1 Линейные операторы

1.1 Линейные операторы и их матричная запись, примеры.

$\lhd \varphi : X \to Y$, X, Y — ЛП, $\dim X = n, \dim Y = m$

Определение. Отображение φ называется линейным, если

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad \varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$$

$$\forall \alpha \in K \quad \varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$$

Определение. Отображение φ, обладающее свойством линейности называется **линейным оператором** (ЛОп)

Пример.

- $\Theta : \Theta x = 0_Y$ — нулевой оператор
- $\mathcal{I} : \mathcal{I}x = x$ — единичный *(тождественный)* оператор
- $X = L_1 \dot{+} L_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x \in X \;\; \exists! x_1 \in L_1, x_2 \in L_2 : x = x_1 + x_2$

  Проектор:

$$\mathcal{P}_{L_1}^{||L_2} : X \to L_1 \quad \mathcal{P}_{L_1}^{||L_2} x = x_1$$

$$\mathcal{P}_{L_2}^{||L_1} : X \to L_2 \quad \mathcal{P}_{L_2}^{||L_1} x = x_2$$

- $X = C^1[-1, 1]$ — первая производная $\exists$ и непрерывна

$$\forall f \in X \quad (\varphi f)(x) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)K(x,t)dt$$

  $K(x, t)$ — интегральное ядро, например $x^2 + tx$

$\{e_j\}_{j=1}^n$ — базис X, $\{h_k\}_{k=1}^m$ — базис Y, $\varphi(e_j) = \sum\limits_{k=1}^{m} a_j^k h_k$

Определение. Набор коэффициентов $||a_j^k||$ образует матрицу $m \times n$, которая называется **матрицей ЛОп** в паре базисов $\{e_j\}$ и $\{h_k\}$

1.2 Пространство линейных операторов.

$\lhd \varphi, \psi : X \to Y$ — ЛОп
$\chi = \varphi + \psi$, если $\forall x \in X \quad \chi(x) = (\varphi + \psi)x = \varphi(x) + \psi(x)$
$\chi = \alpha\varphi$, если $\forall x \in X \quad \chi(x) = (\alpha\varphi)x = \alpha\varphi(x)$

$$\dim \mathcal{L}(X, Y) = \dim X \cdot \dim Y = m \cdot n$$

1.3 Алгебра. Примеры. Изоморфизм алгебр.

Алгебра — модуль над коммутативным кольцом с единицей, являющийся кольцом.
Кольцо — множество, на котором заданы бинарные операции $+$ и $\cdot$ с следующими свойствами:

1. $a + b = b + a$
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$
3. $\exists 0 \in R : \forall x \in R : x + 0 = 0 + x = x$
4. $\forall x \in R : \exists (-x) \in R : x + (-x) = (-x) + x = 0$
5. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
6. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
7. $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$

Коммутативное кольцо — кольцо с коммутативным умножением: $a \cdot b = b \cdot a$
Кольцо с единицей — кольцо с нейтральным элементом по умножению: $\exists 1 \in R : a \cdot 1 = a$
Модуль над кольцом *(коммутативным, с единицей)* R — множество M с операциями:

1. $+ : M \times M \to M$
   (a) $a + b = b + a$
   (b) $a + (b + c) = (a + b) + c$
   (c) $\exists 0 \in R : \forall x \in R : x + 0 = 0 + x = x$
   (d) $\forall x \in R : \exists (-x) \in R : x + (-x) = (-x) + x = 0$
2. $\cdot : M \times R \to M$
   (a) $(r_1 r_2)m = r_1(r_2 m)$
   (b) $1m = m$
   (c) $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$
   (d) $(r_1 + r_2)m = r_1 m + r_2 m$

Примеры:

1. $\mathbb{R}^3$ с векторным произведением — алгебра над $\mathbb{R}$
2. $\mathbb{C}$ — алгебра над $\mathbb{R}$
3. $\mathbb{H}$ *(кватернионы)*
4. Многочлены

Изоморфизм алгебр — биекция $F : A \to B$, где A и B — алгебры, сохраняющая “$+$” и “$\cdot$”:

1. $F(kx) = kF(x)$
2. $F(x + y) = F(x) + F(y)$
3. $F(xy) = F(x)F(y)$

Из этого следует, что $F(0_X) = 0_Y$

1.4 Алгебра операторов и матриц.

