

1 Определения

1.1 Локальный максимум, минимум, экстремум

Определение. $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in E$ — локальный максимум функции, если

$$\exists U(x_0) \quad \forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \leq f(x_0)$$

Аналогично определяется минимум.

Определение. Экстремум — точка минимума либо максимума.

1.2 ! Первообразная, неопределенный интеграл

$$F, f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$$

F — первообразная f на $\langle a, b \rangle$

$$\forall x \in \langle a, b \rangle \quad F'(x) = f(x)$$

Неопределенный интеграл f на $\langle a, b \rangle$ — множество всех первообразных f :

$$\{F + c, c \in \mathbb{R}\}, \text{ где } F \text{ — первообразная}$$

Обозначается $\int f = F + c$ или $\int f(x)dx$

1.3 Теорема о существовании первообразной

$f \in C^0(\langle a, b \rangle)$ тогда у f существует первообразная.

Теорема о существовании первообразной — следствие теоремы Барроу.

1.4 ! Таблица первообразных

$$\int x^n dx = \frac{x^{(n+1)}}{n+1} + C, n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C \text{ — длинный логарифм}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

1.5 Равномерная непрерывность

$f : \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **равномерно непрерывна** на $\langle a, b \rangle$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle : |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Или для метрического пространства:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \rho(x_1, x_2) < \delta \implies \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

Отличие от непрерывности на отрезке в том, что δ зависит только от ε и подходит для всех x_1, x_2 .

1.6 Площадь, аддитивность площади, ослабленная аддитивность

\mathcal{E} — множество всех ограниченных фигур в \mathbb{R}^2 (“фигура” = подмножество \mathbb{R}^2)

Площадь это $\sigma : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$, такое что:

1. $A \in \mathcal{E} \implies A = A_1 \sqcup A_2 \implies \sigma A = \sigma A_1 + \sigma A_2$ (конечная аддитивность)
2. $\sigma([a, b] \times [c, d]) = (d - c)(b - a)$

\sqcup — дизъюнктное объединение; если $x \in A_1$ и $x \in A_2$, то x “дважды \in ” $A_1 \sqcup A_2$

Ослабленная площадь $\sigma : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$:

1. Монотонна: $E \subset D \implies \sigma E \leq \sigma D$
2. Нормирована
3. Ослабленная аддитивность: $E \in \mathcal{E} \implies E = E_1 \cup E_2 \implies E_1 \cap E_2$ — вертикальный отрезок, E_1 и E_2 лежат каждый в своей полуплоскости относительно этого отрезка $\implies \sigma E = \sigma E_1 + \sigma E_2$

Почему отрезок вертикальный? В конспекте СПбГУ допускается горизонтальный.

1.7 ! Определенный интеграл

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; f \geq 0$

Под графиком $(\Pi)(f, [a, b]) = \{(x, y) : x \in [a, b]; 0 \leq y \leq f(x)\}$

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, непр.

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x) dx := \sigma \Pi(f_+, [a, b]) - \sigma \Pi(f_-, [a, b])$$

1.8 Положительная и отрицательная срезки

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

$f_+ := \max(f, 0)$ — положительная срезка

$f_- := \max(-f, 0)$ — отрицательная срезка

1.9 Среднее значение функции на промежутке

Среднее значение функции на промежутке:

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

1.10 Кусочно-непрерывная функция

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, кусочно непрерывна

f — непр. на $[a, b]$ за исключением конечного числа точек, в которых разрывы I рода

Пример. $f(x) = [x], x \in [0, 2020]$

1.11 Почти первообразная

$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — почти первообразная кусочно непрерывной функции f :

F — непр. и $\exists F'(x) = f(x)$ всюду, кроме конечного числа точек

Пример. $f = \operatorname{sign} x, x \in [-1, 1]$

$F := |x|$

1.12 Функция промежутка, аддитивная функция промежутка

$\operatorname{Segm}\langle a, b \rangle = \{[p, q] : [p, q] \subset \langle a, b \rangle\}$ — множество всевозм. отрезков, лежащих в $\langle a, b \rangle$

Функция промежутка $\Phi : \operatorname{Segm}\langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

Аддитивная функция промежутка: Φ — функция промежутка и

$$\forall [p, q] \in \operatorname{Segm}\langle a, b \rangle \quad \forall r : p < r < q \quad \Phi([p, q]) = \Phi([p, r]) + \Phi([r, q])$$

1.13 Плотность аддитивной функции промежутка

Плотность аддитивной функции промежутка: $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — плотность Φ , если:

$$\forall \delta \in \operatorname{Segm}\langle a, b \rangle \quad \inf_{x \in \delta} f(x) \cdot \operatorname{len}_\delta \leq \Phi(\delta) \leq \sup f \cdot \operatorname{len}_\delta$$

1.14 Выпуклая функция

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая

$$\forall x, y \in \langle a, b \rangle \quad \forall \alpha \in [0, 1] \quad f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

Примечание. f — выпуклая \Leftrightarrow всякая хорда графика f расположена “выше” графика (нестрого выше) $\Leftrightarrow \operatorname{НГ}(f, \langle a, b \rangle) \setminus \{(x, y) : x \in \langle a, b \rangle \quad y \geq f(x)\}$

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — строго выпуклая

$$\forall x, y \in \langle a, b \rangle \quad \forall \alpha \in (0, 1) \quad f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

1.15 Выпуклое множество в \mathbb{R}^m

$A \subset \mathbb{R}^m$ — выпуклое множество в \mathbb{R}^m , если

$$\forall x, y \in A, \alpha \in [0, 1] \quad \alpha x + (1 - \alpha)y \in A$$

Это определение с вики

1.16 Надграфик

Надграфик функции $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ это множество $\{(x, y) \mid x \in \langle a, b \rangle, y \geq f(x)\}$

1.17 Опорная прямая

$A \subset \mathbb{R}^2$ — вып. $l \subset \mathbb{R}^2$ — прямая

l — опорная прямая к A , если:

1. A содержится в одной полуплоскости относительно l
2. $l \cap A \neq \emptyset$

1.18 Гладкий путь, вектор скорости, носитель пути

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — непр.

$\gamma(a)$ — начало; $\gamma(b)$ — конец

$$\gamma : t \mapsto \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ \vdots \\ \gamma_m(t) \end{pmatrix}; \gamma_i \text{ — коорд. функции}$$

Если все $\gamma_i \in C^1[a, b]$, то γ — гладкий путь.

$C_\gamma := \gamma([a, b])$ — носитель пути.

Вектор скорости:

$$\gamma'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\gamma(t + \Delta t) - \gamma(t)}{\Delta t} = \lim \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1(t + \Delta t) - \gamma_1(t)}{\Delta t} \\ \vdots \\ \frac{\gamma_m(t + \Delta t) - \gamma_m(t)}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \gamma'_2(t) \\ \vdots \\ \gamma'_m(t) \end{pmatrix}$$

1.19 Длина гладкого пути

Длина пути — функция l , заданная на множестве гладких путей в \mathbb{R}^m , такая что:

1. $l \geq 0$
2. l — аддитивна: $\forall [a, b] \quad \forall \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \forall c \in (a, b) \quad l(\gamma) = l(\gamma|_{[a, c]}) + l(\gamma|_{[c, b]})$
3. $\forall \gamma, \tilde{\gamma}$ — гладкие пути, $C_\gamma, C_{\tilde{\gamma}}$ — носители путей
Если $\exists T : C_\gamma \rightarrow C_{\tilde{\gamma}}$ — сжатие: $(\forall M, M' \quad \rho(T(M), T(M')) \leq \rho(M, M'))$, тогда $l(\tilde{\gamma}) \leq l(\gamma)$
4. Нормировка: γ — гладкий путь, $\gamma(t) = vt + u$; $u, v \in \mathbb{R}^m$:

$$l(\gamma) = \rho(\gamma(a), \gamma(b))$$

1.20 Формулы для длины пути: в \mathbb{R}^m , в полярных координатах, длина графика

1.20.1 В \mathbb{R}^m

$$\gamma \in C^1([a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m)$$

$$\text{Тогда } l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

1.20.2 В полярных координатах

Длина кривой $r = r(\varphi)$ в полярных координатах, $\varphi \in [\alpha, \beta]$

$$x = r(\varphi) \cos \varphi \quad y = r(\varphi) \sin \varphi$$

$$\gamma'(\varphi) = \begin{pmatrix} r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi \\ r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\|\gamma'(\varphi)\| = \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2 - 2r'(\varphi)r(\varphi) \cos \varphi \sin \varphi + 2r'(\varphi)r(\varphi) \cos \varphi \sin \varphi}$$

$$\|\gamma'(\varphi)\| = \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2}$$

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi$$

1.20.3 Длина графика

Длина графика $y = f(x)$, $f \in C^1$ на отрезке $[a, b]$

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \quad \gamma'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix} \quad \|\gamma'(x)\| = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

1.21 Вариация функции на промежутке

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$$

$\tau = \{t_0 \dots t_n\}$ — дробление отрезка.

Тогда вариация функции γ на отрезке $[a, b]$ это l :

$$l(\gamma) = \sup_{\tau} \left\{ \sum_{i=1}^n \rho(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \right\}$$

1.22 Дробление отрезка, ранг дробления, оснащение

Дробление отрезка $[a, b]$ это разбиение отрезка на n частей следующим образом:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b \quad [x_{i-1}, x_i]$$

Ранг (*мелкость*) дробления — длина самого длинного из отрезков дробления:

$$\tau = \{x_0 \dots x_n\} \quad |\tau| = \max(x_i - x_{i-1})$$

Оснащение — множество точек $\{\xi_1 \dots \xi_n\} : \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

1.23 Риманова сумма

Интегральная (**риманова**) сумма для разбиения $\{x_i\}$, произвольной функции f и оснащения $\{\xi_i\}$ это следующая сумма:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

1.24 Постоянная Эйлера

γ — постоянная Эйлера. ≈ 0.577

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)$$

1.25 Допустимая функция

$f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R} \quad -\infty < a < b \leq +\infty$

f допустима, если f — кусочно-непрерывна на $[a, A] \quad \forall A \in (a, b)$

1.26 ! Несобственный интеграл, сходимость, расходимость

$$\Phi(A) := \int_a^A f$$

$$? \exists \lim_{A \rightarrow b-0} \Phi(A)$$

- Если да, то это **несобственный интеграл** $\int_a^{\rightarrow b} f dx$.
- Если этот предел конечный, то тот несобственный интеграл **сходится**.
- Если этот предел бесконечный или не существует, то несобственный интеграл **расходится**.

1.27 Критерий Больцано–Коши сходимости несобственного интеграла

$$\lim_{A \rightarrow b-0} \int_a^A \text{кон.} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta \in (a, b) \quad \forall A, B \in (\Delta, b) \quad \left| \int_A^B f \right| < \varepsilon$$

Доказательство. Тривиально из определения предела. □

1.28 Гамма функция Эйлера

Γ — гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$$

1.29 ! Верхний и нижний пределы

- $y_n := \sup(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$
- $z_n := \inf(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$
- Верхний предел x_n : $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n := \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$
- Нижний предел x_n : $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n := \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n$

1.30 Частичный предел

Частичный предел вещественной последовательности x_n — предел вдоль подпоследовательности n_k :

$$n_k \rightarrow +\infty, n_1 < n_2 < \dots \quad \lim x_{n_k} \in \overline{\mathbb{R}}$$

1.31 ! Абсолютно сходящийся интеграл, ряд

f — допустимая функция на $[a, b]$

$\int_a^b f$ — абсолютно сходится, если:

1. $\int_a^b f$ сходится
2. $\int_a^b |f|$ — сходится

Ряд A абсолютно сходится, если 1 и 2:

1. $\sum a_n$ сх.
2. $\sum |a_n|$ сх.

1.32 Числовой ряд, сумма ряда, сходимость, расходимость

$a_1 + a_2 + \dots, \sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ — числовой ряд ($a_i \in \mathbb{R}$)

$\forall N \in \mathbb{N} \quad S_n := \sum_{i=1}^n a_i$ — частичная сумма

Если $\exists \lim_{N \rightarrow +\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$, ряд сходится, иначе ряд расходится.

1.33 N -й остаток ряда

$\sum_{k=N}^{+\infty} a_k$ — N -й остаток ряда

1.34 Критерий Больцано–Коши сходимости числового ряда

$$\sum a_n \text{ сходится} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall k > N \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad |a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{k+m}| < \varepsilon$$

Доказательство. Тривиально. □

1.35 Произведение рядов

$$\sum a_k, \sum b_k$$

$\gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ — биекция, $\gamma(k) = (\varphi(k), \psi(k))$

Произведение рядов A и B — ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)}$

1.36 Произведение степенных рядов

$x \in \mathbb{R}$, x — фиксированный

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \sum_{j=0}^{+\infty} b_j x^j = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$$

Это называется произведение степенных рядов.

1.37 Скалярное произведение, евклидова норма и метрика в \mathbb{R}^m

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^m x_i y_i$$

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum x_i^2}$$

$$\rho(x, y) := |x - y|$$

1.38 Окрестность точки в \mathbb{R}^m , открытое множество

$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x - a| < r\}$ — открытый шар, r -окрестность точки a

a — внутренняя точка множества D , если $\exists U(a) : U(a) \subset D$, т.е. $\exists r > 0 : B(a, r) \subset D$

D — открытое множество, если $\forall a \in D : a$ — внутренняя точка D

1.39 ! Сходимость последовательности в \mathbb{R}^m , покомпонентная сходимость

$\langle x_n \rangle$ — посл. в \mathbb{R}^m , $a \in \mathbb{R}^m$

$$x_n \rightarrow a \Leftrightarrow \forall U(a) \exists N \forall n > N \ x_n \in U(a)$$

Норма и скалярное произведение сохраняют сходимость:

$$x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b \Rightarrow \langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle, |x_n| \rightarrow |a|$$

Сходимость функций:

$$f : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

a — предельная точка O , $L \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : 0 < |x - a| < \delta \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

То же самое, но по Гейне:

$$\forall (x_k) : \begin{cases} x_k \in O \subset \mathbb{R}^m \\ x_k \rightarrow a \\ \forall k \ x_k \neq a \end{cases} \quad f(x_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} L$$

Покоординатная сходимост:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall i : 1 \leq i \leq n : \lim_{x \rightarrow a} f(x)_i = L_i$$

$$x_k \rightarrow a \Leftrightarrow \forall i : 1 \leq i \leq m : x_i^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} a_i$$

1.40 ! Предельная точка, замкнутое множество, замыкание

a — предельная точка множества D , если $\forall \dot{U}(a) \quad \dot{U}(a) \cap D \neq \emptyset$

D — замкнутое множество, если оно содержит все свои предельные точки.

Замыканием множества D называется $\bar{D} = D \cup (\text{множество предельных точек } D)$

1.41 Компактность, секвенциальная компактность, принцип выбора Больцано-Вейерштрасса

K компактно, если $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} \underbrace{G_\alpha}_{\text{откр.}} \Rightarrow K \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$

В \mathbb{R}^m комп. \Leftrightarrow замкн. и огр.

Секвенциальная компактность: $\forall (x_n), x_n \in K \Rightarrow \exists n_k, a \in K : x_{n_k} \rightarrow a$

Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса: если в \mathbb{R}^m (x_n) — ограниченная последовательность, то у неё существует сходящаяся подпоследовательность.

1.42 Координатная функция

$\triangleleft F : X \rightarrow \mathbb{R}^m; x \mapsto F(x) = (F_1(x), \dots, F_m(x))$, то $F_1(x) \dots F_m(x)$ — координатные функции отображения F

1.43 Двойной предел, повторный предел

$D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$, a — пр. точка D_1 , b — пр. точка D_2

$(D_1 \setminus \{a\}) \times (D_2 \setminus \{b\}) \subset D \quad f : D \rightarrow \mathbb{R}$

$\forall x \in D_1 \setminus \{a\} \quad \exists \text{ кон. } \varphi(x) = \lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$

Если $\exists \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$ — это повторный предел.

