

$\overline{D} = D \cup$ (множество предельных точек D) — замыкание.

Примечание. $a \in \overline{D}$, тогда $\exists (x_n)$ из D , $x_n \rightarrow a$

Примечание. $\overline{D} = \bigcap_{\substack{D \subset F \\ F - \text{замкн.}}} F$ — мин. (по вкл.) замкн. множество, содержащее D .

Примечание. D — замкнуто $\Leftrightarrow D = \overline{D}$

Определение. a — **граничная точка** D , если $\forall U(a)$ $U(a)$ содержит точки как из D , так и из D^c

Определение. **Граница множества** — множество его граничных точек. Обозначается ∂D

Упражнение:

1. $\partial D = \overline{D} \setminus \text{Int} D$
2. ∂D — замкнута
3. \forall множество предельных точек — замкнуто.

Определение. T — множество, U — набор неких подмножеств T .

При этом:

1. $\emptyset \in U, T \in U$
2. $G_1, G_2 \dots G_n \in U \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n G_i \in U$
3. $(G_\alpha)_{\alpha \in A}, \forall \alpha G_\alpha \in U \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \in U$

Тогда T называется **топологическим пространством**, U — “набор” открытых множеств в T (мн-ва G^c , где $G \in U$ — замкн.)

$a \in T, U(a)$ — любое открытое множество, содержащее a и $\neq \emptyset$.

Аксиома 1. Об отделимости: $\forall x, y \in T \exists U(x), U(y) : U(x) \cap U(y) = \emptyset$

Определение. В \mathbb{R} :

1. $x_n \rightarrow +\infty \iff \forall E > 0 \exists N \forall n > N \ x_n > E$
2. $x_n \rightarrow -\infty \iff \forall E \exists N \forall n > N \ x_n < E$
3. $x_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow |x_n| \rightarrow +\infty$

Примечание. Требование > 0 не обязательно.

Примечание. 1. $x_n \rightarrow \infty \Rightarrow x_n$ не огр. (по модулю)

$x_n \rightarrow +\infty \Rightarrow x_n$ не огр. сверху

$x_n \rightarrow -\infty \Rightarrow x_n$ не огр. снизу

2. $x_n \rightarrow +\infty$. Тогда $x_n \not\rightarrow -\infty$

Откр. множества:

1. Ограниченные открытые множества — те, что открыт. в \mathbb{R}
2. $U_E(+\infty) = (E, +\infty] \subset \overline{\mathbb{R}}$
 $U_E(-\infty) = [-\infty, E) \subset \overline{\mathbb{R}}$
3. Произвольное открытое множество — либо огр. откр., либо огр. $\cup U_E(+\infty)$, огр. $\cup U_E(-\infty)$,
огр. $\cup U_E(+\infty) \cup U_E(-\infty)$

Proof. Рассмотрим $y = \tan x$

Положим $\tan(\frac{\pi}{2}) = +\infty$, $\tan(\frac{\pi}{2}) = -\infty$

\tan — монотонная биекция $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ на \mathbb{R}

Она обеспечивает биекцию между совокупностью открытых множеств $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ и ... в $\overline{\mathbb{R}}$ □

В $\overline{\mathbb{R}}$ рассмотрим функцию $\rho(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$ — метрика.

Покажем, что $x_n \rightarrow +\infty$ в смысле исх. опр. $\Leftrightarrow x_n \rightarrow +\infty$ в пространстве $(\overline{\mathbb{R}}, \rho)$

Proof. $x_n \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \forall U(+\infty) \exists N \forall n > N x_n \in U(+\infty)$

$x_n \rightarrow +\infty$ в пространстве $(\overline{\mathbb{R}}, \rho) \Leftrightarrow$ высказыванию выше. □

Примечание. $a \in \mathbb{R}$, (x_n) — вещ. посл. Тогда $x_n \rightarrow a$ в смысле обычного опр. $\Leftrightarrow x_n \rightarrow a$ в пространстве $(\overline{\mathbb{R}}, \rho)$

$$\begin{cases} x_n \rightarrow a, a \in \overline{\mathbb{R}} \\ x_n \rightarrow b, b \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases} \Rightarrow a = b$$

$$\text{в } \mathbb{R}^m \quad x_n \rightarrow \infty \quad \forall E \exists N \forall n > N \|x_n\| > E$$

$$U_E(+\infty) = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| > E\}$$

1 Ревизия

$(x_n), (y_n) \quad x_n \leq y_n \quad x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y, x, y \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда $x \leq y$.

- $y = +\infty$ или $x = -\infty$ — тривиально.
- $x = +\infty, y = a \in \mathbb{R}$ — невозможно
- остальное — как в основной теореме.

Определение. Последовательность (y_n) называется **бесконечно большой**, если $y_n \rightarrow +\infty$.

Примечание. x_n — бесконечно малая ($\forall n \ x_n \neq 0$) $\Leftrightarrow \frac{1}{x_n}$ — бесконечно большая.

Proof. $|x_n| < \varepsilon \Leftrightarrow |\frac{1}{x_n}| > \frac{1}{\varepsilon}$ □

Теорема 1. Об арифметических свойствах пределов в $\overline{\mathbb{R}}$.

