Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Simulation eines einfaches Multikoptermodell

In der Literatur [?], [?] wird als passender physikalischer Ansatz die Newton'schen Bewegungsgleichungen und der Drallsatz verwendet. Der alternative Ansätze des Newton - Euler - Verfahren [?, S. 36] hatten sich als umständlich und analytisch aufwendig herausgestellt.

Der Multikopter lässt sich in drei Körpergruppen (B_0, B_1, B_2) einteilen: Bezugssystem (Startpunkt), "nicht rotierende Körper" (Grundplatte, Arme, Controller, Batterie, etc) und "rotierende Körper" (Motor, Rotor, Rotorschraube). In der Abbildung 1.1 lassen sich die Schubkräfte $F_1, ...F_4$, wirkend im jeweiligen rotierenden System $B_{M1}, ..., B_{M2}$, erkennen. Mit der, nicht eingezeichneten, Gewichtskraft führt dies zur folgenden Kräftegleichgewicht

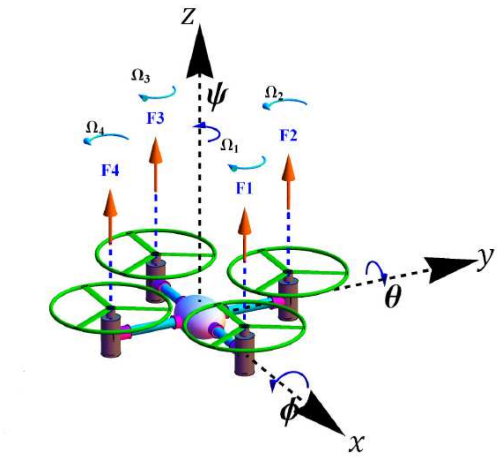

Abbildung 1.1: **Schubkräfte der Motoren**

im KOS(B_0).

$$\frac{d}{dt}F_{B_1} = m_{B_1} \cdot \frac{d}{dt}{}_1v_1 = m_{B_1}\frac{d_1}{dt}{}_1v_1 + {}_1\omega_1 \times m_{B_1}{}_1v_1 \tag{1.1}$$

$$= {}_1F_g + \sum_{i=1}^{4} {}_1F_i \tag{1.2}$$

$$= m_{B_1}A_{1,0} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{4} A_{1,M_i} \cdot_{M_i} F_{M_i}$$

$$= m_{B_1}A_{1,0} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_i \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Dabei entspricht:

m_ges	Gesamtmasse des Multikopters
g	Gewichtskraft
$A_{0,1}$	Rotationsmatrix von Körper B_1 ins B_0 System
A_{1,M_i}	Rotationsmatrix von Körper B_i ins B_1 System

Die Rotationsmatrix A_{1,M_i} ändert sich je nach Konfiguration des Multikopter. Die Abbildung 1.2 zeigt die behandele Konfiguration.

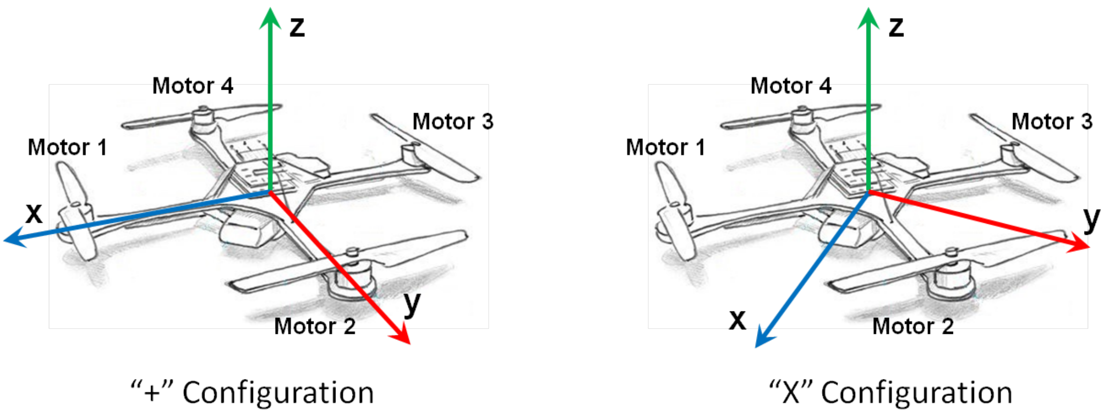

Abbildung 1.2: **Konfigurationen**

1.1 Konfigurationsmatrizen

Für die “+” - Konfiguration werden folgende Matrizen verwendend:

