Вывод формулы Вейерштрасса *(из формулы Эйлера)*:

Доказательство.

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim n^{-x}\frac{x(x+1)\dots(x+n)}{n!} = x\lim n^{-x}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right) =$$

$$= x\lim \underbrace{e^{x\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)-x\ln n}}_{e^{\gamma+o(1)}}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}} = e^{\gamma x}\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}$$

$\square$

Примечание.

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \Gamma(x)(-x)\Gamma(-x) = \frac{(-x)}{xe^{\gamma x}\prod\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}(-x)e^{-\gamma x}\prod\left(1-\frac{x}{k}\right)e^{\frac{x}{k}}} =$$

$$= \frac{1}{x\prod\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)} = \frac{\pi}{\sin\pi x}$$

Пример. $a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$, P и Q — многочлены.
$\prod a_n = ?$
Пусть P и Q разложены на множители, т.е:

$$P(n) = \alpha(n+a_1)(n+a_2)\dots(n+a_k)$$

$$Q(n) = \beta(n+b_1)(n+b_2)\dots(n+b_l)$$

$$a_n = \frac{\alpha}{\beta}\frac{(n+a_1)\dots(n+a_k)}{(n+b_1)\dots(n+b_l)}$$

Если $k \neq l$, то $a_n \to 0$ или $a_n \to +\infty \Rightarrow \prod a_n$ расходится. $\triangleleft k = l$

$$a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\alpha}{\beta}$$

Если $\frac{\alpha}{\beta}$, то $a_n \not\to 1 \Rightarrow \prod a_n$ расходится. $\triangleleft \frac{\alpha}{\beta} = 1$

$$a_n = \frac{\left(1+\frac{a_1}{n}\right)\dots\left(1+\frac{a_k}{n}\right)}{\left(1+\frac{b_1}{n}\right)\dots\left(1+\frac{b_l}{n}\right)} = 1 + \frac{1}{n}(a_1+\ldots+a_k-b_1-\ldots-b_k) + O(\frac{1}{n^2})$$

Если $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i \neq \sum\limits_{i=1}^{l} b_i$, то $\prod a_n$ расходится. $\triangleleft \sum\limits_{i=1}^{k} a_i = \sum\limits_{i=1}^{l} b_i$

$$\prod_{n=1}^{N}\frac{\left(1+\frac{a_1}{n}\right)\dots\left(1+\frac{a_k}{n}\right)}{\left(1+\frac{b_1}{n}\right)\dots\left(1+\frac{b_l}{n}\right)} = \prod_{n=1}^{N}\frac{\left(1+\frac{a_1}{n}\right)e^{-\frac{a_1}{n}}\dots\left(1+\frac{a_k}{n}\right)e^{-\frac{a_k}{n}}}{\left(1+\frac{b_1}{n}\right)e^{-\frac{b_1}{n}}\dots\left(1+\frac{b_l}{n}\right)e^{-\frac{b_l}{n}}}$$

Равенство состоялось, т.к. $\sum a_i = \sum b_i$.
По формуле Вейерштрасса:

$$\prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{a}{n}\right)e^{-\frac{a}{n}} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{ae^{\gamma a}\Gamma(a)}$$

$$\prod_{n=1}^{N}\frac{\left(1+\frac{a_1}{n}\right)e^{-\frac{a_1}{n}}\dots\left(1+\frac{a_k}{n}\right)e^{-\frac{a_k}{n}}}{\left(1+\frac{b_1}{n}\right)e^{-\frac{b_1}{n}}\dots\left(1+\frac{b_l}{n}\right)e^{-\frac{b_l}{n}}} \to \frac{b_1e^{\gamma b_1}\Gamma(b_1)\dots b_le^{\gamma b_l}\Gamma(b_l)}{a_1e^{\gamma a_1}\Gamma(a_1)\dots a_ke^{\gamma a_k}\Gamma(a_k)} =$$

$$= \frac{e^{\gamma b_1}\Gamma(b_1+1)\dots e^{\gamma b_l}\Gamma(b_l+1)}{e^{\gamma a_1}\Gamma(a_1+1)\dots e^{\gamma a_k}\Gamma(a_k+1)} = \frac{\Gamma(b_1+1)\dots\Gamma(b_l+1)}{\Gamma(a_1+1)\dots\Gamma(a_k+1)}$$