Двойной предел:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = A \Leftrightarrow \forall W(A) \quad \exists U(a), V(b) \quad \forall x \in \dot{U}(a), \forall y \in \dot{V}(b) \quad f(x, y) \in W(A)$$

1.44 Предел по направлению, предел вдоль пути

Предел по направлению $l, |l| = 1$:

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} f(a + t\vec{l})$$

Предел вдоль пути?

1.45 ! Предел отображения (определение по Коши и по Гейне)

Дано выше. (1.39, стр. 9)

1.46 Линейный оператор

Линейное отображение = линейный оператор

$$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n - \text{лин.} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^m \quad f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

1.47 ! Отображение бесконечно малое в точке.

Бесконечно малое отображение $\varphi : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$

x_0 — предельная точка E

φ — бесконечно малое отображение при $x \rightarrow x_0$ $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$

1.48 $o(h)$ при $h \rightarrow 0$

$o(h)$ (оно же $o(|h|)$)

$\varphi : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, 0 — предельная точка E

$\varphi(h) = o(h)$ при $h \rightarrow 0$, если $\frac{\varphi(h)}{|h|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

По-другому: $\exists \alpha : E \rightarrow \mathbb{R}^l$ — бесконечно малое при $h \rightarrow 0$:

$$\varphi(h) = |h|\alpha(h)$$

1.49 ! Отображение, дифференцируемое в точке

$F : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, $a \in \text{Int} E$

F — дифф. в точке a , если:

\exists лин. оп. $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ \exists бесконечно малое $\alpha : E \rightarrow \mathbb{R}^l$:

$$F(a+h) = F(a) + Lh + |h|\alpha(h), h \rightarrow 0$$

$$F(a+h) = F(a) + Lh + o(h)$$

$$x := a + h$$

$$F(x) = F(a) + L(x-a) + |x-a|\alpha(x-a)$$

1.50 ! Производный оператор, матрица Якоби, дифференциал

Оператор L из определения — **производный оператор** отображения F в точке a (“производная”), обозначается $F'(a)$.

Матрица $F'(a)$ — **матрица Якоби** F в точке a

Выражение $F'(a)h$ называется **дифференциалом** отображения F в точке a .

Это понимают как:

1. Производный оператор $h \mapsto F'(a)h$
2. Отображение $E \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l \quad (x, h) \mapsto F'(x) \cdot h$

1.51 ! Частные производные

$f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, a \in \text{Int} E$

Фиксируем $k \in \{1 \dots m\}$ $\varphi_k(t) := f(a_1, a_2 \dots t \dots a_m)$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_k(a_k+h) - \varphi_k(a_k)}{h} = \varphi'_k(a_k)$ называется частной производной функции f в точке a

1.52 ! Бесконечное произведение

$$\prod_{i=1}^{+\infty} p_n : \prod_N := \prod_{n=1}^N p_n \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_N = P$$

- $P \in (0, +\infty) \Rightarrow \prod_{i=1}^{+\infty} p_n$ сходится к P
- $P = +\infty \Rightarrow \prod_{i=1}^{+\infty} p_n$ расходится к $+\infty$
- $P = 0 \Rightarrow \prod_{i=1}^{+\infty} p_n$ расходится к 0
- $\nexists \lim \prod_n$: расходится

1.53 ! Классы $C^r(E)$

$E \subset \mathbb{R}^m$, откp. Класс $C^r(E)$, $r \in \mathbb{N}$:

$f \in C^r(E)$, если у f существуют все частные производные порядка $\leq r$ на всём E и они непрерывны.

$C(E)$ — непр. функции = $C^0(E)$

$C(E) \not\supset C^1(E) \not\supset C^2(E) \dots$

1.54 Мультииндекс и обозначения с ним

Мультииндекс (для \mathbb{R}^m) — вектор $(k_1, k_2 \dots k_m)$, $k_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

- $|k| := \sum_{i=1}^m k_i$ — высота мультииндекса
- $k! = k_1! k_2! \dots k_m!$
- $x \in \mathbb{R}^m \quad x^k = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$
- $f^{(k)} = \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}}$

2 Теоремы

2.1 Критерий монотонности функции. Следствия

$f \in C(\langle a, b \rangle)$, дифф. в (a, b)

Тогда f — возрастает $\Leftrightarrow \forall x \in (a, b) \quad f'(x) \geq 0$

Доказательство. “ \Rightarrow ” По определению $f' \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$

“ \Leftarrow ” $x_1 > x_2$, по т. Лагранжа: $\exists c : f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2) \geq 0$ □

Следствие. $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, тогда:

$f = \text{const} \Leftrightarrow (f \in C(\langle a, b \rangle) - \text{дифф. на } (a, b), f' \equiv 0)$

Следствие. $f \in C\langle a, b \rangle$, дифф. на (a, b) . Тогда:

f строго возрастает \Leftrightarrow ① и ②

① $f' \geq 0$ на (a, b)

② $f' \not\equiv 0$ ни на каком промежутке

Доказательство. “ \Rightarrow ” очевидно

“ \Leftarrow ” По лемме Ферма. □

Следствие. О доказательстве неравенств

$g, f \in C([a, b])$, дифф. в (a, b)

$f(a) \leq g(a); \forall x \in (a, b) \quad f'(x) \leq g'(x)$

Тогда $\forall x \in [a, b] \quad f(x) \leq g(x)$

Доказательство. $g - f$ — возр., $g(a) - f(a) \geq 0$ □

2.2 Теорема о необходимом и достаточном условиях экстремума

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in (a, b) \quad f$ — дифф. на (a, b)

Тогда:

1. x_0 — лок. экстремум $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

2. f — n раз дифф. в x_0

$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$

Если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то $\begin{cases} n - \text{чет.} : & x_0 - \text{локальный максимум} \\ n - \text{нечет.} : & x_0 - \text{не экстремум} \end{cases}$

Если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то $\begin{cases} n - \text{чет.} : & x_0 - \text{локальный минимум} \\ n - \text{нечет.} : & x_0 - \text{не экстремум} \end{cases}$

Доказательство. 1. т. Ферма

2. ф. Тейлора

$$f(x) = T_n(f, x_0)(x) + o((x - x_0)^n)$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

при x , близких к x_0 :

$$\text{sign}(f(x) - f(x_0)) = \text{sign} \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \right)$$

Тогда при чётном n

$$\text{sign}(f(x) - f(x_0)) = \text{sign } f^{(n)}(x_0) \Rightarrow x_0 - \text{экстр.}$$

При нечётном n

$$\text{sign}(f(x) - f(x_0)) = \begin{cases} f^{(n)}(x_0), & x > x_0 \\ -f^{(n)}(x_0), & x < x_0 \end{cases} \Rightarrow x_0 - \text{не экстр.}$$

□

2.3 Теорема Кантора о равномерной непрерывности

$f : X \rightarrow Y$, X — комп., f — непр. на X

Тогда f — равномерно непр.

Доказательство. От противного.

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_n, \bar{x}_n : \rho(x_n, \bar{x}_n) < \delta \quad \rho(f(x_n), f(\bar{x}_n)) \geq \varepsilon$$

$$\delta := \frac{1}{n} \quad \exists x_n, \bar{x}_n : \rho(x_n, \bar{x}_n) < \delta \quad \rho(f(x_n), f(\bar{x}_n)) \geq \varepsilon$$

Выберем $x_{n_k} \rightarrow \tilde{x}, \bar{x}_{n_k} \rightarrow \tilde{\bar{x}}$

Почему можно выбрать сходящуюся подпоследовательность? X не обязательно секвенциально компактен.

$$\rho(\tilde{x}, \tilde{\bar{x}}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \delta = 0 \Rightarrow \tilde{x} = \tilde{\bar{x}}$$

Тогда $f(x_{n_k}) \rightarrow f(\tilde{x}), f(\bar{x}_{n_k}) \rightarrow f(\tilde{\bar{x}})$, противоречие с $\rho(f(x_n), f(\bar{x}_n)) \geq \varepsilon$

□

2.4 Теорема Брауэра о неподвижной точке

$f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$, непр.

Тогда $\exists x \in [0, 1]^2 : f(x) = x$, т.е. есть неподвижная точка.

Обобщенный вариант:

1. $f : [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]^m$ — непр.
2. $f : B(0, 1) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow B(0, 1)$ — непр.
3. $f : S(0, 1) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow S(0, 1)$ — непр.

Доказательство. $\rho : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$\rho(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$ — непр. в $[0, 1]^2$

От противного — пусть $\forall x \in [0, 1]^2 \quad f(x) \neq x$

Тогда $\forall x \quad \rho(f(x), x) > 0 \quad x \mapsto \rho(f(x), x)$ — непр., > 0

По т. Вейерштрасса $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in [0, 1] \quad \rho(f(x), x) \geq \varepsilon$

По т. Кантора для f : для этого $\varepsilon \quad \exists \delta < \varepsilon :$

$$\forall x, \bar{x} : \|x - \bar{x}\| < \delta \quad \|f(x) - f(\bar{x})\| < \varepsilon$$

Можно писать не $\|\cdot\|$, а ρ .

Возьмём $n : \frac{\sqrt{2}}{n} < \delta$

Построим доску $Hex(n+1, n+1)$, где $n+1$ — число узлов.

Логические координаты узла $(v_1, v_2) \quad v_1, v_2 \in \{0 \dots n\}$ имеют физические координаты, то есть узлу сопоставляется точка на квадрате с координатами $(\frac{v_1}{n}, \frac{v_2}{n})$

$K(V) := \min\{i \in \{1, 2\} : |f(\frac{v}{n}) - \frac{v_i}{n}| \geq \varepsilon\}$ В точке $A = (0, k) \rightsquigarrow (0, \frac{k}{n})$

$$\left| f_1\left(\frac{A}{n}\right) - \frac{A_1}{n} \right| \geq \varepsilon$$

$A_1 = 0; f_1(\frac{A}{n}) \geq 0 \Rightarrow$ при $v = A$

$$f_1\left(\frac{v}{n}\right) - \frac{v_1}{n} \geq 0$$

В точке $B = (n, l) \rightsquigarrow (1, \frac{l}{n})$

$$\left| f_1\left(\frac{B}{n}\right) - \frac{B_1}{n} \right| \geq \varepsilon$$

При $v = B$

$$f_1\left(\frac{v}{n}\right) - \frac{v_1}{n} \geq -\varepsilon$$

□

Надо дописать

2.5 Теорема о свойствах неопределенного интеграла

f, g имеют первообразную на $\langle a, b \rangle$. Тогда

1. Линейность:

$$\int (f + g) = \int f + \int g$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \int \alpha f = \alpha \int f$$

2. $\varphi \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \left(\int f(x) dx \right) \Big|_{x=\varphi(t)} = F(\varphi(t))$$

Частный случай: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\int f(\alpha t + \beta) dt = \frac{1}{\alpha} F(\alpha t + \beta)$$

3. f, g — дифф. на $\langle a, b \rangle$; $f'g$ — имеет первообр.

Тогда fg' имеет первообразную и

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

Доказательство. 1. $(F + G)' = F' + G' \quad (\alpha F)' = \alpha F'$

2. $(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$

3. $(fg - \int f'g)' = f'g + fg' - f'g = fg'$

□

2.6 ! Интегрирование неравенств. Теорема о среднем

$f, g \in C[a, b] \quad f \leq g$. Тогда

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Доказательство.

$$\Pi\Gamma(f_+) \subset \Pi\Gamma(g_+) \Rightarrow \sigma\Pi\Gamma(f_+) \leq \sigma\Pi\Gamma(g_+)$$

$$\Pi\Gamma(f_-) \supset \Pi\Gamma(g_-) \Rightarrow \sigma\Pi\Gamma(f_-) \geq \sigma\Pi\Gamma(g_-)$$

$$\sigma\Pi\Gamma(f_+) - \sigma\Pi\Gamma(f_-) \leq \sigma\Pi\Gamma(g_+) - \sigma\Pi\Gamma(g_-)$$

□

Теорема о среднем: $f \in C[a, b] \Rightarrow \exists c \in [a, b] : \int_a^b f = f(c)(b - a)$

Доказательство.

$$\min f(b - a) \leq \int_a^b f \leq \max f(b - a)$$

$$\min f \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f \leq \max f$$

$$f(c) := \frac{1}{b - a} \int_a^b f$$

Такое c существует, т.к. $f \in C[a, b]$

□

2.7 Теорема Барроу

$f \in C[a, b]$ Φ — интеграл с переменным верхним пределом. Тогда

$$\forall x \in [a, b] \quad \Phi'(x) = f(x)$$

Доказательство. Зафиксируем $x \in [a, b]$ $y > x, y \leq b$

$$\frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = \frac{\int_a^y f - (\int_a^x f + \int_y^x f)}{y - x} = \frac{\int_x^y f}{y - x} \stackrel{\text{т.о.ср.}}{=} \frac{f(c)(y - x)}{y - x} = f(c) \xrightarrow{y \rightarrow x+0} f(x)$$

$x > y$

$$\frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = \frac{1}{x - y} \int_y^x f = f(c) \xrightarrow{y \rightarrow x-0} f(x)$$

□

2.8 Формула Ньютона-Лейбница, в том числе, для кусочно-непрерывных функций

$f \in C[a, b]$ F — первообр. f

Тогда $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

Доказательство. $\Phi(x) = \int_a^x f$ — первообр.

$\exists C : F = \Phi + C$

$$\int_a^b f = \Phi(b) - \Phi(a) = F(b) - F(a)$$

□

Для кусочно-непрерывных:

f — кус. непр. на $[a, b]$, F — почти первообразная

Доказательство.

$$\int_a^b f = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f = \sum_{k=1}^n F(t) \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} = \sum_{k=1}^n F(x_k) - F(x_{k-1}) = F(b) - F(a)$$

□

2.9 Лемма об ускоренной сходимости

1. $f, g : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ a — предельная точка D

$\exists U(a) : \text{при } x \in \dot{U}(a) \cap D \quad f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

Тогда

$$\forall x_k \rightarrow a \quad (x_k \neq a, x_k \in D) \quad \exists y_k \rightarrow a \quad (y_k \neq a, y_k \in D)$$

такое, что

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(y_k)}{g(x_k)} = 0 \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{g(y_k)}{g(x_k)} = 0$$

Таким образом, $g(y_k) \rightarrow 0$ быстрее, чем $g(x_k) \rightarrow 0$

2. То же самое, но $\lim f(x) = +\infty, \lim g(x) = +\infty$

Доказательство. 1. Очевидно.

$$\forall k \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |f(x_n)| < |g(x_k)| \frac{1}{k} \quad |g(x_n)| < |g(x_k)| \frac{1}{k}$$

$$\varepsilon := |g(x_k)|$$

$$k = 1 \quad y_1 := \text{какой-нибудь } x_n : \left| \frac{f(x_n)}{g(x_k)} \right| < 1 \quad \left| \frac{g(x_n)}{g(x_k)} \right| < 1$$

$$k = 2 \quad y_2 := \text{какой-нибудь } x_n : \left| \frac{f(x_n)}{g(x_k)} \right| < \frac{1}{2} \quad \left| \frac{g(x_n)}{g(x_k)} \right| < \frac{1}{2}$$

⋮

2. (а) Частный случай: Пусть $g(x_n)$ возрастает. Берем $k : m := \min\{n : |f(x_n)| \geq \sqrt{g(x_k)} \text{ или } |g(x_n)| \geq \sqrt{g(x_k)}\}$

$$y_k := x_{m-1} \Rightarrow |f(y_k)| \leq \sqrt{g(x_k)} \quad |g(y_k)| \leq \sqrt{g(x_k)}$$

$$\left| \frac{f(y_k)}{g(x_k)} \right| \leq \frac{\sqrt{g(x_k)}}{g(x_k)} = \frac{1}{\sqrt{g(x_k)}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

$$\left| \frac{g(y_k)}{g(x_k)} \right| \leq \frac{\sqrt{g(x_k)}}{g(x_k)} = \frac{1}{\sqrt{g(x_k)}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

Зачем нужно возрастание? Кохась не знает.

