

$\overline{D} = D \cup$  (множество предельных точек  $D$ ) — замыкание.

Примечание.  $a \in \overline{D}$ , тогда  $\exists(x_n)$  из  $D$ ,  $x_n \rightarrow a$

Примечание.  $\overline{D} = \bigcap_{\substack{D \subset F \\ F - \text{замкн.}}} F$  — мин. (по вкл.) замкн. множество, содержащее  $D$ .

Примечание.  $D$  — замкнуто  $\Leftrightarrow D = \overline{D}$

**Определение.**  $a$  — **граничная точка**  $D$ , если  $\forall U(a)$   $U(a)$  содержит точки как из  $D$ , так и из  $D^c$

**Определение.** **Граница множества** — множество его граничных точек. Обозначается  $\partial D$

Упражнение:

1.  $\partial D = \overline{D} \setminus \text{Int} D$
2.  $\partial D$  — замкнута
3.  $\forall$  множество предельных точек — замкнуто.

**Определение.**  $T$  — множество,  $U$  — набор неких подмножеств  $T$ .

При этом:

1.  $\emptyset \in U, T \in U$
2.  $G_1, G_2 \dots G_n \in U \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n G_i \in U$
3.  $(G_\alpha)_{\alpha \in A}, \forall \alpha G_\alpha \in U \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \in U$

Тогда  $T$  называется **топологическим пространством**,  $U$  — “набор” открытых множеств в  $T$  (мн-ва  $G^c$ , где  $G \in U$  — замкн.)

$a \in T, U(a)$  — любое открытое множество, содержащее  $a$  и  $\neq \emptyset$ .

**Аксиома 1. Об отделимости:**  $\forall x, y \in T \exists U(x), U(y) : U(x) \cap U(y) = \emptyset$

**Определение.** В  $\mathbb{R}$ :

1.  $x_n \rightarrow +\infty \iff \forall E > 0 \exists N \forall n > N \ x_n > E$
2.  $x_n \rightarrow -\infty \iff \forall E \exists N \forall n > N \ x_n < E$
3.  $x_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow |x_n| \rightarrow +\infty$

Примечание. Требование  $> 0$  не обязательно.

Примечание. 1.  $x_n \rightarrow \infty \Rightarrow x_n$  не огр. (по модулю)

$x_n \rightarrow +\infty \Rightarrow x_n$  не огр. сверху

$x_n \rightarrow -\infty \Rightarrow x_n$  не огр. снизу

2.  $x_n \rightarrow +\infty$ . Тогда  $x_n \not\rightarrow -\infty$

Откр. множества:

1. Ограниченные открытые множества — те, что открыт. в  $\mathbb{R}$
2.  $U_E(+\infty) = (E, +\infty] \subset \overline{\mathbb{R}}$   
 $U_E(-\infty) = [-\infty, E) \subset \overline{\mathbb{R}}$
3. Произвольное открытое множество — либо огр. откр., либо огр.  $\cup U_E(+\infty)$ , огр.  $\cup U_E(-\infty)$ ,  
огр.  $\cup U_E(+\infty) \cup U_E(-\infty)$

*Proof.* Рассмотрим  $y = \tan x$

Положим  $\tan(\frac{\pi}{2}) = +\infty$ ,  $\tan(\frac{\pi}{2}) = -\infty$

$\tan$  — монотонная биекция  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  на  $\mathbb{R}$

Она обеспечивает биекцию между совокупностью открытых множеств  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  и ... в  $\overline{\mathbb{R}}$  □

В  $\overline{\mathbb{R}}$  рассмотрим функцию  $\rho(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$  — метрика.

Покажем, что  $x_n \rightarrow +\infty$  в смысле исх. опр.  $\Leftrightarrow x_n \rightarrow +\infty$  в пространстве  $(\overline{\mathbb{R}}, \rho)$

*Proof.*  $x_n \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \forall U(+\infty) \exists N \forall n > N x_n \in U(+\infty)$

$x_n \rightarrow +\infty$  в пространстве  $(\overline{\mathbb{R}}, \rho) \Leftrightarrow$  высказыванию выше. □

*Примечание.*  $a \in \mathbb{R}$ ,  $(x_n)$  — вещ. посл. Тогда  $x_n \rightarrow a$  в смысле обычного опр.  $\Leftrightarrow x_n \rightarrow a$  в пространстве  $(\overline{\mathbb{R}}, \rho)$

$$\begin{cases} x_n \rightarrow a, a \in \overline{\mathbb{R}} \\ x_n \rightarrow b, b \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases} \Rightarrow a = b$$

$$\text{в } \mathbb{R}^m \quad x_n \rightarrow \infty \quad \forall E \exists N \forall n > N \|x_n\| > E$$

$$U_E(+\infty) = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| > E\}$$

## 1 Ревизия

$(x_n), (y_n) \quad x_n \leq y_n \quad x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y, x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ . Тогда  $x \leq y$ .

- $y = +\infty$  или  $x = -\infty$  — тривиально.
- $x = +\infty, y = a \in \mathbb{R}$  — невозможно
- остальное — как в основной теореме.

**Определение.** Последовательность  $(y_n)$  называется **бесконечно большой**, если  $y_n \rightarrow +\infty$ .

*Примечание.*  $x_n$  — бесконечно малая ( $\forall n \ x_n \neq 0$ )  $\Leftrightarrow \frac{1}{x_n}$  — бесконечно большая.

