва.

2.28 Теорема о существовании и непрерывности обратной функции

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — непр., строго монот.
$m := \inf\limits_{\langle a,b\rangle} f(x), M := \sup\limits_{\langle a,b\rangle} f(x)$. Тогда:

1. f — обратимая и $f^{-1} : \langle m, M\rangle \to \langle a, b\rangle$
2. f^{-1} строго монотонна и того же типа *(возрастает или убывает)*
3. f^{-1} непрерывна