$$A_{1,M_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_{1,M_2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_{1,M_3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_{1,M_4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für die “x” - Konfiguration werden folgende Matrizen verwendend:

$$A_{1,M_1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_{1,M_2} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{1,M_3} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_{1,M_4} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2 Mathematisches Modell

Für Kräftegleichgewicht sind die Matrizen nicht relevant aber für den nach folgende Drallsatz im körperfesten System B_1. Zuvor wird aber zunächst ein festmontierter Motor betrachtet mit Drehmoment M. Diesem wirkt ein Strömungswiderstand τ_{drag} entgegen und es gilt:

$$I_{rot} \cdot \dot{\omega} = M - \tau_{drag} \tag{1.4}$$

Dabei ist I_{rot} das Trägheitsmoment des Rotor endlang seiner z-Achse. Der Strömungswiderstand ist in der Literatur folgenderweise definiert als:

$$\tau_{drag} = \frac{1}{2}\rho A_r v^2 \tag{1.5}$$

ρ ist die Luftdichte, A_r die Fläche, die der Rotor bei der Umdrehung überschreitet und v ist die Geschwindigkeit relative zur Luft. Näherungsweise gilt: $\omega \approx \frac{v}{r}$ und es folgt:

$$\tau_{drag} \approx k_{drag}\omega^2 \tag{1.6}$$

Die Konstante $k_{drag} > 0$ ist abhängig von der Luftdichte, dem Radius, der Form des Propellers und anderen Faktoren. Für quasistationär Manöver ist ω konstant und es gilt:

$$M = \tau_{drag} \approx k_{drag}\omega^2 \tag{1.7}$$

Neben dem Drehmoment der Rotoren, wird auch deren Schubkraft benötigt, die Literatur gibt folgende Formel an:

$$F_s = C_T \rho A_r r^2 \omega^2 \tag{1.8}$$

C_T ist der Schubkoeffizient für eine speziellen Rotor, ρ, A_r ist wie ob, die Dichte der Luft bzw. die Fläche die, der Rotor bei der Umdrehung überschreitet. Analog wie oben für wir eine vereinfachten Koeffizienten ein:

$$F_s \approx k_T \omega^2 \tag{1.9}$$

Im Folgenden wird die Annahme getroffen, dass sich der Quadrocopter in einem quasistationären Zustand befindet d.h. $\omega = const$

Dann gilt für Drallsatz im B_{M_i} System:

$$\begin{aligned}
{}_{M_i}I_{M_i M_i}\dot{\omega}_{M_i} + {}_{M_i}\omega_1 \times {}_{M_i}I_{M_i M_i}\omega_{M_i} &= {}_{M_i}I_{M_i}\left({}_{M_i}\dot{\omega}_1 + {}_{M_i}\dot{\omega}_{1,M_i}\right) && (1.10)\\
&+ {}_{M_i}\omega_1 \times {}_{M_i}I_{M_i}\left({}_{M_i}\omega_1 + {}_{M_i}\omega_{1,M_i}\right) \underbrace{\approx}_{{}_{M_i}\omega_1 << {}_{M_i}\omega_{1,M_i}} {}_{M_i}I_{M_i M_i}\dot{\omega}_{1,M_i} && (1.11)\\
&+ {}_{M_i}\omega_1 \times {}_{M_i}I_{M_i M_i}\omega_{1,M_i} = M_i - {}_{M_i}\tau_{M_i} && (1.12)
\end{aligned}$$