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1} = \prod_{n=1}^{+\infty}\frac{(n-0)(n-0)}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(1)\Gamma(1)} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Градиент

Определение. $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, дифф. a, т.е. $\exists L \in \mathbb{R}^m$

$$f(a+h) = f(a) + \langle L, h \rangle + o(h)$$

L — **градиент** функции f в точке a, обозначается $\text{grad} f(a), \text{grad}_a f, \text{grad}(f, a)$.
Физики *(и млщики)* обозначают ∇f

Производная по направлению

"направление" = "единичный вектор"

Определение. Производная по вектору $h \in \mathbb{R}^m, h \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}$$

1. f — дифф. $\Rightarrow$ f дифф. по любому вектору
2. Частная производная $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ — производная по направлению $e_k = (0 \dots 0, \underbrace{1}_{k}, 0 \dots 0)$
3. $$\frac{\partial f}{\partial h} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1 + th_1, \dots x_m + th_m) - f(x_1 \dots x_m)}{t} =$$
$$= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) t h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(x) t h_m + o(t)}{t} =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} h_m = \langle \nabla f, h \rangle$$

Теорема 1. Экстремальное свойство градиента.
$f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, f дифф. $a \in IntE$, $\nabla f(a) \neq 0$.
Тогда $l = \frac{\nabla f(a)}{|\nabla f(a)|}$ — направление наискорейшего возрастания функции, т.е.

$$\forall h \in \mathbb{R}^m : |h| = 1 \quad -|\nabla f(a)| \leq \frac{\partial f}{\partial h}(a) \leq |\nabla f(a)|$$

, причем "$=$" достигаеся только при $h = \pm l$, где при "$+$" достигается "$=$"

Доказательство.

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = \langle \nabla f, h \rangle$$
$$-|\nabla f(a)||h| \leq \langle \nabla f, h \rangle \leq |\nabla f(a)||h|$$

$|h| = 1$ по построению:

$$-|\nabla f(a)| \leq \langle \nabla f, h \rangle \leq |\nabla f(a)|$$

$\square$

Пример. Градиентный спуск.
$\lhd z = 1 - x^2 - y^2$ — параболоид
$\nabla z = (-2x, -2y)$
$\nabla(z, (0,1)) = (0, -2) \Rightarrow$ с параболоида из точки $(0, 1)$ быстрее всего съезжать по направлению $\vec{v} = (0, 1)$
Это простейший метод нахождения локального минимума.

Частные производные высших порядков

$f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, a \in IntE$
$k \in \{1 \dots m\}$. Если $\exists g(x) = \frac{\partial f}{\partial x_k}$ в окрестности точки a:
$i \in \{1 \dots m\}$, $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ называется второй частной производной (производной второго порядка) по переменным i и k, обозначается $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$
В общем случае:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} \overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} \right)$$

Теорема 2. О независмости частных производных от порядка дифференциирования.
$f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_0, y_0) \in E$
$\exists r > 0 \;\; B((x_0, y_0), r) \subset E$
Пусть в этом шаре $\exists f''_{xy}, f''_{yx}$ и они непрерывны. Тогда $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$

Доказательство. $\Delta^2(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$
$\alpha(h) := \Delta^2(h, k)$ при фиксированном k
$\alpha(h) = \alpha(h) - \alpha(0) \overset{\text{т. Лагранжа}}{=} \alpha'(\overline{h})h = (f'_x(x_0 + \overline{h}, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \overline{h}, y))h \overset{\text{т. Лагранжа}}{=} f''_{xy}(x_0 + \overline{h}, y_0 + \overline{k})hk$
$\beta(k) := \Delta^2(h, k)$ при фиксированном h
$\beta(k) = f''_{yx}(x_0 + \overline{\overline{h}}, y_0 + \overline{\overline{k}})hk$

$$f''_{xy}(x_0 + \overline{h}, y_0 + \overline{k})hk = f''_{yx}(x_0 + \overline{\overline{h}}, y_0 + \overline{\overline{k}})hk$$

$$(h, k) \to (0, 0) \Rightarrow (\overline{h}, \overline{k}) \to (0, 0), (\overline{\overline{h}}, \overline{\overline{k}}) \to (0, 0)$$

