1 Определения

1.1 Упорядоченная пара

Для некоторого множества X и I - множество "индексов", тогда $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ - **семейство элементов** X. $(\forall\alpha \in I\ \ x_\alpha \in X)$
Упорядоченная пара — семейство из двух элементов, построенная при $I = \{1, 2\}$. Обозначается (a, b).
Кроме того,

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c, b = d$$

1.2 Декартово произведение

Декартово произведение двух множеств — множество всех упорядоченных пар элементов этих множеств. $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$
Кроме того, декартово произведение можно обобщить для произвольного числа множеств.
$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2 \ldots a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2 \ldots a_n \in A_n\}$

1.3 Аксиомы вещественных чисел

1.3.1 Аксиомы поля

В множестве $\mathbb{R}$ определены две операции, называемые сложением и умножением, действующие из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ ($+, \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), удовлетворяющие следующим свойствам:
Аксоимы сложения *(здесь и далее $\forall a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$)*:

1. $a + b = b + a$ — коммутативность
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ — ассоциативность
3. $\exists \mathbf{0} : \mathbf{0} + a = a$
4. $\exists a' : a + a' = \mathbf{0}$

Аксиомы умножения:

1. $ab = ba$ — коммутативность
2. $(ab)c = a(bc)$ — ассоциативность
3. $\exists \mathbf{1} \neq \mathbf{0} : \forall a \in \mathbb{R} : a \cdot \mathbf{1} = a$
4. $\forall a \neq \mathbf{0} : \exists \tilde{a} : a \cdot \tilde{a} = \mathbf{1}$

Аксоима комбинации сложения и умножения:

1. $(a + b)c = ac + bc$ — дистрибутивность

Поле — множество, в котором определены операции $+, \cdot$, удовлетворяющие группе аксиом I. Например, $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{F}_3$

1.3.2 Аксиомы порядка

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y$ **или** $y \leq x$
2. $x \leq y; y \leq x \Rightarrow x = y$
3. $x \leq y; y \leq z \Rightarrow x \leq z$ — транзитивность
4. $x \leq y \Rightarrow \forall z \in \mathbb{R} : x + z \leq y + z$
5. $0 \leq x; 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy$

Упорядоченное поле — множество, для которого выполняются аксиомы групп I и II.
$\mathbb{F}_3, \mathbb{C}$ - не упорядоченные поля
$\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathcal{R}$ - упорядоченные поля

1.4 Аксиома Кантора, аксиома Архимеда

1.4.1 Аксиома Архимеда

$$\forall x, y > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : nx > y$$

Следствие: существуют сколько угодно большие натуральные числа:

$$\forall y \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : n > y$$

Архимедовы поля — упорядоченные поля, в которых выполняется Аксиома Архимеда.
$\mathcal{R}$ - не архимедово поле
$\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ - архимедовы поля

1.4.2 Аксиома Кантора

Для последовательности вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ ($\forall n \in \mathbb{N}\, a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$)

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \varnothing$$

$\mathbb{Q}$ не удволетворяет этой аксиоме, в отличие от $\mathbb{R}$.

1.5 Пополненное множество вещественных чисел, операции и порядок в нем

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ — пополненное множество вещественных чисел.
Свойства ($\forall x \in \mathbb{R}$):

- $-\infty < +\infty$
- $\pm\infty \cdot \pm\infty = +\infty$
- $\pm\infty \cdot \mp\infty = -\infty$
- $-\infty < x < +\infty$
- $x \pm \infty = \pm\infty$

- $\pm\infty \pm \infty = \pm\infty$
- $\pm\infty \mp \infty$ — не определено

Для $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$

- $x \cdot \pm\infty = \pm\infty$

1.6 Максимальный элемент множества

$M \in A$ называется **максимальным элементом** множества A, если $\forall a \in A \;\; a \leq M$

1.7 Последовательность

$x : \mathbb{N} \to Y$ — **последовательность**

1.8 Образ и прообраз множества при отображении

Для $A \subset X, f : X \to Y$ **образ** — множество $\{f(x), x \in A\} \subset Y$ — обозначается $f(A)$
Для $B \subset Y$ **прообраз** — $\{x \in X : f(x) \in B\}$ — обозначается $f^{-1}(B)$

1.9 Инъекция, сюръекция, биекция

Сюръекция — такое отображение $f : X \to Y$, что $f(X) = Y$, т.е. $\forall y \in Y \;\; f(x) = y$ имеет решение относительно x.
Инъекция — такое отображение $f : X \to Y$, что $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \;\; f(x_1) \neq f(x_2)$, т.е. $\forall y \in Y \;\; f(x) = y$ имеет не более одного решения относительно x.
Биекция — отображение, являющееся одновременно сюръекцией и инъекцией, т.е. $\forall y \in Y \;\; f(x) = y$ имеет ровно одно решение относительно x.