*Proof.*  $|x_n| < \varepsilon \Leftrightarrow |\frac{1}{x_n}| > \frac{1}{\varepsilon}$  □

**Теорема 1.** Об арифметических свойствах пределов в  $\overline{\mathbb{R}}$ .

$(x_n), (y_n)$  — вещ.,  $x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b, a, b \in \overline{\mathbb{R}}$  Тогда:

1.  $x_n \pm y_n \rightarrow a \pm b$
2.  $x_n y_n \rightarrow ab$  Если  $\forall n \ y_n \neq 0; b \neq 0$

$$3. \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{a}{b}$$

При условии, что выражения в правых частях имеют смысл.

$$\triangleleft x_n \rightarrow +\infty, y_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$$

$$\forall E \exists N \forall n > N \quad x_n + y_n > E$$

$$\text{Для } E = (a - 1) \exists N_1 \forall n > N_1 \quad x_n > E - (a - 1)$$

$$\text{Для } E = 1 \exists N_2 \forall n > N_2 \quad x_n > a - 1$$

Также для  $x_n \rightarrow +\infty, y_n$  — огр. снизу  $\Rightarrow x_n + y_n \rightarrow +\infty$ .

$$\begin{cases} x_n \rightarrow +\infty \\ y_n > \varepsilon, (\varepsilon > 0) \text{ при } n > N_0 \end{cases} \Rightarrow x_n y_n \rightarrow +\infty$$

$y_n$  отделено от нуля при больших  $n$ .

*Примечание.* Верны аналогичные теоремы, где вместо  $\overline{\mathbb{R}} - \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cap \{\infty\}$

Неопределенности:

$$\begin{aligned} & \bullet \begin{cases} x_n \rightarrow +\infty \\ y_n \rightarrow -\infty \end{cases} \Rightarrow x_n + y_n \rightarrow ? \\ & \bullet \begin{cases} x_n \rightarrow n + \sin n \\ y_n \rightarrow -n \end{cases} \Rightarrow x_n + y_n = \sin n, \nexists \lim \\ & \bullet \begin{cases} x_n \rightarrow n \\ y_n \rightarrow -\sqrt{n} \end{cases} \Rightarrow x_n + y_n = n - \sqrt{n} \rightarrow +\infty \\ & \bullet \begin{cases} x_n \rightarrow 0 \\ y_n \rightarrow a \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

## 2 Точные границы числовых множеств

**Теорема 2.** Теорема Кантора о стягивающихся отрезках.

Дана последовательность отрезков  $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$

Длины отрезков  $\rightarrow 0$ , т.е.  $(b_n - a_n) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$

Тогда  $\exists! c \in \mathbb{R} \quad \bigcap_{k=1}^{+\infty} [a_k, b_k] = \{c\}$  и при этом  $a_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} c, b_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} c$

*Примечание.* Вместо “ $b_n - a_n \rightarrow 0$ ”  $\forall \varepsilon > 0 \exists n : b_n - a_n < \varepsilon$

*Proof.* Берем из аксиомы Кантора  $c \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} [a_k, b_k]$

$$\begin{cases} 0 \leq b_n - c \leq b_n - a_n \\ 0 \leq c - a_n \leq b_n - a_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_n - c \rightarrow 0 \\ c - a_n \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_n \rightarrow c \\ a_n \rightarrow c \end{cases}$$

По теореме об единственности предела  $c$  однозначно определено.  $\square$

**Определение.**  $E \subset \mathbb{R}$ .  $E$  — **огр. сверху**, если  $\exists M \in \mathbb{R} \forall x \in E \ x \leq M$ . Кроме того, всякие такие  $M$  называются **верхними границами**  $E$ .

Аналогично ограничение снизу.

**Определение.**  $E \subset \mathbb{R}, E \neq \emptyset$ .

Для  $E$  — **огр. сверху** **супремум** ( $\sup E$ ) — наименьшая из верхних границ  $E$ .

Для  $E$  — **огр. снизу** **инфимум** ( $\inf E$ ) — наибольшая из нижних границ  $E$ .

**Примечание.** Техническое описание супремума:  $b = \sup E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E \ x \leq b \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in E \ b - \varepsilon < x \end{cases}$

Аналогично для  $\inf$

**Определение.**  $M = \max E : M \in E \ \forall x \in E \ x \leq M$

**Теорема 3.** О существовании супремума.

$E \subset \mathbb{R}, E \neq \emptyset, E$  — **огр. сверху**.

Тогда  $\exists \sup E \in \mathbb{R}$

*Proof.* Строим систему вложенных отрезков  $[a_k, b_k]$  со свойствами:

1.  $b_k$  — верхняя граница  $E$
2.  $[a_k, b_k]$  содержит точки  $E$ .

$a_1$  — берём любую точку  $E$ ,  $b_1$  — любая верхняя граница.

Границы следующего отрезка найдём бинарным делением (математики это называют **половинное деление**).

Если  $\frac{a_1+b_1}{2}$  — верхняя граница  $E$ ,  $[a_2, b_2] := [a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ .

Иначе на  $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$  есть элементы  $E$ ,  $[a_2, b_2] := [\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$

Длина  $[a_k, b_k] = b_k - a_k = \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}} \rightarrow 0$

$\exists! c \in \bigcap [a_k, b_k]$

Проверим:  $c = \sup E$

1.  $\forall x \in E \ \forall n \ x \leq b_n$
2.  $\forall \varepsilon > 0 \ c - \varepsilon$  — не верхн. гран.

Доказательство 1:  $x \rightarrow x, b_n \rightarrow c \Rightarrow x \leq b_n$

Доказательство 2:  $\forall \varepsilon > 0$  возьмём  $n : \frac{b_1 - a_1}{2^n} < \varepsilon$ .  $c - \varepsilon < a_n \Leftrightarrow c - a_n < \varepsilon \Leftrightarrow c - a_n < b_n - a_n < \varepsilon$  □