

# 1 Определения

## 1.1 Упорядоченная пара

Для некоторого множества  $X$  и  $I$  - множество “индексов”, тогда  $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$  - **семейство элементов**  $X$ . ( $\forall \alpha \in I \ x_\alpha \in X$ )

**Упорядоченная пара** — семейство из двух элементов, построенная при  $I = \{1, 2\}$ . Обозначается  $(a, b)$ .

## 1.2 Декартово произведение

**Декартово произведение** двух множеств — множество всех упорядоченных пар элементов этих множеств.  $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$

Кроме того, декартово произведение можно обобщить для произвольного числа множеств.

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2 \dots a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2 \dots a_n \in A_n\}$$

## 1.3 Аксиомы вещественных чисел

### 1.3.1 Аксиомы поля

В множестве  $\mathbb{R}$  определены две операции, называемые сложением и умножением, действующие из  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$  ( $+, \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ), удовлетворяющие следующим свойствам:

**Аксиомы сложения** (здесь и далее  $\forall a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$ ):

1.  $a + b = b + a$  — коммутативность
2.  $(a + b) + c = a + (b + c)$  — ассоциативность
3.  $\exists \mathbf{0} : \mathbf{0} + a = a$
4.  $\exists a' : a + a' = \mathbf{0}$

**Аксиомы умножения:**

1.  $ab = ba$  — коммутативность
2.  $(ab)c = a(bc)$  — ассоциативность
3.  $\exists \mathbf{1} \neq \mathbf{0} : \forall a \in \mathbb{R} : a \cdot \mathbf{1} = a$
4.  $\forall a \neq \mathbf{0} : \exists \tilde{a} : a \cdot \tilde{a} = \mathbf{1}$

**Аксиома комбинации сложения и умножения:**

1.  $(a + b)c = ac + bc$  — дистрибутивность

**Поле** — множество, в котором определены операции  $+, \cdot$ , удовлетворяющие группе аксиом

I. Например,  $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{F}_3$

### 1.3.2 Аксиомы порядка

1.  $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y$  или  $y \leq x$
2.  $x \leq y; y \leq x \Rightarrow x = y$
3.  $x \leq y; y \leq z \Rightarrow x \leq z$  — транзитивность
4.  $x \leq y \Rightarrow \forall z \in \mathbb{R} : x + z \leq y + z$
5.  $0 \leq x; 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy$

**Упорядоченное поле** — множество, для которого выполняются аксиомы групп I и II.

$\mathbb{F}_3, \mathbb{C}$  — не упорядоченные поля

$\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathcal{R}$  — упорядоченные поля

## 1.4 Аксиома Кантора, аксиома Архимеда

### 1.4.1 Аксиома Архимеда

$$\forall x, y > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : nx > y$$

Следствие: существуют сколько угодно большие натуральные числа:

$$\forall y \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : n > y$$

**Архимедовы поля** — упорядоченные поля, в которых выполняется Аксиома Архимеда.

$\mathcal{R}$  — не архимедово поле

$\mathbb{R}, \mathbb{Q}$  — архимедовы поля

### 1.4.2 Аксиома Кантора

Для последовательности вложенных отрезков  $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$  ( $\forall n \in \mathbb{N} a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ )

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$$

$\mathbb{Q}$  не удовлетворяет этой аксиоме, в отличие от  $\mathbb{R}$ .

## 1.5 Пополненное множество вещественных чисел, операции и порядок в нем

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  — пополненное множество вещественных чисел.

Свойства ( $\forall x \in \mathbb{R}$ ):

- $-\infty < +\infty$
- $\pm\infty \cdot \pm\infty = +\infty$
- $\pm\infty \cdot \mp\infty = -\infty$
- $-\infty < x < +\infty$
- $x \pm \infty = \pm\infty$

- $\pm\infty \pm \infty = \pm\infty$
- $\pm\infty \mp \infty$  — не определено

Для  $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$

- $x \cdot \pm\infty = \pm\infty$

## 1.6 Максимальный элемент множества

$M \in A$  называется **максимальным элементом** множества  $A$ , если  $\forall a \in A \quad a \leq M$

## 1.7 Последовательность

$x : \mathbb{N} \rightarrow Y$  — **последовательность**

## 1.8 Образ и прообраз множества при отображении

Для  $A \subset X, f : X \rightarrow Y$  **образ** — множество  $\{f(x), x \in A\} \subset Y$  — обозначается  $f(A)$

Для  $B \subset Y$  **прообраз** —  $\{x \in X : f(x) \in B\}$  — обозначается  $f^{-1}(B)$

## 1.9 Инъекция, сюръекция, биекция

**Сюръекция** — такое отображение  $f : X \rightarrow Y$ , что  $f(X) = Y$ , т.е.  $\forall y \in Y \quad f(x) = y$  имеет решение относительно  $x$ .

