

1 Определения

1.1 Упорядоченная пара

Для некоторого множества X и I - множество “индексов”, тогда $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ - **семейство элементов** X . ($\forall \alpha \in I \ x_\alpha \in X$)

Упорядоченная пара — семейство из двух элементов, построенная при $I = \{1, 2\}$. Обозначается (a, b) .

Кроме того,

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c, b = d$$

1.2 Декартово произведение

Декартово произведение двух множеств — множество всех упорядоченных пар элементов этих множеств. $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$

Кроме того, декартово произведение можно обобщить для произвольного числа множеств.

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$$

1.3 Аксиомы вещественных чисел

1.3.1 Аксиомы поля

В множестве \mathbb{R} определены две операции, называемые сложением и умножением, действующие из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в \mathbb{R} ($+, \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$), удовлетворяющие следующим свойствам:

Аксиомы сложения (здесь и далее $\forall a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$):

1. $a + b = b + a$ — коммутативность
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ — ассоциативность
3. $\exists 0 : 0 + a = a$
4. $\exists a' : a + a' = 0$

Аксиомы умножения:

1. $ab = ba$ — коммутативность
2. $(ab)c = a(bc)$ — ассоциативность
3. $\exists 1 \neq 0 : \forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a$
4. $\forall a \neq 0 : \exists \tilde{a} : a \cdot \tilde{a} = 1$

Аксиома комбинации сложения и умножения:

1. $(a + b)c = ac + bc$ — дистрибутивность

Поле — множество, в котором определены операции $+, \cdot$, удовлетворяющие группе аксиом

I. Например, $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{F}_3$

1.3.2 Аксиомы порядка

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y$ или $y \leq x$
2. $x \leq y; y \leq x \Rightarrow x = y$
3. $x \leq y; y \leq z \Rightarrow x \leq z$ — транзитивность
4. $x \leq y \Rightarrow \forall z \in \mathbb{R} : x + z \leq y + z$
5. $0 \leq x; 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy$

Упорядоченное поле — множество, для которого выполняются аксиомы групп I и II.

\mathbb{F}_3, \mathbb{C} — не упорядоченные поля

$\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathcal{R}$ — упорядоченные поля

1.4 Аксиома Кантора, аксиома Архимеда

1.4.1 Аксиома Архимеда

$$\forall x, y > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : nx > y$$

Следствие: существуют сколько угодно большие натуральные числа:

$$\forall y \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : n > y$$

Архимедовы поля — упорядоченные поля, в которых выполняется Аксиома Архимеда.

\mathcal{R} — не архимедово поле

\mathbb{R}, \mathbb{Q} — архимедовы поля

1.4.2 Аксиома Кантора

Для последовательности вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ ($\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$)

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$$

\mathbb{Q} не удовлетворяет этой аксиоме, в отличие от \mathbb{R} .

1.5 Пополненное множество вещественных чисел, операции и порядок в нем

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ — пополненное множество вещественных чисел.

Свойства ($\forall x \in \mathbb{R}$):

- $-\infty < +\infty$
- $\pm\infty \cdot \pm\infty = +\infty$
- $\pm\infty \cdot \mp\infty = -\infty$
- $-\infty < x < +\infty$
- $x \pm \infty = \pm\infty$

- $\pm\infty \pm \infty = \pm\infty$
- $\pm\infty \mp \infty$ – не определено

Для $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$

- $x \cdot \pm\infty = \pm\infty$

1.6 Максимальный элемент множества

$M \in A$ называется **максимальным элементом** множества A , если $\forall a \in A \quad a \leq M$

1.7 Последовательность

$x : \mathbb{N} \rightarrow Y$ – **последовательность**

1.8 Образ и прообраз множества при отображении

Для $A \subset X, f : X \rightarrow Y$ **образ** – множество $\{f(x), x \in A\} \subset Y$ – обозначается $f(A)$

Для $B \subset Y$ **прообраз** – $\{x \in X : f(x) \in B\}$ – обозначается $f^{-1}(B)$

1.9 Инъекция, сюръекция, биекция

Сюръекция – такое отображение $f : X \rightarrow Y$, что $f(X) = Y$, т.е. $\forall y \in Y \quad f(x) = y$ имеет решение относительно x .

Инъекция – такое отображение $f : X \rightarrow Y$, что $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \quad f(x_1) \neq f(x_2)$, т.е. $\forall y \in Y \quad f(x) = y$ имеет не более одного решения относительно x .

Биекция – отображение, являющееся одновременно сюръекцией и инъекцией, т.е. $\forall y \in Y \quad f(x) = y$ имеет ровно одно решение относительно x .

1.10 Векторнозначная функция, ее координатные функции

Если $F : X \rightarrow \mathbb{R}^m; x \mapsto F(x) = (F_1(x), \dots, F_m(x))$, то F – **векторнозначная функция** (значения функции – вектора)

$F_1(x) \dots F_m(x)$ – координатные функции отображения F

1.11 График отображения

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$

1.12 Композиция отображений

$f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$, тогда **композиция** f и g (обозначается $g \circ f$) – такое отображение, что $g \circ f : X \rightarrow Z, x \mapsto g(f(x))$.

Также возможно определение, которое допускает $g : Y_1 \rightarrow Z, Y_1 \supset Y$

1.13 Сужение и продолжение отображений

Для $g : X \rightarrow Y \quad f$ – **сужение** g на множество A , если $f : A \rightarrow Y, A \subset X$.

g называется **продолжением** f .

1.14 Предел последовательности (эпсилон-дельта определение)

Если для $(x_n), a \in \mathbb{R}$ выполняется $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N |x_n - a| < \varepsilon$, то a — предел последовательности (x_n) , обозначается $x_n \rightarrow a$ или $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

1.15 Окрестность точки, проколота окрестность

Окрестность точки $a = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$, обозначается $U_\varepsilon(a)$

Проколота окрестность точки $a = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$, обозначается $\dot{U}_\varepsilon(a)$

1.16 Предел последовательности (определение на языке окрестностей)

$$\forall U(a) \exists N \forall n > N x_n \in U(a)$$

1.17 Метрика, метрическое пространство, подпространство

На множестве X отображение $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ называется метрикой, если выполняются свойства 1-3:

1. $\forall x, y \rho(x, y) \geq 0; \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\forall x, y \rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. Неравенство треугольника: $\forall x, y, z \in X \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

Метрическое пространство — упорядоченная пара (X, ρ) , где X — множество, ρ — метрика на X .

Подпространством метрического пространства (X, ρ) называется $(A, \rho|_{A \times A})$, если $A \subset X$

1.18 Шар, замкнутый шар, окрестность точки в метрическом пространстве

Шар (открытый шар) $B(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) < r\}$

Замкнутый шар $B(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) \leq r\}$

Окрестность точки a в метрическом пространстве: $B(a, \varepsilon) \Leftrightarrow U(a)$.