1.10 Векторнозначаная функция, ее координатные функции

Если $F : X \to \mathbb{R}^m; x \mapsto F(x) = (F_1(x), ..., F_m(x))$, то F — **векторнозначная функция** *(значения функции - вектора)*
$F_1(x)..F_m(x)$ - координатные функции отображения F

1.11 График отображения

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$

1.12 Композиция отображений

$f : X \to Y, g : Y \to Z$, тогда **композиция** f и g *(обозначается $g \circ f$)* — такое отображение, что $g \circ f : X \to Z, x \mapsto g(f(x))$.
Также возможно определение, которое допускает $g : Y_1 \to Z, Y_1 \supset Y$

1.13 Сужение и продолжение отображений

Для $g : X \to Y \quad f$ — **сужение** g на множество A, если $f : A \to Y, A \subset X$.
g называется **продолжением** f.

1.14 Предел последовательности *(эпсилон-дельта определение)*

Если для $(x_n), a \in \mathbb{R}$ выполняется $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n > N \;\; |x_n - a| < \varepsilon$, то a — **предел последовательности** (x_n), обозначается $x_n \to a$ или $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$

1.15 Окрестность точки, проколотая окрестность

Окрестность точки $a = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$, обозначается $U_\varepsilon(a)$
Проколотая окрестность точки $a = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$, обозначается $\dot{U}_\varepsilon(a)$

1.16 Предел последовательности (определение на языке окрестностей)

$$\forall U(a) \;\; \exists N \;\; \forall n > N \;\; x_n \in U(a)$$

1.17 Метрика, метрическое пространство, подпространство

На множестве X отображение $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ называется **метрикой**, если выполняются свойства 1-3:

1. $\forall x, y \;\; \rho(x, y) \geq 0; \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\forall x, y \;\; \rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. Неравенство треугольника: $\forall x, y, z \in X \;\; \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

Метрическое пространство — упорядоченная пара (X, ρ), где X — множество, ρ — метрика на X.
Подпространством метрического пространства (X, ρ) называется $(A, \rho|_{A \times A})$, если $A \subset X$

1.18 Шар, замкнутый шар, окрестность точки в метрическом пространстве

Шар *(открытый шар)* $B(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) < r\}$
Замкнутый шар $B(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) \leq r\}$
Окрестность точки a в метрическом пространстве: $B(a, \varepsilon) \Leftrightarrow U(a)$.

1.19 Линейное пространство

Если K — поле *($K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$)*, X — множество, то X называется **линейным пространством** над полем K (и тогда K называется полем скаляр), если определены следующие две операции:

1. $+ : X \times X \to X$ — сложение векторов
2. $\cdot : K \times X \to X$ — умножение векторов на скаляры

Для этих операций выполняются соответствующие аксиомы *(здесь $A, B, C \in X; a, b \in K$)*:

1.19.1 Аксиомы сложения векторов

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $\exists \mathbf{0} \in X : A + \mathbf{0} = A$
4. $\exists -A \in X : A + (-A) = 0$ — обратный элемент

1.19.2 Аксиомы умножения векторов на скаляры

1. $(A + B) \cdot a = A \cdot a + B \cdot a$
2. $A \cdot (a + b) = A \cdot a + A \cdot b$
3. $(ab) \cdot A = a(b \cdot A)$
4. $\exists \mathbf{1} \in K : \mathbf{1} \cdot A = A$

1.20 Норма, нормированное пространство

Норма - отображение $X \to \mathbb{R}, x \mapsto ||x||$, если X - линейное пространство (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) и выполняется следующее:

1. $\forall x \ \ ||x|| \geq 0, ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\forall x \in X \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \ \ ||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$
3. Неравенство треугольника: $\forall x, y \in X \ \ ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Нормированное пространство — упорядоченная пара $(X, || \cdot ||)$, где $||||$ - норма

1.21 Ограниченное множество в метрическом пространстве

$A \subset X$ — **ограничено**, если $\exists x_0 \in X \ \ \exists R > 0 \ \ A \subset B(x_0, R)$, т.е. если A содержится в некотором шаре в X.

