

*Proof.* Продолжим доказательство из прошлой лекции, докажем,  $3 \Rightarrow 1$ .

Рассмотрим секвенциально компактное  $K$  и пусть  $K$  — не ограничено. (случай ограниченного множества тривиален)

$$\exists x_n : \|x_n\| \rightarrow +\infty$$

Тогда в этой последовательности нет сходящейся последовательности, т.к. любая  $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$  ограничена. Противоречие  $\Rightarrow K$  — не компактно.

Таким образом, если  $K$  — секвенциально компактно, то  $K$  ограничено.

Докажем замкнутость  $K$ .

Пусть  $\exists$  предельная точка  $x_0 \notin K$

$$\exists x_n \rightarrow x_0$$

По секвенциальности  $\exists$  подпоследовательность  $x_{n_k} \rightarrow a \in K$ . □

*Следствие.* Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса. Если в  $\mathbb{R}^m$   $(x_n)$  — ограниченная последовательность, то у неё существует сходящаяся подпоследовательность.

*Proof.*  $x_n$  — огр.  $\Rightarrow x_n$  содержится в замкнутом кубе. Так как куб секвенциально компактен,  $x_{n_k}$  сходится. □

*Примечание.*  $(x_n)$  — не огр.  $\Rightarrow x_n \rightarrow \infty$ , т.е.  $\|x_n\| \rightarrow +\infty$

**Определение.**  $X$  — метрическое пространство,  $(x_n)$  в  $X$

$x_n$  — фундаментальная, последовательность Коши, сходящаяся в себе, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$$

**Лемма 1.** 1.  $x_n$  — фунд.  $\Rightarrow x_n$  — ограничена

2.  $x_n$  — фунд;  $\exists x_{n_k}$  — сходящ. Тогда  $x_n$  сходится.

*Proof.* 1.  $\varepsilon := 1 \exists N \forall m, n := N + 1 > N \rho(x_m, x_{N+1}) < 1$

$$R := \max(1; \rho(x_1, x_{N+1}), \dots, \rho(x_N, x_{N+1}))$$

$$\forall n \ x_n \in B(x_{N+1}, R) \Rightarrow x_n \text{ сходится.}$$

$$2. \begin{cases} \varepsilon > 0 \exists K \forall k > K \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon \\ \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \rho(x_m, x_n) < \varepsilon \end{cases} \stackrel{?}{\Rightarrow} x_n \rightarrow a$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{N} := \max(N, K) \text{ при } k > \tilde{N} \text{ выполняется } k > K, \text{ значит } n_k \geq k > K \Rightarrow \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon.$$

$$\text{При } n > \tilde{N} \geq N \ m := n_k > \tilde{N} \geq N \Rightarrow \rho(x_n, x_{n_k}) < \varepsilon$$

$$\text{Итого } \forall n > \tilde{N} \ \rho(x_n, a) \leq \rho(x_n, x_{n_k}) < 2\varepsilon$$

□

**Теорема 1.** 1. В любом метрическом пространстве  $x_n$  — сходящ.  $\Rightarrow x_n$  — фунд.

2. В  $\mathbb{R}^m$   $x_n$  — фунд.  $\Rightarrow x_n$  — сходящ.

*Proof.* 1.  $x_n \rightarrow a \ \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \rho(x_n, a) < \varepsilon$

$$x_n \rightarrow a \ \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N \rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_n, a) + \rho(x_m, a) < 2\varepsilon$$

2.  $x_n$  — фунд.  $\Rightarrow x_n$  — огр.  $\xrightarrow{\text{Б.-В.}} \exists x_{n_k}$  — сходящ.

$$\begin{cases} \exists x_{n_k} \text{ — сходящ.} \\ x_n \text{ — фунд.} \end{cases} \Rightarrow x_n \text{ — сходящ.}$$

□

**Определение.**  $X$  — метрическое пространство называется **полным**, если в нём любая фундаментальная последовательность — сходящаяся.

Верно:  $x_n$  — вещ. посл.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N |x_n - x_m| < \varepsilon \Leftrightarrow \exists \text{ конечн. } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$$

Это критерий Больцано-Коши.

$f : D \subset X \rightarrow Y$ ,  $x_0$  — предельная точка  $D$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

$D_1 \subset D$ ,  $x_0$  — предельная точка  $D_1$ .

**Определение.**  $f : D \subset X \rightarrow Y$ ,  $D_1 \subset D$ ,  $x_0$  — пред. точка  $D_1$

Тогда предел по множеству  $D_1$  в точке  $x_0$  — это  $\lim_{x \rightarrow x_0} f|_{D_1}(x)$

**Определение.** В  $\mathbb{R}$  одностор. = { левостор., правостор. }

**Левосторонний предел**  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = L$  — это  $\lim f|_{D \cap (-\infty, x_0)}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap D |f(x) - L| < \varepsilon$$

Аналогично правосторонний.

