1 Определения

1.1 Упорядоченная пара

Для некоторого множества X и A - множество “индексов”, тогда $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ - **семейство элементов** X. ($\forall \alpha \in A \ \ x_\alpha \in X$)
Упорядоченная пара — семейство из двух элементов, где множеством индексов является $\{1, 2\}$. Обозначается (a, b).

1.2 Декартово произведение

Декартово произведение двух множеств — множество всех упорядоченных пар элементов этих множеств. $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$

1.3 Аксиомы вещественных чисел

1.3.1 Аксиомы поля

В множестве $\mathbb{R}$ определены две операции, называемые сложением и умножением, действующие из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ ($+, \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), удовлетворяющие следующим свойствам:
Аксоимы сложения *(здесь и далее* $\forall a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$*)*:

1. $a + b = b + a$ — коммутативность
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ — ассоциативность
3. $\exists \mathbf{0} : \mathbf{0} + a = a$
4. $\exists a' : a + a' = \mathbf{0}$

Аксиомы умножения:

1. $ab = ba$ — коммутативность
2. $(ab)c = a(bc)$ — ассоциативность
3. $\exists \mathbf{1} \neq \mathbf{0} : \forall a \in \mathbb{R} : a \cdot \mathbf{1} = a$
4. $\forall a \neq \mathbf{0} : \exists \tilde{a} : a \cdot \tilde{a} = \mathbf{1}$

Аксоима комбинации сложения и умножения:

1. $(a + b)c = ac + bc$ — дистрибутивность

Поле — множество, в котором определены операции $+, \cdot$, удовлетворяющие группе аксиом I. Например, $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{F}_3$

1.3.2 Аксиомы порядка

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y$ или $y \leq x$
2. $x \leq y; y \leq x \Rightarrow x = y$
3. $x \leq y; y \leq z \Rightarrow x \leq z$ — транзитивность

4. $x \leq y \Rightarrow \forall z \in \mathbb{R} : x + z \leq y + z$
5. $0 \leq x; 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy$

Упорядоченное поле — множество, для которого выполняются аксиомы групп I и II.
$\mathbb{F}_3, \mathbb{C}$ - не упорядоченные поля
$\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathcal{R}$ - упорядоченные поля

1.4 Аксиома Кантора, аксиома Архимеда

1.4.1 Аксиома Архимеда

$$\forall x, y > 0 : \exists n \in \mathbb{R} : nx > y$$

Следствие: существуют сколько угодно большие натуральные числа:

$$\forall y \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : n > y$$

Архимедовы поля — упорядоченные поля, в которых выполняется Аксиома Архимеда.
$\mathcal{R}$ - не архимедово поле
$\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ - архимедовы поля

1.4.2 Аксиома Кантора

Для последовательности вложенных отрезков $\{[a_b, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ $(\forall n \in \mathbb{N}\, a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n)$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \varnothing$$

$\mathbb{Q}$ не удволетворяет этой аксиоме, в отличие от $\mathbb{R}$.

1.5 Пополненное множество вещественных чисел, операции и порядок в нем

Это дополнение?

1.6 Максимальный элемент множества

$M \in A$ называется **максимальным элементом** множества A, если $\forall a \in A \;\; a \leq M$

1.7 Последовательность

$x : \mathbb{N} \to Y$ — **последовательность**

1.8 Образ и прообраз множества при отображении

Для $A \subset X, f : X \to Y$ **образ** — множество $\{f(x), x \in A\} \subset Y$ — обозначается $f(A)$
Для $B \subset Y$ **прообраз** — $\{x \in X : f(x) \in B\}$ — обозначается $f^{-1}(B)$

1.9 Инъекция, сюръекция, биекция

Сюръекция — такое отображение $f : X \to Y$, что $f(X) = Y$, т.е. $\forall y \in Y \ \ f(x) = y$ имеет решение относительно x.
Инъекция — такое отображение $f : X \to Y$, что $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \ \ f(x_1) \neq f(x_2)$, т.е. $\forall y \in Y \ \ f(x) = y$ имеет не более одного решения относительно x.
Биекция — отображение, являющееся одновременно сюръекцией и инъекцией, т.е. $\forall y \in Y \ \ f(x) = y$ имеет ровно одно решение относительно x.

1.10 Векторнозначаная функция, ее координатные функции

Если $F : X \to \mathbb{R}^m; x \mapsto F(x) = (F_1(x), ..., F_m(x))$, то F — **векторнозначная функция** *(значения функции - вектора)*
$F_1(x)..F_m(x)$ - координатные функции отображения F

1.11 График отображения

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$

1.12 Композиция отображений

$f : X \to Y, g : Y \to Z$, тогда **композиция** f и g *(обозначается $g \circ f$)* — такое отображение, что $g \circ f : X \to Z, x \mapsto g(f(x))$.
Также возможно определение, которое допускает $g : Y_1 \to Z, Y_1 \subset Y$

1.13 Сужение и продолжение отображений

Для $g : X \to Y \quad f$ — **сужение** g на множество A, если $f : A \to Y, A \subset X$.
g называется **продолжением** f.

1.14 Предел последовательности *(эпсилон-дельта определение)*

Если для $(x_n), a \in \mathbb{R}$ выполняется $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \ \forall n > N \ \ |x_n - a| < \varepsilon$, то a — **предел последовательности** (x_n), обозначается $x_n \to a$ или $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$

1.15 Окрестность точки, проколотая окрестность

Окрестность точки $a = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$, обозначается $U_\varepsilon(a)$
Проколотая окрестность точки $a = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$, обозначается $\dot{U}_\varepsilon(a)$

1.16 Предел последовательности (определение на языке окрестностей)

$$\forall U(a) \ \ \exists N \ \ \forall n > N \ \ x_n \in U(a)$$