(б) Общий случай: $\tilde{g}(x_k) := \inf\{g(x_n), n = k, k+1, \dots\} \quad \tilde{g}(x_k) \rightarrow +\infty$

$\tilde{g}(x_k) \uparrow, \tilde{g}(x_k) \leq g(x_k)$. Как в пункте (а) построим y_k

$$\frac{f(y_k)}{g(x_k)} \leq \frac{f(y_k)}{\tilde{g}(x_k)} \leq \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}(x_k)}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

$$\frac{g(y_k)}{g(x_k)} \leq \frac{g(y_k)}{\tilde{g}(x_k)} \leq \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}(x_k)}} \rightarrow 0$$

□

2.10 Правило Лопиталья

$f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \quad a \in \overline{\mathbb{R}}$

f, g — дифф., $g' \neq 0$ на (a, b)

Пусть $\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a+0} A \in \overline{\mathbb{R}}$

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ — неопределенность $\left\{ \frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \right\}$

Тогда $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

Доказательство. $g' \neq 0 \Rightarrow g'$ — сохр. знак $\Rightarrow g$ — монотонна.

Для $\frac{0}{0} \quad g(x) \neq 0$ в (a, b)

По Гейне $x_k \rightarrow a$ ($x_k \neq a, x_k \in (a, b)$)

Выберем y_k по лемме об ускоренной сходимости.

$$\frac{f(x_k) - f(y_k)}{g(x_k) - g(y_k)} = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)} \text{ — т. Коши}$$

$$f(x_k) - f(y_k) = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}(g(x_k) - g(y_k))$$

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} - \frac{f(y_k)}{g(y_k)} = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)} \left(1 - \frac{g(y_k)}{g(x_k)} \right)$$

$$\frac{f(y_k)}{g(y_k)} \rightarrow 0 \quad \frac{g(y_k)}{g(x_k)} \rightarrow 0$$

$$x_k \rightarrow a \quad y_k \rightarrow a \quad \xi_k \rightarrow a$$

□

2.11 Теорема Штольца

“Неправильное” сложение дробей:

$a, b, c, d > 0$

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Доказательство.

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{ba - ba + bc - ad}{b(b+d)} = \frac{d}{b+d} \left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b} \right) > 0$$

$$\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{bc - ad}{d(b+d)} = \frac{b}{b+d} \left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b} \right) > 0$$

□

Теорема Штольца.

Это дискретная версия правила Лопиталья.

$y_n \rightarrow 0, x_n \rightarrow 0$ — строго монот.

$$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a \in \mathbb{R}$$

Тогда $\exists \lim \frac{x_n}{y_n} = a$

Примечание. Аналогичное верно, если $x_n \rightarrow +\infty, y_n \rightarrow +\infty$

Доказательство. 1. $a > 0$ ($a \neq +\infty$)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad [\varepsilon < a] \quad \exists N_1 \quad \forall n > N_1 \quad a - \varepsilon < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < a + \varepsilon$$

Берем $N > N_1$

$$a - \varepsilon < \frac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N} < a + \varepsilon$$

\vdots

$$a - \varepsilon < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < a + \varepsilon$$

По неправильному сложению: (оно применимо, т.к. все дроби положительные)

$$a - \varepsilon < \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} < a + \varepsilon$$

$n \rightarrow +\infty$

$$a - \varepsilon < \frac{x_N}{y_N} < a + \varepsilon$$

2. $a = +\infty$ доказывается так же

3. $a < 0$ поменяем знак и докажем так же

4. $a = 0$ т.к. знаки $x_n - x_{n-1}$ и $y_n - y_{n-1}$ фикс., $a = +0$ или $a = -0$

$$\text{Для } a = +0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = +\infty$$

□

2.12 Пример неаналитической функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0$$

$f'(0) = ?$

Следствие из теоремы Лагранжа:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = A \text{ тогда } f'(x_0) = A$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4e^{-\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^5}} = \text{больно, не надо так}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{x^3}}{\frac{1}{x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{6}{x^4}}{-\frac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{x}}{2e^{\frac{1}{x^2}}} = \frac{0}{\infty} = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Заметим, что многочлен Тейлора этой функции при $x \rightarrow 0$ не становится точнее при увеличении числа слагаемых, т.к. они все $= 0$. Таким образом, эта функция по определению неаналитическая.

2.13 Интегральное неравенство Чебышева. Неравенство для сумм

Неравенство Чебышева

$f, g \in C[a, b]$ монот. возр.

$$I_f := \frac{\int_a^b f}{b-a}$$

Тогда

$$I_f \cdot I_g \leq I_{fg}$$

$$\int_a^b f \int_a^b g \leq (b-a) \int_a^b fg$$

Доказательство. $x, y \in [a, b] : x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y), g(x) \geq g(y)$

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$$

$$f(x)g(x) - f(y)g(x) - f(x)g(y) + f(y)g(y) \geq 0$$

Интегрируем по x по $[a, b]$ и делим на $b-a$:

$$I_{fg} - f(y)I_g - g(y)I_f + f(y)g(y) \geq 0$$

Интегрируем по y по $[a, b]$ и делим на $b-a$:

$$I_{fg} - I_f I_g - I_g I_f + I_{fg} \geq 0$$

□

Дискретное неравенство Чебышева

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$$

$$\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \cdot \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

Доказательство.

$$f(x) = a_i, x \in (i-1, i], i = 1 \dots n - \text{ задана на } (0, n]$$

$$g(x) = \dots b_i$$

$$I_f I_g \leq I_{fg}$$

□

2.14 Свойства определенного интеграла: линейность, интегрирование по частям, замена переменных

Тривиально из свойств неопределенного интеграла: Дано выше. (2.5, стр. 14)

2.15 Иррациональность числа π

$$\begin{aligned}
 H_n &:= \frac{1}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \cos t dt = \left[\begin{array}{ll} f = \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n & g = \sin t \\ df = -2n \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} dt & dg = \cos t dt \end{array} \right] = \\
 &= \frac{1}{n!} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \sin t \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{(n-1)!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} t \sin t dt = \\
 &= \left[\begin{array}{ll} f = \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} t & g = -\cos t \\ df = \left(-2(n-1) \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-2} t^2 + \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} \right) dt & dg = \sin t dt \end{array} \right] = \\
 &= \left[df = \left(-2(n-1) \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-2} t^2 + \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2(n-1) \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-2} - 2(n-1) \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-2} \right) dt \right] = \\
 &= \left[df = \left((2n-2) \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} + \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} - (n-1) \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-2} \right) dt \right] = \\
 &= \left[df = \left((2n-1) \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} - (n-1) \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-2} \right) dt \right] = \\
 &= 0 + \frac{2}{(n-1)!} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} t (-\cos t) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \\
 &\quad + \frac{2}{(n-1)!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left((2n-1) \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} - \frac{\pi^2}{2} (n-1) \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-2} \right) \cos t dt = \\
 &= (4n-2)H_{n-1} - \pi^2 H_{n-2}
 \end{aligned}$$

Число π — иррационально

Доказательство. Пусть $\pi = \frac{p}{q}$; H_n задано выше

$$H_n = (4n-2)H_{n-1} - \pi^2 H_{n-2}$$

$$H_0 = 2, \quad H_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right) \cos t dt = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt = 2t(-\cos t) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 4$$

$H_n = \dots H_1 + \dots H_0 = P_n(\pi^2)$ — многочлен с целыми коэффициентами, степень $\leq n$

$$q^{2n} P_n \left(\frac{p^2}{q^2} \right) = \text{целое число} = q^{2n} H_n > 0 \Rightarrow q^{2n} H_n \geq 1$$

$$1 \leq \frac{q^{2n}}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \cos t dt \leq \frac{q^{2n} 4^n}{n!} \pi \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Противоречие. □

2.16 ! Теорема о вычислении аддитивной функции промежутка по плотности

О вычислении аддитивной функции промежутка по плотности

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — непр. $\Phi : \text{Segm}\langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

f — плотность Φ

Тогда $\Phi([p, q]) = \int_p^q f, \quad \forall [p, q] \in \text{Segm}\langle a, b \rangle$

Доказательство.

$$F(x) := \begin{cases} 0 & , x = a \\ \Phi([a, x]) & , x > a \end{cases} \text{ — первообразная } f$$

Это утверждение ещё не доказано, но если мы его докажем, то:

$$\Phi([p, q]) = \Phi[a, q] - \Phi[a, p] = F(q) - F(p) = \int_p^q f$$

Докажем утверждение:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\Phi[a, x+h] - \Phi[a, x]}{h} = \frac{\Phi[x, x+h]}{h} = [0 \leq \Theta \leq 1] = f(x + \Theta h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x)$$

□

2.17 Площадь криволинейного сектора: в полярных координатах и для параметрической кривой

$$\Phi[\alpha, \beta] = S_{\text{сектор}(\alpha, \beta)} = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi$$

$x(t), y(t)$ — кривая в \mathbb{R}^2

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{t_{\alpha}}^{t_{\beta}} r^2(\varphi(t)) d\varphi(t) = \frac{1}{2} \int_{t_{\alpha}}^{t_{\beta}} r^2(t) \varphi'(t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_{\alpha}}^{t_{\beta}} \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}^2 \left(\arctg \frac{y(t)}{x(t)} \right)' dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_{\alpha}}^{t_{\beta}} (x^2(t) + y^2(t)) \frac{1}{1 + \left(\frac{y(t)}{x(t)} \right)^2} \left(\frac{y(t)}{x(t)} \right)' dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_{t_\alpha}^{t_\beta} (x^2(t) + y^2(t)) \frac{1}{1 + \left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)^2} \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t)} dt = \\
&= \frac{1}{2} \int_{t_\alpha}^{t_\beta} (x^2(t) + y^2(t)) \frac{x^2(t)}{x^2(t) + y^2(t)} \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t)} dt = \\
&= \frac{1}{2} \int_{t_\alpha}^{t_\beta} (y'(t)x(t) - y(t)x'(t)) dt
\end{aligned}$$

2.18 Изопериметрическое неравенство

Изопериметрическое неравенство

$G \subset \mathbb{R}^2$ — выпуклое замкнутое множество (ограниченное)

$\text{diam} G = \sup\{\rho(x, y), x, y \in G\}$

$\text{diam} G \leq 1$

Тогда $\sigma(G) \leq \frac{\pi}{4}$

Доказательство. Пойдём от некоторой точки на границе G под углом φ внутрь фигуры по прямой. В какой-то момент мы встретим другую граничную точку. Назовем этот процесс $r(\varphi)$ (возвращает длину пути). Очевидно, что $r^2(\varphi) + r^2(\varphi - \frac{\pi}{2}) \leq (\text{diam} G)^2 \leq 1$

$$\begin{aligned}
\sigma(G) &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 r^2(\varphi) d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi) d\varphi \right) = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(r^2(\varphi) + r^2\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \right) d\varphi \leq \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 d\varphi = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

□

2.19 Лемма о трех хордах

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. f — вып. $\langle a, b \rangle$

2. $\forall x_1, x_2, x_3 \in \langle a, b \rangle \quad x_1 < x_2 < x_3 \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$

Доказательство. Левое $\Leftrightarrow f(x_2)(x_3 - x_1) \leq f(x_3)(x_2 - x_1) + f(x_1)(x_3 - x_1 - (x_2 - x_1))$

$$f\left(x_3 \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} + x_1 \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\right) = f(x_2) \leq f(x_3) \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} + f(x_1) \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$$

□

2.20 Теорема об односторонней дифференцируемости выпуклой функции

f — вып. $\langle a, b \rangle$. Тогда $\forall x \in (a, b) \exists f'_+(x), f'_-(x)$ и $\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$

$$f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'_-(x_2)$$

Доказательство. $f'_+(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1+0} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ — монотонно убывающая функция от x

Фиксируем $x_0 < x_1$. По лемме о трех хордах $\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ □

2.21 Следствие о точках разрыва производной выпуклой функции

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — вып.

Тогда f — дифф. на (a, b) за исключением, может быть, счетного множества точек.

Доказательство. $\forall x \exists f'_+(x), f'_-(x)$

f'_\pm возрастает

$f'_-(x) = f'_+(x) \Rightarrow f$ дифф. в x

$f'_-(x) < f'_+(x) \Rightarrow f$ не дифф. в x

Тогда x — точка скачка для f'_+, f'_- , их НБСЧ. □

Почему не более чем счётное?

2.22 Описание выпуклости с помощью касательных

f — вып. на $\langle a, b \rangle$. Тогда график f расположен не ниже любой касательной
т.е. $\forall x, x_0 \quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Доказательство. “ \Rightarrow ”

Если $x > x_0 \quad f'(x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, это неравенство 2. из предыдущей теоремы

$x < x_0$ аналогично

“ \Leftarrow ” фиксируем x_0 . Берем $x_1 < x_0 < x_2$

$f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0); f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0)$, т.е. $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq f'(x_0) \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$.

Это верно по лемме. □

2.23 Дифференциальный критерий выпуклости

1. $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, дифф. в (a, b)

Тогда f — вып. $\Rightarrow f'$ возр. на (a, b)

Если f — строго выпуклая $\Rightarrow f'$ строго возрастает

2. $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, дважды дифф. на (a, b)

f — вып. $\Leftrightarrow f'' \geq 0$ на (a, b)

(а) “ \Rightarrow ” $f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2) \quad (x_1 < x_2)$

“ \Leftarrow ” ? f вып. $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c_1) < f'(c_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$

Теперь утверждение 2. очевидно.

2.24 Обобщенная теорема о плотности

Обобщенная теорема о плотности.

$\Phi : \text{Segm}\langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — аддитивная функция промежутка

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — непр.

$\forall \Delta \in \text{Segm}\langle a, b \rangle \exists m_\Delta, M_\Delta$ — не точный минимум/максимум

$$1. m_\Delta l_\Delta \leq \Phi(\Delta) \leq M_\Delta l_\Delta$$

$$2. m_\Delta \leq f(x) \leq M_\Delta \text{ при всех } x \in \Delta$$

$$3. \forall \text{ фикс. } x \quad M_\Delta - m_\Delta \xrightarrow[\Delta \rightarrow x]{} 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \Delta : l_\Delta < \delta \quad |M_\Delta - m_\Delta| < \varepsilon$$

$$\text{Тогда } \forall [p, q] \in \text{Segm}\langle a, b \rangle \quad \Phi([p, q]) = \int_p^q f$$

$$\text{Доказательство. } F(x) = \begin{cases} 0, & x = a \\ \Phi[a, x], & x > a \end{cases}$$

Докажем, что F — первообразная f .

Фиксируем x

По 1.:

$$m_\Delta \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\Phi[x, x+h]}{h} \leq M_\Delta$$

По 2.:

$$m_\Delta \leq f(x) \leq M_\Delta$$

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \leq M_\Delta - m_\Delta \xrightarrow[\Delta \rightarrow x]{} 0$$

Мы не можем написать “ $\Delta \rightarrow x$ ” без кавычек, т.к. Δ — не число, но “ $\Delta \rightarrow x$ ” $\Leftrightarrow h \rightarrow 0$

Таким образом,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

□

2.25 Вычисление длины гладкого пути

$$\gamma \in C^1([a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m)$$

$$\text{Тогда } l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

Доказательство. Будем считать $\gamma' \neq 0$, γ — инъективная.

