Jacobimatrix

Sei $x \in \mathbb{R}^{k\cdot 13}$, $u \in \mathbb{R}^{k\cdot 4}$, $f(x,u) \in \mathbb{R}^{k\cdot 13}$ und sei zu dem $f \in C^\infty$ Dann gibt es für die ODE $\dot{x} = f(x,u)$, weg der Lipschitzstetigkeit, nach Poincare eine eindeutige Lösung $\phi(x,u) \in \mathbb{R}^{k\cdot 13}$ mit

$$\dot{\phi}(x,u) = f(\phi(x,u),u)$$

Man betrachte nun die Differenzialgleichung zum Zeitpunkt k, dann folgt für die Differenzierung nach der x_i Komponente

$$\frac{d}{dx_i^k}\frac{d}{dt^k}\phi(x^k,u^k) = \frac{d}{dx_i^k} f(\phi(x^k,u^k),u^k)$$

Da $f \in C^\infty$ folgt das die Gleichung Sensitivität ist und die Ableitungen vertauscht werden können.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt^k}\frac{d}{dx_i^k}\phi(x^k,u^k) = \frac{d}{dx_i^k} f(\phi(x^k,u^k),u^k) = \frac{d}{dx^k}\Big[f(\phi(x^k,u^k),u^k)\Big]\cdot \frac{d}{dx_i^k}\phi(x^k,u^k) \\ + \frac{d}{du^k}\Big[f(\phi(x^k,u^k),u^k)\Big]\cdot \underbrace{\frac{du^k}{dx_i^k}}_{=0}\end{aligned}$$

mit $M^k = \frac{d}{dx_i^k}\phi(x^k,u^k) \in \mathbb{R}^{13\times 13}, i = 1..13$ folgt die ODE

$$\frac{d}{dt^k}M^k = \underbrace{\frac{d}{dx^k}\Big[f(\phi(x^k,u^k),u^k)\Big]}_{\in\mathbb{R}^{13\times 13}}\cdot M^k$$

mit der Anfangsbedingung $M_0^k = I \in \mathbb{R}^{13\times 13}$

Analog folgt für die Differenzierung nach der u_i Komponente

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt^k}\frac{d}{du_i^k}\phi(x^k,u^k) = \frac{d}{dx^k}\Big[f(\phi(x^k,u^k),u^k)\Big]\cdot \frac{d}{du_i^k}\phi(x^k,u^k) \\ + \frac{d}{du^k}\Big[f(\phi(x^k,u^k),u^k)\Big]\cdot \frac{du^k}{du_i^k}\end{aligned}$$

mit $N^k = \frac{d}{du_i^k}\phi(x^k,u^k) \in \mathbb{R}^{13\times 4}, i = 1..4$ folgt die ODE

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt^k}N^k = \underbrace{\frac{d}{dx^k}\Big[f(\phi(x^k,u^k),u^k)\Big]}_{\in\mathbb{R}^{13\times 13}}\cdot N^k \\ + \underbrace{\frac{d}{du^k}\Big[f(\phi(x^k,u^k),u^k)\Big]}_{\in\mathbb{R}^{13\times 4}}\cdot \underbrace{I^k}_{\in\mathbb{R}^{4\times 4}}\end{aligned}$$

mit folgender Anfangsbedingung $N_0^k = 0 \in \mathbb{R}^{13\times 4}$

Hessematrix

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt^k}\frac{d}{dx_j^k}\frac{d}{dx_i^k}\phi(x^k,u^k) &= \frac{d}{dx_j^k}\left\{\frac{d}{dx^k}\left[f(\phi(x^k,u^k),u^k)\right]\cdot\frac{d}{dx_i^k}\phi(x^k,u^k)\right\}\\
&= \left\{\frac{d}{dx^k}\frac{d}{dx^k}\left[f(\phi(x^k,u^k),u^k)\right]\cdot\frac{d}{dx_i^k}\phi(x^k,u^k)+\frac{d}{du^k}\frac{d}{dx^k}\left[f(\phi(x^k,u^k),u^k)\right]\cdot\underbrace{\frac{du^k}{dx_i^k}}_{=0}\right\}\\
&+\frac{d}{dx^k}\left[f(\phi(x^k,u^k),u^k)\right]\cdot\frac{d}{dx_i^k}\frac{d}{dx_i^k}\phi(x^k,u^k)
\end{aligned}
$$

