

Рассмотрим такой ряд:

$$1 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \underbrace{- \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{4 \text{ раза}} + \underbrace{- \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}}_{8 \text{ раз}} + \dots$$

Сходится ли этот ряд? Да, потому что можно разбить на скобки из 3х слагаемых (кроме 1), каждая из которых = 0.

Рассмотрим похожий ряд:

$$-1 + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \underbrace{+ \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}}_{4 \text{ раза}} + \underbrace{\frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{16}}_{8 \text{ раз}} + \dots = -1$$

Произошла магия — сумма ряда = -1, т.к. $b_n = -a_n$, где b_n — слагаемое этого ряда, a_n — прошлого ряда. Но мы просто переставили слагаемые предыдущего ряда \Rightarrow перестановка бесконечного числа слагаемых меняет результат.

Определение. $\sum a_k, w: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ — биекция

$b_k := a_{w(k)}$, $\sum b_k$ называется **перестановкой** ряда $\sum a_k$

Теорема 1. Ряд A абсолютно сходится, тогда его перестановка B тоже абсолютно сходится и имеет ту же сумму.

Доказательство. 1. $a_k \geq 0$

$$S_n^{(b)} = b_1 + \dots + b_n = a_{w(1)} + \dots + a_{w(n)} \leq S_N^{(a)}, N = \max(w(1) \dots w(n))$$

Предельный переход: $S^{(b)} \leq S^{(a)}$

Т.к. A — перестановка B , то $S^{(a)} \leq S^{(b)} \Rightarrow S^{(a)} = S^{(b)}$

2. Общий случай

$$a_k^+ = \max(a_k, 0), a_k^- = \max(-a_k, 0)$$

$$\sum b_k^+ \text{ — перестановка } \sum a_k^+; \sum b_k^- \text{ — перестановка } \sum a_k^-$$

Срезки сходятся по пункту 1., в силу абсолютной сходимости частичные суммы конечны $\Rightarrow S^{(a)} = S^{(b)}$

□

Теорема 2. Римана.

$\sum a_k$ — сходится неабсолютно. Тогда:

1. \exists перестановка ряда A , которая не имеет предела частичной суммы

2. $\forall S \in \mathbb{R} \exists$ перестановка ряда A с суммой S

Доказательство. 2. Т.к. $\sum a_k$ сходится неабсолютно, существует две кучи — одна из положительных a_k , другая из отрицательных. Обе кучи бесконечные и имеют бесконечную сумму. Тогда будем брать элементы из положительной кучи, пока частичная сумма $< S$, потом берем элементы из отрицательной кучи, пока сумма $> S$. Получаем ряд, осциллирующий вокруг S . Если есть нулевые элементы, то будем их добавлять в сумму, когда меняем направление.

1. Будем осциллировать не вокруг S , а между T и S .

□

Пример.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{2n-1} - \frac{1}{n} \right) = 2 \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots \right) - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots = \\ &= 2 - 1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} + \dots = \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots\end{aligned}$$

Разложим $f(x) = \ln(1+x)$ по Тейлору:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) x^n$$

$$f^{(n+1)}(c) = \frac{(-1)^n n!}{(1+c)^{n+1}}$$

$$R_n \leq \frac{1}{n+1} \frac{1}{(1+c)^{n+1}} \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

Проблема: сумма этого ряда должна быть > 1 , но мы получили обратное. Это произошло, потому что мы переставили слагаемые неабсолютно сходящегося ряда.

Произведение рядов

$$(a_1 + \dots + a_k)(b_1 + \dots + b_l) = \sum \sum a_i b_j$$

Определение. $\sum a_k, \sum b_k$

$\gamma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ — биекция, $\gamma(k) = (\varphi(k), \psi(k))$

Произведение рядов A и B — ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)}$

Теорема 3. Коши.

Пусть ряды $\sum a_k, \sum b_k$ абсолютно сходятся. Тогда \forall биекции $\gamma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ произведение рядов абсолютно сходится и его сумма $= AB$

Доказательство. $\sum |a_k| = A^*, \sum |b_k| = B^*, 0 \leq A^*, B^* < +\infty$

$$\sum_{k=1}^N |a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)}| \leq \sum_{i=1}^M |a_i| \sum_{j=1}^L |b_j| \leq A^* B^*$$

$$M := \max(\varphi(1) \dots \varphi(N)) \quad N := \max(\psi(1) \dots \psi(N))$$

Итого произведение сходится абсолютно $\Rightarrow \forall \gamma$ произведение рядов имеет одинаковую сумму.

Возьмём γ такое, что оно обходит точки $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ “по квадратам”, т.е. не заходит в следующий квадрат, пока не обошло предыдущий. Тогда:

$$\sum_{k=1}^{n^2} a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)} = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n b_j \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} AB$$

□

Пример. $x \in \mathbb{R}$, x — фиксированный

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \sum_{j=0}^{+\infty} b_j x^j = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$$

Это называется произведение степенных рядов.