1 Линейные операторы

1.1 Линейные операторы и их матричная запись, примеры.

$\triangleleft \varphi : X \to Y$, X, Y — ЛП, $\dim X = n, \dim Y = m$

Определение. Отображение φ называется линейным, если

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad \varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$$

$$\forall \alpha \in K \quad \varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$$

Определение. Отображение φ, обладающее свойством линейности называется **линейным оператором** (ЛОп)

Пример.

- $\Theta : \Theta x = 0_Y$ — нулевой оператор
- $\mathcal{I} : \mathcal{I}x = x$ — единичный *(тождественный)* оператор
- $X = L_1 \dot{+} L_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x \in X \;\; \exists! x_1 \in L_1, x_2 \in L_2 : x = x_1 + x_2$

  Проектор:

$$\mathcal{P}_{L_1}^{||L_2} : X \to L_1 \quad \mathcal{P}_{L_1}^{||L_2} x = x_1$$

$$\mathcal{P}_{L_2}^{||L_1} : X \to L_2 \quad \mathcal{P}_{L_2}^{||L_1} x = x_2$$

- $X = C^1[-1, 1]$ — первая производная $\exists$ и непрерывна

$$\forall f \in X \quad (\varphi f)(x) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)K(x,t)dt$$

  $K(x,t)$ — интегральное ядро, например $x^2 + tx$

$\{e_j\}_{j=1}^n$ — базис X, $\{h_k\}_{k=1}^m$ — базис Y, $\varphi(e_j) = \sum\limits_{k=1}^{m} a_j^k h_k$

Определение. Набор коэффициентов $||a_j^k||$ образует матрицу $m \times n$, которая называется **матрицей ЛОп** в паре базисов $\{e_j\}$ и $\{h_k\}$

1.2 Пространство линейных операторов.

$\triangleleft \varphi, \psi : X \to Y$ — ЛОп
$\chi = \varphi + \psi$, если $\forall x \in X \quad \chi(x) = (\varphi + \psi)x = \varphi(x) + \psi(x)$
$\chi = \alpha\varphi$, если $\forall x \in X \quad \chi(x) = (\alpha\varphi)x = \alpha\varphi(x)$

$$\dim \mathcal{L}(X, Y) = \dim X \cdot \dim Y = m \cdot n$$

1.3 Алгебра. Примеры. Изоморфизм алгебр.

Алгебра — модуль над коммутативным кольцом с единицей, являющийся кольцом.
Кольцо — множество, на котором заданы бинарные операции $+$ и $\cdot$ с следующими свойствами:

1. $a + b = b + a$
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$
3. $\exists 0 \in R : \forall x \in R : x + 0 = 0 + x = x$
4. $\forall x \in R : \exists (-x) \in R : x + (-x) = (-x) + x = 0$
5. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
6. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
7. $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$

Коммутативное кольцо — кольцо с коммутативным умножением: $a \cdot b = b \cdot a$
Кольцо с единицей — кольцо с нейтральным элементом по умножению: $\exists 1 \in R : a \cdot 1 = a$
Модуль над кольцом *(коммутативным, с единицей)* R — множество M с операциями:

1. $+ : M \times M \to M$
   (a) $a + b = b + a$
   (b) $a + (b + c) = (a + b) + c$
   (c) $\exists 0 \in R : \forall x \in R : x + 0 = 0 + x = x$
   (d) $\forall x \in R : \exists (-x) \in R : x + (-x) = (-x) + x = 0$
2. $\cdot : M \times R \to M$
   (a) $(r_1 r_2)m = r_1(r_2 m)$
   (b) $1m = m$
   (c) $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$
   (d) $(r_1 + r_2)m = r_1 m + r_2 m$

Примеры:

1. $\mathbb{R}^3$ с векторным произведением — алгебра над $\mathbb{R}$
2. $\mathbb{C}$ — алгебра над $\mathbb{R}$
3. $\mathbb{H}$ *(кватернионы)*
4. Многочлены

Изоморфизм алгебр — биекция $F : A \to B$, где A и B — алгебры, сохраняющая "$+$" и "$\cdot$":

1. $F(kx) = kF(x)$
2. $F(x + y) = F(x) + F(y)$
3. $F(xy) = F(x)F(y)$

Из этого следует, что $F(0_X) = 0_Y$

1.4 Алгебра операторов и матриц.

