1 Определения

1.1 Локальный максимум, минимум, экстремум

Определение. $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in E$ — **локальный максимум функции**, если

$$\exists U(x_0)\ \ \forall x \in U(x_0) \cap E\ \ f(x) \le f(x_0)$$

Аналогично определеяется минимум.

Определение. **Экстремум** — точка минимума либо максимума.

1.2 ! Первообразная, неопределенный интеграл

$F, f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$
F — **первообразная** f на $\langle a, b\rangle$

$$\forall x \in \langle a, b\rangle \quad F'(x) = f(x)$$

Неопределенный интеграл f на $\langle a, b\rangle$ — множество всех первообразных f:

$$\{F + c, c \in \mathbb{R}\}, \text{ где } F \text{ — первообразная}$$

Обозначается $\int f = F + c$ или $\int f(x)dx$

1.3 Теорема о существовании первообразной

$f \in C^0(\langle a, b\rangle)$ тогда у f существует первообразная.

1.4 Таблица первообразных

$$\int x^n dx = \frac{x^{(n+1)}}{n+1}, n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \text{ — длинный логарифм}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x$$

1.5 Равномерная непрерывность

$f : \langle a, b\rangle \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **равномерно непрерывна** на $\langle a, b\rangle$:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle : |x_1 - x_2| < \delta \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Или для метрического пространства:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x_1, x_2 \;\; \rho(x_1, x_2) < \delta \quad \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

Отличие от непрерывности на отрезке в том, что δ зависит только от ε и подходит для всех x_1, x_2.

1.6 Площадь, аддитивность площади, ослабленная аддитивность

$\mathcal{E}$ — множество всех ограниченных фигур в $\mathbb{R}^2$ (“фигура” = подмножество $\mathbb{R}^2$)
Площадь это $\sigma : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$, такое что:

1. $A \in \mathcal{E} \quad A = A_1 \sqcup A_2 \quad \sigma A = \sigma A_1 + \sigma A_2$ *(конечная аддитивность)*
2. $\sigma([a, b] \times [c, d]) = (d - c)(b - a)$

$\sqcup$ — **дизъюнктное объединение**; если $x \in A_1$ и $x \in A_2$, то x “дважды $\in$” $A_1 \sqcup A_2$
Ослабленная площадь $\sigma : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$:

1. Монотонна
2. Нормирована
3. Ослабленная аддитивность: $E \in \mathcal{E} \quad E = E_1 \cup E_2 \quad E_1 \cap E_2$ — вертикальный отрезок, E_1 и E_2 лежат каждый в своей полуплоскости относительно этого отрезка $\Rightarrow \sigma E = \sigma E_1 + \sigma E_2$

Почему отрезок вертикальный?

1.7 ! Определенный интеграл

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, непр.

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx := \sigma\Pi\Gamma(f_+, [a, b]) - \sigma\Pi\Gamma(f_-, [a, b])$$

1.8 Положительная и отрицательная срезки

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$
$f_+ := \max(f, 0)$ — **положительная срезка**
$f_- := \max(-f, 0)$ — **отрицательная срезка**

1.9 Среднее значение функции на промежутке

Отсутствует

1.10 Кусочно-непрерывная функция

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, **кусочно непрерывна**
f — непр. на $[a, b]$ за исключением конечного числа точек, в которых разрывы I рода

Пример. $f(x) = [x], x \in [0, 2020]$

1.11 Почти первообразная

$F : [a, b] \to \mathbb{R}$ — **почти первообразная** кусочно непрерывной функции f:
F — непр. и $\exists F'(x) = f(x)$ всюду, кроме конечного числа точек

Пример. $f = \operatorname{sign} x, x \in [-1, 1]$
$F := |x|$

1.12 Функция промежутка, аддитивная функция промежутка

$Segm\langle a, b\rangle = \{[p, q] : [p, q] \subset \langle a, b\rangle\}$ — множество всевозм. отрезков, лежащих в $\langle a, b\rangle$
Функция промежутка $\Phi : Segm\langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$
Аддитивная функция промежутка: Φ — функция промежутка и

$$\forall [p, q] \in Segm\langle a, b\rangle \;\; \forall r : p < r < q \quad \Phi([p, q]) = \Phi([p, r]) + \Phi([r, q])$$

1.13 Плотность аддитивной функции промежутка

Плотность аддитивной функции промежутка: $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — плотность Φ, если:

$$\forall \delta \in Segm\langle a, b\rangle \quad \inf_{x\in\delta} f(x) \cdot len_\delta \le \Phi(\delta) \le \sup f \cdot len_\delta$$

2 Теоремы

2.1 Критерий монотонности функции. Следствия

$f \in C(\langle a, b\rangle)$, дифф. в (a, b)
Тогда f — возрастает $\Leftrightarrow \forall x \in (a, b) \;\; f'(x) \ge 0$

Следствие. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, тогда:
$f = \text{const} \Leftrightarrow (f \in C(\langle a, b\rangle)$ — дифф. на $\langle a, b\rangle, f' \equiv 0)$

Следствие. $f \in C\langle a, b\rangle$, дифф. на (a, b). Тогда:
f строго возрастает $\Leftrightarrow$ ① и ②
① $f' \ge 0$ на (a, b)
② $f' \not\equiv 0$ ни на каком промежутке