$\Phi : [p, q] \subset [a, b] \mapsto l(\gamma|_{[p, q]})$ — адд. ф-ция промежутка.

Докажем, что $f(t) = \|\gamma'(t)\|$ — плотность Φ

$$\Delta \subset [a, b] \quad m_i(\Delta) := \min_{t \in \Delta} |\gamma'_i(t)| \quad M_i(\Delta) = \max |\gamma'_i(t)|$$

$$m_\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^m m_i(\Delta)^2} \quad M_\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^m M_i(\Delta)^2}$$

Докажем, что $m_\Delta l_\Delta \leq \Phi(\Delta) \leq M_\Delta l_\Delta$

$\tilde{\gamma} : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^m$ — лин. путь

$\tilde{\gamma}(t) = \vec{M} \cdot t$, где $\vec{M} = (M_1(\Delta) \ \dots \ M_m(\Delta))$

$T : C_{\gamma|\Delta} \rightarrow C_{\tilde{\gamma}} \quad \gamma(t) \mapsto \tilde{\gamma}(t)$

Утверждение: T — растяжение.

$$\|\vec{M}q - \vec{M}p\| = (q - p)\|\vec{M}\| = (q - p)M_{\Delta}$$

$$\begin{aligned} \rho(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) &= \sqrt{\sum_{i=1}^m (\gamma_i(t_0) - \gamma_i(t_1))^2} \stackrel{\text{т. Лагранжа}}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^m \gamma'_i(\bar{t}_i)^2 (t_0 - t_1)^2} \leq \|\vec{M}\| \cdot |t_0 - t_1| = \\ &= \rho(\tilde{\gamma}(t_0), \tilde{\gamma}(t_1)) = \rho(T(\gamma(t_0)), T(\gamma(t_1))) \end{aligned}$$

□

Доказательство. (альтернативное).

Покажем, что $\int \|\gamma'\|$ удовлетворяет всем требованиям длины гладкого пути:

1. $\forall \gamma \quad l(\gamma) \geq 0$ — очевидно, т.к. $\|\gamma'\| \geq 0$
2. Линейность: очевидно по линейности определенного интеграла.
3. Сжатие: $\exists T : C_{\gamma} \rightarrow C_{\tilde{\gamma}}$

$$\gamma'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$$

$$\|\gamma'(t)\| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\gamma(t+h) - \gamma(t)\|}{|h|}$$

$$\|\gamma'(t)\| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\rho(\gamma(t+h), \gamma(t))}{|h|} \quad \|\tilde{\gamma}'(t)\| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\rho(\tilde{\gamma}(t+h), \tilde{\gamma}(t))}{|h|}$$

$$\rho(\gamma(t+h), \gamma(t)) \geq \rho(\tilde{\gamma}(t+h), \tilde{\gamma}(t)) \Rightarrow \|\gamma'(t)\| \geq \|\tilde{\gamma}'(t)\| \Rightarrow l(\gamma) \geq l(\tilde{\gamma})$$

4. Нормировка. $\triangleleft \gamma : \gamma(t) = \vec{u} + \vec{v}t$

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\vec{v}\| dt = \|\vec{v}\|(b-a)$$

$$\rho(\gamma(a), \gamma(b)) = \|\vec{u} + \vec{v}a - \vec{u} - \vec{v}b\| = \|\vec{v}(a-b)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m v_i^2 (b-a)^2} = (b-a)\|\vec{v}\|$$

□

2.26 Объем фигур вращения

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — непр., $f \geq 0$

$\Phi_x(\Delta) =$ “объем фигуры вращения вокруг оси OX ”

$\Phi_y(\Delta) =$ “объем фигуры вращения вокруг оси OY ”

Тогда : $\forall \Delta = [p, q] \in \text{Segm}\langle a, b \rangle$:

$$1. \quad \Phi_x[p, q] = \pi \int_p^q f^2(x) dx$$

$$2. \quad \Phi_y[p, q] = 2\pi \int_p^q x f(x) dx$$

Доказательство. 1. Это — упражнение, оно не использует ничего умного.

На лекции было сказано, что это доказывается через плотность аналогично площади криволинейного сектора.

2. Мы знаем, что объем цилиндра = $S(\text{основание}) \cdot h$.

Для оценки $\Phi(\Delta)$ найдем прямоугольник, который является минимальным по площади сечения и максимальный прямоугольники: Π_{\min} и Π_{\max} .

Покажем, что $2\pi x f(x)$ подходит под обобщенную теорему о плотности для Φ :

$$V((\Pi_{\min})_y) \leq \Phi(\Delta) \leq V((\Pi_{\max})_y)$$

$$V((\Pi_{\max})_y) = S_{\text{кольца}} \max_{x \in [p, q]} f = \pi(q-p)(q+p) \max_{x \in [p, q]} f \leq \pi(q-p) \overbrace{\max_{x \in [p, q]} 2x}^{=2q \geq q+p} \max_{x \in [p, q]} f$$

$$V((\Pi_{\min})_y) \leq \pi \min 2x(q-p) \min f$$

$$M_{\Delta} := \max_{x \in [p, q]} 2\pi x f(x) \quad m_{\Delta} := \min_{x \in [p, q]} 2\pi x f(x)$$

На лекции было дано m_{Δ} и M_{Δ} без π .

Все три условия теоремы очевидно выполнены:

- (a) $m_{\Delta}(q-p) \leq \Phi(\Delta) \leq M_{\Delta}(q-p)$
- (b) $m_{\Delta} \leq 2\pi x f(x) \leq M_{\Delta} \quad \forall x \in \Delta$
- (c) $\pi(\max f \max 2x - \min f \min 2x) \xrightarrow["\Delta \rightarrow x"]{} 0$

□

2.27 ! Интеграл как предел интегральных сумм

$f \in C[a, b]$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \text{дробление } \tau = \{x_0 \dots x_n\} : |\tau| < \delta \quad \forall \text{оснащение } \xi_i :$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon$$

Доказательство. По теореме Кантора о равномерной непрерывности на компакте.

$[a, b]$ — компакт, f непрерывна на $[a, b] \Rightarrow f$ равномерно непрерывна на $[a, b]$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, \bar{x} \in [a, b] : |x - \bar{x}| < \delta \quad |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$$

По двойной бухгалтерии заменим ε на $\frac{\varepsilon}{b-a}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, \bar{x} \in [a, b] : |x - \bar{x}| < \delta \quad |f(x) - f(\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Разобьем интеграл на части:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \right)$$

Запишем $(x_i - x_{i-1})$ в виде интеграла $\int_{x_{i-1}}^{x_i} dx$

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| = \left| \sum_{i=1}^n \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - f(\xi_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \right) \right| = \\ & = \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(\xi_i)) dx \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \right| \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(\xi_i)| dx \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \\ & = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon \end{aligned}$$

□

2.28 Теорема об интегральных суммах для центральных прямоугольников

$f \in C^2[a, b]$ $x_0 = a < x_1 \dots < x_n = b$ $\delta = \max(x_i - x_{i-1})$ $\xi_i := \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$. Тогда

$$\left| \int_a^b f - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \leq \frac{\delta^2}{8} \int_a^b |f''| dx$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx &= \int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f(x) dx + \int_{\xi_i}^{x_i} f(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f(x) d(x - x_{i-1}) + \int_{\xi_i}^{x_i} f(x) d(x - x_i) = \\ &= f(x)(x - x_{i-1}) \Big|_{x=x_{i-1}}^{x=\xi_i} - \int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f'(x)(x - x_{i-1}) dx + f(x)(x - x_i) \Big|_{x=\xi_i}^{x=x_i} - \int_{\xi_i}^{x_i} f'(x)(x - x_{i-1}) dx = (*) \end{aligned}$$

Заметим, что $\xi_i - x_{i-1} = x_i - \xi_i$, поэтому $f(x)(x - x_{i-1}) \Big|_{x=x_{i-1}}^{x=\xi_i} + f(x)(x - x_i) \Big|_{x=\xi_i}^{x=x_i} = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$

$$\begin{aligned} (*) &= f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \left(f'(x) \frac{(x - x_{i-1})^2}{2} \Big|_{x_{i-1}}^{\xi_i} - \frac{1}{2} \int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f''(x - x_{i-1})^2 dx + \right. \\ &\quad \left. + f'(x) \frac{(x - x_i)^2}{2} \Big|_{\xi_i}^{x_i} - \frac{1}{2} \int_{\xi_i}^{x_i} f''(x - x_i)^2 dx \right) = \\ &= f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - 0 + \frac{1}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x) \varphi(x) dx \\ \varphi(x) &= \begin{cases} (x - x_{i-1})^2, & x \in [x_{i-1}, \xi_i] \\ (x - x_i)^2, & x \in [\xi_i, x_i] \end{cases} \end{aligned}$$

Итого:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \frac{1}{2} \int_a^b f''(x) \varphi(x) dx \\ \left| \int - \sum \right| &\leq \frac{1}{2} \int_a^b |f''(x)| \varphi(x) dx \\ \max_{x \in [a, b]} \varphi(x) &\stackrel{\text{достигается на отрезке длины } \delta}{=} \frac{\delta^2}{4} \\ \frac{1}{2} \int_a^b |f''(x)| \varphi(x) dx &\leq \frac{\delta^2}{8} \int_a^b |f''| \end{aligned}$$

□

2.29 Теорема о формуле трапеций, формула Эйлера-Маклорена

2.29.1 Теорема о формуле трапеций

$f \in C^2[a, b]$, $\tau, \delta = |\tau|$

Тогда

$$\left| \int_a^b f dx - \sum \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} (x_i - x_{i-1}) \right| \leq \frac{\delta^2}{8} \int_a^b |f''|$$

Доказательство. Берем $\xi_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) d(x - \xi_i) = f(x)(x - \xi_i) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)(x - \xi_i) dx = \\ &= (f(x_i) + f(x_{i-1})) \frac{x_i - x_{i-1}}{2} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) d((x - x_{i-1})(x_i - x)) = (*) \end{aligned}$$

Проверим, что замена выражение под дифференциалом верное:

$$((x - x_{i-1})(x_i - x))' = (-x^2 + x(x_i + x_{i-1}) - x_{i-1}x)' = -2 \left(x - \frac{x_i + x_{i-1}}{2} \right)$$

Действительно верно.

$$\begin{aligned} \psi(x) &:= (x - x_{i-1})(x_i - x) \\ (*) &= (f(x_i) + f(x_{i-1})) \frac{x_i - x_{i-1}}{2} + \frac{1}{2} f'(x)(x - x_{i-1})(x_i - x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \frac{1}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'' \psi(x) dx \\ \left| \int - \sum \right| &\leq \frac{1}{2} \int_a^b |f''| \psi(x) dx \\ \max \psi &= \frac{\delta^2}{4} \end{aligned}$$

□

2.29.2 Формула Эйлера-Маклорена

$m, n \in \mathbb{Z}$, $f \in C^2[m, n]$. Тогда

$$\int_m^n f(x) dx = \left(\sum_{i=m}^n \right)' f(i) - \frac{1}{2} \int f''(x) \{x\} (1 - \{x\}) dx$$

' означает, что крайние слагаемые берутся с весом $\frac{1}{2}$, $\{x\}$ — дробная часть x

Доказательство. Это очевидно по формуле трапеций: $x_i := i$

$$\int_m^n f(x) dx = \sum_{i=m+1}^n \frac{f(i) + f(i-1)}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \int_m^n f''(x) \psi(x)$$

$$\psi(x) \stackrel{\text{def}}{=} (x - x_{i-1})(x_i - x) = (x - i + 1)(i - x) = (x - i + 1)(1 - (x - i + 1)) = \{x\}(1 - \{x\})$$

$f(n)/2$ и $f(m)/2$ в сумму попадают только 1 раз, остальные — 2 раза, как и в искомой формуле. □

2.30 Асимптотика степенных сумм

$$p > -1 \quad f(x) = x^p$$

$$1^p + 2^p + \dots + n^p = \int_1^n x^p dx + \frac{1}{2}1^p + \frac{1}{2}n^p + \frac{1}{2} \int_1^n p(p-1)x^{p-2}\{x\}(1-\{x\}) =$$

$\frac{1}{2}1^p + \frac{1}{2}n^p$ добавлены, чтобы не писать слева деление крайних слагаемых на 2.

$$= \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}n^p + \mathcal{O}(\max(1, n^{p-1})) = (*)$$

Откуда появилось \mathcal{O} ? $\{x\}(1-\{x\}) < 1 \Rightarrow \int_1^n p(p-1)x^{p-2}\{x\}(1-\{x\}) \leq C(n^{p-1}-1)$, C — некоторая константа.

Занесем константы под \mathcal{O} :

$$(*) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{1}{2}n^p + \mathcal{O}(\max(1, n^{p-1}))$$

2.31 Асимптотика частичных сумм гармонического ряда

$$]p = -1 \quad 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \int_1^n x^{-3}\{x\}(1-\{x\}) = (*)$$

$$\int_1^n x^{-3}\{x\}(1-\{x\}) \leq \frac{1}{4} \int_1^n \frac{dx}{x^3} = \frac{1-1}{8 \alpha^2} \Big|_1^n = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) < \frac{1}{8}$$

$$(*) = \ln n + \gamma + o(1) \quad \gamma \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right]$$

2.32 Формула Валлиса

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2k} = \frac{\pi}{2}$$

Вывод формулы Валлиса:

$$I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \left[\begin{array}{ll} u = \sin^{n-1} x & du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{array} \right] =$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x (n-1) \sin^{n-2} x dx =$$

$$(n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} I_{n-4} = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \frac{n-5}{n-4} I_{n-6} = \dots = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2}, & n - \text{чёт.} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} 1, & n - \text{нечёт.} \end{cases}$$

$$\sin^{2k+1} x \leq \sin^{2k} x \leq \sin^{2k-1} x$$

Проинтегрируем по $[0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \leq \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}$$

$$\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2k+1} \leq \frac{\pi}{2} \leq \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2k}$$

$$\text{Правая часть} - \text{левая часть} = \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2 \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1} \right) = \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2k} \frac{1}{2k+1} \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{2k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

Таким образом, левая и правая части стремятся друг другу и зажимают $\pi/2$.

2.33 Формула Стирлинга

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{n} \sqrt{2\pi}$$

$$\int_1^n \ln x dx = \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n = \int_1^n \ln x dx + \frac{\ln n}{2} - \frac{1}{2} \int_1^n \frac{\{x\}(1-\{x\})}{x^2} dx =$$

$$= n \ln n - n + 1 + \frac{\ln n}{2} - \frac{1}{2} \int_1^n \frac{1}{x^2} + o(1) = n \ln n - n + \frac{\ln n}{2} + C_1 + o(1)$$

$$\ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n = \ln n!$$

$$n! = e^{n \ln n - n + \frac{\ln n}{2} + C_1 + o(1)}$$

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{C_1 + o(1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C n^n e^{-n} \sqrt{n}$$

Найдём C .

$$\sqrt{\pi} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k)}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)} \frac{1}{\sqrt{k}} =$$

Домножим дробь на числитель:

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot (2k)^2}{(2k)!} =$$

Вынесем 2 из каждого множителя в числителе:

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{(2^k k!)^2}{(2k)!} =$$

Замена на эквивалент:

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{(2^k C k^k e^{-k} \sqrt{k})^2}{C (2k)^{2k} e^{-2k} \sqrt{2k}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{C}{\sqrt{2}} = \frac{C}{\sqrt{2}}$$

$$C = \sqrt{2\pi}$$

2.34 Простейшие свойства несобственного интеграла

Критерий Больцано-Коши

$$\lim_{A \rightarrow b-0} \int_a^A \text{кон.} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \Delta \in (a, b) \forall A, B \in (\Delta, b) \left| \int_A^B f \right| < \varepsilon$$

Аддитивность по промежутку

f — допустима. $[a, b) \quad c \in (a, b)$

Тогда $\int_a^{\rightarrow b} f$ и $\int_c^{\rightarrow b} f$ — сходятся/расходятся одновременно и, если сходятся, $\int_a^{\rightarrow b} f = \int_a^c f + \int_c^{\rightarrow b} f$

Берем $A > c \quad \int_a^A = \int_a^c + \int_c^A$

Следствие. f — допустима. $[a, +\infty)$, $\int_a^{+\infty} f$ — сходится. Тогда

$$\int_A^{+\infty} f \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$$

Это называется “хвост”.