Zudem folgt wegen Stationärflug:

$$\underbrace{{}_{M_i}I_{M_i M_i}\dot{\omega}_{1,M_i}}_{=0,\text{ da }\omega=\text{ const}} + {}_{M_i}\omega_1 \times {}_{M_i}I_{M_i M_i}\omega_{1,M_i} = {}_{M_i}\omega_1 \times {}_{M_i}I_{M_i M_i}\omega_{1,M_i} = M_i - {}_{M_i}\tau_{M_i} \tag{1.13}$$

Dem Drehmoment der Motoren M_i wird ein Gegendrehmoment ${}_{M_i}\tau_{M_i}$ entgegen gesetzt. Dieses Drehmoment finden sich auch wieder im Drallsatz des System B_1

$${}_1I_{11}\dot{\omega}_1 + {}_1\omega_1 \times {}_1I_{11}\omega_1 = (\tau_R + \tau_P) - \sum_{i=1}^{4} {}_1\tau_{M_i} \tag{1.14}$$

Die Drehmomente τ_R und τ_P ergeben sich aus den Roll $f_2 + f_4$ - und Nickkräfte $f_1 + f_3$:

$$\tau_R = A_{1,M_1 M_1} r_{1,M_1} \times F_1 + A_{1,M_3 M_3} r_{1,M_3} \times F_3 \tag{1.15}$$
$$\tau_P = A_{1,M_2 M_2} r_{1,M_2} \times F_2 + A_{1,M_4 M_4} r_{1,M_4} \times F_4 \tag{1.16}$$

Das Gegendrehmoment ${}_{M_i}\tau_{M_i}$ ist äquivalent mit ${}_1\tau_{M_i}$, da der Übergang von System B_{M_i} ins B_1 System eine Rotation um die z-Achse darstellt und ${}_{M_i}\tau_{M_i}$ nur eine z-Komponente besitzt. Somit folgt für den ganzen Drallsatz:

$${}_1I_{11}\dot{\omega}_1 + {}_1\omega_1 \times {}_1I_{11}\omega_1 + \sum_{i=1}^{4} {}_1\omega_1 \times {}_{M_i}I_{M_i M_i}\omega_{1,M_i} \tag{1.17}$$
$$= -\sum_{i=1}^{4} M_i + (\tau_R + \tau_P) \tag{1.18}$$

${}_1I_1$ stellt das Trägheitsmoment des Körpers 1, d.h. des Quadrokopters ohne rotierende Objekte da. ${}_{M_i}I_{M_i}$ hingegen ist das Trägheitsmoment, eines einzeln Rotors i. Bei Brushlesh Motoren ist es so, das "Wand" mitdreht. Dies muss der Kalkulation des Trägheitsmomentes ${}_{M_i}I_{M_i}$ mit einbezogen werden.
Da sich ${}_{M_i}\omega_{1,M_i}$ nur eine z - Komponente besitzt mit ω_{M_i}, lässt sich Gleichung folgendermassen vereinfachen.

$${}_1I_{11}\dot{\omega}_1 + {}_1\omega_1 \times {}_1I_{11}\omega_1 + \sum_{i=1}^{4} ({}_1\omega_1 \times e_z) \cdot I_M \omega_{M_i} \tag{1.19}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sum_{i=1}^{4} M_i \end{bmatrix} + (\tau_R + \tau_P) \tag{1.20}$$

1.2.1 Mathematisches Modell für + Konfiguration

Mit 1.1 folgt für die + Konfiguration

$${}_0\dot{r}_1 = A_{0,11}v_1 \tag{1.21}$$
$$m_{B_1}\frac{d_1}{dt}{}_1v_1 + {}_1\omega_1 \times m_{B_1}{}_1v_1 = m_{B_1}A_{1,0} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_i \end{pmatrix} \tag{1.22}$$
$$\dot{A}_{0,1} = A_{0,11}\tilde{\omega}_1 \tag{1.23}$$
$${}_1I_{11}\dot{\omega}_1 + {}_1\omega_1 \times {}_1I_{11}\omega_1 + \sum_{i=1}^{4} ({}_1\omega_1 \times e_z) \cdot I_{M M_i}\omega_{M_i} \tag{1.24}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sum_{i=1}^{4} M_i \end{bmatrix} + (\tau_R + \tau_P) = \begin{bmatrix} d(F_2 - F_4) \\ d(F_3 - F_1) \\ -\sum_{i=1}^{4} M_i \end{bmatrix} \tag{1.25}$$

