

1 Определения

1.1 Упорядоченная пара

Для некоторого множества X и I - множество “индексов”, тогда $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ - **семейство элементов** X . ($\forall \alpha \in I \ x_\alpha \in X$)

Упорядоченная пара — семейство из двух элементов, построенная при $I = \{1, 2\}$. Обозначается (a, b) .

Кроме того,

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c, b = d$$

1.2 Декартово произведение

Декартово произведение двух множеств — множество всех упорядоченных пар элементов этих множеств. $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$

Кроме того, декартово произведение можно обобщить для произвольного числа множеств. $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2 \dots a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2 \dots a_n \in A_n\}$

1.3 Аксиомы вещественных чисел

1.3.1 Аксиомы поля

В множестве \mathbb{R} определены две операции, называемые сложением и умножением, действующие из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в \mathbb{R} ($+, \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$), удовлетворяющие следующим свойствам:

Аксиомы сложения (здесь и далее $\forall a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$):

1. $a + b = b + a$ — коммутативность
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ — ассоциативность
3. $\exists 0 : 0 + a = a$
4. $\exists a' : a + a' = 0$

Аксиомы умножения:

1. $ab = ba$ — коммутативность
2. $(ab)c = a(bc)$ — ассоциативность
3. $\exists 1 \neq 0 : \forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a$
4. $\forall a \neq 0 : \exists \tilde{a} : a \cdot \tilde{a} = 1$

Аксиома комбинации сложения и умножения:

1. $(a + b)c = ac + bc$ — дистрибутивность

Поле — множество, в котором определены операции $+, \cdot$, удовлетворяющие группе аксиом I. Например, $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{F}_3$

1.3.2 Аксиомы порядка

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y$ или $y \leq x$
2. $x \leq y; y \leq x \Rightarrow x = y$
3. $x \leq y; y \leq z \Rightarrow x \leq z$ — транзитивность
4. $x \leq y \Rightarrow \forall z \in \mathbb{R} : x + z \leq y + z$
5. $0 \leq x; 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy$

Упорядоченное поле — множество, для которого выполняются аксиомы групп I и II.

\mathbb{F}_3, \mathbb{C} — не упорядоченные поля

$\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathcal{R}$ — упорядоченные поля

Дальнейшие аксиомы в следующем вопросе.

1.4 Аксиома Кантора, аксиома Архимеда

1.4.1 Аксиома Архимеда

$$\forall x, y > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : nx > y$$

Следствие: существуют сколько угодно большие натуральные числа:

$$\forall y \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : n > y$$

Архимедовы поля — упорядоченные поля, в которых выполняется Аксиома Архимеда.

\mathcal{R} — не архимедово поле

\mathbb{R}, \mathbb{Q} — архимедовы поля

1.4.2 Аксиома Кантора

Для последовательности вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ ($\forall n \in \mathbb{N} a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$)

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$$

\mathbb{Q} не удовлетворяет этой аксиоме, в отличие от \mathbb{R} .

1.5 Пополненное множество вещественных чисел, операции и порядок в нем

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ — пополненное множество вещественных чисел.

Свойства ($\forall x \in \mathbb{R}$):

- $-\infty < +\infty$
- $\pm\infty \cdot \pm\infty = +\infty$
- $\pm\infty \cdot \mp\infty = -\infty$
- $-\infty < x < +\infty$

- $x \pm \infty = \pm\infty$
- $\pm\infty \pm \infty = \pm\infty$
- $\pm\infty \mp \infty$ — не определено

Для $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$

- $x \cdot \pm\infty = \pm\infty$

1.6 Максимальный элемент множества

$M \in A$ называется **максимальным элементом** множества A , если $\forall a \in A \quad a \leq M$

1.7 Последовательность

$x : \mathbb{N} \rightarrow Y$ — **последовательность**

1.8 Образ и прообраз множества при отображении

Для $A \subset X, f : X \rightarrow Y$ **образ** — множество $\{f(x), x \in A\} \subset Y$ — обозначается $f(A)$

Для $B \subset Y$ **прообраз** — $\{x \in X : f(x) \in B\}$ — обозначается $f^{-1}(B)$

1.9 Инъекция, сюръекция, биекция

Сюръекция — такое отображение $f : X \rightarrow Y$, что $f(X) = Y$, т.е. $\forall y \in Y \quad f(x) = y$ имеет решение относительно x .

Инъекция — такое отображение $f : X \rightarrow Y$, что $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \quad f(x_1) \neq f(x_2)$, т.е. $\forall y \in Y \quad f(x) = y$ имеет не более одного решения относительно x .

Биекция — отображение, являющееся одновременно сюръекцией и инъекцией, т.е. $\forall y \in Y \quad f(x) = y$ имеет ровно одно решение относительно x .

1.10 Векторнозначная функция, ее координатные функции

Если $F : X \rightarrow \mathbb{R}^m; x \mapsto F(x) = (F_1(x), \dots, F_m(x))$, то F — **векторнозначная функция** (значения функции - вектора)

$F_1(x) \dots F_m(x)$ - координатные функции отображения F

1.11 График отображения

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$

1.12 Композиция отображений

$f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$, тогда **композиция** f и g (обозначается $g \circ f$) — такое отображение, что $g \circ f : X \rightarrow Z, x \mapsto g(f(x))$.

Также возможно определение, которое допускает $g : Y_1 \rightarrow Z, Y_1 \supset Y$

1.13 Сужение и продолжение отображений

Для $g : X \rightarrow Y$ f — **сужение** g на множество A , если $f : A \subset X \rightarrow Y$, $\forall a \in A \ g(a) = f(a)$ g называется **продолжением** f .

1.14 ! Предел последовательности (эпсилон-дельта определение)

Если для $(x_n), a \in \mathbb{R}$ выполняется $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ |x_n - a| < \varepsilon$, то a — **предел последовательности** (x_n) , обозначается $x_n \rightarrow a$ или $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

1.15 Окрестность точки, проколота окрестность

Окрестность точки $a = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$, обозначается $U_\varepsilon(a)$

Проколота окрестность точки $a = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$, обозначается $\dot{U}_\varepsilon(a)$

1.16 Предел последовательности (определение на языке окрестностей)

$$\forall U(a) \ \exists N \ \forall n > N \ x_n \in U(a)$$

1.17 ! Метрика, метрическое пространство, подпространство

На множестве X отображение $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ называется **метрикой**, если выполняются свойства 1-3:

1. $\forall x, y \ \rho(x, y) \geq 0; \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\forall x, y \ \rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. Неравенство треугольника: $\forall x, y, z \in X \ \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

Метрическое пространство — упорядоченная пара (X, ρ) , где X — множество, ρ — метрика на X .

Подпространством метрического пространства (X, ρ) называется $(A, \rho|_{A \times A})$, если $A \subset X$

1.18 ! Шар, замкнутый шар, окрестность точки в метрическом пространстве

Шар (открытый шар) $B(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) < r\}$

Замкнутый шар $B(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) \leq r\}$

Окрестность точки a в метрическом пространстве: $B(a, \varepsilon) \Leftrightarrow U(a)$.

1.19 Линейное пространство

Если K — поле ($K = \mathbb{R}$ или \mathbb{C}), X — множество, то X называется **линейным пространством** над полем K (и тогда K называется полем скаляра), если определены следующие две операции:

1. $+: X \times X \rightarrow X$ — сложение векторов
2. $\cdot: K \times X \rightarrow X$ — умножение векторов на скаляры

Для этих операций выполняются соответствующие аксиомы (здесь $A, B, C \in X; a, b \in K$):

1.19.1 Аксиомы сложения векторов

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $\exists 0 \in X : A + 0 = A$
4. $\exists -A \in X : A + (-A) = 0$ — обратный элемент

1.19.2 Аксиомы умножения векторов на скаляры

1. $(A + B) \cdot a = A \cdot a + B \cdot a$
2. $A \cdot (a + b) = A \cdot a + A \cdot b$
3. $(ab) \cdot A = a(b \cdot A)$
4. $\exists 1 \in K : 1 \cdot A = A$

1.20 Норма, нормированное пространство

Норма - отображение $X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$, если X - линейное пространство (над \mathbb{R} или \mathbb{C}) и выполняется следующее:

1. $\forall x \quad \|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\forall x \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
3. Неравенство треугольника: $\forall x, y \in X \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Нормированное пространство — упорядоченная пара $(X, \|\cdot\|)$, где $\|\cdot\|$ - норма

1.21 Ограниченное множество в метрическом пространстве

$A \subset X$ — **ограничено**, если $\exists x_0 \in X \quad \exists R > 0 \quad A \subset B(x_0, R)$, т.е. если A содержится в некотором шаре в X .

1.22 ! Внутренняя точка множества, открытое множество, внутренность

a — **внутренняя точка** множества D , если $\exists U(a) : U(a) \subset D$, т.е. $\exists r > 0 : B(a, r) \subset D$

D — **открытое множество**, если $\forall a \in D : a$ — внутренняя точка D

Внутренностью множества D называется $Int(D) = \{x \in D : x \text{ — внутр. точка } D\}$

1.23 ! Предельная точка множества

a — **предельная точка** множества D , если

$$\forall \dot{U}(a) \quad \dot{U}(a) \cap D \neq \emptyset$$

1.24 ! Замкнутое множество, замыкание, граница

D — замкнутое множество, если оно содержит все свои предельные точки.

$\overline{D} = D \cup (\text{множество предельных точек } D)$ — замыкание.

Граница множества — множество его граничных точек. Обозначается ∂D

1.25 ! Изолированная точка, граничная точка

a — изолированная точка D , если $a \in D$ и a — не предельная, то есть:

$$\exists U(a) \quad U(a) \cap D = \{a\}$$

a — граничная точка D , если $\forall U(a) \quad U(a)$ содержит точки как из D , так и из D^c

1.26 Описание внутренности множества

1. $\text{Int}D$ - откр. множество

2. $\text{Int}D = \bigcup_{\substack{D \supset G \\ G - \text{открыт}}} G$ — максимальное открытое множество, содержащееся в D

3. D — откр. в $X \Leftrightarrow D = \text{Int}D$

1.27 Описание замыкания множества в терминах пересечений

$\overline{D} = \bigcap_{\substack{D \subset F \\ F - \text{замкн.}}} F$ — мин. (поinkl.) замкн. множество, содержащее D .

1.28 ! Верхняя, нижняя границы; супремум, инфимум

$E \subset \mathbb{R}$. E — **огр. сверху**, если $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in E \quad x \leq M$. Кроме того, всякие такие M называются **верхними границами** E .

Аналогично ограничение снизу.

$E \subset \mathbb{R}, E \neq \emptyset$.

Для E — **огр. сверху** **супремум** ($\sup E$) — наименьшая из верхних границ E .

Для E — **огр. снизу** **инфимум** ($\inf E$) — наибольшая из нижних границ E .

1.29 Техническое описание супремума

Техническое описание супремума: $b = \sup E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E \quad x \leq b \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in E \quad b - \varepsilon < x \end{cases}$

1.30 ! Последовательность, стремящаяся к бесконечности

В \mathbb{R} :

1. $x_n \rightarrow +\infty \quad \forall E > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad x_n > E$

2. $x_n \rightarrow -\infty \quad \forall E \quad \exists N \quad \forall n > N \quad x_n < E$

3. $x_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow |x_n| \rightarrow +\infty$

1.31 ! Компактное множество

$K \subset X$ — **компактное**, если для любого открытого покрытия этого множества \exists конечное подпокрытие $\Leftrightarrow \exists \alpha_1 \dots \alpha_n \quad K \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$

1.32 Секвенциальная компактность

Секвенциально компактным называется множество $A \subset X : \forall$ посл. (x_n) точек A \exists подпосл. x_{n_k} , которая сходится к точке из A

1.33 ! Определения предела отображения (3 шт)

$(X, \rho^x), (Y, \rho^y) \quad D \subset X \quad f : D \rightarrow Y$

$a \in X, a$ — пред. точка множества $D, A \in Y$

Тогда $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ — **предел отображения**, если:

1. По Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : 0 < \rho^X(a, x) < \delta \quad \rho^Y(f(x), A) < \varepsilon$$

2. На языке окрестностей:

$$\forall U(A) \quad \exists V(a) \quad \forall x \in \dot{V}(a) \quad f(x) \in U(A)$$

3. По Гейне: $\forall (x_n)$ — посл. в X :

(a) $x_n \rightarrow a$

(b) $x_n \in D$

(c) $x_n \neq a$

$f(x_n) \rightarrow A$

1.34 Определения пределов в $\overline{\mathbb{R}}$

Для $X = \mathbb{R}, Y = \overline{\mathbb{R}}, -\infty < x < +\infty$:

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty : \quad \forall E \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X : 0 < |x - a| < \delta \quad f(x) > E$

2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty : \quad \forall E \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X : 0 < |x - a| < \delta \quad f(x) < E$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \quad \forall x \in X : x > \delta \quad |f(x) - c| < \varepsilon$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \quad \forall x \in X : x < -\delta \quad |f(x) - c| < \varepsilon$

1.35 Предел по множеству

$f : D \subset X \rightarrow Y, D_1 \subset D, x_0$ — пред. точка D_1

Тогда **предел по множеству** D_1 в точке x_0 — это $\lim_{x \rightarrow x_0} f|_{D_1}(x)$

1.36 Односторонние пределы

В \mathbb{R} одностор. = { левостор., правостор. }

Левосторонний предел $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = L$ - это $\lim f|_{D \cap (-\infty, x_0)}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap D \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Аналогично правосторонний.