mit $M^k = \frac{d}{dx_i^k}\phi(x^k,u^k) \in \mathbb{R}^{13\times 13}, i = 1..13$ und $O^k = \frac{d}{dx_i^k}\frac{d}{dx_j^k}\phi(x^k,u^k) \in \mathbb{R}^{13\times 13\times 13}, i = 1..13, j = 1..13$ folgt die ODE

$$
\frac{d}{dt^k}O_k = \frac{d}{dx^k}\frac{d}{dx^k}\left[f(\phi(x^k,u^k),u^k)\right]\cdot M_k + \frac{d}{dx^k}\left[f(\phi(x^k,u^k),u^k)\right]\cdot O_k
$$

mit folgender Anfangsbedingung $H_0^k = 0 \in \mathbb{R}^{13\times 13\times 13}$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt^k}\frac{d}{du_j^k}\frac{d}{dx_i^k}\phi(x^k,u^k) &= \frac{d}{du_j^k}\left\{\frac{d}{dx^k}\left[f(\phi(x^k,u^k),u^k)\right]\cdot\frac{d}{dx_i^k}\phi(x^k,u^k)\right\}\\
&= \left\{\frac{d}{dx^k}\frac{d}{dx^k}\left[f(\phi(x^k,u^k),u^k)\right]\cdot\frac{d}{du_i^k}\phi(x^k,u^k)\right.\\
&\left.+\frac{d}{du^k}\frac{d}{dx^k}\left[f(\phi(x^k,u^k),u^k)\right]\cdot\frac{du^k}{du_j^k}\right\}\cdot\frac{d}{dx_i^k}\phi(x^k,u^k)\\
&+\frac{d}{dx^k}\left[f(\phi(x^k,u^k),u^k)\right]\cdot\frac{d}{du_j^k}\frac{d}{dx_i^k}\phi(x^k,u^k)
\end{aligned}
$$

mit $M^k = \frac{d}{dx_i^k}\phi(x^k,u^k) \in \mathbb{R}^{13\times 13}, i = 1..13$, $N^k = \frac{d}{du_j^k}\phi(x^k,u^k) \in \mathbb{R}^{13\times 4}, i = 1..13$ und $P^k = \frac{d}{du_j^k}\frac{d}{dx_i^k}\phi(x^k,u^k) \in \mathbb{R}^{13\times 13\times 4}, i = 1..13, j = 1..4$ folgt die ODE in der Matrixschreibweise

$$
\begin{aligned}
P^k = H_{x,u}\phi(x,u) = J_u(M_k)^T &= \left\{\nabla_u\left(\nabla_x\phi\cdot\nabla_x f(\phi,u)\right)\right\}^T\\
&= \left\{\nabla_x\phi\cdot\nabla_u\nabla_x f(\phi,u)+\nabla_{ux}\phi\cdot\nabla_x f(\phi,u)\right\}^T\\
&= \left\{J_u\nabla_x f(\phi,u)\cdot J_x\phi+\nabla_{ux}\phi\cdot\nabla_x f(\phi,u)\right\}\\
&= \left\{(J_x\nabla_x f(\phi,u)\cdot J_u\phi + J_u\nabla_x f(\phi,u))\cdot J_x\phi + J_x f(\phi,u)\cdot J_u\nabla_x\phi\right\}\\
&= \left\{\underbrace{\Big(H_{x,x}f(\phi,u)\cdot N^k\phi + H_{u,x}f(\phi,u)\Big)\cdot M^k}_{\text{Hier ein Dimesionsproblem, Warum?}} + J_x f(\phi,u)\cdot P^k\right\}
\end{aligned}
$$