Пример. $f(x) = \begin{cases} e^{-\dfrac{1}{x^2}} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x \neq 0 \end{cases}$

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\dfrac{1}{x^2}}, x \neq 0$$

$f'(0) = ?$
Следствие из теоремы Лагранжа:

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = A \text{ тогда } f'(x_0) = A$$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{2}{x^3} e^{-\dfrac{1}{x^2}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lim 2 \frac{\dfrac{2}{x^3} e^{-\dfrac{1}{x^2}}}{3x^2} = \lim \frac{4}{3} \frac{e^{-\dfrac{1}{x^2}}}{x^5} = \text{ больно, не надо так}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2}{x^3} e^{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim \frac{\dfrac{2}{x^3}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \begin{bmatrix} \infty \\ \infty \end{bmatrix} = \lim \frac{\dfrac{-6}{x^4}}{\dfrac{-2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim \frac{\dfrac{3}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \begin{bmatrix} \infty \\ \infty \end{bmatrix} = \lim \frac{\dfrac{-3}{x^2}}{\dfrac{-2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim \frac{3}{2} \frac{x}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \frac{0}{\infty} = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} e^{-\dfrac{1}{x^2}} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n \left(\dfrac{1}{x} \right) \cdot e^{-\dfrac{1}{x^2}} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$$

Заметим, что многочлен Тейлора этой функции при $x \to 0$ не становится точнее при увеличении числа слагаемых, т.к. они все $= 0$.

Будем складывать дроби неправильно:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

Это работает в неравенствах, если $a, b, c, d > 0$

Теорема 1. *Штольца.*
Это дискретная версия правила Лопиталя.
$y_n \to 0, x_n \to 0$ *— строго монот.*

$$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a \in \mathbb{R}$$

Тогда $\exists \lim \dfrac{x_n}{y_n} = a$

Примечание. Аналогичное верно, если $x_n \to +\infty, y_n \to +\infty$

Доказательство. 1. $a > 0 \quad (a \neq +\infty)$

$$\forall \varepsilon > 0\ \ [\varepsilon < a]\ \ \exists N_1\ \ \forall n > N_1\ \ a_\varepsilon < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < a + \varepsilon$$

Берем $N > N_1$

$$a - \varepsilon < \frac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N} < a + \varepsilon$$

$$\vdots$$

$$a - \varepsilon < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < a + \varepsilon$$

По неправильному сложению:*(оно применимо, т.к. все дроби положительные)*

$$a - \varepsilon < \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} < a + \varepsilon$$

$n \to +\infty$

$$a - \varepsilon < \frac{x_N}{y_N} < a + \varepsilon$$

2. $a = +\infty$ доказывается так же

3. $a < 0$ поменяем знак и докажем так же

4. $a = 0$ т.к. знаки $x_n - x_{n-1}$ и $y_n - y_{n-1}$ фикс., $a = +0$ или $a = -0$

   Для $a = +0 \lim \dfrac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = +\infty$

□

$x_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n \underset{n\to+\infty}{\overset{?}{\sim}} y_n$

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{y_n - y_{n-1}} = \left[y_n := \frac{n^2}{2}\right] = \lim \frac{n}{n - \dfrac{1}{2}} = 1$$

$$x_n \sim \frac{n^2}{2}$$

$$x_n = 1^\alpha + 2\alpha + 3\alpha + \ldots + n\alpha - \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \sim z_n$$

$$\lim \frac{x_n}{z_n} = \lim \frac{n^\alpha - \left(\dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \dfrac{(n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)}{z_n - z_{n-1}}$$

$$n^\alpha - \frac{1}{\alpha+1} n^{\alpha+1} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\alpha+1}\right) =$$

$$= n^\alpha - \frac{1}{\alpha+1} n^{\alpha+1} \left((\alpha+1)\frac{1}{n} - \frac{(\alpha+1)\alpha}{2}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{\alpha}{2} n^{\alpha-1} + o(n^{\alpha-1}) =$$

$$= \frac{\alpha}{2} n^{\alpha-1} + o(n^{\alpha-1})$$

$$\lim \frac{x_n}{z_n} = \lim \frac{\frac{\alpha}{2} n^{\alpha-1}}{z_n - z_{n-1}}$$