Mit 1.7 und 1.9

$$ {}_0\dot{r}_1 = A_{0,1}{}_1v_1 \tag{1.26} $$

$$ m_{B_1}\frac{d_1}{dt}{}_1v_1 + {}_1\omega_1 \times m_{B_1}{}_1v_1 = m_{B_1}A_{1,0}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-g\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\\sum_{i=1}^{4} k_{TM_i}\omega_{1,M_i}^2\end{pmatrix} \tag{1.27} $$

$$ \dot{A}_{0,1} = A_{0,1}{}_1\tilde{\omega}_1 \tag{1.28} $$

$$ {}_1I_{1}{}_1\dot{\omega}_1 + {}_1\omega_1 \times {}_1I_{1}{}_1\omega_1 + \sum_{i=1}^{4}({}_1\omega_1 \times e_z)\cdot I_{MM_i}\omega_{M_i} \tag{1.29} $$

$$ = \begin{bmatrix} 0 & d\cdot k_T & 0 & -d\cdot k_T \\ -d\cdot k_T & 0 & d\cdot k_T & 0 \\ -k_{drag} & k_{drag} & -k_{drag} & k_{drag} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_1\omega_{M_1}^2 \\ M_2\omega_{M_2}^2 \\ M_3\omega_{M_3}^2 \\ M_4\omega_{M_4}^2 \end{bmatrix} \tag{1.30} $$

1.2.1.1 Quaternionen

Mit $\dot{q} = \frac{1}{2}q \otimes \begin{bmatrix}0\\\omega\end{bmatrix}$ gilt:

$$ {}_0\dot{r}_1 = [q \otimes {}_1v_1 \otimes \overline{q}]_{[1:3]} \tag{1.31} $$

$$ m_{B_1}\frac{d_1}{dt}{}_1v_1 + {}_1\omega_1 \times m_{B_1}{}_1v_1 = m_{B_1}\left[\overline{q} \otimes \begin{pmatrix}0\\0\\-g\end{pmatrix} \otimes q\right]_{[1:3]} + \begin{pmatrix}0\\0\\\sum_{i=1}^{4} k_{TM_i}\omega_{1,M_i}^2\end{pmatrix} \tag{1.32} $$

$$ \dot{q} = \frac{1}{2}q \otimes \begin{bmatrix}0\\\omega\end{bmatrix} \tag{1.33} $$

$$ {}_1I_{1}{}_1\dot{\omega}_1 + {}_1\omega_1 \times {}_1I_{1}{}_1\omega_1 + \sum_{i=1}^{4}({}_1\omega_1 \times e_z)\cdot I_{MM_i}\omega_{M_i} \tag{1.34} $$

$$ = \begin{bmatrix} 0 & d\cdot k_T & 0 & -d\cdot k_T \\ -d\cdot k_T & 0 & d\cdot k_T & 0 \\ -k_{drag} & k_{drag} & -k_{drag} & k_{drag} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_1\omega_{M_1}^2 \\ M_1\omega_{M_2}^2 \\ M_1\omega_{M_3}^2 \\ M_1\omega_{M_4}^2 \end{bmatrix} \tag{1.35} $$