1.37 ! Непрерывное отображение

$f : D \subset X \rightarrow Y \quad x_0 \in D$

f — непрерывное в точке x_0 , если:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, либо x_0 — изолированная точка D
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \quad \rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$
3. $\forall U(f(x_0)) \exists V(x_0) \forall x \in V(x_0) \cap D \quad f(x) \in U(f(x_0))$
4. По Гейне $\forall (x_n) : x_n \rightarrow x_0; x_n \in D \quad f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x_0)$

1.38 Непрерывность слева

f — непр. слева в x_0 , если $f|_{(-\infty, x_0] \cap D}$ — непрерывно в x_0

1.39 Разрыв, разрывы первого и второго рода

Если $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, либо $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ — точка разрыва.

Пусть $\exists f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$ и не все 3 числа равны: $f(x_0 - 0), f(x_0), f(x_0 + 0)$. Это **разрыв I рода (скачок)**.

Остальные точки разрыва — **разрыв II рода**.

Примечание.

$$f(x_0 - 0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$$

1.40 ! О большое, о маленькое

$f, g : D \subset X \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0$ — пр. точка D

Если $\exists V(x_0) \exists \varphi : V(x_0) \cap D \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = g(x)\varphi(x)$ при $x \in V(x_0) \cap D$

1. φ — ограничена. Тогда говорят $f = O(g)$ при $x \rightarrow x_0$
“ f ограничена по сравнению с g при $x \rightarrow x_0$ ”
2. $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ f — беск. малая по отношению к g при $x \rightarrow x_0$, $f = o(g)$
3. $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1$ f и g экв. при $x \rightarrow x_0$ $f \sim_{x \rightarrow x_0} g$

Примечание. О большое и о малое — разные вопросы в табличке.

1.41 ! Эквивалентные функции, таблица эквивалентных

Эквивалентные функции даны выше.

Таблица эквивалентных для $x \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}\sin x &\sim x \\ \operatorname{sh} x &\sim x \\ \operatorname{tg} x &\sim x \\ \operatorname{arctg} x &\sim x \\ 1 - \cos x &\sim \frac{x^2}{2} \\ \operatorname{ch} x - 1 &\sim \frac{x^2}{2} \\ e^x - 1 &\sim x \\ \ln(1+x) &\sim x \\ (1+x)^\alpha - 1 &\sim \alpha x \\ a^x - 1 &\sim x \ln a\end{aligned}$$

1.42 Асимптотически равные (сравнимые) функции

В условиях прошлых определений $f = O(g), g = O(f) \Leftrightarrow f \asymp g$ — асимптотически сравнимы на множестве D , “величины одного порядка”.

1.43 Асимптотическое разложение

$g_n : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ x_0 — пред. точка D

$\forall n \quad g_{n+1}(x) = o(g_n), x \rightarrow x_0$

Пример. $g_n(x) = x^n, n = 0, 1, 2, \dots \quad x \rightarrow 0 \quad g_{n+1} = xg_n, x \rightarrow 0$

(g_n) называется шкала асимптотического разложения.

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$

Если $f(x) = c_0 g_0(x) + c_1 g_1(x) + \dots + c_n g_n(x) + o(g_n)$, то это асимптотическое разложение f по шкале (g_n)

1.44 Наклонная асимптота графика

Пусть $f(x) = Ax + B + o(1), x \rightarrow +\infty$

Прямая $y = Ax + B$ — наклонная асимптота к графику f при $x \rightarrow +\infty$

1.45 Путь в метрическом пространстве

Y — метр. пр-во

$\gamma : [a, b] \rightarrow Y$ — непр. на $[a, b]$

= путь в пространстве Y

1.46 Линейно связное множество

$$E \subset Y$$

E — линейно связное, если $\forall A, B \in E \exists$ путь $\gamma : [a, b] \rightarrow E$ такой, что:

- $\gamma(a) = A$
- $\gamma(b) = B$

1.47 ! Функция, дифференцируемая в точке и производная

$$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in \langle a, b \rangle$$

f — дифференцируема в точке x_0 , если $\exists A \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + o(x - x_0), x \rightarrow x_0$$

При этом A называется **производной** f в точке x_0

Примечание. Это два разных билета.

1.48 Счётное множество

A — счётное множество \Leftrightarrow равномощно \mathbb{N}

1.49 ! Мощность континуума

A равномощно $[0, 1] \Rightarrow A$ имеет мощность континуума.

1.50 Фундаментальная последовательность

x_n — фундаментальная, последовательность Коши, сходящаяся в себе, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m, n > N \quad \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$$

1.51 Полное метрическое пространство

X — метрическое пространство называется **полным**, если в нём любая фундаментальная последовательность — сходящаяся.

1.52 Классы функций $C^n([a, b])$

f — n -гладкая, если $\forall i = 1 \dots n \quad \exists i$ -ная непрерывная производная.

Класс функций $C^n([a, b])$ — множество функций, n -гладких на $[a, b]$

1.53 Производная n -го порядка

Пусть $n - 1 \in \mathbb{N}$ — множество D_{n-1} и $f^{(n-1)} : D_{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ определены. Пусть D_n — множество точек $x_0 \in D_{n-1}$, для которых существует $\delta > 0$, такое что:

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D_{n-1} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$$

и $f^{(n-1)}$ дифференцируема в точке x_0 . Если $x_0 \in D_n$, то f — дифференцируема n раз в точке x_0 . Функция

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'_{D_n} : D_n \rightarrow \mathbb{R}$$

называется производной порядка n .

1.54 Многочлен Тейлора n -го порядка

Многочленом Тейлора n -той степени (*порядка*) функции f в точке a называется:

$$T_n(f, a)(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

1.55 ! Разложения Тейлора основных элементарных функций

Некоторые разложения по Тейлору:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n) \end{aligned}$$

2 Теоремы

2.1 Законы де Моргана

Пусть $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ — семейство множеств, Y — множество. Тогда:

$$1. Y \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha) \quad \textcircled{1}$$

$$2. Y \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha) \quad \textcircled{2}$$

Вариант 2:

$$1. Y \cap \left(\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in A} (Y \cap X_\alpha)$$

$$2. Y \cup \left(\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in A} (Y \cup X_\alpha)$$

Доказательство. $\triangleleft x \in$ левая часть ①

$$x \in Y; x \notin \bigcup X_\alpha$$

$$x \in Y; x \notin \{y : \exists \alpha : y \in X_\alpha\}$$

$$x \in Y; \forall \alpha \in A : x \notin X_\alpha$$

$\triangleleft x \in$ правая часть ①

$$\forall \alpha : x \in Y \setminus X_\alpha$$

$$x \in Y; \forall \alpha \ x \notin X_\alpha$$

Из чего левая и правая части эквивалентны. Аналогично доказывается ②

□

2.2 Неравенство Коши-Буняковского, евклидова норма в \mathbb{R}^m

2.2.1 Неравенство Коши-Буняковского

$$\left(\sum a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum a_i^2 \right) \left(\sum b_k^2 \right)$$

2.2.2 Евклидова норма в \mathbb{R}^m

$$||x|| = \sqrt{\sum_i^m x_i^2}$$

Неравенство Коши-Буняковского следует из тождества Лагранжа. Докажем его:

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \sum_{(i,k) \in A \times B} (a_i b_k - a_k b_i)^2 = \\
 & \frac{1}{2} \sum_{(i,k) \in A \times B} (a_i^2 b_k^2 + a_k^2 b_i^2 - 2a_i a_k b_i b_k) = \\
 & \frac{1}{2} \sum_{(i,k) \in A \times B} a_i^2 b_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{(i,k) \in A \times B} a_k^2 b_i^2 - \sum_{(i,k) \in A \times B} a_i b_i a_k b_k = \\
 & \frac{1}{2} \sum_{(i,k) \in A \times B} a_i^2 \sum_{(i,k) \in A \times B} b_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{(i,k) \in A \times B} a_i^2 \sum_{(i,k) \in A \times B} b_k^2 - \\
 & \sum_{(i,k) \in A \times B} a_i b_i \sum_{(i,k) \in A \times B} a_k b_k = \\
 & \sum_{(i,k) \in A \times B} a_i^2 \sum_{(i,k) \in A \times B} b_k^2 - \left(\sum_{(i,k) \in A \times B} a_i b_i \right)^2
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left(\sum_{(i,k) \in A \times B} a_i b_i \right)^2 = \sum_{(i,k) \in A \times B} a_i^2 \sum_{(i,k) \in A \times B} b_k^2 - \frac{1}{2} \sum_{(i,k) \in A \times B} (a_i b_k - a_k b_i)^2 \leq \sum_{(i,k) \in A \times B} a_i^2 \sum_{(i,k) \in A \times B} b_k^2$$

□

Доказательство. Альтернативное:

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 = \\
 & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^2 b_j^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_i a_j b_j = \\
 & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i^2 b_j^2 + a_j^2 b_i^2 - 2a_i b_i a_j b_j) = \\
 & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i b_j - a_j b_i)^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

□

2.3 Аксиома Архимеда. Плотность множества рациональных чисел в \mathbb{R}

2.3.1 Аксиома Архимеда

$$\forall x, y > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : nx > y$$

2.3.2 Плотность множества \mathbb{Q} в \mathbb{R}

$$\mathbb{Q} \text{ плотно в } \mathbb{R} \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b \quad (a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$$

В любом интервале в \mathbb{R} содержится число $\in \mathbb{Q}$.

Доказательство. \mathbb{Q} плотно в \mathbb{R} , т.е. $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b \quad (a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$

Возьмем $n \in \mathbb{N} : n > \frac{1}{b-a}$. Тогда $\frac{1}{n} < b - a$

$$q := \frac{[na]+1}{n} \in \mathbb{Q}$$

$$q \leq \frac{na+1}{n} = a + \frac{1}{n} < a + b - a = b \Rightarrow q < b$$

$$q > \frac{na}{n} = a \Rightarrow q > a$$

□

2.4 Неравенство Бернулли

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad x \geq -1, n \in \mathbb{N}$$

$$(1+x)^n \geq 1+nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 \quad x > 0, n \in \mathbb{N} \text{ — более сложная версия}$$

Доказательство. База: $n = 1 : (1+x)^1 \geq 1+x$

Переход: Дано неравенство $(1+x)^n \geq 1+nx$, оно верно при каком-то n . Докажем, что $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$$

□

2.5 Единственность предела и ограниченность сходящейся последовательности

2.5.1 Единственность предела

(X, ρ) — метрическое пр-во, $a, b \in X$, (x_n) — послед. в X , $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b$, тогда $a = b$

Доказательство.

Докажем от противного — пусть $a \neq b$. Возьмем $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\rho(a, b)$

$$\exists N(\varepsilon) \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad \rho(x_n, a) < \varepsilon$$

$$\exists K(\varepsilon) \quad \forall n > K(\varepsilon) \quad \rho(x_n, b) < \varepsilon$$

При $n > \max(N(\varepsilon), K(\varepsilon)) \quad \rho(a, b) \leq \rho(a, x_n) + \rho(x_n, b) < 2\varepsilon < \rho(a, b)$ — противоречие

□

2.5.2 Ограниченность сходящейся последовательности

Если (x, ρ) — метрическое пр-во, (x_n) — послед. в X , x_n сходится, тогда x_n - ограничен.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \text{Пусть } a &= \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \\ \forall U(a) \exists N \forall n > N \quad x_n &\in U(a) \\ U(a) &= B(a, \varepsilon) \\ r &:= \max(\varepsilon, \rho(x_1, a), \rho(x_2, a) \dots \rho(x_N, a)) + 1 \\ \text{тогда } \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n &\in B(a, r) \end{aligned}$$

□

2.6 Теорема о предельном переходе в неравенствах для последовательностей и для функций

2.6.1 Для последовательностей

Если $(x_n), (y_n)$ — вещественные последовательности $x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b, \exists N \forall n > N \quad x_n \leq y_n$, тогда $a \leq b$.

