

1 Определения

1.1 Локальный максимум, минимум, экстремум

Определение. $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in E$ — локальный максимум функции, если

$$\exists U(x_0) \quad \forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \leq f(x_0)$$

Аналогично определяется минимум.

Определение. Экстремум — точка минимума либо максимума.

1.2 ! Первообразная, неопределенный интеграл

$$F, f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$$

F — первообразная f на $\langle a, b \rangle$

$$\forall x \in \langle a, b \rangle \quad F'(x) = f(x)$$

Неопределенный интеграл f на $\langle a, b \rangle$ — множество всех первообразных f :

$$\{F + c, c \in \mathbb{R}\}, \text{ где } F \text{ — первообразная}$$

Обозначается $\int f = F + c$ или $\int f(x)dx$

1.3 Теорема о существовании первообразной

$f \in C^0(\langle a, b \rangle)$ тогда у f существует первообразная.

Теорема о существовании первообразной — следствие теоремы Барроу.

1.4 ! Таблица первообразных

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \text{длинный логарифм}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x$$

1.5 Равномерная непрерывность

$f : \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **равномерно непрерывна** на $\langle a, b \rangle$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle : |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Или для метрического пространства:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \rho(x_1, x_2) < \delta \implies \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

Отличие от непрерывности на отрезке в том, что δ зависит только от ε и подходит для всех x_1, x_2 .

1.6 Площадь, аддитивность площади, ослабленная аддитивность

\mathcal{E} — множество всех ограниченных фигур в \mathbb{R}^2 (“фигура” = подмножество \mathbb{R}^2)

Площадь это $\sigma : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$, такое что:

1. $A \in \mathcal{E} \implies A = A_1 \sqcup A_2 \implies \sigma A = \sigma A_1 + \sigma A_2$ (конечная аддитивность)
2. $\sigma([a, b] \times [c, d]) = (d - c)(b - a)$

\sqcup — **дизъюнктное объединение**; если $x \in A_1$ и $x \in A_2$, то x “дважды \in ” $A_1 \sqcup A_2$

Ослабленная площадь $\sigma : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$:

1. Монотонна
2. Нормирована
3. Ослабленная аддитивность: $E \in \mathcal{E} \implies E = E_1 \cup E_2 \implies E_1 \cap E_2$ — вертикальный отрезок, E_1 и E_2 лежат каждый в своей полуплоскости относительно этого отрезка $\implies \sigma E = \sigma E_1 + \sigma E_2$

Почему отрезок вертикальный? В конспекте СПбГУ допускается горизонтальный.

1.7 ! Определенный интеграл

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; f \geq 0$

Под графиком $(\Pi)(f, [a, b]) = \{(x, y) : x \in [a, b]; 0 \leq y \leq f(x)\}$

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, непр.

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x) dx := \sigma \Pi(f_+, [a, b]) - \sigma \Pi(f_-, [a, b])$$

1.8 Положительная и отрицательная срезки

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

$f_+ := \max(f, 0)$ — **положительная срезка**

$f_- := \max(-f, 0)$ — **отрицательная срезка**

1.9 Среднее значение функции на промежутке

Среднее значение функции на промежутке:

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

Взято с гугла, стоит спросить Кохася, верно ли это.

1.10 Кусочно-непрерывная функция

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, **кусочно непрерывна**

f — непр. на $[a, b]$ за исключением конечного числа точек, в которых разрывы I рода

Пример. $f(x) = [x], x \in [0, 2020]$

1.11 Почти первообразная

$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — **почти первообразная** кусочно непрерывной функции f :

F — непр. и $\exists F'(x) = f(x)$ всюду, кроме конечного числа точек

Пример. $f = \operatorname{sign} x, x \in [-1, 1]$

$F := |x|$

1.12 Функция промежутка, аддитивная функция промежутка

$\operatorname{Segm}\langle a, b \rangle = \{[p, q] : [p, q] \subset \langle a, b \rangle\}$ — множество всевозм. отрезков, лежащих в $\langle a, b \rangle$

Функция промежутка $\Phi : \operatorname{Segm}\langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

Аддитивная функция промежутка: Φ — функция промежутка и

$$\forall [p, q] \in \operatorname{Segm}\langle a, b \rangle \quad \forall r : p < r < q \quad \Phi([p, q]) = \Phi([p, r]) + \Phi([r, q])$$

1.13 Плотность аддитивной функции промежутка

Плотность аддитивной функции промежутка: $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — плотность Φ , если:

$$\forall \delta \in \operatorname{Segm}\langle a, b \rangle \quad \inf_{x \in \delta} f(x) \cdot \operatorname{len}_\delta \leq \Phi(\delta) \leq \sup f \cdot \operatorname{len}_\delta$$

1.14 Выпуклая функция

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — **выпуклая**

$$\forall x, y \in \langle a, b \rangle \quad \forall \alpha \in [0, 1] \quad f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

Примечание. f — выпуклая \Leftrightarrow всякая хорда графика f расположена “выше” графика (*нестрого выше*) $\Leftrightarrow \operatorname{НГ}(f, \langle a, b \rangle) \setminus \{(x, y) : x \in \langle a, b \rangle \quad y \geq f(x)\}$

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — **строго выпуклая**

$$\forall x, y \in \langle a, b \rangle \quad \forall \alpha \in (0, 1) \quad f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

1.15 Выпуклое множество в \mathbb{R}^m

$A \subset \mathbb{R}^m$ — выпуклое множество в \mathbb{R}^m , если

$$\forall x, y \in A, \alpha \in [0, 1] \quad \alpha x + (1 - \alpha)y \in A$$

Это определение с вики

1.16 Надграфик

Надграфик функции $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ это множество $\{(x, y) \mid x \in \langle a, b \rangle, y \geq f(x)\}$

1.17 Опорная прямая

$A \subset \mathbb{R}^2$ — вып. $l \subset \mathbb{R}^2$ — прямая

l — опорная прямая к A , если:

1. A содержится в одной полуплоскости относительно l
2. $l \cap A \neq \emptyset$

1.18 Гладкий путь, вектор скорости, носитель пути

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — непр.

$\gamma(a)$ — начало; $\gamma(b)$ — конец

$$\gamma : t \mapsto \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ \vdots \\ \gamma_m(t) \end{pmatrix}; \gamma_i \text{ — коорд. функции}$$

Если все $\gamma_i \in C^1[a, b]$, то γ — гладкий путь.

Вектор скорости:

$$\gamma'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\gamma(t + \Delta t) - \gamma(t)}{\Delta t} = \lim \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1(t + \Delta t) - \gamma_1(t)}{\Delta t} \\ \vdots \\ \frac{\gamma_m(t + \Delta t) - \gamma_m(t)}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \gamma'_2(t) \\ \vdots \\ \gamma'_m(t) \end{pmatrix}$$

Кто такой носитель пути — неизвестно, гугл предлагает про СПИД почитать.

