0.1 fehlt noch

- Literatur
- Quaternionen-Multiplikation
- Herleitung

0.2 Variablen und Konstanten des Quadcopters

Koordinatensysteme Zu vereinfachten Betrachtung bestimmter Variablen werden in diesem Modell drei (bzw. sechs) verschiedene Koordinatensysteme verwendet:

1. Inertialsystem $\mathcal{I}$: Indizierung mit „0“, unbewegtes Beobachtersystem
2. Körpersystem $\mathcal{B}_1$: Indizierung mit „1“, alle „nicht drehenden“ Teile des Quadcopters
3. vier Rotorsysteme $\mathcal{B}_{M_i}, i = \{1, 2, 3, 4\}$: Indizierung mit M_i, z-Achse des Koordinatensystems entspricht der Drehachse des jeweiligen Rotors

Konstanten

- m_{ges}: Gesamtmasse des Quadcopters
- ${}_1\mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$: Trägheitsmatrix des Quadcopters bzgl. des Massenschwerpunkts im Körpersystem
- I_M: Trägheitsmatrix eines Motors (im Rotorsystem)
- g: Erdbeschleunigung
- d: Abstand der Drehachse eines Rotors zum Massenschwepunkt des Copters
- $k_T = C_T \rho_{Luft} A_{Rotor} r^2$: Schubkonstante eines Motors; ρ_{Luft} ist die Luftdichte, C_T der Schubkoeffizient des Motors, A_{Rotor} die Fläche, die der Rotor bei einer Umdrehung überstreicht und r der Radius des Rotors
- $k_{drag} = \frac{1}{2} \rho_{Luft} A_{Rotor} r^2$: Luftwiderstandskoeffizient eines Motors

Variablen

- ${}_0r_1 \in \mathbb{R}^3$: Position des Copters im Inertialsystem
- $q = (q_1, q_2, q_3, q_4) \in \mathbb{R}^4$: Quaternion, welches die Drehung des Quadcopters bzgl. des Inertialsystems angibt
- ${}_1v_1$: Geschwindigkeit des Copters im Körpersystem

- ${}_1\omega_1$: Winkelgeschwindigkeit des Copters im Körpersystem
- ${}_{M_i}\omega_{1,M_1}$: Winkelgeschwindigkeit der einzelnen Rotoren; es gilt immer $\omega_{M_1} > 0$, die Vorzeichenänderung aufgrund der unterschiedlichen Drehrichtung der Rotoren wird direkt in den Gleichungen eingesetzt
- $R = R_{0,1} = \begin{bmatrix} 1-2(q_3^2+q_4^2) & -2q_1q_4+2q_2q_3 & 2q_1q_3+2q_2q_4 \\ 2q_1q_4+2q_2q_3 & 1-2(q_2^2+q_4^2) & -2q_1q_2+2q_3q_4 \\ -2q_1q_3+2q_2q_4 & 2q_1q_2+2q_3q_4 & 1-2(q_2^2+q_3^2) \end{bmatrix}$: Drehmatrix vom Körpersystem ins Inertialsystem; es gilt $R^{-1} = R^T$

0.3 Newton-Euler Gleichungen

Es seien:
$\theta := \begin{bmatrix} {}_0r_1, & q \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^7$
$\dot{\theta} := \begin{bmatrix} {}_1v_1, & {}_1\omega_1 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^6$
$\ddot{\theta} := \begin{bmatrix} {}_1\dot{v}_1, & {}_1\dot{\omega}_1 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^6$
$\omega_M = \begin{bmatrix} {}_{M_1}\omega_{1,M_1}, & {}_{M_2}\omega_{1,M_2}, & {}_{M_3}\omega_{1,M_3}, & {}_{M_4 4}\omega_{1,M_4} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^4$

Die Dynamik des Quadcopters kann somit als folgende Differentialgleichung dargestellt werden:

$$M(\theta)\ddot{\theta} + \Theta(\theta, \dot{\theta}) = T(\dot{\theta}, \omega_M(t))$$

mit

$$M(\theta(t)) = \begin{bmatrix} m_{ges} \cdot \mathbf{E_{3x3}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}_\mathbf{1}\mathbf{I_1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6x6}$$