2.6.2 Для функций

Если $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}, a$ — предельная точка X , и $\forall x \in X \quad f(x) \leq g(x)$. Тогда $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Доказательство.

Докажем от противного. Пусть $a > b, 0 < \varepsilon < \frac{a-b}{2}$.

$$\exists N(\varepsilon) \forall n > N \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

$$\exists K(\varepsilon) \forall n > K \quad b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon$$

При $n > \max(N, K) \quad y_n < b + \varepsilon < a - \varepsilon < x_n$ — противоречие

□

Доказательство. По Гейне.

$\forall (x_n) \rightarrow a, x_n \in X, x_n \neq a$:

$$f(x_n) \rightarrow A, g(x_n) \rightarrow B, \forall x \quad f(x) \leq g(x) \Rightarrow f(x_n) \leq g(x_n) \Rightarrow A \leq B$$

□

2.7 ! Теорема о двух городских

Если $(x_n), (y_n), (z_n)$ - вещ. посл., $\forall n \ x_n \leq y_n \leq z_n, \lim x_n = \lim z_n = a$, тогда $\exists \lim y_n = a$

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists K \ \forall n > K \ a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 = \max(N, K) \ \forall n > N_0 \ a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon$$

$$\text{По определению } \lim y_n = a$$

□

2.8 Бесконечно малая последовательность

Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную — бесконечно малая последовательность, т.е. (x_n) — беск. малая, (y_n) — ограничена $\Rightarrow x_n y_n$ — беск. малая

Доказательство. Возьмём K такое, что $\forall n \ |y_n| \leq K$.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ |x_n| \leq \frac{\varepsilon}{K}$$

$$|x_n y_n| \leq \frac{\varepsilon}{K} K = \varepsilon \Rightarrow x_n y_n \rightarrow 0$$

□

2.9 ! Теорема об арифметических свойствах предела последовательности в нормированном пространстве и в \mathbb{R}

Об арифметических свойствах предела в нормированном пространстве.

Если $(X, \|\cdot\|)$ — норм. пр-во, $(x_n), (y_n)$ — посл. в X , λ_n — посл. скаляров, и $x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0, \lambda_n \rightarrow \lambda_0$, тогда:

$$1. \ x_n \pm y_n \rightarrow x_0 \pm y_0$$

$$2. \ \lambda_n x_n \rightarrow \lambda_0 x_0$$

$$3. \ \|x_n\| \rightarrow \|x_0\|$$

Доказательство. 1. $\forall \varepsilon \ \exists N_1 \ \forall n > N_1 \ \|x_n - x_0\| < \varepsilon$

$$\forall \varepsilon \ \exists N_2 \ \forall n > N_2 \ \|y_n - y_0\| < \varepsilon$$

$$N := \max(N_1, N_2)$$

$$\forall \varepsilon \ \forall n > N \ \|(x_n + y_n) - (x_0 + y_0)\| \leq \|x_n - x_0\| + \|y_n - y_0\| \leq 2\varepsilon$$

$$2. \ \|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0 + \lambda_0 x_n - \lambda_0 x_n\| = \|(\lambda_n - \lambda_0)x_n + (x_n - x_0)\lambda_0\| \leq \|(\lambda_n - \lambda_0)x_n\| + \|(x_n - x_0)\lambda_0\| = \|x_n\| |\lambda_n - \lambda_0| + \|x_n - x_0\| |\lambda_0|$$

$|\lambda_n - \lambda_0|$ и $\|x_n - x_0\|$ — бесконечно малые, $\|x_n\|$ и $|\lambda_n|$ — ограниченные $\Rightarrow \|x_n\| |\lambda_n - \lambda_0| + \|x_n - x_0\| |\lambda_0|$ — бесконечно малая

3. Докажем, что $||x_n|| - ||x_0|| \leq ||x_n - x_0||$.

$$||x_n|| = ||x_0 + (x_n - x_0)|| \leq ||x_0|| + ||x_n - x_0|| \Rightarrow ||x_n|| - ||x_0|| \leq ||x_n - x_0||$$

Аналогично $||x_0|| - ||x_n|| \leq ||x_n - x_0||$.

Тогда $||x_n|| - ||x_0|| \leq ||x_n - x_0||$

□

Об арифметических свойствах пределов в \mathbb{R} .

Для $(x_n), (y_n)$ — вещ. посл., $\forall n \ y_n \neq 0, y_0 \neq 0$:

4. $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{x_0}{y_0}$

Доказательство взято из воздуха.

Доказательство. Докажем, что $\frac{1}{y_n} \rightarrow \frac{1}{y_0}$, если $\forall n \ y_n \neq 0, y_0 \neq 0$.

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_0} \right| = \left| \frac{y_0 - y_n}{y_n y_0} \right|$$

В числителе бесконечно малая последовательность, в знаменателе ограниченная \Rightarrow дробь — бесконечно малая последовательность. □

2.10 Неравенство Коши-Буняковского в линейном пространстве, норма, порожденная скалярным произведением

2.10.1 Неравенство Коши-Буняковского в линейном пространстве

Для X — линейного пространства (над \mathbb{R}, \mathbb{C})

$$\forall x, y \in X \quad |\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

Доказательство. Возьмём $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

Заметим, что $\langle x, \alpha y \rangle = \langle \alpha y, x \rangle = \overline{\alpha \langle y, x \rangle} = \overline{\alpha} \overline{\langle y, x \rangle} = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle$.

При $y = 0$ тривиально, пусть $y \neq 0$

$$0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle \lambda y, x \rangle + \langle x, \lambda y \rangle + \langle \lambda y, \lambda y \rangle =$$

$$= \langle x, x \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + \overline{\lambda} \langle x, y \rangle + \lambda \overline{\lambda} \langle y, y \rangle$$

$$\lambda := -\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}, \overline{\lambda} = \overline{\left(-\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \right)} = -\frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle}$$

$$0 \leq \langle x, x \rangle - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle y, x \rangle - \frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle x, y \rangle + \frac{\langle x, y \rangle \langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle}$$

$$0 \leq \langle x, x \rangle - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle y, x \rangle$$

$$\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle y, x \rangle \leq \langle x, x \rangle$$

$$\langle x, y \rangle \langle y, x \rangle \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

□

2.10.2 Норма, порожденная скалярным произведением

Для лин. пространства X , скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$\rho : X \rightarrow \mathbb{R} \quad \rho(x) = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ — норма

Доказательство. Докажем, что ρ удовлетворяет всем леммам нормы.

1. $\rho(x) \geq 0 \quad \rho(x) = 0 \Leftrightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\rho(\alpha x) = \sqrt{\alpha \bar{\alpha} \langle x, x \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\alpha| \rho(x)$
3. $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

$$\sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \stackrel{?}{\leq} \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

$$\langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \stackrel{?}{\leq} \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}$$

Пояснение следующего перехода: пусть $\langle x, y \rangle = a$. Тогда $a = \Re a + \Im a$, $\bar{a} = \Re a - \Im a$ (разложение на вещественную и мнимую части). $\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} = \Re \langle x, y \rangle + \Im \langle x, y \rangle + \Re \langle x, y \rangle - \Im \langle x, y \rangle = 2\Re \langle x, y \rangle$.

$$2\Re \langle x, y \rangle \stackrel{?}{\leq} 2\sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}$$

$$\Re \langle x, y \rangle \leq |\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}$$

□

2.11 Леммы о непрерывности скалярного произведения и покомпонентной сходимости в \mathbb{R}^n

2.11.1 О покомпонентной сходимости в \mathbb{R}^m

О покомпонентной сходимости в \mathbb{R}^m

$(x^{(n)})$ — последовательность векторов в \mathbb{R}^m

в \mathbb{R}^m задано евклидово скалярное произведение и норма.

Тогда $(x^{(n)}) \rightarrow x \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad x_i^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_i$

Доказательство. Модуль координаты \leq нормы всего вектора:

$$|x_i^{(n)} - x_i| \leq \|x^{(n)} - x\| \leq \sqrt{m} \max_{1 \leq i \leq m} |x_i^{(n)} - x_i|$$

Первое неравенство доказывает \Rightarrow , второе неравенство доказывает \Leftarrow

□

2.11.2 О непрерывности скалярного произведения

X - лин. пространство со скалярным произведением, $\|\cdot\|$ — норма, порожденная скалярным произведением.

Тогда $\forall (x_n) : x_n \rightarrow x, \forall (y_n) : y_n \rightarrow y, \langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$

Доказательство.

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle + \langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| \leq |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle| + |\langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| = \\ &= |\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x, y \rangle| \leq \|x_n\| \cdot \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \cdot \|y\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

По теореме о двух городских чтд. □

2.12 Открытость открытого шара

$B(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) < r\}$ — открыт

Доказательство. $x_0 \in B(a, r)$

Докажем, что x_0 — внутренняя, т.е. $\exists U(x_0) \subset B(a, r)$

$k := r - \rho(a, x_0)$

Докажем, что $B(x_0, k) \subset B(a, r)$

$$\forall x \in B(x_0, k) \quad \rho(x, x_0) < k$$

$$\rho(a, x_0) + \rho(x, x_0) < r$$

$$\rho(x, a) \leq \rho(a, x_0) + \rho(x, x_0) < r$$

□

2.13 Теорема о свойствах открытых множеств

1. $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ - семейство открытых множеств в (X, ρ)

Тогда $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ - открыто в X .

2. G_1, G_2, \dots, G_n - открыто в X .

Тогда $\bigcap_{i=1}^n G_i$ - открыто в X .

Доказательство. 1. $x_0 \in \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$

$$\exists \alpha_0 : x_0 \in G_{\alpha_0}$$

$$G_{\alpha_0} - \text{открыто} \Rightarrow \exists U(x_0) \subset G_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow x_0 - \text{внутренняя точка } \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow$$

$\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ — открыто, т.к. в нём все точки внутренние.

$$2. x_0 \in \bigcap_{\alpha \in A} G_\alpha$$

$$\forall \alpha \in A : x_0 \in G_\alpha$$

$$\forall \alpha \in A \quad G_\alpha - \text{открыто} \Rightarrow \exists B_\alpha(x_0, r_\alpha) \subset G_\alpha$$

$$\forall x_0 : \exists U(x_0) = B(x_0, \min_{\alpha} r_\alpha) \subset \bigcap_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow x_0 - \text{внутренняя точка } \bigcap_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in A} G_\alpha$$

— открыто, т.к. в нём все точки внутренние.

□

2.14 Теорема о связи открытых и замкнутых множеств, свойства замкнутых множеств

D — замкнуто $\Leftrightarrow D^c = X \setminus D$ (дополнение) — открыто.

Свойства:

$$1. (F_\alpha)_{\alpha \in A} - \text{замкн. в } X$$

Тогда $\bigcap F_\alpha$ — замкн. в X

$$2. F_1 \dots F_n - \text{замкн. в } X$$

Тогда $\bigcup F_i$ — замкн. в X

Доказательство. Докажем \Rightarrow : D — замкн. \Rightarrow $X \setminus D$

$x \in X \setminus D \Rightarrow x$ — не пред. точка D , т.к. D содержит все свои пред. точки и $x \notin D$

$$\Rightarrow \exists r : B(x, r) \subset X \setminus D$$

Докажем \Leftarrow : $X \setminus D$ — откр., D — замкн.?, т.е. $\forall x \in \{\text{пр. точки } D\} \quad ?x \in D$

Если $x \in D$ — тривиально.

$$x \notin D \quad x \in X \setminus D$$

$$\exists U(x) \subset X \setminus D \Rightarrow x - \text{не пред. точка}$$

□

Доказательство. 1. $(\bigcap F_\alpha)^c = X \setminus (\bigcap F_\alpha) = \bigcup (X \setminus F_\alpha)$

$$F_\alpha - \text{закрыто} \Rightarrow X \setminus F_\alpha - \text{открыто} \Rightarrow \bigcup (X \setminus F_\alpha) - \text{открыто}$$

$$(\bigcap F_\alpha)^c - \text{открыто} \Rightarrow \bigcap F_\alpha - \text{замкнуто}$$

$$2. (\bigcup F_i)^c = \bigcap (F_i)^c$$

$$\bigcap (F_i)^c - \text{открыто, т.к. } F_i^c - \text{открыто} \Rightarrow (\bigcup F_i)^c - \text{открыто} \Rightarrow \bigcup F_i - \text{замкнуто}$$

□

2.15 ! Теорема об арифметических свойствах предела последовательности (в $\overline{\mathbb{R}}$). Неопределенности

2.15.1 Теорема об арифметических свойствах предела последовательности (в $\overline{\mathbb{R}}$)

2.15.1.1 По Кохасю

$$(x_n), (y_n) - \text{вещ.}, x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b, \quad a, b \in \overline{\mathbb{R}}$$

Тогда:

$$1. x_n \pm y_n \rightarrow a \pm b$$

$$2. \ x_n y_n \rightarrow ab$$

$$3. \ \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{a}{b}, \text{ если } \forall n \ y_n \neq 0; b \neq 0$$

При условии, что выражения в правых частях имеют смысл.

