

Inhaltsverzeichnis

1	Simulation eines einfachen Multikoptermodell	2
1.1	Konfigurationsmatrizen	3
1.2	Mathematisches Modell	3
1.2.1	Mathematisches Modell für + Konfiguration	5
1.2.2	Newton - Euler Gleichungen	7
	Literaturverzeichnis	8

Abbildungsverzeichnis

1.1	Schubkräfte der Motoren	2
1.2	Konfigurationen	3

1 Simulation eines einfachen Multikoptermodell

In der Literatur [?], [?] wird als passender physikalischer Ansatz die Newton'schen Bewegungsgleichungen und der Drallsatz verwendet. Der alternative Ansätze des Newton - Euler - Verfahren [?, S. 36] hatten sich als umständlich und analytisch aufwendig herausgestellt.

Der Multikopter lässt sich in drei Körpergruppen (B_0, B_1, B_2) einteilen: Bezugssystem (Startpunkt), "nicht rotierende Körper" (Grundplatte, Arme, Controller, Batterie, etc) und "rotierende Körper" (Motor, Rotor, Rotorschraube). In der Abbildung 1.1 lassen sich die Schubkräfte F_1, \dots, F_4 , wirkend im jeweiligen rotierenden System B_{M1}, \dots, B_{M2} , erkennen. Mit der, nicht eingezeichneten, Gewichtskraft führt dies zur folgenden Kräftegleichgewicht

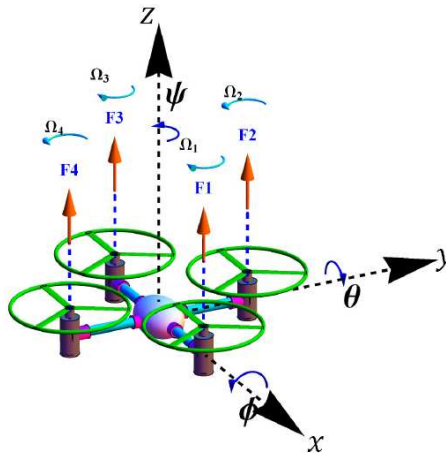


Abbildung 1.1: **Schubkräfte der Motoren**

im KOS(B_0).

$$\frac{d}{dt} F_{B_1} = m_{B_1} \cdot \frac{d}{dt} {}^1v_1 = m_{B_1} \frac{d_1}{dt} {}^1v_1 + {}^1\omega_1 \times m_{B_1} {}^1v_1 \quad (1.1)$$

$$= {}^1F_g + \sum_{i=1}^4 {}^1F_i \quad (1.2)$$

$$= m_{B_1} A_{1,0} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^4 A_{1,M_i} \cdot {}^{M_i}F_{M_i} \quad (1.3)$$

$$= m_{B_1} A_{1,0} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_i \end{pmatrix}$$

Dabei entspricht:

m_{ges}	Gesamtmasse des Multikopters
g	Gewichtskraft
$A_{0,1}$	Rotationsmatrix von Körper B_1 ins B_0 System
A_{1,M_i}	Rotationsmatrix von Körper B_i ins B_1 System

Die Rotationsmatrix A_{1,M_i} ändert sich je nach Konfiguration des Multikopters. Die Abbildung 1.2 zeigt die behandelte Konfiguration.