Линейность

f, g — допустима $\int_a^{\rightarrow b} f, \int_a^{\rightarrow b} g$ — сход.

$\lambda \in \mathbb{R}$

Тогда $\lambda f, f \pm g$ — допустима и $\int_a^{\rightarrow b} \lambda f, \int_a^{\rightarrow b} f \pm g$ — сходятся.

$$\int_a^{\rightarrow b} \lambda f = \lambda \int_a^{\rightarrow b} f \quad \int_a^{\rightarrow b} f \pm g = \int_a^{\rightarrow b} f \pm \int_a^{\rightarrow b} g$$

Доказательство. Тривиально. □

Интегрирование неравенств

f, g — доп., $\int_a^{\rightarrow b} f, \int_a^{\rightarrow b} g$ — существуют в $\overline{\mathbb{R}}$

$f \leq g$ на $[a, b)$. Тогда

$$\int_a^{\rightarrow b} f \leq \int_a^{\rightarrow b} g$$

Очевидно: $\int_a^A f \leq \int_a^A g, A \rightarrow b - 0$

Пятое свойство

f, g — дифф. $[a, b)$; f', g' — допустимы. Это эквивалентно $f, g \in C^1[a, b)$.

Тогда*

$$\int_a^{\rightarrow b} f g' = f g \Big|_a^{\rightarrow b} - \int_a^{\rightarrow b} f' g$$

* значит, что если два из трех пределов существуют, то существует третий и выполняется равенство.

Шестое свойство

$\varphi : [\alpha, \beta) \rightarrow \langle A, B \rangle, \varphi \in C^1$

$f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, f$ — непр., $\exists \varphi(\beta - 0) \in \overline{\mathbb{R}}$

Тогда*

$$\int_{\alpha}^{\rightarrow \beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\rightarrow \varphi(\beta-0)} f(x) dx$$

Примечание. f — кусочно непрерывна на $[a, b]$. f можно также рассматривать на $[a, b)$. Тогда

$$\int_a^{\rightarrow b} f = \int_a^b f$$

2.35 ! Признаки сравнения сходимости несобственного интеграла

$f, g \geq 0$, допустимы на $[a, b)$

1. $f \leq g$ на $[a, b)$. Тогда:

(a) $\int_a^b g - \text{сходится} \Rightarrow \int_a^b f - \text{сходится}$

(b) $\int_a^b f - \text{расходится} \Rightarrow \int_a^b g - \text{расходится}$

2. $\exists \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = l < +\infty$:

(a) $\int_a^b g - \text{сходится} \Rightarrow \int_a^b f - \text{сходится}$

(b) $\int_a^b f - \text{расходится} \Rightarrow \int_a^b g - \text{расходится}$

Доказательство. 1. $\Phi(A) := \int_a^A f, \Psi(A) = \int_a^A g$

$$0 \leq \Phi(A) \leq \Psi(A)$$

(a) $\int_a^b g - \text{сходится} \Rightarrow \Psi \text{ огр.} \Rightarrow \Phi \text{ огр.} \Rightarrow \int_a^b f - \text{сходится}$

(b) $\int_a^b f - \text{расходится} \Rightarrow \Phi \text{ неогр.} \Rightarrow \Psi \text{ неогр.} \Rightarrow \int_a^b g - \text{расходится}$

2. $l < +\infty \xrightarrow{\text{def}} \exists a_1 : \forall x > a_1 \quad 0 \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq l + 1 \Rightarrow f(x) \leq g(x)(l + 1)$, дальше тривиально (предположительно по пункту 1.)

□

Примечание. $l > 0$:

$$\exists a_2 : \forall x > a_2 \quad \frac{l}{2} < \frac{f(x)}{g(x)}$$

1. $\int_a^b f - \text{сходится} \Rightarrow \int_a^b g - \text{сходится}$

2. $\int_a^b g - \text{расходится} \Rightarrow \int_a^b f - \text{расходится}$

Следствие. Если $+\infty > l > 0$, то:

1. $\int_a^b f - \text{сходится} \Leftrightarrow \int_a^b g - \text{сходится}$

2. $\int_a^b f - \text{расходится} \Leftrightarrow \int_a^b g - \text{расходится}$

2.36 Интеграл Эйлера–Пуассона

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx \stackrel{x=y^2}{=} 2 \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = 2 \frac{1}{2} \sqrt{\pi} - \text{интеграл Эйлера-Пуассона}$$

Доказательство.

$$1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{1 + x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Оба неравенства следуют из неравенства $e^t \geq 1 + t \quad \forall t$.

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$

$$(1 - x^2)^n \leq e^{-nx^2} \leq \left(\frac{1}{1 + x^2}\right)^n$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx \leq \int_0^1 e^{-nx^2} \leq \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

Казалось бы, переход от интеграла \int_0^1 к $\int_0^{+\infty}$ очень грубый, но это не так.

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx^2} \stackrel{y=\sqrt{n}x}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} I$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx \stackrel{x=\cos y}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} y dy$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} \stackrel{x=\tan y}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos y)^{2n-2} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n-2} dt$$

$$\sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} y dy \leq I \leq \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n-2} dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \frac{(n-1)!!}{n!!} \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n \text{ чет.} \\ 1, & n \text{ нечет.} \end{cases}$$

$$\sqrt{n} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leq I \leq \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2} \sqrt{n}$$

По формуле Валлиса $\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \rightarrow \sqrt{\pi}$:

$$\sqrt{n} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right) \frac{n}{2n+1} \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2} \sqrt{n} = \frac{\frac{\pi}{2} \sqrt{n} \frac{1}{\sqrt{n-1}}}{\frac{(2n-2)!!}{(2n-3)!!} \frac{1}{\sqrt{n-1}}} \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

□

2.37 ! Гамма функция Эйлера. Простейшие свойства.

Область определения

1. $\int_1^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$ — сходится при всех $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_1^{+\infty} = e$$

$$0 \leq x^{t-1} e^{-x} \leq x^{t-1} e^{-\frac{x}{2}} e^{-\frac{x}{2}}$$

$$x^{t-1} e^{-\frac{x}{2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow \text{при больших } x \quad x^{t-1} e^{-\frac{x}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \leq e^{-\frac{x}{2}}$$

2. $\int_0^1 x^{t-1} e^{-x} dx$

$$x^{t-1} e^{-x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^{t-1} \quad t > 0 \text{ сходится, } t \leq 0 \text{ расходится}$$

Выпуклость

Подынтегральное выражение как функция от t является выпуклой функцией (при $x \geq 0$)

$$\begin{aligned} t &\mapsto x^{t-1}e^{-x} = f_x(t) \\ f(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) &\leq \alpha f_x(t_1) + (1-\alpha)f_x(t_2) \\ \int_0^{+\infty} f_x dx &\leq \alpha \int_0^{+\infty} f_x(t_1) dx + (1-\alpha) \int_0^{+\infty} f_x(t_2) dx \end{aligned}$$

Определение выпуклости:

$$x^{(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2)-1} e^{-x} \leq \alpha x^{t_1-1} e^{-x} + (1-\alpha)x^{t_2-1} e^{-x}$$

Зафиксируем α, t_1, t_2 . Проинтегрируем по x от 0 до $+\infty$:

$$\Gamma(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) \leq \alpha \Gamma(t_1) + (1-\alpha)\Gamma(t_2)$$

Γ — выпуклая $\Rightarrow \Gamma$ — непрерывная

Третье свойство

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$$

$$\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} x^t e^{-x} dx = -x^t e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + t \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx = 0 + t\Gamma(t)$$

Следствие. $\Gamma(n+1) = n!$

Доказательство.

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \dots = n(n-1) \cdots 1\Gamma(1) = n!$$

□

Четвертое свойство

$$\Gamma(t) = \frac{\Gamma(t+1)}{t} \underset{t \rightarrow +0}{\sim} \frac{1}{t}$$

Пятое свойство

Дано выше. (2.36, стр. 33)

2.38 Изучение сходимости интеграла $\int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$

При каких α и β сходится:

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$$

Мы знаем, что $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

При $\alpha > 1, \beta > 0$

$$\frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} < \frac{1}{x^\alpha}$$

Таким же образом можно еще что-то выяснить, но мы так делать не будем. Вместо этого воспользуемся методом “удавливание логарифма”

$$1. \alpha > 1 \quad \alpha = 1 + 2a, a > 0$$

$$0 \leq \frac{1}{x^{1+2a}(\ln x)^\beta} = \frac{1}{x^{1+a}} \cdot \frac{1}{x^a(\ln x)^\beta}$$

$$\beta \geq 0 \quad x^a(\ln x)^\beta \rightarrow +\infty$$

$$b := -\beta \quad \beta < 0 \quad x^a(\ln x)^\beta = \frac{x^a}{(\ln x)^b} = \left(\frac{x^{\frac{a}{b}}}{\ln x} \right)^b \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \xrightarrow{\text{лопитель}} \frac{\frac{a}{b} x^{\frac{a}{b}-1}}{\frac{1}{x}} \rightarrow +\infty$$

$$x^a(\ln x)^\beta \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \Rightarrow \frac{1}{x^{1+a}} \cdot \frac{1}{x^a(\ln x)^\beta} < \frac{1}{x^{1+a}} - \text{сходится}$$

$$2. \alpha < 1 \quad \alpha = 1 - 2a, a > 0$$

$$\frac{1}{x^{1-2a}(\ln x)^\beta} = \frac{1}{x^{1-a}} \cdot \frac{x^a}{(\ln x)^\beta} > \frac{1}{x^{1-a}}$$

$$3. \alpha = 1$$

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} \stackrel{y=\ln x}{=} \int_{\ln 10}^{+\infty} \frac{dy}{y^\beta}$$

Сходится при $\beta > 1$, расходится при $\beta \leq 1$

2.39 Теорема об абсолютно сходящихся интегралах и рядах.

f — доп. на $[a, b)$. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. $\int_a^b f$ абсолютно сходится
2. $\int_a^b |f|$ сходится
3. $\int_a^b f^+, \int_a^b f^-$ оба сходятся

Примечание. $f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = \max(-f, 0)$

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$ — тривиально

$$2 \Rightarrow 3 : 0 \leq f^\pm \leq |f|$$

$$3 \Rightarrow 1 : f = f^+ - f^- \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^b f^+ - \int_a^b f^-$$

□

Ряд A абсолютно сходится, если 1 и 2:

1. $\sum a_n$ сх.
2. $\sum |a_n|$ сх.

2.40 Изучение интеграла $\int_1^\infty \frac{\sin x \, dx}{x^p}$ на сходимость и абсолютную сходимость

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$$

- При каких p сходится?
- При каких p абсолютно сходится?

$$1. p > 1 \Rightarrow \text{абсолютно сходится, т.к. } \left| \frac{\sin x}{x^p} \right| < \frac{1}{x^{p-1}}$$

2. $p > 0 \Rightarrow$ сходится, т.к. (по частям):

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} = -\frac{\cos x}{x^p} \Big|_1^{+\infty} - p \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p+1}}$$

Первое конечно, второе абсолютно сходится.

3. $p \leq 0$, по критерию Коши:

$$\exists A_n, B_n \rightarrow b \quad \int_{A_n}^{B_n} f \not\rightarrow 0 \Rightarrow \int_a^b f \text{ расходится}$$

$$A_n := 2\pi n, B_n := 2\pi n + \pi \quad \int_{A_n}^{B_n} \frac{\sin x}{x^p} dx \geq (2\pi n)^{-p} \int_{A_n}^{B_n} \sin x \text{ расходится}$$

Итого для $p \leq 0$ расходится.

4. $0 < p \leq 1$, абсолютная сходимость?

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p}$$

(a) Первый способ. $A_n := \pi n, B_n := 2\pi n$

$$\int_{A_n}^{B_n} \frac{|\sin x|}{x^p} \geq \frac{1}{(2\pi n)^p} \underbrace{\int_{A_n}^{B_n} |\sin x|}_{\text{площадь } n \text{ арок синуса}} = \frac{2n}{(2\pi n)^p} = Cn^{1-p} \not\rightarrow 0$$

(b) Второй способ.

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} \geq \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^p} = \int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos(2x)}{2x^p} = \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^p}}_{+\infty} - \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x^p}}_{\text{При } p > 0 \text{ сходится как в пункте 2}}$$

Итого абсолютной сходимости нет.

2.41 Признак Абеля–Дирихле сходимости несобственного интеграла

f — допустима на $[a, b)$, $g \in C^1[a, b)$

Если выполняется 1 или 2, то $\int_a^b fg$ — сходится

1. (a) $F(A) := \int_a^A f(x)dx$, $A \in [a, b)$, F ограничена, т.е.:

$$\exists K : \forall A \in [a, b) \quad \left| \int_a^A f \right| \leq K$$

(b) $g(x)$ монотонна, $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow b-0} 0$

2. (a) $\int_a^b f(x)dx$ сходится, необязательно абсолютно

(b) $g(x)$ монотонна, $g(x)$ ограничена, т.е.: $\exists L \quad \forall x \in [a, b) \quad |g(x)| \leq L$

1 часть — Дирихле, 2 — Абель.