Hierbei ist $\mathbf{E_{3x3}}$ die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^3$.
Man beachte, dass M gar nicht von t abhängt, sondern für alle Zeiten konstant ist. Außerdem ist M eine Diagonalmatrix.

$$\Theta(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} m_{ges}\left({}_1\omega_{1,y} \cdot {}_1v_{1,z} - {}_1\omega_{1,z} \cdot {}_1v_{1,y} + R^T_{1,3}(q) \cdot g\right) \\ m_{ges}\left({}_1\omega_{1,z} \cdot {}_1v_{1,x} - {}_1\omega_{1,x} \cdot {}_1v_{1,z} + R^T_{2,3}(q) \cdot g\right) \\ m_{ges}\left({}_1\omega_{1,x} \cdot {}_1v_{1,y} - {}_1\omega_{1,y} \cdot {}_1v_{1,x} + R^T_{3,3}(q) \cdot g\right) \\ {}_1\omega_{1,y} \cdot_1 \omega_{1,z}\left(I_{zz} - I_{yy}\right) \\ {}_1\omega_{1,z} \cdot_1 \omega_{1,z}\left(I_{xx} - I_{zz}\right) \\ {}_1\omega_{1,x} \cdot_1 \omega_{1,y}\left(I_{yy} - I_{xx}\right) \end{bmatrix}$$

$$T(\dot{\theta}, \omega_M(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{i=1}^{4} k_{T M_i} \omega_{1,M_i}^2 \\ I_{M1}\omega_{1,y}(-_{M_1}\omega_{1,M_1} + {}_{M_2}\omega_{1,M_2} - {}_{M_3}\omega_{1,M_3} + {}_{M_4}\omega_{1,M_4}) + dk_T \left({}_{M_2}\omega_{1,M_2}^2 - {}_{M_4}\omega_{1,M_4}^2\right) \\ -I_{M1}\omega_{1,x}(-_{M_1}\omega_{1,M_1} + {}_{M_2}\omega_{1,M_2} - {}_{M_3}\omega_{1,M_3} + {}_{M_4}\omega_{1,M_4}) + dk_T \left({}_{M_3}\omega_{1,M_3}^2 + {}_{M_1}\omega_{M_1}^2\right) \\ k_{drag} \cdot \left(-_{M_1}\omega_{1,M_1}^2 + {}_{M_2}\omega_{1,M_2}^2 - {}_{M_3}\omega_{1,M_3}^2 + {}_{M_4}\omega_{1,M_4}^2\right) \end{bmatrix}$$

Außerdem gelten folgende Ableitungsbeziehungen (die dann für das Optimalsteuerungsproblem gebraucht werden):

$$\begin{aligned} {}_0\dot{r}_1 &= \mathbf{R_{01}}_1 v_1 \\ \dot{q} &= \frac{1}{2}\dot{q} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -q_2\omega_1 - q_3\omega_2 - q_4\omega_3 \\ q_1\omega_1 - q_4\omega_2 + q_3\omega_3 \\ q_4\omega_1 + p_1\omega_2 - q_2\omega_3 \\ -q_3\omega_1 + q_2\omega_2 + q_1\omega_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für die optimal control Formulierung führe zusätzlich ein:

- state: $x(t) = \begin{pmatrix} \theta, & \dot{\theta} \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^{13}$
- control: $u(t) = \omega_M \in \mathbb{R}^4$

Die ODE-Nebenbedingung für das Optimalsteuerungsproblem hat damit die Form:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_{0:2}(t) \\ x_{3:6}(t) \\ x_{7:12}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R_{01}}(q) x_{7:9} \\ \frac{1}{2} x_{3:6} \otimes \begin{pmatrix} 0, & x_{10:12} \end{pmatrix}^T \\ M^{-1}(T(u(t), x(t)) - \Theta(x(t)) \end{pmatrix} \tag{1}$$

Dabei steht $\otimes$ für die Quaternionenmultiplikation.

0.3.1 Jacobian - und Hessematrix für Θ