1.2.1.2 Rotationsmatrix

Mit $q = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T$, $\dot{q} = \frac{1}{2}q \otimes \begin{bmatrix}0\\\omega\end{bmatrix}$, $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$ und

$$ R_{0,1}(q) = \begin{bmatrix} 1-2(q_2^2+q_3^2) & -2q_0q_3+2q_1q_2 & 2q_0q_2+2q_1q_3 \\ 2q_0q_3+2q_1q_2 & 1-2(q_1^2+q_3^2) & -2q_0q_1+2q_2q_3 \\ -2q_0q_2+2q_1q_3 & 2q_0q_1+2q_2q_3 & 1-2(q_1^2+q_2^2) \end{bmatrix} $$

$$ {}_0\dot{r}_1 = R_{0,1}(q)_1 v_1 \tag{1.36} $$

$$ m_{B_1}\frac{d_1}{dt}{}_1v_1 + {}_1\omega_1 \times m_{B_1}{}_1v_1 = R(q)^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_{B_1}\cdot g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{i=1}^4 k_{TM_i}\omega_{1,M_i}^2 \end{pmatrix} \tag{1.37} $$

$$ \dot{q} = \frac{1}{2} q \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \end{bmatrix} \tag{1.38} $$

$$ {}_1I_{11}\dot{\omega}_1 + {}_1\omega_1 \times {}_1I_{11}\omega_1 + \sum_{i=1}^{4} ({}_1\omega_1 \times e_z)\cdot I_{MM_i}\omega_{M_i} \tag{1.39} $$

$$ = \begin{bmatrix} 0 & d\cdot k_T & 0 & -d\cdot k_T \\ -d\cdot k_T & 0 & d\cdot k_T & 0 \\ -k_{drag} & k_{drag} & -k_{drag} & k_{drag} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}_{M_1}\omega_{M_1}^2 \\ {}_{M_1}\omega_{M_2}^2 \\ {}_{M_1}\omega_{M_3}^2 \\ {}_{M_1}\omega_{M_4}^2 \end{bmatrix} \tag{1.40} $$

1.2.2 Newton - Euler Gleichungen

Sei $\theta := \begin{bmatrix} {}_1r_1, & q \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^7$, $\dot{\theta} := \begin{bmatrix} {}_1v_1, & {}_1\omega_1 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^6$, $\ddot{\theta} := \begin{bmatrix} {}_1\dot{v}_1, & {}_1\dot{\omega}_1 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^6$ und $\omega_M(t) \in \mathbb{R}^4$

$$ M(\theta)\ddot{\theta} + \Theta(\theta, \dot{\theta}) = T(\dot{\theta}, \omega_M(t)) \tag{1.41} $$

mit

$$ M(\theta(t)) = \begin{bmatrix} \mathbf{m_{B_1}} \cdot \mathbf{E^{3x3}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}_\mathbf{1}\mathbf{I_1} \end{bmatrix} \tag{1.42} $$

$$ \Theta(\theta,\dot{\theta}) = \begin{bmatrix} m_{B_1}\left({}_1\omega_{1,y}\cdot {}_1v_{1,z} - {}_1\omega_{1,z}\cdot {}_1v_{1,y} + R_{1,3}^T(q)\cdot g\right) \\ m_{B_1}\left(-\left({}_1\omega_{1,x}\cdot {}_1v_{1,z} - {}_1\omega_{1,z}\cdot {}_1v_{1,x}\right) + R_{2,3}^T(q)\cdot g\right) \\ m_{B_1}\left({}_1\omega_{1,x}\cdot {}_1v_{1,y} - {}_1\omega_{1,y}\cdot {}_1v_{1,x} + R_{3,3}^T(q)\cdot g\right) \\ {}_1I_{1,z}\left({}_1\omega_{1,y}\cdot {}_1\omega_{1,z}\right) - {}_1I_{1,y}\left({}_1\omega_{1,z}\cdot {}_1\omega_{1,y}\right) \\ -\left[{}_1I_{1,z}\left({}_1\omega_{1,x}\cdot {}_1\omega_{1,z}\right) - {}_1I_{1,x}\left({}_1\omega_{1,z}\cdot {}_1\omega_{1,x}\right)\right] \\ {}_1I_{1,y}\left({}_1\omega_{1,x}\cdot {}_1\omega_{1,y}\right) - {}_1I_{1,x}\left({}_1\omega_{1,y}\cdot {}_1\omega_{1,x}\right) \end{bmatrix} \tag{1.43} $$

