

Примеры к прошлой теореме:

$$1. f - \text{непр.}, \Phi([p, q]) := \sigma(\Pi(f[p, q])) = \int_p^q f dx$$

Тогда выполняется определение плотности аддитивной плотности промежутка.

2.

$$\Phi[\alpha, \beta] = S_{\text{сектор}(\alpha, \beta)} = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi$$

Пример.  $x(t), y(t)$  — кривая в  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{t_{\alpha}}^{t_{\beta}} r^2(\varphi(t)) d\varphi(t) = \frac{1}{2} \int_{t_{\alpha}}^{t_{\beta}} r^2(t) \varphi'(t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_{\alpha}}^{t_{\beta}} \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}^2 \left( \arctg \frac{y(t)}{x(t)} \right)' dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_{\alpha}}^{t_{\beta}} (x^2(t) + y^2(t)) \frac{1}{1 + \left( \frac{y(t)}{x(t)} \right)^2} \left( \frac{y(t)}{x(t)} \right)' dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_{\alpha}}^{t_{\beta}} (x^2(t) + y^2(t)) \frac{1}{1 + \left( \frac{y(t)}{x(t)} \right)^2} \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t)} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_{\alpha}}^{t_{\beta}} (x^2(t) + y^2(t)) \frac{x^2(t)}{x^2(t) + y^2(t)} \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t)} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_{\alpha}}^{t_{\beta}} y'(t)x(t) - y(t)x'(t) dt \end{aligned}$$

$$x := \sin t, y := \cos t$$

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin^2 t - \cos^2 t dt = -\frac{\pi}{4} - \text{проблема, отрицательная площадь}$$

## 1 Выпуклость функций

$$\forall z \in [x, y] \quad \exists \alpha \in [0, 1] : z = \alpha x + (1 - \alpha)y$$

$\alpha$  — доля отрезка  $zy$  от  $xy$ , т.е.  $\alpha = \frac{|zy|}{|xy|}$

**Определение.**  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  — **выпуклая**

$$\forall x, y \in \langle a, b \rangle \quad \forall \alpha \in [0, 1] \quad f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

*Примечание.*  $f$  — выпуклая  $\Leftrightarrow$  всякая хорда графика  $f$  расположена “выше” графика (*нестрого выше*)  $\Leftrightarrow \Pi(f, \langle a, b \rangle) \setminus \{(x, y) : x \in \langle a, b \rangle, y \geq f(x)\}$

Выпуклый = выпуклый вниз; вогнутый = выпуклый вверх

**Определение.**  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  — **строго выпуклая**

$$\forall x, y \in \langle a, b \rangle \quad \forall \alpha \in (0, 1) \quad f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

**Определение.**  $A \subset \mathbb{R}^m$  — **выпуклое множество** в  $\mathbb{R}^m$ , если

$$\forall x, y \in A, \alpha \in [0, 1] \quad \alpha x + (1 - \alpha)y \in A$$

Это определение с вики

**Определение.** Надграфик функции  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  это множество  $\{(x, y) \mid x \in \langle a, b \rangle, y \geq f(x)\}$

**Лемма 1.** о трех хордах

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1.  $f$  — вып.  $\langle a, b \rangle$

$$2. \forall x_1, x_2, x_3 \in \langle a, b \rangle \quad x_1 < x_2 < x_3 \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

**Доказательство.** Левое  $\Leftrightarrow f(x_2)(x_3 - x_1) \leq f(x_3)(x_2 - x_1) + f(x_1)(x_3 - x_1 - (x_2 - x_1))$

$$f \left( x_3 \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} + x_1 \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \right) = f(x_2) \leq f(x_3) \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} + f(x_1) \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$$

□

**Примечание.** Если  $f$  — строго выпуклая, то в лемме оба неравенства строгие.

**Теорема 1.** об односторонней дифференцируемости выпуклой функции.

$f$  — вып.  $\langle a, b \rangle$ . Тогда  $\forall x \in (a, b) \quad \exists f'_+(x), f'_-(x)$  и  $\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$

$$f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'_-(x_2)$$

**Доказательство.**  $f'_+(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1+0} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$  — монотонно убывающая функция от  $x$

Фиксируем  $x_0 < x_1$ . По лемме о трех хордах  $\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$

□

**Следствие.**  $f$  — вып. на  $\langle a, b \rangle \Rightarrow f$  непр. на  $(a, b)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$$

**Теорема 2.** выпуклость в терминах касательных

$f$  — вып. на  $\langle a, b \rangle$ . Тогда график  $f$  расположен не ниже любой касательной

т.е.  $\forall x, x_0 \quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

**Доказательство.** “ $\Rightarrow$ ”

Если  $x > x_0 \quad f'(x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ , это неравенство 2. из предыдущей теоремы

$x < x_0$  аналогично

“ $\Leftarrow$ ” фиксируем  $x_0$ . Берем  $x_1 < x_0 < x_2$

$f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0); f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0)$ , т.е.  $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq f'(x_0) \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$ .

Это верно по лемме. □

**Определение.**  $A \subset \mathbb{R}^2$  — вып.  $l \subset \mathbb{R}^2$  — прямая

$l$  — **опорная прямая** к  $A$ , если:

1.  $A$  содержится в одной полуплоскости относительно  $l$

2.  $l \cap A \neq \emptyset$

**Теорема 3.** дифференциальный критерий выпуклости

1.  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , дифф. в  $(a, b)$

Тогда  $f$  — вып.  $\Rightarrow f'$  возр. на  $(a, b)$

Если  $f$  — строго выпуклая  $\Rightarrow f'$  строго возрастает

2.  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , дважды дифф. на  $(a, b)$

$f$  — вып.  $\Leftrightarrow f'' \geq 0$  на  $(a, b)$

(a) “ $\Rightarrow$ ”  $f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2)$  ( $x_1 < x_2$ )

“ $\Leftarrow$ ” ?  $f$  вып.  $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c_1) < f'(c_2) = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$

Теперь утверждение 2. очевидно.

*Примечание.*  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  — вып.

Тогда  $f$  — дифф. на  $(a, b)$  за исключением, может быть, счетного множества точек.

*Доказательство.*  $\forall x \exists f'_+(x), f'_-(x)$

$f'_\pm$  возрастает

$f'_-(x) = f'_+(x) \Rightarrow f$  дифф. в  $x$

$f'_-(x) < f'_+(x) \Rightarrow f$  не дифф. в  $x$

Тогда  $x$  — точка скачка для  $f'_+, f'_-$ , их НБСЧ. □

**Почему не более чем счётное?**

*Пример.* Изопериметрическое неравенство

$G \subset \mathbb{R}^2$  — выпуклое замкнутое множество (ограниченное)

$\text{diam} G = \sup\{\rho(x, y), x, y \in G\}$

$\text{diam} G \leq 1$

Тогда  $\sigma(G) \leq \frac{\pi}{4}$

*Доказательство.* Пойдём от некоторой точки на границе  $G$  под углом  $\varphi$  внутрь фигуры по прямой. В какой-то момент мы встретим другую граничную точку. Назовем этот процесс  $r(\varphi)$  (возвращает длину пути). Очевидно, что  $r^2(\varphi) + r^2(\varphi - \frac{\pi}{2}) \leq (\text{diam} G)^2 \leq 1$

$$\begin{aligned} \sigma(G) &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 r^2(\varphi) d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi) d\varphi \right) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( r^2(\varphi) + r^2\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \right) d\varphi \leq \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 d\varphi = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

□