Jacobimatrix

Sei $x \in \mathbb{R}^{k \cdot 13}$, $u \in \mathbb{R}^{k \cdot 4}$, $f(x,u) \in \mathbb{R}^{k \cdot 13}$ und sei zu dem $f \in C^{\infty}$ Dann gibt es für die ODE $\dot{x} = f(x,u)$, weg der Lipschitzstetigkeit, nach Poincare eine eindeutige Lösung $\phi(x,u) \in \mathbb{R}^{k \cdot 13}$ mit

$$\dot{\phi}(x,u) = f(\phi(x,u),u)$$

Man betrachte nun die Differenzialgleichung zum Zeitpunkt k, dann folgt für die Differenzierung nach der x_i Komponente

$$\frac{d}{dx_i^k}\frac{d}{dt^k}\phi(x^k,u^k) = \frac{d}{dx_i^k} f(\phi(x^k,u^k),u^k)$$

Da $f \in C^{\infty}$ folgt das die Gleichung Sensitivität ist und die Ableitungen vertauscht werden können.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt^k}\frac{d}{dx_i^k}\phi(x^k,u^k) = \frac{d}{dx_i^k} f(\phi(x^k,u^k),u^k) = \frac{d}{dx^k}\Big[f(\phi(x^k,u^k),u^k)\Big] \cdot \frac{d}{dx_i^k}\phi(x^k,u^k) \\ + \frac{d}{du^k}\Big[f(\phi(x^k,u^k),u^k)\Big] \cdot \underbrace{\frac{du^k}{dx_i^k}}_{=0}\end{aligned}$$

mit $M^k = \frac{d}{dx_i^k}\phi(x^k,u^k) \in \mathbb{R}^{13 \times 13}, i = 1..13$ folgt die ODE

$$\frac{d}{dt^k} M^k = \underbrace{\frac{d}{dx^k}\Big[f(\phi(x^k,u^k),u^k)\Big]}_{\in \mathbb{R}^{13 \times 13}} \cdot M^k$$

mit der Anfangsbedingung $M_0^k = I \in \mathbb{R}^{13 \times 13}$

Analog folgt für die Differenzierung nach der u_i Komponente

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt^k}\frac{d}{du_i^k}\phi(x^k,u^k) = \frac{d}{dx^k}\Big[f(\phi(x^k,u^k),u^k)\Big] \cdot \frac{d}{du_i^k}\phi(x^k,u^k) \\ + \frac{d}{du^k}\Big[f(\phi(x^k,u^k),u^k)\Big] \cdot \frac{du^k}{du_i^k}\end{aligned}$$

mit $N^k = \frac{d}{du_i^k}\phi(x^k,u^k) \in \mathbb{R}^{13 \times 4}, i = 1..4$ folgt die ODE

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt^k} N^k = \underbrace{\frac{d}{dx^k}\Big[f(\phi(x^k,u^k),u^k)\Big]}_{\in \mathbb{R}^{13 \times 13}} \cdot N^k \\ + \underbrace{\frac{d}{du^k}\Big[f(\phi(x^k,u^k),u^k)\Big]}_{\in \mathbb{R}^{13 \times 4}} \cdot \underbrace{I^k}_{\in \mathbb{R}^{4 \times 4}}\end{aligned}$$

mit folgender Anfangsbedingung $N_0^k = 0 \in \mathbb{R}^{13 \times 4}$

Jakobimatrix der DAE

Betrachtet wird nun die DAE

$$B(\phi) \cdot \dot{\phi} = \begin{pmatrix} f(\phi, u) \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit der Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&& \\ & 1 &&&&&&&& \\ && \ddots &&&&&&& \\ &&&&&&&&& 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2q_1 & 2q_2 & 2q_3 & 2q_4 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

Dann folgt mit den in Abschnitt „Jakobimatrix“ genannten Voraussetzungen:
Für M:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_{i-1}} \left(B(\phi) \cdot \dot{\phi} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_{i-1}} \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$$