Умножение ЛОП: $(\mathcal{B} \cdot \mathcal{A})x = \mathcal{B}(\mathcal{A}x)$
Умножение матриц: $(A \cdot B)_{ik} = \sum\limits_j a_{ij} b_{jk}$

Теорема 1.

$$\underbrace{\mathcal{C}}_{C} = \underbrace{\mathcal{B}}_{B} \underbrace{\mathcal{A}}_{A} \Leftrightarrow C = BA$$

Доказательство.

$$\mathcal{C}e_i = \mathcal{B}(\mathcal{A}e_i) = \mathcal{B}\left(\sum_j a_{ji} e_j\right) = \sum_j a_{ji} \mathcal{B} e_j = \sum_j a_{ji} \sum_k b_{kj} e_k$$

$$c_{il} = (\mathcal{C}e_i)_l = \sum_j a_{ji} b_{lj} \Rightarrow C = BA$$

□

Пространство ЛОП $\mathcal{F} : X \to X$ — алгебра, пространство квадратных матриц $\mathbb{R}_n^n$ — алгебра.

1.5 Обратная матрица: критерий обратимости, метод Гаусса вычисления обратной матрицы.

В алгебре A выполняется $a_1 \cdot a_2 = e$, где e — единичный элемент матрицы. Тогда:

1. a_1 — **левый обратный** элемент для a_2
2. a_2 — **правый обратный** элемент для a_1

Если a_1 — и левый, и правый обратный к a_2, то он называется **обратным** элементом к a_2.

Теорема 2. $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$

Доказательство. “$\Leftarrow$”

$$\det A \neq 0 \overset{?}{\Rightarrow} \exists A^{-1} : AA^{-1} = E, A^{-1}A = E$$

$$\sum_j a_{ij} a_{jk}^{-1} = \delta_{ik}$$

Это система Крамера, т.к. $\det A = 0 \overset{def}{\Longrightarrow}$ вектора $\in A$ ЛНЗ $\Rightarrow$ единственное решение.

“$\Rightarrow$” то же самое, но наоборот.  □

$$\left[\ A \mid E\ \right] \sim \left[\ E \mid A^{-1}\ \right]$$

Доказательство.

$$\left[\ A \mid E\ \right] = \left[\ T_1 A \mid T_1 E\ \right] = \left[\ T_2 T_1 A \mid T_2 T_1 E\ \right] = \ldots = \left[\ T_n \ldots T_1 A \mid T_n \ldots T_1\ \right] = \left[\ E \mid T_n \ldots T_1\ \right]$$

$$\lhd T_n \ldots T_1 A = E \Rightarrow A^{-1} = T_n \ldots T_1$$

□

Здесь T_i — матрица элементарного преобразования.

1.6 Обратная матрица: критерий обратимости, вычисление обратной матрицы методом присоединенной матрицы.

Критерий обратимости: Дано выше. (1.5, стр. 3)

Теорема 3.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}^T$$

Доказательство. $AB = E \Rightarrow B = \frac{1}{\det A}\tilde{A}^T$ — надо доказать.

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i \beta_k^j = \delta_k^i$$

$$]\delta_{k_0}^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1_{k_0} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^T = b$$

$$\beta_{k_0}^j = \xi^j \quad \alpha_j^i = a_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \xi^j = b \quad \xi^j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$$

$$\Delta_j = \det A(a_j \to b)$$

□

$A(a_j \to b)$ — матрица A, где заменили j-тый вектор на b

$$\det A(a_j \to b) = 0 \cdot M_j^1 + \ldots + 1 \cdot M_j^k + \ldots + 0 = M_j^k$$

$$b_{jk} = \frac{(\tilde{A}^T)_k^j}{\det A} \Rightarrow B = \frac{\tilde{A}_k^j}{\det A}$$

1.7 Ядро и образ линейного оператора. Теорема о ядре и образе. Функции матриц и операторов.

