Спектральная теорема для оператора общего вида

Определение. Операторный полином $p \in \mathcal{P}_\infty[K]$ называется аннулирующим полиномом линейного оператора φ, если $p(\varphi) = 0$

Примечание. Множество аннулирующих полиномов операторов φ — ядро гомоморфизма S_φ по определению.

Теорема 1. *Аннулирующий полином существует.*

Доказательство. $\dim \mathcal{P}[\varphi] = n^2 \Rightarrow \exists n^2$ ЛНЗ элементов. Эти элементы : $\varphi, \varphi^2 \dots \varphi^{n^2}$. Тогда $\{\mathcal{I}, \varphi, \varphi^2 \dots \varphi^{n^2}\}$ — ЛЗ

$$\Rightarrow \exists p[\varphi] = \sum_{i=0}^{n^2} \alpha_i \varphi^i = 0 \Rightarrow \exists$$

□

$]J_\varphi$ — множество аннулирующих полиномов оператора φ

Лемма 1. J_φ — *идеал в* $P_\infty[K]$

Доказательство. $]p \in J_\varphi \Rightarrow p(\varphi) = 0$
$]q \in P_\infty[K]$
$\lhd p(\lambda)q(\lambda) \xrightarrow{S_\varphi} p(\varphi)q(\varphi) = 0 \Rightarrow p(\lambda)q(\lambda)$ — аннулирующий $\Rightarrow p(\lambda)q(\lambda) \in J_\varphi$ □

Определение. **Минимальным аннулирующим полиномом** оператора φ назвывается минимальнй полином J_φ

Примечание. Обозначение минимального полинома: $p_\varphi(\lambda) \leftrightarrow p_\varphi(\varphi) = 0$

Пример. $]\varphi : X \to X$ — оператор с простым спектром
$]\chi_\varphi(\lambda)$ — характеристический полином $\varphi \Rightarrow \chi_\varphi(\lambda) = p_\varphi(\lambda)$

Доказательство.

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathcal{P}_i \Rightarrow \chi_\varphi(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \chi_\varphi(\lambda_i)\mathcal{P}_i = 0$$

Предположим обратное: $]p_\varphi(\lambda)$ — минимальный полином, такой что $\deg p_\varphi < \deg \chi_\varphi$
$]\chi_\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_k)p_\varphi(\lambda)$

$$\lhd p_\varphi(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} p_\varphi(\lambda_i)\mathcal{P}_i = p(\lambda_k)\mathcal{P}_k \Rightarrow p_\varphi(\varphi) \neq 0 \Rightarrow \text{противоречие}$$

□

Лемма 2. $]p(\varphi) = q(\varphi) \Leftrightarrow [p(\lambda) - q(\lambda)] \mid p_\varphi(\lambda)$

Доказательство. $\lhd p(\lambda) - q(\lambda) = 0 \Rightarrow p(\lambda) - q(\lambda) \in J_\varphi$ □

Лемма 3. $]p(\lambda) = q(\lambda)p_\varphi(\lambda) + r(\lambda) \Rightarrow p(\varphi) = r(\varphi)$

Теорема 2. $\lhd p_\varphi = p_1 \dots p_k, p_1 \dots p_k$ — *взаимно простые*

$$\Rightarrow \dot{+}\sum_{j=1}^{k} \mathit{Ker}\, p_j(\varphi) = X$$

Доказательство.

$$\text{Ker } p_\varphi(\varphi) = \dot{+}\sum_{j=1}^{k} \text{Ker } p_j(\varphi)$$

$$\text{Ker } p_\varphi(\varphi) = \text{Ker } 0 = X$$

□

Теорема 3. *О ядре и образе.*
$]p_\varphi(\lambda) = p_1(\lambda)p_2(\lambda) \Rightarrow \mathit{Ker}\, p_1(\varphi) = \mathit{Im}\, p_2(\varphi)$

Доказательство. Покажем, что:

1. $\text{Im } p_2(\varphi) \subset \text{Ker } p_1(\varphi)$
2. $\dim \text{Im } p_2(\varphi) = \dim \text{Ker } p_1(\varphi)$

1. $\text{Im } p_2(\varphi) \subset \text{Ker } p_1(\varphi)$
   $]y \in \text{Im } p_2(\varphi) \Rightarrow \exists x \in X : y = p_2(\varphi)x$
   $\lhd p_1(\varphi)y = p_1(\varphi)p_2(\varphi)x = p_\varphi(\varphi) = 0$
2. $\text{Ker } p_\varphi(\varphi) = \text{Ker } p_1(\varphi) \dot{+} \text{Ker } p_2(\varphi) \Rightarrow$

$$\dim X = \dim \text{Ker } p_1(\varphi) + \dim \text{Ker } p_2(\varphi)$$

$$\dim X = \dim \text{Ker } p_2(\varphi) + \dim \text{Im } p_2(\varphi)$$

$$\dim \text{Ker } p_1(\varphi) = \dim \text{Im } p_2(\varphi)$$

□

Теорема 4. $]p_\varphi(\lambda) = \prod\limits_{i=1}^{k} p_i(\lambda)$ *— минимальный аннулирующий полином* φ, $p_1 \dots p_k$ *— взаимно простые делители*
$\Rightarrow$

1. $\sum\limits_{j=1}^{k} p'_j(\varphi)q_j(\varphi) = \mathcal{I}, \quad p'_j = \frac{p_\varphi}{p_j}$
2. $p'_j(\varphi)q_j(\varphi) = \mathcal{P}_{L_j} \quad L_j = \mathit{Ker}\, p_j(\varphi)$

Доказательство. $\lhd p_\varphi(\lambda) = p_1(\lambda)p_2(\lambda)\dots p_k(\lambda) \quad \exists q_1 \dots q_k$:

$$\sum_{j=1}^{k} p'_j(\lambda)q_j(\lambda) = 1 \xrightarrow{S_\varphi} \sum_{j=1}^{n} p'_j(\varphi)q_j(\varphi) = \mathcal{I}$$

$]p_1(\lambda) = p_i(\lambda), p_2(\lambda) = p'_i(\lambda) \Rightarrow \text{Im } p_1(\varphi) = \text{Ker } p_2(\varphi)$
$\lhd \mathcal{P}_{L_1}x = p'_i(\varphi)q(\varphi) \in \text{Ker } p_i(\varphi)$, т.к.

$$p_i(\varphi)[p'_i(\varphi)q_i(\varphi)x] = p_i(\varphi)p'_i(\varphi)q_i(\varphi)x = p_\varphi(\varphi)q_i(\varphi)x = 0$$

Осталось доказать, что $\mathcal{P}_{L_i}\mathcal{P}_{L_j} = \delta_i^j \mathcal{P}_{L_i}$

$$]i \neq j \Rightarrow \mathcal{P}_{L_i}\mathcal{P}_{L_j} = p'_i(\varphi)q_i(\varphi)p'_j(\varphi)q_j(\varphi) = \frac{p_\varphi(\varphi)}{p_i(\varphi)p_j(\varphi)}q_i(\varphi)q_j(\varphi)p_\varphi(\varphi) = 0$$

$$]i = j \Rightarrow \mathcal{P}_{L_i}(x) = \mathcal{P}_{L_i}(\mathcal{I} \cdot x) = \mathcal{P}_{L_i}\left(\sum_{j=1}^{n} \mathcal{P}_{L_j}\right)x = \mathcal{P}_{L_i}\mathcal{P}_{L_i}x \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_{L_i}\mathcal{P}_{L_i} = \mathcal{P}_{L_i}$$

□

Ультраинвариантные подпространства

$]\varphi : X \to X, \dim X = n$
$L \subset X$ — инвариантное подпространство φ, если $\varphi(L) \subset L$