$(x_n), (y_n)$ — вещ., $x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b, a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ Тогда:

1. $x_n \pm y_n \rightarrow a \pm b$
2. $x_n y_n \rightarrow ab$ Если $\forall n \ y_n \neq 0; b \neq 0$

$$3. \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{a}{b}$$

При условии, что выражения в правых частях имеют смысл.

$$\triangleleft x_n \rightarrow +\infty, y_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$$

$$\forall E \exists N \forall n > N \quad x_n + y_n > E$$

$$\text{Для } E = (a - 1) \exists N_1 \forall n > N_1 \quad x_n > E - (a - 1)$$

$$\text{Для } E = 1 \exists N_2 \forall n > N_2 \quad x_n > a - 1$$

Также для $x_n \rightarrow +\infty, y_n$ — огр. снизу $\Rightarrow x_n + y_n \rightarrow +\infty$.

$$\begin{cases} x_n \rightarrow +\infty \\ y_n > \varepsilon, (\varepsilon > 0) \text{ при } n > N_0 \end{cases} \Rightarrow x_n y_n \rightarrow +\infty$$

y_n отделено от нуля при больших n .

Примечание. Верны аналогичные теоремы, где вместо $\overline{\mathbb{R}} - \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cap \{\infty\}$

Неопределенности:

$$\begin{aligned} & \bullet \begin{cases} x_n \rightarrow +\infty \\ y_n \rightarrow -\infty \end{cases} \Rightarrow x_n + y_n \rightarrow ? \\ & \bullet \begin{cases} x_n \rightarrow n + \sin n \\ y_n \rightarrow -n \end{cases} \Rightarrow x_n + y_n = \sin n, \nexists \lim \\ & \bullet \begin{cases} x_n \rightarrow n \\ y_n \rightarrow -\sqrt{n} \end{cases} \Rightarrow x_n + y_n = n - \sqrt{n} \rightarrow +\infty \\ & \bullet \begin{cases} x_n \rightarrow 0 \\ y_n \rightarrow a \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

2 Точные границы числовых множеств

Теорема 2. Теорема Кантора о стягивающихся отрезках.

Дана последовательность отрезков $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$

Длины отрезков $\rightarrow 0$, т.е. $(b_n - a_n) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$

Тогда $\exists! c \in \mathbb{R} \quad \bigcap_{k=1}^{+\infty} [a_k, b_k] = \{c\}$ и при этом $a_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} c, b_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} c$

Примечание. Вместо “ $b_n - a_n \rightarrow 0$ ” $\forall \varepsilon > 0 \exists n : b_n - a_n < \varepsilon$

Proof. Берем из аксиомы Кантора $c \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} [a_k, b_k]$

$$\begin{cases} 0 \leq b_n - c \leq b_n - a_n \\ 0 \leq c - a_n \leq b_n - a_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_n - c \rightarrow 0 \\ c - a_n \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_n \rightarrow c \\ a_n \rightarrow c \end{cases}$$

По теореме об единственности предела c однозначно определено. \square

Определение. $E \subset \mathbb{R}$. E — **огр. сверху**, если $\exists M \in \mathbb{R} \forall x \in E \ x \leq M$. Кроме того, всякие такие M называются **верхними границами** E .

Аналогично ограничение снизу.

Определение. $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$.

Для E — **огр. сверху** **супремум** ($\sup E$) — наименьшая из верхних границ E .

Для E — **огр. снизу** **инфимум** ($\inf E$) — наибольшая из нижних границ E .

Примечание. Техническое описание супремума: $b = \sup E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E \ x \leq b \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in E \ b - \varepsilon < x \end{cases}$

Аналогично для \inf

Определение. $M = \max E : M \in E \ \forall x \in E \ x \leq M$

Теорема 3. О существовании супремума.

$E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$, E — **огр. сверху**.

Тогда $\exists \sup E \in \mathbb{R}$

Proof. Строим систему вложенных отрезков $[a_k, b_k]$ со свойствами:

1. b_k — верхняя граница E
2. $[a_k, b_k]$ содержит точки E .

a_1 — берём любую точку E , b_1 — любая верхняя граница.

Границы следующего отрезка найдём бинарным поиском (математики это называют **половинное деление**).

Если $\frac{a_1+b_1}{2}$ — верхняя граница E , $[a_2, b_2] := [a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$.

Иначе на $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ есть элементы E , $[a_2, b_2] := [\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$

Длина $[a_k, b_k] = b_k - a_k = \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}} \rightarrow 0$

$\exists! c \in \bigcap [a_k, b_k]$

Проверим: $c = \sup E$

1. $\forall x \in E \ \forall n \ x \leq b_n$
2. $\forall \varepsilon > 0 \ c - \varepsilon$ — не верхн. гран.

Доказательство 1: $x \in E, b_n \rightarrow c \Rightarrow x \leq b_n$

Доказательство 2: $\forall \varepsilon > 0$ возьмём $n : \frac{b_1 - a_1}{2^n} < \varepsilon$. $c - \varepsilon < a_n \Leftrightarrow c - a_n < \varepsilon \Leftrightarrow c - a_n < b_n - a_n < \varepsilon$ □