$$ = \begin{bmatrix} m_{B_1}\left({}_1\omega_{1,y}\cdot {}_1v_{1,z} - {}_1\omega_{1,z}\cdot {}_1v_{1,y} + R_{3,1}(q)\cdot g\right) \\ m_{B_1}\left({}_1\omega_{1,z}\cdot {}_1v_{1,x} - {}_1\omega_{1,x}\cdot {}_1v_{1,z} + R_{3,2}(q)\cdot g\right) \\ m_{B_1}\left({}_1\omega_{1,x}\cdot {}_1v_{1,y} - {}_1\omega_{1,y}\cdot {}_1v_{1,x} + R_{3,3}(q)\cdot g\right) \\ {}_1I_{1,z}\left({}_1\omega_{1,y}\cdot {}_1\omega_{1,z}\right) - {}_1I_{1,y}\left({}_1\omega_{1,z}\cdot {}_1\omega_{1,y}\right) \\ {}_1I_{1,x}\left({}_1\omega_{1,z}\cdot {}_1\omega_{1,x}\right) - {}_1I_{1,z}\left({}_1\omega_{1,x}\cdot {}_1\omega_{1,z}\right) \\ {}_1I_{1,y}\left({}_1\omega_{1,x}\cdot {}_1\omega_{1,y}\right) - {}_1I_{1,x}\left({}_1\omega_{1,y}\cdot {}_1\omega_{1,x}\right) \end{bmatrix} \tag{1.44} $$

$$ T(\dot{\theta},\omega_M(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{i=1}^4 k_T\omega_{M_i}^2 \\ I_{M1}\omega_{1,y}(-\omega_{M_1}+\omega_{M_2}-\omega_{M_3}+\omega_{M_4}) + d\cdot k_T\cdot\omega_{M_2}^2 - d\cdot k_T\cdot\omega_{M_4}^2 \\ I_{M1}\omega_{1,x}(\omega_{M_1}-\omega_{M_2}+\omega_{M_3}-\omega_{M_4}) - d\cdot k_T\cdot\omega_{M_1}^2 + d\cdot k_T\cdot\omega_{M_3}^2 \\ -k_{drag}\cdot\omega_{M_1}^2 + k_{drag}\cdot\omega_{M_2}^2 - k_{drag}\cdot\omega_{M_3}^2 + k_{drag}\cdot\omega_{M_4}^2 \end{bmatrix} \tag{1.45} $$

Für die optimale control Formulierung mit

- $x(t) = \begin{pmatrix}\theta, & \dot{\theta}\end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^{13}$
- $u(t) = \begin{pmatrix}\omega_{M_1}, & \omega_{M_2}, & \omega_{M_3}, & \omega_{M_4}\end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^4$

folgt:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_{0:2}(t) \\ x_{3:6}(t) \\ x_{7:12}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{7:9} \\ \frac{1}{2}x_{3:6} \otimes \begin{pmatrix}0, & x_{10:12}\end{pmatrix}^T \\ M(\theta(t))^{-1}(T(u(t), x(t)) - \Theta(x(t)) \end{pmatrix} \tag{1.46}$$

1.2.2.1 Hesse - und Jacobimatrix für Θ

$$R_{3,:} = \begin{bmatrix} -2q_0q_2 + 2q_1q_3 \\ 2q_0q_1 + 2q_2q_3 \\ 1 - 2(q_1^2 + q_2^2) \end{bmatrix} \tag{1.47}$$

$$\frac{dR}{dq_0} = \begin{bmatrix} -2q_2 \\ 2q_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.48}$$

$$\frac{dR}{dq_1} = \begin{bmatrix} 2q_3 \\ 2q_0 \\ -4q_1 \end{bmatrix} \tag{1.49}$$

$$\frac{dR}{dq_2} = \begin{bmatrix} -2q_0 \\ 2q_3 \\ -4q_2 \end{bmatrix} \tag{1.50}$$

$$\frac{dR}{dq_3} = \begin{bmatrix} 2q_1 \\ 2q_2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.51}$$