2.15.1.2 По Виноградову

$$1. \ x_n \rightarrow +\infty, \{y_n\} - \text{огр. снизу} \Rightarrow x_n + y_n \rightarrow +\infty$$

$$2. \ x_n \rightarrow -\infty, \{y_n\} - \text{огр. сверху} \Rightarrow x_n + y_n \rightarrow -\infty$$

$$3. \ x_n \rightarrow \infty, \{y_n\} - \text{огр.} \Rightarrow x_n + y_n \rightarrow \infty$$

$$4. \ x_n \rightarrow \pm\infty, \forall n \ y_n > 0 \text{ или } y_n \rightarrow b > 0 \Rightarrow x_n y_n \rightarrow \pm\infty$$

$$5. \ x_n \rightarrow \pm\infty, \forall n \ y_n < 0 \text{ или } y_n \rightarrow b < 0 \Rightarrow x_n y_n \rightarrow \mp\infty$$

$$6. \ x_n \rightarrow \infty, \forall n \ |y_n| > 0 \text{ или } y_n \rightarrow b \neq 0 \Rightarrow x_n y_n \rightarrow \infty$$

$$7. \ x_n \rightarrow a \neq 0, y_n \rightarrow 0, \forall n \ y_n \neq 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \infty$$

$$8. \ x_n \rightarrow a \in \mathbb{R}, y_n \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow 0$$

$$9. \ x_n \rightarrow \infty, y_n \rightarrow a \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \infty$$

Доказательство. Тривиально. □

2.15.2 Неопределенности

- $+\infty - \infty$
- $0 \cdot (\pm\infty)$
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- $\frac{0}{0}$

2.16 ! Теорема Кантора о стягивающихся отрезках

Дана последовательность отрезков $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$

Длины отрезков $\rightarrow 0$, т.е. $(b_n - a_n) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$

Тогда $\exists! c \in \mathbb{R} \quad \bigcap_{k=1}^{+\infty} [a_k, b_k] = \{c\}$ и при этом $a_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} c, b_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} c$

Доказательство. Берем из аксиомы Кантора $c \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} [a_k, b_k]$

$$\begin{cases} 0 \leq b_n - c \leq b_n - a_n \\ 0 \leq c - a_n \leq b_n - a_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_n - c \rightarrow 0 \\ c - a_n \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_n \rightarrow c \\ a_n \rightarrow c \end{cases}$$

По теореме об единственности предела c однозначно определено. □

2.17 Теорема о существовании супремума

$E \subset \mathbb{R}, E \neq \emptyset, E$ — огр. сверху.

Тогда $\exists \sup E \in \mathbb{R}$

Доказательство. Строим систему вложенных отрезков $[a_k, b_k]$ со свойствами:

1. b_k — верхняя граница E
2. $[a_k, b_k]$ содержит точки E .

a_1 — берём любую точку E , b_1 — любая верхняя граница.

Границы следующего отрезка найдём бинарным поиском (математики это называют *половинное деление*).

Если $\frac{a_1+b_1}{2}$ — верхняя граница E , $[a_2, b_2] := [a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$.

Иначе на $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ есть элементы E , $[a_2, b_2] := [\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$

Длина $[a_k, b_k] = b_k - a_k = \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}} \rightarrow 0$

$\exists! c \in \bigcap [a_k, b_k]$

Проверим: $c = \sup E$ по техническому описанию супремума:

1. $\forall x \in E \quad \forall n \quad x \leq c$
2. $\forall \varepsilon > 0 \quad c - \varepsilon$ — не верхн. гран., т.е. $\exists n : c - \varepsilon < a_n$

Доказательство 1: $\forall n \quad x \leq b_n, x \rightarrow c \Rightarrow x \leq c$ (предельный переход)

Доказательство 2: $\forall \varepsilon > 0$ возьмём n : длина отрезка $= b_n - a_n < \varepsilon$.

$$c - a_n < b_n - a_n < \varepsilon$$

$$c - \varepsilon < a_n$$

□

2.18 Лемма о свойствах супремума

О свойствах \sup, \inf

1. $\emptyset \neq D \subset E \subset \mathbb{R} \quad \sup D \leq \sup E$
2. $\lambda \in \mathbb{R} \quad (\lambda E = \{\lambda x, x \in E\})$
Пусть $\lambda > 0$, тогда $\sup \lambda E = \lambda \sup E$
3. $\sup(-E) = -\inf E$

Доказательство. 1. Множество верхних границ $E \subset$ множество верхних границ D .

2. $\lambda \cdot$ Множество верхних границ $E =$ множество верхних границ λE

3. Множество верхних границ $-E = -$ множество нижних границ E

□

2.19 Теорема о пределе монотонной последовательности

1. x_n — вещ. посл., огр. сверху, возрастает. $\Rightarrow \exists \lim x_n \in \mathbb{R}$
2. x_n — убывает, огр. снизу. $\Rightarrow \exists \lim x_n \in \mathbb{R}$
3. x_n — монотонна, огр. $\Rightarrow \exists \lim x_n \in \mathbb{R}$

Доказательство. Достаточно доказать 1.

Проверяем $\lim x_n = \sup x_n = M \in \mathbb{R}$

По определению \sup :

$$\forall \varepsilon \exists N \quad M - \varepsilon < x_N$$

$$x_N \leq x_{N+1} \leq x_{N+2} \leq x_{N+3} \dots \leq M$$

$$\forall \varepsilon \exists N \quad \forall n > N \quad M - \varepsilon < x_n \leq M < M + \varepsilon$$

По определению $M = \lim x_n$

□

2.20 Определение числа e , соответствующий замечательный предел

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

2.21 Теорема об открытых и замкнутых множествах в пространстве и в подпространстве

$Y \subset X$, X — метр.п., Y — подпространство, $D \subset Y \subset X$

1. D — откр. в $Y \Leftrightarrow \exists G$ — откр. в $X \quad D = G \cap Y$
2. D — замкн. в $Y \Leftrightarrow \exists F$ — замкн. в $X \quad D = F \cap Y$

Докажем 1.

Доказательство. Докажем “ \Rightarrow ”.

\forall точка D внутр. в Y

$\forall x \in D \exists r_x \quad B^Y(x, r_x) \subset D$

Очевидно $D = \bigcup_{x \in D} B^Y(x, r_x) \quad G := \bigcup_{x \in D} B^X(x, r_x)$ — откр. в X .

$$G \cap Y = \left(\bigcup_{x \in D} B^X(x, r_x)\right) \cap Y = \bigcup_{x \in D} B^Y(x, r_x) = D$$

Докажем “ \Leftarrow ”.

G — откр. в $X \quad D := G \cap Y \quad ? D$ — откр. в Y

$x \in D \quad ? x$ — внутр. точка D (в Y)

$x \in D \Rightarrow \exists B^X(x, r) \subset G \Rightarrow B^X(x, r) \cap Y = B^Y(x, r) \subset G \cap Y = D$

□

Докажем 2.

Доказательство. Докажем “ \Rightarrow ”

D — замкн. в $Y \Rightarrow D^c = Y \setminus D$ — откp. в Y

$\exists G$ — откp. в X , такое что $D^c = G \cap Y$

Тогда $G^c = X \setminus G$ — замкнуто в X , кроме того $D = G^c \cap Y$, т.к. $D^c = G \cap Y$

Возьмём в качестве F G^c .

Докажем “ \Leftarrow ”.

F — замкн. в X

$F \cap Y$ — замкн. в Y ?

$F^c = X \setminus F$ — откp. в X

$F^c \cap Y$ — откp. в Y

$Y \setminus (F^c \cap Y)$ — замкн. в Y

$Y \setminus (F^c \cap Y) \stackrel{?}{=} F \cap Y$

$Y \setminus ((X \setminus F) \cap Y) \stackrel{?}{=} F \cap Y$

Докажем это.

$$Y \cdot \overline{F \cap Y} = Y \cdot (\overline{F} \cap \overline{Y}) = YF + Y\overline{Y} = F \cap Y$$

□

2.22 Теорема о компактности в пространстве и в подпространстве

(X, ρ) — метрич. пространство, $Y \subset X$ — подпространство, $K \subset Y$

Тогда K — комп. в $Y \Leftrightarrow K$ — компактно в X .

Доказательство. Докажем “ \Rightarrow ”

$$K \text{ — комп. в } X \Leftrightarrow K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_{\alpha}, G_{\alpha} \text{ — откp. в } X$$

Доказать: \exists кон. $\alpha_1 \dots \alpha_n$ $K \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} (G_{\alpha} \cap Y) \Rightarrow \exists \text{ кон. } \alpha_1 \dots \alpha_n : K \subset \bigcup_{i=1}^n (G_{\alpha_i} \cap Y)$$

Тогда $K \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$

Докажем “ \Leftarrow ”

Дано: K — комп. в X , доказать: K — комп. в Y .

$$K \in \bigcup_{\alpha \in A} O_{\alpha}, O_{\alpha} - \text{откр. в } Y$$

$$\exists G_{\alpha} : O_{\alpha} = G_{\alpha} \cap Y (G_{\alpha} - \text{откр. в } X)$$

По двум выражениям выше:

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} O_{\alpha} = \bigcup_{\alpha \in A} G_{\alpha} \cap Y = Y \cap \bigcup_{\alpha \in A} G_{\alpha}$$

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_{\alpha}$$

Это открытое покрытие, K — компактно в $X \Rightarrow \exists \alpha_1 \dots \alpha_n : K \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$.

Тогда $K \subset \bigcup_{i=1}^n O_{\alpha_i}$ — конечное подпокрытие в Y . □

2.23 Простейшие свойства компактных множеств

(X, ρ) — метрическое пространство, $K \subset X$

1. K — комп. $\Rightarrow K$ — замкн., K — огр.
2. X — комп, K — замкн. $\Rightarrow K$ — комп.

Доказательство. 1. ? K — замкн. ? K^c — откр.

$a \notin K$, проверим, что $\exists U(a) \subset K^c$

$K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, \frac{1}{2}\rho(x, a))$ — откр. покрытие

K — комп. $\Rightarrow \exists x_1 \dots x_n \quad K \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \frac{1}{2}\rho(x_i, a))$ — открытое покрытие

$$r := \min(\frac{1}{2}\rho(x_1, a)) \dots \frac{1}{2}\rho(x_n, a))$$

$B(a, r)$ не пересекается ни с одним $B(x_i, \frac{1}{2}\rho(x_i, a)) \Rightarrow B(a, r) \subset K^c$

? K — огр.

$b \in X$

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} B(b, n) = X$$

$$K - \text{комп.} \Rightarrow K \subset \bigcup_{n=1}^m \Rightarrow K \subset B(b, \max(n_1 \dots n_m))$$

2. ? K — комп.

$$\begin{cases} K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_{\alpha}, G_{\alpha} - \text{откр.} \\ K - \text{замкн.}, K^c - \text{откр.} \end{cases} \Rightarrow K^c \cup \bigcup_{\alpha \in A} G_{\alpha} - \text{откр. покрытие } X \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X \subset (\text{может быть } K^c) \cup \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$$

□

2.24 Лемма о вложенных параллелепипедах

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall i = 1 \dots m \ a_i \leq x_i \leq b_i\}$ — параллелепипед.

$[a^1, b^1] \supset [a^2, b^2] \supset \dots$ — бесконечная последовательность параллелепипедов.

Тогда $\bigcap_{i=1}^{+\infty} [a^i, b^i] \neq \emptyset$

Если $\text{diam}[a^n, b^n] = \|b^n - a^n\| \rightarrow 0$, тогда $\exists! c \in \bigcap_{i=1}^{\infty} [a^i, b^i]$

Доказательство. $\forall i = 1 \dots m \ [a_i^1, b_i^1] \supset [a_i^2, b_i^2] \supset \dots \quad \exists c_i \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_i^n, b_i^n]. \ c = (c_1 \dots c_m)$ — общая точка всех параллелепипедов.

