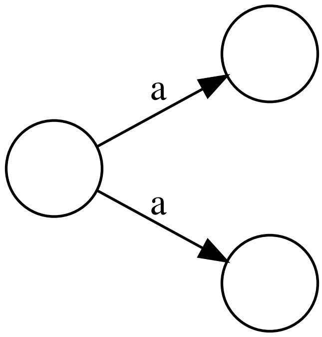
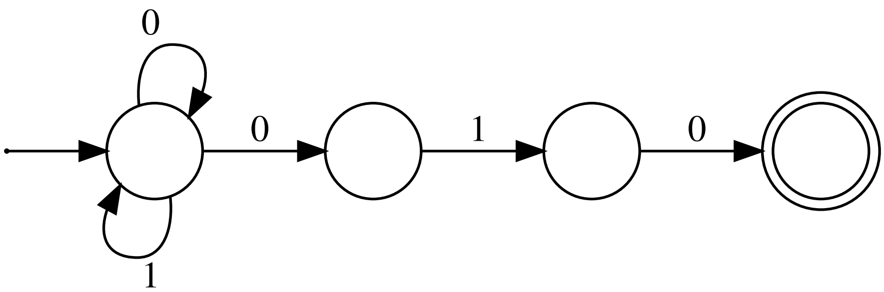
НКА

Уберем ограничение на единственность перехода по символу, тогда получим **недетерменированный КА**:



Кроме того, уберем ограничение на существование перехода, тогда если перехода нет, то слово не допускается в искомый язык. Слово допускается, если существует последовательность недетерменированных выборов, приводящая к допуску.

Пример. Автомат для слов с суффиксом 010:



Алгоритм проверки допуска НКА

$Q = \{1, 2 \ldots q\}$ — все вершины
`term` — массив булевых переменных терминальности состояний.
`go[c][i]` — вектор вершин, в которые можно попасть из вершины `i` по символу `c`
Построим динамику `can[i][u]` — можно ли за i шагов попасть в состояние u.

```
accept(x)
    can[0][s] = true
    for i = 0...len(x) - 1
        c = x[i]
        for u = 1...q
            if (can[i][u])
                for v : go[u][c]
                    can[i + 1][v] = true
    for u = 1...q
        if (can[len(x)][u] and term[u])
            return true
    return false
```

Применим для автомата слов с суффиксом 010 и слова 01010:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
0 & + & & & \\
1 & + & + & & \\
2 & + & & + & \\
3 & + & + & & + \\
4 & + & & + & \\
5 & + & + & & \oplus
\end{array}$$

Заметим, что 2 строка = 4 строка и 3 символ равен 5 символу, поэтому 3 строка = 5 строка.
Построим по этой динамике ДКА с булевыми векторами строк в вершинах.

```
ds = 1 << s
for du = 0...2**q-1
    for c - symbol
        dv = 0
        for u = 0...q-1
            if (du & (1 << u)) != 0
                for v : go[u][c]
                    dv |= (1 << v)
        dgo[du][c] = dv
    if (du & term != 0)
        dterm[du] = true
```

Для ускорения можно перебирать не все маски, а только те, которые встретились, т.е. DFS/BFS. Без этого $\mathcal{O}(2^q \cdot poly(q, \sigma))$, с оптимизацией $\mathcal{O}(ans \cdot poly(q, \sigma))$, $ans =$ число состояний ДКА.
Таким образом, мы по любому НКА можем построить ДКА с таким же языков, т.е. выполнятся следующее:

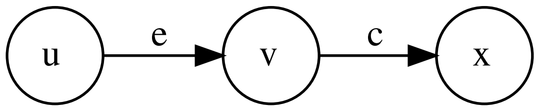
Теорема 1. $\forall$ *НКА* A $\exists$ *ДКА* $A_D : L(A) = L(A_D)$

Создадим в НКА ребра, по которым можно перейти, не считав символа, и будем обозначать такое ребро ε. Эта конструкция называется ε-**НКА**.
Докажем, что ε-НКА эквивалентен ДКА построением:

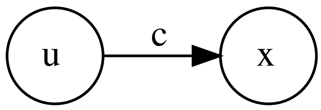
1. Построим граф ε-переходов и создадим его транзитивное замыкание. Добавленные замыканием ребра добавим в исходный автомат. Язык автомата от этого не изменился, т.к. переход по новому ребру эквивалентен n переходов по ε-ребрам в исходном графе. Теперь можно не делать два ε-перехода подряд.