$\lhd \varphi : X \to Y$

Определение. Ядро φ :

$$\operatorname{Ker} \varphi = \{x \in X : \varphi x = 0\}$$

Примечание. $\operatorname{Ker} \varphi \subset X$

Лемма 1. *Ker* φ *— ЛП*

Определение. Образ φ:

$$\operatorname{Im} \varphi = \{y \in Y : \exists x : \varphi(x) = y\}$$

Примечание.

$$\operatorname{Im} \varphi \subset Y$$

Лемма 2. *Im* φ *— ЛП*

Теорема 4. О ядре и образе

$$]\varphi : X \to X \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi = \dim X$$

Доказательство. $]\dim\operatorname{Ker}\varphi = K$
$]\{e_1\ldots e_k\}$ — базис $\operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow \varphi(e_j) = 0\ \ \forall j = 1..k$
$\lhd\{e_1\ldots e_k; e_{k+1}\ldots e_n\}$ — базис X
$\lhd x = \sum\limits_{j=1}^{n}\xi^j e_j \quad \lhd\varphi(x) = \sum\limits_{j=1}^{n}\xi^j\varphi(e_j) = \sum\limits_{j=k+1}^{n}\xi^j\varphi(e_j)$
$\{\varphi(e_{k+1})\ldots\varphi(e_n)\}$ — полный для Im, т.к. любой $x\in\operatorname{Im}$ можно по нему разложить. Докажем ЛНЗ от обратного:

$]\{\varphi(e_j)\}_{j=k+1}^{n}$ — ЛЗ $\Rightarrow \exists\alpha^j : \sum\limits_{j=k+1}^{n}\alpha^j\varphi(e_j) = 0 \Rightarrow \varphi\left(\sum\limits_{j=k+1}^{n}\alpha^j e_j\right) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases}\text{или } \sum\limits_{j=k+1}^{n}\alpha^j e_j \in \operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow \text{ЛК } e_{k+1}\ldots e_n \text{ разложима по } e_1\ldots e_k \text{ — противоречие}\\ \text{или } \sum\limits_{j=k+1}^{n}\alpha^j e_j = 0 \Rightarrow \alpha^j = 0 \Rightarrow \text{ ЛНЗ}\end{cases}$$

$\Rightarrow \{\varphi(e_j)\}_{j=k+1}^{n}$ — базис $\operatorname{Im}\varphi$. □

1.8 Обратный оператор. Критерий существования обратного оператора.

Определение. Обратным к оператору φ называется оператор φ^{-1}:

$$\varphi^{-1}\varphi = \varphi\varphi^{-1} = \mathcal{I}$$

Теорема 5. Оператор φ обратим, если $\exists$ базис, в котором его матрица невырождена

Теорема 6. $\lhd\varphi : X \to X$
$\exists\varphi^{-1} \Leftrightarrow \dim\operatorname{Im}\varphi = \dim X$ или $\dim\operatorname{Ker}\varphi = 0$

Доказательство. $\dim\operatorname{Im}\varphi = \dim X \Leftrightarrow \operatorname{Im}\varphi \simeq X \Rightarrow \varphi$ — сюръекция, $\dim\operatorname{Ker}\varphi = 0 \Rightarrow \forall y\ \ \exists x : \varphi x = y \Rightarrow \varphi$ — инъекция □

2 Тензорная алгебра

2.1 Преобразование координат векторов X и X^* при замене базиса.

$\lhd\{e_j\}$ — базис X
$\lhd\{\tilde{e}_k\}$ — базис X^*
$\Rightarrow \forall k\ \ \tilde{e}_k = \sum_{j=1}^{n} t_k^j e_j$

Определение. Набор $T = ||t_j^i||$ образует матрицу, которая называется **матрицей перехода** от базиса $\{e_j\}$ к базису $\{\tilde{e}_k\}$

Примечание. $\lhd E = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \ldots & e_n\end{bmatrix}, \tilde{E} = \begin{bmatrix}\tilde{e}_1 & \tilde{e}_2 & \ldots & \tilde{e}_n\end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{E} = ET$

Лемма 3. *$]\xi$ — координаты вектора x в базисе $\{e_j\}$*
$]\tilde{\xi}$ — координаты вектора x в базисе $\{\tilde{e}_k\}$
Тогда $\xi = T\tilde{\xi}$ или $\tilde{\xi} = S\xi, S = T^{-1}$

