

**Теорема 1.** Обобщенная теорема о плотности.

$\Phi : \text{Segm}\langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  — аддитивная функция промежутка

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  — непр.

$\forall \Delta \in \text{Segm}\langle a, b \rangle \exists m_\Delta, M_\Delta$  — не точный минимум/максимум

$$1. m_\Delta l_\Delta \leq \Phi(\Delta) \leq M_\Delta l_\Delta$$

$$2. m_\Delta \leq f(x) \leq M_\Delta \text{ при всех } x \in \Delta$$

$$3. \forall \text{ фикс. } x \quad M_\Delta - m_\Delta \xrightarrow[\text{"}\Delta \rightarrow x\text{"}]{} 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \Delta : l_\Delta < \delta \quad |M_\Delta - m_\Delta| < \varepsilon$$

$$\text{Тогда } \forall [p, q] \in \text{Segm}\langle a, b \rangle \quad \Phi([p, q]) = \int_p^q f$$

$$\text{Доказательство. } F(x) = \begin{cases} 0, & x = a \\ \Phi[a, x], & x > a \end{cases}$$

Докажем, что  $F$  — первообразная  $f$ .

Фиксируем  $x$

По 1.:

$$m_\Delta \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\Phi[x, x+h]}{h} \leq M_\Delta$$

По 2.:

$$m_\Delta \leq f(x) \leq M_\Delta$$

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \leq M_\Delta - m_\Delta \xrightarrow[\text{"}\Delta \rightarrow x\text{"}]{} 0$$

Мы не можем написать " $\Delta \rightarrow x$ " без кавычек, т.к.  $\Delta$  — не число, но " $\Delta \rightarrow x$ "  $\Leftrightarrow h \rightarrow 0$

Таким образом,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 0$$

□

## Объемы фигур вращения

Объем это  $V : \text{Fig} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$1. V - \text{кон.}, \text{ адд.: } V(A_1 \sqcup A_2) = V(A_1) + V(A_2)$$

$$2. V(\text{ед. куб}) = 1$$

$$3. V \text{ не меняется при движении}$$

Проблема: такой функции не существует.

Поэтому будем использовать объем для частных случаев фигур, а не для всех.

**Определение.**  $\triangleleft A \in \mathbb{R}^2$  — фигура в I квадранте.

**Вращение  $A$ :**

$$1. \text{ по оси } x : A_x = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, \sqrt{y^2 + z^2}) \in A\}$$

$$2. \text{ по оси } y : A_y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + z^2}, y) \in A\}$$

Для непр.  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, c \mapsto \tilde{c} \geq 0$  :

$$\Phi(\Delta) = V(\Pi\Gamma(f, \Delta)_x) \text{ (или } y)$$

**Теорема 2.**  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  — непр.,  $f \geq 0$

$\Phi_x(\Delta)$  = “объем фигуры вращения вокруг оси  $OX$ ”

$\Phi_y(\Delta)$  = “объем фигуры вращения вокруг оси  $OY$ ”

Тогда :  $\forall \Delta = [p, q] \in \text{Segm}\langle a, b \rangle$  :

$$1. \Phi_x[p, q] = \pi \int_p^q f^2(x) dx$$

$$2. \Phi_y[p, q] = 2\pi \int_p^q x f(x) dx$$

**Доказательство.** 1. Это — упражнение, оно не использует ничего умного.

2. Мы знаем, что объем цилиндра =  $S(\text{основание}) \cdot h$ .

Для оценки  $\Phi(\Delta)$  найдем прямоугольник, который является минимальным по площади сечения и максимальный прямоугольники:  $\Pi_{\min}$  и  $\Pi_{\max}$ .

$$\begin{aligned} \pi m_\Delta(q-p) &= \pi \min f \min 2x \cdot (q-p) \leq V((\Pi_{\min})_y) \leq \Phi(\Delta) \leq \\ &\leq V((\Pi_{\max})_y) \leq \pi \max_{x \in [p, q]} f \max_{x \in [p, q]} 2x \cdot (q-p) = \pi M_\Delta(q-p) \end{aligned}$$