$|a_i^n - b_i^n| \leq \|a^n - b^n\| \rightarrow 0 \Rightarrow_{\text{т. Кантора}} \exists! c_i \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_i^n, b_i^n] \Rightarrow \exists! c = (c_1 \dots c_m)$ □

2.25 Компактность замкнутого параллелепипеда в \mathbb{R}^m

$[a, b]$ — компактное множество в \mathbb{R}^m

Доказательство. Докажем, что \exists кон. $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n) : [a, b] \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$

Допустим, что не \exists

$[a^1, b^1] := [a, b] \Rightarrow [a^1, b^1]$ нельзя покрыть кон. набором

$[a^2, b^2] :=$ делим $[a^1, b^1]$ на 2^m частей, берем любую “часть”, которую нельзя покрыть конечным набором G_{α}

\vdots

$$\text{diam} = [a^n, b^n] = \frac{1}{2} \text{diam}[a^{n-1}, b^{n-1}] = \frac{1}{2^{n-1}} \text{diam}[a^1, b^1]$$

$$\exists c \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a^n, b^n]$$

$$c \in [a, b] \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_{\alpha}$$

$$\exists \alpha_0 \quad c \in G_{\alpha_0} - \text{откр.}$$

$$\exists U_{\varepsilon}(c) \subset G_{\alpha_0}$$

$$\exists n \quad \text{diam}[a^n, b^n] \ll \varepsilon$$

$$\text{и тогда } [a^n, b^n] \subset U_{\varepsilon}(c) \subset G_{\alpha_0}$$

□

2.26 ! Теорема о характеристике компактов в \mathbb{R}^m

$K \subset \mathbb{R}^m$. Эквивалентны следующие утверждения:

1. K — замкнуто и ограничено
2. K — компактно
3. K — секвенциально компактно

Доказательство. Докажем $1 \Rightarrow 2$

K — огр. $\Rightarrow K$ содержится в $[a, b]$

K — замкн. в $\mathbb{R}^m \Rightarrow K$ — замкн. в $[a, b]$

Т.к. $[a, b]$ — комп., по простейшему свойству компактов K — комп. □

Доказательство. Докажем $2 \Rightarrow 3$

$\forall (x_n)$ — точки из K .

?сходящаяся последовательность

Если множество значений $D = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ — конечно, то \exists сход. подпослед. очевидно.

Пусть D — бесконечно

Если D имеет предельную точку, то $x_{m_k} \rightarrow a$

Если D — бесконечно и не имеет предельных точек, $K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, \varepsilon_x)$, радиус такой, что в этом шаре нет точек D , кроме x (его может тоже не быть). Тогда $\bigcup_{x \in K} B(x, \varepsilon_x)$ — открытое

покрытие K . Так как каждый шар содержит 0 или 1 точку, конечное число шаров не может покрыть K , т.к. в K бесконечное число точек (т.к. бесконечное число различных значений D). Таким образом, мы нашли открытое покрытие K , у которого нет конечного подпокрытия — противоречие.

Пусть $a \in K$ — предельная точка. Возьмём из $B(a, r_1)$ точку x_{n_1} . Возьмём $r_2 < r_1$ и из соответствующего шара возьмём x_{n_2} . При $r_n \rightarrow 0$ $x_{n_k} \rightarrow a$.

Почему вблизи a будет точка из произвольной последовательности? □

Доказательство. Продолжим доказательство из прошлой лекции, докажем, $3 \Rightarrow 1$.

Рассмотрим секвенциально компактное K и пусть K — не ограничено. (случай ограниченного множества тривиален)

$\exists x_n : \|x_n\| \rightarrow +\infty$

Тогда в этой последовательности нет сходящейся последовательности, т.к. любая $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$ ограничена. Противоречие $\Rightarrow K$ — не секвенциально компактно.

Таким образом, если K — секвенциально компактно, то K ограничено.

Докажем замкнутость K .

Пусть \exists предельная точка $x_0 \notin K$

$\exists x_n \rightarrow x_0$

По секвенциальности \exists подпоследовательность $x_{n_k} \rightarrow a \in K$.

Не дописано. □

2.27 Эквивалентность определений Гейне и Коши

Определение Коши \Leftrightarrow определение Гейне.

Доказательство. Докажем " \Rightarrow ".

Если дана (x_n) , удовл. определению Коши, доказать

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad 0 < \rho(f(x_n), A) < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \ 0 < \rho(x, a) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), A) < \varepsilon$$

$$\text{Для этого } \delta \exists N \forall n > N \rho(x_n, a) < \delta$$

, где $x_n \in D, x_n \neq a$
 $\Rightarrow \rho(f(x_n), A) < \varepsilon$

□

Доказательство. Докажем “ \Leftarrow ”

Пусть определение Коши не выполняется.

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in D \ 0 < \rho(x, a) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), A) \geq \varepsilon$$

$$\delta := \frac{1}{n} \exists x_n \in D \ 0 < \rho(x_n, a) < \frac{1}{n} \Rightarrow \rho(f(x_n), A) \geq \varepsilon$$

Построена последовательность $(x_n) : x_n \in D, x_n \neq a, \rho(x_n, a) < \frac{1}{n} \Rightarrow \rho(x_n, a) \rightarrow 0 \Rightarrow x_n \rightarrow a$. Кроме того, $\rho(f(x_n), A) \geq \varepsilon$ — противоречит утверждению Гейне, что $f(x_n) \rightarrow A$. □

2.28 Единственность предела, локальная ограниченность отображения, имеющего предел, теорема о стабилизации знака

2.28.1 Единственность предела

о единственности предела

Доказательство. По Гейне. $\forall (x_n) :$

- $x_n \rightarrow a$
- $x_n \in D$
- $x_n \neq a$

$$f(x_n) \rightarrow A, f(x_n) \rightarrow B \xRightarrow{\text{теор. о ед. предела посл.}} A = B$$

□

2.28.2 Локальная ограниченность отображения, имеющего предел

О локальной ограниченности отображения, имеющего предел.

$$f : D \subset X \rightarrow Y, a - \text{пред. точка } D, \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

Тогда $\exists V(a) : f - \text{огр. на } V(a) \cap D$, т.е. $f(V(a) \cap D)$ содержится в некотором шаре.

Доказательство. Для $\varepsilon = 1 \exists V(a) \forall x \in V(a) \cap D \ f(x) \in U_\varepsilon(A)$

Если $\nexists V(a)$, ограниченность доказана. Иначе:

$$\forall x \in V(a) \cap D \ f(x) \in U_{\tilde{\varepsilon}}(A), \text{ где } \tilde{\varepsilon} = \max(\varepsilon, \rho(A, f(a)) + 1)$$

□

2.28.3 Теорема о стабилизации знака

О стабилизации знака.

$f : D \subset X \rightarrow Y$, a — пред. точка D , $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$

Пусть $B \in Y, B \neq A$

Тогда $\exists V(a) \forall x \in \dot{V}(a) \cap D \quad f(x) \neq B$

Доказательство. Для

$$0 < \varepsilon < \rho(A, B) \quad \exists V(a) \quad \forall x \in \dot{V}(a) \cap D \quad f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

$U_\varepsilon(A)$ не содержит B . □

2.29 Арифметические свойства пределов отображений. Формулировка для $\overline{\mathbb{R}}$

$f, g : D \subset X \rightarrow Y$, X — метрич. пространство, Y — норм. пространство над \mathbb{R} , a — пред. точка D

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$$

$$\lambda : D \rightarrow \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow a} \lambda(x) = \lambda_0$$

Тогда:

1. $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm g(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm g(x) = A \pm B$
2. $\lim_{x \rightarrow a} \lambda(x)f(x) = \lambda_0 A$
3. $\lim_{x \rightarrow a} ||f(x)|| = ||A||$
4. Для случая $Y = \mathbb{R}$ и для $B \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$

$\frac{f}{g}$ задано на множестве $D' = D \setminus \{x : g(x) = 0\}$

a — пр. точка D' по теореме о стабилизации знака $\exists V(a) \forall x \in V(a) \cap D \quad g(x)$ — того же знака, что и B , т.е. $g(x) \neq 0$

$\dot{V}(a) \cap D' = \dot{V}(a) \cap D \Rightarrow a$ — пред. точка для D'

Доказательство. По Гейне. $\forall (x_n) :$

- $x_n \rightarrow a$
- $x_n \in D$
- $x_n \neq a$

$f(x_n) + g(x_n) \rightarrow^? A + B$ верно по теореме последовательности.

Аналогично прочие пункты, кроме 4.

$$f(x_n) \rightarrow A$$

$$g(x_n) \rightarrow B \neq 0 \Rightarrow \exists n_0 \quad \forall n > n_0 \quad g(x_n) \neq 0$$

$\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ корректно задано при $n > n_0$. □

Если $Y = \overline{\mathbb{R}}$, можно “разрешить” случай $A, B = \pm\infty$. Тогда 3. тривиально, 1., 2. и 4. верно, если выражения $A \pm B, \lambda_0 A, \frac{A}{B}$ корректны.

Докажем 1. как в теореме об арифметических свойствах последовательности.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall E_1 \exists \delta_1 > 0 \forall x \in D \cap V_{\delta_1}(a) \quad f(x) > E_1 \quad \forall E_2 \exists \delta_2 > 0 \forall x \in D \cap V_{\delta_2}(a) \quad g(x) > E_2$$

2.30 Принцип выбора Больцано–Вейерштрасса

Если в $\mathbb{R}^m (x_n)$ — ограниченная последовательность, то у неё существует сходящаяся подпоследовательность.

Доказательство. x_n — огр. $\Rightarrow x_n$ содержится в замкнутом кубе. Так как куб секвенциально компактен, x_{n_k} сходится. \square

2.31 Сходимость в себе и ее свойства

x_n — фундаментальная, последовательность Коши, сходящаяся в себе, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \quad \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$$

1. x_n — фунд. $\Rightarrow x_n$ — ограничена
2. x_n — фунд.; $\exists x_{n_k}$ — сходящ. Тогда x_n сходится.

Доказательство. 1. $\varepsilon := 1 \exists N \forall m, n := N + 1 > N \quad \rho(x_m, x_{N+1}) < 1$

$$R := \max(1; \rho(x_1, x_{N+1}), \dots, \rho(x_N, x_{N+1}))$$

$$\forall n \quad x_n \in B(x_{N+1}, R) \Rightarrow x_n \text{ ограничена.}$$

$$2. \begin{cases} \varepsilon > 0 \exists K \forall k > K \quad \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon \\ \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \quad \rho(x_m, x_n) < \varepsilon \end{cases} \xrightarrow{?} x_n \rightarrow a$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{N} := \max(N, K) \text{ при } k > \tilde{N} \text{ выполняется } k > K, \text{ значит } n_k \geq k > K \Rightarrow \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon.$$

$$\text{При } n > \tilde{N} \geq N \quad m := n_k > \tilde{N} \geq N \Rightarrow \rho(x_n, x_{n_k}) < \varepsilon$$

$$\text{Итого } \forall n > \tilde{N} \quad \rho(x_n, a) \leq \rho(x_{n_k}, a) + \rho(x_n, x_{n_k}) < 2\varepsilon$$

\square

2.32 Критерий Коши для последовательностей и отображений

2.32.1 Для последовательностей

1. В любом метрическом пространстве x_n — сходящ. $\Rightarrow x_n$ — фунд.
2. В \mathbb{R}^m x_n — фунд. $\Rightarrow x_n$ — сходящ.

Доказательство. 1. $x_n \rightarrow a \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad \rho(x_n, a) < \varepsilon$

$$x_n \rightarrow a \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N \quad \rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_n, a) + \rho(x_m, a) < 2\varepsilon$$

2. x_n — фунд. $\Rightarrow x_n$ — огр. $\xRightarrow{\text{Б.-В.}} \exists x_{n_k}$ — сходящ.

$$\begin{cases} \exists x_{n_k} \text{ — сходящ.} \\ x_n \text{ — фунд.} \end{cases} \Rightarrow x_n \text{ — сходящ.}$$

□

2.32.2 Для отображений

$f : D \subset X \rightarrow Y$, a — пр. точка D , Y — полное метрическое пространство.

Тогда

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \in Y \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in D \quad \rho(x_1, a) < \delta; \rho(x_2, a) < \delta \quad \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

Доказательство. “ \Rightarrow ” как для последовательностей.

Докажем “ \Leftarrow ” по Гейне.