Следствие. О доказательстве неравенств
$g, f \in C([a, b\rangle)$, дифф. в (a, b)
$f(a) \le g(a); \forall x \in (a, b) \;\; f'(x) \le g'(x)$
Тогда $\forall x \in [a, b\rangle \;\; f(x) \le g(x)$

2.2 Теорема о необходимом и достаточном условиях экстремума

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R} \quad x_0 \in (a, b) \quad f$ — дифф. на (a, b)
Тогда:

1. x_0 — лок. экстремум $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

2. f — n раз дифф. в x_0

   $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$

   Если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то $\begin{cases} n - \text{чет.}: & x_0 - \text{локальный максимум} \\ n - \text{нечет.}: & x_0 - \text{не экстремум} \end{cases}$

   Если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то $\begin{cases} n - \text{чет.}: & x_0 - \text{локальный минимум} \\ n - \text{нечет.}: & x_0 - \text{не экстремум} \end{cases}$

2.3 Теорема Кантора о равномерной непрерывности

$f : X \to Y, X$ — комп., f — непр. на X
Тогда f — равномерно непр.

2.4 Теорема Брауэра о неподвижной точке

$f : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1] \times [0, 1]$, непр.
Тогда $\exists x \in [0, 1]^2 : f(x) = x$, т.е. есть неподвижная точка.
Обобщенный вариант:

1. $f : [0, 1]^m \to [0, 1]^m$ — непр.
2. $f : B(0, 1) \subset \mathbb{R}^m \to B(0, 1)$ — непр.
3. $f : S(0, 1) \subset \mathbb{R}^m$ — непр.

2.5 Теорема о свойствах неопределенного интеграла

f, g имеют первообразную на $\langle a, b\rangle$. Тогда

1. Линейность:
$$\int (f + g) = \int f + \int g$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \int \alpha f = \alpha \int f$$

2. $\varphi\langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$
$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = \left(\int f(x)dx\right)|_{x=\varphi(t)} = F(\varphi(t))$$
   Частный случай: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:
$$\int f(\alpha t + \beta)dt = \frac{1}{\alpha}F(\alpha t + \beta)$$

3. f, g — дифф. на $\langle a, b\rangle$; $f'g$ — имеет первообр.

   Тогда fg' имеет первообразную и
$$\int fg' = fg - \int f'g$$

2.6 Интегрирование неравенств. Теорема о среднем

$f, g \in C[a,b] \quad f \le g$. Тогда

$$\int_a^b f \le \int_a^b g$$

Кто такая теорема о среднем

2.7 Теорема Барроу

$f \in C[a,b] \quad \Phi$ — интеграл с переменным верхним пределом. Тогда

$$\forall x \in [a,b] \quad \Phi'(x) = f(x)$$

2.8 Формула Ньютона-Лейбница, в том числе, для кусочно-непрерывных функций

Теорема 1. $f \in C[a,b] \quad F$ — *первообр.* f
Тогда $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

Что с кусочно-непрерывными?

2.9 Лемма об ускоренной сходимости

1. $f, g : D \subset X \to \mathbb{R} \quad a$ — предельная точка D
   $\exists U(a)$: при $x \in \dot{U}(a) \cap D \quad f(x) \ne 0, g(x) \ne 0$
   Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0 \quad \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$
   Тогда
   $$\forall x_k \to a \quad (x_k \ne a, x_k \in D) \quad \exists y_k \to a (y_k \ne a, y_k \in D)$$
   такое, что
   $$\lim_{k \to +\infty} \frac{f(y_k)}{g(x_k)} = 0 \quad \lim_{k \to +\infty} \frac{g(y_k)}{g(x_k)} = 0$$
   Таким образом, $g(y_k) \to 0$ быстрее, чем $g(x_k) \to 0$
2. То же самое, но $\lim f(x) = +\infty, \lim g(x) = +\infty$

2.10 Правило Лопиталя

$f, g : (a,b) \to \mathbb{R} \quad a \in \overline{\mathbb{R}}$
f, g — дифф., $g' \ne 0$ на (a,b)
Пусть $\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow[x \to a+0]{} A \in \overline{\mathbb{R}}$
Пусть $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ — неопределенность $\left\{ \frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{+\infty} \right\}$
Тогда $\exists \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

2.11 Теорема Штольца

Это дискретная версия правила Лопиталя.
$y_n \to 0, x_n \to 0$ — строго монот.

$$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a \in \mathbb{R}$$

Тогда $\exists \lim \frac{x_n}{y_n} = a$

2.12 Пример неаналитической функции

Отсутствует

2.13 Интегральное неравенство Чебышева. Неравенство для сумм

Неравенство Чебышева
$f, g \in C[a, b]$ монот. возр.
Тогда

$$I_f \cdot I_g \leq I_{fg}$$

$$\int\limits_a^b f \int\limits_a^b g \leq (b-a) \int\limits_a^b fg$$

Дискретное неравенство Чебышева
$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \frac{1}{n} \sum b_i \leq \frac{1}{n} \sum a_i b_i$$

2.14 Свойства определенного интеграла: линейность, интегрирование по частям, замена переменных

Дано выше. (2.5, стр. 4)