1 Монотонные экстремумы

Теорема 1. ***Критерий монотонности***
$f \in C(\langle a, b\rangle)$, дифф. в (a, b)
Тогда f — возрастает $\Leftrightarrow \forall x \in (a, b) \ \ f'(x) \geq 0$

Доказательство. "$\Rightarrow$" По определению f' $\ \frac{f(x+h)-f(h)}{h} \geq 0$
"$\Leftarrow$" $x_1 > x_2$, по т. Лагранжа: $\exists c : f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2) \geq 0$ □

Следствие. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, тогда:
$f = \text{const} \Leftrightarrow (f \in C(\langle a, b\rangle) -$ дифф. на $\langle a, b\rangle, f' \equiv 0)$

Следствие. $f \in C\langle a, b\rangle$, дифф. на (a, b). Тогда:
f строго возрастает $\Leftrightarrow$ ① и ②
① $f' \geq 0$ на (a, b)
② $f' \not\equiv 0$ ни на каком промежутке

Доказательство. "$\Rightarrow$" очевидно
"$\Leftarrow$" По лемме о возрастании в отрезке □

Следствие. О доказательстве неравенств
$g, f \in C([a, b\rangle)$, дифф. в (a, b)
$f(a) \leq g(a); \forall x \in (a, b) \ \ f'(x) \leq g'(x)$
Тогда $\forall x \in [a, b\rangle \ \ f(x) \leq g(x)$
$g - f$ — возр., $g(a) - f(a) \geq 0$

Определение. $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in E$ — **локальный максимум функции**, если

$$\exists U(x_0) \ \ \forall x \in U(x_0) \cap E \ \ f(x) \leq f(x_0)$$

Аналогично определеяется минимум.

Определение. **Экстремум** — точка минимума либо максимума.

Теорема 2. *$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R} \quad x_0 \in (a, b) \quad f$ — дифф. на (a, b)*
Тогда:

1. *x_0 — лок. экстремум $\Rightarrow f'(x_0) = 0$*
2. *f — n раз дифф. в x_0*
   $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$
   $$\text{Если } f^{(n)}(x_0) > 0, \text{ то } \begin{cases} n - \text{чет.}: & x_0 - \text{локальный максимум} \\ n - \text{нечет.}: & x_0 - \text{не экстремум} \end{cases}$$
   $$\text{Если } f^{(n)}(x_0) < 0, \text{ то } \begin{cases} n - \text{чет.}: & x_0 - \text{локальный минимум} \\ n - \text{нечет.}: & x_0 - \text{не экстремум} \end{cases}$$

Доказательство. 1. т. Ферма

2. ф. Тейлора

$$f(x) = \text{Tn}(f, x_0)(x) + o((x - x_0)^n)$$
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

при x, близких к x_0:

$$\operatorname{sign}(f(x) - f(x_0)) = \operatorname{sign}\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\right)$$

□

2 Интеграл

2.1 Неопределенный интеграл

Определение. $F, f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$
F — **первообразная** f на $\langle a, b \rangle$

$$\forall x \in \langle a, b \rangle \quad F'(x) = f(x)$$

Теорема 3. ***О существовании первообразной***
$f \in C(\langle a, b \rangle)$ тогда у f существует первообразная.

Доказательство. Чуть позже. □

Теорема 4. *F — первообразная f на $\langle a, b \rangle$. Тогда:*

1. *$\forall c \in \mathbb{R} \quad F + c$ — тоже первообразная*
2. *Никаких других первообразных нет, т.е. если G — перв. f, то $\exists c \in \mathbb{R} : G = F + c$*

Доказательство. 1. очевидно

2. $F' = f, G' = f \quad (G - F)' \equiv 0 \Rightarrow G - F = \text{const}$

□

Определение. **Неопределенный интеграл** f на $\langle a, b \rangle$ — множество всех первообразных f:

$$\{F + c, c \in \mathbb{R}\}, \text{ где } F \text{ — первообразная}$$

Обозначается $\int f = F + c$ или $\int f(x)dx$

$$\int x^n dx = \frac{x^{(n+1)}}{n+1}, n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \text{ — длинный логарифм}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$$

Почему где-то нет dx? Кохась забыл?

Теорема 5. *f, g имеют первообразную на $\langle a, b\rangle$. Тогда*

1. *Линейность:*
$$\int (f+g) = \int f + \int g$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \int \alpha f = \alpha \int f$$

2. $\varphi \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$
$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \left(\int f(x) dx\right) |_{x=\varphi(t)} = F(\varphi(t))$$
Частный случай: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}:$
$$\int f(\alpha t + \beta) dt = \frac{1}{\alpha} F(\alpha t + \beta)$$

3. *f, g — дифф. на $\langle a, b\rangle$; $f'g$ — имеет первообр.*

Тогда fg' имеет первообразную и
$$\int fg' = fg - \int f'g$$

Доказательство. 1. Опущено

2. $(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$

3. $(fg - \int f'g)' = f'g + fg' - f'g = fg'$

$\square$

Примечание. Если φ обратима, то:
$$\int f(x) dx = \left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt\right) |_{t:=\varphi^{-1}(x)}$$

$df := f'(x) dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = [x := \operatorname{tg} t] = \int \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t}}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int \frac{1}{\frac{1}{\cos t}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt =$$
$$= \int \frac{\cos t dt}{\cos^2 t} = \int \frac{\cos t dt}{1 - \sin^2 t} = [y := \sin t] = \int \frac{dy}{1-y^2} = \int \frac{1}{1-y} \cdot \frac{1}{1+y} = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y}\right) dy =$$
$$= \frac{1}{2}(-\ln(1-y) + \ln(1+y)) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin t}{1-\sin t} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin \operatorname{arctg} x}{1-\sin \operatorname{arctg} x}$$

