1 Скалярное произведение

Определение. Для X — линейного пространства *(над* $\mathbb{R}, \mathbb{C}$*)* $\varphi : X \times X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ называется **скалярным произведением**. Обозначается $\varphi(x, y) = \langle x, y \rangle$

1. $\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y \rangle = \alpha_1 \langle x_1, y \rangle + \alpha_2 \langle x_2, y \rangle$
2. $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$
3. $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Определение. $\overline{x}$ — **комплексное сопряжение**, для вещественных чисел $\overline{x} = x$.

1. Над $\mathbb{C}$: $\langle x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 \rangle = \overline{\langle \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2, x \rangle} = \overline{\beta_1 \langle y_1, x \rangle + \beta_2 \langle y_2, x \rangle} = \overline{\beta_1} \langle x, y_1 \rangle + \overline{\beta_2} \langle x, y_2 \rangle$
2. Над $\mathbb{R}$: $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$
3. $\langle 0, x \rangle = \langle x, 0 \rangle = \langle 0 \cdot a, x \rangle = 0 \langle a, x \rangle = 0$

Лемма 1. *Неравенство КБШ (Коши-Буняковского-Шварца)*
Для X — линейного пространства (над $\mathbb{R}, \mathbb{C}$)
$\forall x, y \in X \quad |\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$

Доказательство. Возьмём $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$
Заметим, что $\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\langle \alpha y, x \rangle} = \overline{\alpha \langle y, x \rangle} = \overline{\alpha}\, \overline{\langle y, x \rangle} = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle$.
При $y = 0$ тривиально, пусть $y \neq 0$

$$0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle \lambda y, x \rangle + \langle x, \lambda y \rangle + \langle \lambda y, \lambda y \rangle =$$

$$= \langle x, x \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + \overline{\lambda} \langle x, y \rangle + \lambda \overline{\lambda} \langle y, y \rangle$$

$$\lambda := -\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}, \overline{\lambda} = \overline{\left(-\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \right)} = -\frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle}$$

$$0 \leq \langle x, x \rangle - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle y, x \rangle - \frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle x, y \rangle + \frac{\langle x, y \rangle \langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle}$$

$$0 \leq \langle x, x \rangle - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle y, x \rangle$$

$$\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle y, x \rangle \leq \langle x, x \rangle$$

$$\langle x, y \rangle \langle y, x \rangle \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

На википедии есть доказательство проще. □

Пример в $\mathbb{R}^m$: $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_m y_m$ — Евклидово скалярное произведение
Пример в $\mathbb{C}^m$: $\langle x, y \rangle = x_1 \overline{y}_1 + x_2 \overline{y}_2 + \ldots + x_m \overline{y}_m$

Лемма 2. *Для лин. пространства X, скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$*
$\rho : X \to \mathbb{R} \quad \rho(x) = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ *— норма*

Доказательство. Докажем, что ρ удовлетворяет всем леммам нормы.

1. $\rho(x) \geq 0 \quad \rho(x) = 0 \Leftrightarrow \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\rho(\alpha x) = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}\langle x, x\rangle} = |\alpha|\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\alpha|\rho(x)$
3. $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

$$\sqrt{\langle x+y, x+y\rangle} \overset{?}{\leq} \sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle}$$

$$\langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \overset{?}{\leq} \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}$$

Пояснение следующего перехода: пусть $\langle x, y\rangle = a$. Тогда $a = \Re a + \Im a, \overline{a} = \Re a - \Im a$ *(разложение на вещественную и мнимую части).* $\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle = \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} = \Re\langle x, y\rangle + \Im\langle x, y\rangle + \Re\langle x, y\rangle - \Im\langle x, y\rangle = 2\Re\langle x, y\rangle$.

$$2\Re\langle x, y\rangle \overset{?}{\leq} 2\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}$$

$$\Re\langle x, y\rangle \leq |\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}$$

□

$||x|| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2}$ - норма в $\mathbb{R}^m$
$\rho(x, y) = ||x - y||$ - метрика в $\mathbb{R}^m$
Не все нормы порождены скалярным произведением, например: $||x|| = \max\limits_i |x_i|$