Умножение ЛОП: $(\mathcal{B} \cdot \mathcal{A})x = \mathcal{B}(\mathcal{A}x)$
Умножение матриц: $(A \cdot B)_{ik} = \sum\limits_{j} a_{ij} b_{jk}$

Теорема 1.

$$\underbrace{\mathcal{C}}_{C} = \underbrace{\mathcal{B}}_{B}\underbrace{\mathcal{A}}_{A} \Leftrightarrow C = BA$$

Доказательство.

$$\mathcal{C}e_i = \mathcal{B}(\mathcal{A}e_i) = \mathcal{B}\left(\sum_j a_{ji} e_j\right) = \sum_j a_{ji}\mathcal{B}e_j = \sum_j a_{ji}\sum_k b_{kj} e_k$$

$$c_{il} = (\mathcal{C}e_i)_l = \sum_j a_{ji} b_{lj} \Rightarrow C = BA$$

$\square$

Пространство ЛОП $\mathcal{F} : X \to X$ — алгебра, пространство квадратных матриц $\mathbb{R}_n^n$ — алгебра.

1.5 Обратная матрица: критерий обратимости, метод Гаусса вычисления обратной матрицы.

В алгебре A выполняется $a_1 \cdot a_2 = e$, где e — единичный элемент матрицы. Тогда:

1. a_1 — **левый обратный** элемент для a_2
2. a_2 — **правый обратный** элемент для a_1

Если a_1 — и левый, и правый обратный к a_2, то он называется **обратным** элементом к a_2.

Теорема 2. $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$

Доказательство. "$\Leftarrow$"

$$\det A \neq 0 \overset{?}{\Rightarrow} \exists A^{-1} : AA^{-1} = E, A^{-1}A = E$$

$$\sum_j a_{ij} a^{-1}_{jk} = \delta_{ik}$$

Это система Крамера, т.к. $\det A = 0 \overset{def}{\Longrightarrow}$ вектора $\in A$ ЛНЗ $\Rightarrow$ единственное решение.

"$\Rightarrow$" то же самое, но наоборот.  $\square$

$$\left[\ A \mid E\ \right] \sim \left[\ E \mid A^{-1}\ \right]$$

Доказательство.

$$\left[\ A \mid E\ \right] = \left[\ T_1 A \mid T_1 E\ \right] = \left[\ T_2 T_1 A \mid T_2 T_1 E\ \right] = \ldots = \left[\ T_n \ldots T_1 A \mid T_n \ldots T_1\ \right] = \left[\ E \mid T_n \ldots T_1\ \right]$$

$$\lhd T_n \ldots T_1 A = E \Rightarrow A^{-1} = T_n \ldots T_1$$

$\square$

Здесь T_i — матрица элементарного преобразования.

1.6 Обратная матрица: критерий обратимости, вычисление обратной матрицы методом присоединенной матрицы.

Критерий обратимости: Дано выше. (1.5, стр. 3)

Теорема 3.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}^T$$

Доказательство. $AB = E \Rightarrow B = \frac{1}{\det A}\tilde{A}^T$ — надо доказать.