Функциональные свойства определенного интеграла:

1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad f, g \in C[a,b]$
$$\int\limits_a^b \alpha f + \beta g dx = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$$
Доказательство. По формуле Ньютона-Лейбница $f \leftrightarrow F \quad g \leftrightarrow G \quad \alpha f + \beta g \leftrightarrow \alpha F + \beta G$ □

2. Замена переменных: $f \in C[a,b]$ $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \to [a,b], \varphi \in C^1$
$[p,q] \subset \langle \alpha, \beta \rangle$
Тогда
$$\int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int\limits_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)dx$$
Доказательство. $f \leftrightarrow F \quad f(\varphi(t))\varphi'(t) \leftrightarrow F(\varphi(t))$ □
Примечание. (a) $\varphi([p,q])$ может быть шире, чем “$[\varphi(p), \varphi(q)]$”
(b) $\varphi(p)$ может быть $> \varphi(q)$

3. Интегрирование по частям
$f|_a^b \overset{\text{def}}{=} f(b) - f(a)$
$f, g \in C^1[a,b]$
$$\int\limits_a^b fg' = fg|_a^b - \int\limits_a^b f'g$$
Доказательство.
$$(fg)' = f'g + fg'$$
$$fg' = (fg)' - f'g$$
Проинтегрируем по $[a,b]$
$$\int\limits_a^b fg' = fg|_a^b - \int\limits_a^b f'g$$
□

Пример. Неравенство Чебышева
$f, g \in C[a,b]$ монот. возр.
Тогда
$$I_f \cdot I_g \leq I_{fg}$$
$$\int\limits_a^b f \int\limits_a^b g \leq (b-a) \int\limits_a^b fg$$

Доказательство. $x, y \in [a, b] \quad (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$

$$f(x)g(x) - f(y)g(x) - f(x)g(y) + f(y)g(y) \geq 0$$

Интегрируем по x по $[a, b]$

$$I_{fg} - f(y)I_g - g(y)I_f + f(y)g(y) \geq 0$$

Интегрируем по y по $[a, b]$

$$I_{fg} - I_f I_g - I_g I_f + I_{fg} \geq 0$$

□

Пример.

$$H_n := \frac{1}{n!} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \cos t dt := \frac{1}{n!} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f g' dt$$

$$H_n = \left[f' = -2n \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} t \quad g = \sin t \right] =$$

$$= \frac{1}{n!} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \sin t |_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{(n-1)!} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} t \sin t$$

$$= 0 + \frac{2}{(n-1)!} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} + \sin t |_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$+ \frac{2}{(n-1)!} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left((2n-1) \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} - \frac{\pi^2}{2}(n-1) \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-2} \right) \cos t dt =$$

$$= (4n-2)H_{n-1} - \pi^2 H_{n-2}$$

Теорема 2. *Число π — иррационально*

Доказательство. Пусть $\pi = \frac{p}{q}$; H_n задано выше

$$H_n = (4n-2)H_{n-1} - \pi^2 H_{n-2}$$

$$H_0 = 2, \quad H_1 = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\tfrac{\pi^2}{4} - t^2) \cos t = 2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi^2} t \sin t dt = 2t(-\cos t)|_{\dots}^{\dots} + 2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t = 4$$

$$H_n = \dots H_1 + \dots H_0 = P_n(\pi^2) - \text{многочлен с целыми коэффициентами, степень} \leq n$$

$$q^{2n} P_n \left(\frac{p^2}{q^2} \right) = \text{ целое число } = q^{2n} H_n = q^{2n} H_n > 0 \Rightarrow q^{2n} H_n \geq 1$$

$$1 \leq \frac{q^{2n}}{n!} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \cos t dt \leq \frac{q^2 n 4^n}{n!} \pi \to 0$$