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

$\square$

Примечание. $E \subset \mathbb{R}^m$, откр. Класс $C^r(E), r \in \mathbb{N}$:
$f \in C^r(E)$, если у f существуют все частные производные порядка $\leq r$ на всём E и они непрерывны.
$C(E)$ — непр. функции $= C^0(E)$
$C(E) \overset{\neq}{\supset} C^1(E) \overset{\neq}{\supset} C^2(E) \dots$
Общий вид теоремы: $f \in C^r(E) \;\; \forall k \leq r$
$\forall x \in E \;\; \forall i_1 \dots i_k$: Если $(j_1 \dots j_k)$ — перестановка $(i_1 \dots i_k)$, то:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}(x)$$

Определение. **Мультииндекс** (для $\mathbb{R}^m$) — вектор $(k_1, k_2 \dots k_m)$, $k_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

- $|k| := \sum_{i=1}^m k_i$ — **высота** мультииндекса
- $k! = k_1! k_2! \dots k_m!$
- $x \in \mathbb{R}^m \;\; x^k = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$
- $f^{(k)} = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x^k} f = \frac{\partial^{|k|} f}{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}}$

Лемма 1. *Полиномиальная формула.*
$a_i \in \mathbb{R}$ (верно для любого кольца). Тогда $\forall r \in \mathbb{N}$:

$$(a_1 + \dots + a_m)^r \overset{\text{очев}}{=} \sum_{n_1=1}^{m} \dots \sum_{n_r=1}^{m} a_{n_1} a_{n_2} \dots a_{n_r} = \sum_{j:|j|=r} \frac{r!}{j!} a^j$$

Доказательство. По индукции.
База: $\triangleleft r = 1$

$$a_1 + \ldots + a_m = \frac{1!}{1!0!\ldots 0!}a_1 + \frac{1!}{0!1!\ldots 0!}a_2 + \ldots + a_m$$
$$a_1 + \ldots + a_m = a_1 + \ldots + a_m$$

Переход:

$$(a_1 + \ldots + a_m)^{r+1} = (a_1 + \ldots + a_m) \sum_{\substack{j_1 \ldots j_m \geq 0 \\ j_1 + \ldots + j_m = r}} \frac{r!}{j_1! \ldots j_m!} a_1^{j_1} \ldots a_m^{j_m} =$$

$$= \sum \frac{r!}{j_1! \ldots j_m!} a_1^{j_1+1} \ldots a_m^{j_m} + \ldots + \sum \frac{r!}{j_1! \ldots j_m!} a_1^{j_1} \ldots a_m^{j_m+1} =$$

$$= \sum_{\substack{k_1 \geq 1 \\ k_2 \ldots k_m \geq 0 \\ k_1 + \ldots k_m = r+1}} \frac{r! k_1}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} \ldots a_m^{k_m} + \ldots + \sum_{\substack{k_2 \geq 1 \\ k_1, k_3, k_4 \ldots k_m \geq 0 \\ k_1 + \ldots k_m = r+1}} \frac{r! k_2}{j_1! \ldots j_m!} a_1^{j_1} \ldots a_m^{j_m+1} =$$

$$= \sum_{\substack{k_1 \geq 0 \\ k_2 \ldots k_m \geq 0 \\ k_1 + \ldots k_m = r+1}} \frac{r! k_1}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} \ldots a_m^{k_m} + \ldots + \sum_{\substack{k_2 \geq 0 \\ k_1, k_3, k_4 \ldots k_m \geq 0 \\ k_1 + \ldots k_m = r+1}} \frac{r! k_2}{j_1! \ldots j_m!} a_1^{j_1} \ldots a_m^{j_m+1} =$$

$$= \sum_{\substack{k_1 \ldots k_m \geq 0 \\ k_1 + \ldots k_m = r+1}} \frac{r!(k_1 + \ldots + k_m)}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} \ldots a_m^{k_m} =$$

$$= \sum_{\substack{k_1 \ldots k_m \geq 0 \\ k_1 + \ldots k_m = r+1}} \frac{(r+1)!}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} \ldots a_m^{k_m}$$

$\square$