**Инъекция** — такое отображение  $f : X \rightarrow Y$ , что  $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \quad f(x_1) \neq f(x_2)$ , т.е.  $\forall y \in Y \quad f(x) = y$  имеет не более одного решения относительно  $x$ .

**Биекция** — отображение, являющееся одновременно сюръекцией и инъекцией, т.е.  $\forall y \in Y \quad f(x) = y$  имеет ровно одно решение относительно  $x$ .

## 1.10 Векторнозначная функция, ее координатные функции

Если  $F : X \rightarrow \mathbb{R}^m; x \mapsto F(x) = (F_1(x), \dots, F_m(x))$ , то  $F$  — **векторнозначная функция** (значения функции — вектора)

$F_1(x) \dots F_m(x)$  — координатные функции отображения  $F$

## 1.11 График отображения

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$

## 1.12 Композиция отображений

$f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ , тогда **композиция**  $f$  и  $g$  (обозначается  $g \circ f$ ) — такое отображение, что  $g \circ f : X \rightarrow Z, x \mapsto g(f(x))$ .

Также возможно определение, которое допускает  $g : Y_1 \rightarrow Z, Y_1 \supset Y$

## 1.13 Сужение и продолжение отображений

Для  $g : X \rightarrow Y \quad f$  — **сужение**  $g$  на множество  $A$ , если  $f : A \rightarrow Y, A \subset X$ .

$g$  называется **продолжением**  $f$ .

### 1.14 Предел последовательности (эпсилон-дельта определение)

Если для  $(x_n), a \in \mathbb{R}$  выполняется  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N |x_n - a| < \varepsilon$ , то  $a$  — предел последовательности  $(x_n)$ , обозначается  $x_n \rightarrow a$  или  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

### 1.15 Окрестность точки, проколота окрестность

Окрестность точки  $a = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$ , обозначается  $U_\varepsilon(a)$

Проколота окрестность точки  $a = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ , обозначается  $\dot{U}_\varepsilon(a)$

### 1.16 Предел последовательности (определение на языке окрестностей)

$$\forall U(a) \exists N \forall n > N x_n \in U(a)$$

### 1.17 Метрика, метрическое пространство, подпространство

На множестве  $X$  отображение  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  называется метрикой, если выполняются свойства 1-3:

1.  $\forall x, y \rho(x, y) \geq 0; \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2.  $\forall x, y \rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. Неравенство треугольника:  $\forall x, y, z \in X \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

Метрическое пространство — упорядоченная пара  $(X, \rho)$ , где  $X$  — множество,  $\rho$  — метрика на  $X$ .

Подпространством метрического пространства  $(X, \rho)$  называется  $(A, \rho|_{A \times A})$ , если  $A \subset X$

### 1.18 Шар, замкнутый шар, окрестность точки в метрическом пространстве

Шар (открытый шар)  $B(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) < r\}$

Замкнутый шар  $B(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) \leq r\}$

Окрестность точки  $a$  в метрическом пространстве:  $B(a, \varepsilon) \Leftrightarrow U(a)$ .

### 1.19 Линейное пространство

Если  $K$  — поле ( $K = \mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ ),  $X$  — множество, то  $X$  называется линейным пространством над полем  $K$  (и тогда  $K$  называется полем скаляров), если определены следующие две операции:

1.  $+: X \times X \rightarrow X$  — сложение векторов
2.  $\cdot: K \times X \rightarrow X$  — умножение векторов на скаляры

Для этих операций выполняются соответствующие аксиомы (здесь  $A, B, C \in X; a, b \in K$ ):

#### 1.19.1 Аксиомы сложения векторов

1.  $A + B = B + A$
2.  $A + (B + C) = (A + B) + C$
3.  $\exists 0 \in X : A + 0 = A$
4.  $\exists -A \in X : A + (-A) = 0$  — обратный элемент

### 1.19.2 Аксиомы умножения векторов на скаляры

1.  $(A + B) \cdot a = A \cdot a + B \cdot a$
2.  $A \cdot (a + b) = A \cdot a + A \cdot b$
3.  $(ab) \cdot A = a(b \cdot A)$
4.  $\exists 1 \in K : 1 \cdot A = A$

### 1.20 Норма, нормированное пространство

**Норма** - отображение  $X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$ , если  $X$  - линейное пространство (над  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ ) и выполняется следующее:

1.  $\forall x \quad \|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2.  $\forall x \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
3. Неравенство треугольника:  $\forall x, y \in X \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

**Нормированное пространство** — упорядоченная пара  $(X, \|\cdot\|)$ , где  $\|\cdot\|$  - норма

### 1.21 Ограниченное множество в метрическом пространстве

$A \subset X$  — **ограничено**, если  $\exists x_0 \in X \quad \exists R > 0 \quad A \subset B(x_0, R)$ , т.е. если  $A$  содержится в некотором шаре в  $X$ .