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i \beta_k^j = \delta_k^i$$

$$]\delta_{k_0}^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1_{k_0} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^T = b$$

$$\beta_{k_0}^j = \xi^j \quad \alpha_j^i = a_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \xi^j = b \quad \xi^j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$$

$$\Delta_j = \det A(a_j \to b)$$

□

$A(a_j \to b)$ — матрица A, где заменили j-тый вектор на b

$$\det A(a_j \to b) = 0 \cdot M_j^1 + \ldots + 1 \cdot M_j^k + \ldots + 0 = M_j^k$$

$$b_{jk} = \frac{(\tilde{A}^T)_k^j}{\det A} \Rightarrow B = \frac{\tilde{A}_k^j}{\det A}$$

1.7 Ядро и образ линейного оператора. Теорема о ядре и образе. Функции матриц и операторов.

$\lhd \varphi : X \to Y$

Определение. Ядро φ :

$$\operatorname{Ker} \varphi = \{x \in X : \varphi x = 0\}$$

Примечание. $\operatorname{Ker} \varphi \subset X$

Лемма 1. *Ker* φ *— ЛП*

Определение. Образ φ:

$$\operatorname{Im} \varphi = \{y \in Y : \exists x : \varphi(x) = y\}$$

Примечание.

$$\operatorname{Im} \varphi \subset Y$$

Лемма 2. *Im* φ *— ЛП*

Теорема 4. О ядре и образе

$$]\varphi : X \to X \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi = \dim X$$

Доказательство. $]\dim\operatorname{Ker}\varphi = K$
$]\{e_1 \dots e_k\}$ — базис $\operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow \varphi(e_j) = 0 \ \ \forall j = 1..k$
$\lhd\{e_1 \dots e_k; e_{k+1} \dots e_n\}$ — базис X
$\lhd x = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi^j e_j \quad \lhd\varphi(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi^j \varphi(e_j) = \sum\limits_{j=k+1}^{n} \xi^j \varphi(e_j)$
$\{\varphi(e_{k+1}) \dots \varphi(e_n)\}$ — полный для Im, т.к. любой $x \in \operatorname{Im}$ можно по нему разложить. Докажем ЛНЗ от обратного:

$]\{\varphi(e_j)\}_{j=k+1}^{n}$ — ЛЗ $\Rightarrow \exists\alpha^j : \sum\limits_{j=k+1}^{n} \alpha^j \varphi(e_j) = 0 \Rightarrow \varphi\left(\sum\limits_{j=k+1}^{n} \alpha^j e_j\right) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \text{или } \sum\limits_{j=k+1}^{n} \alpha^j e_j \in \operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow \text{ЛК } e_{k+1} \dots e_n \text{ разложима по } e_1 \dots e_k \text{ — противоречие} \\ \text{или } \sum\limits_{j=k+1}^{n} \alpha^j e_j = 0 \Rightarrow \alpha^j = 0 \Rightarrow \text{ ЛНЗ} \end{cases}$$

$\Rightarrow \{\varphi(e_j)\}_{j=k+1}^{n}$ — базис $\operatorname{Im}\varphi$. □

1.8 Обратный оператор. Критерий существования обратного оператора.

Определение. Обратным к оператору φ называется оператор φ^{-1}:

$$\varphi^{-1}\varphi = \varphi\varphi^{-1} = \mathcal{I}$$

Теорема 5. Оператор φ обратим, если $\exists$ базис, в котором его матрица невырождена

Теорема 6. $\lhd\varphi : X \to X$
$\exists\varphi^{-1} \Leftrightarrow \dim\operatorname{Im}\varphi = \dim X$ или $\dim\operatorname{Ker}\varphi = 0$

Доказательство. $\dim\operatorname{Im}\varphi = \dim X \Leftrightarrow \operatorname{Im}\varphi \simeq X \Rightarrow \varphi$ — сюръекция, $\dim\operatorname{Ker}\varphi = 0 \Rightarrow \forall y \ \ \exists x : \varphi x = y \Rightarrow \varphi$ — инъекция □

2 Тензорная алгебра

2.1 Преобразование координат векторов X и X^* при замене базиса.