Определение. Инвариантное подпространство называется **ультраинвариантным подпространством**, если существует его дополнение L', такое что:

$$L \dot{+} L' = X \quad L' \text{ — инвариантное подпространство } \varphi$$

L — инвариантное подпространство оператора φ

Определение. Оператор $\varphi_L : L \to L$, такой что:

$$\varphi_L x = \varphi x \quad \forall x \in L$$

называется **сужением** оператора φ на L.
Если L — ультраинвариантное подпространство, то φ_L называется **компонетной** φ в L

Лемма 4. *Дополнение L' ультраинвариантного подпространства L является ультраинвариантным подпространством.*

Лемма 5. $]X = L \dot{+} L' \quad L, L'$ — *ультраинвариантное подпространства* $\Rightarrow$

$$\varphi = \varphi_L \mathcal{P}_L^{\parallel L'} + \varphi_{L'} \mathcal{P}_{L'}^{\parallel L}$$

Доказательство.

$$X = L \dot{+} L' \Rightarrow \forall x! = x_1 + x_2 = \mathcal{P}_L^{\parallel L'} x + \mathcal{P}_{L'}^{\parallel L} x$$
$$\varphi x = \varphi \mathcal{P}_L^{\parallel L'} x + \varphi \mathcal{P}_{L'}^{\parallel L} x \quad \forall x \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varphi = \varphi_L \mathcal{P}_L^{\parallel L'} + \varphi_{L'} \mathcal{P}_{L'}^{\parallel L} \quad (*)$$

□

Примечание. Запись $(*)$ эквивалентна записи

$$\varphi = \varphi_L \dot{+} \varphi_{L'}$$

Определение. Инвариантное подпространство называется **минимальным**, если оно не содержит внутри себя нетривиальных инвариантных подпространств меньшей размерности.

Лемма 6. $]\varphi : X \to X$ — *линейный оператор* $\Rightarrow$ *Ker* $p(\varphi)$ — *инвариантное подпространство* φ

Доказательство. $]x \in \operatorname{Ker} p(\varphi) \Rightarrow p(\varphi)x = 0$
$\lhd \varphi : p(\varphi)(\varphi x) = \varphi p(\varphi) x = 0$ □

Лемма 7. $]p_\varphi(\lambda) = p_1(\lambda)p_2(\lambda)$ — *минимальный полином* $\varphi \Rightarrow$ *Ker* $p_i(\varphi)$ — *нетривиальное инвариантное подпространство* φ

Доказательство.

$$]p_1(\lambda) : \operatorname{Ker} p_1(\varphi) = X, \deg p_1(\lambda) < \deg p_\varphi(\lambda) \Rightarrow p_1(\varphi) \stackrel{def}{=} 0 \Rightarrow p_1(\lambda) \in J_\varphi, \deg p_1(\lambda) \subset \deg p_\varphi(\lambda)$$

Это противоречит определению минимального полинома p_φ. Аналогично для p_2.

$$]p_1(\lambda) : \operatorname{Ker} p_1(\varphi) = 0 \Rightarrow x = \operatorname{Ker} p_1(\varphi) \dot{+} \operatorname{Ker} p_2(\varphi) \quad \dim p_1(\varphi) = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} p_2(\varphi) = x$$

Это чему-то противоречит.
Итого $p_i(\varphi) \neq 0$ и $p_i(\varphi) \neq X \Rightarrow \operatorname{Ker} p_i(\varphi)$ — нетривиальное подпространство. □

Примечание. $\text{Ker}\, p_1(\varphi)$ — ИП, $\text{Ker}\, p_2(\varphi)$ — ИП, $\text{Ker}\, p_1(\varphi)\dotplus\text{Ker}\, p_2(\varphi) \Rightarrow p_1, p_2$ — ультраинвариантные подпространства

Теорема 5. *Обобщение.*
$p_\varphi(\lambda) = p_1(\lambda)\dots p_k(\lambda)$ — *взаимно простые*

$$X = \dot{+}\sum_{j=1}^{k} Ker\, p_j(\varphi) = \dot{+}\sum_{j=1}^{n} L_j$$

, где $L_j = Ker\, p_j(\varphi)$ — ультраинвариантные подпространства.