1.19 Линейное пространство

Если K — поле ($K = \mathbb{R}$ или \mathbb{C}), X — множество, то X называется линейным пространством над полем K (и тогда K называется полем скаляр), если определены следующие две операции:

1. $+: X \times X \rightarrow X$ — сложение векторов
2. $\cdot: K \times X \rightarrow X$ — умножение векторов на скаляры

Для этих операций выполняются соответствующие аксиомы (здесь $A, B, C \in X; a, b \in K$):

1.19.1 Аксиомы сложения векторов

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $\exists 0 \in X : A + 0 = A$
4. $\exists -A \in X : A + (-A) = 0$ — обратный элемент

1.19.2 Аксиомы умножения векторов на скаляры

1. $(A + B) \cdot a = A \cdot a + B \cdot a$
2. $A \cdot (a + b) = A \cdot a + A \cdot b$
3. $(ab) \cdot A = a(b \cdot A)$
4. $\exists 1 \in K : 1 \cdot A = A$

1.20 Норма, нормированное пространство

Норма - отображение $X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$, если X - линейное пространство (над \mathbb{R} или \mathbb{C}) и выполняется следующее:

1. $\forall x \quad \|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\forall x \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
3. Неравенство треугольника: $\forall x, y \in X \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Нормированное пространство — упорядоченная пара $(X, \|\cdot\|)$, где $\|\cdot\|$ - норма

1.21 Ограниченное множество в метрическом пространстве

$A \subset X$ — **ограничено**, если $\exists x_0 \in X \quad \exists R > 0 \quad A \subset B(x_0, R)$, т.е. если A содержится в некотором шаре в X .

1.22 Внутренняя точка множества, открытое множество, внутренность

a — **внутренняя точка** множества D , если $\exists U(a) : U(a) \subset D$, т.е. $\exists r > 0 : B(a, r) \subset D$
 D — **открытое множество**, если $\forall a \in D : a$ — внутренняя точка D

Внутренностью множества D называется $Int(D) = \{x \in D : x \text{ — внутр. точка } D\}$

1.23 Предельная точка множества

a — **предельная точка** множества D , если

$$\forall \dot{U}(a) \quad \dot{U}(a) \cap D \neq \emptyset$$

1.24 Замкнутое множество, замыкание, граница

D — **замкнутое множество**, если оно содержит все свои предельные точки.

$\overline{D} = D \cup (\text{множество предельных точек } D)$ — **замыкание**.

Граница множества — множество его граничных точек. Обозначается ∂D

1.25 Изолированная точка, граничная точка

a — **изолированная точка** D , если $a \in D$ и a — не предельная, то есть:

$$\exists U(a) \quad U(a) \cap D = \{a\}$$

a — **граничная точка** D , если $\forall U(a) \quad U(a)$ содержит точки как из D , так и из D^c

1.26 Описание внутренности множества

1. $Int D$ - откр. множество
2. $Int D = \bigcup_{\substack{D \supset G \\ G - \text{открыт}}} G$ — максимальное открытое множество, содержащееся в D
3. D — откр. в $X \Leftrightarrow D = Int D$

1.27 Описание замыкания множества в терминах пересечений

$\overline{D} = \bigcap_{\substack{D \subset F \\ F - \text{замкн.}}} F$ — мин. (по вкл.) замкн. множество, содержащее D .

1.28 Верхняя, нижняя границы; супремум, инфимум

$E \subset \mathbb{R}$. E — **огр. сверху**, если $\exists M \in \mathbb{R} \forall x \in E \ x \leq M$. Кроме того, всякие такие M называются **верхними границами** E .

Аналогично ограничение снизу.

$E \subset \mathbb{R}, E \neq \emptyset$.

Для E — **огр. сверху** **супремум** ($\sup E$) — наименьшая из верхних границ E .

Для E — **огр. снизу** **инфимум** ($\inf E$) — наибольшая из нижних границ E .

1.29 Техническое описание супремума

Техническое описание супремума: $b = \sup E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E \ x \leq b \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in E \ b - \varepsilon < x \end{cases}$

1.30 Последовательность, стремящаяся к бесконечности

В \mathbb{R} :

1. $x_n \rightarrow +\infty \iff \forall E > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ x_n > E$
2. $x_n \rightarrow -\infty \iff \forall E \ \exists N \ \forall n > N \ x_n < E$
3. $x_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow |x_n| \rightarrow +\infty$

1.31 Компактное множество

$K \subset X$ — **компактное**, если для любого открытого покрытия этого множества \exists конечное подпокрытие $\Leftrightarrow \exists \alpha_1 \dots \alpha_n \ K \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$

1.32 Секвенциальная компактность

Секвенциально компактным называется множество $A \subset X : \forall$ посл. (x_n) точек A \exists подпосл. x_{n_k} , которая сходится к точке из A

1.33 Определения предела отображения (3 шт)

$(X, \rho^x), (Y, \rho^y) \quad D \subset X \quad f : D \rightarrow Y$

$a \in X, a$ — пред. точка множества $D, A \in Y$

Тогда $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ — **предел отображения**, если:

1. По Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : 0 < \rho^X(a, x) < \delta \quad \rho^Y(f(x), A) < \varepsilon$$

2. На языке окрестностей:

$$\forall U(A) \quad \exists V(a) \quad \forall x \in \dot{V}(a) \quad f(x) \in U(A)$$

3. По Гейне: $\forall (x_n) — посл. в X:$

(a) $x_n \rightarrow a$

(b) $x_n \in D$

(c) $x_n \neq a$

$f(x_n) \rightarrow A$

1.34 Определения пределов в $\overline{\mathbb{R}}$

Для $Y = \overline{\mathbb{R}}, -\infty < x < +\infty$:

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty : \quad \forall E \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X : 0 < |x - a| < \delta \quad f(x) > E$

2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty : \quad \forall E \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X : 0 < |x - a| < \delta \quad f(x) < E$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \quad \forall x \in X : x > \delta \quad |f(x) - c| < \varepsilon$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \quad \forall x \in X : x < -\delta \quad |f(x) - c| < \varepsilon$

1.35 Предел по множеству

$f : D \subset X \rightarrow Y, D_1 \subset D, x_0$ — пред. точка D_1

Тогда **предел по множеству** D_1 в точке x_0 — это $\lim_{x \rightarrow x_0} f|_{D_1}(x)$

1.36 Односторонние пределы

В \mathbb{R} одностор. = { левостор., правостор. }

Левосторонний предел $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = L$ — это $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f|_{D \cap (-\infty, x_0)}$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap D \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Аналогично правосторонний.

1.37 Непрерывное отображение

$f : D \subset X \rightarrow Y \quad x_0 \in D$

f — непрерывное в точке x_0 , если:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, либо x_0 — изолированная точка D
2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \quad \rho(x, x_0) < \delta \quad \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$
3. $\forall U(f(x_0)) \quad \exists V(x_0) \quad \forall x \in V(x_0) \cap D \quad f(x) \in U(f(x_0))$
4. По Гейне $\forall (x_n) : x_n \rightarrow x_0; x_n \in D \quad f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x_0)$

1.38 Непрерывность слева

f — непр. слева в x_0 , если $f|_{(-\infty, x_0] \cap D}$ — непрерывно в x_0

1.39 Разрыв, разрывы первого и второго рода

Если $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, либо $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ — точка разрыва.

Пусть $\exists f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$ и не все 3 числа равны: $f(x_0 - 0), f(x_0), f(x_0 + 0)$. Это **разрыв I рода (скачок)**.

Остальные точки разрыва — **разрыв II рода**.