Доказательство. 1.

$$\int_a^b fg = F(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

$$\lim_{x \rightarrow b-0} \underbrace{F(x)}_{\text{огр.}} \underbrace{g(x)}_{\text{б.м.}} = 0 \Rightarrow F(x)g(x) \Big|_a^b - \text{конечн.}$$

Покажем абсолютную сходимость, из нее следует обычная сходимость:

$$\int_a^b |F(x)g'(x)|dx \leq \int_a^b K \int_a^b |g'| =$$

Можно снять модуль, т.к. g монотонна $\Rightarrow \text{sign}(g') = \text{const}$

$$= \pm K \int_a^b g' = \pm K g(x) \Big|_a^b = \pm K \left(\underbrace{\lim_{x \rightarrow b-0} g(x)}_0 - \underbrace{g(a)}_{\text{кон.}} \right)$$

2. $\alpha := \lim_{x \rightarrow b-0} g(x) - \text{кон.}$

$$\int_a^b fg = \underbrace{\int_a^b f \alpha}_{\text{кон. по а}} + \underbrace{\int_a^b f(g - \alpha)}_{\text{сс сходится по 1}}$$

Пояснение насчет сходимости $\int_a^b f(g - \alpha)$:

(а) $F : A \mapsto \int_a^A f$ — ограничена, т.к. $\int_a^b f$ сходится

(б) $g \rightarrow \alpha \Rightarrow (g - \alpha) \rightarrow 0$

□

2.42 Интеграл Дирихле

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Доказательство.

$$\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$$

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos x + 2 \sin \frac{x}{2} \cos 2x + \dots + 2 \sin \frac{x}{2} \cos nx = \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) x - \sin \frac{x}{2}$$

$$\sin \frac{3}{2}x - \sin \frac{1}{2}x + \dots + \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) x - \sin \left(n - \frac{1}{2}\right) x = \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) x - \sin \frac{x}{2}$$

$$\int_0^\pi \cos kx = \frac{1}{k} \sin kx \Big|_0^\pi = 0$$

Проинтегрируем исходное выражение по $[0, \pi]$:

$$0 = \int_0^\pi \dots = \int_0^\pi \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} dx - \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{x} dx = \left[\begin{array}{l} y = \left(n + \frac{1}{2}\right)x \\ x = \frac{1}{n + \frac{1}{2}}y \quad dx = \frac{1}{n + \frac{1}{2}}dy \end{array} \right] =$$

$$= \int_0^{(n + \frac{1}{2})\pi} \frac{\sin y}{\frac{1}{n + \frac{1}{2}}y} \frac{1}{n + \frac{1}{2}} dy = \int_0^{(n + \frac{1}{2})\pi} \frac{\sin y}{y} dy$$

Итого:

$$\int_0^\pi \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{x} dx = \int_0^{(n + \frac{1}{2})\pi} \frac{\sin y}{y} dy$$

Проверим:

$$\int_0^\pi \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} dx - \int_0^\pi \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{x} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\int_0^\pi \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x h(x) dx$$

$$h(x) = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{x} = \frac{x - 2 \sin \frac{x}{2}}{2x \sin \frac{x}{2}} = \frac{\mathcal{O}(x^3)}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$\int_0^\pi \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x h(x) dx = \left[\begin{array}{l} f = h(x) \\ g' = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x \end{array} \right] =$$

$$= \frac{-1}{n + \frac{1}{2}} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x h(x) \Big|_0^\pi + \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \int_0^\pi \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x h'(x) dx$$

$$h'(x) = -\frac{\cos \frac{x}{2}}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 \cos \frac{x}{2} - 4 \sin^2 \frac{x}{2}}{4x^2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{x^2 \left(1 - \frac{x^2}{4} + o(x^3)\right) - 4 \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48} + o(x^3)\right)}{4x^2 \sin^2 \frac{x}{2}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \text{const}$$

$\Rightarrow h'(0) = \text{const}$ (той, которая \lim) и $h \in C^1[0, \pi]$

$$\int_0^\pi \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x h(x) dx = \underbrace{\frac{-1}{n + \frac{1}{2}} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x \underbrace{h(x)}_{\text{огр.}} \Big|_0^\pi}_{\substack{\text{огр.} \\ \rightarrow 0}} + \underbrace{\frac{1}{n + \frac{1}{2}} \int_0^\pi \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x \underbrace{h'(x)}_{\text{огр., т.к. } \in C^1} dx}_{\substack{\text{огр., непр.} \\ \text{огр. как ф-ция от } n \\ \rightarrow 0}}$$

$$\underbrace{\int_0^{(n + \frac{1}{2})\pi} \frac{\sin x}{x} dx}_{\rightarrow \text{инт. Дирихле}} = \underbrace{\int_0^\pi \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{x} dx - \int_0^\pi \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} dx}_{\rightarrow 0} + \int_0^\pi \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} dx \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

□

2.43 Неравенство Йенсена для сумм

f — выпуклая на $\langle a, b \rangle$. Тогда

$$\forall x_1 \dots x_n \in \langle a, b \rangle \quad \forall \alpha_1 \dots \alpha_n : \alpha_i \geq 0 \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1 \quad f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)$$

Доказательство. Для $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ тривиально.

$$\begin{aligned} \min x_i \leq x^* := \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n &\leq (\alpha_1 + \dots + \alpha_n) \max(x_i) = \max(x_i) \\ &\Rightarrow x^* \in \langle a, b \rangle \end{aligned}$$

В x^* можно провести опорную прямую $y = kx + b$

$$f(x^*) = kx^* + b = \sum_{i=1}^n (\alpha_i kx_i) + b = \sum_{i=1}^n \alpha_i (kx_i + b) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$$

□

2.44 Неравенство Йенсена для интегралов

- f — выпуклая на $\langle A, B \rangle$
- $\varphi : [a, b] \rightarrow \langle A, B \rangle$ — непрерывная
- $\lambda : [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$ — непрерывная (для кусочно-непрерывной тоже верно)
- $\int_a^b \lambda(t) dt = 1$

Тогда

$$f\left(\int_a^b \lambda(t) \varphi(t) dt\right) \leq \int_a^b \lambda(t) f(\varphi(t)) dt$$

Доказательство. $m := \inf \varphi, M := \sup \varphi$

$$m \leq m \int_a^b \lambda(t) \leq \int_a^b \lambda(t) \varphi(t) \leq M \int_a^b \lambda(t) = M$$

$$x^* := \int_a^b \lambda(t) \varphi(t) dt \Rightarrow x^* \in \langle A, B \rangle$$

Для $m = M$ тривиально.

$y = kx + b$ — опорная прямая в точке x^* графика f .

$$\begin{aligned} f(x^*) = kx^* + b &= k \int_a^b \lambda \varphi + b \int_a^b \lambda = \int_a^b \lambda(t) (k\varphi(t) + b) dt \leq \\ &\leq \int_a^b \lambda(t) f(\varphi(t)) dt \end{aligned}$$

□

2.45 Неравенство Коши (для сумм и для интегралов)

$$a_i > 0 \quad \frac{1}{n} \sum a_i \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

Доказательство. $f(x) = \ln x$ — вогн., $\alpha_i = \frac{1}{n}$, по неравенству Йенсена:

$$\ln \left(\frac{1}{n} a_1 + \dots + \frac{1}{n} a_n \right) \geq \frac{1}{n} \ln a_1 + \dots + \frac{1}{n} \ln a_n$$

$$\ln \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right) \geq \frac{1}{n} \ln(a_1 \cdots a_n)$$

$$\ln \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right) \geq \ln(a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq (a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

□

Неравенство Коши для интегралов:

$$f > 0, f \in C[a, b] \quad \exp \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f(x) dx \right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Правая часть — среднее арифметическое f на $[a, b]$ по интегральным суммам.

Левая часть — среднее геометрическое.

$$\exp \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f(x) dx \right) = \exp \left(\sum \frac{1}{n} \ln f(x_i) \right) = \prod_{i=1}^n \exp \left(\frac{\ln(f(x_i))}{n} \right) = \sqrt[n]{f(x_1) \cdots f(x_n)}$$

Возьмём логарифм от искомого неравенства:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f(x) dx \leq \ln \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f \right)$$

Подставим в интегральное неравенство Йенсена:

- $f \leftrightarrow \ln$
- $\lambda(t) \leftrightarrow \frac{1}{b-a}$
- $\varphi \leftrightarrow f$

2.46 Неравенство Гельдера для сумм

$a_1 \dots a_n, b_1 \dots b_n > 0, p > 1, q > 1 \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Частный случай при $p = q = 2$ — неравенство Коши-Буняковского.

Доказательство. $f(x) = x^p, (p > 1)$ — строго выпуклая $\Rightarrow f'' = p(p-1)x^{p-2} > 0$
 По Йенсену $(\sum \alpha_i x_i)^p \leq \sum \alpha_i x_i^p$

$$\text{Левая часть}^{\frac{1}{p}} = \sum \frac{b_i^q}{\sum b_i^q} a_i b_i^{\frac{-1}{p-1}} \sum b^q = \sum a_i b_i$$

$$\text{Правая часть} = \sum \frac{b_i^q}{\sum b_i^q} a_i^p b_i^{-q} \left(\sum b_j^q \right)^p = \left(\sum a_i^p \right) \left(\sum b_j^q \right)^{\frac{p}{q}}$$

$$\text{Правая часть}^{\frac{1}{p}} = \left(\sum a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum b_j^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

□

2.47 Неравенство Гельдера для интегралов

$p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ $f, g \in C[a, b]$. Тогда

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left(\int_a^b |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Неравенство КБШ в пространстве функций — частный случай этого неравенства.

Доказательство. По интегральным суммам:

$$x_i := a + i \frac{b-a}{n} \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad a_i := f(x_i)(\Delta x_i)^{\frac{1}{p}} \quad b_i = g(x_i)(\Delta x_i)^{\frac{1}{q}}$$

$$a_i b_i = f(x_i)g(x_i)(\Delta x_i)$$

$$\left| \sum_{i=1}^n f(x_i)g(x_i)\Delta x_i \right| \leq \left(\sum |f(x_i)|^p \Delta x_i \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |g(x_i)|^q \Delta x_i \right)^{\frac{1}{q}}$$

Предельный переход доказывает искомое.

□

2.48 Неравенство Минковского

$p \geq 1, a_i, b_i \in \mathbb{R}$

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Это неравенство треугольника для нормы $\|a\|_p = \left(\sum |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

Доказательство. $p = 1$ тривиально, $|a_i + b_i| \leq |a_i| + |b_i|$

Докажем для положительных a_i, b_i , другие случаи сводятся к этому.

По неравенству Гёльдера для $q = p/(p-1)$:

$$\sum a_i(a_i + b_i)^{p-1} \leq \left(\sum a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum (a_i + b_i)^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\sum b_i(a_i + b_i)^{p-1} \leq \left(\sum b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum (a_i + b_i)^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

Сложим эти два неравенства:

$$\sum (a_i + b_i)^p \leq \left(\left(\sum a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \left(\sum (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left(\sum (a_i + b_i)^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left(\sum (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

□

2.49 Свойства верхнего и нижнего пределов

1. $\underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$
2. $\forall n \ x_n \leq \tilde{x}_n \Rightarrow$:
 - (a) $\overline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} \tilde{x}_n$
 - (b) $\underline{\lim} x_n \leq \underline{\lim} \tilde{x}_n$
3. $\lambda \geq 0 \Rightarrow \overline{\lim}(\lambda x_n) = \lambda \overline{\lim} x_n; \underline{\lim} \lambda x_n = \lambda \underline{\lim} x_n$, считаем что $0 \cdot (\pm\infty) = 0$
4. $\overline{\lim} -x_n = -\underline{\lim} x_n; \underline{\lim} -x_n = -\overline{\lim} x_n$
5. $\overline{\lim}(x_n + y_n) \leq \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} y_n$, если правая часть имеет смысл, т.е. нет ситуации вида $+\infty - \infty$
 $\underline{\lim}(x_n + y_n) \leq \underline{\lim} x_n + \underline{\lim} y_n$
6. $t_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{\lim}(x_n + t_n) = \overline{\lim} x_n + l$
7. $t_n \rightarrow l \in (0, +\infty) \Rightarrow \overline{\lim}(t_n x_n) = l \overline{\lim} x_n$

Доказательство. 1. $y_n \leq x_n \leq z_n$, по предельному переходу тривиально.

2. $z_n = \sup(x_n, x_{n+1}, \dots), \tilde{z}_n = \sup(\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n+1}, \dots) \Rightarrow z_n \leq \tilde{z}_n$
3. $\sup \lambda E = \lambda \sup E$
4. $\sup -E = -\inf E$
5. $\sup(x_n + y_n, x_{n+1} + y_{n+1}, \dots) \leq \sup(x_n, x_{n+1}, \dots) + \sup(y_n, y_{n+1}, \dots)$
6. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 \ \forall k > N_0 \ x_k + l - \varepsilon < x_k + t_k < x_k + l + \varepsilon$
 $\triangleleft N > N_0$, перейдем к \sup по $k \geq N$:

$$y_N + l - \varepsilon < \sup(x_N + t_N, x_{N+1} + t_{N+1}, \dots) \leq y_N + l + \varepsilon$$

Предельный переход:

$$\overline{\lim} x_N + l - \varepsilon \leq \overline{\sup}(x_N + t_N) \leq \overline{\lim} x_N + l + \varepsilon$$

$$\underline{\lim}(x_n + t_n) = \overline{\lim} x_n + l$$

7. То же самое.

□

2.50 Техническое описание верхнего предела

1. $\overline{\lim} x_n = +\infty \Leftrightarrow x_n$ — неогр. сверху
2. $\overline{\lim} x_n = -\infty \Leftrightarrow x_n \rightarrow -\infty$
3. $\overline{\lim} x_n = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ а и б:
 - (а) $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \ x_n < l + \varepsilon$
 - (б) $\forall \varepsilon > 0$ для бесконечного множества номеров $n : l - \varepsilon < x_n$

Доказательство. 1. Очевидно, т.к. $y_n = \sup(x_n, x_{n+1} \dots) = +\infty \Leftrightarrow x_n$ — неогр. сверху

2. “ \Rightarrow ” $x_n \leq y_n \rightarrow -\infty$
 “ \Leftarrow ” $\forall A \exists N \forall n > N \ y_n \leq A, x_n < A$
3. “ \Rightarrow ” (а) $y_n \rightarrow l \ \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \ x_n \leq y_n < l + \varepsilon$
 (б) Берём $\varepsilon > 0$, предположим противное : \exists конечное мн-во $n : l - \varepsilon < x_n$
 $]n_0$ — максимальный номер, такой что $l - \varepsilon < x_{n_0}$, тогда $y_{n_0} \leq l - \varepsilon$, но $y_n \downarrow \Rightarrow$
 $\lim y_n \leq l - \varepsilon$
 “ \Leftarrow ” $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \ x_n < l + \varepsilon \Rightarrow y_n \leq l + \varepsilon$, но в $x_n, x_{n+1} \dots \exists x_i : l - \varepsilon < x_i \Rightarrow y_n =$
 $\sup(x_n, x_{n+1} \dots) > l - \varepsilon$. Итого $l + \varepsilon \geq y_n > l - \varepsilon \Rightarrow l = \lim y_n = \overline{\lim} x_n$

□

2.51 Теорема о существовании предела в терминах верхнего и нижнего пределов

$$\exists \lim x_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$$

Доказательство. “ \Rightarrow ” 1. $\lim x_n = +\infty \Rightarrow \overline{\lim} x_n = \lim y_n \geq \lim x_n = +\infty$
 2. $\lim x_n = -\infty$ аналогично
 3. $\lim x_n = l \in \mathbb{R}$ очевидно из технического описания предела, пункт 3.

“ \Leftarrow ” $\underline{\lim} x_n \leftarrow z_n \leq x_n \leq y_n \rightarrow \overline{\lim} x_n$, по теореме о городских $\exists \lim x_n = \overline{\lim} x_n$

□

2.52 Теорема о характеристике верхнего предела как частичного

1. $\forall l$ — частичный пр. $x_n \ \underline{\lim} x_n \leq l \leq \overline{\lim} x_n$
2. $\exists (n_k) : x_{n_k} \rightarrow \overline{\lim} x_n \ \exists m_k : x_{m_k} \rightarrow \underline{\lim} x_n$

Доказательство. 1. $x_{n_k} \rightarrow l \ \underline{\lim} x_n \leftarrow z_{n_k} \leq x_{n_k} \leq y_{n_k} \rightarrow \overline{\lim} x_n \Rightarrow \underline{\lim} x_n \leq l \leq \overline{\lim} x_n$

2. (а) $\overline{\lim} x_n = +\infty \Leftrightarrow x_n$ — неогр сверху \Rightarrow можно выбрать $x_{n_1} < x_{n_2} < \dots x_n \rightarrow +\infty$
- (б) $\overline{\lim} x_n = -\infty$ тривиально.
- (с) $\overline{\lim} x_n = l \in \mathbb{R} \exists x_{n_k} : l - \frac{1}{k} < x_{n_k} < l + \frac{1}{k}$

□

2.53 Частичные пределы последовательности $\sin(n)$

1. $\overline{\lim} \sin n = 1, \underline{\lim} \sin n = -1$
2. $\forall l \in [-1, 1]$ — частичный предел последовательности $\sin n$

Доказательство. 1. Тривиально

2. $n_k := \arcsin l + 2\pi k$

У Кохася было непонятное длинное доказательство

□

2.54 Свойства рядов: линейность, свойства остатка, необх. условие сходимости, критерий Больцано–Коши

1. $\sum a_n, \sum b_n$ сходятся, $c_n := a_n + b_n$. Тогда $\sum c_n$ сходится
2. $\sum a_n$ — сходится, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда $\sum \lambda a_n$ сходится и $\sum \lambda a_n = \lambda \sum a_n$
3. (a) $\sum a_n$ — сходится \Rightarrow любой остаток сходится
 (b) остаток сходится $\Rightarrow \sum a_n$ сходится
 (c) $r_N = \sum_{n \geq N} a_n$ сходится $\Leftrightarrow r_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$

Доказательство. (a) ? m -й остаток, $N \geq m$: $\sum_{n=1}^N a_n = \sum_{n=1}^{m-1} a_n + \sum_{n=m}^N a_n$

(b) Аналогично.