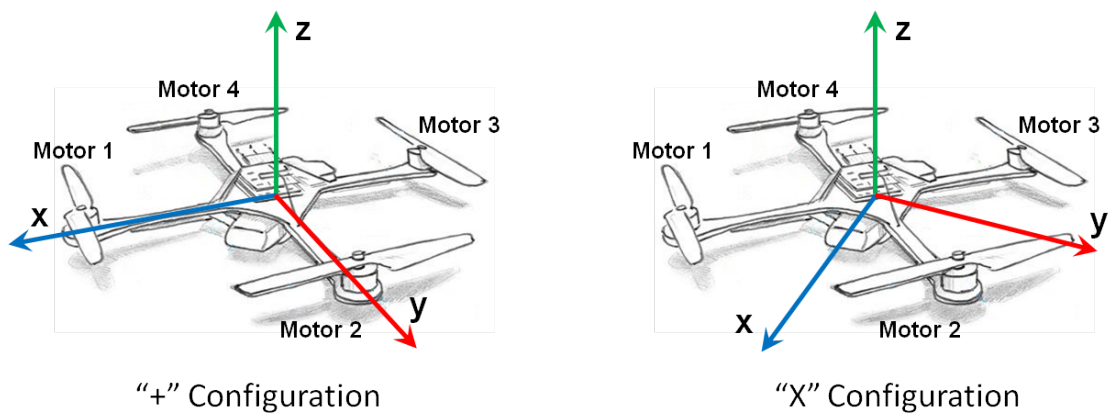


Abbildung 1.2: Konfigurationen

1.1 Konfigurationsmatrizen

Für die " + " - Konfiguration werden folgende Matrizen verwendet:

$$A_{1,M_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_{1,M_2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_{1,M_3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_{1,M_4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für die "X" - Konfiguration werden folgende Matrizen verwendet:

$$A_{1,M_1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_{1,M_2} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{1,M_3} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_{1,M_4} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2 Mathematisches Modell

Für Kräftegleichgewicht sind die Matrizen nicht relevant aber für den nach folgende Drallsatz im körperfesten System B_1 . Zuvor wird aber zunächst ein festmontierter Motor betrachtet mit Drehmoment M . Diesem wirkt ein Strömungswiderstand τ_{drag} entgegen und

es gilt:

$$I_{rot} \cdot \dot{\omega} = M - \tau_{drag} \quad (1.4)$$

Dabei ist I_{rot} das Trägheitsmoment des Rotor entlang seiner z-Achse. Der Strömungswiderstand ist in der Literatur folgenderweise definiert als:

$$\tau_{drag} = \frac{1}{2} \rho A_r v^2 \quad (1.5)$$

ρ ist die Luftdichte, A_r die Fläche, die der Rotor bei der Umdrehung überschreitet und v ist die Geschwindigkeit relative zur Luft. Näherungsweise gilt: $\omega \approx \frac{v}{r}$ und es folgt:

$$\tau_{drag} \approx k_{drag} \omega^2 \quad (1.6)$$

Die Konstante $k_{drag} > 0$ ist abhängig von der Luftdichte, dem Radius, der Form des Propellers und anderen Faktoren. Für quasistationär Manöver ist ω konstant und es gilt:

$$M = \tau_{drag} \approx k_{drag} \omega^2 \quad (1.7)$$

Neben dem Drehmoment der Rotoren, wird auch deren Schubkraft benötigt, die Literatur gibt folgende Formel an:

$$F_s = C_T \rho A_r r^2 \omega^2 \quad (1.8)$$

C_T ist der Schubkoeffizient für eine speziellen Rotor, ρ , A_r ist wie ob, die Dichte der Luft bzw. die Fläche die, der Rotor bei der Umdrehung überschreitet. Analog wie oben für wir eine vereinfachten Koeffizienten ein:

$$F_s \approx k_T \omega^2 \quad (1.9)$$

Im Folgenden wird die Annahme getroffen, dass sich der Quadrocopter in einem quasistationären Zustand befindet d.h. $\omega = const$

Dann gilt für Drallsatz im B_{M_i} System:

$$M_i I_{M_i M_i} \dot{\omega}_{M_i} + M_i \omega_1 \times M_i I_{M_i M_i} \omega_{M_i} = M_i I_{M_i} (M_i \dot{\omega}_1 + M_i \dot{\omega}_{1, M_i}) \quad (1.10)$$

$$+ M_i \omega_1 \times M_i I_{M_i} (M_i \omega_1 + M_i \omega_{1, M_i}) \underbrace{\approx}_{M_i \omega_1 \ll M_i \omega_{1, M_i}} M_i I_{M_i M_i} \dot{\omega}_{1, M_i} \quad (1.11)$$

$$+ M_i \omega_1 \times M_i I_{M_i M_i} \omega_{1, M_i} = M_i - M_i \tau_{M_i} \quad (1.12)$$

