

1 Пределы

Теорема 1. *Определение Коши \Leftrightarrow определение Гейне.*

Доказательство. Докажем " \Rightarrow ".

Если дана (x_n) , удовл. определению Коши, доказать

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad 0 < \rho(f(x_n), A) < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \quad 0 < \rho(x, a) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), A) < \varepsilon$$

$$\text{Для этого } \delta \exists N \forall n > N \rho(x_n, a) < \delta$$

, где $x_n \in D, x_n \neq a$
 $\Rightarrow \rho(f(x_n), A) < \varepsilon$

□

Доказательство. Докажем " \Leftarrow ".

Пусть определение Коши не выполняется.

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in D \quad 0 < \rho(x, a) < \delta \quad \rho(f(x), A) \geq \varepsilon$$

$$\delta := \frac{1}{n} \quad \exists x_n \in D \quad 0 < \rho(x_n, a) < \frac{1}{n} \quad \rho(f(x_n), A) \geq \varepsilon$$

Построена последовательность $(x_n) : x_n \in D, x_n \neq a, \rho(x_n, a) < \frac{1}{n} \Rightarrow \rho(x_n, a) \rightarrow 0 \Rightarrow x_n \rightarrow a$.
 Кроме того, $\rho(f(x_n), A) \geq \varepsilon$ — противоречит утверждению Гейне, что $f(x_n) \rightarrow A$. □

Теорема 2. *О единственности предела. $f : D \subset X \rightarrow Y, a$ — пред. точка D*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A; \lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$$

Тогда $A = B$

Доказательство. По Гейне. $\forall (x_n) :$

- $x_n \rightarrow a$
- $x_n \in D$
- $x_n \neq a$

$$f(x_n) \rightarrow A, f(x_n) \rightarrow B \xRightarrow{\text{теор. о ед. предела посл.}} A = B$$

□

Теорема 3. *О локальной ограниченности отображения, имеющего предел.*

$$f : D \subset X \rightarrow Y, a \text{ — пред. точка } D, \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

Тогда $\exists V(a) : f$ — огр. на $V(a) \cap D$, т.е. $f(V(a) \cap D)$ содержится в некотором шаре.

Доказательство. Для $\varepsilon = 1 \exists V(a) \forall x \in \dot{V}(a) \cap D \quad f(x) \in U_\varepsilon(A)$

Если $\nexists f(a)$, ограниченность доказана. Иначе:

$$\forall x \in V(a) \cap D \quad f(x) \in U_{\tilde{\varepsilon}}(A), \text{ где } \tilde{\varepsilon} = \max(\varepsilon, \rho(A, f(a)) + 1)$$

□

Теорема 4. *О стабилизации знака.*

$$f : D \subset X \rightarrow Y, a \text{ — пред. точка } D, \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

Пусть $B \in Y, B \neq A$

$$\text{Тогда } \exists V(a) \forall x \in \dot{V}(a) \cap D \quad f(x) \neq B$$

Доказательство. Для

$$0 < \varepsilon < \rho(A, B) \quad \exists V(a) \quad \forall x \in \dot{V}(a) \cap D \quad f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

$U_\varepsilon(A)$ не содержит B . □

Следствие. $f : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$, a – пред. точка, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A > 0$ $B = 0$

$$\exists \dot{V}(a) \cap D : f(x) \neq 0$$

В доказательстве $0 < \varepsilon < A$ $f(x) \in U_\varepsilon(A) = (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$

Теорема 5. Об арифметических свойствах предела

$f, g : D \subset X \rightarrow Y$, X – метрич. пространство, Y – норм. пространство над \mathbb{R} , a – пред. точка D

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$$

$$\lambda : D \rightarrow \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow a} \lambda(x) = \lambda_0$$

Тогда:

$$1. \quad \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm g(x) \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm g(x) = A \pm B$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow a} \lambda(x) f(x) = \lambda_0 A$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow a} \|f(x)\| = \|A\|$$

4. Для случая $Y = \mathbb{R}$ и для $B \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$