Заметим, что последовательность $f(x_n)$ — фундаментальная, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \quad \rho(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$$

$$x_n \rightarrow a \Rightarrow \exists N \forall n > N \quad \rho(x_n, a) < \delta$$

$$\forall m, n > N \quad \rho(x_n, a) < \delta; \rho(x_m, a) < \delta \xRightarrow{\text{Фунд.}} \rho(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$$

□

2.33 ! Теорема о пределе монотонной функции

$f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, монотонная, $a \in \overline{\mathbb{R}}$

$D_1 := D \cap (-\infty, a)$, a — пред. точка D_1 . Тогда:

1. f — возрастает, огр. сверху на D_1 . Тогда \exists конечный предел $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$

2. f — убывает, огр. снизу на D_1 . Тогда \exists конечный предел $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$

Доказательство. 1. $L := \sup_{D_1} f \quad L \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$

$\forall \varepsilon > 0 \quad L - \varepsilon$ — не верхн. граница для $\{f(x) : x \in D_1\}$ $\exists x_1 : L - \varepsilon < f(x_1)$.

Тогда при $x \in (x_1, a) \cap D_1 \quad L - \varepsilon < f(x_1) \leq f(x) \leq L$

$\exists \delta := |x_1 - a| \quad \forall x : x \in (x_1, a) \quad L - \varepsilon \leq f(x) < L + \varepsilon$

Аналогично доказывается пункт 2.

□

2.34 Свойства непрерывных отображений: арифметические, стабилизация знака, композиция

2.34.1 Арифметические

1. $f, g : D \subset X \rightarrow Y$ $x_0 \in D$ (Y — норм. пространство)

f, g — непр. в x_0 ; $\lambda : D \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ — непр. x_0

Тогда $f \pm g, \|f\|, \lambda f$ — непр. x_0

2. $f, g : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ $x_0 \in D$

f, g — непр. в x_0

Тогда $f \pm g, |f|, fg$ — непр. в x_0

$g(x_0) \neq 0$, тогда $\frac{f}{g}$ — непр. x_0

Доказательство отсутствует

2.34.2 Стабилизация знака

Если функция $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то:

$$\exists V(x_0) : \forall x \in V(x_0) \cap D \quad \text{sign } f(x) = \text{sign } f(x_0)$$

Доказательство. Докажем для $f(x_0) > 0$.

Докажем от противного:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in U_{x_0} \left(\frac{1}{n} \right) \cap D : g(x_n) \leq 0$$

Противоречие. □

2.34.3 Непрерывность композиции непрерывных отображений

$f : D \subset X \rightarrow Y$ $g : E \subset Y \rightarrow Z$ $f(D) \subset E$

f — непр. в $x_0 \in D$, g — непр. в $f(x_0)$

Тогда $g \circ f$ непр. в x_0

Доказательство. По Гейне.

Проверяем, что $\forall (x_n) : x_n \in D, x_n \rightarrow x_0 \quad g(f(x_n)) \xrightarrow{?} g(f(x_0))$

$$y_n := f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x_0)$$

$$y_n \in E$$

$$\Rightarrow g(y_n) \rightarrow g(y_0)$$

□

2.35 Непрерывность композиции и соответствующая теорема для пределов

2.35.1 Непрерывность композиции

Дана выше.

2.35.2 Соответствующая теорема для пределов

$$f : D \subset X \rightarrow Y \quad g : E \subset Y \rightarrow Z \quad f(D) \subset E$$

$$a - \text{предельн. точка } D \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A$$

$$A - \text{предельн. точка } E \quad g(y) \xrightarrow{y \rightarrow A} B$$

$$\exists V(a) \quad \forall x \in \dot{V}(a) \cap D \quad f(x) \neq A \quad (*)$$

$$\text{Тогда } g(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} B$$

Доказательство. По Гейне.

$$\text{Проверяем, что } \forall (x_n) : \begin{matrix} x_n \in D \\ x_n \rightarrow a \\ x_n \neq a \end{matrix} \quad g(f(x_n)) \overset{?}{\rightarrow} B$$

$$y_n := f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A$$

$$y_n \in E$$

$$\text{При больших } N \quad y_n \in V(a) \Rightarrow y_n \neq A$$

$$\Rightarrow g(y_n) \rightarrow B$$

□

2.36 ! Теорема о замене на эквивалентную при вычислении пределов.

Таблица эквивалентных

2.36.1 Теорема о замене на эквивалентную при вычислении пределов

$$f, \tilde{f}, g, \tilde{g} : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x_0 - \text{предельная точка } D$$

$$f \sim \tilde{f}, g \sim \tilde{g} \text{ при } x \rightarrow x_0$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)$$

, т.е. если \exists один из пределов, то \exists и второй и имеет место равенство

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}$$

, если x_0 лежит в области определения $\frac{f}{g}$

Доказательство.

$$f(x)g(x) = \tilde{f}(x)\tilde{g}(x) \frac{f}{\tilde{f}} \frac{g}{\tilde{g}} \rightarrow \tilde{f}(x)\tilde{g}(x) \cdot 1 \cdot 1$$

□

2.36.2 Таблица эквивалентных

Дана выше. (1.41, стр. 9)

2.37 Теорема единственности асимптотического разложения

$f, g_n : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ x_0 — предельная точка D

$\forall n \quad g_{n+1} = o(g_n), x \rightarrow x_0$

$\exists U(x_0) \quad \forall x \in U(x_0) \cap D \quad \forall i \quad g_i(x) \neq 0$

Если $f(x) = c_0 g_0(x) + \dots + c_n g_n(x) + o(g_n(x))$

$f(x) = d_0 g_0(x) + \dots + d_m g_m(x) + o(g_m(x))$

$n \leq m$

Тогда $\forall i \quad c_i = d_i$

Доказательство. $k := \min\{i : c_i \neq d_i\}$

$$f(x) = c_0 g_0 + \dots + c_{k-1} g_{k-1} + c_k g_k + o(g_k)$$

$$f(x) = c_0 g_0 + \dots + c_{k-1} g_{k-1} + d_k g_k + o(g_k)$$

$$0 = (c_k - d_k) g_k + o(g_k)$$

$$d_k - c_k = \frac{o(g_k)}{g_k(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

□

2.38 ! Теорема о топологическом определении непрерывности

$f : X \rightarrow Y$ — непр. на $X \Leftrightarrow \forall G \subset Y$, откp. $f^{-1}(G)$ — откp. в X .

Доказательство. “ \Rightarrow ” $x_0 \in f^{-1}(G) \quad ? \exists V(x_0) \subset f^{-1}(G)$

f — непр. в $x_0 \quad \forall U(f(x_0)) \quad W(x_0) \quad \forall x \in W \quad f(x) \in U$

$f(x_0) \in G$ — откp. $\Rightarrow \exists U_1(f(x_0)) \subset G$

Для $U_1 \quad \exists W(x_0) : x \in W \quad f(x) \in U_1 \subset G$

$W(x_0) \subset f^{-1}(G)$

“ \Leftarrow ” $x_0 \in X$? непр. f в x_0

$\forall U(f(x_0)) \quad \exists W(x_0) \quad \forall x \in W \quad \forall f(x) \in U$ — надо проверить

$U(f(x_0))$ — откp. $\Rightarrow f^{-1}(U(f(x_0)))$ — откp., а $x_0 \in f^{-1}(U(f(x_0)))$, значит $\exists W(x_0) \subset f^{-1}(U(f(x_0)))$

Для любого $x \in W(x_0)$ будет выполняться $f(x) \in U(f(x_0))$ □

2.39 ! Теорема Вейерштрасса о непрерывном образе компакта. Следствия

$f : X \rightarrow Y$ — непр. на X

Если X — комп., то $f(X)$ — комп.

Доказательство. ? $f(X)$ — комп.

$f(X) \subset \bigcup G_\alpha \quad G_\alpha$ — откp. в Y .

$X \subset \bigcup f^{-1}(G_\alpha)$ — откp. т.к. f — непр. $\xRightarrow{X \text{ — комп.}}$

$$\exists \alpha_1 \dots \alpha_n \quad X \subset \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(G_{\alpha_i}) \Rightarrow f(X) \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$$

□

Следствие. Непрерывный образ компакта замкнут и ограничен.

Следствие. (1-я теорема Вейерштрасса)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — непр.

Тогда f — огр.

Следствие. $f : X \rightarrow \mathbb{R}$

X — комп., f — непр. на X

Тогда $\exists \max_X f, \min_X f$

$\exists x_0, x_1 : \forall x \in X \quad f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$

Следствие. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — непр.

$\exists \max f, \min f$

2.40 Лемма о связности отрезка

Промежуток $\langle a, b \rangle$ (границы могут входить, могут не входить) — не представим в виде объединения двух непересекающихся непустых открытых множеств

Т.е. $\nexists G_1, G_2 \subset \mathbb{R}$ — откр.:

- $G_1 \cap G_2 = \emptyset$
- $\langle a, b \rangle \cap G_1 \neq \emptyset \quad \langle a, b \rangle \cap G_2 \neq \emptyset$
- $\langle a, b \rangle \subset G_1 \cup G_2$

Доказательство. От противного: $\alpha \in \langle a, b \rangle \cap G_1 \quad \beta \in \langle a, b \rangle \cap G_2$, пусть $\alpha < \beta$

$$t := \sup\{x : [\alpha, x] \subset G_1\} \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

$t \in G_1$? нет, т.к. если да, то $t \neq \beta$ и $\exists U(t) = (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \subset G_1 \cap [\alpha, \beta]$, это противоречит определению t :

$$[\alpha, t - \frac{\varepsilon}{2}] \subset G_1$$

$$(t - \varepsilon, t + \varepsilon) \subset G_1$$

$$[\alpha, t + \frac{\varepsilon}{2}] \subset G_1$$

$t \in G_2$? нет, т.к. если лежит, то $t \neq \alpha \quad \exists (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \subset G_2 \cap [\alpha, \beta]$

$$\sup\{x : [\alpha, x] \subset G_1\} \leq t - \varepsilon$$

□

2.41 ! Теорема Больцано-Коши о промежуточном значении

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, непр. на $[a, b]$. Тогда

$$\forall t \text{ между } f(a) \text{ и } f(b) \quad \exists x \in [a, b] : f(x) = t$$

Традиционное доказательство — бинпоиск.

Доказательство. Сразу следует из леммы о связности отрезка и топологического определения непрерывности.

Если нашлось t , для которого доказуемое утверждение неверно, то

$$[a, b] = f^{-1}(-\infty, t) \cup f^{-1}(t, +\infty)$$

Оба множества открыты, т.к. они — прообразы открытых множеств. Кроме того, они непусты, т.к. одно из них содержит a , другое содержит b . Итого, мы представили отрезок $[a, b]$ в виде двух непересекающихся непустых открытых множеств, противоречие по предыдущей лемме. \square

2.42 Теорема о сохранении промежутка

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, непр.

Тогда $f(\langle a, b \rangle)$ — промежуток.

Доказательство. Не по Кохасю.

$m := \inf f, M := \sup f$. Докажем, что $f(\langle a, b \rangle) = \langle m, M \rangle$ путем доказательства, что $f(\langle a, b \rangle) \subset \langle m, M \rangle$ и $f(\langle a, b \rangle) \supset \langle m, M \rangle$.

$$1. f(\langle a, b \rangle) \subset \langle m, M \rangle$$

$$\forall x \quad m \leq f(x) \leq M \Rightarrow f(\langle a, b \rangle) \subset \langle m, M \rangle$$

$$2. f(\langle a, b \rangle) \supset \langle m, M \rangle$$

$\triangleleft k \in \langle m, M \rangle$. По теореме Больцано-Коши о промежуточном значении $\exists c \in \langle a, b \rangle : f(c) = k \Rightarrow k \in f(\langle a, b \rangle) \Rightarrow \langle m, M \rangle \subset f(\langle a, b \rangle)$

\square

2.43 Теорема Больцано-Коши о сохранении линейной связности

X, Y — метрические пространства, $f : X \rightarrow Y$ — непрерывное и сюръекция
 X — линейно связное множество. Тогда Y — линейно связное множество.

Доказательство. Надо доказать, что \exists путь $[a, b] \rightarrow [A, B]$

$$f(a) = A; f(b) = B$$

X — линейно связное $\Rightarrow \exists \gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow X, \gamma(\alpha) = a, \gamma(\beta) = b, \gamma$ — непрерывное

$$f \circ \gamma[a, b] \rightarrow Y; f \circ \gamma(\alpha) = A, f \circ \gamma(\beta) = B$$

Т.к. композиция непрерывных функций непрерывна, $f \circ \gamma$ — непрерывна. \square

2.44 Описание линейно связных множеств в \mathbb{R}

В \mathbb{R} линейно связными множествами являются только промежутки.