Zudem folgt wegen Stationärflug:

$$\underbrace{M_i I_{M_i M_i} \dot{\omega}_{1, M_i}}_{=0, \text{ da } \omega = const} + M_i \omega_1 \times M_i I_{M_i M_i} \omega_{1, M_i} = M_i \omega_1 \times M_i I_{M_i M_i} \omega_{1, M_i} = M_i - M_i \tau_{M_i} \quad (1.13)$$

Dem Drehmoment der Motoren M_i wird ein Gegendrehmoment $M_i \tau_{M_i}$ entgegen gesetzt. Dieses Drehmoment finden sich auch wieder im Drallsatz des System B_1

$${}_1 I_{11} \dot{\omega}_1 + {}_1 \omega_1 \times {}_1 I_{11} \omega_1 = (\tau_R + \tau_P) - \sum_{i=1}^4 {}_1 \tau_{M_i} \quad (1.14)$$

Die Drehmomente τ_R und τ_P ergeben sich aus den Roll $f_2 + f_4$ - und Nickkräfte $f_1 + f_3$:

$$\tau_R = A_{1,M_1} M_1 r_{1,M_1} \times F_1 + A_{1,M_3} M_3 r_{1,M_3} \times F_3 \quad (1.15)$$

$$\tau_P = A_{1,M_2} M_2 r_{1,M_2} \times F_2 + A_{1,M_4} M_4 r_{1,M_4} \times F_4 \quad (1.16)$$

Das Gegendrehmoment ${}_{M_i} \tau_{M_i}$ ist äquivalent mit ${}_1 \tau_{M_i}$, da der Übergang von System B_{M_i} ins B_1 System eine Rotation um die z-Achse darstellt und ${}_{M_i} \tau_{M_i}$ nur eine z-Komponente besitzt. Somit folgt für den ganzen Drallsatz:

$${}_1 I_{11} \dot{\omega}_1 + {}_1 \omega_1 \times {}_1 I_{11} \omega_1 + \sum_{i=1}^4 {}_1 \omega_1 \times {}_{M_i} I_{M_i} {}_{M_i} \omega_{1,M_i} \quad (1.17)$$

$$= - \sum_{i=1}^4 M_i + (\tau_R + \tau_P) \quad (1.18)$$

${}_1 I_1$ stellt das Trägheitsmoment des Körpers 1, d.h. des Quadropters ohne rotierende Objekte da. ${}_{M_i} I_{M_i}$ hingegen ist das Trägheitsmoment, eines einzelnen Rotors i . Bei Brushless Motoren ist es so, das "Wand" mitdreht. Dies muss der Kalkulation des Trägheitsmomentes ${}_{M_i} I_{M_i}$ mit einbezogen werden.

Da sich ${}_{M_i} \omega_{1,M_i}$ nur eine z - Komponente besitzt mit ω_{M_i} , lässt sich Gleichung folgendermassen vereinfachen.

$${}_1 I_{11} \dot{\omega}_1 + {}_1 \omega_1 \times {}_1 I_{11} \omega_1 + \sum_{i=1}^4 ({}_1 \omega_1 \times e_z) \cdot I_{M_i} \omega_{M_i} \quad (1.19)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sum_{i=1}^4 M_i \end{bmatrix} + (\tau_R + \tau_P) \quad (1.20)$$

1.2.1 Mathematisches Modell für + Konfiguration

Mit 1.1 folgt für die + Konfiguration

$${}_0 \dot{r}_1 = A_{0,11} v_1 \quad (1.21)$$

$$m_{B_1} \frac{d_1}{dt} {}_1 v_1 + {}_1 \omega_1 \times m_{B_1} {}_1 v_1 = m_{B_1} A_{1,0} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_i \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

$$\dot{A}_{0,1} = A_{0,11} \tilde{\omega}_1 \quad (1.23)$$

$${}_1 I_{11} \dot{\omega}_1 + {}_1 \omega_1 \times {}_1 I_{11} \omega_1 + \sum_{i=1}^4 ({}_1 \omega_1 \times e_z) \cdot I_{M_i} \omega_{M_i} \quad (1.24)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sum_{i=1}^4 M_i \end{bmatrix} + (\tau_R + \tau_P) = \begin{bmatrix} d(F_2 - F_4) \\ d(F_3 - F_1) \\ -\sum_{i=1}^4 M_i \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