Доказательство. $x = \sum\limits_{k=1}^{n}\tilde{\xi}^k\tilde{e}_k = \sum\limits_{k=1}^{n}\tilde{x}^k\sum\limits_{j=1}^{n}t_k^j e_j = \sum\limits_{j=1}^{n}(\sum\limits_{k=1}^{n}\tilde{\xi}^k t_k^j)e_j = \sum\limits_{j=1}^{n}\xi^j e_j \Rightarrow \xi = T\tilde{\xi}$ □

Лемма 4. *$]\{f^l\}$ — базис X^*, сопряженный $\{e_j\}$, т.е. $f^l(e_j) = \delta^l_j$*
$]\{\tilde{f}^m\}$ — базис X^*, сопряженный $\{\tilde{e}_k\}$, т.е. $\tilde{f}^m(\tilde{e}_k) = \delta^k_m$
$]F = \begin{bmatrix} f^1 & f^2 & \dots & f^n \end{bmatrix}^T, \quad \tilde{F} = \begin{bmatrix} \tilde{f}^1 & \tilde{f}^2 & \dots & \tilde{f}^n \end{bmatrix}^T$
Тогда $F = T\tilde{F}$ или $f^l = \sum\limits_{m=1}^{n} t^l_m \tilde{f}^m$

Доказательство. $\lhd(\tilde{f}^m, \tilde{e}_k) = \delta^m_k = (\tilde{f}^m, \sum\limits_{j=1}^{n} t^j_k e_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} t^j_k (\tilde{f}^m, e_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} t^j_k \sum\limits_{l=1}^{n} a^m_l (f^l, e_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} t^j_k a^m_j$

$\Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{n} a^m_j t^j_k = \delta^m_k$ или $AT = I$ — единичная матрица $\Rightarrow A = T^{-1}$ □

Лемма 5. *$]\varphi$ — коэфф. ЛФ в $\{e_j\}$*
$]\tilde{\varphi}$ — коэфф. ЛФ в $\{\tilde{e}_k\}$
$\Rightarrow \tilde{\varphi} = \varphi T$

Доказательство. $]g$ — ЛФ, $\varphi_j = g(e_j) \quad \tilde{\varphi}_k = g(\tilde{e}_k)$

$$\varphi_k = g(\tilde{e}_k) = g\left(\sum_{j=1}^{n} t^j_k e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} t^j_k g(e_j) = \sum_{j=1}^{n} t^j_k \varphi_j$$

$\Rightarrow \tilde{\varphi} = \varphi T$ □

Итого:

$$\tilde{E} = ET \quad \tilde{F} = T^{-1}F \quad \tilde{\xi} = T^{-1}\xi \quad \tilde{\varphi} = \varphi T$$

2.2 Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса. Преобразование подобия.

$\lhd \overline{\mathcal{A}} : \overline{X} \to \overline{Y}, \mathcal{A} : X \to Y$
$\mathcal{A} \leftrightarrow A, \overline{\mathcal{A}} \leftrightarrow \overline{A}$
$\mathcal{X}$ — матрица перехода $\overline{X} \to X$, $\mathcal{Y}$ — матрица перехода $\overline{Y} \to Y$
$x \in X, y := \mathcal{A}x, \overline{x} := \mathcal{X}x, \overline{y} := \mathcal{Y}y$

$$\overline{A}\overline{x} = \overline{y} \Rightarrow Ax = y = \mathcal{Y}^{-1}\overline{y} = \mathcal{Y}^{-1}\overline{A}\overline{x} = \mathcal{Y}^{-1}\overline{A}\mathcal{X}x$$
$$\forall x \quad Ax = \mathcal{Y}^{-1}\overline{A}\mathcal{X}x \Leftrightarrow A = \mathcal{Y}^{-1}\overline{A}\mathcal{X}$$

2.3 Тензоры *(ковариантность, независимое от ПЛФ определение)*. Пространство тензоров.

Определение. Величины, которые преобразуются при замене базиса так же, как базисные векторы, называются **ковариантными** величинами.
Величины, которые преобразуются при замене базиса противоположным базисным векторам образом, называются **контравариантными** величинами.

Примечание. ξ — контрвариантная величина. Верхний индекс называется контравариантным, нижний — ковариантным.