### 1.22 Внутренняя точка множества, открытое множество, внутренность

$a$  — **внутренняя точка** множества  $D$ , если  $\exists U(a) : U(a) \subset D$ , т.е.  $\exists r > 0 : B(a, r) \subset D$

$D$  — **открытое множество**, если  $\forall a \in D : a$  — внутренняя точка  $D$

**Внутренностью** множества  $D$  называется  $Int(D) = \{x \in D : x \text{ — внутр. точка } D\}$

### 1.23 Предельная точка множества

$a$  — **предельная точка** множества  $D$ , если  $\forall \dot{U}(a) \quad \dot{U}(a) \cap D \neq \emptyset$

### 1.24 Замкнутое множество, замыкание, граница

$D$  — **замкнутое множество**, если оно содержит все свои предельные точки.

**Замыканием** множества  $D$  называется  $\overline{D} = D \cup (\text{множество предельных точек } D)$

**Граница** множества — множество его граничных точек. Обозначается  $\partial D = \overline{D} \setminus Int D$

### 1.25 Изолированная точка, граничная точка

$a$  — **изолированная точка**  $D$ , если  $a \in D$  и  $a$  — не предельная.

$a$  — **граничная точка**  $D$ , если  $\forall U(a) \quad U(a)$  содержит точки как из  $D$ , так и из  $D^c$

### 1.26 Описание внутренности множества

1.  $Int D$  – открыто
2.  $Int D = \bigcup_{\substack{D \supset G \\ G - \text{открыт}}} G$  – максимальное открытое множество, содержащееся в  $D$
3.  $D$  – открыто в  $X \Leftrightarrow D = Int D$

### 1.27 Описание замыкания множества в терминах пересечений

$\overline{D} = \bigcap_{\substack{F \supset D \\ F - \text{замкн.}}} F$  – минимальное (по включению) замкнутое множество, содержащее  $D$ .

Если  $D$  замкнуто,  $\overline{D} = D$ .

### 1.28 Верхняя, нижняя границы; супремум, инфимум

$E \subset \mathbb{R}$ .  $E$  – огр. сверху, если  $\exists M \in \mathbb{R} \forall x \in E \ x \leq M$ . Кроме того, всякие такие  $M$  называются **верхними границами**  $E$ .

Аналогично ограничение снизу.

Для  $E$  – огр. сверху **супремум** ( $\sup E$ ) – наименьшая из верхних границ  $E$ .

Для  $E$  – огр. снизу **инфимум** ( $\inf E$ ) – наибольшая из нижних границ  $E$ .

### 1.29 Техническое описание супремума

$$b = \sup E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E \ x \leq b \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in E \ b - \varepsilon < x \end{cases}$$

### 1.30 Последовательность, стремящаяся к бесконечности

$$x_n \rightarrow +\infty \iff \forall E > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ x_n > E$$

$$x_n \rightarrow -\infty \iff \forall E \ \exists N \ \forall n > N \ x_n < E$$

$$x_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow |x_n| \rightarrow +\infty$$

### 1.31 Компактное множество

$K \subset X$  – **компактное**, если для любого открытого покрытия  $\exists$  конечное подпокрытие

$$\Leftrightarrow \exists \alpha_1 \dots \alpha_n \quad K \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$$

### 1.32 Секвенциальная компактность

Секвенциально компактным называется множество  $A \subset X : \forall$  посл.  $(x_n)$  точек  $A$   $\exists$  подпол.  $x_{n_k}$ , которая сходится к точке из  $A$

### 1.33 Определения предела отображения (3 шт)

#### 1.33.1 По Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D \ 0 < \rho^X(a, x) < \delta \implies \rho^Y(f(x), A) < \varepsilon$$

### 1.33.2 На языке окрестностей

$$\forall U(A) \exists V(a) \forall x \in \dot{V}(a) f(x) \in U(A)$$

### 1.33.3 По Гейне

$\forall(x_n)$  — посл. в  $X$ :

1.  $x_n \rightarrow a$
2.  $x_n \in D$
3.  $x_n \neq a$

$$f(x_n) \rightarrow A$$

## 1.34 Определения пределов в $\overline{\mathbb{R}}$

## 2 Теоремы

### 2.1 Законы де Моргана

Пусть  $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$  - семейство множеств,  $Y$  - множество. Тогда:

1.  $Y \setminus (\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha)$
2.  $Y \setminus (\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha)$

### 2.2 Неравенство Коши-Буняковского, евклидова норма в $\mathbb{R}^m$

#### 2.2.1 Неравенство Коши-Буняковского

$$(\sum a_i b_i)^2 \leq (\sum a_i^2)(\sum b_k^2)$$

#### 2.2.2 Евклидова норма в $\mathbb{R}^m$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_i^m x_i^2}$$

### 2.3 Аксиома Архимеда. Плотность множества $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$

#### 2.3.1 Аксиома Архимеда

$$\forall x, y > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : nx > y$$

#### 2.3.2 Плотность множества $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$

$$\mathbb{Q} \text{ плотно в } \mathbb{R} \stackrel{def}{\iff} \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b \quad (a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$$

В любом интервале в  $\mathbb{R}$  содержится число  $\in \mathbb{Q}$ .