$\frac{f}{g}$ задано на множестве $D' = D \setminus \{x : g(x) = 0\}$

a – пр. точка D' по теореме о стабилизации знака $\exists V(a) \quad \forall x \in V(a) \cap D \quad g(x) \neq 0$ – того же знака, что и B , т.е. $g(x) \neq 0$

$$\dot{V}(a) \cap D' = \dot{V}(a) \cap D \Rightarrow a \text{ – пред. точка для } D'$$

Доказательство. По Гейне. $\forall (x_n) :$

- $x_n \rightarrow a$
- $x_n \in D$
- $x_n \neq a$

$f(x_n) + g(x_n) \rightarrow^? A + B$ верно по теореме последовательности.

Аналогично прочие пункты, кроме 4.

$$f(x_n) \rightarrow A$$

$$g(x_n) \rightarrow B \neq 0 \Rightarrow \exists n_0 \quad \forall n > n_0 \quad g(x_n) \neq 0$$

$\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ корректно задано при $n > n_0$. □

Примечание. Для $\overline{\mathbb{R}}$

Если $Y = \overline{\mathbb{R}}$, можно “разрешить” случай $A, B = \pm\infty$

Тогда 3. тривиально, 1., 2. и 4. верно, если выражения $A \pm B$, $\lambda_0 A$, $\frac{A}{B}$ корректны.

Докажем 1. как в теореме об арифметических свойствах последовательности.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall E_1 \quad \exists \delta_1 > 0 \quad \forall x \in D \cap V_{\delta_1}(a) \quad f(x) > E_1 \quad \forall E_2 \quad \exists \delta_2 > 0 \quad \forall x \in D \cap V_{\delta_2}(a) \quad g(x) > E_2$$

Это доказательство не будет спрашиваться.

2 Компактные множества

Теорема 6. О простейших свойствах компактных множеств. (X, ρ) — метрическое пространство, $K \subset X$

1. K — комп. $\Rightarrow K$ — замкн., K — огр.
2. X — комп, K — замкн. $\Rightarrow K$ — комп.

Доказательство. 1. $?K$ — замкн. $?K^c$ — откр.

$a \notin K$, проверим, что $\exists U(a) \subset K^c$

$K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, \frac{1}{2}\rho(x, a))$ — откр. покрытие

K — комп. $\Rightarrow \exists x_1 \dots x_n \quad K \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \frac{1}{2}\rho(x_i, a))$ — открытое покрытие

$r := \min(\frac{1}{2}\rho(x_1, a)) \dots \frac{1}{2}\rho(x_n, a))$

$B(a, r)$ не пересекается ни с одним $B(x_i, \frac{1}{2}\rho(x_i, a)) \Rightarrow B(a, r) \subset K^c$

$?K$ — огр.

$b \in X$

$K \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} B(b, n) = X$

K — комп. $\Rightarrow K \subset \bigcup_{n=1}^m \Rightarrow K \subset B(b, \max(n_1 \dots n_m))$

2. $?K$ — комп.

$\begin{cases} K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha, G_\alpha \text{ — откр.} \\ K \text{ — замкн., } K^c \text{ — откр.} \end{cases} \Rightarrow K^c \cup \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \text{ — откр. покрытие } X \Rightarrow$

$\Rightarrow X \subset (\text{может быть } K^c) \cup \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$

□

Лемма 1. О вложенных параллелепипедах. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall i = 1 \dots m \quad a_i \leq x_i \leq b_i\}$ — параллелепипед.

$[a^1, b^1] \supset [a^2, b^2] \supset \dots$ — бесконечная последовательность параллелепипедов.

Тогда $\bigcap_{i=1}^{+\infty} [a^i, b^i] \neq \emptyset$

Если $\text{diam}[a^n, b^n] = \|b^n - a^n\| \rightarrow 0$, тогда $\exists! c \in \bigcap_{i=1}^{\infty} [a^i, b^i]$

Доказательство. $\forall i = 1 \dots m \quad [a_i^1, b_i^1] \supset [a_i^2, b_i^2] \supset \dots \quad \exists c_i \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_i^n, b_i^n]. \quad c = (c_1 \dots c_m)$ — общая точка всех параллелепипедов.

