1 Определения

1.1 Локальный максимум, минимум, экстремум

Определение. $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in E$ — **локальный максимум функции**, если

$$\exists U(x_0)\ \ \forall x \in U(x_0) \cap E\ \ f(x) \le f(x_0)$$

Аналогично определеяется минимум.

Определение. **Экстремум** — точка минимума либо максимума.

1.2 ! Первообразная, неопределенный интеграл

$F, f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$
F — **первообразная** f на $\langle a, b\rangle$

$$\forall x \in \langle a, b\rangle \quad F'(x) = f(x)$$

Неопределенный интеграл f на $\langle a, b\rangle$ — множество всех первообразных f:

$$\{F + c, c \in \mathbb{R}\}, \text{ где } F \text{ — первообразная}$$

Обозначается $\int f = F + c$ или $\int f(x)dx$

1.3 Теорема о существовании первообразной

$f \in C^0(\langle a, b\rangle)$ тогда у f существует первообразная.
Теорема о существовании первообразной — следствие теоремы Барроу.

1.4 ! Таблица первообразных

$$\int x^n dx = \frac{x^{(n+1)}}{n+1}, n \ne -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \text{ — длинный логарифм}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x$$

1.5 Равномерная непрерывность

$f : \langle a, b\rangle \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **равномерно непрерывна** на $\langle a, b\rangle$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle : |x_1 - x_2| < \delta \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Или для метрического пространства:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x_1, x_2 \ \ \rho(x_1, x_2) < \delta \quad \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

Отличие от непрерывности на отрезке в том, что δ зависит только от ε и подходит для всех x_1, x_2.

1.6 Площадь, аддитивность площади, ослабленная аддитивность

$\mathcal{E}$ — множество всех ограниченных фигур в $\mathbb{R}^2$ ("фигура" = подмножество $\mathbb{R}^2$)
Площадь это $\sigma : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$, такое что:

1. $A \in \mathcal{E} \quad A = A_1 \sqcup A_2 \quad \sigma A = \sigma A_1 + \sigma A_2$ *(конечная аддитивность)*
2. $\sigma([a, b] \times [c, d]) = (d - c)(b - a)$

$\sqcup$ — **дизъюнктное объединение**; если $x \in A_1$ и $x \in A_2$, то x "дважды $\in$" $A_1 \sqcup A_2$
Ослабленная площадь $\sigma : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$:

1. Монотонна
2. Нормирована
3. Ослабленная аддитивность: $E \in \mathcal{E} \quad E = E_1 \cup E_2 \quad E_1 \cap E_2$ — вертикальный отрезок, E_1 и E_2 лежат каждый в своей полуплоскости относительно этого отрезка $\Rightarrow \sigma E = \sigma E_1 + \sigma E_2$

Почему отрезок вертикальный? В конспекте СПбГУ допускается горизонтальный.

1.7 ! Определенный интеграл

$f : [a, b] \to \mathbb{R}; f \geq 0$

$$\text{Под графиком } (\textit{ПГ})(f, [a, b]) = \{(x, y) : x \in [a, b]; 0 \leq y \leq f(x)\}$$

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, непр.

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx := \sigma\text{ПГ}(f_+, [a, b]) - \sigma\text{ПГ}(f_-, [a, b])$$

1.8 Положительная и отрицательная срезки

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$
$f_+ := \max(f, 0)$ — **положительная срезка**
$f_- := \max(-f, 0)$ — **отрицательная срезка**

1.9 Среднее значение функции на промежутке

Среднее значение функции на промежутке:

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

Взято с гугла, стоит спросить Кохася, верно ли это.

1.10 Кусочно-непрерывная функция

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, **кусочно непрерывна**
f — непр. на $[a, b]$ за исключением конечного числа точек, в которых разрывы I рода

Пример. $f(x) = [x], x \in [0, 2020]$

1.11 Почти первообразная

$F : [a, b] \to \mathbb{R}$ — **почти первообразная** кусочно непрерывной функции f:
F — непр. и $\exists F'(x) = f(x)$ всюду, кроме конечного числа точек

Пример. $f = \operatorname{sign} x, x \in [-1, 1]$
$F := |x|$

1.12 Функция промежутка, аддитивная функция промежутка

$Segm\langle a, b\rangle = \{[p, q] : [p, q] \subset \langle a, b\rangle\}$ — множество всевозм. отрезков, лежащих в $\langle a, b\rangle$
Функция промежутка $\Phi : Segm\langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$
Аддитивная функция промежутка: Φ — функция промежутка и

$$\forall [p, q] \in Segm\langle a, b\rangle \;\; \forall r : p < r < q \quad \Phi([p, q]) = \Phi([p, r]) + \Phi([r, q])$$

