

Proof. Продолжим доказательство из прошлой лекции, докажем, $3 \Rightarrow 1$.

Рассмотрим секвенциально компактное K и пусть K — не ограничено. (случай ограниченного множества тривиален)

$$\exists x_n : \|x_n\| \rightarrow +\infty$$

Тогда в этой последовательности нет сходящейся последовательности, т.к. любая $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$ ограничена. Противоречие $\Rightarrow K$ — не компактно.

Таким образом, если K — секвенциально компактно, то K ограничено.

Докажем замкнутость K .

Пусть \exists предельная точка $x_0 \notin K$

$$\exists x_n \rightarrow x_0$$

По секвенциальности \exists подпоследовательность $x_{n_k} \rightarrow a \in K$. □

Следствие. Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса. Если в \mathbb{R}^m (x_n) — ограниченная последовательность, то у неё существует сходящаяся подпоследовательность.

Proof. x_n — огр. $\Rightarrow x_n$ содержится в замкнутом кубе. Так как куб секвенциально компактен, x_{n_k} сходится. □

Примечание. (x_n) — не огр. $\Rightarrow x_n \rightarrow \infty$, т.е. $\|x_n\| \rightarrow +\infty$

Определение. X — метрическое пространство, (x_n) в X

x_n — фундаментальная, последовательность Коши, сходящаяся в себе, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Лемма 1. 1. x_n — фунд. $\Rightarrow x_n$ — ограничена

2. x_n — фунд; $\exists x_{n_k}$ — сходящ. Тогда x_n сходится.

Proof. 1. $\varepsilon := 1 \exists N \forall m, n := N + 1 > N \rho(x_m, x_{N+1}) < 1$

$$R := \max(1; \rho(x_1, x_{N+1}), \dots, \rho(x_N, x_{N+1}))$$

$$\forall n \ x_n \in B(x_{N+1}, R) \Rightarrow x_n \text{ сходится.}$$

$$2. \begin{cases} \varepsilon > 0 \exists K \forall k > K \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon \\ \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \rho(x_m, x_n) < \varepsilon \end{cases} \stackrel{?}{\Rightarrow} x_n \rightarrow a$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{N} := \max(N, K) \text{ при } k > \tilde{N} \text{ выполняется } k > K, \text{ значит } n_k \geq k > K \Rightarrow \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon.$$

$$\text{При } n > \tilde{N} \geq N \ m := n_k > \tilde{N} \geq N \Rightarrow \rho(x_n, x_{n_k}) < \varepsilon$$

$$\text{Итого } \forall n > \tilde{N} \ \rho(x_n, a) \leq \rho(x_n, x_{n_k}) < 2\varepsilon$$

□

Теорема 1. 1. В любом метрическом пространстве x_n — сходящ. $\Rightarrow x_n$ — фунд.

2. В \mathbb{R}^m x_n — фунд. $\Rightarrow x_n$ — сходящ.

Proof. 1. $x_n \rightarrow a \ \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \rho(x_n, a) < \varepsilon$

$$x_n \rightarrow a \ \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N \rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_n, a) + \rho(x_m, a) < 2\varepsilon$$

2. $x_n - \text{фунд.} \Rightarrow x_n - \text{огр.} \xrightarrow{\text{Б.-В.}} \exists x_{n_k} - \text{сходящ.}$

$$\begin{cases} \exists x_{n_k} - \text{сходящ.} \\ x_n - \text{фунд.} \end{cases} \Rightarrow x_n - \text{сходящ.}$$

□

Определение. X — метрическое пространство называется **полным**, если в нём любая фундаментальная последовательность — сходящаяся.

Верно: x_n — вещ. посл.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N |x_n - x_m| < \varepsilon \Leftrightarrow \exists \text{ конечн. } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$$

Это критерий Больцано-Коши.

$f: D \subset X \rightarrow Y, x_0$ — предельная точка D .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

$D_1 \subset D, x_0$ — предельная точка D_1 .