Auf der rechten Seite ändert sich nichts (die Null in der 14. Zeile ist auch abgeleitet Null), ebenso in den ersten 13 Zeilen auf der linken Seite (weil B dort eine Einheitsmatrix ist). Neu dazu kommt die Ableitung der letzten Zeile. Diese lautet mit der Kettenregel wie folgt:

$$\begin{aligned} & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_{i-1}} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2q_1 & \dots & 2q_4 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \dot{\phi} \right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_{i-1}} \left(\sum_{k=1}^{4} 2q_k \cdot \dot{q}_k \right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\sum_{k=1}^{4} 2q_k \cdot \dot{q}_k \right) \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x_{i-1}}}_{=M} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2\dot{q}_1 & \dots & 2\dot{q}_4 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot M \end{aligned}$$

Analog gilt für N: Die ersten 13 Zeilen der Linken Seite ändern sich nicht. Auch die rechte Zeile bleibt (bis auf die dazukommende Nullzeile) gleich. Für die letzte Zeile der linken Seite gilt wieder:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u_{i-1}}\left(\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 2q_1 & \dots & 2q_4 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}\cdot\dot{\phi}\right)\\
&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u_{i-1}}\left(\sum_{k=1}^{4}2q_k\cdot\dot{q}_k\right)\\
&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=1}^{4}2q_k\cdot\dot{q}_k\right)\cdot\underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u_{i-1}}}_{=N}\\
&=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 2\dot{q}_1 & \dots & 2\dot{q}_4 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}\cdot N
\end{aligned}
$$

Die Ableitung nach u kommt sowohl für M als auch für N nicht zum tragen, da B nicht von u abhängig ist.
Das zu lösende Differentialgleichungssystem sieht nun (in Matrixschreibweise) also folgendermaßen aus:

$$
\begin{bmatrix}
\dot{x}\\
\sum\limits_{k=1}^{4}2\cdot q_k\cdot\dot{q}_k\\
\dot{M}\\
\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 2\dot{q}_1 & \dots & 2\dot{q}_4 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}\cdot M\\
\dot{N}\\
\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 2\dot{q}_1 & \dots & 2\dot{q}_4 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}\cdot N
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
f\\
0\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\cdot M\\
0\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\cdot N+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}f\\
0
\end{bmatrix}
$$

bzw.

$$
\begin{bmatrix}
\dot{x}-f\\
\sum\limits_{k=1}^{4}2\cdot q_k\cdot\dot{q}_k\\
\dot{M}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\cdot M\\
\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 2\dot{q}_1 & \dots & 2\dot{q}_4 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}\cdot M\\
\dot{N}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\cdot N-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}f\\
\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 2\dot{q}_1 & \dots & 2\dot{q}_4 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}\cdot N
\end{bmatrix}
=\mathbf{0}
$$

Die Anfangsbedingungen sind weiterhin $M_0=\mathbb{I}^{13\times13}$ und $N_0=\mathbf{0}$.
Werden (wegen DAE-Löser) nun auch Anfangsbedingungen für $\dot{M}$ und $\dot{N}$ gebraucht???

Hessematrix

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt^k}\frac{d}{dx_j^k}\frac{d}{dx_i^k}\phi(x^k,u^k) &= \frac{d}{dx_j^k}\left\{\frac{d}{dx^k}\Big[f(\phi(x^k,u^k),u^k)\Big]\cdot\frac{d}{dx_i^k}\phi(x^k,u^k)\right\}\\
&= \left\{\frac{d}{dx^k}\frac{d}{dx^k}\Big[f(\phi(x^k,u^k),u^k)\Big]\cdot\frac{d}{dx_i^k}\phi(x^k,u^k) + \frac{d}{du^k}\frac{d}{dx^k}\Big[f(\phi(x^k,u^k),u^k)\Big]\cdot\underbrace{\frac{du^k}{dx_i^k}}_{=0}\right\}\\
&+ \frac{d}{dx^k}\Big[f(\phi(x^k,u^k),u^k)\Big]\cdot\frac{d}{dx_i^k}\frac{d}{dx_i^k}\phi(x^k,u^k)
\end{aligned}
$$