Доказательство. 1. Промежуток линейно связан.

$$\forall A, B \in \langle a, b \rangle \quad \exists \text{ путь: } \gamma : [A, B] \Rightarrow \langle a, b \rangle; t \mapsto t$$

2. $E \subset \mathbb{R}$ — линейно связное \Rightarrow E — промежуток

Пусть E — не промежуток

$\exists a, b, t : a, b \in E; a < b \quad a < t < b; t \notin E$

Линейная связность: $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow E$

$\gamma(\alpha) = a \quad \gamma(\beta) = b \quad \gamma$ — непр.

□

2.45 Теорема о бутерброде

Кусок хлеба и кусок колбасы, лежащие на столе, можно разрезать прямой на две равные по площади части каждый.

Доказательство. Рассмотрим угол φ и разделим прямой под углом φ колбасу на две равные по площади части. Это можно сделать для произвольного φ по теореме о разделении колбасы.

$S(\varphi) = S_{\pi} - S_{\pi}$ (для хлеба)

S — непр.

Берём произвольный угол $\varphi_0; \varphi_0 + \pi$

$\varphi_0 : S_{\pi} - S_{\pi}$

$\varphi_0 + \pi : S_{\pi} - S_{\pi}$

$\exists \varphi \quad S(\varphi) = 0$ по теореме Больцано-Коши о промежуточном значении.

□

2.46 Теорема о вписанном n -угольнике максимальной площади

Вписанный n -угольник максимальной площади — правильный.

Доказательство. Докажем, что если такой n -угольник существует, то он правильный. Предположим обратное — он не правильный \Rightarrow не все стороны равны. Возьмём точки этого n -угольника A, B, C на окружности такие, что $AB \neq BC$. Сдвинем B таким образом, что $AB = BC$. Площадь треугольника увеличилась (т.к. основание не изменилось), а высота увеличилась $\Rightarrow n$ -угольник правильный.

Докажем, что такой n -угольник существует, т.е. $\exists \max S$. Зададим n -угольник углами между соседними вершинами α_i . Заметим, что $0 \leq \alpha_i \leq \pi$ и $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 2\pi$. Совпадающие вершины разрешены, искомым n -угольник содержит центр окружности (очевидно). Таким образом, мы задали n -угольник в \mathbb{R}^n — пространстве углов. Множество всех n -угольников ограничено гиперкубом со стороной π . Кроме того, оно замкнуто \Rightarrow по характеристике компактов в \mathbb{R}^m оно компактно.

$S := \sum \frac{1}{2} R^2 \alpha_i$ — непрерывна на компакте $\Rightarrow \exists \max S$

□

2.47 ! Теорема о непрерывности монотонной функции. Следствие о множестве точек разрыва

2.47.1 Теорема о непрерывности монотонной функции

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, монотонна. Тогда

1. Точки разрыва f (если есть) — I рода

2. f — непр. на $\langle a, b \rangle \Leftrightarrow f(\langle a, b \rangle)$ — промежуток

Доказательство. Рассмотрим $f \uparrow$

1. $x_1 \in \langle a, b \rangle$

$$\lim_{x \rightarrow x_1 - 0} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow x_1} f(x)|_{\langle a, x_1 \rangle}$$

$f(x)|_{\langle a, x_1 \rangle} \uparrow$ и ограничена значением $f(x) \Rightarrow$ по теореме о пределе монотонной функции $\exists \lim_{x \rightarrow x_1} f(x)|_{\langle a, x_1 \rangle} = \sup f(x)|_{\langle a, x_1 \rangle}$. Аналогично $\exists \lim_{x \rightarrow x_1 + 0}$. Таким образом, для каждой точки существует предел слева и справа.

2. “ \Rightarrow ” следует из теоремы о сохранении промежутка.

“ \Leftarrow ”

Пусть f имеет разрыв в x_0 . Тогда либо $f(x_0 - 0) < f(x_0)$, либо $f(x_0) < f(x_0 + 0)$. Рассмотрим $f(x_0) < f(x_0 + 0)$. В силу монотонности f не принимает значений между $f(x_0)$ и $f(x_0 + 0) \Rightarrow$ множество значений — не промежуток. Противоречие.

□

2.47.2 Следствие о множестве точек разрыва

У монотонной функции, заданной на промежутке, имеется не более чем счётное (НБЧС) множество точек разрыва.

Доказательство. $f(x - 0) < f(x + 0)$

$(f(x - 0), f(x + 0)) \rightsquigarrow q_x$

т. разрыва $\rightarrow \mathbb{Q}$

$$]x < t_0 < y$$

$$f(x) \leq f(t_0) \leq f(y)$$

$$f(x) \leq f(x + 0) \leq f(t_0) \leq f(y - 0) \leq f(y)$$

Таким образом, $(f(x - 0), f(x + 0))$ не имеет общих точек, тогда q_x все разные \Rightarrow взятие q_x — инъекция. □

2.48 Теорема о существовании и непрерывности обратной функции

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — непр., строго монот.

$m := \inf_{\langle a, b \rangle} f(x), M := \sup_{\langle a, b \rangle} f(x)$. Тогда:

1. f — обратимая и $f^{-1} : \langle m, M \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$
2. f^{-1} строго монотонна и того же типа (возрастает или убывает)
3. f^{-1} непрерывна

Доказательство. Пусть $f \uparrow$

$f(\langle a, b \rangle)$ — промежуток $\langle m, M \rangle$ (типы скобок совпадают)

f — строго монот. $\Rightarrow f$ — инъекция. Тогда $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \langle m, M \rangle$ — биекция

$\forall x_1 < x_2 \quad f(x_1) < f(x_2)$

$\forall y_1 < y_2 \quad f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$

□

2.49 Счетность множества рациональных чисел

\mathbb{Q} — счётное

Доказательство.

$$\mathbb{Q}_+ := \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}, \quad \mathbb{Q}_- := \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}$$

$$\forall q \in \mathbb{N} \quad \mathbb{Q}_p = \left\{ \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \dots \right\} \text{ — счётно}$$

$$\mathbb{Q}_+ = \bigcup_{q=1}^{\infty} \mathbb{Q}_p \text{ — счётно}$$

$$\mathbb{Q}_- \sim \mathbb{Q}_+ \Rightarrow \mathbb{Q}_- \text{ — счётно}$$

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- \cup \{0\} \text{ — счётно}$$

□

2.50 Несчетность отрезка

$[0, 1]$ — несчётно

Доказательство. Пусть $\exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ — биекция

$[a_1, b_1]$ — любая из частей, где нет $\varphi(1)$

$[a_2, b_2]$ — любая из частей, где нет $\varphi(2)$ и $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$

$\bigcap [a_k, b_k] \supset \{x\}$ x — не имеет номера

$\forall k \quad x \in [a_k, b_k] \Rightarrow x \neq \varphi(k)$

□

2.51 Континуальность множества бинарных последовательностей

Bin = множество бинарных последовательностей

Bin имеет мощность континуума

Доказательство. $\varphi : Bin \rightarrow [0, 1] \cup Bin_{\text{кон.}}$

$0101 \dots \mapsto 0.0101 \dots$ — это отображение не инъективно ($0100 \dots \mapsto 0.01$; $0011 \dots \mapsto 0.01$)

Инъекция достигается тем, что конечные дроби идут в $Bin_{\text{кон.}}$, а бесконечные в $[0, 1]$ □

2.52 Равносильность двух определений производной. Правила дифференцирования.

2.52.1 Равносильность двух определений производной

Определение 1 \Leftrightarrow определению 2, т.е.

$$f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + o(x - x_0), x \rightarrow x_0$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = B \in \mathbb{R}$$

$$A = B$$

Доказательство. Докажем " \Leftarrow ".

$$f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + o(x - x_0), x \rightarrow x_0$$

$$A = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{o(x - x_0)}{x - x_0}$$

Докажем " \Rightarrow ".

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \alpha(x) \quad \alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

□

2.52.2 Правила дифференцирования

$f, g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, дифф. в x_0

Тогда указанные ниже в левых частях дифференцируемы в x_0 и их производные равны.

1. $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$
3. $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
4. Если $g(x_0) \neq 0$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Доказательство. Докажем 4 по определению.

$$\frac{\frac{f}{g}(x_0 + h) - \frac{f}{g}(x_0)}{h} = \frac{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}g(x_0) - f(x_0)\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}}{g(x_0 + h)g(x_0)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \text{OK}$$

□

2.53 Дифференцирование композиции и обратной функции

2.53.1 Дифференцирование композиции

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \langle c, d \rangle \quad x \in \langle a, b \rangle \quad f - \text{дифф. в } x$
 $g : \langle c, d \rangle \rightarrow \mathbb{R} \quad g - \text{дифф. } y = f(x)$
 Тогда $g \circ f - \text{дифф. в } x; (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + \alpha(h)h, \alpha(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \\
 g(y+k) &= g(y) + g'(y)k + \beta(k)k \\
]f'(x)h + \alpha(h)h &= k; \quad k \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \\
 g(f(x+h)) &= g(f(x) + f'(x)h + \alpha(h)h) = \\
 &= g(f(x)) + g'(f(x))(f'(x)h + \alpha(h)h) + \beta(k)(f'(x)h + \alpha(h)h) = \\
 &= g(f(x)) + g'(f(x))f'(x)h + g'(f(x))\alpha(h)h + \beta(k)f'(x)h + \beta(k)\alpha(h)h \\
]g'(f(x))\alpha(h)h + \beta(k)f'(x)h + \beta(k)\alpha(h)h &= \gamma(h) \cdot h; \quad \gamma(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0
 \end{aligned}$$

□

2.53.2 Дифференцирование обратной функции

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R} - \text{непр., строго монот. } x \in \langle a, b \rangle \quad f - \text{дифф. в } x; f'(x) \neq 0$
 По определению $f \ni f^{-1}$
 Тогда $f^{-1} - \text{дифф. в } y = f(x) \text{ и}$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Доказательство. $\forall k \exists h : f(x+h) = y+k$

$$h = (x+h) - x = f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) = \tau(k)$$

$$\frac{f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)}{k} = \frac{\tau(k)}{f(x+\tau(k)) - f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x+\tau(k)) - f(x)}{(x+\tau(k)) - x}} \xrightarrow[\tau(k) \rightarrow 0]{\substack{\text{по т.о непр. обр. ф} \\ k \rightarrow 0}} \frac{1}{f'(x)}$$

□

2.54 Теорема Ферма (с леммой)

2.54.1 Лемма

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — дифф. в $x_0 \in (a, b)$; $f'(x_0) > 0$
 Тогда $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x : x \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \quad f(x_0) < f(x)$
 и $\forall x : x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \quad f(x_0) > f(x)$

Примечание. Это не монотонность.

Доказательство.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0) > 0$$

$x \rightarrow x_0 + 0 \quad x - x_0 > 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) > 0$ вблизи x_0 (по теор. о стабилизации знака)

$x \rightarrow x_0 - 0 \quad x - x_0 < 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) < 0$ вблизи x_0

□

2.54.2 Теорема Ферма

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$
 $x_0 \in (a, b)$ — точка максимума
 f — дифференцируема в x_0
 Тогда $f'(x_0) = 0$

Доказательство. Из леммы.

Если $f'(x_0) > 0$, то справа от x_0 есть $x : f(x) > f(x_0)$

Если $f'(x_0) < 0$, то слева от x_0 есть $x : f(x) > f(x_0)$

□

2.55 Теорема Ролля. Вещественность корней многочлена Лежандра

2.55.1 Теорема Ролля

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — непр. на $[a, b]$, дифф. на (a, b)
 $f(a) = f(b)$. Тогда $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$

Доказательство. По теореме Вейерштрасса.

$x_0 = \max f(x); x_1 = \min f(x)$

$\{x_0, x_1\} = \{a, b\} \Rightarrow f = \text{const}; f' \equiv 0$

Иначе: пусть $x_0 \in (a, b) \xrightarrow{\text{т. Ферма}} f'(x_0) = 0$

□

2.55.2 Вещественность корней многочлена Лежандра

$$n \in \mathbb{N}$$

$\text{Ln}(x) = ((x^2 - 1)^n)^{(n)}$ — полиномы Лежандра (с точностью до умножения на константу)
 $\deg \text{Ln} = n$

Утверждение: Ln имеет n различных вещественных корней.

Доказательство. Рассмотрим $(x^2 - 1)^n$. У этого многочлена 2 корня $\{-1, 1\}$, каждый кратности n .