2. Если из обычной вершины есть ε-переход в терминальную вершину, то сделаем эту вершину терминальной. Язык автомата от этого преобразования не изменился. Теперь последний переход происходит не по ε.

3. Преобразуем



в



Теперь можно не делать ε-переходы.

4. Удалим ε-переходы.

Теорема 2. *Клини.*

$$L - \textit{регулярный} \Leftrightarrow \exists \text{ ДКА } A : L = L(A)$$

Докажем “$\Rightarrow$”

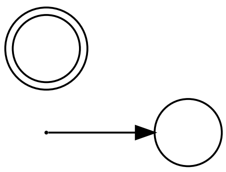


Рис. 1: Автомат для $\{\varnothing\}$

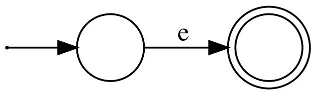


Рис. 2: Автомат $\{\varepsilon\}$

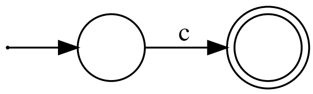


Рис. 3: Автомат $\{c\}$

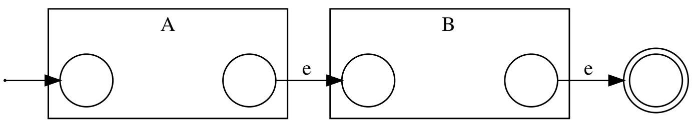


Рис. 4: Автомат AB

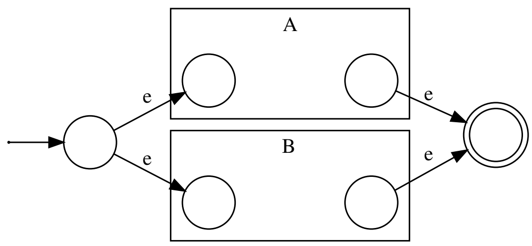


Рис. 5: Автомат $A \cup B$

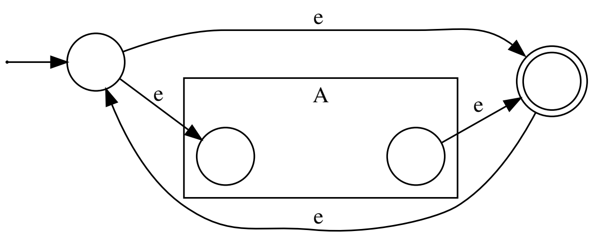


Рис. 6: Автомат A^*

Докажем “$\Leftarrow$”.

Доказательство. $Q := \{1, 2, \ldots q\}$
Построим $\sim q^3$ регулярных выражений, занумеруем их как $\xi_{ijk}, i = 1 \ldots q, j = 1 \ldots q, k = 0 \ldots q$.
ξ_{ijk} задает слова, переводящие автомат из состояния i в j, используя промежуточные состояния с номерами $\leq k$

$\triangleleft k = 0, i = j, \xi_{ii0} = \varepsilon|c_1|c_2|\ldots$ — из i в i без промежуточных состояний, т.к. состояний ≤ 0 $\nexists$. c_i — петли в i.
$\xi_{ij0} = c_1|c_2|\ldots$, c_i — переход $i \to j$
$\xi_{ijk+1} = \xi_{ijk}|\xi_{ik+1k}(\xi_{k+1k+1k})^*\xi_{k+1jk}$ — можем либо идти по пути с промежуточными $\leq k$, либо дойти $i \to k+1$, после чего $n \geq 0$ раз пройти $k+1 \to k+1$ с промежуточными $\leq k$, после чего дойти $k+1 \to j$ с промежуточными k (k, а не $k+1$, т.к. номера состояний уникальны, а в $k+1$ мы уже не заходим) $\square$