1.19 Длина гладкого пути

Длина пути — функция l , заданная на множестве гладких путей в \mathbb{R}^m , такая что:

1. $l \geq 0$
2. l — аддитивна: $\forall [a, b] \quad \forall \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \forall c \in (a, b) \quad l(\gamma) = l(\gamma|_{[a, c]}) + l(\gamma|_{[c, b]})$
3. $\forall \gamma, \tilde{\gamma}$ — гладкие пути, $C_\gamma, C_{\tilde{\gamma}}$ — носители путей
Если $\exists T : C_\gamma \rightarrow C_{\tilde{\gamma}}$ — сжатие: $(\forall M, M' \quad \rho(T(M), T(M')) \leq \rho(M, M'))$, тогда $l(\tilde{\gamma}) \leq l(\gamma)$
4. Нормировка: γ — гладкий путь, $\gamma(t) = vt + u$; $u, v \in \mathbb{R}^m$:

$$l(\gamma) = \rho(\gamma(a), \gamma(b))$$

1.20 Формулы для длины пути: в \mathbb{R}^m , в полярных координатах, длина графика

1.20.1 В \mathbb{R}^m

$$\gamma \in C^1([a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m)$$

$$\text{Тогда } l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

1.20.2 В полярных координатах

Длина кривой $r = r(\varphi)$ в полярных координатах, $\varphi \in [\alpha, \beta]$

$$x = r(\varphi) \cos \varphi \quad y = r(\varphi) \sin \varphi$$

$$\gamma'(\varphi) = \begin{pmatrix} r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi \\ r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\|\gamma'(\varphi)\| = \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2 - 2r'(\varphi)r(\varphi) \cos \varphi \sin \varphi + 2r'(\varphi)r(\varphi) \cos \varphi \sin \varphi}$$

$$\|\gamma'(\varphi)\| = \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2}$$

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi$$

1.20.3 Длина графика

Длина графика $y = f(x)$, $f \in C^1$ на отрезке $[a, b]$

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \quad \gamma'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix} \quad \|\gamma'(x)\| = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

1.21 Вариация функции на промежутке

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$$

$\tau = \{t_0 \dots t_n\}$ — дробление отрезка.

Тогда **вариация функции** γ на отрезке $[a, b]$ это l :

$$l(\gamma) = \sup_{\tau} \left\{ \sum_{i=1}^n \rho(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \right\}$$

1.22 Дробление отрезка, ранг дробления, оснащение

Дробление отрезка $[a, b]$ это разбиение отрезка на n частей следующим образом:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b \quad [x_{i-1}, x_i]$$

Ранг (мелкость) дробления — длина самого длинного из отрезков дробления:

$$\tau = \{x_0 \dots x_n\} \quad |\tau| = \max(x_i - x_{i-1})$$

Оснащение — множество точек $\{\xi_1 \dots \xi_n\} : \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

1.23 Риманова сумма

Интегральная (**риманова**) сумма для разбиения $\{x_i\}$, произвольной функции f и оснащения $\{\xi_i\}$ это следующая сумма:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

1.24 Постоянная Эйлера

γ — постоянная Эйлера. ≈ 0.577

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)$$

1.25 Допустимая функция

$f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R} \quad -\infty < a < b \leq +\infty$

f допустима, если f — кусочно-непрерывна на $[a, A] \quad \forall A \in (a, b)$

1.26 ! Несобственный интеграл, сходимость, расходимость

$$\Phi(A) := \int_a^A f$$

$$? \exists \lim_{A \rightarrow b-0} \Phi(A)$$

- Если да, то это **несобственный интеграл** $\int_a^{\rightarrow b} f dx$.
- Если этот предел конечный, то тот несобственный интеграл **сходится**.
- Если этот предел бесконечный или не существует, то несобственный интеграл **расходится**.

1.27 Критерий Больцано–Коши сходимости несобственного интеграла

$$\lim_{A \rightarrow b-0} \int_a^A \text{кон.} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta \in (a, b) \quad \forall A, B \in (\Delta, b) \quad \left| \int_A^B f \right| < \varepsilon$$

Доказательство. Тривиально из определения предела. □

1.28 Гамма функция Эйлера.

Γ — гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$$

2 Теоремы

2.1 Критерий монотонности функции. Следствия

$f \in C(\langle a, b \rangle)$, дифф. в (a, b)

Тогда f — возрастает $\Leftrightarrow \forall x \in (a, b) \quad f'(x) \geq 0$

Доказательство. “ \Rightarrow ” По определению $f' \quad \frac{f(x+h)-f(h)}{h} \geq 0$

“ \Leftarrow ” $x_1 > x_2$, по т. Лагранжа: $\exists c : f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2) \geq 0$ □

Следствие. $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, тогда:

$f = \text{const} \Leftrightarrow (f \in C(\langle a, b \rangle) - \text{дифф. на } \langle a, b \rangle, f' \equiv 0)$

Следствие. $f \in C\langle a, b \rangle$, дифф. на (a, b) . Тогда:

f строго возрастает \Leftrightarrow ① и ②

① $f' \geq 0$ на (a, b)

② $f' \not\equiv 0$ ни на каком промежутке

Доказательство. “ \Rightarrow ” очевидно

“ \Leftarrow ” По лемме о возрастании в отрезке □

Следствие. О доказательстве неравенств

$g, f \in C([a, b])$, дифф. в (a, b)

$f(a) \leq g(a); \forall x \in (a, b) \quad f'(x) \leq g'(x)$

Тогда $\forall x \in [a, b] \quad f(x) \leq g(x)$

Доказательство. $g - f$ — возр., $g(a) - f(a) \geq 0$ □

2.2 Теорема о необходимом и достаточном условиях экстремума

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in (a, b) \quad f$ — дифф. на (a, b)

Тогда:

1. x_0 — лок. экстремум $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

2. f — n раз дифф. в x_0

$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$

Если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то $\begin{cases} n - \text{чет.} : & x_0 - \text{локальный максимум} \\ n - \text{нечет.} : & x_0 - \text{не экстремум} \end{cases}$

Если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то $\begin{cases} n - \text{чет.} : & x_0 - \text{локальный минимум} \\ n - \text{нечет.} : & x_0 - \text{не экстремум} \end{cases}$

Доказательство. 1. т. Ферма

2. ф. Тейлора

$$f(x) = T_n(f, x_0)(x) + o((x - x_0)^n)$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

при x , близких к x_0 :

$$\text{sign}(f(x) - f(x_0)) = \text{sign} \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \right)$$

Тогда при чётном n

$$\text{sign}(f(x) - f(x_0)) = \text{sign } f^{(n)}(x_0) \Rightarrow x_0 - \text{экстр.}$$

При нечётном n

$$\text{sign}(f(x) - f(x_0)) = \begin{cases} f^{(n)}(x_0), & x > x_0 \\ -f^{(n)}(x_0), & x < x_0 \end{cases} \Rightarrow x_0 - \text{не экстр.}$$

□

2.3 Теорема Кантора о равномерной непрерывности

$f : X \rightarrow Y$, X — комп., f — непр. на X

Тогда f — равномерно непр.

Доказательство. От противного.

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta, \bar{x}_\delta : \rho(x_\delta, \bar{x}_\delta) < \delta \quad \rho(f(x_\delta), f(\bar{x}_\delta)) \geq \varepsilon \\ \delta := \frac{1}{n} \quad \exists x_n, \bar{x}_n : \rho(x_n, \bar{x}_n) < \delta \quad \rho(f(x_n), f(\bar{x}_n)) \geq \varepsilon \end{aligned}$$

Выберем $x_{n_k} \rightarrow \tilde{x}$, $\bar{x}_{n_k} \rightarrow \tilde{\tilde{x}}$

$$\rho(\tilde{x}, \tilde{\tilde{x}}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \delta = 0 \Rightarrow \tilde{x} = \tilde{\tilde{x}}$$

Тогда $f(x_{n_k}) \rightarrow f(\tilde{x})$, $f(\bar{x}_{n_k}) \rightarrow f(\tilde{\tilde{x}})$, противоречие с $\rho(f(x_n), f(\bar{x}_n)) \geq \varepsilon$

□

2.4 Теорема Брауэра о неподвижной точке

$f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$, непр.