1.13 Плотность аддитивной функции промежутка

Плотность аддитивной функции промежутка: $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — плотность Φ, если:

$$\forall \delta \in Segm\langle a, b\rangle \quad \inf_{x\in\delta} f(x) \cdot len_\delta \le \Phi(\delta) \le \sup f \cdot len_\delta$$

1.14 Выпуклая функция

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — **выпуклая**

$$\forall x, y \in \langle a, b\rangle \quad \forall \alpha \in [0, 1] \quad f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

Примечание. f — выпуклая $\Leftrightarrow$ всякая хорда графика f расположена “выше” графика *(нестрого выше)* $\Leftrightarrow$ НГ$(f, \langle a, b\rangle)\{(x, y) : x \in \langle a, b\rangle \;\; y \ge f(x)\}$

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — **строго выпуклая**

$$\forall x, y \in \langle a, b\rangle \quad \forall \alpha \in (0, 1) \quad f(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

1.15 Выпуклое множество в $\mathbb{R}^m$

$A \subset \mathbb{R}^m$ — **выпуклое множество в** $\mathbb{R}^m$, если

$$\forall x, y \in A, \alpha \in [0,1] \quad \alpha x + (1-\alpha)y \in A$$

Это определение с вики

1.16 Надграфик

Надграфик функции $f : \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ это множество $\{(x,y) \mid x \in \langle a,b \rangle, y \geq f(x)\}$

1.17 Опорная прямая

$A \subset \mathbb{R}^2$ — вып. $l \subset \mathbb{R}^2$ — прямая
l — **опорная прямая** к A, если:

1. A содержится в одной полуплоскости относительно l
2. $l \cap A \neq \varnothing$

1.18 Гладкий путь, вектор скорости, носитель пути

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ — непр.
$\gamma(a)$ — начало; $\gamma(b)$ — конец
$\gamma : t \mapsto \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ \vdots \\ \gamma_m(t) \end{pmatrix}$; γ_i — коорд. функции
Если все $\gamma_i \in C^1[a,b]$, то γ — **гладкий путь.**
Вектор скорости:

$$\gamma'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\gamma(t+\Delta t) - \gamma(t)}{\Delta t} = \lim \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1(t+\Delta t)-\gamma_1(t)}{\Delta t} \\ \vdots \\ \frac{\gamma_m(t+\Delta t)-\gamma_m(t)}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \\ \vdots \\ \gamma_m'(t) \end{pmatrix}$$

Кто такой носитель пути — неизвестно, гугл предлагает про СПИД почитать.

1.19 Длина гладкого пути

Длина пути — фукнция l, заданная на множестве гладких путей в $\mathbb{R}^m$, такая что:

1. $l \geq 0$
2. l — аддитивна: $\forall [a,b] \ \ \forall \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m \ \ \forall c \in (a,b) \quad l(\gamma) = l(\gamma|_{[a,c]}) + l(\gamma|_{[c,b]})$
3. $\forall \gamma, \tilde{\gamma}$ — гладкие пути, $C_\gamma, C_{\tilde{\gamma}}$ — носители путей
   Если $\exists T : C_\gamma \to C_{\tilde{\gamma}}$ — сжатие: $(\forall M, M' \ \ \rho(T(M), T(M')) \leq \rho(M, M'))$, тогда $l(\tilde{\gamma}) \leq l(\gamma)$
4. Нормировка: γ — гладкий путь, $\gamma(t) = vt + u; \ \ u, v \in \mathbb{R}^m$:

$$l(\gamma) = \rho(\gamma(a), \gamma(b))$$

2 Теоремы

2.1 Критерий монотонности функции. Следствия

$f \in C(\langle a, b\rangle)$, дифф. в (a, b)
Тогда f — возрастает $\Leftrightarrow \forall x \in (a, b)\ \ f'(x) \geq 0$

Доказательство. "$\Rightarrow$" По определению f' $\ \frac{f(x+h)-f(h)}{h} \geq 0$
"$\Leftarrow$" $x_1 > x_2$, по т. Лагранжа: $\exists c : f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2) \geq 0$ □