Предел при $x \rightarrow x_0$ по множеству D_1 — это $\lim_{x \rightarrow x_0} f|_{D_1}$

Определение. В \mathbb{R} одностор. = { левостор., правостор. }

Левосторонний предел $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = L$ — это $\lim f|_{D \cap (-\infty, x_0)}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap D |f(x) - L| < \varepsilon$$

Аналогично правосторонний.

$$\text{Если } \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f = L$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f \stackrel{\text{обозн.}}{=} f(x_0 - 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0 - 0} f = \lim_{x \rightarrow -0} f$$

$$\text{В } \mathbb{R}^2 \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (a_1, a_2)} f$$

Предел вдоль прямой: $\lim_{r \rightarrow 0} f(a_1 + r \cos \alpha, a_2 + r \sin \alpha)$

Теорема 2. О пределе монотонной функции

$f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, монотонная, $a \in \overline{\mathbb{R}}$

$D_1 := D \cap (-\infty, a)$, a — пред. точка D_1 . Тогда:

1. f — возрастает, огр. сверху D_1 . Тогда \exists конечный предел $\lim_{x \rightarrow a - 0} f(x)$

2. f — убывает, огр. снизу D_1 . Тогда \exists конечный предел $\lim_{x \rightarrow a - 0} f(x)$

Proof. 1. $L := \sup_{D_1} f \quad L \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow a - 0} f(x)$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad L - \varepsilon - \text{ не верхн. граница для } \{f(x) : x \in D_1\} \quad \exists x_1 : L - \varepsilon < f(x_1).$$

$$\text{Тогда при } x \in (x_1, a) \cap D_1 \quad L - \varepsilon < f(x_1) \leq f(x) \leq L$$

$$\exists \delta := |x_1 - a| \quad \forall x : x \in (x_1, a) \quad L - \varepsilon \leq f(x) < L + \varepsilon$$

Аналогично доказывается пункт 2.

□

Критерий Больцано-Коши для отображений.

Теорема 3. $f : D \subset X \rightarrow Y$, a — пр. точка D , Y — полное метрическое пространство.
Тогда

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \in Y \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in D \quad \rho(x_1, a) < \delta; \rho(x_2, a) < \delta \quad \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

Proof. “ \Rightarrow ” как для последовательностей.

Докажем “ \Leftarrow ” по Гейне.

Заметим, что последовательность $f(x_n)$ — фундаментальная, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \quad \rho(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$$

$$x_n \rightarrow a \Rightarrow \exists N \forall n > N \quad \rho(x_n, a) < \delta$$

$$\forall m, n > N \quad \rho(x_n, a) < \delta; \rho(x_m, a) < \delta \xrightarrow{\text{Фунд.}} \rho(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$$

□

Примечание. В \mathbb{R} критерий Больцано-Коши для функций

$f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a — пред. точка D

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in D \setminus \{a\} \quad |x_1 - a| < \delta; |x_2 - a| < \delta$$

Для $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ критерий Больцано-Коши:

$$\forall E \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in D \setminus \{a\} \quad |x_1 - a| < \delta; |x_2 - a| < \delta \quad f(x_1) > E; f(x_2) > E$$

неинтересно.

Для $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta \forall x_1, x_2 \in D \quad x_1 > \Delta; x_2 > \Delta \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

1 Непрерывные отображения

Определение. $f : D \subset X \rightarrow Y$ $x_0 \in D$

f — непрерывное в точке x_0 , если:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, либо x_0 — изолированная точка D
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \quad \rho(x, x_0) < \delta \quad \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$
3. $\forall U(f(x_0)) \exists V(x_0) \forall x \in V(x_0) \cap D \quad f(x) \in U(f(x_0))$
4. По Гейне $\forall (x_n) : x_n \rightarrow x_0; x_n \in D \quad f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x_0)$

Определение. Если $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, либо $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ — точка разрыва.

$$\text{Для } \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \quad |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Определение. Непр. слева и непр. справа f — непр. слева в x_0 , если $f|_{(-\infty, x_0] \cap D}$ — непрерывно в x_0

Если f непрерывно слева и непрерывно справа в x_0 , то f непрерывно в x_0 .

Определение. Пусть $\exists f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$ и не все 3 числа равны: $f(x_0 - 0), f(x_0), f(x_0 + 0)$. Это **разрыв I рода (скачок)**.

Остальные точки разрыва — **разрыв II рода**.

Примечание.

$$f(x_0 - 0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$$

Пример. 1. $f(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$ 0 — разрыв I рода.

2. $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ 0 — разрыв II рода.

Определение. Отображение **непрерывно** на множестве D = непрерывно в каждой точке множества D .

Теорема 4. Арифметические свойства непрерывных отображений

1. $f, g : D \subset X \rightarrow Y$ $x_0 \in D$ (X — норм. пространство)

f, g — непр. в D ; $\lambda : D \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ — непр. x_0

Тогда $f \pm g, ||f||, \lambda f$ — непр. x_0

2. $f, g : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ $x_0 \in D$

f, g — непр. в x_0

Тогда $f \pm g, |f|, fg$ — непр. в x_0

$g(x_0) \neq 0$, тогда $\frac{f}{g}$ — непр. x_0