Если  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f = L$

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f \stackrel{\text{обозн.}}{=} f(x_0 - 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f = \lim_{x \rightarrow -0} f$$

$$\text{В } \mathbb{R}^2 \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (a_1, a_2)} f$$

Предел вдоль прямой:  $\lim_{r \rightarrow 0} f(a_1 + r \cos \alpha, a_2 + r \sin \alpha)$

**Теорема 2.** О пределе монотонной функции

$f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , монотонная,  $a \in \overline{\mathbb{R}}$

$D_1 := D \cap (-\infty, a)$ ,  $a$  — пред. точка  $D_1$ . Тогда:

1.  $f$  — возрастает, огр. сверху  $D_1$ . Тогда  $\exists$  конечный предел  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$

2.  $f$  — убывает, огр. снизу  $D_1$ . Тогда  $\exists$  конечный предел  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$

*Proof.* 1.  $L := \sup_{D_1} f \quad L \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad L - \varepsilon \text{ — не верхн. граница для } \{f(x) : x \in D_1\} \quad \exists x_1 : L - \varepsilon < f(x_1).$$

$$\text{Тогда при } x \in (x_1, a) \cap D_1 \quad L - \varepsilon < f(x_1) \leq f(x) \leq L$$

$$\exists \delta := |x_1 - a| \quad \forall x : x \in (x_1, a) \quad L - \varepsilon \leq f(x) < L + \varepsilon$$

Аналогично доказывается пункт 2.

□

Критерий Больцано-Коши для отображений.

**Теорема 3.**  $f : D \subset X \rightarrow Y$ ,  $a$  — пр. точка  $D$ ,  $Y$  — полное метрическое пространство.  
Тогда

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \in Y \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in D \quad \rho(x_1, a) < \delta; \rho(x_2, a) < \delta \quad \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

*Proof.* “ $\Rightarrow$ ” как для последовательностей.

Докажем “ $\Leftarrow$ ” по Гейне.

Заметим, что последовательность  $f(x_n)$  — фундаментальная, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \quad \rho(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$$

$$x_n \rightarrow a \Rightarrow \exists N \forall n > N \quad \rho(x_n, a) < \delta$$

$$\forall m, n > N \quad \rho(x_n, a) < \delta; \rho(x_m, a) < \delta \xrightarrow{\text{Фунд.}} \rho(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$$

□

*Примечание.* В  $\mathbb{R}$  критерий Больцано-Коши для функций

$f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a$  — пред. точка  $D$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in D \setminus \{a\} \quad |x_1 - a| < \delta; |x_2 - a| < \delta$$

Для  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  критерий Больцано-Коши:

$$\forall E \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in D \setminus \{a\} \quad |x_1 - a| < \delta; |x_2 - a| < \delta \quad f(x_1) > E; f(x_2) > E$$

неинтересно.

Для  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta \forall x_1, x_2 \in D \quad x_1 > \Delta; x_2 > \Delta \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

## 1 Непрерывные отображения

**Определение.**  $f : D \subset X \rightarrow Y$   $x_0 \in D$

$f$  — непрерывное в точке  $x_0$ , если:

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , либо  $x_0$  — изолированная точка  $D$
2.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \quad \rho(x, x_0) < \delta \quad \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$
3.  $\forall U(f(x_0)) \exists V(x_0) \forall x \in V(x_0) \cap D \quad f(x) \in U(f(x_0))$
4. По Гейне  $\forall (x_n) : x_n \rightarrow x_0; x_n \in D \quad f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x_0)$

**Определение.** Если  $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , либо  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$  — точка разрыва.

$$\text{Для } \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \quad |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

**Определение.** Непр. слева и непр. справа  $f$  — непр. слева в  $x_0$ , если  $f|_{(-\infty, x_0] \cap D}$  — непрерывно в  $x_0$

Если  $f$  непрерывно слева и непрерывно справа в  $x_0$ , то  $f$  непрерывно в  $x_0$ .

**Определение.** Пусть  $\exists f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$  и не все 3 числа равны:  $f(x_0 - 0), f(x_0), f(x_0 + 0)$ . Это **разрыв I рода (скачок)**.

Остальные точки разрыва — **разрыв II рода**.

*Примечание.*

$$f(x_0 - 0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$$

**Пример.** 1.  $f(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$  0 — разрыв I рода.

2.  $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$  0 — разрыв II рода.

**Определение.** Отображение **непрерывно** на множестве  $D$  = непрерывно в каждой точке множества  $D$ .

**Теорема 4.** Арифметические свойства непрерывных отображений

1.  $f, g : D \subset X \rightarrow Y$   $x_0 \in D$  ( $Y$  — норм. пространство)

$f, g$  — непр. в  $D$ ;  $\lambda : D \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$  — непр.  $x_0$

Тогда  $f \pm g, ||f||, \lambda f$  — непр.  $x_0$

2.  $f, g : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$   $x_0 \in D$

$f, g$  — непр. в  $x_0$

Тогда  $f \pm g, |f|, fg$  — непр. в  $x_0$

$g(x_0) \neq 0$ , тогда  $\frac{f}{g}$  — непр.  $x_0$