Тогда $\exists x \in [0, 1]^2 : f(x) = x$, т.е. есть неподвижная точка.

Обобщенный вариант:

1. $f : [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]^m$ — непр.
2. $f : B(0, 1) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow B(0, 1)$ — непр.
3. $f : S(0, 1) \subset \mathbb{R}^m$ — непр.

Доказательство. $\rho : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$\rho(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$ — непр. в $[0, 1]^2$

От противного — пусть $\forall x \in [0, 1]^2 \quad f(x) \neq x$

Тогда $\forall x \quad \rho(f(x), x) > 0 \quad x \mapsto \rho(f(x), x)$ — непр., > 0

По т. Вейерштрасса $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in [0, 1] \quad \rho(f(x), x) \geq \varepsilon$

По т. Кантора для f : для этого $\varepsilon \quad \exists \delta < \varepsilon$:

$$\forall x, \bar{x} : \|x - \bar{x}\| < \delta \quad \|f(x) - f(\bar{x})\| < \varepsilon$$

Можно писать не $\|\cdot\|$, а ρ .

Возьмём $n : \frac{\sqrt{2}}{n} < \delta$

Построим доску $Hex(n+1, n+1)$, где $n+1$ — число узлов.

Логические координаты узла $(v_1, v_2) \quad v_1, v_2 \in \{0 \dots n\}$ имеют физические координаты, то есть узлу сопоставляется точка на квадрате с координатами $(\frac{v_1}{n}, \frac{v_2}{n})$

$$K(V) := \min\{i \in \{1, 2\} : |f(\frac{v}{n}) - \frac{v_i}{n}| \geq \varepsilon\}$$

Продолжение на следующей лекции.

□

2.5 Теорема о свойствах неопределенного интеграла

f, g имеют первообразную на $\langle a, b \rangle$. Тогда

1. Линейность:

$$\int (f + g) = \int f + \int g$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \int \alpha f = \alpha \int f$$

2. $\varphi \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \left(\int f(x) dx \right) |_{x=\varphi(t)} = F(\varphi(t))$$

Частный случай: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\int f(\alpha t + \beta) dt = \frac{1}{\alpha} F(\alpha t + \beta)$$

3. f, g — дифф. на $\langle a, b \rangle$; $f'g$ — имеет первообр.

Тогда fg' имеет первообразную и

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

Доказательство. 1. Опущено

2. $(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$

3. $(fg - \int f'g)' = f'g + fg' - f'g = fg'$

□

2.6 ! Интегрирование неравенств. Теорема о среднем

$f, g \in C[a, b]$ $f \leq g$. Тогда

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Доказательство.

$$\Pi\Gamma(f_+) \subset \Pi\Gamma(g_+) \Rightarrow \sigma\Pi\Gamma(f_+) \leq \sigma\Pi\Gamma(g_+)$$

$$\Pi\Gamma(f_-) \supset \Pi\Gamma(g_-) \Rightarrow \sigma\Pi\Gamma(f_-) \geq \sigma\Pi\Gamma(g_-)$$

$$\sigma\Pi\Gamma(f_+) - \sigma\Pi\Gamma(f_-) \leq \sigma\Pi\Gamma(g_+) - \sigma\Pi\Gamma(g_-)$$

□

Теорема о среднем: $f \in C[a, b], m \leq f(x) \leq M \Rightarrow \exists c : m \leq c \leq M \quad \int_a^b f = c(b-a)$

Доказательство. По монотонности интеграла

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$$

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq M$$

$$c := \frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

□

Взято с вики

2.7 Теорема Барроу

$f \in C[a, b]$ Φ — интеграл с переменным верхним пределом. Тогда

$$\forall x \in [a, b] \quad \Phi'(x) = f(x)$$

Доказательство. Зафиксируем $x \in [a, b]$ $y > x, y \leq b$

$$\frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = \frac{\int_a^y f - (\int_a^y f + \int_y^x f)}{y - x} = \frac{\int_x^y f}{y - x} \underset{\substack{\text{т.о.ср.} \\ \exists c \in [x, y]}}{=} \frac{c(y - x)}{y - x} = c \xrightarrow{y \rightarrow x+0} f(x)$$

$x > y$

$$\frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = \frac{1}{x - y} \int_y^x f = c \xrightarrow{y \rightarrow x-0} f(x)$$

□

2.8 Формула Ньютона-Лейбница, в том числе, для кусочно-непрерывных функций

Теорема 1. $f \in C[a, b]$ F — первообр. f

Тогда $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

Доказательство. $\Phi(x) = \int_0^x f$ — первообр.

$\exists C : F = \Phi + C$

$$\int_a^b f = \Phi(b) - \Phi(a) = F(b) - F(a)$$

□

Что с кусочно-непрерывными?

2.9 Лемма об ускоренной сходимости

1. $f, g : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ a — предельная точка D

$\exists U(a) : \text{при } x \in \dot{U}(a) \cap D \quad f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

Тогда

$$\forall x_k \rightarrow a \quad (x_k \neq a, x_k \in D) \quad \exists y_k \rightarrow a \quad (y_k \neq a, y_k \in D)$$

такое, что

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(y_k)}{g(y_k)} = 0 \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{g(y_k)}{g(x_k)} = 0$$

Таким образом, $g(y_k) \rightarrow 0$ быстрее, чем $g(x_k) \rightarrow 0$

2. То же самое, но $\lim f(x) = +\infty, \lim g(x) = +\infty$

Доказательство. 1. Очевидно.

$$\forall k \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |f(x_n)| < |g(x_k)| \frac{1}{k} \quad |g(x_n)| < |g(x_k)| \frac{1}{k}$$

$$\varepsilon := |g(x_k)|$$

$$k = 1 \quad y_1 := \text{какой-нибудь } x_n : \left| \frac{f(x_n)}{g(x_k)} \right| < 1 \quad \left| \frac{g(x_n)}{g(x_k)} \right| < 1$$

$$k = 2 \quad y_2 := \text{какой-нибудь } x_n : \left| \frac{f(x_n)}{g(x_k)} \right| < \frac{1}{2} \quad \left| \frac{g(x_n)}{g(x_k)} \right| < \frac{1}{2}$$

⋮

2. (а) Частный случай: Пусть $g(x_n)$ возрастает. Берем $k : m := \min\{n : |f(x_n)| \geq \sqrt{g(x_k)} \text{ или } |g(x_n)| \geq \sqrt{g(x_k)}\}$

$$y_k := x_{m-1}$$

$$\left| \frac{f(y_k)}{g(x_k)} \right| \leq \frac{\sqrt{g(x_k)}}{g(x_k)} = \frac{1}{\sqrt{g(x_k)}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

Зачем нужно возрастание? Кохась не знает.