Возьмём производную. По т. Ролля у этого многочлена есть корень $\in (-1, 1)$. Кроме того, $\{-1, 1\}$ все ещё корни, у них кратность $n - 1$. Т.к. $\deg = 2n - 1$, кратность нового корня 1. На n -ом шаге получается n корней, каждый кратности 1. \square

2.56 ! Теоремы Лагранжа и Коши. Следствия об оценке приращения и о пределе производной

2.56.1 Теорема Лагранжа

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — непр., дифф. в (a, b) . Тогда $\exists c \in (a, b)$, такое что:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Примечание. Теорему Лагранжа можно интерпретировать как следующее: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ — тангенс угла между хордой графика и горизонталью, а $f'(c)$ — касательная. Таким образом, если провести хорду графика, то можно найти точку между точками пересечения графика и хорды такую, что касательная к графику будет параллельна этой хорде.

Доказательство. Следует из теоремы Коши при $g(x) = x$ \square

2.56.2 Теорема Коши

$$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

f, g — дифф. в (a, b) ; $g' \neq 0$ на (a, b) . Тогда

$\exists c \in (a, b)$, такое что:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Доказательство. Теоремы Коши.

$$F(x) := f(x) - kg(x)$$

Подберем k такое, что $F(b) = F(a)$

$$f(b) - kg(b) = f(a) - kg(a)$$

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

По т. Ролля $\exists c : F'(c) = 0$

$$f'(c) - kg'(c) = 0$$

$$k = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

\square

2.56.3 Следствия об оценке приращения и о пределе производной

1. f непр. на $[a, b]$, дифф. в (a, b)

$$\exists M : \forall x \quad |f'(x)| \leq M$$

Тогда $\forall x, x+h \in [a, b]$

$$|f(x+h) - f(x)| \leq M|h|$$

2. f — непр. на $[a, b]$, дифф. на (a, b)

$$\exists \lim_{x \rightarrow a+0} f'(x) = k \in \overline{\mathbb{R}}$$

Тогда $f'_+(a) = k$

Доказательство. Следствия 2.

$\exists a < c < a+h$, такой что:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(c) \xrightarrow{h \rightarrow 0} k$$

□

2.57 Теорема Дарбу. Следствия

2.57.1 Теорема Дарбу

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — дифф. на $[a, b]$

Тогда $\forall C$ лежащего между $f'(a), f'(b)$

$$\exists c \in (a, b) : f'(c) = C$$

Доказательство. $F(x) := f(x) - C \cdot x$ — у неё $\exists \max_{[a,b]}$ (в силу непрерывности)

$F'(x) = f'(x) - C$ $F'(a)$ и $F'(b)$ разных знаков.

1. $F'(a) > 0$ $F'(b) < 0$

По лемме при $x > a$, близких к a $f(x) > f(a) \Rightarrow \max f$ достигается в $c \in (a, b)$

□

2.57.2 Следствия

Следствие. 1. Функция f' обладает свойством “сохранять промежуток”

2. f' не может иметь разрывов вида “скачок”

2.58 Теорема о свойствах показательной функции

f — показ. ф-ция

Тогда:

1. $\forall x \quad f(x) > 0; f(0) = 1$

2. $\forall r \in \mathbb{Q} \quad f(rx) = (f(x))^r$

3. f — строго монот.: $a := f(1)$

Тогда $a \neq 1$, если $a > 1$ — возр., если $a < 1$ — убыв.

4. Множество значений $f \quad (0, +\infty)$

5. $\tilde{f}(1) = f(1)$, тогда $f = \tilde{f}$

Доказательство. 1. $f \not\equiv 0 \quad \exists f(x_0) \neq 0$

$$x = x_0, y = 0 \quad f(x_0 + 0) = f(x_0) \cdot f(0) \Rightarrow f(0) = 1$$

Если $f(x_1) = 0$, тогда

$$\forall x \quad f(x) = f(x - x_1) \cdot f(x_1) = 0$$

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) > 0$$

2. Как в опр. ст. с рациональным показателем

- (a) $r = 1$

- (b) $r \in \mathbb{N}$

$$f(2x) = f(x + x) = f(x) \cdot f(x) = f(x^2)$$

$$f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) \cdot f(x) = (f(x))^n f(x) = (f(x))^{n+1}$$

- (c) $r \in \mathbb{N}$

$$1 = f(0) = f(nx + (-n)x) = f(nx) \cdot f(-nx) = (f(x))^n f(-nx)$$

- (d) $r = 0$

$$f(rx) = f(0) = 1 = (f(x))^0$$

- (e) $r = \frac{1}{n}$

$$f(x) = f\left(n \cdot \frac{x}{n}\right) = \left(f\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n$$

$$f\left(\frac{1}{n}x\right) = (f(x))^{\frac{1}{n}}$$

- (f) $r = \frac{m}{n} \quad m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = f\left(m \cdot \left(\frac{1}{n}x\right)\right) = \left(f\left(\frac{1}{n}x\right)\right)^m = (f(x)^{\frac{1}{n}})^m$$

$$3. a = 1 \quad f(1) = 1 \quad \forall r \in \mathbb{Q} \quad f(r) = 1^r = 1$$

f — непр. и $f(x) = 1$ при $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow f \equiv 1$

$a > 1$. Тогда $\forall x > 0 \quad f(x) > 1$

$$r \in \mathbb{Q}, r > 0 \quad f(r) = r(r \cdot 1) = (f(1))^r = a^r > 1$$

Значит $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$ берем $r_k \rightarrow x (r_k \in \mathbb{Q})$

$f(r_k) \rightarrow f(x)$, значит $f(x) \geq 1$

$$f(x) = f((x-r) + r) = f(x-r) \cdot f(r) > 1$$

$$\exists r \in \mathbb{Q} : 0 < r < x$$

возр. $x \in \mathbb{R}, h > 0$

$$f(x+h) = f(x) \cdot f(h)$$

$$f(h) > 1 \Rightarrow f(x+h) > f(x)$$

$a < 1$ — аналогично.

$$4. f(\mathbb{R}) = (\inf f, \sup f)$$

$$\inf f = 0 \quad \sup f = +\infty$$

$$f(1) = a > 1$$

$$a^n, n \in \mathbb{Z}$$

$$5. \tilde{f}(1) = f(1) \Rightarrow \forall r \quad \tilde{f}(r) = f(r)$$

$$\forall x \quad r_k \rightarrow x$$

$$\tilde{f}(r_k) = f(r_k)$$

$$\tilde{f}(r_k) \rightarrow \tilde{f}(x); f(r_k) \rightarrow f(x) \Rightarrow f(x) = \tilde{f}(x)$$

□

2.59 Выражение произвольной показательной функции через экспоненту. Два следствия

2.60 Показательная функция от произведения

$$f - \text{показ. ф-ция. } \forall r \in \mathbb{R} \quad f(rx) = (f(x))^r$$

Доказательство. Для $r \in \mathbb{Q}$ доказано выше. (2.58, стр. 45)

$$\triangleleft r \in \mathbb{R}. \exists a_n \in \mathbb{Q} \rightarrow r$$

$$f(a_n x) = f(x)^{a_n} \rightarrow f(x)^r$$

□

2.61 Формула Тейлора с остатком в форме Пеано

Остаток: $R_n := o((x - x_0)^{n+1}), x \rightarrow x_0$.

$$f(x) = f(x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^{n+1})$$

Доказательство.

Лемма 1. $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \langle a, b \rangle, \varphi$ n раз дифференцируема в x_0 и $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \dots = \varphi^{(n)}(x_0) = 0$.

Тогда $\varphi(x) = o((x - x_0)^n), x \rightarrow x_0$

Доказательство. База: $n = 1$.

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) = o(x - x_0)$$

Переход:

$\varphi'(x) = o((x - x_0)^n)$ по индукционному переходу.

$$\begin{aligned} r(x) &= r(x_0) + r'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) = 0 + o((x - x_0)^n)(x - x_0) + o(x - x_0) = \\ &= o((x - x_0)^{n+1}) + o(x - x_0) = o((x - x_0)^{n+1}) \end{aligned}$$

□

$$R_n := f(x) - f(x_0) - \dots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n - \text{подходит в лемму} \Rightarrow R_n = o((x - x_0)^{n+1})$$

□

2.62 ! Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа

Остаток: $R_n := \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, где $c \in (x_0, x)$ (или наоборот, если $x < x_0$).

$$f(x) = f(x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Доказательство.

$$g(t) := f(x) - f(t) - f'(t)(x - t) - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n$$

$$g(x) = 0, g(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} R_n$$

$$g'(t) = \left(f(x) - f(t) - f'(t)(x - t) - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n \right)'$$

$$g'(t) = 0 - f'(t) - (f''(t)(x - t) - f'(t)) - \dots - \left(\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n \right)'$$

$$g'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n$$

$$h(x) := (x_0 - x)^{n+1}, n + 1 > 0$$

По т. Коши: (можно применить, т.к. $h' \neq 0$, g, h — дифф. на (x, x_0))

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{h(x) - h(x_0)} = \frac{g'(c)}{h'(c)}$$

и при этом $c \in (x, x_0)$.

$$\frac{0 - R_n}{0 - (x - x_0)^{n+1}} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n}{-(n+1)(x - c)^n}$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

□

2.63 Метод Ньютона

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — дважды дифф.

$$m := \inf_{\langle a, b \rangle} |f'| > 0$$

$$M := \sup |f''|$$

$$\xi \in (a, b) : f(\xi) = 0$$

$$x_1 \in (a, b) : |x_1 - \xi| \frac{M}{2m} < 1$$

Рассмотрим последовательность $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Тогда $\exists \lim x_n = \xi$ и при этом !. Кроме того, оно очень быстро сходится.

$$|x_n - \xi| \leq \left(\frac{M}{2m} |x_1 - \xi| \right)^{2^n}$$

2.64 Иррациональность числа e^2

e^2 — ирр.

Доказательство. Предположим обратное: e^2 — рационально. Тогда e^2 представимо следующим образом:

$$e^2 = \frac{2k}{n}$$

$$ne = 2ke^{-1}$$

$$n(2k-1)!e = (2k)!e^{-1}$$

$$n(2k-1)!e = n(2k-1)! \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{(2k-1)!} + \frac{e^c}{(2k)!} \right) = \text{целое число} + \frac{me^c}{2k}$$

$$\frac{me^c}{2k} \leq \frac{me}{2k} = e \cdot e^{-2} = e^{-1} \leq \frac{1}{2}$$

$$(2k)!e^{-1} = (2k)! \left(1 - 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{(2k)!} - \frac{e^d}{(2k+1)!} \right) = \text{целое число} - \frac{e^d}{2k+1}$$

$$\frac{e^d}{2k+1} \leq \frac{1}{2k+1} \leq \frac{1}{3}e^d \leq 1$$

□

2.65 Следствие об оценке сходимости многочленов Тейлора к функции. Примеры

2.66 Теорема о разложении рациональной функции на простейшие дроби

$P(x), Q(x)$ — многочлен $\deg P < \deg Q = n$

$Q(x) = (x - a_1)^{k_1} \dots (x - a_m)^{k_m} \quad (k_1 + \dots + k_m = n; a_i \neq a_j)$

Тогда \exists

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{A_1}{(x - a_1)} + \frac{A_2}{(x - a_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x - a_1)^{k_1}} \right) + \left(\frac{B_1}{(x - a_2)} + \frac{B_2}{(x - a_2)^2} + \dots + \frac{B_{k_2}}{(x - a_2)^{k_2}} \right) + \dots + \left(\frac{C_1}{(x - a_m)} + \frac{C_2}{(x - a_m)^2} + \dots + \frac{C_{k_m}}{(x - a_m)^{k_m}} \right)$$

Доказательство.

$$\frac{P(x)}{(x - a_1)^{k_1} \dots (x - a_m)^{k_m}} = \frac{1}{(x - a_1)^{k_1}} \frac{P(x)}{(x - a_2)^{k_2} \dots (x - a_m)^{k_m}} =$$

$$= \frac{1}{(x - a_1)^{k_1}} (A_{k_1} + A_{k_1+1}(x - a_1) + A_{k_1+2}(x - a_1)^2 + \dots + A_1(x - a_1)^{k_1} + o((x - a_1)^{k_1}))$$

$$\frac{P}{Q} - \left(\frac{A_1}{x - a_1} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x - a_1)^{k_1}} \right) = \frac{o((x - a_1)^{k_1})}{(x - a_1)^{k_1}}$$

$\frac{P}{Q} - (\text{Пр. часть}) = \text{знам. сократится} \Rightarrow \text{многочлен} \equiv 0$

□