Примечание.

$$f(x_0 - 0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$$

1.40 О большое, о маленькое

$f, g : D \subset X \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0$ — пр. точка D

Если $\exists V(x_0) \quad \exists \varphi : V(x_0) \cap D \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = g(x)\varphi(x)$ при $x \in V(x_0) \cap D$

1. φ — ограничена. Тогда говорят $f = O(g)$ при $x \rightarrow x_0$
“ f ограничена по сравнению с g при $x \rightarrow x_0$ ”
2. $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \quad f$ — беск. малая по отношению к g при $x \rightarrow x_0, f = o(g)$
3. $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1 \quad f$ и g экв. при $x \rightarrow x_0 \quad f \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g$

Примечание. О большое и о малое — разные вопросы в табличке.

1.41 Эквивалентные функции, таблица эквивалентных

Эквивалентные функции даны выше.

Таблица эквивалентных для $x \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}
\sin x &\sim x \\
\operatorname{sh} x &\sim x \\
\operatorname{tg} x &\sim x \\
\operatorname{arctg} x &\sim x \\
1 - \cos x &\sim \frac{x^2}{2} \\
\operatorname{ch} x - 1 &\sim \frac{x^2}{2} \\
e^x - 1 &\sim x \\
\ln(1+x) &\sim x \\
(1+x)^\alpha - 1 &\sim \alpha x \\
a^x - 1 &\sim x \ln a
\end{aligned}$$

1.42 Асимптотически равные (сравнимые) функции

В условиях прошлых определений $f = O(g), g = O(f) \Leftrightarrow f \asymp g$ — асимптотически сравнимы на множестве D , “величины одного порядка”.

1.43 Асимптотическое разложение

$g_n : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ x_0 — пред. точка D

$\forall n \quad g_{n+1}(x) = o(g_n), x \rightarrow x_0$

Пример. $g_n(x) = x^n, n = 0, 1, 2, \dots \quad x \rightarrow 0 \quad g_{n+1} = x g_n, x \rightarrow 0$

(g_n) называется шкала асимптотического разложения.

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$

Если $f(x) = c_0 g_0(x) + c_1 g_1(x) + \dots + c_n g_n(x) + o(g_n)$, то это асимптотическое разложение f по шкале (g_n)

1.44 Наклонная асимптота графика

Пусть $f(x) = Ax + B + o(1), x \rightarrow +\infty$

Прямая $y = Ax + B$ — наклонная асимптота к графику f при $x \rightarrow +\infty$

1.45 Путь в метрическом пространстве

Y — метр. пр-во

$\gamma : [a, b] \rightarrow Y$ — непр. на $[a, b]$

= путь в пространстве Y

1.46 Линейно связное множество

$E \subset Y$

E — линейно связное, если $\forall A, B \in E \exists$ путь $\gamma : [a, b] \rightarrow E$ такой, что:

- $\gamma(a) = A$
- $\gamma(b) = B$

1.47 Функция, дифференцируемая в точке и производная

$$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in \langle a, b \rangle$$

f — дифференцируема в точке x_0 , если $\exists A \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + o(x - x_0), x \rightarrow x_0$$

При этом A называется **производной** f в точке x_0

Примечание. Это два разных билета.

1.48 Счётное множество

A — счётное множество \Leftrightarrow равномощно \mathbb{N}

1.49 Мощность континуума

A равномощно $[0, 1] \Rightarrow A$ имеет мощность континуума.

1.50 Фундаментальная последовательность

x_n — фундаментальная, последовательность Коши, сходящаяся в себе, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m, n > N \quad \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$$

1.51 Полное метрическое пространство

X — метрическое пространство называется **полным**, если в нём любая фундаментальная последовательность — сходящаяся.

1.52 Классы функций $C^n([a, b])$

?

1.53 Производная n -го порядка

?

1.54 Многочлен Тейлора n -го порядка

Многочленом Тейлора n -той степени (*порядка*) функции f в точке a называется:

$$T_n(f, a)(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

1.55 Разложения Тейлора основных элементарных функций

Некоторые разложения по Тейлору:

$$\begin{aligned}
 e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
 \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\
 \cos x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \\
 \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
 (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n)
 \end{aligned}$$

2 Теоремы

2.1 Законы де Моргана

Пусть $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ - семейство множеств, Y - множество. Тогда:

1. $Y \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha)$ ①
2. $Y \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha)$ ②

Вариант 2:

1. $Y \cap \left(\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in A} (Y \cap X_\alpha)$
2. $Y \cap \left(\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in A} (Y \cap X_\alpha)$

Proof. Чтобы доказать, что $A = B$, можно доказать, что $A \subset B, B \subset A$. Воспользуемся этим методом, чтобы доказать ①

$\triangleleft x \in \text{левая часть } ①$

$x \in Y; x \notin \bigcup X_\alpha$

$x \in Y; x \notin \{y : \exists \alpha : y \in X_\alpha\}$

$x \in Y; \forall \alpha \in A : x \notin X_\alpha$

$\triangleleft x \in \text{правая часть } ①$

$\forall \alpha : x \notin Y \setminus X_\alpha$

Из чего левая и правая части эквивалентны. Аналогично доказывается ② □

2.2 Неравенство Коши-Буняковского, евклидова норма в \mathbb{R}^m

2.2.1 Неравенство Коши-Буняковского

$$\left(\sum a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum a_i^2 \right) \left(\sum b_i^2 \right)$$

2.2.2 Евклидова норма в \mathbb{R}^m

$$||x|| = \sqrt{\sum_i^m x_i^2}$$

Неравенство Коши-Буняковского следует из тождества Лагранжа. Докажем его:

Proof.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{(i,k) \in A \times B} (a_i b_k - a_k b_i)^2 = \\ & \frac{1}{2} \sum_{(i,k) \in A \times B} (a_i^2 b_k^2 + a_k^2 b_i^2 - 2a_i a_k b_i b_k) = \\ & \frac{1}{2} \sum_{(i,k) \in A \times B} a_i^2 b_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{(i,k) \in A \times B} a_k^2 b_i^2 - \sum_{(i,k) \in A \times B} a_i b_i a_k b_k = \\ & \frac{1}{2} \sum_{(i,k) \in A \times B} a_i^2 \sum_{(i,k) \in A \times B} b_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{(i,k) \in A \times B} a_i^2 \sum_{(i,k) \in A \times B} b_k^2 - \\ & \sum_{(i,k) \in A \times B} a_i b_i \sum_{(i,k) \in A \times B} a_k b_k = \\ & \sum_{(i,k) \in A \times B} a_i^2 \sum_{(i,k) \in A \times B} b_k^2 - \sum_{(i,k) \in A \times B} (a_i b_i)^2 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sum_{(i,k) \in A \times B} (a_i b_i)^2 = \sum_{(i,k) \in A \times B} a_i^2 \sum_{(i,k) \in A \times B} b_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{(i,k) \in A \times B} (a_i b_k - a_k b_i)^2 \geq \sum_{(i,k) \in A \times B} a_i^2 \sum_{(i,k) \in A \times B} b_k^2$$

□

2.3 Аксиома Архимеда. Плотность множества рациональных чисел в \mathbb{R}

2.3.1 Аксиома Архимеда

$$\forall x, y > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : nx > y$$

2.3.2 Плотность множества \mathbb{Q} в \mathbb{R}

$$\mathbb{Q} \text{ плотно в } \mathbb{R} \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b \quad (a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$$

В любом интервале в \mathbb{R} содержится число $\in \mathbb{Q}$.