1.22 Внутренняя точка множества, открытое множество, внутренность

a — **внутренняя точка** множества D, если $\exists U(a) : U(a) \subset D$, т.е. $\exists r > 0 : B(a, r) \subset D$
D — **открытое множество**, если $\forall a \in D : a$ — внутренняя точка D
Внутренностью множества D называется $Int(D) = \{x \in D : x$ — внутр. точка $D\}$

1.23 Предельная точка множества

a — **предельная точка** множества D, если

$$\forall \dot{U}(a) \ \ \dot{U}(a) \cap D \neq \varnothing$$

1.24 Замкнутое множество, замыкание, граница

D — **замкнутое множество**, если оно содержит все свои предельные точки.
$\overline{D} = D \cup$ (множество предельных точек D) — замыкание.
Граница множества — множество его граничных точек. Обозначается ∂D

1.25 Изолированная точка, граничная точка

a — **изолированная точка** D, если $a \in D$ и a — не предельная, то есть:

$$\exists U(a) \quad U(a) \cap D = \{a\}$$

a — **граничная точка** D, если $\forall U(a) \quad U(a)$ содержит точки как из D, так и из D^c

1.26 Описание внутренности множества

1. $IntD$ - откр. множество
2. $IntD = \bigcup\limits_{\substack{D \supset G \\ G - \text{открыт}}}$ — максимальное открытое множество, содержащееся в D
3. D — откр. в $X \Leftrightarrow D = IntD$

1.27 Описание замыкания множества в терминах пересечений

$\overline{D} = \bigcap\limits_{\substack{D \subset F \\ F - \text{замкн.}}} F$ — мин. (по вкл.) замкн. множество, содержащее D.

1.28 Верхняя, нижняя границы; супремум, инфимум

$E \subset \mathbb{R}$. E — **огр. сверху**, если $\exists M \in \mathbb{R} \;\; \forall x \in E \;\; x \leq M$. Кроме того, всякие такие M называются **верхними границами** E.
Аналогично ограничение снизу.
$E \subset \mathbb{R}, E \neq \varnothing$.
Для E — огр. сверху **супремум** ($\sup E$)— наименьшая из верхних границ E.
Для E — огр. снизу **инфимум** ($\inf E$) — наибольшая из нижних границ E.

1.29 Техническое описание супремума

Техническое описание супремума: $b = \sup E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E \;\; x \leq b \\ \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x \in E \;\; b - \varepsilon < x \end{cases}$

1.30 Последовательность, стремящаяся к бесконечности

В $\mathbb{R}$:

1. $x_n \to +\infty \quad \forall E > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n > N \;\; x_n > E$
2. $x_n \to -\infty \quad \forall E \;\; \exists N \;\; \forall n > N \;\; x_n < E$
3. $x_n \to \infty \Leftrightarrow |x_n| \to +\infty$

1.31 Компактное множество

$K \subset X$ — **компактное**, если для любого открытого покрытия этого множества $\exists$ конечное подпокрытие $\Leftrightarrow \exists \alpha_1 \ldots \alpha_n \quad K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$

1.32 Секвенциальная компактность

Секвенциально компактным называется множество $A \subset X : \forall$ посл. (x_n) точек A $\exists$ подпосл. x_{n_k}, которая сходится к точке из A

1.33 Определения предела отображения (3 шт)

$(X, \rho^x), (Y, \rho^y) \quad D \subset X \quad f : D \to Y$
$a \in X$, a — пред. точка множества D, $A \in Y$
Тогда $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ — **предел отображения**, если:

1. По Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D : 0 < \rho^X(a, x) < \delta \quad \rho^Y(f(x), A) < \varepsilon$$

2. На языке окрестностей:

$$\forall U(A) \;\; \exists V(a) \;\; \forall x \in \dot{V}(a) \;\; f(x) \in U(A)$$

3. По Гейне: $\forall (x_n)$ — посл. в X:

   (a) $x_n \to a$
   (b) $x_n \in D$
   (c) $x_n \neq a$

   $f(x_n) \to A$

1.34 Определения пределов в $\overline{\mathbb{R}}$

Для $Y = \overline{\mathbb{R}}, -\infty < x < +\infty$:

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty : \quad \forall E \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in X : 0 < |x - a| < \delta \;\; f(x) > E$
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty : \quad \forall E \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in X : 0 < |x - a| < \delta \;\; f(x) < E$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = c \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta \;\; \forall x \in X : x > \delta \;\; |f(x) - c| < \varepsilon$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = c \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta \;\; \forall x \in X : x < \delta \;\; |f(x) - c| < \varepsilon$

1.35 Предел по множеству

$f : D \subset X \to Y, D_1 \subset D, x_0$ — пред. точка D_1
Тогда **предел по множеству** D_1 в точке x_0 — это $\lim\limits_{x \to x_0} f|_{D_1}(x)$

1.36 Односторонние пределы

В $\mathbb{R}$ одностор. $= \{$ левостор., правостор. $\}$
Левосторонний предел $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = L$ - это $\lim f|_{D \cap (-\infty, x_0)}$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap D \;\; |f(x) - L| < \varepsilon$$

Аналогично правосторонний.