Mit 1.7 und 1.9

$${}_0\dot{r}_1 = A_{0,11}v_1 \quad (1.26)$$

$$m_{B_1} \frac{d_1}{dt} {}_1v_1 + {}_1\omega_1 \times m_{B_1} {}_1v_1 = m_{B_1} A_{1,0} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{i=1}^4 k_{TM_i} \omega_{1,M_i}^2 \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

$$\dot{A}_{0,1} = A_{0,11} \tilde{\omega}_1 \quad (1.28)$$

$${}_1I_{11} \dot{\omega}_1 + {}_1\omega_1 \times {}_1I_{11} \omega_1 + \sum_{i=1}^4 ({}_1\omega_1 \times e_z) \cdot I_{MM_i} \omega_{M_i} \quad (1.29)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & d \cdot k_T & 0 & -d \cdot k_T \\ -d \cdot k_T & 0 & d \cdot k_T & 0 \\ -k_{drag} & k_{drag} & -k_{drag} & k_{drag} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_1 \omega_{M_1}^2 \\ M_2 \omega_{M_2}^2 \\ M_3 \omega_{M_3}^2 \\ M_4 \omega_{M_4}^2 \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

1.2.1.1 Quaternionen

Mit $\dot{q} = \frac{1}{2} q \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \end{bmatrix}$ gilt:

$${}_0\dot{r}_1 = [q \otimes {}_1v_1 \otimes \bar{q}]_{[1:3]} \quad (1.31)$$

$$m_{B_1} \frac{d_1}{dt} {}_1v_1 + {}_1\omega_1 \times m_{B_1} {}_1v_1 = m_{B_1} \left[\bar{q} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \otimes q \right]_{[1:3]} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{i=1}^4 k_{TM_i} \omega_{1,M_i}^2 \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

$$\dot{q} = \frac{1}{2} q \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

$${}_1I_{11} \dot{\omega}_1 + {}_1\omega_1 \times {}_1I_{11} \omega_1 + \sum_{i=1}^4 ({}_1\omega_1 \times e_z) \cdot I_{MM_i} \omega_{M_i} \quad (1.34)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & d \cdot k_T & 0 & -d \cdot k_T \\ -d \cdot k_T & 0 & d \cdot k_T & 0 \\ -k_{drag} & k_{drag} & -k_{drag} & k_{drag} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_1 \omega_{M_1}^2 \\ M_1 \omega_{M_2}^2 \\ M_1 \omega_{M_3}^2 \\ M_1 \omega_{M_4}^2 \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

1.2.1.2 Rotationsmatrix

Mit $q = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T$, $\dot{q} = \frac{1}{2} q \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \end{bmatrix}$, $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$ und

$$R_{0,1}(q) = \begin{bmatrix} 1 - 2(q_2^2 + q_3^2) & -2q_0q_3 + 2q_1q_2 & 2q_0q_2 + 2q_1q_3 \\ 2q_0q_3 + 2q_1q_2 & 1 - 2(q_1^2 + q_3^2) & -2q_0q_1 + 2q_2q_3 \\ -2q_0q_2 + 2q_1q_3 & 2q_0q_1 + 2q_2q_3 & 1 - 2(q_1^2 + q_2^2) \end{bmatrix}$$

$${}_0\dot{r}_1 = R_{0,1}(q){}_1v_1 \quad (1.36)$$

$$m_{B_1} \frac{d_1}{dt} {}_1v_1 + {}_1\omega_1 \times m_{B_1} {}_1v_1 = R(q)^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_{B_1} \cdot g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{i=1}^4 k_{TM_i} \omega_{1,M_i}^2 \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

$$\dot{q} = \frac{1}{2} q \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

$${}_1I_{11}\dot{\omega}_1 + {}_1\omega_1 \times {}_1I_{11}\omega_1 + \sum_{i=1}^4 ({}_1\omega_1 \times e_z) \cdot I_{MM_i} \omega_{M_i} \quad (1.39)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & d \cdot k_T & 0 & -d \cdot k_T \\ -d \cdot k_T & 0 & d \cdot k_T & 0 \\ -k_{drag} & k_{drag} & -k_{drag} & k_{drag} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_1 \omega_{M_1}^2 \\ M_1 \omega_{M_2}^2 \\ M_1 \omega_{M_3}^2 \\ M_1 \omega_{M_4}^2 \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