Proof. \mathbb{Q} плотно в \mathbb{R} , т.е. $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b \quad (a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$

Возьмем $n \in \mathbb{N} : n > \frac{1}{b-a}$. Тогда $\frac{1}{n} < b - a$

$$q := \frac{[na] + 1}{n} \in \mathbb{Q}$$

$$q \leq \frac{na+1}{n} = a + \frac{1}{n} < a + (b-a) = b \Rightarrow q < b$$

$$q > \frac{na}{n} = a \Rightarrow q > a$$

□

2.4 Неравенство Бернулли

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad x \geq -1, n \in \mathbb{N}$$

$$(1+x)^n \geq 1+nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 \quad x > 0, n \in \mathbb{N} \text{ — более сложная версия}$$

Proof. База: $n = 1 : (1+x)^1 \geq 1+x$

Переход: Дано неравенство $(1+x)^n \geq 1+nx$, оно верно при каком-то n . Докажем, что $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x + nx^2 \geq 1+(n+1)x$$

□

2.5 Единственность предела и ограниченность сходящейся последовательности

(X, ρ) — метрическое пр-во, $a, b \in X$, (x_n) — послед. в X , $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b$, тогда $a = b$

Proof.

Докажем от противного — пусть $a \neq b$. Возьмем $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\rho(a, b)$

$$\exists N(\varepsilon) \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad \rho(x_n, a) < \varepsilon$$

$$\exists K(\varepsilon) \quad \forall n > K(\varepsilon) \quad \rho(x_n, b) < \varepsilon$$

При $n > \max(N(\varepsilon), K(\varepsilon)) \quad \rho(a, b) \leq \rho(a, x_n) + \rho(b, x_n) < 2\varepsilon < \rho(a, b)$ — противоречие

□

2.6 Теорема о предельном переходе в неравенствах для последовательностей и для функций

2.6.1 Для последовательностей

Если $(x_n), (y_n)$ — вещественные последовательности $x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b, \exists N \quad \forall n > N \quad x_n \leq y_n$, тогда $a \leq b$.

2.6.2 Для функций

Если $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$, a — предельная точка X , и $\forall x \in X \quad f(x) \leq g(x)$. Тогда $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Proof.

Докажем от противного. Пусть $a > b, 0 < \varepsilon < \frac{a-b}{2}$.

$$\exists N(\varepsilon) \quad \forall n > N \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

$$\exists K(\varepsilon) \quad \forall n > K \quad b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon$$

При $n > \max(N, K) \quad y_n < b + \varepsilon < a - \varepsilon < x_n$ — противоречие

□

Proof. По Гейне.

$\forall (x_n) \rightarrow a, x_n \in X, x_n \neq a$:

$$f(x_n) \rightarrow A, g(x_n) \rightarrow B, \forall x \ f(x) \leq g(x) \Rightarrow f(x_n) \leq g(x_n) \Rightarrow A \leq B$$

□

2.7 Теорема о двух городских

Если $(x_n), (y_n), (z_n)$ - вещ. посл., $\forall n \ x_n \leq y_n \leq z_n, \lim x_n = \lim z_n = a$, тогда $\exists \lim y_n = a$

Proof.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists K \ \forall n > K \ a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 = \max(N, K) \ \forall n > N_0 \ a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon$$

По определению $\lim y_n = a$

□

2.8 Бесконечно малая последовательность

Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную — бесконечная последовательность, т.е. (x_n) — беск. малая, (y_n) — ограничена $\Rightarrow x_n y_n$ — беск. малая

Proof. Возьмём K такое, что $\forall n \ |y_n| \leq K$.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ |x_n| \leq \frac{\varepsilon}{K}$$

$$|x_n y_n| \leq \frac{\varepsilon}{K} K = \varepsilon \Rightarrow x_n y_n \rightarrow 0$$

□

2.9 Теорема об арифметических свойствах предела последовательности в нормированном пространстве и в \mathbb{R}

Об арифметических свойствах предела в нормированном пространстве.

Если $(X, \|\cdot\|)$ — норм. пр-во, $(x_n), (y_n)$ — посл. в X , λ_n — посл. скаляров, и $x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0, \lambda_n \rightarrow \lambda_0$, тогда:

$$1. \ x_n \pm y_n \rightarrow x_0 \pm y_0$$

$$2. \ \lambda_n x_n \rightarrow \lambda_0 x_0$$

$$3. \ \|x_n\| \rightarrow \|x_0\|$$

Proof. Это доказательство написано не по лекциям.

$$1. \ \forall \varepsilon \ \exists N_2 \ \forall n > N_1 \ \|x_n - x_0\| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon \ \exists N_2 \ \forall n > N_2 \ \|y_n - y_0\| < \varepsilon$$

$$N := \max(N_1, N_2)$$

$$\forall \varepsilon \ \forall n > N \ \|(x_n + y_n) - (x_0 + y_0)\| \leq \|x_n - x_0\| + \|y_n - y_0\| \leq 2\varepsilon$$

2. $\|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0 + \lambda_0 x_n - \lambda_0 x_n\| = \|(\lambda_n - \lambda_0)x_n + (x_n - x_0)\lambda_0\| \leq$
 $\|(\lambda_n - \lambda_0)x_n\| + \|(x_n - x_0)\lambda_0\| = \|x_n\| |\lambda_n - \lambda_0| + \|x_n - x_0\| |\lambda_0|$
 $|\lambda_n - \lambda_0|$ и $\|x_n - x_0\|$ — бесконечно малые, $\|x_n\|$ и $|\lambda_n|$ — ограниченные $\Rightarrow \|x_n\| |\lambda_n - \lambda_0| + \|x_n - x_0\| |\lambda_0|$ — бесконечно малая
3. $\| \|x_n\| - \|x_0\| \| \leq \|x_n - x_0\|$

□

Об арифметических свойствах пределов в \mathbb{R} .

Для $(x_n), (y_n)$ — вещ. посл., $\forall n \ y_n \neq 0, y_0 \neq 0$:

4. $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{x_0}{y_0}$

2.10 Неравенство Коши-Буняковского в линейном пространстве, норма, порожденная скалярным произведением

Для X — линейного пространства (над \mathbb{R}, \mathbb{C})

$$\forall x, y \in X \quad |\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

Proof. Возьмём $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

При $y = 0$ тривиально, пусть $y \neq 0$

$$0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle y, y \rangle$$

$$\lambda := -\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}, \bar{\lambda} = -\frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle}$$

$$0 \leq \langle x, x \rangle - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle y, x \rangle - \frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle x, y \rangle + \frac{\langle x, y \rangle \langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle}$$

$$0 \leq \langle x, x \rangle - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle y, x \rangle$$

$$\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle y, x \rangle \leq \langle x, x \rangle$$

$$\langle x, y \rangle \langle y, x \rangle \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

□

Если $(X, \|\cdot\|)$ — норм. пр-во, тогда $\rho(x, y) := \|x - y\|$ — метрика, порожденная нормой. Не все метрики порождены нормами, например $\rho = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$.