Лемма 3. *О непрерывности скалярного произведения. X - лин. пространство со скалярным произведением, $||\cdot||$ — норма, порожденная скалярным произведением.*
Тогда $\forall (x_n) : x_n \to x, \;\; \forall (y_n) : y_n \to y, \quad \langle x_n, y_m\rangle \to \langle x, y\rangle$

Доказательство.

$$|\langle x_n, y_m\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| \leq |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle| + |\langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| =$$

$$|\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| \leq ||x_n|| \cdot ||y_n - y|| + ||x_n - x|| \cdot ||y|| \to 0$$

По теореме о двух городовых чтд. □

Лемма 4. *О покоординатной сходимости в $\mathbb{R}^m$*
$(x^{(n)})$ *— последовательность векторов в* $\mathbb{R}^m$
в $\mathbb{R}^m$ задано евклидово скалярное произведение и норма.
Тогда $(x^{(n)}) \to x \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \dots m\} \;\; x_i^{(n)} \underset{n\to+\infty}{\to} x_i$

Примечание. В $\mathbb{R}^\infty$ не выполняется

Доказательство. Модуль координаты $\leq$ нормы всего вектора:

$$|x_i^{(n)} - x_i| \leq ||x^{(n)} - x|| \leq \sqrt{m} \max_{1\leq i\leq m} |x_i^n - x_i|$$

Первое неравенство доказывает $\Rightarrow$, второе неравенство доказывает $\Leftarrow$ □

Определение. Параллелепипед в $\mathbb{R}^m$
$a, b \in \mathbb{R}^m \quad [a, b] = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall i \in \{1 \dots m\} \;\; a_i \leq x_i \leq b_i\} = [a_1 b_1] \times [a_2 b_2] \times \dots \times [a_m b_m]$

Определение. Куб в $\mathbb{R}^m$
$[(a_1 - R, a_2 - R, \dots a_m - R), (a_1 + R, a_2 + R, \dots a_m + R)]$

$$\overline{B(a,R)} \subset \text{Куб}(a,R) \subset \overline{B(a,\sqrt{m}R)}$$

Доказательство. Докажем 1: $\overline{B(a,R)} \subset \text{Куб}(a,R)$

$$x \in \overline{B(a,R)}$$

$$\forall i \quad |x_i - a_i| \le ||x-a|| \le R \Rightarrow x \in \text{Куб}(a,R)$$

Докажем 2: $\text{Куб}(a,R) \subset \overline{B(a,\sqrt{m}R)}$

$$x \in \text{Куб}(a,R) \quad ||x-a|| \le \sqrt{m} \max_{1\le i\le m} |x_i - a_i| \le \sqrt{m}R$$

□

2 Точки и множества в метрическом пространстве

В этом параграфе (X,ρ) - метрическое пространство, $a \in X, D \subset X$.

Определение. a — **внутренняя точка** множества D, если $\exists U(a) : U(a) \subset D$
$\exists r > 0 : B(a,r) \subset D$

Определение. D - **открытое множество** $\forall a \in D : a$ — внутренняя точка D.

Пример:

1. X - откр.
2. Ø- откр.
3. $B(a,r)$ - откр.

Доказательство. Докажем 3.
$x \in B(a,r)$, доказать: x - внутр. точка
Возьмём $R < r - \rho(a,x)$. Докажем, что $B(x,R) \subset B(a,r)$
$y \in B(x,R)$. Докажем, что $y \in B(a,r)$
$\rho(y,a) \le \rho(y,x) + \rho(x,a) < R + \rho(x,a) < r$ □

Теорема 1. *О свойствах открытых множеств.*

1. $(G_\alpha)_{\alpha\in A}$ *- семейство открытых множеств в* (X,ρ)
   Тогда $\bigcup\limits_{\alpha\in A} G_\alpha$ *- открыто в* X.
2. $G_1, G_2, \dots G_n$ *- открыто в* X.
   Тогда $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$ *- открыто в* X.

