Sei $x \in \mathbb{R}^{k \cdot 13}$, $u \in \mathbb{R}^{k \cdot 4}$, $f(x,u) \in \mathbb{R}^{k \cdot 13}$ und sei zu dem $f \in C^{\infty}$ Dann gibt es für die ODE $\dot{x} = f(x,u)$, weg der Lipschitzstetigkeit, nach Poincare eine eindeutige Lösung $\phi(x,u) \in \mathbb{R}^{k \cdot 13}$ mit

$$\dot{\phi}(x,u) = f(\phi(x,u),u)$$

Man betrachte nun die Differenzialgleichung zum Zeitpunkt k, dann folgt für die Differenzierung nach der x_i Komponente

$$\frac{d}{dx_i^k}\frac{d}{dt^k}\phi(x^k,u^k) = \frac{d}{dx_i^k} f(\phi(x^k,u^k),u^k)$$

Da $f \in C^{\infty}$ folgt das die Gleichung Sensitivität ist und die Ableitungen vertauscht werden können.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt^k}\frac{d}{dx_i^k}\phi(x^k,u^k) = \frac{d}{dx_i^k} f(\phi(x^k,u^k),u^k) &= \frac{d}{dx^k}\Big[f(\phi(x^k,u^k),u^k)\Big] \cdot \frac{d}{dx_i^k}\phi(x^k,u^k) \\ &+ \frac{d}{du^k}\Big[f(\phi(x^k,u^k),u^k)\Big] \cdot \underbrace{\frac{du^k}{dx_i^k}}_{=0}\end{aligned}$$

mit $M^k = \frac{d}{dx_i^k}\phi(x^k,u^k) \in \mathbb{R}^{13\times 13}, i = 1..13$ folgt die ODE

$$\frac{d}{dt^k}M^k = \underbrace{\frac{d}{dx^k}\Big[f(\phi(x^k,u^k),u^k)\Big]}_{\in\mathbb{R}^{13\times 13}} \cdot M^k$$

mit der Anfangsbedingung $M_0^k = I \in \mathbb{R}^{13\times 13}$

Analog folgt für die Differenzierung nach der u_i Komponente

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt^k}\frac{d}{du_i^k}\phi(x^k,u^k) &= \frac{d}{dx^k}\Big[f(\phi(x^k,u^k),u^k)\Big] \cdot \frac{d}{du_i^k}\phi(x^k,u^k) \\ &+ \frac{d}{du^k}\Big[f(\phi(x^k,u^k),u^k)\Big] \cdot \frac{du^k}{du_i^k}\end{aligned}$$

mit $N^k = \frac{d}{du_i^k}\phi(x^k,u^k) \in \mathbb{R}^{13\times 4}, i = 1..4$ folgt die ODE

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt^k}N^k &= \underbrace{\frac{d}{dx^k}\Big[f(\phi(x^k,u^k),u^k)\Big]}_{\in\mathbb{R}^{13\times 13}} \cdot N^k \\ &+ \underbrace{\frac{d}{du^k}\Big[f(\phi(x^k,u^k),u^k)\Big]}_{\in\mathbb{R}^{13\times 4}} \cdot \underbrace{I^k}_{\in\mathbb{R}^{4\times 4}}\end{aligned}$$

mit folgender Anfangsbedingung $N_0^k = 0 \in \mathbb{R}^{13\times 4}$