Информация $=-$ неопределенность

Рассмотрим вероятностное пространство $\Omega = \{\omega_1 \dots \omega_n\} \quad p_1 \dots p_n \quad \sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$

Определение. H **— мера неопределенности случайного источника *(энтропия)***, если это отображение удовлетворяет следующему:

$$H(p_1 \dots p_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$$
$$H(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \dots \frac{1}{n}) < H(\frac{1}{n+1} \dots \frac{1}{n+1})$$

H — непр. от всех аргументов

Рассмотрим два эксперимента, где у первого исходы p_i, у второго q_{ij}.

$$H(p_1 q_{11}, p_2 q_{12} \dots p_1 q_{1m_1}, p_2 q_{21} \dots p_n q_{nm_n}) = H(p_1 \dots p_n) + \sum_{i=1}^{n} p_i H(q_{i1} \dots q_{im_i})$$

$h(n) = H(\frac{1}{n} \dots \frac{1}{n})$

Лемма 1. $h(n) = c \log_2 n$

$p_i = \frac{1}{n} \;\; m_i = m \;\; a_{ij} = \frac{1}{m}$
$h(mn) = h(n) + h(m)$
$h(2) = c -$ бит.

$$2^i \le n^k < 2^{i+1}$$
$$i \le k \log_2 n < i+1$$
$$\frac{i}{k} \le \log_2 n < \frac{i+1}{k}$$
$$h(2^i) \le h(n^k) < h(2^{i+1})$$
$$ci \le h(n^k) < c(i+1)$$
$$ci \le k \cdot h(n) < c(i+1)$$
$$\frac{i}{k} \le \frac{h(n)}{c} < \frac{i+1}{k}$$

Т.к. $\frac{h(n)}{c}$ и $\log_2 n$ зажимаются $\frac{i}{k}$ и $\frac{i+1}{k} \Rightarrow \frac{h(n)}{c} = \log_2 n$
$]p_i = \frac{a_i}{b} \quad \lhd q_{ij} = \frac{1}{a_i}, m_i = a_i$

$$h(b) = H(p_1 \dots p_n) + \sum_{i=1}^{n} p_i h(a_i)$$

$$H(p_1 \dots p_n) = c \log_2 b - c \sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 a_i = -c \left(\sum_{i=1}^{n} p_i (\log_2 a_i - \log_2 b) \right) =$$
$$= -c \sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i$$

Рассмотрим арифметическое кодирование:

$$H(p_1 \dots p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i$$

$$L \geq \frac{1}{2^q} \Rightarrow -\log_2 L \leq q$$

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{f_i}{m}\right)^{f_i}$$

$$-\log_2 \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{f_i}{m}\right)^{f_i} = -\sum_{i=1}^{n} f_i \log_2 p_i = m\left(-\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i\right) = mH(p_1 \ldots p_n)$$

1 Симуляция одного распределения другим

Рассмотрим распределение $1 \ldots n$ с вероятностями $p_1 \ldots p_n, n \geq 2, p_i > 0$
Задача: сгенерировать распределение с вероятностями $q_1 \ldots q_m$
Поделим отрезок $[0, 1]$ в пропорциях p_i. Если отрезок p_i не лежит полностью в одном отрезке, то делают зум по всем отрезкам q_j, которым соответствует какое-то число из p_i