1.37 Непрерывное отображение

$f : D \subset X \to Y \quad x_0 \in D$
f — **непрерывное** в точке x_0, если:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, либо x_0 — изолированная точка D
2. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D \ \ \rho(x, x_0) < \delta \ \ \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$
3. $\forall U(f(x_0)) \ \ \exists V(x_0) \ \ \forall x \in V(x_0) \cap D \ \ f(x) \in U(f(x_0))$
4. По Гейне $\forall (x_n) : x_n \to x_0; x_n \in D \ \ f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x_0)$

1.38 Непрерывность слева

f — непр. слева в x_0, если $f|_{(-\infty, x_0] \cap D}$ — непрерывно в x_0

1.39 Разрыв, разрывы первого и второго рода

Если $\nexists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, либо $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ — **точка разрыва**.
Пусть $\exists f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$ и не все 3 числа равны: $f(x_0 - 0), f(x_0), f(x_0 + 0)$. Это **разрыв I рода *(скачок)***.
Остальные точки разрыва — **разрыв II рода**.

Примечание.

$$f(x_0 - 0) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$$

1.40 О большое, о маленькое

$f, g : D \subset X \to \mathbb{R} \ \ x_0$ — пр. точка D
Если $\exists V(x_0) \ \ \exists \varphi : V(x_0) \cap D \to \mathbb{R} \quad f(x) = g(x)\varphi(x)$ при $x \in V(x_0) \cap D$

1. φ — ограничена. Тогда говорят $f = O(g)$ при $x \to x_0$
   "f **ограничена** по сравнению с g при $x \to x_0$"
2. $\varphi(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 \quad f$ — **беск. малая** по отношению к g при $x \to x_0$, $f = o(g)$
3. $\varphi(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 1 \quad f$ и g **экв.** при $x \to x_0 \quad f \underset{x \to x_0}{\sim} g$

Примечание. О большое и о малое — разные вопросы в табличке.

1.41 Эквивалентные функции, таблица эквивалентных

Эквивалентные функции даны выше.
Таблица эквивалентных для $x \to 0$:

$$\sin x \sim x$$
$$\operatorname{sh} x \sim x$$
$$\operatorname{tg} x \sim x$$
$$\operatorname{arctg} x \sim x$$
$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$
$$\operatorname{ch} x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$$
$$e^x - 1 \sim x$$
$$\ln(1+x) \sim x$$
$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$
$$a^x - 1 \sim x \ln a$$

1.42 Асимптотически равные *(сравнимые)* функции

В условиях прошлых определений $f = O(g), g = O(f) \Leftrightarrow f \asymp g$ — асимптотически сравнимы на множестве D, “величины одного порядка”.

1.43 Асимптотическое разложение

$g_n : D \subset X \to \mathbb{R} \quad x_0$ — пред. точка D
$\forall n \quad g_{n+1}(x) = o(g_n), x \to x_0$
Пример. $g_n(x) = x^n, n = 0, 1, 2 \ldots \quad x \to 0 \quad g_{n+1} = xg_n, x \to 0$
(g_n) называется **шкала асимптотического разложения**.
$f : D \to \mathbb{R}$
Если $f(x) = c_0g_0(x) + c_1g_1(x) + \ldots + c_ng_n(x) + o(g_n)$, то это асимптотическое разложение f по шкале (g_n)

1.44 Наклонная асимптота графика

Пусть $f(x) = Ax + B + o(1), x \to +\infty$
Прямая $y = Ax + B$ — наклонная асимптота к графику f при $x \to +\infty$

1.45 Путь в метрическом пространстве

Y — метр. пр-во
$\gamma : [a, b] \to Y$ — непр. на $[a, b]$
= **путь** в пространстве Y

1.46 Линейно связное множество

$E \subset Y$
E — **линейно связное**, если $\forall A, B \in E \ \exists$ путь $\gamma : [a, b] \to E$ такой, что:

- $\gamma(a) = A$
- $\gamma(b) = B$

1.47 Функция, дифференцируемая в точке и производная

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R} \quad x_0 \in \langle a, b\rangle$
f — **дифференцируема.** в точке x_0, если $\exists A \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + o(x - x_0), x \to x_0$$

При этом A называется **производной** f в точке x_0

Примечание. Это два разных билета.

1.48 Счётное множество

A — **счётное множество** $\Leftrightarrow$ равномощно $\mathbb{N}$

1.49 Мощность континуума

A равномощно $[0, 1] \Rightarrow A$ имеет мощность **континуума**.

1.50 Фундаментальная последовательность

x_n — **фундаментальная, последовательность Коши, сходящаяся в себе**, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall m, n > N \;\; \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$$

1.51 Полное метрическое пространство

X — метрическое пространство называется **полным**, если в нём любая фундаментальная последовательность — сходящаяся.