Можем заметить, что  $\Phi$  подходит под все три пункта теоремы об обобщенной плотности.  $\square$

**Пример.** Объем тора.

Будем вращать окружность, центр которой лежат на оси  $OX$  в точке  $R$ , с радиусом  $r$ , относительно оси  $OY$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}V &= 2\pi \int_{R-2}^{R+2} (x \mp R) \sqrt{r^2 - (x-R)^2} dx = \pi \int_{R-2}^{R+2} 2(x-R) \sqrt{r^2 - (x-R)^2} dx + 2\pi \int_{R-2}^{R+2} R \sqrt{r^2 - (x-R)^2} dx = \\ &= -\pi \frac{1}{3} (r^2 - (x-R)^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{x=R-2}^{x=R+2} + 2\pi R \frac{\pi r^2}{2} = 2\pi R \cdot \pi r^2 \end{aligned}$$

## Длина гладкого пути

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  — непр.

$\gamma(a)$  — начало;  $\gamma(b)$  — конец

$\gamma : t \mapsto \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ \vdots \\ \gamma_m(t) \end{pmatrix}$ ;  $\gamma_i$  — коорд. функции

Если все  $\gamma_i \in C^1[a, b]$ , то  $\gamma$  — гладкий путь.

$C_\gamma := \gamma([a, b])$  — носитель пути.

Вектор скорости:

$$\gamma'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\gamma(t + \Delta t) - \gamma(t)}{\Delta t} = \lim \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1(t + \Delta t) - \gamma_1(t)}{\Delta t} \\ \vdots \\ \frac{\gamma_m(t + \Delta t) - \gamma_m(t)}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \gamma'_2(t) \\ \vdots \\ \gamma'_m(t) \end{pmatrix}$$

Кривая Пеано:  $[0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$  — ломает длину пути, но она не гладкая, поэтому мы рассматриваем только гладкие пути.

**Определение.** Длина пути — функция  $l$ , заданная на множестве гладких путей в  $\mathbb{R}^m$ , такая что:

1.  $l \geq 0$
2.  $l$  — аддитивна:  $\forall [a, b] \quad \forall \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \forall c \in (a, b) \quad l(\gamma) = l(\gamma|_{[a, c]}) + l(\gamma|_{[c, b]})$
3.  $\forall \gamma, \tilde{\gamma}$  — гладкие пути,  $C_\gamma, C_{\tilde{\gamma}}$  — носители путей  
Если  $\exists T : C_\gamma \rightarrow C_{\tilde{\gamma}}$  — сжатие:  $(\forall M, M' \quad \rho(T(M), T(M')) \leq \rho(M, M'))$ , тогда  $l(\tilde{\gamma}) \leq l(\gamma)$
4. Нормировка:  $\gamma$  — гладкий путь,  $\gamma(t) = vt + u; \quad u, v \in \mathbb{R}^m$ :

$$l(\gamma) = \rho(\gamma(a), \gamma(b))$$

Свойства:

1. “Длина пути”  $\geq$  “длина хорды”
2. При растяжениях длина растёт.
3. Длина не меняется при движении.

**Определение.**  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$

$\tau = \{t_0 \dots t_n\}$  — дробление отрезка.

Тогда вариация функции  $\gamma$  на отрезке  $[a, b]$  это  $l$ :

$$l(\gamma) = \sup_{\tau} \left\{ \sum_{i=1}^n \rho(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \right\}$$

**Лемма 1.** Вариация  $\gamma$  на отрезке  $[a, b]$  — длина пути  $\gamma$ .

**Доказательство.** Тривиальная проверка определения длины пути. **Кохась не говорил, но надо доказать.**  $\square$

**Пример.** Рассмотрим путь из  $A$  в  $B$ , который проходится за 1 час со скоростью 5 км/ч. Длина этого пути — 5 км.

**Теорема 3.**  $\gamma \in C^1([a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m)$

Тогда  $l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$

*Доказательство.* Будем считать  $\gamma' \neq 0$ ,  $\gamma$  — инъективная.

$\Phi : [p, q] \subset [a, b] \mapsto l(\gamma|_{[p, q]})$  — адд.  $\Phi$ -ция промежутка.