mit $M^k = \frac{d}{dx_i^k}\phi(x^k,u^k) \in \mathbb{R}^{13\times 13}, i = 1..13$ und $O^k = \frac{d}{dx_i^k}\frac{d}{dx_j^k}\phi(x^k,u^k) \in \mathbb{R}^{13\times 13\times 13}, i = 1..13, j = 1..13$ folgt die ODE

$$
\frac{d}{dt^k}O_k = \frac{d}{dx^k}\frac{d}{dx^k}\Big[f(\phi(x^k,u^k),u^k)\Big]\cdot M_k + \frac{d}{dx^k}\Big[f(\phi(x^k,u^k),u^k)\Big]\cdot O_k
$$

mit folgender Anfangsbedingung $H_0^k = 0 \in \mathbb{R}^{13\times 13\times 13}$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt^k}\frac{d}{du_j^k}\frac{d}{dx_i^k}\phi(x^k,u^k) &= \frac{d}{du_j^k}\left\{\frac{d}{dx^k}\Big[f(\phi(x^k,u^k),u^k)\Big]\cdot\frac{d}{dx_i^k}\phi(x^k,u^k)\right\}\\
&= \Bigg\{\frac{d}{dx^k}\frac{d}{dx^k}\Big[f(\phi(x^k,u^k),u^k)\Big]\cdot\frac{d}{du_i^k}\phi(x^k,u^k)\\
&+\frac{d}{du^k}\frac{d}{dx^k}\Big[f(\phi(x^k,u^k),u^k)\Big]\cdot\frac{du^k}{du_j^k}\Bigg\}\cdot\frac{d}{dx_i^k}\phi(x^k,u^k)\\
&+ \frac{d}{dx^k}\Big[f(\phi(x^k,u^k),u^k)\Big]\cdot\frac{d}{du_j^k}\frac{d}{dx_i^k}\phi(x^k,u^k)
\end{aligned}
$$

mit $M^k = \frac{d}{dx_i^k}\phi(x^k,u^k) \in \mathbb{R}^{13\times 13}, i = 1..13$, $N^k = \frac{d}{du_j^k}\phi(x^k,u^k) \in \mathbb{R}^{13\times 4}, i = 1..13$ und $P^k = \frac{d}{du_j^k}\frac{d}{dx_i^k}\phi(x^k,u^k) \in \mathbb{R}^{13\times 13\times 4}, i = 1..13, j = 1..4$ folgt die ODE in der Matrixschreibweise

$$
\begin{aligned}
P^k = H_{x,u}\phi(x,u) = J_u(M_k)^T &= \left\{\nabla_u\left(\nabla_x\phi\cdot\nabla_x f(\phi,u)\right)\right\}^T\\
&= \left\{\nabla_x\phi\cdot\nabla_u\nabla_x f(\phi,u) + \nabla_{ux}\phi\cdot\nabla_x f(\phi,u)\right\}^T\\
&= \left\{J_u\nabla_x f(\phi,u)\cdot J_x\phi + \nabla_{ux}\phi\cdot\nabla_x f(\phi,u)\right\}\\
&= \left\{(J_x\nabla_x f(\phi,u)\cdot J_u\phi + J_u\nabla_x f(\phi,u))\cdot J_x\phi + J_x f(\phi,u)\cdot J_u\nabla_x\phi\right\}\\
&= \left\{\underbrace{\Big(H_{x,x}f(\phi,u)\cdot N^k\phi + H_{u,x}f(\phi,u)\Big)\cdot M^k}_{\text{Hier ein Dimesionsproblem, Warum?}} + J_x f(\phi,u)\cdot P^k\right\}
\end{aligned}
$$