2.2 Гиперболические тригонометрические функции

$$\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad \operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

Они полезны тем, что по ним висит нить, закрепленная в двух точках.

$$\operatorname{sh} 2t = 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t$$

$$(\operatorname{ch} t)^2 + \left(\frac{\operatorname{sh} t}{i}\right)^2 = 1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = [x = \operatorname{sh} t] = \int \frac{1}{\sqrt{ch^2 t}} chtdt = \int 1dt = t$$

2.3 Равномерно непрерывные функции

Определение. $f : \langle a, b\rangle \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **равномерно непрерывна** на $\langle a, b\rangle$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle : |x_1 - x_2| < \delta \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Или для метрического пространства:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x_1, x_2 \ \rho(x_1, x_2) < \delta \quad \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

Пример.

1. $f(x) = x$ равномерно непрерывна.
2. $f(x) = x^2$ $\langle a, b\rangle = \mathbb{R}$ $\quad \varepsilon := 1$ $\exists ?\delta$
   $x_1 := \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}, x_2 := \frac{1}{\delta}$
   $x_1^2 - x_2^2 = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1 \Rightarrow f$ — не равномерно непрерывна.

Теорема 6. *$f : X \to Y, X$ — комп., f — непр. на X*
Тогда f — непр.

Доказательство. От противного.

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x_\delta, \overline{x}_\delta : \rho(x_\delta, \overline{x}_\delta) < \delta \quad \rho(f(x_\delta), f(\overline{x}_\delta)) \geq \varepsilon$$

$$\delta := \frac{1}{n} \ \exists x_n, \overline{x}_n : \rho(x_n, \overline{x}_n) < \delta \quad \rho(f(x_n), f(\overline{x}_n)) \geq \varepsilon$$

Выберем $x_{n_k} \to \tilde{x}, \overline{x}_{n_k} \to \tilde{\tilde{x}}$
$\rho(\tilde{x}, \tilde{\tilde{x}}) \leq 0$, т.е. $\tilde{x} = \tilde{\tilde{x}}$. Тогда $f(x_{n_k}) \to f(\tilde{x}), f(\overline{x}_{n_k}) \to f(\tilde{x})$, противоречие с $\rho(f(x_n), f(\overline{x}_n)) \geq \varepsilon$ $\square$

Пример. $f(x) = \sqrt{x} \quad X = [0, +\infty)$
По т. Кантора: f равномерно непрерывна на $[0, 1]$
При $x \geq \frac{1}{2}$ $\quad |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \frac{1}{2\sqrt{c}}|x_1 - x_2| < |x_1 - x_2|$, т.е. тоже равномерно непрерывна.

2.4 Конфетка: т. Брауэра о неподвижной точке

Статья от Matousek, Zigler, Bjorner (arxiv: 1409.7890v1)
Игра Hex: два игрока — чёрный и белый, на своем ходе красят один шестиугольник в свой цвет. Условие выигрыша — путь искомого цвета с одной стороны в сторону нужного цвета — две противоположные стороны имеют черный цвет, две другие — белый.

Теорема 7. *Дана доска для Hex — параллелограм $k \times l$, покрашенная в 2 цвета.*
Это выигрышная доска для одного из игроков.

Доказательство. Рассмотрим первый ряд *(прилегающий к чёрной стороне)*. Если в нём нет черных клеток, белый выиграл. Пойдём по границе черных и белых клеток так, что справа всегда черная клетка, слева белая. В этом пути нет самопересечений, т.к. в точке самопересечеения с обеих сторон черные клетки, мы так не идём.
Представим доску в виде прямоугольной сетки, где вершины соединены, если из соответствующего шестиугольника можно прийти в другой соответствующий шестиугольник. □

Теорема 8. $f : [0,1] \times [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$*, непр.*
Тогда $\exists x \in [0,1]^2 : f(x) = x$*, т.е. есть неподвижная точка.*
Обобщенный вариант:

1. $f : [0,1]^m \to [0,1]^m$ *— непр.*
2. $f : B(0,1) \subset \mathbb{R}^m \to B(0,1)$ *— непр.*
3. $f : S(0,1) \subset \mathbb{R}^m$ *— непр.*

Доказательство. $\rho : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$
$\rho(x,y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$ — непр. в $[0,1]^2$
От противного — пусть $\forall x \in [0,1]^2 \quad f(x) \neq x$
Тогда $\forall x \quad \rho(f(x), x) > 0 \quad x \mapsto \rho(f(x), x)$ — непр., > 0
По т. Вейерштрасса $\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall x \in [0,1] \ \ \rho(f(x,x)) \geq \varepsilon$
По т. Кантора для f: для этого $\varepsilon \ \ \exists \delta < \varepsilon$:

$$\forall x, \overline{x} : ||x - \overline{x}|| < \delta \quad ||f(x) - f(\overline{x})|| < \varepsilon$$

Можно писать не $|| \cdot ||$, а ρ.
Возьмём $n : \frac{1}{n} < \delta$
Построим доску $Hex(n+1, n+1)$, где $n+1$ — число узлов.
Логические координаты узла $(v_1, v_2) \quad v_1, v_2 \in \{0 \dots n\}$ имеют физические координаты $\left(\frac{v_1}{n}, \frac{v_2}{n}\right)$
$K(V) := \min\{i \in \{1,2\} : |f(\frac{v}{n}) - \frac{v_i}{n}|\}$
Продолжение на следующей лекции. □