Intro Freestyle lecture про производящии функции

Введем несколько понятий для подготовки:

- **Определение 1.**

Напомним:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \text{ - биноминальный коофицент} \tag{1}$$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \tag{2}$$

$$(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^k \tag{3}$$

- **Определение 2.** Формальный степенной ряд - выражение вида:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{4}$$

На формальных степенных рядах можно определить операции, сложения (+), умножения (·):

$$H = F + G \Longleftrightarrow \forall n : c_n = a_n + b_n \tag{5}$$

$$\begin{gathered} H = F * G \Longleftrightarrow \forall n : c_n = \sum_{k+l=n} a_k b_l \\ \text{На примере:} \\ \text{c}_0 = a_0 b_0 \\ c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 \\ \text{c}_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + b_0 a_2 \\ \text{и т.д. ...} \end{gathered} \tag{6}$$

Таким образом формальные степенные ряды образуют кольцо $\mathbb{C}[[x]] \supset \mathbb{C}[x]$, будем брать комплексные коофиценты для общьности доказательства.

Определим для себя **обратимые элементы** в этом кольце:

Пример нахождения обратного элемента: $f(x) = 1 + x + 0x^2 + 0x^3 + ... = (1-x) \in \mathbb{C}[[x]]$

$$(1-x)^{-1} = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... \tag{7}$$

Проверим:

$$\begin{aligned} (1-x)(1+x+x^2+...) &= 1 + x + x^2 + x^3 - x(1 + x + x^2 + ...) \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + ... - x - x^2 - x^3 - ... = 1 \end{aligned} \tag{8}$$

- **Предложение 1** (критерий существования обратимого элемента):

Пусть $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \in \mathbb{C}[[x]]$, тогда обратимый элемент (f^{-1}) существует, тогда и только тогда $\boldsymbol{a_0 \neq 0}$

- **Proof:**
  1) $\Longleftarrow$
  Пусть:

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \text{ тут нет } a_0$$
$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots \text{ тут есть } b_0 \tag{9}$$

Тогда: $f(x)g(x) = b_0 a_1 x + \ldots$ легко увидеть, что не останется членов без x, следовательно $f(x)g(x)$ не может равнятся 1

■

2) $\Longrightarrow$
$f(x)g(x) = 1$
$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x + \ldots\ (a_0 \neq 0),\ f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x + \ldots\ (a_0 \neq 0)$
Дано $f(x)$, пытаемся найти $g(x)$. заменим $b_0 = \frac{1}{a_0}$,
тогда в $a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0$ можно найти b_1 т.к. это единственная неизвестная,

$$a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0 \text{ находим } b_2 \text{ аналогично,}$$
$$a_0 b_3 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_3 b_0 = 0 \text{ находим } b_3 \text{ аналогично} \tag{10}$$
$$\text{и т.д. } \ldots$$

■

Определим операцию производной для формальных степенных рядов:

- **Определение 3:** Производной в $\mathbb{C}[[x]]$ называется операция:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} : \mathbb{C}[[x]] \longrightarrow \mathbb{C}[[x]] \tag{11}$$

удовлетворяющая свойствам:
1) она **линейна**
2) $(fg)' = f'g + fg'$
3) $(x^n)' = nx^{n-1}$
  - в общем если забыть, что это непонятная бесконечная штука, то все работает как обычно ©

Еще один пример: Найдем $\left((1-x)^2\right)^{-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$:
Мы уже знаем, что $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ из (7), а теперь мы можем просто взять производную

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots$$
$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \tag{12}$$
$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots$$

Теперь нам нужно вывести $\binom{-n}{k}$:
Рассмотрим разложение $(1+x)^-n$ в ряд Тейлора:

Определим производящую функцию для последовательности $a_k = \binom{-n}{k}$:

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} x^k \tag{13}$$

Согласно обобщённой биномиальной теореме для $\alpha = -n$:

$$(1+x)^-n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} x^k \quad \text{при } |x| < 1 \tag{14}$$

Преобразуем выражение:

$$(1+x)^-n = (1-(-x))^-n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} (-x)^k \tag{15}$$

где мы использовали тождество:

$$(1-t)^-n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} t^k \tag{16}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x^k в обоих разложениях:

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k} \tag{17}$$

что завершает доказательство.

■

- **Определение 4:** Как мы поняли из доказательства, производящая функция последовательности - это формальный степенной ряд с кофицентами соответствующими членам последовательности.

Собственно теперь к самим задачкам:

Задача 1: Определим числа Фибоначи через производящие функции:
Решение:
Напомним, что числа Фибоначи это последовательность где:

$$\begin{gathered} a_0 = 1 \\ a_1 = 1 \\ a_n = a_{i-1} + a_{i-2}, n > 1 \end{gathered} \tag{18}$$

Рассмотрим формальный степенной ряд $F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ - как производящую функцию для последовательности Фибоначи
Рассмотрим выражение: $F(x) - xF(x) - x^2 = 1$, тогда :

$$\begin{gathered} \text{коофицент перед } x^2 : a_2 - a_1 - a_0 = 0 \\ \text{перед } x^3 : a_3 - a_2 - a_1 = 0 \\ \text{и т.д.} \end{gathered} \tag{19}$$