1.52 Классы функций $C^n([a, b])$

?

1.53 Производная n-го порядка

?

1.54 Многочлен Тейлора n-го порядка

Многочленом Тейлора n-той степени *(порядка)* функции f в точке a называется:

$$T_n(f, a)(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

1.55 Разложения Тейлора основных элементарных функций

Некоторые разложения по Тейлору:

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\
\cos x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n)
\end{aligned}
$$

2 Теоремы

2.1 Законы де Моргана

Пусть $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ - семейство множеств, Y - множество. Тогда:

1. $Y \setminus (\bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha)$ ①
2. $Y \setminus (\bigcap\limits_{\alpha \in A} X_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha)$ ②

Вариант 2:

1. $Y \cap (\bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in A} (Y \cap X_\alpha)$
2. $Y \cup (\bigcap\limits_{\alpha \in A} X_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha \in A} (Y \cup X_\alpha)$

Proof. Чтобы доказать, что $A = B$, можно доказать, что $A \subset B, B \subset A$. Воспользуемся этим методом, чтобы доказать ①
$\lhd x \in$ левая часть ①
$x \in Y; x \notin \bigcup X_\alpha$
$x \in Y; x \notin \{y : \exists \alpha : y \in X_\alpha\}$
$x \in Y; \forall \alpha \in A : x \notin X_\alpha$
$\lhd x \in$ правая часть ①
$\forall \alpha : x \notin Y \setminus X_\alpha$
Из чего левая и правая части эквивалентны. Аналогично доказывается ② □

2.2 Неравенство Коши-Буняковского, евклидова норма в $\mathbb{R}^m$

2.2.1 Неравенство Коши-Буняковского

$$(\sum a_i b_i)^2 \leq (\sum a_i^2)(\sum b_k^2)$$

2.2.2 Евклидова норма в $\mathbb{R}^m$

$$||x|| = \sqrt{\sum_{i}^{m} x_i^2}$$

Неравенство Коши-Буняковского следует из тождества Лагранжа. Докажем его:

Proof.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{(i,k)\in A\times B}(a_ib_k - a_kb_i)^2 = \\
\frac{1}{2}\sum_{(i,k)\in A\times B}(a_i^2b_k^2 + a_k^2b_i^2 - 2a_ia_kb_ib_k) = \\
\frac{1}{2}\sum_{(i,k)\in A\times B}a_i^2b_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{(i,k)\in A\times B}a_k^2b_i^2 - \sum_{(i,k)\in A\times B}a_ib_ia_kb_k = \\
\frac{1}{2}\sum_{(i,k)\in A\times B}a_i^2\sum_{(i,k)\in A\times B}b_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{(i,k)\in A\times B}a_i^2\sum_{(i,k)\in A\times B}b_k^2 - \\
\sum_{(i,k)\in A\times B}a_ib_i\sum_{(i,k)\in A\times B}a_kb_k = \\
\sum_{(i,k)\in A\times B}a_i^2\sum_{(i,k)\in A\times B}b_k^2 - \sum_{(i,k)\in A\times B}(a_ib_i)^2
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sum_{(i,k)\in A\times B}(a_ib_i)^2 = \sum_{(i,k)\in A\times B}a_i^2\sum_{(i,k)\in A\times B}b_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{(i,k)\in A\times B}(a_ib_k - a_kb_i)^2 \geq \sum_{(i,k)\in A\times B}a_i^2\sum_{(i,k)\in A\times B}b_k^2$$

□

2.3 Аксиома Архимеда. Плотность множества рациональных чисел в $\mathbb{R}$

2.3.1 Аксиома Архимеда

$$\forall x, y > 0 : \exists n \in \mathbb{R} : nx > y$$

2.3.2 Плотность множества $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$

$$\mathbb{Q} \text{ плотно в } \mathbb{R} \overset{def}{\iff} \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b \ \ (a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$$

В любом интервале в $\mathbb{R}$ содержится число $\in \mathbb{Q}$.