2.11 Леммы о непрерывности скалярного произведения и покомпонентной сходимости в \mathbb{R}^n

2.11.1 О покомпонентной сходимости в \mathbb{R}^m

О покомпонентной сходимости в \mathbb{R}^m

$(x^{(n)})$ — последовательность векторов в \mathbb{R}^m

в \mathbb{R}^m задано евклидово скалярное пространство и норма.

Тогда $(x^{(n)}) \rightarrow x \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad x_i^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_i$

Proof. Модуль координаты \leq нормы всего вектора:

$$|x_i^{(n)} - x_i| \leq \|x^{(n)} - x\| \leq \sqrt{m} \max_{1 \leq i \leq m} |x_i^{(n)} - x_i|$$

Первое неравенство доказывает \Rightarrow , второе неравенство доказывает \Leftarrow □

2.11.2 О непрерывности скалярного произведения

X - лн. пространство со скалярным произведением, $\|\cdot\|$ — норма, порожденная скалярным произведением.

Тогда $\forall (x_n) x_n \rightarrow x, \forall (y_n) y_n \rightarrow y, \quad \langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$

Proof.

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle + \langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| \leq |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle| + |\langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| \leq \\ &\leq |\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x, y \rangle| \leq \|x_n\| \cdot \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \cdot \|y\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

По теореме о двух городских чтд. □

2.12 Открытость открытого шара

$B(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) < r\}$ — открыт

Proof. $x_0 \in B(a, r)$

Докажем, что x_0 — внутренняя, т.е. $\exists U(x_0) \subset B(a, r)$

$k := r - \rho(a, x_0)$

Докажем, что $B(x_0, k) \subset B(a, r)$

$$\forall x \in B(x_0, k) \quad \rho(x, x_0) < k$$

$$\rho(a, x_0) + \rho(x, x_0) < r$$

$$\rho(x, a) \leq \rho(a, x_0) + \rho(x, x_0) < r$$

□

2.13 Теорема о свойствах открытых множеств

1. $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ - семейство открытых множеств в (X, ρ)

Тогда $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ - открыто в X .

2. G_1, G_2, \dots, G_n - открыто в X .

Тогда $\bigcap_{i=1}^n G_i$ - открыто в X .

Proof. 1. $x_0 \in \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$

$$\exists \alpha_0 : x_0 \in G_{\alpha_0}$$

G_{α_0} - открыто $\Rightarrow \exists U(x_0) \subset G_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow x_0$ - внутренняя точка $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow$

$\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ - открыто, т.к. в нём все точки внутренние.

2. $x_0 \in \bigcap_{\alpha \in A} G_\alpha$

$$\forall \alpha \in A : x_0 \in G_\alpha$$

$\forall \alpha \in A$ G_α - открыто $\Rightarrow \exists B_\alpha(x_0, r_\alpha) \subset G_\alpha$

$\forall x_0 : \exists U(x_0) = B(x_0, \min_{\alpha} r_\alpha) \subset \bigcap_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow x_0$ - внутренняя точка $\bigcap_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in A} G_\alpha$

- открыто, т.к. в нём все точки внутренние.

□

2.14 Теорема о связи открытых и замкнутых множеств, свойства замкнутых множеств

D - замкнуто $\Leftrightarrow D^c = X \setminus D$ (дополнение) - открыто.

Свойства:

1. $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ - замкн. в X

Тогда $\bigcap F_\alpha$ - замкн. в X

2. $F_1 \dots F_n$ - замкн. в X

Тогда $\bigcup F_i$ - замкн. в X

Proof. Докажем \Rightarrow : D - замкн. $\Rightarrow^? X \setminus D$

$x \in X \setminus D \Rightarrow x$ - не пред. точка D , т.к. D содержит все свои пред. точки и $x \notin D$

$\Rightarrow \exists r : B(x, r) \subset X \setminus D$

Докажем \Leftarrow : $X \setminus D$ - откр., D - замкн.?, т.е. $\forall x \in \{\text{пр.точки } D\} \quad ?x \in D$

Если $x \in D$ - тривиально.

$x \notin D \quad x \in X \setminus D$

$\exists U(x) \subset X \setminus D \Rightarrow x$ - не пред. точка

□

Proof. 1. $(\bigcap F_\alpha)^c = X \setminus (\bigcap F_\alpha) = \bigcup (X \setminus F_\alpha)$

F_α - закрыто $\Rightarrow X \setminus F_\alpha$ - открыто $\Rightarrow \bigcup (X \setminus F_\alpha)$ - открыто

$(\bigcap F_\alpha)^c$ - открыто $\Rightarrow \bigcap F_\alpha$ - закрыто

$$2. (\bigcup F_i)^c = \bigcap (F_i)^c$$

$\bigcap (F_i)^c$ – открыто, т.к. F_i^c – открыто $\Rightarrow (\bigcup F_i)^c$ – открыто $\Rightarrow \bigcup F_i$ – закрыто

□

2.15 Теорема об арифметических свойствах предела последовательности (в $\overline{\mathbb{R}}$). Неопределенности

2.15.1 Теорема об арифметических свойствах предела последовательности (в $\overline{\mathbb{R}}$)

$(x_n), (y_n)$ – вещ., $x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b, \quad a, b \in \overline{\mathbb{R}}$

Тогда:

1. $x_n \pm y_n \rightarrow a \pm b$
2. $x_n y_n \rightarrow ab$, если $\forall n \ y_n \neq 0; b \neq 0$
3. $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{a}{b}$

При условии, что выражения в правых частях имеют смысл.

2.15.2 Неопределенности

- $\begin{cases} x_n \rightarrow +\infty \\ y_n \rightarrow -\infty \end{cases} \Rightarrow x_n + y_n \rightarrow ?$
- $\begin{cases} x_n \rightarrow n + \sin n \\ y_n \rightarrow -n \end{cases} \Rightarrow x_n + y_n = \sin n, \nexists \lim$
- $\begin{cases} x_n \rightarrow n \\ y_n \rightarrow -\sqrt{n} \end{cases} \Rightarrow x_n + y_n = n - \sqrt{n} \rightarrow +\infty$
- $\begin{cases} x_n \rightarrow 0 \\ y_n \rightarrow a \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow 0$

2.16 Теорема Кантора о стягивающихся отрезках

Дана последовательность отрезков $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$

Длины отрезков $\rightarrow 0$, т.е. $(b_n - a_n) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$

Тогда $\exists! c \in \mathbb{R} \quad \bigcap_{k=1}^{+\infty} [a_k, b_k] = \{c\}$ и при этом $a_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} c, b_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} c$

Proof. Берем из аксиомы Кантора $c \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} [a_k, b_k]$

$$\begin{cases} 0 \leq b_n - c \leq b_n - a_n \\ 0 \leq c - a_n \leq b_n - a_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_n - c \rightarrow 0 \\ c - a_n \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_n \rightarrow c \\ a_n \rightarrow c \end{cases}$$

По теореме об единственности предела c однозначно определено.

□

2.17 Теорема о существовании супремума

$E \subset \mathbb{R}, E \neq \emptyset, E$ — огр. сверху.

Тогда $\exists \sup E \in \mathbb{R}$

Proof. Строим систему вложенных отрезков $[a_k, b_k]$ со свойствами:

1. b_k — верхняя граница E
2. $[a_k, b_k]$ содержит точки E .

a_1 — берём любую точку E , b_1 — любая верхняя граница.