Следствие. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, тогда:
$f = \text{const} \Leftrightarrow (f \in C(\langle a, b\rangle)$ — дифф. на $\langle a, b\rangle, f' \equiv 0)$

Следствие. $f \in C\langle a, b\rangle$, дифф. на (a, b). Тогда:
f строго возрастает $\Leftrightarrow$ ① и ②
① $f' \geq 0$ на (a, b)
② $f' \not\equiv 0$ ни на каком промежутке

Доказательство. "$\Rightarrow$" очевидно
"$\Leftarrow$" По лемме о возрастании в отрезке □

Следствие. О доказательстве неравенств
$g, f \in C([a, b\rangle)$, дифф. в (a, b)
$f(a) \leq g(a); \forall x \in (a, b)\ \ f'(x) \leq g'(x)$
Тогда $\forall x \in [a, b\rangle\ \ f(x) \leq g(x)$

Доказательство. $g - f$ — возр., $g(a) - f(a) \geq 0$ □

2.2 Теорема о необходимом и достаточном условиях экстремума

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R} \quad x_0 \in (a, b) \quad f$ — дифф. на (a, b)
Тогда:

1. x_0 — лок. экстремум $\Rightarrow f'(x_0) = 0$
2. f — n раз дифф. в x_0
   $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$
   Если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то $\begin{cases} n \text{ — чет. :} & x_0 \text{ — локальный максимум} \\ n \text{ — нечет. :} & x_0 \text{ — не экстремум} \end{cases}$
   Если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то $\begin{cases} n \text{ — чет. :} & x_0 \text{ — локальный минимум} \\ n \text{ — нечет. :} & x_0 \text{ — не экстремум} \end{cases}$

Доказательство.

1. т. Ферма
2. ф. Тейлора

$$f(x) = \mathrm{T}_n(f, x_0)(x) + o((x - x_0)^n)$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

при x, близких к x_0:

$$\text{sign}(f(x) - f(x_0)) = \text{sign}\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\right)$$

Тогда при чётном n

$$\operatorname{sign}(f(x)-f(x_0)) = \operatorname{sign} f^{(n)}(x_0) \Rightarrow x_0 - \text{экстр.}$$

При нечётном n

$$\operatorname{sign}(f(x)-f(x_0)) = \begin{cases} f^{(n)}(x_0), & x > x_0 \\ -f^{(n)}(x_0), & x < x_0 \end{cases} \Rightarrow x_0 - \text{не экстр.}$$

□

2.3 Теорема Кантора о равномерной непрерывности

$f : X \to Y, X$ — комп., f — непр. на X
Тогда f — равномерно непр.

Доказательство. От противного.

$$\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall \delta > 0 \ \ \exists x_\delta, \overline{x}_\delta : \rho(x_\delta, \overline{x}_\delta) < \delta \quad \rho(f(x_\delta), f(\overline{x}_\delta)) \geq \varepsilon$$
$$\delta := \frac{1}{n} \ \ \exists x_n, \overline{x}_n : \rho(x_n, \overline{x}_n) < \delta \quad \rho(f(x_n), f(\overline{x}_n)) \geq \varepsilon$$

Выберем $x_{n_k} \to \tilde{x}, \overline{x}_{n_k} \to \tilde{\tilde{x}}$

$$\rho(\tilde{x}, \tilde{\tilde{x}}) \leq \lim_{n\to\infty} \delta = 0 \Rightarrow \tilde{x} = \tilde{\tilde{x}}$$

Тогда $f(x_{n_k}) \to f(\tilde{x}), f(\overline{x}_{n_k}) \to f(\tilde{x})$, противоречие с $\rho(f(x_n), f(\overline{x}_n)) \geq \varepsilon$ □

2.4 Теорема Брауэра о неподвижной точке

$f : [0,1] \times [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$, непр.
Тогда $\exists x \in [0,1]^2 : f(x) = x$, т.е. есть неподвижная точка.
Обобщенный вариант:

1. $f : [0,1]^m \to [0,1]^m$ — непр.
2. $f : B(0,1) \subset \mathbb{R}^m \to B(0,1)$ — непр.
3. $f : S(0,1) \subset \mathbb{R}^m$ — непр.