Proof. $\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$, т.е. $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b \quad (a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$
Возьмем $n \in \mathbb{N} : n > \frac{1}{b-a}$. Тогда $\frac{1}{n} < b - a$
$q := \frac{[na]+1}{n} \in \mathbb{Q}$
$q \leq \frac{na+1}{n} = a + \frac{1}{n} < a + ba < b \Rightarrow q < b$
$q > \frac{na}{n} = a \Rightarrow q > a$ □

2.4 Неравенство Бернулли

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad x \geq -1, n \in \mathbb{N}$$

$$(1+x)^n \geq 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2 \quad x>0, n \in \mathbb{N} \text{ — более сложная версия}$$

Proof. База: $n=1: \ (1+x)^1 \geq 1+x$
Переход: Дано неравенство $(1+x)^n \geq 1+nx$, оно верно при каком-то n. Докажем, что $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$$

□

2.5 Единственность предела и ограниченность сходящейся последовательности

(X, ρ) — метрическое пр-во, $a, b \in X$, (x_n) — послед. в X, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$, тогда $a=b$

Proof.

$$\text{Докажем от противного — пусть } a \neq b. \text{ Возьмем } 0<\varepsilon<\frac{1}{2}\rho(a,b)$$

$$\exists N(\varepsilon) \ \ \forall n > N(\varepsilon) \ \ \rho(x_n, a) < \varepsilon$$

$$\exists K(\varepsilon) \ \ \forall n > K(\varepsilon) \ \ \rho(x_n, b) < \varepsilon$$

$$\text{При } n > \max(N(\varepsilon), K(\varepsilon)) \quad \rho(a,b) \leq \rho(a,x_n)+\rho(b,x_n) < 2\varepsilon < \rho(a,b) \text{ — противоречие}$$

□

2.6 Теорема о предельном переходе в неравенствах для последовательностей и для функций

2.6.1 Для последовательностей

Если $(x_n), (y_n)$ — вещественные последовательности $x_n \to a, y_n \to b, \exists N \ \ \forall n > N \ x_n \leq y_n$, **тогда** $a \leq b$.

2.6.2 Для функций

Если $f, g : X \to \mathbb{R}$, a — предельная точка X, и $\forall x \in X \ \ f(x) \leq g(x)$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Proof.

$$\text{Докажем от противного. Пусть } a>b, 0<\varepsilon<\frac{a-b}{2}.$$

$$\exists N(\varepsilon) \ \ \forall n > N \ \ a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$$

$$\exists K(\varepsilon) \ \ \forall n > K \ \ b-\varepsilon < y_n < b+\varepsilon$$

$$\text{При } n > \max(N, K) \ \ y_n < b+\varepsilon < a-\varepsilon < x_n \text{ — противоречие}$$

□

Proof. По Гейне.
$\forall (x_n) \to a, x_n \in X, x_n \neq a$:

$$f(x_n) \to A, g(x_n) \to B, \forall x \;\; f(x) \leq g(x) \Rightarrow f(x_n) \leq g(x_n) \Rightarrow A \leq B$$

□

2.7 Теорема о двух городовых

Если $(x_n), (y_n), (z_n)$ - вещ. посл., $\forall n \;\; x_n \leq y_n \leq z_n, \lim x_n = \lim z_n = a$, **тогда** $\exists \lim y_n = a$

Proof.

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n > N \;\; a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists K \;\; \forall n > K \;\; a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_0 = max(N, K) \;\; \forall n > N_0 \;\; a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon$$
$$\text{По определению } \lim y_n = a$$

□

2.8 Бесконечно малая последовательность

Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную — бесконечная последовательность, т.е. (x_n) — беск. малая, (y_n) — ограничена $\Rightarrow x_n y_n$ — беск. малая

Proof. Возьмём K такое, что $\forall n \;\; |y_n| \leq K$.

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n > N \;\; |x_n| \leq \frac{\varepsilon}{K}$$

$$|x_n y_n| \leq \frac{\varepsilon}{K} K = \varepsilon \Rightarrow x_n y_n \to 0$$

□

2.9 Теорема об арифметических свойствах предела последовательности в нормированном пространстве и в R

Об арифметических свойствах предела в нормированном пространстве.
Если $(X, ||\cdot||)$ — норм. пр-во, $(x_n), (y_n)$ — посл. в X, λ_n — посл. скаляров, и $x_n \to x_0, y_n \to y_0, \lambda_n \to \lambda_0$, **тогда:**

1. $x_n \pm y_n \to x_0 \pm y_0$
2. $\lambda_n x_n \to \lambda_0 x_0$
3. $||x_n|| \to ||x_0||$

Proof. Это доказательство написано не по лекциям.