Границы следующего отрезка найдём бинарным делением (математики это называют половинное деление).

Если $\frac{a_1+b_1}{2}$ — верхняя граница E , $[a_2, b_2] := [a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$.

Иначе на $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ есть элементы E , $[a_2, b_2] := [\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$

Длина $[a_k, b_k] = b_k - a_k = \frac{b_1-a_1}{2^{k-1}} \rightarrow 0$

$\exists! c \in \bigcap [a_k, b_k]$

Проверим: $c = \sup E$

1. $\forall x \in E \quad \forall n \quad x \leq b_n$
2. $\forall \varepsilon > 0 \quad c - \varepsilon$ — не верхн. гран.

Доказательство 1: $x \in E, b_n \rightarrow c \Rightarrow x \leq b_n$

Доказательство 2: $\forall \varepsilon > 0$ возьмём $n : \frac{b_1-a_1}{2^n} < \varepsilon$. $c - \varepsilon < a_n \Leftrightarrow c - a_n < \varepsilon \Leftrightarrow c - a_n < b_n - a_n < \varepsilon$ □

2.18 Лемма о свойствах супремума

О свойствах \sup, \inf

1. $\emptyset \neq D \subset E \subset \mathbb{R} \quad \sup D \leq \sup E$
2. $\lambda \in \mathbb{R} \quad (\lambda E = \{\lambda x, x \in E\})$
Пусть $\lambda > 0$, тогда $\sup \lambda E = \lambda \sup E$
3. $\sup(-E) = -\inf E$

Proof. 1. Множество верхних границ $E \subset$ множество верхних границ D .

2. $\lambda \cdot$ Множество верхних границ $E =$ множество верхних границ λE

3. Множество верхних границ $-E = -$ множество верхних границ E □

2.19 Теорема о пределе монотонной последовательности

1. x_n — вещ. посл., огр. сверху, возрастает. $\Rightarrow \exists \lim x_n \in \mathbb{R}$
2. x_n — убывает, огр. снизу. $\Rightarrow \exists \lim x_n \in \mathbb{R}$
3. x_n — монотонна, огр. $\Rightarrow \exists \lim x_n \in \mathbb{R}$

Proof. Достаточно доказать 1.

Проверяем $\lim x_n = \sup x_n = M \in \mathbb{R}$

По определению \sup :

$$\forall \varepsilon \exists N \quad M - \varepsilon < x_N$$

$$x_N \leq x_{N+1} \leq x_{N+2} \leq x_{N+3} \dots \leq M$$

$$\forall \varepsilon \exists N \quad \forall n > N \quad M - \varepsilon < x_n \leq M < M + \varepsilon$$

По определению $M = \lim x_n$

□

2.20 Определение числа e , соответствующий замечательный предел

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

2.21 Теорема об открытых и замкнутых множествах в пространстве и в подпространстве

$Y \subset X$, X — метр.п., Y — подпространство, $D \subset Y \subset X$

1. D — откр. в $Y \Leftrightarrow \exists G$ — откр. в $X \quad D = G \cap Y$
2. D — замкн. в $Y \Leftrightarrow \exists F$ — замкн. в $X \quad D = F \cap Y$

Докажем 1.

Proof. Докажем “ \Rightarrow ”.

\forall точка D внутр. в Y

$\forall x \in D \exists r_x \quad B^Y(x, 2x) \subset D$

Очевидно $D = \bigcup_{x \in D} B^Y(x, 2x) \quad G := \bigcup_{x \in D} B^X(x, r_x)$ — откр. в X .

$$G \cap Y = \left(\bigcup_{x \in D} B^X(r, r_x)\right) \cap Y = \bigcup_{x \in D} B^Y(x, 2x) = D$$

Докажем “ \Leftarrow ”.

G — откр. в $X \quad D := G \cap Y \quad ? D$ — откр. в Y

$x \in D \quad ? x$ — внутр. точка D (в Y)

$x \in D \Rightarrow \exists B^X(x, r) \subset G \Rightarrow B^X(x, r) \cap Y = B^Y(x, r) \subset G \cap Y = D$

□

Докажем 2.

Proof. Докажем “ \Rightarrow ”

D — замкн. в $Y \Rightarrow D^c = Y \setminus D$ — откр. в Y

$\exists G$ — откр. в X , такое что $D^c = G \cap Y$

Тогда $G^c = X \setminus G$ — замкнуто в X , кроме того $D = G^c \cap Y$, т.к. $D^c = G \cap Y$

Возьмём в качестве F G^c .

Докажем “ \Leftarrow ”.

F — замкн. в X

$F \cap Y$ — замкн. в Y ?

$F^c = X \setminus F$ — откр. в X

$F^c \cap Y$ — откр. в Y

$Y \setminus (F^c \cap Y)$ — замкн. в Y

$Y \setminus (F^c \cap Y) \stackrel{?}{=} F \cap Y$

$Y \setminus ((X \setminus F) \cap Y) \stackrel{?}{=} F \cap Y$

Докажем это.

$$Y \cdot \overline{F \cap Y} = Y \cdot (\overline{F} \cap \overline{Y}) = YF + Y\overline{Y} = F \cap Y$$

□

2.22 Теорема о компактности в пространстве и в подпространстве

(X, ρ) — метрич. пространство, $Y \subset X$ — подпространство, $K \subset Y$

Тогда K — комп. в $Y \Leftrightarrow K$ — компактно в X .

Proof. Докажем “ \Rightarrow ”

K — комп. в $X \Leftrightarrow K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha, G_\alpha$ — откр. в X

Доказать: \exists кон. $\alpha_1 \dots \alpha_n \quad K \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} (G_\alpha \cap Y) \Rightarrow \exists \text{ кон. } \alpha_1 \dots \alpha_n : K \subset \bigcup_{i=1}^n (G_{\alpha_i} \cap Y)$$

Тогда $K \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$

Докажем “ \Leftarrow ”

Дано: K — комп. в X , доказать: K — комп. в Y .

$$K \in \bigcup_{\alpha \in A} O_{\alpha}, O_{\alpha} - \text{откр. в } Y$$

$$\exists G_{\alpha} : O_{\alpha} = G_{\alpha} \cap Y (G_{\alpha} - \text{откр. в } Y)$$

По двум выражениям выше:

$$\exists K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_{\alpha}$$

Надо дописать доказательство

□

2.23 Лемма о вложенных параллелепипедах

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall i = 1 \dots m \ a_i \leq x_i \leq b_i\}$ — параллелепипед.

$[a^1, b^1] \supset [a^2, b^2] \supset \dots$ — бесконечная последовательность параллелепипедов.

Тогда $\bigcap_{i=1}^{+\infty} [a^i, b^i] \neq \emptyset$

Если $\text{diam}[a^n, b^n] = \|b^n - a^n\| \rightarrow 0$, тогда $\exists! c \in \bigcap_{i=1}^{\infty} [a^i, b^i]$

Proof. $\forall i = 1 \dots m \ [a_i^1, b_i^1] \supset [a_i^2, b_i^2] \supset \dots \ \exists c_i \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_i^n, b_i^n]. \ c = (c_1 \dots c_m)$ — общая точка всех параллелепипедов.