$]W \in \Omega^p_q$ — ПЛФ (p, q)
$]\{e_j\}^n_{j=1}$ — базис X, $\{f^k\}^n_{k=1}$ — базис X^*

$$\Rightarrow \omega^{j_1 \dots j_n}_{i_1 \dots i_n} \overset{def}{=} W(e_{i_1} \dots e_{i_p} f^{j_1} \dots f^{j_q})$$

$$\{e_j\} \xrightarrow{T} \{\tilde{e}_k\} \quad \{f^l\} \xrightarrow{T^{-1}} \{\tilde{f}^m\}$$

Пусть в паре базисов $\{\tilde{e}_k\}$ и $\{\tilde{f}^m\}$ ПЛФ W имеет тензор $\tilde{w}_{s_1 \dots s_p}^{t_1 \dots t_q} = W(\tilde{e}_{s_1} \dots \tilde{e}_{s_p}, \tilde{f}^{t_1} \dots \tilde{f}^{t_q}) =$

$$= ⚠ W(t_{s_1}^{i_1} e_{i_1} \dots t_{s_p}^{i_p} e_{i_p}, \sigma_{j_1}^{t_1} f^{j_1} \dots \sigma_{j_q}^{t_q} f^{j_q}) =$$

$$= t_{s_1}^{i_1} \dots t_{s_p}^{i_p} \sigma_{t_1}^{j_1} \dots \sigma_{t_q}^{j_q} W(e_{s_1} \dots e_{s_p}, f^{t_1} \dots f^{t_q})$$

Определение.

1. **Вектором** называется величина, преобразующаяся по контравариантному закону
2. **Линейной формой** называется величина, преобразующаяся по ковариантному закону
3. **Тензором** типа (p, q) называется величина, преобразующаяся p раз по ковариантному закону и q раз по контравариантному.

- Сложение тензоров и умножение тензора на скаляр — поэлементное
- Нулевой элемент по сложению — тензор, принимающий значение 0 на любом входе
- Очевидно $w+\alpha v$ — тензор того же типа, что и w $\Rightarrow$ тензоры образуют линейное пространство $T_q^p, \dim T_q^p = p + q$

2.4 Свертка тензора.

Свертка:

$$\overset{k \wedge s}{\omega}{}_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n} = \sum_{m=1}^{n} \omega_{i_1 \dots \overset{s}{\cancel{m}} \dots i_p}^{j_1 \dots \overset{k}{\cancel{m}} \dots j_q}$$

Примечание. Операцию свертки можно выполнять только по индексам разных типов

Лемма 6. *Свертка сохраняет тензорную природу*

Лемма 7.

$$\overset{\overset{l \wedge m}{k \wedge s}}{\omega} = \overset{\overset{k \wedge s}{l \wedge m}}{\omega}$$

Доказательство. От перестановки мест слагаемых конечная сумма не меняется. $\square$

2.5 Транспонирование тензора.

Транспонирование
$t^{(st)} : \omega_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_s \dots j_t \dots j_q} \mapsto \omega_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_t \dots j_s \dots j_q}$

Примечание. Транспонировать можно только по индексам одного типа

Лемма 8. *Транспонирование сохраняет тензорную природу величины.*

2.6 Определитель линейного оператора. Внешняя степень оператора.

$\lhd \Lambda^p \quad \{^{i_1 \dots i_p}F\}_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n}$ — базис Λ^p

$$^{i_1 \dots i_p}F = f^{i_1} \wedge f^{i_2} \wedge \dots \wedge f^{i_p} \quad \dim \Lambda^p = C_n^p$$

$]\{x_i\}_{i=1}^n$ — набор векторов

$$\det\{x_1 \dots x_n\} := {}^{1 \dots n}F(x_1 \dots x_n)$$

$\lhd \Lambda_p \quad \{_{i_1 \dots i_p}F\})_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n}$ — базис Λ_p

$$\dim \Lambda_p = C_n^p \quad {}_{i_1 \dots i_p}F = \hat{x}_{i_1} \wedge \hat{x}_{i_2} \wedge \dots \wedge \hat{x}_{i_p} \simeq x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n$$