(б) Общий случай: $\tilde{g}(x_k) := \inf\{g(x_n), n = k, k+1, \dots\}$ $\tilde{g}(x_k) \rightarrow +\infty$

$\tilde{g}(x_k) \uparrow, \tilde{g}(x_k) \leq g(x_k)$. Как в пункте (а) построим y_k

$$\frac{f(y_k)}{g(x_k)} \leq \frac{f(y_k)}{\tilde{g}(x_k)} \leq \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}(x_k)}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

$$\frac{g(y_k)}{g(x_k)} \leq \frac{g(x_k)}{\tilde{g}(x_k)} \leq \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}(x_k)}} \rightarrow 0$$

□

2.10 Правило Лопиталья

$$f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \quad a \in \overline{\mathbb{R}}$$

f, g — дифф., $g' \neq 0$ на (a, b)

Пусть $\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a+0} A \in \mathbb{R}$

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ — неопределенность $\left\{ \frac{0}{0}, \frac{+\infty}{+\infty} \right\}$

Тогда $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

Доказательство. $g' \neq 0 \Rightarrow g' - \text{сохр. знак} \Rightarrow g - \text{монотонна}$.

Для $\frac{0}{0}$ $g(x) \neq 0$ в (a, b)

По Гейне $x_k \rightarrow a$ ($x_k \neq a, x_k \in (a, b)$)

Выберем y_k по лемме

$$\frac{f(x_k) - f(y_k)}{g(x_k) - g(y_k)} = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)} - \text{т. Коши}$$

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} - \frac{f(y_k)}{g(y_k)} = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)} \left(1 - \frac{g(y_k)}{g(x_k)} \right)$$

$$x_k \rightarrow a \quad y_k \rightarrow a \quad \xi_k \rightarrow a$$

□

2.11 Теорема Штольца

Это дискретная версия правила Лопиталя.

$y_n \rightarrow 0, x_n \rightarrow 0$ — строго монот.

$$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a \in \mathbb{R}$$

Тогда $\exists \lim \frac{x_n}{y_n} = a$

Доказательство. 1. $a > 0$ ($a \neq +\infty$)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad [\varepsilon < a] \quad \exists N_1 \quad \forall n > N_1 \quad a_\varepsilon < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < a + \varepsilon$$

Берем $N > N_1$

$$a - \varepsilon < \frac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N} < a + \varepsilon$$

\vdots

$$a - \varepsilon < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < a + \varepsilon$$

По неправильному сложению: (оно применимо, т.к. все дроби положительные)

$$a - \varepsilon < \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} < a + \varepsilon$$

$n \rightarrow +\infty$

$$a - \varepsilon < \frac{x_N}{y_N} < a + \varepsilon$$

2. $a = +\infty$ доказывается так же

3. $a < 0$ поменяем знак и докажем так же

4. $a = 0$ т.к. знаки $x_n - x_{n-1}$ и $y_n - y_{n-1}$ фикс., $a = +0$ или $a = -0$

Для $a = +0 \lim \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = +\infty$

□

2.12 Пример неаналитической функции

Отсутствует

2.13 Интегральное неравенство Чебышева. Неравенство для сумм

Неравенство Чебышева

$f, g \in C[a, b]$ монот. возр.

Тогда

$$I_f \cdot I_g \leq I_{fg}$$

$$\int_a^b f \int_a^b g \leq (b-a) \int_a^b fg$$

Доказательство. $x, y \in [a, b] \quad (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$

$$f(x)g(x) - f(y)g(x) - f(x)g(y) + f(y)g(y) \geq 0$$

Интегрируем по x по $[a, b]$

$$I_{fg} - f(y)I_g - g(y)I_f + f(y)g(y) \geq 0$$

Интегрируем по y по $[a, b]$

$$I_{fg} - I_f I_g - I_g I_f + I_{fg} \geq 0$$

□

Дискретное неравенство Чебышева

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{1}{n} \sum b_i \leq \frac{1}{n} \sum a_i b_i$$

Доказательство.

$$f(x) = a_i, x \in (i-1, i], i = 1 \dots n - \text{задана на } (0, n]$$

$$g(x) = \dots b_i$$

$$I_f I_g \leq I_{fg}$$

□

2.14 Свойства определенного интеграла: линейность, интегрирование по частям, замена переменных

Дано выше. (2.5, стр. 9)

2.15 Иррациональность числа пи

$$\begin{aligned} H_n &:= \frac{1}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \cos t dt := \frac{1}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f g' dt \\ H_n &= \left[f' = -2n \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} t \quad g = \sin t \right] = \\ &= \frac{1}{n!} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \sin t \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{(n-1)!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} t \sin t \\ &= 0 + \frac{2}{(n-1)!} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} + \sin t \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \\ &+ \frac{2}{(n-1)!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left((2n-1) \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} - \frac{\pi^2}{2} (n-1) \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-2} \right) \cos t dt = \\ &= (4n-2)H_{n-1} - \pi^2 H_{n-2} \end{aligned}$$

Число π — иррационально

Доказательство. Пусть $\pi = \frac{p}{q}$; H_n задано выше

$$H_n = (4n - 2)H_{n-1} - \pi^2 H_{n-2}$$

$$H_0 = 2, \quad H_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right) \cos t = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt = 2t(-\cos t) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t = 4$$

$H_n = \dots H_1 + \dots H_0 = P_n(\pi^2)$ — многочлен с целыми коэффициентами, степень $\leq n$

$$q^{2n} P_n \left(\frac{p^2}{q^2} \right) = \text{целое число} = q^{2n} H_n = q^{2n} H_n > 0 \Rightarrow q^{2n} H_n \geq 1$$

$$1 \leq \frac{q^{2n}}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \cos t dt \leq \frac{q^{2n} 4^n}{n!} \pi \rightarrow 0$$

Противоречие. □

2.16 ! Теорема о вычислении аддитивной функции промежутка по плотности

О вычислении аддитивной функции промежутка по плотности

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — непр. $\Phi : \text{Segm}\langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

f — плотность Φ

Тогда $\Phi([p, q]) = \int_b^a f$, $[p, q] \subset \langle a, b \rangle$

Доказательство.

$$F(x) := \begin{cases} 0 & , x = a \\ \Phi([a, x]) & , x > a \end{cases} \text{ — первообразная } f$$

Это утверждение ещё не доказано, но если мы его докажем, то:

$$\Phi([p, q]) = \Phi[a, q] - \Phi[a, p] = F(q) - F(p) = \int_p^a f$$

Докажем утверждение:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\Phi[a, x+h] - \Phi[a, x]}{h} = \frac{\Phi[x, x+h]}{h} = [0 \leq \Theta \leq 1] = f(x + \Theta h)$$

□

2.17 Площадь криволинейного сектора: в полярных координатах и для параметрической кривой

$$\Phi[\alpha, \beta] = S_{\text{сектор}(\alpha, \beta)} = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi$$

$x(t), y(t)$ — кривая в \mathbb{R}^2

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{t_{\alpha}}^{t_{\beta}} (x(t)^2 + y(t)^2) \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t)} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{t_\alpha}^{t_\beta} y'(t)x(t) - y(t)x'(t) dt$$

2.18 Изопериметрическое неравенство

Изопериметрическое неравенство

$G \subset \mathbb{R}^2$ — выпуклое замкнутое множество (ограниченное)