$|a_i^n - b_i^n| \leq \|a^n - b^n\| \rightarrow 0 \Rightarrow_{\text{т. Кантора}} \exists! c_i \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_i^n, b_i^n] \Rightarrow \exists! c = (c_1 \dots c_m)$

□

2.24 Компактность замкнутого параллелепипеда в \mathbb{R}^m

$[a, b]$ — компактное множество в \mathbb{R}^m

Proof. Докажем, что \exists кон. $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n) : [a, b] \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$

Допустим, что не \exists

$[a^1, b^1] := [a, b] \Rightarrow [a^1, b^1]$ нельзя покрыть кон. набором

$[a^2, b^2] :=$ делим $[a^1, b^1]$ на 2^m частей, берем любую “часть”, которую нельзя покрыть конечным набором G_{α}

\vdots

$$\text{diam} = [a^n, b^n] = \frac{1}{2} \text{diam}[a^{n-1}, b^{n-1}] = \frac{1}{2^{n-1}} \text{diam}[a^1, b^1]$$

$$\exists c \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a^n, b^n]$$

$$c \in [a, b] \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_{\alpha}$$

$$\exists \alpha_0 \quad c \in G_{\alpha_0} - \text{откр.}$$

$$\exists U_\varepsilon(c) \subset G_{\alpha_0}$$

$$\exists n \quad \text{diam}[a^n, b^n] \ll \varepsilon$$

$$\text{и тогда } [a^n, b^n] \subset U_\varepsilon(c) \subset G_{\alpha_0}$$

□

2.25 Теорема о характеристике компактов в \mathbb{R}^m

$K \subset \mathbb{R}^m$. Эквивалентны следующие утверждения:

1. K — замкнуто и ограничено
2. K — компактно
3. K — секвенциально компактно

Proof. Докажем $1 \Rightarrow 2$

K — огр. $\Rightarrow K$ содержится в $[a, b]$

K — замкн. в $\mathbb{R}^m \Rightarrow K$ — замкн. в $[a, b]$

Т.к. $[a, b]$ — комп., по простейшему свойству компактов K — комп. □

Proof. Докажем $2 \Rightarrow 3$

$\forall (x_n)$ — точки из K .

?сходящаяся последовательность

Если множество значений $D = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ — конечно, то \exists сход. подпол. очевидно.

Пусть D — бесконечно

Если D имеет предельную точку, то $x_{m_k} \rightarrow a$

Если D — бесконечно и не имеет предельных точек, $K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, \varepsilon_x)$, радиус такой, что в этом шаре нет точек D , кроме x (его может тоже не быть) □

Proof. Продолжим доказательство из прошлой лекции, докажем, $3 \Rightarrow 1$.

Рассмотрим секвенциально компактное K и пусть K — не ограничено. (случай ограниченного множества тривиален)

$$\exists x_n : \|x_n\| \rightarrow +\infty$$

Тогда в этой последовательности нет сходящейся последовательности, т.к. любая $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$ ограничена. Противоречие $\Rightarrow K$ — не компактно.

Таким образом, если K — секвенциально компактно, то K ограничено.

Докажем замкнутость K .

Пусть \exists предельная точка $x_0 \notin K$

$$\exists x_n \rightarrow x_0$$

По секвенциальности \exists подпоследовательность $x_{n_k} \rightarrow a \in K$. □

2.26 Эквивалентность определений Гейне и Коши

Определение Коши \Leftrightarrow определение Гейне.

Proof. Докажем “ \Rightarrow ”.

Если дана (x_n) , удовл. определению Коши, доказать

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad 0 < \rho(f(x_n), A) < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \quad 0 < \rho(x, a) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), A) < \varepsilon$$

$$\text{Для этого } \delta \exists N \forall n > N \rho(x_n, a) < \delta$$

, где $x_n \in D, x_n \neq a$

$$\Rightarrow \rho(f(x_n), A) < \varepsilon$$

□

Proof. Докажем “ \Leftarrow ”

Пусть определение Коши не выполняется.

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in D \quad 0 < \rho(x, a) < \delta \quad \rho(f(x), A) \geq \varepsilon$$

$$\delta := \frac{1}{n} \quad \exists x_n \in D \quad 0 < \rho(x_n, a) < \frac{1}{n} \quad \rho(f(x_n), A) \geq \varepsilon$$

Построена последовательность $(x_n) : x_n \in D, x_n \neq a, \rho(x_n, a) < \frac{1}{n} \Rightarrow \rho(x_n, a) \rightarrow 0 \Rightarrow x_n \rightarrow a$. Кроме того, $\rho(f(x_n), A) \geq \varepsilon$ — противоречит утверждению Гейне, что $x_n \rightarrow A$. □

2.27 Единственность предела, локальная ограниченность отображения, имеющего предел, теорема о стабилизации знака

2.27.1 Единственность предела

о единственности предела

Proof. По Гейне. $\forall (x_n) :$

- $x_n \rightarrow a$
- $x_n \in D$
- $x_n \neq a$

$$f(x_n) \rightarrow A, f(x_n) \rightarrow B \xRightarrow{\text{теор. о ед. предела посл.}} A = B$$

□

2.27.2 Локальная ограниченность отображения, имеющего предел

О локальной ограниченности отображения, имеющего предел.

$$f : D \subset X \rightarrow Y, a - \text{пред. точка } D, \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

Тогда $\exists V(a) : f - \text{огр. на } V(a) \cap D$, т.е. $f(V(a) \cap D)$ содержится в некотором шаре.

Proof. Для $\varepsilon = 1 \exists V(a) \forall x \in V(a) \cap D \quad f(x) \in U_\varepsilon(A)$

Для $x \in V(a) \cap D \quad f(x) \in U_{\tilde{\varepsilon}}(A)$, где $\tilde{\varepsilon} = \max(\varepsilon, \rho(A, f(a)) + 1)$

□

2.27.3 Теорема о стабилизации знака

О стабилизации знака.

$f : D \subset X \rightarrow Y$, a — пред. точка D , $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$

Пусть $B \in Y, B \neq A$

Тогда $\exists V(a) \forall x \in \dot{V}(a) \cap D \ f(x) \neq B$

Proof. Для

$$0 < \varepsilon < \rho(A, B) \ \exists V(a) \ \forall x \in \dot{V}(a) \cap D \ f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

$U_\varepsilon(A)$ не содержит B . □

2.28 Арифметические свойства пределов отображений. Формулировка для \mathbb{R}

$f, g : D \subset X \rightarrow Y$, X — метрич. пространство, Y — норм. пространство над \mathbb{R} , a — пред. точка D

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$$

$$\lambda : D \rightarrow \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow a} \lambda(x) = \lambda_0$$

Тогда:

$$1. \ \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm g(x) \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm g(x) = A \pm B$$

$$2. \ \lim_{x \rightarrow a} \lambda(x) f(x) = \lambda_0 A$$

$$3. \ \lim_{x \rightarrow a} ||f(x)|| = ||A||$$

4. Для случая $Y = \mathbb{R}$ и для $B \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$

$\frac{f}{g}$ задано на множестве $D' = D \setminus \{x : g(x) = 0\}$

a — пр. точка D' по теореме о стабилизации знака $\exists V(a) \ \forall x \in V(a) \cap D \ g(x)$ — того же знака, что и B , т.е. $g(x) \neq 0$

$$\dot{V}(a) \cap D' = \dot{V}(a) \cap D \Rightarrow a \text{ — пред. точка для } D'$$

Proof. По Гейне. $\forall (x_n) :$

- $x_n \rightarrow a$
- $x_n \in D$
- $x_n \neq a$

$f(x_n) + g(x_n) \rightarrow^? A + B$ верно по теореме последовательности.