Доказательство. 1. Пусть $x \in \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha$
Тогда $\exists \alpha_0 \quad x \in G_{\alpha_0}$ — откр. $\exists r_0 : B(x,r_0) \subset G_{\alpha_0} \Rightarrow B(x,r_0) \subset \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha$

2. $x \in \prod_{i=1}^{n} G_i \Rightarrow \forall i \in \{1 \dots n\} \quad x \in G_i \Rightarrow \exists r_i > 0 : B(x, r_i) \subset G_i$
   $r := min(r_1 \dots r_n)$
   $\forall i \quad B(x, r) \subset G_i$, т.е. $B(x, r) \subset \bigcap G_i$

$\square$

Примечание. Для $n = \infty$ не выполняется: $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ - откр. в $\mathbb{R}$
$\bigcup_{n=1}^{+\infty}(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\}$ не откр. в $\mathbb{R}$

Определение. **Внутренность** D $Int(D) = \{x \in D : x$ — внутр. точка $D\}$

Примечание.

1. $IntD$ - откр. множество
2. $IntD = \bigcup\limits_{\substack{D \supset G \\ G - \text{открыт}}}$ — максимальное открытое множество, содержащееся в D
3. D — откр. в $X \Leftrightarrow D = IntD$

Определение. a — **предельная точка** множества D, если

$$\forall \dot{U}(a) \;\; \dot{U}(a) \cap D \neq \varnothing$$

Пример: $D = (0, 1), X = \mathbb{R}$

a	Пред. точка?
-1	Нет, $B(-1, \frac{1}{2}) \cap D = \varnothing$
$\frac{1}{2}$	Да, $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \subset D$
0	Да, $B(0, \frac{1}{2}) \cap D = (0, \frac{1}{2})$

Примечание. a - пред. точка D

1. $\forall U(a) \quad U(a) \cap D$ - бесконечное
2. $\exists (x_n)$ — последовательность точек D, $x_n \underset{n \to +\infty}{\to} a$

Определение. a — **изолированная точка** D, если $a \in D$ и a — не предельная, то есть:

$$\exists U(a) \quad U(a) \cap D = \{a\}$$

Пример — $\mathbb{N}$

Определение. D — **замкнутое множество**, если оно содержит все свои предельные точки.

Пример: $X, \varnothing, [0, 1], \overline{B(a, R)}, \{a\}$ — замкнутые
Пример: $(0, 1)$ — в $\mathbb{R}$ незамкнутое

Теорема 2. *D — замкнуто $\Leftrightarrow D^c = X \setminus D$ (дополнение) — открыто.*

Доказательство. Докажем $\Rightarrow$: D — замкн. $\Rightarrow^?$ $X \setminus D$
$x \in X \setminus D \Rightarrow x$ — не пред. точка D, т.к. D содержит все свои пред. точки и $x \notin D$
$\Rightarrow \exists r : B(x, r) \subset X \setminus D$
Докажем $\Leftarrow$: $X \setminus D$ — откр., D — замкн.?, т.е. $\forall x \in \{$пр.точки D$\}$ $?x \in D$
Если $x \in D$ — тривиально.
$x \notin D \quad x \in X \setminus D$
$\exists U(x) \subset X \setminus D \Rightarrow x$ - не пред. точка $\square$

Примечание. Если D — не замкнуто, то это НЕ значит, что D — открыто, например $(0, 1]$ — не замкнуто и не открыто.

Теорема 3. *О свойствах замкнутых множеств.*

1. $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ *- семейство открытых множеств в* (X, ρ)
   Тогда $\bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$ *- открыто в* X.
2. $G_1, G_2, \dots G_n$ *- открыто в* X.
   Тогда $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$ *- открыто в* X.

Доказательство. 1. $x_0 \in \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$

$\exists \alpha_0 : x_0 \in G_{\alpha_0}$

G_{α_0} — открыто $\Rightarrow \exists U(x_0) \subset G_{\alpha_0} \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow x_0$ — внтуренняя точка $\bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$ — открыто, т.к. в нём все точки внутренние.

2. $x_0 \in \bigcap\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$

$\forall \alpha \in A : x_0 \in G_\alpha$

$\forall \alpha \in A \;\; G_\alpha$ — открыто $\Rightarrow \exists B_\alpha(x_0, r_\alpha) \subset G_\alpha$

$\forall x_0 : \exists U(x_0) = B(x_0, \min\limits_{\alpha} r_\alpha) \subset \bigcap\limits_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow x_0$ — внутренняя точка $\bigcap\limits_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow \bigcap\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$ — открыто, т.к. в нём все точки внутренние.

□