$\text{diam} G = \sup\{\rho(x, y), x, y \in G\}$

$\text{diam} G \leq 1$

Тогда $\sigma(G) \leq \frac{\pi}{4}$

Доказательство. Пойдём от некоторой точки на границе G под углом φ внутрь фигуры по прямой. В какой-то момент мы встретим другую граничную точку. Назовем этот процесс $r(\varphi)$ (возвращает длину пути). Очевидно, что $r^2(\varphi) + r^2(\varphi - \frac{\pi}{2}) \leq (\text{diam} G)^2 \leq 1$

$$\begin{aligned} \sigma(G) &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 r^2(\varphi) d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi) d\varphi \right) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(r^2(\varphi) + r^2\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \right) d\varphi \leq \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 d\varphi = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

□

2.19 Лемма о трех хордах

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. f — вып. $\langle a, b \rangle$

2. $\forall x_1, x_2, x_3 \in \langle a, b \rangle \quad x_1 < x_2 < x_3 \quad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$

Доказательство. Левое $\Leftrightarrow f(x_2)(x_3 - x_1) \leq f(x_3)(x_2 - x_1) + f(x_1)(x_3 - x_1 - (x_2 - x_1))$

$$f \left(x_3 \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} + x_1 \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \right) = f(x_2) \leq f(x_3) \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} + f(x_1) \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$$

□

2.20 Теорема об односторонней дифференцируемости выпуклой функции

f — вып. $\langle a, b \rangle$. Тогда $\forall x \in (a, b) \quad \exists f'_+(x), f'_-(x)$ и $\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$

$$f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'_-(x_2)$$

Доказательство. $f'_+(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1+0} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ — монотонно убывающая функция от x

Фиксируем $x_0 < x_1$. По лемме о трех хордах $\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} \leq \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$

□

2.21 Следствие о точках разрыва производной выпуклой функции

f — вып. на $\langle a, b \rangle \Rightarrow f$ непр. на (a, b)

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$$

2.22 Описание выпуклости с помощью касательных

f — вып. на $\langle a, b \rangle$. Тогда график f расположен не ниже любой касательной
т.е. $\forall x, x_0 \quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Доказательство. “ \Rightarrow ”

Если $x > x_0 \quad f'(x_0) \geq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, это неравенство 2. из предыдущей теоремы
 $x < x_0$ аналогично

“ \Leftarrow ” фиксируем x_0 . Берем $x_1 < x_0 < x_2$

$f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0); f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0)$, т.е. $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq f'(x_0) \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$.
Это верно по лемме. \square

2.23 Дифференциальный критерий выпуклости

1. $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, дифф. в (a, b)

Тогда f — вып. $\Rightarrow f'$ возр. на (a, b)

Если f — строго выпуклая $\Rightarrow f'$ строго возрастает

2. $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, дважды дифф. на (a, b)

f — вып. $\Leftrightarrow f'' \geq 0$ на (a, b)

(a) “ \Rightarrow ” $f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2) \quad (x_1 < x_2)$

“ \Leftarrow ” ? f вып. $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c_1) < f'(c_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$

Теперь утверждение 2. очевидно.

2.24 Обобщенная теорема о плотности

Обобщенная теорема о плотности.

$\Phi : \text{Segm}\langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — аддитивная функция промежутка

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — непр.

$\forall \Delta \in \text{Segm}\langle a, b \rangle \quad \exists m_\Delta, M_\Delta$ — не точный минимум/максимум

1. $m_\Delta l_\Delta \leq \Phi(\Delta) \leq M_\Delta l_\Delta$

2. $m_\Delta \leq f(x) \leq M_\Delta$ при всех $x \in \Delta$

3. \forall фикс. $x \quad M_\Delta - m_\Delta \xrightarrow[\Delta \rightarrow x]{} 0$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \Delta : l_\Delta < \delta \quad |M_\Delta - m_\Delta| < \varepsilon$

Тогда $\forall [p, q] \in \text{Segm}\langle a, b \rangle \quad \Phi([p, q]) = \int_p^q f$

Доказательство. $F(x) = \begin{cases} 0, & x = a \\ \Phi[a, x], & x > a \end{cases}$

Докажем, что F — первообразная f .

Фиксируем x

По 1.:

$$m_{\Delta} \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\Phi[x, x+h]}{h} \leq M_{\Delta}$$

По 2.:

$$m_{\Delta} \leq f(x) \leq M_{\Delta}$$

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \leq M_{\Delta} - m_{\Delta} \xrightarrow[\text{"}\Delta \rightarrow x\text{"}]{} 0$$

Мы не можем написать " $\Delta \rightarrow x$ " без кавычек, т.к. Δ — не число, но " $\Delta \rightarrow x$ " $\Leftrightarrow h \rightarrow 0$

Таким образом,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x)$$

□

2.25 Вычисление длины гладкого пути

$\gamma \in C^1([a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m)$

Тогда $l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$

Доказательство. Будем считать $\gamma' \neq 0$, γ — инъективная.

$\Phi : [p, q] \subset [a, b] \mapsto l(\gamma|_{[p, q]})$ — адд. ф-ция промежутка.

Докажем, что $f(t) = \|\gamma'(t)\|$ — плотность Φ

$$\Delta \subset [a, b] \quad m_i(\Delta) := \min_{t \in \Delta} |\gamma'_i(t)| \quad M_i(\Delta) = \max_{t \in \Delta} |\gamma'_i(t)|$$

$$m_{\Delta} = \sqrt{\sum_{i=1}^m m_i(\Delta)^2} \quad M_{\Delta} = \sqrt{\sum_{i=1}^m M_i(\Delta)^2}$$

Докажем, что $m_{\Delta} l_{\Delta} \leq \Phi(\Delta) \leq M_{\Delta} l_{\Delta}$

$\tilde{\gamma} : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^m$ — лин. путь

$\tilde{\gamma}(t) = \vec{M} \cdot t$, где $\vec{M} = (M_1(\Delta) \ \dots \ M_m(\Delta))$

$T : C_{\gamma|_{\Delta}} \rightarrow C_{\tilde{\gamma}} \quad \gamma(t) \mapsto \tilde{\gamma}(t)$

Утверждение: T — растяжение.

$$\|\vec{M}_q - \vec{M}_p\| = (q - p)\|\vec{M}\| = (q - p)M_{\Delta}$$

$$\begin{aligned} \rho(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) &= \sqrt{\sum_{i=1}^m (\gamma_i(t_0) - \gamma_i(t_1))^2} \stackrel{\text{т. Лагранжа}}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^m \gamma'_i(\bar{t}_i)^2 (t_0 - t_1)^2} \leq \|\vec{M}\| \cdot |t_0 - t_1| = \\ &= \rho(\tilde{\gamma}(t_0), \tilde{\gamma}(t_1)) |t_0 - t_1| \end{aligned}$$

□

2.26 Объем фигур вращения

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — непр., $f \geq 0$

$\Phi_x(\Delta)$ = “объем фигуры вращения вокруг оси OX ”

$\Phi_y(\Delta)$ = “объем фигуры вращения вокруг оси OY ”

Тогда : $\forall \Delta = [p, q] \in \text{Segm}\langle a, b \rangle$:

$$1. \Phi_x[p, q] = \pi \int_p^q f^2(x) dx$$

$$2. \Phi_y[p, q] = 2\pi \int_p^q x f(x) dx$$

Доказательство. 1. Это — упражнение, оно не использует ничего умного.