$]\{e_j\}_{j=1}^n$ — базис $X \Rightarrow x_i = \xi_i^{j_i} e_{j_i}$

$${}_{1 \dots n}F = \xi_1^{j_1} \xi_2^{j_2} \dots \xi_n^{j_n} (e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \dots \wedge e_{j_n}) = \sum_{(j_1 \dots j_n)} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} \xi_{j_1}^1 \dots \xi_{j_n}^n (e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n) =$$

$$= \det[\xi_{j_1}^1 \dots \xi_{j_n}^n](e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n)$$

Определение. **Определителем** набора векторов $\{x_i\}_{i=1}^n$ называется число $\det[x_1 \dots x_n]$, такое, что:

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n = \det[x_1 \dots x_n] e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$$

Лемма 9.

$$\textit{от } \Lambda^p \quad \det\{x_1 \dots x_n\} = \det[x_1 \dots x_n] \textit{ от } \Lambda_p$$

Доказательство.

$$\det\{x_1 \dots x_n\} = {}^{1 \dots n}F(x_1 \dots x_n) = \sum_{(j_1 \dots j_n)} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} \xi_1^{j_1} \xi_2^{j_2} \dots \xi_n^{j_n} e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n =$$

$$= \det\{x_1 \dots x_n\} e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$$

$$= \det[x_1 \dots x_n] e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$$

□

Определение. $\lhd \varphi : X \to X$
Внешней степенью φ^{Λ_p} оператора φ называется отображение:

$$\varphi^{\Lambda_p}(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n) = \varphi(x_1) \wedge \dots \wedge \varphi(x_p)$$

Примечание.

$$\varphi^{\Lambda_p} : \Lambda_p \to \Lambda_p$$

$\lhd p = n$

$$\varphi^{\Lambda_n}(e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n) = \varphi(e_1) \wedge \varphi(e_2) \wedge \dots \wedge \varphi(e_n) = a_1^{j_1} e_{j_1} \wedge \dots \wedge a_1^{j_n} e_{j_n} =$$

$$= a_1^{j_1} \dots a_n^{j_n} (e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_n}) = \sum_{(j_1 \dots j_n)} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} a_{j_1}^1 a_{j_2}^2 \dots a_{j_n}^n e_1 \wedge \dots \wedge e_n = \det A_\varphi e_1 \wedge \dots \wedge e_n$$

Определение. **Определителем** линейного оператора φ называется число, такое что:

$$\det \varphi = \det[\varphi(e_1) \wedge \dots \wedge \varphi(e_n)] = \det A_\varphi e_1 \wedge \dots \wedge e_n$$

Примечание.

$$\forall \omega \in \Lambda_n \quad \varphi^{\Lambda_n} \omega = \det \varphi \cdot \omega$$

$$\omega \in \Lambda_n \Rightarrow \omega = \alpha e_1 \wedge \dots \wedge e_n$$

$$\varphi^{\Lambda_n} \omega = \alpha \varphi^{\Lambda_n}(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) = \alpha \det \varphi e_1 \wedge \dots \wedge e_n = \det \varphi \cdot \omega$$

2.7 Независимость определителя оператора от базиса. Теорема умножения определителей.

Пример. $\det\varphi$ — инвариант

$$\varphi^{\Lambda_n}z = \det\varphi \cdot z \quad \forall z \in \Lambda_n$$
$$\det\varphi = \det A_\varphi \text{ — в некотором фиксированном базисе}$$
$$\tilde{A}_\varphi = T^{-1}A_\varphi T \quad \det\tilde{A}_\varphi = \det T^{-1}\det A_\varphi \det T = \det A_\varphi$$

Теорема 7.

$$\det(\varphi\psi) = \det\varphi\det\psi$$

Доказательство.

$$\lhd \det(\varphi\psi)e_1 \wedge \ldots \wedge e_n = (\varphi\psi)^{\Lambda_n}e_1 \wedge \ldots \wedge e_n = \varphi(\psi(e_1)) \wedge \ldots \wedge \varphi(\psi(e_n)) =$$
$$= \varphi^{\Lambda_n}(\psi(e_1) \wedge \ldots \wedge \psi(e_n)) = \det\varphi\det\psi e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$$

□

3 Спектральный анализ линейных операторов в конечномерных пространствах

3.1 Инварианты линейного оператора. Инвариантные подпространства.

