Листок 3

Задача 1: Пусть $(a_1, b_1) \supset (a_2, b_2) \supset \ldots$ - последовательност вложеных интервалов, покажите что пересечение $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n)$ может: быть пустым, состоять из 1 точки, быть интервалом

Решение:
1) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n)$ - интервал, ну тут достаточно понятно: $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-n, n) = (-1, 1)$ - вот и интервал
2) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n)$ - точка, тоже очев : $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0)$
3) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n) = \emptyset$ тут уже посложнее, идея в том что бы получить конструкцию в которой $a_n = b_n$ в контексте задачи такое получить можно только если одна из границ равна константе, а другая стремится к ней, например:

$$\begin{gathered} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (n, +\infty) = (+\infty, +\infty) = \emptyset \\ \text{т.к. на натуральных числах } n \longrightarrow +\infty \end{gathered} \tag{1}$$

$$\begin{gathered} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n}\right) = (0, 0) = \emptyset \\ \text{т.к. на натуральных числах } \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \end{gathered} \tag{2}$$

Задача 2: Найдите пересечение: $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (n, +\infty)$
Решение: Смотрите (2)

Задача 3: Докажите, что последовательность $x_n = \ln n$ не является последовательностью Коши, хотя выполняется $|x_{n+1} - x_n| \longrightarrow 0$
Решение: Вспомним определение последовательности Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \text{ такое, что } |x_n - x_m| < \varepsilon \ \forall n, m \geq N \tag{3}$$

Возьмем $x_{99} = \ln(99) \approx 4.595\ldots$ и $x_{100} = \ln(100) \approx 4.605\ldots$ и $\varepsilon = 0.00001 > 0$
По этому примеру очевидно почему не хватает смотреть только на соседей!

■