$\lhd\{e_j\}$ — базис X
$\lhd\{\tilde{e}_k\}$ — базис X
$\Rightarrow \forall k \ \ \tilde{e}_k = \sum_{j=1}^{n} t_k^j e_j$

Определение. Набор $T = ||t_j^i||$ образует матрицу, которая называется **матрицей перехода** от базиса $\{e_j\}$ к базису $\{\tilde{e}_k\}$

Примечание. $\lhd E = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{bmatrix}, \tilde{E} = \begin{bmatrix} \tilde{e}_1 & \tilde{e}_2 & \dots & \tilde{e}_n \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{E} = ET$

Лемма 3. $]\xi$ *— координаты вектора x в базисе $\{e_j\}$*
$]\tilde{\xi}$ *— координаты вектора x в базисе $\{\tilde{e}_k\}$*
Тогда $\xi = T\tilde{\xi}$ или $\tilde{\xi} = S\xi, S = T^{-1}$

Доказательство. $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{\xi}^k \tilde{e}_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{x}^k \sum\limits_{j=1}^{n} t_k^j e_j = \sum\limits_{j=1}^{n} (\sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{\xi}^k t_k^j) e_j = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi^j e_j \Rightarrow \xi = T\tilde{\xi}$ □

Лемма 4. $]\{f^l\}$ *— базис* X^**, сопряженный* $\{e_j\}$*, т.е.* $f^l(e_j) = \delta^l_j$
$]\{\tilde{f}^m\}$ *— базис* X^**, сопряженный* $\{\tilde{e}_k\}$*, т.е.* $\tilde{f}^m(\tilde{e}_k) = \delta^k_m$
$]F = \begin{bmatrix} f^1 & f^2 & \dots & f^n \end{bmatrix}^T, \quad \tilde{F} = \begin{bmatrix} \tilde{f}^1 & \tilde{f}^2 & \dots & \tilde{f}^n \end{bmatrix}^T$
Тогда $F = T\tilde{F}$ *или* $f^l = \sum\limits_{m=1}^n t^l_m \tilde{f}^m$

Доказательство. $\lhd(\tilde{f}^m, \tilde{e}_k) = \delta^m_k = (\tilde{f}^m, \sum\limits_{j=1}^n t^j_k e_j) = \sum\limits_{j=1}^n t^j_k (\tilde{f}^m, e_j) = \sum\limits_{j=1}^n t^j_k \sum\limits_{l=1}^n a^m_l (f^l, e_j) = \sum\limits_{j=1}^n t^j_k a^m_j$

$\Rightarrow \sum\limits_{j=1}^n a^m_j t^j_k = \delta^m_k$ или $AT = I$ — единичная матрица $\Rightarrow A = T^{-1}$ □

Лемма 5. $]\varphi$ *— коэфф. ЛФ в* $\{e_j\}$
$]\tilde{\varphi}$ *— коэфф. ЛФ в* $\{\tilde{e}_k\}$
$\Rightarrow \tilde{\varphi} = \varphi T$

Доказательство. $]g$ — ЛФ, $\varphi_j = g(e_j) \quad \tilde{\varphi}_k = g(\tilde{e}_k)$

$$\varphi_k = g(\tilde{e}_k) = g\left(\sum_{j=1}^n t^j_k e_j\right) = \sum_{j=1}^n t^j_k g(e_j) = \sum_{j=1}^n t^j_k \varphi_j$$

$\Rightarrow \tilde{\varphi} = \varphi T$ □

Итого:

$$\tilde{E} = ET \quad \tilde{F} = T^{-1}F \quad \tilde{\xi} = T^{-1}\xi \quad \tilde{\varphi} = \varphi T$$

2.2 Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса. Преобразование подобия.

2.3 Тензоры *(ковариантность, независимое от ПЛФ определение)*. Пространство тензоров.

2.4 Свертка тензора.

2.5 Транспонирование тензора.

2.6 Определитель линейного оператора. Внешняя степень оператора.

2.7 Независимость определителя оператора от базиса. Теорема умножения определителей.