Аналогично прочие пункты, кроме 4.

$$f(x_n) \rightarrow A$$

$$g(x_n) \rightarrow B \neq 0 \Rightarrow \exists n_0 \ \forall n > n_0 \ g(x_n) \neq 0$$

$\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ корректно задано при $n > n_0$. □

Если $Y = \overline{\mathbb{R}}$, можно “разрешить” случай $A, B = \pm\infty$ Тогда 3. тривиально, 1., 2. и 4. верно, если выражения $A \pm B, \lambda_0 A, \frac{A}{B}$ корректны.

Докажем 1. как в теореме об арифметических свойствах последовательности.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall E_1 \exists \delta_1 > 0 \forall x \in D \cap V_{\delta_1}(a) f(x) > E_1 \quad \forall E_2 \exists \delta_2 > 0 \forall x \in D \cap V_{\delta_2}(a) g(x) > E_2$$

2.29 Принцип выбора Больцано–Вейерштрасса

Если в \mathbb{R}^m (x_n) — ограниченная последовательность, то у неё существует сходящаяся подпоследовательность.

Proof. x_n — огр. $\Rightarrow x_n$ содержится в замкнутом кубе. Так как куб секвенциально компактен, x_{n_k} сходится. \square

2.30 Сходимость в себе и ее свойства

x_n — фундаментальная, последовательность Коши, сходящаяся в себе, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$$

1. x_n — фунд. $\Rightarrow x_n$ — ограничена
2. x_n — фунд; $\exists x_{n_k}$ — сходящ. Тогда x_n сходится.

Proof. 1. $\varepsilon := 1 \exists N \forall m, n := N + 1 > N \rho(x_m, x_{N+1}) < 1$

$$R := \max(1; \rho(x_1, x_{N+1}), \dots, \rho(x_N, x_{N+1}))$$

$$\forall n \ x_n \in B(x_{N+1}, R) \Rightarrow x_n \text{ сходится.}$$

$$2. \begin{cases} \varepsilon > 0 \exists K \forall k > K \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon \\ \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \rho(x_m, x_n) < \varepsilon \end{cases} \stackrel{?}{\Rightarrow} x_n \rightarrow a$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{N} := \max(N, K) \text{ при } k > \tilde{N} \text{ выполняется } k > K, \text{ значит } n_k \geq k > K \Rightarrow \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon.$$

$$\text{При } n > \tilde{N} \geq N \ m := n_k > \tilde{N} \geq N \Rightarrow \rho(x_n, x_{n_k}) < \varepsilon$$

$$\text{Итого } \forall n > \tilde{N} \ \rho(x_n, a) \leq \rho(x_n, x_{n_k}) < 2\varepsilon$$

\square

2.31 Критерий Коши для последовательностей и отображений

2.31.1 Для последовательностей

1. В любом метрическом пространстве x_n — сходящ. $\Rightarrow x_n$ — фунд.
2. В \mathbb{R}^m x_n — фунд. $\Rightarrow x_n$ — сходящ.

Proof. 1. $x_n \rightarrow a \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \rho(x_n, a) < \varepsilon$

$$x_n \rightarrow a \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N \rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_n, a) + \rho(x_m, a) < 2\varepsilon$$

2. x_n — фунд. $\Rightarrow x_n$ — огр. $\xRightarrow{\text{Б.-В.}} \exists x_{n_k}$ — сходящ.

$$\begin{cases} \exists x_{n_k} \text{ — сходящ.} \\ x_n \text{ — фунд.} \end{cases} \Rightarrow x_n \text{ — сходящ.}$$

□

2.31.2 Для отображений

$f : D \subset X \rightarrow Y$, a — пр. точка D , Y — полное метрическое пространство.

Тогда

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \in Y \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in D \quad \rho(x_1, a) < \delta; \rho(x_2, a) < \delta \quad \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

Proof. “ \Rightarrow ” как для последовательностей.

Докажем “ \Leftarrow ” по Гейне.

Заметим, что последовательность $f(x_n)$ — фундаментальная, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \quad \rho(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$$

$$x_n \rightarrow a \Rightarrow \exists N \forall n > N \quad \rho(x_n, a) < \delta$$

$$\forall m, n > N \quad \rho(x_n, a) < \delta; \rho(x_m, a) < \delta \xRightarrow{\text{Фунд.}} \rho(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$$

□

2.32 Теорема о пределе монотонной функции

$f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, монотонная, $a \in \overline{\mathbb{R}}$

$D_1 := D \cap (-\infty, a)$, a — пред. точка D_1 . Тогда:

1. f — возрастает, огр. сверху D_1 . Тогда \exists конечный предел $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$
2. f — убывает, огр. снизу D_1 . Тогда \exists конечный предел $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$

Proof. 1. $L := \sup_{D_1} f \quad L \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$

$\forall \varepsilon > 0 \quad L - \varepsilon$ — не верхн. граница для $\{f(x) : x \in D_1\}$ $\exists x_1 : L_\varepsilon < f(x_1)$.

Тогда при $x \in (x_1, a) \cap D_1 \quad L - \varepsilon < f(x_1) \leq f(x) \leq L$

$\exists \delta := |x_1 - a| \quad \forall x : x \in (x_1, a) \quad L_\varepsilon \leq f(x) < L + \varepsilon$

Аналогично доказывается пункт 2.

□

2.33 Свойства непрерывных отображений: арифметические, стабилизация знака, композиция

2.33.1 Арифметические

1. $f, g : D \subset X \rightarrow Y$ $x_0 \in D$ (Y — норм. пространство)

f, g — непр. в D ; $\lambda : D \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ — непр. x_0

Тогда $f \pm g, \|f\|, \lambda f$ — непр. x_0

2. $f, g : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ $x_0 \in D$

f, g — непр. в x_0

Тогда $f \pm g, |f|, fg$ — непр. в x_0

$g(x_0) \neq 0$, тогда $\frac{f}{g}$ — непр. x_0

Доказательство отсутствует

2.33.2 Стабилизация знака

Если функция $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то:

$$\exists V(x_0) : \forall x \in V(x_0) \cap D \quad \text{sign } f(x) = \text{sign } f(x_0)$$

Proof. Докажем для $f(x_0) > 0$.

Докажем от противного:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in U_{x_0} \left(\frac{1}{n} \right) \cap D : g(x_n) \leq 0$$

Противоречие. □

2.33.3 Непрерывность композиции непрерывных отображений

$f : D \subset X \rightarrow Y$ $g : E \subset Y \rightarrow Z$ $f(D) \subset E$

f — непр. в $x_0 \in D$, g — непр. в $f(x_0)$

Тогда $g \circ f$ непр. в x_0

Proof. По Гейне.

Проверяем, что $\forall (x_n) : x_n \in D, x_n \rightarrow x_0 \quad g(f(x_n)) \xrightarrow{?} g(f(x_0))$

$$y_n := f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x_0)$$

$y_n \in E$

$$\Rightarrow g(y_n) \rightarrow g(y_0)$$

□