2. Мы знаем, что объем цилиндра = $S(\text{основание}) \cdot h$.

Для оценки $\Phi(\Delta)$ найдем прямоугольник, который является минимальным по площади сечения и максимальный прямоугольники: Π_{\min} и Π_{\max} .

$$\begin{aligned} \pi m_\Delta(q-p) &= \pi \min f \min 2x \cdot (q-p) \leq V((\Pi_{\min})_y) \leq \Phi(\Delta) \leq \\ &\leq V((\Pi_{\max})_y) \leq \pi \max_{x \in [p, q]} f \max_{x \in [p, q]} 2x \cdot (q-p) = \pi M_\Delta(q-p) \end{aligned}$$

Можем заметить, что Φ подходит под все три пункта теоремы об обобщенной плотности. \square

2.27 ! Интеграл как предел интегральных сумм

$f \in C[a, b]$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \text{дробление } \tau = \{x_0 \dots x_n\} : |\tau| < \delta \forall \text{оснащение } \xi_i :$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon$$

Доказательство. По теореме Кантора о равномерной непрерывности на компакте. $[a, b]$ — компакт, f непрерывна на $[a, b] \Rightarrow f$ равномерно непрерывна на $[a, b]$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, \bar{x} \in [a, b] : |x - \bar{x}| < \delta \quad |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$$

По двойной бухгалтерии заменим ε на $\frac{\varepsilon}{b-a}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, \bar{x} \in [a, b] : |x - \bar{x}| < \delta \quad |f(x) - f(\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Разобьем интеграл на части:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \right)$$

Запишем $(x_i - x_{i-1})$ в виде интеграла $\int_{x_{i-1}}^{x_i} dx$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| = \left| \sum_{i=1}^n \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - f(\xi_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \right) \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(\xi_i)) dx \right| \leq \sum \left| \int \right| \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |(f(x) - f(\xi_i))| dx \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \\
&= \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon
\end{aligned}$$

□

2.28 Теорема об интегральных суммах для центральных прямоугольников

$f \in C^2[a, b]$ $x_0 = a < x_1 \dots < x_n = b$ $\delta = \max(x_i - x_{i-1})$ $\xi_i := \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$. Тогда

$$\left| \int_a^b f - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \leq \frac{\delta^2}{8} \int_a^b |f''| dx$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f(x) dx + \int_{\xi_i}^{x_i} f(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f(x) d(x - x_{i-1}) + \int_{\xi_i}^{x_i} f(x) d(x - x_i) = \\
&= f(x)(x - x_{i-1}) \Big|_{x=x_{i-1}}^{x=\xi_i} - \int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f'(x)(x - x_{i-1}) dx + f(x)(x - x_i) \Big|_{x=\xi_i}^{x=x_i} - \int_{\xi_i}^{x_i} f'(x)(x - x_{i-1}) dx = (*)
\end{aligned}$$

Заметим, что $\xi_i - x_{i-1} = x_i - \xi_i$, поэтому $f(x)(x - x_{i-1}) \Big|_{x=x_{i-1}}^{x=\xi_i} + f(x)(x - x_i) \Big|_{x=\xi_i}^{x=x_i} = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$

$$\begin{aligned}
(*) &= f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \left(f'(x) \frac{(x - x_{i-1})^2}{2} \Big|_{x_{i-1}}^{\xi_i} - \frac{1}{2} \int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f''(x - x_{i-1})^2 dx + \right. \\
&\quad \left. + f'(x) \frac{(x - x_i)^2}{2} \Big|_{\xi_i}^{x_i} - \frac{1}{2} \int_{\xi_i}^{x_i} f''(x - x_i)^2 dx \right) = \\
&= f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - 0 + \frac{1}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x) \varphi(x) dx \\
&\quad \varphi(x) = \begin{cases} (x - x_{i-1})^2, & x \in [x_{i-1}, \xi_i] \\ (x - x_i)^2, & x \in [\xi_i, x_i] \end{cases}
\end{aligned}$$

Итого:

$$\int_a^b f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \frac{1}{2} \int_a^b f''(x) \varphi(x) dx$$

$$\left| \int - \sum \right| \leq \frac{1}{2} \int_a^b |f''(x)| \varphi(x) dx$$

$$\max_{x \in [a, b]} \varphi(x) \stackrel{\text{достигается на отрезке длины } \delta}{=} \frac{\delta^2}{4}$$

$$\frac{1}{2} \int_a^b |f''(x)| \varphi(x) dx \leq \frac{\delta^2}{8} \int_a^b |f''|$$

□

2.29 Теорема о формуле трапеций, формула Эйлера-Маклорена

2.29.1 Теорема о формуле трапеций

$f \in C^2[a, b]$, $\tau, \delta = |\tau|$

Тогда

$$\left| \int_a^b f dx - \sum \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} (x_i - x_{i-1}) \right| \leq \frac{\delta^2}{8} \int_a^b |f''|$$

Доказательство. Берем $\xi_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) d(x - \xi_i) = f(x)(x - \xi_i) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)(x - \xi_i) dx = \\ &= (f(x_i) + f(x_{i-1})) \frac{x_i - x_{i-1}}{2} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) d((x - x_{i-1})(x_i - x)) = (*) \end{aligned}$$

Проверим, что замена выражение под дифференциалом верное:

$$((x - x_{i-1})(x_i - x))' = (-x^2 + x(x_i + x_{i-1}) - x_{i-1}x)' = -2 \left(x - \frac{x_i + x_{i-1}}{2} \right)$$

Действительно верно.

$$\begin{aligned} \psi(x) &:= (x - x_{i-1})(x_i - x) \\ (*) &= (f(x_i) + f(x_{i-1})) \frac{x_i - x_{i-1}}{2} + \frac{1}{2} f'(x)(x - x_{i-1})(x_i - x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \frac{1}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'' \psi(x) dx \\ \left| \int - \sum \right| &\leq \frac{1}{2} \int_a^b |f''| \psi(x) dx \\ \max \psi &= \frac{\delta^2}{4} \end{aligned}$$

□

2.29.2 Формула Эйлера-Маклорена

$m, n \in \mathbb{Z}$, $f \in C^2[m, n]$. Тогда

$$\int_m^n f(x) dx = \left(\sum_{i=m}^n \right)' f(i) - \frac{1}{2} \int f''(x) \{x\} (1 - \{x\}) dx$$

' означает, что крайние слагаемые берутся с весом $\frac{1}{2}$, $\{x\}$ — дробная часть x

Доказательство. Это очевидно по формуле трапеций: $x_i := i$

$$\int_m^n f(x) dx = \sum_{i=m+1}^n \frac{f(i) + f(i-1)}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \int_m^n f''(x) \psi(x)$$

$$\psi(x) \stackrel{\text{def}}{=} (x - x_{i-1})(x_i - x) = (x - i + 1)(i - x) = (x - i + 1)(1 - (x - i + 1)) = \{x\}(1 - \{x\})$$

$f(n)/2$ и $f(m)/2$ в сумму попадают только 1 раз, остальные — 2 раза, как и в искомой формуле. □

2.30 Асимптотика степенных сумм

$$p > -1 \quad f(x) = x^p$$

$$1^p + 2^p + \dots + n^p = \int_1^n x^p dx + \frac{1}{2}1^p + \frac{1}{2}n^p + \frac{1}{2} \int_1^n p(p-1)x^{p-2}\{x\}(1-\{x\}) =$$

$\frac{1}{2}1^p + \frac{1}{2}n^p$ добавлены, чтобы не писать слева деление крайних слагаемых на 2.

$$= \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}n^p + \mathcal{O}(\max(1, n^{p-1})) = (*)$$

Откуда появилось \mathcal{O} ? $\{x\}(1-\{x\}) < 1 \Rightarrow \int_1^n p(p-1)x^{p-2}\{x\}(1-\{x\}) \leq C(n^{p-1}-1)$, C — некоторая константа.