Определение. **Инвариантном** линейного оператора φ называется его числовая функция значений, которая не зависит от выбора базиса

$\lhd\varphi : X \to X$ — автоморфизм

Определение. Подпространство L линейного пространства X называется **инвариантным подпространством** φ, если

$$\forall x \in L \quad \varphi x \in L$$

Пример. 1. $\varphi : X \to X$, тогда инвариантные подпрострнаства:

- X
- $\{0\}$

2. $\varphi = \Im, \quad \forall x \ \ \Im x = x \Rightarrow$ любое подпространство X — инвариантное

3. $\varphi = \Theta, \quad \forall x \ \ \Theta x = 0 \Rightarrow$ любое подпространство X — инвариантное

4. $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \Leftrightarrow A_\varphi = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} \triangleq diag\{\lambda_1 \ldots \lambda_n\}$

   $\lhd\{e_j\}$ — базис $X \Rightarrow \forall j \quad A_\varphi e_j = \lambda_j e_j \quad e_j \to \mathcal{L}\{e_j\}$ — инв.

   Всего 2^n инвариантных подпространств

5. $]X = L_1 \dot{+} L_2$

$$\forall x! = x_1 + x_2 \quad \varphi x = \mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2}x = x_1 \in L_1$$

   L_1 — инв., $\forall x \in L_1 \quad \mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2}x = x \quad \forall$ подпространство L_1 инвариантно

   L_2 — инв., $\forall x \in L_2 \quad \mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2}x = 0 \quad \forall$ подпространство L_2 инвариантно

3.2 Собственные векторы и собственные значения линейного оператора: основные определения и свойства.

$\varphi : X \to X$

Определение. $x \in X$ — **собственный вектор** φ, если

$$x \neq 0 \quad \varphi x = \lambda x, \quad \lambda \in K$$

λ — **собственное значение** φ, соответствующее x

Определение. **Спектр** $\sigma_\varphi = \{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$ — множество всех собственных значений вектора

Определение. $x \in X$ — **собственный вектор** φ, если этот вектор ненулевой и принадлежит одномерному инвариантному подпространству: $x \neq 0, x \in L^{(1)}$

Лемма 10. *Эти определения собственного вектора эквивалентны.*

Доказательство. Опр. 1 $\Rightarrow$ Опр. 2:
$\lhd x : \varphi x = \lambda x, L^{(1)} = \mathcal{L}(x)$

$$\forall y \in L^{(1)} \quad y = \beta x \Rightarrow \varphi y = \varphi \beta x = \beta \varphi x = \beta \lambda x$$

Опр. 2 $\Rightarrow$ Опр. 1:
$\lhd x \in L^{(1)} = \mathcal{L} v \overset{def}{\Longrightarrow} \varphi x \in L^{(1)}$

$$\forall y \in L^{(1)} \quad y = \alpha v \quad \varphi y = \alpha \varphi v = \beta v$$

□

Лемма 11. *Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям линейно независимы:*

$$\lambda_i \to x_i, \lambda_i \neq \lambda_{j \neq i} \Rightarrow \{x_i\} \text{ ЛНЗ}$$

Доказательство. По индукции:
База: $m = 1 \Rightarrow \{x_1\}$ ЛНЗ, т.к. $x_1 \neq 0$
Переход: $\{x_i\}_{i=1}^m$ — ЛНЗ, тогда $\sum \alpha_i x_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \ \ \forall i$

$$\lhd \{\alpha_i\} : \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = 0$$

$$0 = \mathcal{A} 0 = \mathcal{A} \left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i \right) = \sum \alpha_i \lambda_i x_i$$

$$0 = \lambda_{n+1} \left(\sum \alpha_i x_i \right)$$

Вычтем второе выражение из первого:

$$0 = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i (\lambda_{n+1} - \lambda_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i (\lambda_{n+1} - \lambda_i) + 0$$

Т.к. $\{x_i\}_{i=1}^n$ ЛНЗ, $\forall i \in [1, n] \ \ \alpha_i = 0$

$$0 = \alpha_{n+1} x_{n+1}, x_{n+1} \neq 0 \Rightarrow \alpha_{n+1} = 0$$

□

Лемма 12. *Линейный оператор в конечномерном пространстве не может иметь более n различных собственных значений.*

Доказательство. Тривиально в силу ЛНЗ соответствующих векторов. □

3.3 Собственные векторы и собственные значения линейного оператора: существование, вычисление.