Доказательство. $\rho : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$
$\rho(x,y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$ — непр. в $[0,1]^2$
От противного — пусть $\forall x \in [0,1]^2 \quad f(x) \neq x$
Тогда $\forall x \quad \rho(f(x), x) > 0 \quad x \mapsto \rho(f(x), x)$ — непр., > 0
По т. Вейерштрасса $\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall x \in [0,1] \ \ \rho(f(x), x)) \geq \varepsilon$
По т. Кантора для f: для этого $\varepsilon \ \ \exists \delta < \varepsilon$:

$$\forall x, \overline{x} : ||x - \overline{x}|| < \delta \quad ||f(x) - f(\overline{x})|| < \varepsilon$$

Можно писать не $|| \cdot ||$, а ρ.
Возьмём $n : \frac{\sqrt{2}}{n} < \delta$
Построим доску $Hex(n+1, n+1)$, где $n+1$ — число узлов.
Логические координаты узла $(v_1, v_2) \quad v_1, v_2 \in \{0 \dots n\}$ имеют физические координаты, то есть узлу сопоставляется точка на квадрате с координатами $\left(\frac{v_1}{n}, \frac{v_2}{n}\right)$
$K(V) := \min\{i \in \{1,2\} : |f(\frac{v}{n}) - \frac{v_i}{n}| \geq \varepsilon\}$
Продолжение на следующей лекции. □

2.5 Теорема о свойствах неопределенного интеграла

f, g имеют первообразную на $\langle a, b\rangle$. Тогда

1. Линейность:
$$\int (f+g) = \int f + \int g$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \int \alpha f = \alpha \int f$$

2. $\varphi \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$
$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \left(\int f(x) dx\right)|_{x=\varphi(t)} = F(\varphi(t))$$
Частный случай: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:
$$\int f(\alpha t + \beta) dt = \frac{1}{\alpha} F(\alpha t + \beta)$$

3. f, g — дифф. на $\langle a, b\rangle$; $f'g$ — имеет первообр.
Тогда fg' имеет первообразную и
$$\int fg' = fg - \int f'g$$

Доказательство. 1. Опущено

2. $(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$
3. $(fg - \int f'g)' = f'g + fg' - f'g = fg'$

□

2.6 ! Интегрирование неравенств. Теорема о среднем

$f, g \in C[a, b] \quad f \le g$. Тогда
$$\int_a^b f \le \int_a^b g$$

Доказательство.
$$\Pi\Gamma(f_+) \subset \Pi\Gamma(g_+) \Rightarrow \sigma\Pi\Gamma(f_+) \le \sigma\Pi\Gamma(g_+)$$
$$\Pi\Gamma(f_-) \supset \Pi\Gamma(g_-) \Rightarrow \sigma\Pi\Gamma(f_-) \ge \sigma\Pi\Gamma(g_-)$$
$$\sigma\Pi\Gamma(f_+) - \sigma\Pi\Gamma(f_-) \le \sigma\Pi\Gamma(g_+) - \sigma\Pi\Gamma(g_-)$$

□

Теорема о среднем: $f \in C[a, b], m \le f(x) \le M \Rightarrow \exists c : m \le c \le M \quad \int_a^b f = c(b-a)$

Доказательство. По монотонности интеграла
$$m(b-a) \le \int_a^b f \le M(b-a)$$
$$m \le \frac{1}{b-a} \int_a^b f \le M$$
$$c := \frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

□

Взято с вики

2.7 Теорема Барроу

$f \in C[a,b] \quad \Phi$ — интеграл с переменным верхним пределом. Тогда

$$\forall x \in [a,b] \quad \Phi'(x) = f(x)$$

Доказательство. Зафиксируем $x \in [a,b] \quad y > x, y \le b$

$$\frac{\Phi(y)-\Phi(x)}{y-x} = \frac{\int_a^y f - (\int_a^y f + \int_y^x f)}{y-x} = \frac{\int_x^y f}{y-x} \underset{\substack{\text{т.о.ср.} \\ \exists c \in [x,y]}}{=} \frac{c(y-x)}{y-x} = c \xrightarrow[y \to x+0]{} f(x)$$

$x > y$

$$\frac{\Phi(y)-\Phi(x)}{y-x} = \frac{1}{x-y}\int_y^x f = c \xrightarrow[y \to x-0]{} f(x)$$

□

2.8 Формула Ньютона-Лейбница, в том числе, для кусочно-непрерывных функций

Теорема 1. $f \in C[a,b] \quad F$ — первообр. f
Тогда $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

Доказательство. $\Phi(x) = \int_0^x f$ — первообр.
$\exists C : F = \Phi + C$

$$\int_a^b f = \Phi(b) - \Phi(a) = F(b) - F(a)$$

□

Что с кусочно-непрерывными?

