Листок 4

Производящие функции

→ ссылка на лекцию ←

Базовые задачи:

Задача 1:
а) Вычислите $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$
Решение:
Мы помним что $(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$, давайте возьмем производную от обеих частей равенства и посчитаем:

$$((1-x)^n)' = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right)'$$

$$n(1-x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}$$

т. к. $k = 0$ нулевое слагаемое можно вычеркнуть из суммы и начинать счет с $k = 1$ (1)

$$n(1-x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1} \text{ подставим } x = 1 \text{ и получим буквально ответ:}$$

$$n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$$

б) Выписаны все возможные строки из нулей и единиц длинны n. Сколько всего выписано единиц?
Решение:
Нам нужно посчитать кол-во вариантов "расставить" каждое количество единиц от 1 до n

$$\binom{n}{k} \text{ - это кол-во способов расставить k единиц в n ячеек} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \text{нам нужно посчитать сумму} \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \quad \begin{array}{c}\text{- посчитать кол во способов}\\ \text{и домножить на количество единиц}\end{array} \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1} \text{ - мы знаем из пункта а)}$$

Задача 2: Рассмотрим уравнение $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$. Пусть a_n - количество решений этого уравнения в целых числах$(0, 1, 2, \ldots)$.
а) Докажите, что $F(x) = (1 + x + x^2 + \ldots)^k$ - производящая функция последовательности a_n
Решение:
Вспомним задачу о билетах из лекции,

$$(1 + x + x^2 + \ldots)^k = 1 + \ldots + x^k \Longrightarrow \begin{array}{c}\text{в таком выражении всегда найдется коофицент,}\\ \text{который ровно соответсвтует количеству способов}\\ \text{представить натуральное число n с помощью иксов}\end{array} \tag{3}$$

■

б) Найдите явно коофиценты
Решение:
ХЭЗЭ пока очень лень думать

Задача 3: Вычислите коофиценты ряда $(2x^2 - 3x + 1)^{-1}$
Решение:
Нужно найти такой ряд, что:

$$(2x^2 - 3x + 1)^{-1} = \frac{1}{2x^2 - 3x + 1} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \tag{4}$$

$$(2x^2 - 3x + 1)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) = 1 \tag{5}$$

Рассмотрим $2x^2 - 3x + 1$ как квадратное уравнение:

$$D = b^2 - 4ac = 9 - 2 \cdot 4 = 1$$
$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{1}}{4} = \frac{4}{4} = 1,\ x_2 = \frac{3 - \sqrt{1}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \tag{6}$$
$$\text{It seems that } 2x^2 - 3x + 1 = 2(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x-1)(2x-1)$$