(c) “ \Leftarrow ” Тривиально.

$$\text{“}\Rightarrow\text{”} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{m-1} a_n + r_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + r_{+\infty} \Rightarrow r_N \rightarrow 0$$

□

$\sum a_n$ сходится $\Rightarrow a_n \rightarrow 0$

$$\sum a_n \text{ сходится} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall k > N \forall m \in \mathbb{N} \quad |a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{k+m}| < \varepsilon$$

2.55 ! Признак сравнения сходимости положительных рядов

$a_k, b_k \geq 0$

1. $\forall k \ a_k \leq b_k$, или $\exists c > 0 \ \forall k \ a_k \leq cb_k$. Тогда $\sum b_k$ сх. $\Rightarrow \sum a_k$ сх., $\sum a_k$ расх. $\Rightarrow \sum b_k$ расх.
2. $\exists \lim \frac{a_k}{b_k} = l \in [0, +\infty]$. Тогда при

$0 < l < +\infty$: $\sum a_k$ сх. $\Leftrightarrow \sum b_k$ сх.

$l = 0$: $\sum b_k$ сх. $\Rightarrow \sum a_k$ сх., $\sum a_k$ расх. $\Rightarrow \sum b_k$ расх.

$l = +\infty$: $\sum a_k$ сх. $\Rightarrow \sum b_k$ сх., $\sum b_k$ расх. $\Rightarrow \sum a_k$ расх.

Доказательство.

Лемма 1. $a_n \geq 0$ $\sum a_n$ сходится $\Leftrightarrow S_n$ ограничено сверху.

Доказательство. \exists кон. $\lim S_n \Leftrightarrow S_n$ ограничено сверху. □

1. $S_n^{(a)} \leq S_n^{(b)}$; $S_n^{(b)}$ огр. $\Rightarrow S_n^{(a)}$ огр., по лемме a_n сходится. Аналогично расходимость.
2. (a) $0 < l < +\infty$: Для $\varepsilon = \frac{l}{2}$ $\exists N \forall n > N \frac{1}{2}lb_n < a_n < \frac{3}{2}lb_n$, дальше по 1 пункту.
 (b) $l = 0$: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon \Rightarrow a_n < \varepsilon b_n \Rightarrow$ по 1 пункту.
 (c) $l = +\infty$: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \frac{a_n}{b_n} > \varepsilon \Rightarrow a_n > b_n \varepsilon \Rightarrow$ по 1 пункту.

□

2.56 ! Признак Коши сходимости положительных рядов

$a_n \geq 0, K_n := \sqrt[n]{a_n}$. Тогда:

Lite:

1. Если $\exists q < 1 : K_n \leq q$, начиная с некоторого места (НСМ) $(\exists N : \forall n > N) \Rightarrow \sum a_n$ сходится.
2. $K_n \geq 1$ для бесконечного множества $\Rightarrow \sum a_n$ расходится.

Pro: $K := \overline{\lim} K_n$

1. $K < 1 \Rightarrow \sum a_n$ сходится
2. $K > 1 \Rightarrow \sum a_n$ расходится

Доказательство. Lite:

1. НСМ $\sqrt[n]{a_n} \leq q \Leftrightarrow a_n \leq q^n, q_n \text{ сх.} \Rightarrow \sum a_n \text{ сх.}$
2. $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \Leftrightarrow a_n \geq 1 \Rightarrow a_n \not\rightarrow 0 \Rightarrow \sum a_n \text{ расх.}$

Pro:

1. По техническому описанию $\overline{\lim} \exists N \forall n > N K_n < q \Rightarrow$ по Lite.1 сходится.
2. $l = \overline{\lim} K_n > 1, 1 = l - \varepsilon$. Тогда $K_n \geq 1$ для бесконечного множества $n \Rightarrow$ по Lite.2 расходится.

□

2.57 Признак Коши сходимости положительных рядов (pro)

Дано выше. (2.56, стр. 45)

2.58 Признак Даламбера сходимости положительных рядов

$a_n > 0, D_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Lite:

1. $\exists q < 1 : D_n < q$ НСМ $\Rightarrow \sum a_n \text{ сх.}$
2. $D_n \geq 1$ НСМ $\Rightarrow \sum a_n \text{ расх.}$

Pro: $D := \lim D_n$

1. $D < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ сх.}$
2. $D > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ расх.}$

Доказательство. Lite:

$$1. \exists N : \frac{a_{N+1}}{a_N} < q, \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < q, \dots$$

$$\frac{a_n}{a_N} < q^{n-N}$$

$$a_n < q^n \left(\frac{a_N}{q^N} \right)$$

$$\sum q^n \text{ с.х.} \Rightarrow \sum a_n \text{ с.х.}$$

2. $D_n \geq 1 \Leftrightarrow a_{n+1} \geq a_n$, при $n > N$ $a_n \geq a_N \Rightarrow a_n \geq A_N \Rightarrow a_n \not\rightarrow 0$. Также можно аналогично пункту 1.

Pro:

1. $q := \frac{1+D}{2}$. По определению предела $\varepsilon := q - D \exists N \forall n > N D_n < q \xrightarrow{\text{Lite1}} \sum a_n \text{ с.х.}$

2. $\varepsilon := D - 1 \exists N \forall n > N D_n > 1 \xrightarrow{\text{Lite2}} \sum a_n \text{ расх.}$

□

2.59 Признак Раабе сходимости положительных рядов

$a_n > 0, R_n := n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$. Тогда:

1. $\exists r > 1 R_n \geq r \text{ НСНМ} \Rightarrow \sum a_n \text{ с.х.}$

2. $R_n \leq 1 \text{ НСНМ} \Rightarrow \sum a_n \text{ с.х.}$

Доказательство. 1. $R_n \geq r \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 + \frac{r}{n}$

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s - 1}{\frac{1}{n}} < r \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s < 1 + \frac{r}{n}$$

$$b_n := \frac{1}{n^s} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\frac{a_n}{a_{n+1}}} \leq \frac{1}{1 + \frac{r}{n}} < \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

$$\sum b_n \text{ с.х.} \Rightarrow \sum a_n \text{ с.х. по лемме 1.}$$

2. $R_n \leq 1 \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$$

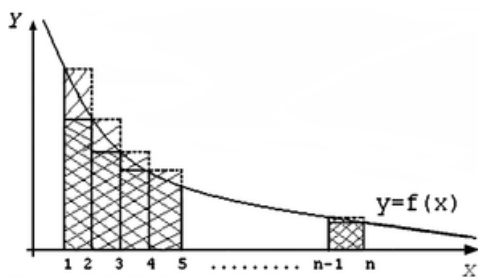
$$b_n = \frac{1}{n} \text{ расх.} \Rightarrow \sum a_n \text{ расх.}$$

□

2.60 Интегральный признак Коши сходимости числовых рядов

$f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ монотонно убывает, $f \geq 0$, f непр.

Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ и $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится/расходится одновременно.



Доказательство.

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^{n+1} f(x) dx + \Delta_n$$

Δ_n — площадь криволинейных треугольников, получаемых отсечением кривой $y = f(x)$.

$$0 \leq \Delta_n \leq f(1) - f(n) \leq f(1)$$

$\Delta_n \uparrow \Rightarrow \exists \text{ кон. } \lim \Delta_n$

Более формальный вариант, без картинок:

$$\sum_{k=1}^n - \int_1^{n+1} = \sum_{k=1}^n \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(x) dx \right)$$

Т.к. $f \downarrow$:

$$\int_k^{k+1} f(x) dx \geq \int_k^{k+1} f(k+1) dx = f(k+1)$$

$$\sum_{k=1}^n \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(x) dx \right) \leq \sum_{k=1}^n f(k) - f(k+1) = f(1) - f(n+1)$$

□

2.61 ! Признак Лейбница

$c_n \geq 0, c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq \dots, c_n \rightarrow 0$

Тогда $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n c_n$ сх.

Доказательство.

$$S_{2N} = c_1 - c_2 + \dots + c_{2N-1} - c_{2N}$$

$$S_{2N+2} = S_{2N} + (c_{2N+1} - c_{2N+2}) \geq S_{2N}$$

$$S_{2N} \uparrow, S_{2N} \leq c_1$$

□

2.62 Признаки Дирихле и Абеля сходимости числового ряда

Дирихле:

1. Последовательность $A_k = \sum_{i=1}^k a_i$ ограничена: $\exists C_A > 0 \forall k |A_k| < C_A$

2. b_k монотонна и $\rightarrow 0$

Абеля:

1. Ряд $\sum a_k$ сходится
2. b_k монотонна, ограничена: $\exists C_B > 0 \forall k |A_k| < C_B$

Если хотя бы один из этих признаков состоялся, $\sum_{k=1}^n a_k b_k$ сходится.

Доказательство.

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \underbrace{A_n b_n}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})}_{\substack{\exists \text{ конечный предел,} \\ \text{т.к. ряд абсолютно сходится}}}$$

Докажем Дирихле.

$$\sum_{k=1}^{n-1} |A_k| |b_k - b_{k+1}| \leq C_A \sum_{k=1}^{n-1} |b_k - b_{k+1}| = \pm C_A \sum_{k=1}^{n-1} b_k - b_{k+1} = \pm \underbrace{C_A (b_1 - b_n)}_{\text{огр.}} \leq C_A C_B$$

Докажем Абеля.

\exists конечный $\beta = \lim_{k \rightarrow +\infty} b_k$

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \beta \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n a_k (b_k - \beta)$$

Второй ряд сходится по признаку Дирихле, первый сходится по условию. □

2.63 Теорема о перестановке слагаемых

Ряд A абсолютно сходится, тогда его перестановка B тоже абсолютно сходится и имеет ту же сумму.

Доказательство. 1. $a_k \geq 0$

$$S_n^{(b)} = b_1 + \dots + b_n = a_{w(1)} + \dots + a_{w(n)} \leq S_N^{(a)}, N = \max(w(1) \dots w(n))$$

Предельный переход: $S^{(b)} \leq S^{(a)}$

Т.к. A — перестановка B , то $S^{(a)} \leq S^{(b)} \Rightarrow S^{(a)} = S^{(b)}$

2. Общий случай

$$a_k^+ = \max(a_k, 0), a_k^- = \max(-a_k, 0)$$

$$\sum b_k^+ - \text{перестановка } \sum a_k^+; \sum b_k^- - \text{перестановка } \sum a_k^-$$

Срезки сходятся по пункту 1., в силу абсолютной сходимости частичные суммы конечны $\Rightarrow S^{(a)} = S^{(b)}$ □

2.64 Теорема о произведении рядов

Доказательство. $\sum |a_k| = A^*, \sum |b_k| = B^*, 0 \leq A^*, B^* < +\infty$

$$\sum_{k=1}^N |a_{\varphi(x)} b_{\psi(x)}| \leq \sum_{i=1}^M |a_i| \sum_{j=1}^L |b_j| \leq A^* B^*$$

$$M := \max(\varphi(1) \dots \varphi(N)) \quad N := \max(\psi(1) \dots \psi(N))$$

Итого произведение сходится абсолютно $\Rightarrow \forall \gamma$ произведение рядов имеет одинаковую сумму. Возьмём γ такое, что оно обходит точки $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ “по квадратам”, т.е. не заходит в следующий квадрат, пока не обошло предыдущий. Тогда:

$$\sum_{k=1}^{n^2} a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)} = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n b_j \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} AB$$

□

2.65 Теорема об условиях сходимости бесконечного произведения

1. $a_n > 0$ НСНМ. Тогда $\prod 1 + a_n$ сходится $\Leftrightarrow \sum a_n$ сходится.

2. $\sum a_n$ сходится, $\sum a_n^2$ сходится $\Rightarrow \prod (1 + a_n)$ сходится.

Доказательство. 1. $\prod (1 + a_n) - \text{сх.} \Leftrightarrow \sum \ln(1 + a_n) - \text{сх.} \Leftrightarrow \sum a_n - \text{сх.}$

2. $\ln(1 + a_n) = a_n - \frac{a_n^2}{2} + o(a_n^2)$

$$\sum_{n=1}^N \ln(1 + a_n) = \sum_{n=1}^N a_n - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N a_n^2 + \underbrace{\sum_{n=1}^N o(a_n^2)}_{\text{абс.сх}}$$

□

2.66 Лемма об оценке приближения экспоненты ее замечательным пределом

$0 \leq t \leq n$. Тогда

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2 e^{-t}}{n}$$

Доказательство. Т.к. $y = 1 + x$ — график касательной к e^x в $x = 0$ и экспонента выпуклая:

$$1 + y \leq e^y$$

Произошла коллизия переменных, x стал y .

Заменим y на $-y$:

$$1 - y \leq e^{-y}$$

Возведем в степень -1 :

$$(1 - y)^{-1} \geq e^y$$

Итого:

$$1 + y \leq e^y \leq (1 - y)^{-1}$$

$$y := \frac{t}{n}$$

$$1 + \frac{t}{n} \leq e^{\frac{t}{n}} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{-1}$$

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^{-n} \geq e^{-t} \geq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

По правому неравенству:

$$e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \geq 0$$

Возведем левое неравенство в степень -1 :

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leq e^t$$

$$e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t} \left(1 - e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) \leq e^{-t} \left(1 - \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) = e^{-t} \left(1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right)$$

$$e^{-t} \left(1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right) \stackrel{\text{неравенство Бернулли}}{\leq} \frac{t^2}{n} e^{-t}$$

Примечание. Неравенство Бернулли: $(1+a)^n \geq 1+an$, $a \geq -1$, в данном случае $a = -\frac{t^2}{n^2}$

В неравенстве Бернулли $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ **предположительно** в лемме $n \in \mathbb{N}$, на лекции этого не было сказано. \square

2.67 Формула Эйлера для Γ -функции

При $x > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{x(x+1) \cdots (x+n)} n^x = \Gamma(x)$$

Доказательство.

$$\Gamma(x) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \Pi(n, x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\int_0^n \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) t^{x-1} dt}_I + \underbrace{\int_n^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt}_{II} \right) \stackrel{?}{=} 0$$

$II \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, т.к. это “остаточный интеграл”, при $n \rightarrow +\infty$ интеграл “берется по нулевому промежутку”.

По лемме о приближении e пределом:

$$0 \leq I \leq \int_0^n \frac{1}{n} t^2 e^{-t} t^{x-1} dt \leq \frac{1}{n} \int_0^n e^{-t} t^{x+1} dt \leq \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x+1} dt = \frac{\Gamma(x+2)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

\square

2.68 Формула Вейерштрасса для Γ -функции

При $x > 0$:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}$$

где $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \dots + \frac{1}{n} - \ln n)$ — постоянная Эйлера.

Вывод формулы Вейерштрасса (из формулы Эйлера):

Доказательство.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(x)} &= \lim n^{-x} \frac{x(x+1) \dots (x+n)}{n!} = x \lim n^{-x} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) = \\ &= x \lim \underbrace{e^{x(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n})-x \ln n}}_{e^{\gamma+o(1)}} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} = e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}\end{aligned}$$

□

2.69 Вычисление произведений с рациональными сомножителями

$a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$, P и Q — многочлены.