1. $\forall \varepsilon \;\; \exists N_2 \;\; \forall n > N_1 \;\; ||x_n - x_0|| < \varepsilon$
   $\forall \varepsilon \;\; \exists N_2 \;\; \forall n > N_2 \;\; ||y_n - y_0|| < \varepsilon$
   $N := \max(N_1, N_2)$
   $\forall \varepsilon \;\; \forall n > N \;\; ||(x_n + y_n) - (x_0 + y_0)|| \leq ||x_n - x_0|| + ||y_n - y_0|| \leq 2\varepsilon$

2. $||\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0|| = ||\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0 + \lambda_0 x_n - \lambda_0 x_n|| = ||(\lambda_n - \lambda_0)x_n + (x_n - x_0)\lambda_0|| \leq ||(\lambda_n - \lambda_0)x_n|| + ||(x_n - x_0)\lambda_0|| = ||x_n|||\lambda_n - \lambda_0| + ||x_n - x_0|||\lambda_0|$

   $|\lambda_n - \lambda_0|$ и $||x_n - x_0||$ — бесконечно малые, $||x_n||$ и $|\lambda_n|$ — ограниченные $\Rightarrow$ $||x_n|||\lambda_n - \lambda_0| + ||x_n - x_0|||\lambda_0|$ — бесконечно малая

3. $|||x_n|| - ||x_0||| \leq ||x_n - x_0||$

$\square$

Об арифметических свойствах пределов в $\mathbb{R}$.
Для $(x_n), (y_n)$ — вещ.посл., $\forall n \;\; y_n \neq 0, y_0 \neq 0$:

4. $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x_0}{y_0}$

2.10 Неравенство Коши-Буняковского в линейном пространстве, норма, порожденная скалярным произведением

Для X — линейного пространства *(над* $\mathbb{R}, \mathbb{C}$*)*
$\forall x, y \in X \quad |\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$

Proof. Возьмём $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$
При $y = 0$ тривиально, пусть $y \neq 0$

$$0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle = \langle x, x\rangle + \lambda\langle y, x\rangle + \overline{\lambda}\langle x, y\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle y, y\rangle$$

$$\lambda := -\frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}, \overline{\lambda} = -\frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle}$$

$$0 \leq \langle x, x\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle y, x\rangle - \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle x, y\rangle + \frac{\langle x, y\rangle\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle}$$

$$0 \leq \langle x, x\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle y, x\rangle$$

$$\frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle y, x\rangle \leq \langle x, x\rangle$$

$$\langle x, y\rangle\langle y, x\rangle \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

$\square$

Если $(X, ||\cdot||)$ — норм. пр-во, тогда $\rho(x, y) := ||x - y||$ — метрика, порожденная нормой.
Не все метрики порождены нормами, например $\rho = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$.

2.11 Леммы о непрерывности скалярного произведения и покоординатной сходимости в $\mathbb{R}^n$

2.11.1 О покоординатной сходимости в $\mathbb{R}^m$

О покоординатной сходимости в $\mathbb{R}^m$
$(x^{(n)})$ — последовательность векторов в $\mathbb{R}^m$
в $\mathbb{R}^m$ задано евклидово скалярное пространство и норма.
Тогда $(x^{(n)}) \to x \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \dots m\}\ \ x_i^{(n)} \underset{n\to+\infty}{\to} x_i$

Proof. Модуль координаты $\leq$ нормы всего вектора:

$$|x_i^{(n)} - x_i| \leq ||x^{(n)} - x|| \leq \sqrt{m} \max_{1\leq i\leq m} |x_i^n - x_i|$$

Первое неравенство доказывает $\Rightarrow$, второе неравенство доказывает $\Leftarrow$ $\square$

2.11.2 О непрерывности скалярного произведения

X - лин. пространство со скалярным произведением, $||\cdot||$ — норма, порожденная скалярным произведением.
Тогда $\forall (x_n) x_n \to x, \forall (y_n) y_n \to y, \quad \langle x_n, y_m\rangle \to \langle x, y\rangle$

Proof.

$$|\langle x_n, y_m\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| \leq |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle| + |\langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle \leq$$

$$\leq |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| \leq ||x_n|| \cdot ||y_n - y|| + ||x_n - x|| \cdot ||y|| \to 0$$

По теореме о двух городовых чтд. $\square$

2.12 Открытость открытого шара

$B(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) < r\}$ — открыт

Proof. $x_0 \in B(a, r)$
Докажем, что x_0 — внутренняя, т.е. $\exists U(x_0) \subset B(a, r)$
$k := r - \rho(a, x_0)$
Докажем, что $B(x_0, k) \subset B(a, r)$

$$\forall x \in B(x_0, k) \quad \rho(x, x_0) < k$$

$$\rho(a, x_0) + \rho(x, x_0) < r$$

$$\rho(x, a) \leq \rho(a, x_0) + \rho(x, x_0) < r$$

$\square$

2.13 Теорема о свойствах открытых множеств

1. $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ - семейство открытых множеств в (X, ρ)

   Тогда $\bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$ - открыто в X.

2. $G_1, G_2, \dots G_n$ - открыто в X.

   Тогда $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$ - открыто в X.