2.9 Лемма об ускоренной сходимости

1. $f, g : D \subset X \to \mathbb{R} \quad a$ — предельная точка D

   $\exists U(a)$: при $x \in \dot{U}(a) \cap D \quad f(x) \ne 0, g(x) \ne 0$

   Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0 \quad \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$

   Тогда
   $$\forall x_k \to a \quad (x_k \ne a, x_k \in D) \quad \exists y_k \to a (y_k \ne a, y_k \in D)$$
   такое, что
   $$\lim_{k \to +\infty} \frac{f(y_k)}{g(x_k)} = 0 \quad \lim_{k \to +\infty} \frac{g(y_k)}{g(x_k)} = 0$$
   Таким образом, $g(y_k) \to 0$ быстрее, чем $g(x_k) \to 0$

2. То же самое, но $\lim f(x) = +\infty, \lim g(x) = +\infty$

Доказательство. 1. Очевидно.

$$\forall k \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |f(x_n)| < |g(x_k)|\frac{1}{k} \quad |g(x_n)| < |g(x_k)|\frac{1}{k}$$

$\varepsilon := |g(x_k)|$

$$k = 1 \quad y_1 := \text{какой-нибудь } x_n : \left|\frac{f(x_n)}{g(x_k)}\right| < 1 \quad \left|\frac{g(x_n)}{g(x_k)}\right| < 1$$

$$k = 2 \quad y_2 := \text{какой-нибудь } x_n : \left|\frac{f(x_n)}{g(x_k)}\right| < \frac{1}{2} \quad \left|\frac{g(x_n)}{g(x_k)}\right| < \frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

2. (a) Частный случай: Пусть $g(x_n)$ возрастает. Берем $k : m := \min\{n : |f(x_n)| \geq \sqrt{g(x_k)}$ или $|g(x_n)| \geq \sqrt{g(x_k)}\}$
   $y_k := x_{m-1}$
   $$\left|\frac{f(y_k)}{g(x_k)}\right| \leq \frac{\sqrt{g(x_k)}}{g(x_k)} = \frac{1}{\sqrt{g(x_k)}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$
   Зачем нужно возрастание? Кохась не знает.

   (b) Общий случай: $\tilde{g}(x_k) := \inf\{g(x_n), n = k, k+1\dots\} \quad \tilde{g}(x_k) \to +\infty$
   $\tilde{g}(x_k) \uparrow, \tilde{g}(x_k) \leq g(x_k)$. Как в пункте (a) построим y_k
   $$\frac{f(y_k)}{g(x_k)} \leq \frac{f(y_k)}{\tilde{g}(x_k)} \leq \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}(x_k)}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$
   $$\frac{g(y_k)}{g(x_k)} \leq \frac{g(x_k)}{\tilde{g}(x_k)} \leq \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}(x_k)}} \to 0$$

□

2.10 Правило Лопиталя

$f, g : (a, b) \to \mathbb{R} \quad a \in \overline{\mathbb{R}}$
f, g — дифф., $g' \neq 0$ на (a, b)
Пусть $\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow[x\to a+0]{} A \in \overline{\mathbb{R}}$
Пусть $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ — неопределенность $\left\{\frac{0}{0}, \frac{+\infty}{+\infty}\right\}$
Тогда $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

Доказательство. $g' \neq 0 \Rightarrow g'$ — сохр. знак $\Rightarrow g$ — монотонна.
Для $\frac{0}{0} \quad g(x) \neq 0$ в (a, b)
По Гейне $x_k \to a \;\; (x_k \neq a, x_k \in (a, b))$
Выберем y_k по лемме

$$\frac{f(x_k) - f(y_k)}{g(x_k) - g(y_k)} = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)} \text{ — т. Коши}$$

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} - \frac{f(y_k)}{g(x_k)} = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}\left(1 - \frac{g(y_k)}{g(x_k)}\right)$$

$x_k \to a \quad y_k \to a \quad \xi_k \to a$ □

2.11 Теорема Штольца

Это дискретная версия правила Лопиталя.
$y_n \to 0, x_n \to 0$ — строго монот.