$|a_i^n - b_i^n| \leq \|a^n - b^n\| \rightarrow 0 \Rightarrow_{\text{т. Кантора}} \exists! c_i \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_i^n, b_i^n] \Rightarrow \exists! c = (c_1 \dots c_m)$

□

Лемма 2. $[a, b]$ — компактное множество в \mathbb{R}^m $[a, b] \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ — откр. в \mathbb{R}^m

Доказательство. Докажем, что \exists кон. $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n) : [a, b] \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$

Допустим, что не \exists

$[a^1, b^1] := [a, b] \Rightarrow [a^1, b^1]$ нельзя покрыть кон. набором

$[a^2, b^2] :=$ делим $[a^1, b^1]$ на 2^m частей, берем любую “часть”, которую нельзя покрыть конечным набором G_α

\vdots

$$diam = [a^n, b^n] = \frac{1}{2} diam[a^{n-1}, b^{n-1}] = \frac{1}{2^{n-1}} diam[a^1, b^1]$$

$$\exists c \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a^n, b^n]$$

$$c \in [a, b] \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$$

$$\exists \alpha_0 \quad c \in G_{\alpha_0} - \text{откр.}$$

$$\exists U_\varepsilon(c) \subset G_{\alpha_0}$$

$$\exists n \quad diam[a^n, b^n] \ll \varepsilon$$

$$\text{и тогда } [a^n, b^n] \subset U_\varepsilon(c) \subset G_{\alpha_0}$$

□

Примечание. $x_n \rightarrow a$

$$\forall \text{ подпол. } n_k \quad x_{n_k} \rightarrow a$$

Примечание. $\{n_k\} \cap \{m_k\} = \mathbb{N}$

$$\begin{cases} x_{n_k} \rightarrow a \\ x_{m_k} \rightarrow a \end{cases} \Rightarrow x_n \rightarrow a$$

Определение. Секвенциально компактным называется множество $A \subset X : \forall$ посл. (x_n) точек A \exists подпол. x_{n_k} , которая сходится к точке из A

Теорема 7. О характеристике компактов в \mathbb{R}^m . $K \subset \mathbb{R}^m$. Эквивалентны следующие утверждения:

1. K — замкнуто и ограничено
2. K — компактно
3. K — секвенциально компактно

Доказательство. Докажем $1 \Rightarrow 2$

K — огр. $\Rightarrow K$ содержится в $[a, b]$

K — замкн. в $\mathbb{R}^m \Rightarrow K$ — замкн. в $[a, b]$

Т.к. $[a, b]$ — комп., по простейшему свойству компактов K — комп.

□

Доказательство. Докажем $2 \Rightarrow 3$

$\forall (x_n)$ — точки из K .

?сходящаяся последовательность

Если множество значений $D = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ — конечно, то \exists сход. подпол. очевидно.

Пусть D — бесконечно

Если D имеет предельную точку, то $x_{m_k} \rightarrow a$

Если D — бесконечно и не имеет предельных точек, $K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, \varepsilon_x)$, радиус такой, что в этом шаре нет точек D , кроме x (его может тоже не быть). Тогда $\bigcup_{x \in K} B(x, \varepsilon_x)$ — открытое покрытие K .

Так как каждый шар содержит 0 или 1 точку, конечное число шаров не может покрыть K , т.к. в K бесконечное число точек (т.к. бесконечное число различных значений D). Таким образом, мы нашли открытое покрытие K , у которого нет конечного подпокрытия — противоречие.

Пусть $a \in K$ — предельная точка. Возьмём из $B(a, r_1)$ точку x_{n_1} . Возьмём $r_2 < r_1$ и из соответствующего шара возьмём x_{n_2} . При $r_n \rightarrow 0$ $x_{n_k} \rightarrow a$.

Почему вблизи a будет точка из произвольной последовательности?

□