Занесем константы под \mathcal{O} :

$$(*) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{1}{2}n^p + \mathcal{O}(\max(1, n^{p-1}))$$

2.31 Асимптотика частичных сумм гармонического ряда

$$]p = -1 \quad 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \int_1^n x^{-3}\{x\}(1-\{x\}) = (*)$$

$$\int_1^n x^{-3}\{x\}(1-\{x\}) \leq \frac{1}{4} \int_1^n \frac{dx}{x^3} = \frac{1-1}{8 \alpha^2} \Big|_1^n = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) < \frac{1}{8}$$

$$(*) = \ln n + \gamma + o(1) \quad \gamma \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right]$$

2.32 Формула Валлиса

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2k} = \frac{\pi}{2}$$

Вывод формулы Валлиса:

$$I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \left[\begin{array}{l} u = \sin^{n-1} x \quad du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx \\ dv = \sin x dx \quad v = -\cos x \end{array} \right] =$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x (n-1) \sin^{n-2} x dx =$$

$$(n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} I_{n-4} = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \frac{n-5}{n-4} I_{n-6} = \dots = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2}, & n - \text{чёт.} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} 1, & n - \text{нечёт.} \end{cases}$$

$$\sin^{2k+1} x \leq \sin^{2k} x \leq \sin^{2k-1} x$$

Проинтегрируем по $[0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \leq \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}$$

$$\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2k+1} \leq \frac{\pi}{2} \leq \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2k}$$

$$\text{Правая часть} - \text{левая часть} = \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right) \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1} \right) = \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right) \frac{1}{2k} \frac{1}{2k+1} \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{2k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

Таким образом, левая и правая части стремятся друг другу и зажимают $\pi/2$.

2.33 Формула Стирлинга

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{n} \sqrt{2\pi}$$

$$\ln f(x) = \ln x \quad \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n = \int_1^n \ln x dx + \frac{\ln n}{2} + \frac{1}{2} \int_1^n \frac{\{x\}(1-\{x\})}{x^2} dx \leq$$

$$\leq n \ln n - n + 1 + \frac{\ln n}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{4} \int_1^n \frac{1}{x^2} = n \ln n - n + \frac{\ln n}{2} + C_1 + o(1)$$

$$\ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n = \ln n!$$

$$n! = e^{n \ln n - n + \frac{\ln n}{2} + C_1 + o(1)}$$

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{C_1 + o(1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C n^n e^{-n} \sqrt{n}$$

Найдём C .

$$\sqrt{\pi} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k)}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)} \frac{1}{\sqrt{k}} =$$

Домножим дробь на знаменатель:

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot (2k)^2}{(2k)!} =$$

Вынесем 2 из каждого множителя в числителе:

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{(2^k k!)^2}{(2k)!} =$$

Замена на эквивалент:

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{(2^k C k^k e^{-k} \sqrt{k})^2}{C (2k)^{2k} e^{-2k} \sqrt{2k}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{C}{\sqrt{2}} = \frac{C}{\sqrt{2}}$$

$$C = \sqrt{2\pi}$$

2.34 Простейшие свойства несобственного интеграла

Критерий Больцано-Коши

$$\lim_{A \rightarrow b-0} \int_a^A \text{кон.} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta \in (a, b) \quad \forall A, B \in (\Delta, b) \quad \left| \int_A^B f \right| < \varepsilon$$

Аддитивность по промежутку

f — допустима. $[a, b) \quad c \in (a, b)$

Тогда $\int_a^{\rightarrow b} f$ и $\int_c^{\rightarrow b} f$ — сходятся/расходятся одновременно и, если сходятся, $\int_a^{\rightarrow b} f = \int_a^c f + \int_c^{\rightarrow b} f$

Берем $A > c \quad \int_a^A = \int_a^c + \int_c^A$

Следствие. f — допустима. $[a, +\infty)$, $\int_a^{+\infty} f$ — сходится. Тогда

$$\int_A^{+\infty} f \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$$

Это называется “хвост”.

Линейность

f, g — допустима $\int_a^{\rightarrow b} f, \int_a^{\rightarrow b} g$ — сход.

$\lambda \in \mathbb{R}$

Тогда $\lambda f, f \pm g$ — допустима и $\int_a^{\rightarrow b} \lambda f, \int_a^{\rightarrow b} f \pm g$ — сходятся.

$$\int_a^{\rightarrow b} \lambda f = \lambda \int_a^{\rightarrow b} f \quad \int_a^{\rightarrow b} f \pm g = \int_a^{\rightarrow b} f \pm \int_a^{\rightarrow b} g$$

Доказательство. Тривиально. □

Интегрирование неравенств

f, g — доп., $\int_a^{\rightarrow b} f, \int_a^{\rightarrow b} g$ — существуют в $\overline{\mathbb{R}}$

$f \leq g$ на $[a, b)$. Тогда

$$\int_a^{\rightarrow b} f \leq \int_a^{\rightarrow b} g$$

Очевидно: $\int_a^A f \leq \int_a^A g, A \rightarrow b - 0$

Пятое свойство

f, g — дифф. $[a, b)$; f', g' — допустимы. Это эквивалентно $f, g \in C^1[a, b)$.

Тогда*

$$\int_a^{\rightarrow b} f g' = f g \Big|_a^{\rightarrow b} - \int_a^{\rightarrow b} f' g$$

* значит, что если два из трех пределов существуют, то существует третий и выполняется равенство.

Шестое свойство

$\varphi : [\alpha, \beta) \rightarrow \langle A, B \rangle, \varphi \in C^1$

$f : \langle A, B \rangle \rightarrow \mathbb{R}, f$ — непр., $\exists \varphi(\beta - 0) \in \overline{\mathbb{R}}$

Тогда*

$$\int_{\alpha}^{\rightarrow \beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\rightarrow \varphi(\beta-0)} f(x) dx$$

Примечание. f — кусочно непрерывна на $[a, b]$. f можно также рассматривать на $[a, b)$. Тогда

$$\int_a^{\rightarrow b} f = \int_a^b f$$

2.35 ! Признаки сравнения сходимости несобственного интеграла

$f, g \geq 0$, допустимы на $[a, b)$

1. $f \leq g$ на $[a, b)$. Тогда:

(a) $\int_a^b g - \text{сходится} \Rightarrow \int_a^b f - \text{сходится}$

(b) $\int_a^b f - \text{расходится} \Rightarrow \int_a^b g - \text{расходится}$

2. $\exists \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = l < +\infty$:

(a) $\int_a^b g - \text{сходится} \Rightarrow \int_a^b f - \text{сходится}$

(b) $\int_a^b f - \text{расходится} \Rightarrow \int_a^b g - \text{расходится}$

Доказательство. 1. $\Phi(A) := \int_a^B f, \Psi(a) = \int_a^A g$

$$0 \leq \Phi(A) \leq \Psi(A)$$

(a) $\int_a^b g - \text{сходится} \Rightarrow \Psi \text{ огр.} \Rightarrow \Phi \text{ огр.} \Rightarrow \int_a^b f - \text{сходится}$

(b) $\int_a^b f - \text{расходится} \Rightarrow \Phi \text{ неогр.} \Rightarrow \Psi \text{ неогр.} \Rightarrow \int_a^b g - \text{расходится}$

2. $l < +\infty \xrightarrow{\text{def}} \exists a_1 : \forall x > a_1 \quad 0 \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq l + 1 \Rightarrow f(x) \leq g(x)(l + 1)$, дальше тривиально (предположительно по пункту 1.)