$$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a \in \mathbb{R}$$

Тогда $\exists \lim \frac{x_n}{y_n} = a$

Доказательство. 1. $a > 0 \quad (a \neq +\infty)$

$$\forall \varepsilon > 0 \ [\varepsilon < a] \ \exists N_1 \ \forall n > N_1 \ a_\varepsilon < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < a + \varepsilon$$

Берем $N > N_1$

$$a - \varepsilon < \frac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N} < a + \varepsilon$$

$$\vdots$$

$$a - \varepsilon < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < a + \varepsilon$$

По неправильному сложению:*(оно применимо, т.к. все дроби положительные)*

$$a - \varepsilon < \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} < a + \varepsilon$$

$n \to +\infty$

$$a - \varepsilon < \frac{x_N}{y_N} < a + \varepsilon$$

2. $a = +\infty$ доказывается так же
3. $a < 0$ поменяем знак и докажем так же
4. $a = 0$ т.к. знаки $x_n - x_{n-1}$ и $y_n - y_{n-1}$ фикс., $a = +0$ или $a = -0$

   Для $a = +0 \lim \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = +\infty$

□

2.12 Пример неаналитической функции

Отсутствует

2.13 Интегральное неравенство Чебышева. Неравенство для сумм

Неравенство Чебышева
$f, g \in C[a, b]$ монот. возр.
Тогда

$$I_f \cdot I_g \leq I_{fg}$$

$$\int\limits_a^b f \int\limits_a^b g \leq (b-a) \int\limits_a^b fg$$

Доказательство. $x, y \in [a,b] \quad (f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) \geq 0$

$$f(x)g(x) - f(y)g(x) - f(x)g(y) + f(y)g(y) \geq 0$$

Интегрируем по x по $[a,b]$

$$I_{fg} - f(y)I_g - g(y)I_f + f(y)g(y) \geq 0$$

Интегрируем по y по $[a,b]$

$$I_{fg} - I_f I_g - I_g I_f + I_{fg} \geq 0$$

□

Дискретное неравенство Чебышева
$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \frac{1}{n}\sum b_i \leq \frac{1}{n}\sum a_i b_i$$

Доказательство.

$$f(x) = a_i, x \in (i-1, i], i = 1 \ldots n - \text{задана на } (0,n]$$
$$g(x) = \ldots b_i$$
$$I_f I_g \leq I_{fg}$$

□

2.14 Свойства определенного интеграла: линейность, интегрирование по частям, замена переменных

Дано выше. (2.5, стр. 7)

2.15 Иррациональность числа пи

$$H_n := \frac{1}{n!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos t dt := \frac{1}{n!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f g' dt$$

$$H_n = \left[f' = -2n\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} t \quad g = \sin t\right] =$$

$$= \frac{1}{n!}\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \sin t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{(n-1)!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} t \sin t$$

$$= 0 + \frac{2}{(n-1)!}\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} + \sin t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$+\frac{2}{(n-1)!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left((2n-1)\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} - \frac{\pi^2}{2}(n-1)\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2}\right)\cos t dt =$$

$$= (4n-2)H_{n-1} - \pi^2 H_{n-2}$$

Число π — иррационально

Доказательство. Пусть $\pi = \frac{p}{q}$; H_n задано выше

$$H_n = (4n-2)H_{n-1} - \pi^2 H_{n-2}$$

$$H_0 = 2, \quad H_1 = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi^2}{4} - t^2)\cos t = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi^2} t\sin t dt = 2t(-\cos t)\Big|_{\dots}^{\dots} + 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t = 4$$

$$H_n = \dots H_1 + \dots H_0 = P_n(\pi^2) - \text{многочлен с целыми коэффициентами, степень} \leq n$$

$$q^{2n}P_n\left(\frac{p^2}{q^2}\right) = \text{ целое число } = q^{2n}H_n = q^{2n}H_n > 0 \Rightarrow q^{2n}H_n \geq 1$$

$$1 \leq \frac{q^{2n}}{n!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos t dt \leq \frac{q^2 n 4^n}{n!}\pi \to 0$$

Противоречие. □

2.16 ! Теорема о вычислении аддитивной функции промежутка по плотности

О вычислении аддитивной функции промежутка по плотности
$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — непр. $\quad \Phi : Segm\langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$
f — плотность Φ
Тогда $\Phi([p,q]) = \int\limits_b^a f, \quad [p,q] \subset \langle a, b\rangle$

Доказательство.