$\prod a_n = ?$

Пусть P и Q разложены на множители, т.е:

$$P(n) = \alpha(n + a_1)(n + a_2) \dots (n + a_k)$$

$$Q(n) = \beta(n + b_1)(n + b_2) \dots (n + b_l)$$

$$a_n = \frac{\alpha}{\beta} \frac{(n + a_1) \dots (n + a_k)}{(n + b_1) \dots (n + b_l)}$$

Если $k \neq l$, то $a_n \rightarrow 0$ или $a_n \rightarrow +\infty \Rightarrow \prod a_n$ расходится. $\triangleleft k = l$

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{\beta}$$

Если $\frac{\alpha}{\beta}$, то $a_n \not\rightarrow 1 \Rightarrow \prod a_n$ расходится. $\triangleleft \frac{\alpha}{\beta} = 1$

$$a_n = \frac{(1 + \frac{a_1}{n}) \dots (1 + \frac{a_k}{n})}{(1 + \frac{b_1}{n}) \dots (1 + \frac{b_l}{n})} = 1 + \frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_k - b_1 - \dots - b_k) + O(\frac{1}{n^2})$$

Если $\sum_{i=1}^k a_i \neq \sum_{i=1}^l b_i$, то $\prod a_n$ расходится. $\triangleleft \sum_{i=1}^k a_i = \sum_{i=1}^l b_i$

$$\prod_{n=1}^N \frac{(1 + \frac{a_1}{n}) \dots (1 + \frac{a_k}{n})}{(1 + \frac{b_1}{n}) \dots (1 + \frac{b_l}{n})} = \prod_{n=1}^N \frac{(1 + \frac{a_1}{n}) e^{-\frac{a_1}{n}} \dots (1 + \frac{a_k}{n}) e^{-\frac{a_k}{n}}}{(1 + \frac{b_1}{n}) e^{-\frac{b_1}{n}} \dots (1 + \frac{b_l}{n}) e^{-\frac{b_l}{n}}}$$

Равенство состоялось, т.к. $\sum a_i = \sum b_i$.

По формуле Вейерштрасса:

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{a}{n}\right) e^{-\frac{a}{n}} &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{ae^{\gamma a} \Gamma(a)} \\ \prod_{n=1}^N \frac{(1 + \frac{a_1}{n}) e^{-\frac{a_1}{n}} \dots (1 + \frac{a_k}{n}) e^{-\frac{a_k}{n}}}{(1 + \frac{b_1}{n}) e^{-\frac{b_1}{n}} \dots (1 + \frac{b_l}{n}) e^{-\frac{b_l}{n}}} &\rightarrow \frac{b_1 e^{\gamma b_1} \Gamma(b_1) \dots b_l e^{\gamma b_l} \Gamma(b_l)}{a_1 e^{\gamma a_1} \Gamma(a_1) \dots a_k e^{\gamma a_k} \Gamma(a_k)} = \\ &= \frac{e^{\gamma b_1} \Gamma(b_1 + 1) \dots e^{\gamma b_l} \Gamma(b_l + 1)}{e^{\gamma a_1} \Gamma(a_1 + 1) \dots e^{\gamma a_k} \Gamma(a_k + 1)} = \frac{\Gamma(b_1 + 1) \dots \Gamma(b_l + 1)}{\Gamma(a_1 + 1) \dots \Gamma(a_k + 1)}\end{aligned}$$

2.70 Единственность производной

Производный оператор единственный.

Доказательство.

$$\exists \delta > 0 \quad \forall h : |h| < \delta \quad a + h \in E$$

Возьмём $v \in \mathbb{R}^m \quad h := tv, t < \frac{\delta}{|v|}$

По определению дифференциала:

$$F(a + tv) = F(a) + F'(a)tv + |tv|\alpha(tv) = F(a) + tF'(a)v + |t||v|\alpha(tv)$$

$$F'(a)v = \frac{F(a + tv) - F(a)}{t} - \overbrace{\frac{|t|}{t} |v|\alpha(tv)}^{\xrightarrow{t \rightarrow 0} \pm |v|0}$$

$$F'(a)v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(a + tv) - F(a)}{t}$$

Т.к. по всем направлениям производная равна, оператор единственный. □

2.71 Лемма о дифференцируемости отображения и его координатных функций

$F : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \quad a \in \text{Int} E$

$F(x) = (f_1(x), f_2(x) \dots f_n(x))$. Тогда:

1. F — дифф. в $a \Leftrightarrow$ все f_i дифференцируемы в a
2. $\forall i = 1 \dots n \quad i$ -я строка матрицы Якоби F есть матрица Якоби f_i

2.72 Необходимое условие дифференцируемости.

$f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, a \in \text{Int} E, f$ — дифф. a

Тогда $\exists f'_1(a), \dots, f'_m(a)$ и матрица Якоби f в точке $a = (f'_1(a), \dots, f'_m(a))$

Доказательство.

$$f(x) = f(a) + (l_1 \dots l_m)(x - a) + \alpha(x)|x - a|$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - L(x - a)}{|x - a|} = 0$$

Посчитаем предел по направлению $x = a + te_k, e_k = (0 \dots 0, 1, 0 \dots 0)$

$$f(a + te_k) - f(a) + l_x t + \alpha_k(t)|t| \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = l_k$$

□

2.73 ! Достаточное условие дифференцируемости

$f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \exists r > 0 \ B(a, r) \subset E$ и в этом шаре $\exists f'_1 \dots f'_m$ (конечные) и они непрерывны в точке a . Тогда f дифф. в a

Доказательство. $m = 2$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2) &= \\ &= f(x_1, x_2) - f(x_1, a_2) + f(x_1, a_2) - f(a_1, a_2) = \\ &= f'_2(x_1, \bar{x}_2)(x_2 - a_2) + f'_1(\bar{x}_1, a_2)(x_1 - a_1) = \\ &= f'_2(a_1, a_2)(x_2 - a_2) + f'_1(a_1, a_2)(x_1 - a_2) + (f'_2(x_1, \bar{x}_2) - f'_2(a_1, a_2)) \frac{x_2 - a_1}{|x - a|} |x - a| + \text{аналогично} \end{aligned}$$

□

2.74 Лемма об оценке нормы линейного оператора

$A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l \ A = (a_{ij})$. Тогда $\forall x \in \mathbb{R}^m: |Ax| \leq C_A |x|$, где $C_A = \left(\sum_{i,j} a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

Доказательство.

$$|Ax|^2 = \sum_j \left(\sum_j a_{ij} x_j \right)^2 \stackrel{\text{КБШ}}{\leq} \sum_i \left(\left(\sum_j a_{ij}^2 \right) \left(\sum_j x_j^2 \right) \right)$$

□

2.75 ! Дифференцирование композиции

- $F : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$
- $G : I \subset \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$
- $F(E) \subset I$
- $a \in \text{Int} E$
- F дифф. в a
- $F(a) \in \text{Int} I$
- G дифф. в $F(a)$

Тогда $G \circ F$ дифф. в a , $(G \circ F)'(a) = G'(F(a))F'(a)$

Доказательство. $b := F(a)$. По определению:

$$\begin{aligned} F(a+h) &= F(a) + F'(a)h + \alpha(h)|h| \\ G(b+k) &= G(b) + G'(b)k + \beta(k)|k| \\ G(F(a+h)) &= G(F(a)) + G'(F(a))(F'(a)h + \alpha(h)|h|) + \beta(k)|k| = \\ &= G(F(a)) + G'(F(a))F'(a)h + G'(b)\alpha(h)|h| + \beta(k)|F'(a)h + \alpha(h)|h|| \end{aligned}$$

Надо доказать, что $\underbrace{G'(b)\alpha(h)|h|}_{\text{I}} + \underbrace{\beta(k)|F'(a)h + \alpha(h)|h|}_{\text{II}} = \gamma(h)|h|$.

$$|\text{I}| = |G'(b)\alpha(h)|h| \leq C_{G'(b)}|\alpha(h)||h|$$

$$|F'(a)h + \alpha(h)|h| \leq |F'(a)h| + |\alpha(h)||h| \leq \underbrace{(C_{F'(a)} + \alpha(h))}_{\text{огр.}} \underbrace{|h|}_{\rightarrow 0}$$

$$\begin{aligned} k &\xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 0 \\ |\text{II}| &\leq \underbrace{|\beta(k)|}_{\rightarrow 0} \underbrace{(C_{F'(a)} + \alpha(h))}_{\text{огр.}} \underbrace{|h|}_{\rightarrow 0} \\ |\text{I}| + |\text{II}| &\xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 0 \end{aligned}$$

□

2.76 Дифференцирование “произведений”

- $F, G : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$
- $a \in \text{Int}E$
- $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}$
- F, G, λ дифф. в a

Тогда $\lambda F, \langle F, G \rangle$ — дифф. в a :

1. $(\lambda F)'(a)(h) = (\lambda'(a)h)F(a) + \lambda(a)F'(a)h$
2. $\langle F, G \rangle'(a)(h) = \langle F'(a)h, G(a) \rangle + \langle F(a), G'(a)h \rangle$

Здесь h нигде не умножается, на него действуют операторы дифференцирования.

Доказательство. 1. Для координатной функции $l = 1$:

$$\begin{aligned} \lambda f(a+h) - \lambda f(a) &= (\lambda(a) + \lambda'(a)h + o(h))(f(a) + f'(a)h + o(h)) - \lambda(a)f(a) = \\ &= (\lambda'(a)h)f(a) + \lambda(a)f'(a)h + o(h) \\ |(\lambda'(a)h)(f'(a)h)| &\leq C_{\lambda'(a)}|h|C_{f'(a)}|h| \end{aligned}$$

2.

$$\langle F, G \rangle = \sum_{i=1}^l f_i g_i$$

По линейности всего и пункту 1:

$$\langle F, G \rangle'(a)h = \sum_i (f_i g_i)'(a)h \stackrel{1.}{=} \sum_i f'_i(a)h g_i(a) + f_i(a)g'_i(a)h = \langle F'(a)h, G(a) \rangle + \langle F(a), G'(a)h \rangle$$

□

2.77 ! Теорема Лагранжа для векторнозначных функций

$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — непр. на $[a, b]$, дифф. на (a, b)

Тогда $\exists c \in (a, b) : |F(b) - F(a)| \leq |F'(c)|(b - a)$

Доказательство.

$$\varphi(t) := \langle F(b) - F(a), F(t) - F(a) \rangle, t \in [a, b]$$

$$\varphi(a) = 0 \quad \varphi(b) = |F(b) - F(a)|^2$$

$$\varphi'(t) = \langle F(b) - F(a), F'(t) \rangle$$

Теорема Лагранжа (для обычных функций):

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(c)(b - a)$$

$$|F(b) - F(a)|^2 = (b - a) \langle F(b) - F(a), F'(c) \rangle \stackrel{\text{КБШ}}{\leq} (b - a) |F(b) - F(a)| |F'(c)|$$

□

2.78 Экстремальное свойство градиента

$f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, f дифф. $a \in \text{Int} E$, $\nabla f(a) \neq 0$.

Тогда $l = \frac{\nabla f(a)}{|\nabla f(a)|}$ — направление наискорейшего возрастания функции, т.е.

$$\forall h \in \mathbb{R}^m : |h| = 1 \quad -|\nabla f(a)| \leq \frac{\partial f}{\partial h}(a) \leq |\nabla f(a)|$$

, причем “=” достигается только при $h = \pm l$, где при “+” достигается “=”

Доказательство.

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = \langle \nabla f, h \rangle$$

$$-|\nabla f(a)||h| \leq \langle \nabla f, h \rangle \leq |\nabla f(a)||h|$$

$|h| = 1$ по построению:

$$-|\nabla f(a)| \leq \langle \nabla f, h \rangle \leq |\nabla f(a)|$$

□

2.79 Независимость частных производных от порядка дифференцирования

$f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in E$

$\exists r > 0 \quad B((x_0, y_0), r) \subset E$

Пусть в этом шаре $\exists f''_{xy}, f''_{yx}$ и они непрерывны. Тогда $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$

Доказательство. $\Delta^2(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$

$\alpha(h) := \Delta^2(h, k)$ при фиксированном k

$$\alpha(h) = \alpha(h) - \alpha(0) \stackrel{\text{т. Лагранжа}}{=} \alpha'(\bar{h})h = (f'_x(x_0 + \bar{h}, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \bar{h}, y_0))h \stackrel{\text{т. Лагранжа}}{=} f''_{xy}(x_0 + \bar{h}, y_0 + \bar{k})hk$$

$\beta(k) := \Delta^2(h, k)$ при фиксированном h

$$\beta(k) = f''_{yx}(x_0 + \bar{h}, y_0 + \bar{k})hk$$

$$f''_{xy}(x_0 + \bar{h}, y_0 + \bar{k})hk = f''_{yx}(x_0 + \bar{h}, y_0 + \bar{k})hk$$

$$(h, k) \rightarrow (0, 0) \Rightarrow (\bar{h}, \bar{k}) \rightarrow (0, 0), (\bar{h}, \bar{k}) \rightarrow (0, 0)$$

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

□

2.80 Полиномиальная формула

$a_i \in \mathbb{R}$ (верно для любого кольца). Тогда $\forall r \in \mathbb{N}$:

$$(a_1 + \dots + a_m)^r \stackrel{\text{очев}}{=} \sum_{n_1=1}^m \dots \sum_{n_r=1}^m a_{n_1} a_{n_2} \dots a_{n_r} = \sum_{j: |j|=r} \frac{r!}{j!} a^j$$

Доказательство. По индукции.

База: $\triangleleft r = 1$

$$\begin{aligned} a_1 + \dots + a_m &= \frac{1!}{1!0! \dots 0!} a_1 + \frac{1!}{0!1! \dots 0!} a_2 + \dots + a_m \\ a_1 + \dots + a_m &= a_1 + \dots + a_m \end{aligned}$$

Переход:

$$\begin{aligned} (a_1 + \dots + a_m)^{r+1} &= (a_1 + \dots + a_m) \sum_{\substack{j_1 \dots j_m \geq 0 \\ j_1 + \dots + j_m = r}} \frac{r!}{j_1! \dots j_m!} a_1^{j_1} \dots a_m^{j_m} = \\ &= \sum \frac{r!}{j_1! \dots j_m!} a_1^{j_1+1} \dots a_m^{j_m} + \dots + \sum \frac{r!}{j_1! \dots j_m!} a_1^{j_1} \dots a_m^{j_m+1} = \\ &= \sum_{\substack{k_1 \geq 1 \\ k_2 \dots k_m \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_m = r+1}} \frac{r!k_1}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1} \dots a_m^{k_m} + \dots + \sum_{\substack{k_2 \geq 1 \\ k_1, k_3, k_4 \dots k_m \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_m = r+1}} \frac{r!k_2}{j_1! \dots j_m!} a_1^{j_1} \dots a_m^{j_m+1} = \\ &= \sum_{\substack{k_1 \geq 0 \\ k_2 \dots k_m \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_m = r+1}} \frac{r!k_1}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1} \dots a_m^{k_m} + \dots + \sum_{\substack{k_2 \geq 0 \\ k_1, k_3, k_4 \dots k_m \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_m = r+1}} \frac{r!k_2}{j_1! \dots j_m!} a_1^{j_1} \dots a_m^{j_m+1} = \\ &= \sum_{\substack{k_1 \dots k_m \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_m = r+1}} \frac{r!(k_1 + \dots + k_m)}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1} \dots a_m^{k_m} = \\ &= \sum_{\substack{k_1 \dots k_m \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_m = r+1}} \frac{(r+1)!}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1} \dots a_m^{k_m} \end{aligned}$$

□