Доказательство. Тривиально. □

$\mathcal{P}_j = \mathcal{P}_{L_j} = p_j'(\varphi)q_j$ — проектора на ультраинвариантное подпространство L_j *(ультрапроектор)*
$\lhd \varphi_j = \varphi/L_j : L_j \to L_J$ — компонента φ в ультраинвариантном подпространстве L_j

$$\varphi = \dot{+}\sum_{j=1}^{k}\varphi_j = \sum_{j=1}^{k}\varphi_j\mathcal{P}_j$$

Лемма 8. $]p_\varphi = p_1\dots p_k$ — *минимальный аннулирующий полином* φ
$\Rightarrow p_j(\lambda)$ — *минимальный аннулирующий полином* φ_j

Доказательство. $\varphi_j : L_j \to L_j, L_j = \text{Ker}\, p_j(\varphi)$
$]x \in \text{Ker}\, p_j(\varphi) \quad p_j(\varphi)x = 0 \;\; \forall x \in L_j \Rightarrow p_j \in I_{\varphi_j}$
$]\tilde{p}_j(\lambda)$ — минимальный полином I_{φ_j}

$$p_j(\lambda) = q_j(\lambda)\tilde{p}_j(\lambda)$$

$$\lhd p_\varphi(\lambda) = p_1(\lambda)p_2(\lambda)\dots p_j(\lambda)\dots p_k(\lambda) = p_1(\lambda)p_2(\lambda)\dots\tilde{p}_j(\lambda)\dots p_k(\lambda)q_j(\lambda) = \tilde{p}_\varphi(\lambda)q(\lambda)$$

$\Rightarrow \deg p_\varphi(\lambda) > \deg\tilde{p}_\varphi(\lambda)$, но $p_\varphi(\lambda)$ — минимальный — противоречие. □

Теорема 6. *Спектральная теорема.*

$$p_\varphi(\lambda) = \prod_{j=1}^{k}(\lambda-\lambda_j)^{m_j} = p_1(\lambda)\dots p_k(\lambda) \quad p_j(\lambda) = (\lambda-\lambda_j)^{m_j}, \lambda \neq \lambda_{i\neq j}$$

$$\Rightarrow L_j = Ker\, p_j(\varphi) = Ker\,(\varphi-\lambda_j\mathcal{I})^{m_j} \text{ — ультраинвариантное подпространство}$$

$$\Rightarrow X = \dot{+}\sum_{j=1}^{n} Ker\,(\varphi-\lambda_j\mathcal{I})^{m_j} = \dot{+}\sum_{j=1}^{k} L_j$$

$$\varphi = \sum_{j=1}^{k}\varphi_j\mathcal{P}_j \quad \varphi_j = \varphi|_{L_j}$$

Определение. **Нильпотентным оператором** порядка m называется минимальный оператор τ, такой что:

$$\tau^m = 0 \quad \forall k < m \;\; \tau^k \neq 0$$

Примечание. $(\varphi_j - \lambda_j\mathcal{I}) = \tau_j$ — Нильпотентный оператор порядка m_j

$\varphi = \sum\limits_{j=1}^{K}(\lambda_j\mathcal{I}+\tau_j)\mathcal{P}_j$ — спектральная теорема *(другая формулировка).*

Определение.
- λ_j — элементарная порция спектра
- $\mathcal{P}_j$ — спектральный ультрапроектор на L_j
- L_j — спектральное ультраинвариантное *(корневое)* подпространство
- φ_j — спектральная компонента оператора φ в инвариантном подпространстве L_j