Докажем, что  $f(t) = \|\gamma'(t)\|$  — плотность  $\Phi$

$$\Delta \subset [a, b] \quad m_i(\Delta) := \min_{t \in \Delta} |\gamma'_i(t)| \quad M_i(\Delta) = \max |\gamma'_i(t)|$$

$$m_\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^m m_i(\Delta)^2} \quad M_\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^m M_i(\Delta)^2}$$

Докажем, что  $m_\Delta l_\Delta \leq \Phi(\Delta) \leq M_\Delta l_\Delta$

$\tilde{\gamma} : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^m$  — лин. путь

$\tilde{\gamma}(t) = \vec{M} \cdot t$ , где  $\vec{M} = (M_1(\Delta) \quad \dots \quad M_m(\Delta))$

$T : C_{\gamma|_\Delta} \rightarrow C_{\tilde{\gamma}} \quad \gamma(t) \mapsto \tilde{\gamma}(t)$

Утверждение:  $T$  — растяжение.

$$\|\vec{M}q - \vec{M}p\| = (q - p)\|\vec{M}\| = (q - p)M_\Delta$$

$$\begin{aligned} \rho(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) &= \sqrt{\sum_{i=1}^m (\gamma_i(t_0) - \gamma_i(t_1))^2} \stackrel{\text{т. Лагранжа}}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^m \gamma'_i(\bar{t}_i)^2 (t_0 - t_1)^2} \leq \|\vec{M}\| \cdot |t_0 - t_1| = \\ &= \rho(\tilde{\gamma}(t_0), \tilde{\gamma}(t_1)) = \rho(T(\gamma(t_0)), T(\gamma(t_1))) \end{aligned}$$

□

*Доказательство. (альтернативное).*

Покажем, что  $\int \|\gamma'\|$  удовлетворяет всем требованиям длины гладкого пути:

1.  $\forall \gamma \quad l(\gamma) \geq 0$  — очевидно, т.к.  $\|\gamma'\| \geq 0$
2. Линейность: очевидно по линейности определенного интеграла.
3. Сжатие:  $\exists T : C_\gamma \rightarrow C_{\tilde{\gamma}}$

$$\gamma'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$$

$$\|\gamma'(t)\| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\gamma(t+h) - \gamma(t)\|}{|h|}$$

$$\|\gamma'(t)\| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\rho(\gamma(t+h), \gamma(t))}{|h|} \quad \|\tilde{\gamma}'(t)\| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\rho(\tilde{\gamma}(t+h), \tilde{\gamma}(t))}{|h|}$$

$$\rho(\gamma(t+h), \gamma(t)) \geq \rho(\tilde{\gamma}(t+h), \tilde{\gamma}(t)) \Rightarrow \|\gamma'(t)\| \geq \|\tilde{\gamma}'(t)\| \Rightarrow l(\gamma) \geq l(\tilde{\gamma})$$

4. Нормировка.  $\triangleleft \gamma : \gamma(t) = \vec{u} + \vec{v}t$

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\vec{v}\| dt = \|\vec{v}\|(b - a)$$

$$\rho(\gamma(a), \gamma(b)) = \|\vec{u} + \vec{v}b - \vec{u} - \vec{v}a\| = \|\vec{v}(b - a)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m v_i^2 (b - a)^2} = (b - a)\|\vec{v}\|$$

□

*Пример.* Длина графика  $y = f(x)$ ,  $f \in C^1$  на отрезке  $[a, b]$

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \quad \gamma'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix} \quad \|\gamma'(x)\| = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

*Пример.* Длина кривой  $r = r(\varphi)$  в полярных координатах,  $\varphi \in [\alpha, \beta]$

$$x = r(\varphi) \cos \varphi \quad y = r(\varphi) \sin \varphi$$

$$\gamma'(\varphi) = \begin{pmatrix} r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi \\ r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\|\gamma'(\varphi)\| = \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2 - 2r'(\varphi)r(\varphi) \cos \varphi \sin \varphi + 2r'(\varphi)r(\varphi) \cos \varphi \sin \varphi}$$

$$\|\gamma'(\varphi)\| = \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2}$$

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi$$