Нам останется посчитать коофиценты при $x_0 : a_0,\ x_1 : a_1 - a_0$
Тогда:

$$\begin{gathered} F(x) - xF(x) - x^2 F(X) = (1 - x - x^2) F(X) = 1 \Longrightarrow \\ \Longrightarrow F(x) = \frac{1}{1 - x - x^2} \end{gathered} \tag{20}$$

$$\begin{gathered} 1 - x - x^2 = (x - \alpha)(\beta - x) \\ D = b^2 - 4ac = 5 \\ \alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{5}, \quad \beta = \frac{-1 - \sqrt{5}}{5} \end{gathered} \tag{21}$$

С другой стороны:

$$\begin{gathered} \frac{1}{1 - x - x^2} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta} = \frac{A(-x + \beta) + B(x - \alpha)}{(x - \alpha)(\beta - x)} \Longrightarrow \\ \Longrightarrow 1 = A(\beta - x) + B(x - \alpha) \\ \text{Подставим:} \\ x = \beta : 1 = B(\beta - \alpha) \Longrightarrow B = \frac{1}{\beta - \alpha} \\ x = \alpha : 1 = A(\beta - \alpha) \Longrightarrow A = \beta \end{gathered} \tag{22}$$

Тогда:

$$\begin{gathered} F(x) = \frac{1}{\beta - \alpha} \left(\frac{\frac{1}{\beta}}{1 - \frac{x}{\beta}} - \frac{\frac{1}{\alpha}}{1 - \frac{x}{\alpha}} \right) = \frac{1}{\beta - \alpha} \left(\frac{1}{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x}{\beta} - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x}{\alpha} \right)^k \\ = \frac{1}{\beta - \alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\beta^{k+1}} - \frac{1}{\alpha^{k+1}} \right) x^k \Longrightarrow \\ \Longrightarrow a_n = \frac{1}{\beta - \alpha} \left(\frac{1}{\beta^{n+1}} - \frac{1}{\alpha^{n+1}} \right) \end{gathered} \tag{23}$$

Вот мы получили формулу n-ого числа Фибоначи.

■

Задача 2 (Задача о счастливом билете): Троллейбусный (трамвайный) билет имеет номер, состоящий из шести цифр. Билет считается счастливым, если сумма первых трёх цифр равна сумме последних трёх, например, 024321 . Найдите количество счастливых билетов.

Решение:

Для начала построим биекцию из множества счастливых билетов, в некоторое множетство с которым работать намного удобнее:

Пусть X - мн-во счастливых билетов, Y - множество билетов с суммой 27, докажем, что существует биекция $f : X \longrightarrow Y$

Пусть, если a - цифра, то $a^* = 9 - a$, например: $0^* = 9, 1^* = 8$ и т. д. ...

Тогда существует биекция так, как:

$$a + b + c + d + e + f = a + b + c + d^* + e^* + f^* = a + b + c + -d - e - f + 27 = 27 \tag{24}$$

Отлично, теперь вместо множества счастливым билетов рассматривать множество билетов с суммой 27, обозначим его за N

Пусть $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^9$, тогда:

$$\begin{aligned}(f(x))^6 = \left(1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^9\right)^6 = \\ = 1 + ... + Nx^{27} + ... + x^{54}\end{aligned} \tag{25}$$

Тут нас не будет интересовать ничего, кроме коофицента N перед x^{27}, так как N - это и есть количество билетов с суммой 27.

Почему это так?

$$\begin{gathered}\underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^9}_{\text{девять членов} \Rightarrow \text{девять цифр}} \\ \underbrace{\left(1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^9\right)^6}_{\text{шестая степень} \Rightarrow \text{шесть мест}}\end{gathered} \tag{26}$$

$\Longrightarrow$ Коофицент N способ представить число 27 в виде суммы 6 цифр из набора: $\{1, ..., 9\}$

С другой стороны, $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^9 = \frac{1-x^{10}}{1-x}$, так как мы можем рассмотреть это как геометрическую прогрессию с $a_1 = 1$ и знаменателем x.

Напомним, что сумма первых n членов геометрической прогрессии вычисляется через формулу:

$$S_n = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r} \tag{27}$$

$$\begin{gathered}f(x) = \frac{1 - x^{10}}{1 - x} \\ (f(x))^6 = \left(\frac{1 - x^{10}}{1 - x}\right)^6 = \left(1 - x^{10}\right)^6 (1 - x)^{-6} = \\ = \underbrace{\left(1 - 6x^{10} + 15x^{20} + ...\right)}_{\text{первая часть}} \underbrace{\sum_{k=0}^{6} \binom{6 + k - 1}{k} x^k}_{\text{вторая часть}}\end{gathered} \tag{28}$$

Получить x^{27} мы можем только используя такие суммы степеней:

$$27 = 27 + 0 = 10 + 17 = 20 + 7 \tag{29}$$

Тогда возьмем коофиценты при этих степенях из первой части уравнения и перемножем их с необходимыми из второй части что бы найти N:

$$N = 15\binom{12}{6} + 6\binom{22}{17} + 1\binom{32}{27} = 55252 \quad \text{- это и есть наш ответ!!!!!} \tag{30}$$