## 2.4 Неравенство Бернулли

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad x > -1, n \in \mathbb{N}$$

## 2.5 Единственность предела и ограниченность сходящейся последовательности

### 2.5.1 Единственность предела

$(X, \rho)$  — метрическое пр-во,  $a, b \in X$ ,  $(x_n)$  — послед. в  $X$ ,  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$ ,  $x_n \rightarrow b$ , тогда  $a = b$

### 2.5.2 Ограниченность сходящейся последовательности

Если  $(x, \rho)$  — метрическое пр-во,  $(x_n)$  — послед. в  $X$ ,  $x_n$  сходится, тогда  $x_n$  — ограничена.

## 2.6 Теорема о предельном переходе в неравенствах для последовательностей и для функций

Если  $(x_n), (y_n)$  — вещественные последовательности  $x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b, \exists N \forall n > N x_n \leq y_n$ , тогда  $a \leq b$ .

Если  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a$  — предельная точка  $X$ , и  $\forall x \in X f(x) \leq g(x)$ . Тогда  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

## 2.7 Теорема о двух городских

Если  $(x_n), (y_n), (z_n)$  — вещ. посл.,  $\forall n \ x_n \leq y_n \leq z_n, \lim x_n = \lim z_n = a$ , тогда  $\exists \lim y_n = a$

## 2.8 Бесконечно малая последовательность

$(x_n)$  — вещ. посл. называется бесконечно малой, если  $x_n \rightarrow 0$

## 2.9 Теорема об арифметических свойствах предела последовательности в нормированном пространстве и в $\mathbb{R}$

Если  $(X, \|\cdot\|)$  — норм. пр-во,  $(x_n), (y_n)$  — посл. в  $X$ ,  $\lambda_n$  — посл. скаляров, и  $x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0, \lambda_n \rightarrow \lambda_0$ , тогда:

$$1. \ x_n \pm y_n \rightarrow x_0 \pm y_0$$

$$2. \ \lambda_n x_n \rightarrow \lambda x_0$$

$$3. \ \|x_n\| \rightarrow \|x_0\|$$

Для  $(x_n), (y_n)$  — вещ. посл.,  $\forall n \ y_n \neq 0, y_0 \neq 0$ :

$$4. \ \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{x_0}{y_0}$$

## 2.10 Неравенство Коши-Буняковского в линейном пространстве, норма, порожденная скалярным произведением

### 2.10.1 Неравенство Коши-Буняковского в линейном пространстве

$$\forall x, y \in X \quad |\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$



### 2.10.2 Норма, порожденная скалярным произведением

Для лин. пространства  $X$ , скалярного произведения  $\langle \cdot, \cdot \rangle$   
 $\rho : X \rightarrow \mathbb{R} \quad \rho(x) = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  — норма

### 2.11 Леммы о непрерывности скалярного произведения и покоординатной сходимости в $\mathbb{R}^m$

#### 2.11.1 О непрерывности скалярного произведения

$X$  — лин. пространство со скалярным произведением,  $\|\cdot\|$  — норма, порожденная скалярным произведением.

Тогда  $\forall (x_n) : x_n \rightarrow x, \forall (y_n) : y_n \rightarrow y \quad \langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$

#### 2.11.2 О покоординатной сходимости в $\mathbb{R}^n$

$(x^{(n)})$  — последовательность векторов в  $\mathbb{R}^m$ , где задано евклидово скалярное пространство и норма.

Тогда  $(x^{(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad x_i^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_i$

### 2.12 Открытость открытого шара

$\forall x \in B(a, r) \quad x$  — внутренняя точка  $B(a, r)$

### 2.13 Теорема о свойствах открытых множеств

1.  $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$  — семейство открытых множеств в  $(X, \rho)$

Тогда  $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$  — открыто в  $X$ .

2.  $G_1, G_2, \dots, G_n$  — открыто в  $X$ .

Тогда  $\bigcap_{i=1}^n G_i$  — открыто в  $X$ .

*Примечание.* В 1. семейство может быть бесконечным, а в 2. — нет.

### 2.14 Теорема о связи открытых и замкнутых множеств, свойства замкнутых множеств

$D$  — замкнуто  $\Leftrightarrow D^c = X \setminus D$  (дополнение) — открыто.