1.2.2 Newton - Euler Gleichungen

Sei $\ddot{\theta} := [{}_1\dot{v}_1, {}_1\dot{\omega}_1]^T \in \mathbb{R}^6$, $\dot{\theta} := [{}_1v_1, {}_1\omega_1]^T \in \mathbb{R}^6$, $\theta := [{}_1r_1, q]^T \in \mathbb{R}^7$ und $\omega_M(t) \in \mathbb{R}^4$

$$M(\theta)\ddot{\theta} + \Theta(\theta, \dot{\theta}) = T(\dot{\theta}, \omega_M(t)) \quad (1.41)$$

mit

$$M(\theta(t)) = \begin{bmatrix} m_{B_1} \cdot E^{3 \times 3} & 0 \\ 0 & {}_1I_1 \end{bmatrix} \quad (1.42)$$

$$\Theta(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} m_{B_1} ({}_1\omega_{1,y} \cdot {}_1v_{1,z} - {}_1\omega_{1,z} \cdot {}_1v_{1,y} + R_{1,3}^T(q) \cdot g) \\ m_{B_1} ({}_1\omega_{1,x} \cdot {}_1v_{1,z} - {}_1\omega_{1,z} \cdot {}_1v_{1,x} + R_{2,3}^T(q) \cdot g) \\ m_{B_1} ({}_1\omega_{1,x} \cdot {}_1v_{1,y} - {}_1\omega_{1,y} \cdot {}_1v_{1,x} + R_{3,3}^T(q) \cdot g) \\ {}_1I_{1,z} ({}_1\omega_{1,y} \cdot {}_1v_{1,z}) - {}_1I_{1,y} ({}_1\omega_{1,z} \cdot {}_1v_{1,y}) \\ - [{}_1I_{1,z} ({}_1\omega_{1,x} \cdot {}_1v_{1,z}) - {}_1I_{1,x} ({}_1\omega_{1,z} \cdot {}_1v_{1,x})] \\ {}_1I_{1,y} ({}_1\omega_{1,x} \cdot {}_1v_{1,y}) - {}_1I_{1,x} ({}_1\omega_{1,y} \cdot {}_1v_{1,x}) \end{bmatrix} \quad (1.43)$$

$$T(\dot{\theta}, \omega_M(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{i=1}^4 k_{TM_i} \omega_{M_i}^2 \\ I_{M1}\omega_{1,y}(-\omega_{M_1} + \omega_{M_2} - \omega_{M_3} + \omega_{M_4}) + d \cdot k_T \cdot \omega_{M_2}^2 - d \cdot k_T \cdot \omega_{M_4}^2 \\ I_{M1}\omega_{1,x}(\omega_{M_1} - \omega_{M_2} + \omega_{M_3} - \omega_{M_4}) - d \cdot k_T \cdot \omega_{M_1}^2 + d \cdot k_T \cdot \omega_{M_3}^2 \\ -k_{drag} \cdot \omega_{M_1}^2 + k_{drag} \cdot \omega_{M_2}^2 - k_{drag} \cdot \omega_{M_3}^2 + k_{drag} \cdot \omega_{M_4}^2 \end{bmatrix} \quad (1.44)$$

Für die optimale control Formulierung mit

- $x(t) = (\theta, \dot{\theta})^T \in \mathbb{R}^{13}$
- $u(t) = (\omega_{M_1}, \omega_{M_2}, \omega_{M_3}, \omega_{M_4})^T \in \mathbb{R}^4$

folgt:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_{0:2}(t) \\ x_{3:6}(t) \\ x_{7:12}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{7:9} \\ \frac{1}{2}x_{3:6} \otimes (0, \quad x_{10:12})^T \\ M(\theta(t))^{-1}(T(u(t), x(t)) - \Theta(x(t))) \end{pmatrix} \quad (1.45)$$