Противоречие. □

$f \leftrightarrow F$

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(t-x_0)^n dt = \frac{F^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4)$$

$$\arcsin t = t + \frac{1}{6}t^3 + \frac{3}{40}t^5 + o(t^5)$$

Определение. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, **кусочно непрерывна**
f — непр. на $[a, b]$ за исключением конечного числа точек, в которых разрывы I рода

Пример. $f(x) = [x], x \in [0, 2020]$

Определение. $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ — **почти первообразная** кусочно непрерывной функции f:
F — непр. и $\exists F'(x) = f(x)$ всюду, кроме конечного числа точек

Пример. $f = \operatorname{sign} x, x \in [-1, 1]$
$F := |x|$

f — кус. непр.
$x_0 = a < x_1 \dots < x_n = b$

$$\int\limits_a^b f := \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f$$

Утверждение: Верна формула Ньютона-Лейбница
f — кус. непр. на $[a, b]$, F — почти первообразная

$$\int\limits_a^b f = F(b) - F(a) = \sum \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f = \sum F(t)|_{x_{k-1}}^{x_k} = \sum F(x_k) - F(x_{k-1}) = F(b) - F(a)$$

Пример. Дискретное неравенство Чебышева
$a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n, b_1 \le b_2 \le \dots \le b_n$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \frac{1}{n}\sum b_i \le \frac{1}{n}\sum a_i b_i$$

Доказательство.

$$f(x) = a_i, x \in (i-1, i], i = 1 \dots n \text{ — задана на } (0, n]$$

$$g(x) = \dots b_i$$

$$I_f I_g \le I_{fg}$$

$\square$

1 Приложение определенного интеграла

$$Segm\langle a,b\rangle - \text{множество всевозм. отрезков, лежащих в } \langle a,b\rangle = \{[p,q] : [p,q] \subset \langle a,b\rangle\}$$

Определение. **Функция промежутка** $\Phi : Segm\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$

Определение. **Аддитивная функция промежутка**: Φ — функция промежутка и

$$\forall [p,q] \in Segm\langle a,b\rangle \ \ \forall r : p < r < q \quad \Phi([p,q]) = \Phi([p,r]) + \Phi([r,q])$$

Пример.

- Цена куска колбасы от p до q.
- Цена билета от станции p до станции q.

Эти две функции обычно не аддитивны.

- $[p,q] \to \int_p^q f$

Определение. **Плотность аддитивной функции промежутка**: $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ — плотность Φ, если:

$$\forall \delta \in Segm\langle a,b\rangle \quad \inf_{x\in\delta} f(x) \cdot len_\delta \leq \Phi(\delta) \geq \sup f \cdot len_\delta$$

Теорема 3. *О вычислении аддитивной функции промежутка по плотности*
$f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ *— непр.* $\quad \Phi : Segm\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$
f *— плотность* Φ
Тогда $\Phi([p,q]) = \int\limits_b^a f, \quad [p,q] \subset \langle a,b\rangle$

Доказательство.

$$F(x) := \begin{cases} 0 & , x = a \\ \Phi([a,x]) & , x > a \end{cases} - \text{первообразная } f$$

Это утверждение ещё не доказано, но если мы его докажем, то:

$$\Phi([p,q]) = \Phi[a,q] - \Phi[a,p] = F(q) - F(p) = \int\limits_p^a f$$

Докажем утверждение:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\Phi[a,x+h] - \Phi[a,x]}{h} = \frac{\Phi[x,x+h]}{h} = [0 \leq \Theta \leq 1] = f(x + \Theta h)$$

□

Тут последовал пример про нахождение площади круга, но мне лень.