Proof. 1. $x_0 \in \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$

$\exists \alpha_0 : x_0 \in G_{\alpha_0}$

G_{α_0} — открыто $\Rightarrow \exists U(x_0) \subset G_{\alpha_0} \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow x_0$ — внтуренняя точка $\bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow$ $\bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$ — открыто, т.к. в нём все точки внутренние.

2. $x_0 \in \bigcap\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$

   $\forall \alpha \in A : x_0 \in G_\alpha$

   $\forall \alpha \in A \;\; G_\alpha$ — открыто $\Rightarrow \exists B_\alpha(x_0, r_\alpha) \subset G_\alpha$

   $\forall x_0 : \exists U(x_0) = B(x_0, \min\limits_{\alpha} r_\alpha) \subset \bigcap\limits_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow x_0$ — внутренняя точка $\bigcap\limits_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow \bigcap\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$ — открыто, т.к. в нём все точки внутренние.

□

2.14 Теорема о связи открытых и замкнутых множеств, свойства замкнутых множеств

D — замкнуто $\Leftrightarrow D^c = X \setminus D$ *(дополнение)* — открыто.
Свойства:

1. $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ — замкн. в X

   Тогда $\bigcap F_\alpha$ — замкн. в X

2. $F_1 \dots F_n$ — замкн. в X

   Тогда $\bigcup F_i$ — замкн. в X

Proof. Докажем $\Rightarrow$: D — замкн. $\Rightarrow^{?} X \setminus D$
$x \in X \setminus D \Rightarrow x$ — не пред. точка D, т.к. D содержит все свои пред. точки и $x \notin D$
$\Rightarrow \exists r : B(x, r) \subset X \setminus D$
Докажем $\Leftarrow$: $X \setminus D$ — откр., D — замкн.?, т.е. $\forall x \in \{\text{пр.точки D}\} \;\; ?x \in D$
Если $x \in D$ — тривиально.
$x \notin D \quad x \in X \setminus D$
$\exists U(x) \subset X \setminus D \Rightarrow x$ - не пред. точка □

Proof. 1. $(\bigcap F_\alpha)^c = X \setminus (\bigcap F_\alpha) = \bigcup (X \setminus F_\alpha)$

F_α — закрыто $\Rightarrow X \setminus F_\alpha$ — открыто $\Rightarrow \bigcup (X \setminus F_\alpha)$ — открыто

$(\bigcap F_\alpha)^c$ — открыто $\Rightarrow \bigcap F_\alpha$ — закрыто

2. $(\bigcup F_i)^c = \bigcap (F_i)^c$
   $\bigcap (F_i)^c$ — открыто, т.к. F_i^c — открыто $\Rightarrow (\bigcup F_i)^c$ — открыто $\Rightarrow \bigcup F_i$ — закрыто

□

2.15 Теорема об арифметических свойствах предела последовательности (в $\overline{\mathbb{R}}$). Неопределенности

2.15.1 Теорема об арифметических свойствах предела последовательности (в $\overline{\mathbb{R}}$)

$(x_n), (y_n)$ — вещ., $x_n \to a, y_n \to b, \quad a, b \in \overline{\mathbb{R}}$
Тогда:

1. $x_n \pm y_n \to a \pm b$
2. $x_n y_n \to ab$ *, если* $\forall n \ \ y_n \neq 0; b \neq 0$
3. $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}$

При условии, что выражения в правых частях имеют смысл.

2.15.2 Неопределенности

- $\begin{cases} x_n \to +\infty \\ y_n \to -\infty \end{cases} \Rightarrow x_n + y_n \to ?$
- $\begin{cases} x_n \to n + \sin n \\ y_n \to -n \end{cases} \Rightarrow x_n + y_n = \sin n, \ \nexists \lim$
- $\begin{cases} x_n \to n \\ y_n \to -\sqrt{n} \end{cases} \Rightarrow x_n + y_n = n - \sqrt{n} \to +\infty$
- $\begin{cases} x_n \to 0 \\ y_n \to a \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to \infty$

2.16 Теорема Кантора о стягивающихся отрезках

Дана последовательность отрезков $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$
Длины отрезков $\to 0$, т.е. $(b_n - a_n) \to_{n \to +\infty} 0$
Тогда $\exists! c \in \mathbb{R} \quad \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} [a_k, b_k] = \{c\}$ и при этом $a_n \to_{n \to +\infty} c, b_n \to_{n \to +\infty} c$

Proof. Берем из аксиомы Кантора $c \in \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} [a_k, b_k]$

$$\begin{cases} 0 \leq b_n - c \leq b_n - a_n \\ 0 \leq c - a_n \leq b_n - a_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_n - c \to 0 \\ c - a_n \to 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_n \to c \\ a_n \to c \end{cases}$$

По теореме об единственности предела c однозначно определено. □