

1 Motivation

Ziel: Berechnung der Matrizen $Dx_{x_{i-1}}$ und $Dx_{u_{i-1}}$ ohne x zu kennen

2 Vorgehen

Bedingungen prüfen, erfüllen unsere Gleichungen das? Erfüllen sie es auch mit numerischen Lösungen?

Gegeben sei die Differentialgleichung:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

Idee: Anstatt zuerst die Differentialgleichung zu lösen, und dann die Lösung nach x bzw. u abzuleiten, leite zuerst die ODE nach x bzw. u ab und löse erst dann die Differentialgleichung: (Damit das nachfolgende Vorgehen überhaupt erlaubt, bzw. alle Ausdrücke wohldefiniert sind, muss $x(t)$ in allen Variablen stetig differenzierbar sein, damit man den Satz von Schwarz anwenden kann.)

Am Computer muss dieses Verfahren iterativ für jeden Zeitschritt angewendet werden. D.h. in jedem neuen Zeitschritt berechnet man M und N neu (also sozusagen M_{i-1}, N_{i-1})

Warum $i - 1$? Ist das jetzt zum Zeitpunkt i oder zu einem anderen?

Man benutzt also:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_{i-1}} \left(\frac{d}{dt} x \right) &= \frac{\partial}{\partial x_{i-1}} (f(x, u)) \\ \Leftrightarrow \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial x_{i-1}} \right)}_{=: M_{i-1}} &= \frac{\partial}{\partial x} f(x, u) \cdot \underbrace{\frac{\partial x}{\partial x_{i-1}}}_{=: M_{i-1}} \end{aligned}$$

Und:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_{i-1}} \left(\frac{d}{dt} x \right) &= \frac{\partial}{\partial u_{i-1}} (f(x, u)) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial u_{i-1}} \right) &= \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \cdot \underbrace{\frac{\partial x}{\partial u_{i-1}}}_{=: N_{i-1}} \end{aligned}$$

Welche Dimension haben M und N??? Wo sind die anderen Partiellen Ableitungen ($\frac{\partial u}{\partial x/u_{i-1}}$)?

Es kann nun also folgendes System gelöst werden, um die Ableitung nach x_{i-1} bzw. u_{i-1} zu berechnen:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ M_{i-1} \\ N_{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x, u) & f_x(x, u) & f_u(x, u) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ M_{i-1} \\ N_{i-1} \end{bmatrix}$$

Achtung auf Multiplikation!!! Dimensionen passen? Matrizen? Vektoren?

Diese Differentialgleichung kann nun numerisch gelöst werden.

Setzt man den Zeitpunkt t_{i-1} ein, so erhält man für M_{i-1} und N_{i-1} die Anfangsbedingungen der ODE:

$$M(t_{i-1}) = \frac{\partial x(t_{i-1})}{\partial x_{i-1}} = \mathbb{I}$$

$$N(t_{i-1}) = \frac{\partial x(t_{i-1})}{\partial u_{i-1}} = 0$$

3 Voraussetzungen...

3.1 ...für das SQP-Verfahren

- am besten hauptsächlich Gleichungsnebenbedingungen
- Zielfunktion und Nebenbedingungen zweimal stetig differenzierbar

4 Einzelne Lösungsschritte

1. SQP-Verfahren

- a) normales Optimierungsverfahren \rightarrow Dynamik muss schon aufgelöst sein
- b) innerhalb noch mal explizites Lösungsverfahren (zB Newton, Newton-Rhapson?)
- c) Approximation der Hessematrix $\nabla_{xx}^2 L(x^k, \mu^k)$ möglich (**Machen wir nicht?**)
- d) hauptsächlich für Gleichungsnebenbedingungen, aber auch für Ungleichungsnebenbedingungen möglich
- e) Globalisierung mit Penalty-Funktion möglich
- f) Schwierigkeiten: mögliche Unzulässigkeit der Teilprobleme (nur bei Ungleichungsnebenbedingungen?)

2. Lösung der Dynamik

- a)

4.1 Genauere Berachtung der Hessematrix der Lagrangefunktion

Lagrangefunktion

$$L : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^p, \quad L(x, \lambda, \mu) = f(x) + (\lambda^T g(x)) + \mu^T h(x)$$

$f(x)$: Zielfunktion

$h(x)$: Gleichungsnebenbedingungen

Achtung: Optimierung bei uns nach zwei Variablen x und u , diese stecken hier beide in x !

Hessematrix für SQP-Verfahren

$$H_k = \nabla_{xx}^2 L(x^k, \mu^k) = \nabla_{xx}^2 f(x^k) + (\mu^k)^T \nabla_{xx}^2 h(x^k)$$

Hier wird die Hessematrix der Nebenbedingungen gebraucht \rightarrow auch die Nebenbedingungen aus Multiple shooting