Вычислим СВ и СЗ.

$$x = \sum \xi^i e_i \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi^1 & \dots & \xi^n \end{pmatrix}^T \quad \mathcal{A} \leftrightarrow A = ||a^i_j||$$
$$\mathcal{A}x = \lambda x \Leftrightarrow A\xi = \lambda\xi \Leftrightarrow A\xi - \lambda E\xi = 0$$

Таким образом, задача нахождения СЗ сводится к нахождению λ, для которых существуют нетривиальные решения СЛАУ $A - \lambda E$, что эквивалентно нахождению корней характеристического полинома $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = \det(A - \lambda E)$
Нахождение СВ $\Leftrightarrow$ нахождение нетривиальных решений СЛАУ $A - \lambda E$ для каждого СЗ λ

Лемма 13. *$\lhd \mathcal{A} : X \to X$, X — ЛП над $\mathbb{C}$, тогда у $\mathcal{A}$ существует по крайней мере один собственный вектор и одно собственное значение.*

Доказательство. У любого многочлена есть хотя бы один корень $\in \mathbb{C}$. □

3.4 Спектральный анализ линейного оператора с простым спектром: спектр, диагональный вид матрицы, спектральные проекторы, спектральная теорема.

Определение. Собственное значение λ — **простое**, если оно — корень $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda)$ единичной кратности.

Определение. Спектр σ называется **простым**, если все собственные значения в нём простые.

Теорема 8. $\lhd \mathcal{A} : X \to X$ — ЛОП с простым спектром $\sigma_{\mathcal{A}} = \{\lambda_i\}_{i=1}^n$, $\{x_i\}_{i=1}^n$ — СВ.
Тогда A можно привести к диагональной форме A^d:

$$A^d = T^{-1}AT$$

где T — матрица перехода от базиса $\{e_i\}$ к $\{x_i\}$

Доказательство. Очевидно, т.к. $\mathcal{A}$ в базисе $\{x_i\}$ имеет диагональную матрицу $diag\{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$ □

Определение. $\lhd \lambda_i$ — собственное значение ЛОП $\mathcal{A} : X \to X$.
Спектральным проектором $\mathcal{P}^{\parallel}_{\lambda_i}$ называется оператор проектирования на подпространство L_{λ_i} (множество векторов, отвечающих λ_i)

Лемма 14. *Спектральные проекторы оператора с простым спектром имеют вид:*

$$\mathcal{P}_{\lambda_i} = x_i \cdot f^i$$

где $\{x_i\}$ — базис X из СВ, $\{f^i\}$ — сопряженный ему базис.

Доказательство. Необходимо показать, что для $x \in L_{\lambda_i}$ $\mathcal{P}^{\parallel}_{\lambda_i}x = x$, для $y \in \mathcal{L}\{x_1 \dots x_{i-1}, x_{i+1} \dots x_n\}$ $\mathcal{P}^{\parallel}_{\lambda_i}y = 0$

$$\mathcal{P}_{\lambda_i}x = x_i \cdot f^i x = x_i \cdot \alpha f^i x_i = \alpha x_i$$
$$\mathcal{P}_{\lambda_i}y = x_i \cdot f^i \left(\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \alpha_j x_j \right) x_i \cdot 0$$

□

Теорема 9. Спектральная теорема

$$\mathcal{A} = \sum_i \lambda_i \mathcal{P}_{\lambda_i}$$

Доказательство.

$$\mathcal{A}x = \mathcal{A}\left(\sum_i \mathcal{P}^{\parallel}_{\lambda_i} x\right) = \sum_i \mathcal{A}\mathcal{P}^{\parallel}_{\lambda_i} x = \sum_i \lambda_i \mathcal{P}^{\parallel}_{\lambda_i} x$$

□

3.5 Спектральный анализ скалярного оператора: спектр, диагональный вид матрицы, спектральные проекторы, спектральная теорема.

3.6 Спектральная теорема и функциональное исчисление для скалярного оператора.

3.7 Спектральная теорема и инварианты скалярного оператора. Тождество Кэли.

4 Спектральный анализ линейных операторов в конечномерном пространстве: операторы общего вида