$$F(x) := \begin{cases} 0 & , x = a \\ \Phi([a,x]) & , x > a \end{cases} - \text{первообразная } f$$

Это утверждение ещё не доказано, но если мы его докажем, то:

$$\Phi([p,q]) = \Phi[a,q] - \Phi[a,p] = F(q) - F(p) = \int\limits_p^a f$$

Докажем утверждение:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\Phi[a, x+h] - \Phi[a,x]}{h} = \frac{\Phi[x, x+h]}{h} = [0 \leq \Theta \leq 1] = f(x + \Theta h)$$

□

2.17 Площадь криволинейного сектора: в полярных координатах и для параметрической кривой

$$\Phi[\alpha, \beta] = S_{\text{сектор}(\alpha,\beta)} = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$$

$x(t), y(t)$ — кривая в $\mathbb{R}^2$

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\int_{t_\alpha}^{t_\beta}(x(t)^2 + y(t)^2)\frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t)}dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{t_\alpha}^{t_\beta} y'(t)x(t) - y(t)x'(t)dt$$

2.18 Изопериметрическое неравенство

Изопериметрическое неравенство
$G \subset \mathbb{R}^2$ — выпуклое замкнутое множество (ограниченное)
$diamG = \sup\{\rho(x, y),\ x, y \in G\}$
$diamG \leq 1$
Тогда $\sigma(G) \leq \frac{\pi}{4}$

Доказательство. Пойдём от некоторой точки на границе G под углом φ внутрь фигуры по прямой. В какой-то момент мы встретим другую граничную точку. Назовем этот процесс $r(\varphi)$ *(возвращает длину пути)*. Очевидно, что $r^2(\varphi) + r^2(\varphi - \frac{\pi}{2}) \leq (diamG)^2 \leq 1$

$$\sigma(G) = \frac{1}{2} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2} \left(\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} r^2(\varphi)d\varphi + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi)d\varphi \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(r^2(\varphi) + r^2\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \right) d\varphi \leq \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1 d\varphi = \frac{\pi}{4}$$

□

2.19 Лемма о трех хордах

$f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. f — вып. $\langle a, b \rangle$
2. $\forall x_1, x_2, x_3 \in \langle a, b \rangle\ \ x_1 < x_2 < x_3 \quad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$

Доказательство. Левое $\Leftrightarrow f(x_2)(x_3 - x_1) \leq f(x_3)(x_2 - x_1) + f(x_1)(x_3 - x_1 - (x_2 - x_1))$

$$f\left(x_3 \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} + x_1 \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\right) = f(x_2) \leq f(x_3)\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} + f(x_1)\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$$

□

2.20 Теорема об односторонней дифференцируемости выпуклой функции

f — вып. $\langle a, b \rangle$. Тогда $\forall x \in (a, b)\ \ \exists f'_+(x), f'_-(x)$ и $\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$

$$f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'_-(x_2)$$

Доказательство. $f'_+(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1 + 0} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ — монотонно убывающая функция от x

Фиксируем $x_0 < x_1$. По лемме о трех хордах $\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} \leq \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ □

2.21 Следствие о точках разрыва производной выпуклой функции

f — вып. на $\langle a, b\rangle \Rightarrow f$ непр. на (a, b)

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$$

2.22 Описание выпуклости с помощью касательных

f — вып. на $\langle a, b\rangle$. Тогда график f расположен не ниже любой касательной
т.е. $\forall x, x_0 \quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Доказательство. “$\Rightarrow$”
Если $x > x_0 \quad f'(x_0) \geq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, это неравенство 2. из предыдущей теоремы
$x < x_0$ аналогично
“$\Leftrightarrow$” фиксируем x_0. Берем $x_1 < x_0 < x_2$
$f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$; $f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0)$, т.е. $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leq f'(x_0) \leq \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$.
Это верно по лемме. $\square$

2.23 Дифференциальный критерий выпуклости

1. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, дифф. в (a, b)

   Тогда f — вып. $\Rightarrow f'$ возр. на (a, b)

   Если f — строго выпуклая $\Rightarrow f'$ строго возрастает

2. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, дважды дифф. на (a, b)

   f — вып. $\Leftrightarrow f'' \geq 0$ на (a, b)

   (a) “$\Rightarrow$” $f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2) \quad (x_1 < x_2)$
   “$\Leftarrow$” $?f$ вып. $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c_1) < f'(c_2) = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$
   Теперь утверждение 2. очевидно.