□

Примечание. $l > 0$:

$$\exists a_2 : \forall x > a_2 \quad \frac{l}{2} < \frac{f(x)}{g(x)}$$

1. $\int_a^b f - \text{сходится} \Rightarrow \int_a^b g - \text{сходится}$

2. $\int_a^b g - \text{расходится} \Rightarrow \int_a^b f - \text{расходится}$

Следствие. Если $+\infty > l > 0$, то:

1. $\int_a^b f - \text{сходится} \Leftrightarrow \int_a^b g - \text{сходится}$

2. $\int_a^b f - \text{расходится} \Leftrightarrow \int_a^b g - \text{расходится}$

2.36 Интеграл Эйлера–Пуассона

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx \stackrel{x=y^2}{=} 2 \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = 2 \frac{1}{2} \sqrt{\pi} - \text{интеграл Эйлера-Пуассона}$$

Доказательство.

$$1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{1 + x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Оба неравенства следуют из неравенства $e^t \geq 1 + t \quad \forall t$.

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$

$$(1 - x^2)^n \leq e^{-nx^2} \leq \left(\frac{1}{1 + x^2}\right)^n$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx \leq \int_0^1 e^{-nx^2} \leq \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

Казалось бы, переход от интеграла \int_0^1 к $\int_0^{+\infty}$ очень грубый, но это не так.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} &\stackrel{y=\sqrt{n}x}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} I \\ \int_0^1 (1-x^2)^n dx &\stackrel{x=\cos y}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} y dy \\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} &\stackrel{x=\operatorname{tg} y}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos y)^{2n-1} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n-2} dt \\ \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} y dy &\leq I \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n-2} dt \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx &= \frac{(n-1)!!}{n!!} \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n \text{ чет.} \\ 1, & n \text{ нечет.} \end{cases} \\ \sqrt{n} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} &\leq I \leq \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2} \sqrt{n} \end{aligned}$$

По формуле Валлиса $\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \rightarrow \sqrt{\pi}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{n} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} &= \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right) \frac{n}{2n+1} \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2} \sqrt{n} &= \frac{\frac{\pi}{2} \sqrt{n} \frac{1}{\sqrt{n-1}}}{\frac{(2n-2)!!}{(2n-3)!!} \frac{1}{\sqrt{n-1}}} \rightarrow \frac{\sqrt{n}}{2} \end{aligned}$$

□

2.37 ! Гамма функция Эйлера. Простейшие свойства.

Область определения

1. $\int_1^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$ — сходится при всех $t \in \mathbb{R}$:

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_1^{+\infty} = e$$

$$0 \leq x^{t-1} e^{-x} \leq x^{t-1} e^{-\frac{x}{2}} e^{-\frac{x}{2}}$$

$$x^{t-1} e^{-\frac{x}{2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow \text{при больших } x \quad x^{t-1} e^{-\frac{x}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \leq e^{-\frac{x}{2}}$$

2. $\int_0^1 x^{t-1} e^{-x} dx$

$$x^{t-1} e^{-x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^{t-1} \quad t > 0 \text{ сходится, } t \leq 0 \text{ расходится}$$

Выпуклость

Подынтегральное выражение как функция от t является выпуклой функцией (при $x \geq 0$)

$$\begin{aligned} t &\mapsto x^{t-1}e^{-x} = f_x(t) \\ f(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) &\leq \alpha f_x(t_1) + (1-\alpha)f_x(t_2) \\ \int_0^{+\infty} f_x dx &\leq \alpha \int_0^{+\infty} f_x(t_1) dx + (1-\alpha) \int_0^{+\infty} f_x(t_2) dx \end{aligned}$$

Определение выпуклости:

$$x^{(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2)-1} e^{-x} \leq \alpha x^{t_1-1} e^{-x} + (1-\alpha)x^{t_2-1} e^{-x}$$

Зафиксируем α, t_1, t_2 . Проинтегрируем по x от 0 до $+\infty$:

$$\Gamma(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) \leq \alpha \Gamma(t_1) + (1-\alpha)\Gamma(t_2)$$

Γ — выпуклая $\Rightarrow \Gamma$ — непрерывная

Третье свойство

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$$

$$\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} x^t e^{-x} dx = -x^t e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + t \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx = 0 + t\Gamma(t)$$

Следствие. $\Gamma(n+1) = n!$

Доказательство.

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \dots = n(n-1) \cdots 1\Gamma(1) = n!$$

□

Четвертое свойство

$$\Gamma(t) = \frac{\Gamma(t+1)}{t} \underset{t \rightarrow +0}{\sim} \frac{1}{t}$$

Пятое свойство

Дано выше. (2.36, стр. 25)

2.38 Изучение сходимости интеграла $\int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$

При каких α и β сходится:

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$$

Мы знаем, что $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

При $\alpha > 1, \beta > 0$

$$\frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} < \frac{1}{x^\alpha}$$

Таким же образом можно еще что-то выяснить, но мы так делать не будем. Вместо этого воспользуемся методом “удавливание логарифма”

$$1. \alpha > 1 \quad \alpha = 1 + 2a, a > 0$$

$$0 \leq \frac{1}{x^{1+2a}(\ln x)^\beta} = \frac{1}{x^{1+a}} \cdot \frac{1}{x^a(\ln x)^\beta}$$

$$\beta \geq 0 \quad x^a(\ln x)^\beta \rightarrow +\infty$$

$$b := -\beta \quad \beta < 0 \quad x^a(\ln x)^\beta = \frac{x^a}{(\ln x)^b} = \left(\frac{x^{\frac{a}{b}}}{\ln x} \right)^b \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \xrightarrow{\text{Лопиталь}} \frac{\frac{a}{b} x^{\frac{a}{b}-1}}{\frac{1}{x}} \rightarrow +\infty$$

$$x^a(\ln x)^\beta \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \Rightarrow \frac{1}{x^{1+a}} \cdot \frac{1}{x^a(\ln x)^\beta} < \frac{1}{x^{1+a}} - \text{сходится}$$

$$2. \alpha < 1 \quad \alpha = 1 - 2a, a > 0$$

$$\frac{1}{x^{1-2a}(\ln x)^\beta} = \frac{1}{x^{1-a}} \cdot \frac{x^a}{(\ln x)^\beta} > \frac{1}{x^{1-a}}$$

$$3. \alpha = 1$$

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} \stackrel{y=\ln x}{=} \int_{\ln 10}^{+\infty} \frac{dy}{y^\beta}$$

Сходится при $\beta > 1$, расходится при $\beta \leq 1$