

Листок 1

Вещественные числа:

Задача 1:

- а) Обязательно ли сумма рационального и иррационального числа быть иррациональной?
 б) Обязательно ли произведение рационального и иррационального числа быть иррациональным?
 с) Обязательно ли сумма двух иррациональных чисел будет иррациональной?

Решение :

а) По определению мы знаем, что рациональное число это число, которое можно представить в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$ где $m \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$

Пусть $a + b$ - сумма рациональных чисел ($a \in \mathbb{Q}$ and $b \in \mathbb{Q}$), тогда эту сумму можно представить в виде: $\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2}$, где $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ и $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$

Приведем к общему знаменателю $\frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}$, нетрудно увидеть, что эта дробь так же удовлетворяет определению рационального числа выше. Из вышесказанного можно сделать вывод, что сумма двух рациональных чисел, рациональна.

Рассмотрим сумму $q + p$ где $q \in \mathbb{Q}$, а $p \notin \mathbb{Q}$ (как раз то, что нам нужно по условию)

Пусть $q + p = c$, Предположим, что $c \in \mathbb{Q}$, тогда выразим p , $p = c - q = c + (-q) \Rightarrow p$ сумма некоторых рациональных чисел, тогда $p \in \mathbb{Q}$.

Ответ: не обязательно.

б) Пусть $q \in \mathbb{Q}$ (рациональное число), а $p \notin \mathbb{Q}$ (иррациональное число). Рассмотрим их произведение: $q \cdot p = r$

Предположим, что $r \in \mathbb{Q}$. Тогда, если $q \neq 0$, можно выразить p : $p = \frac{r}{q}$

Так как r и q — рациональные числа, их частное $\frac{r}{q}$ также рационально (поскольку рациональные числа замкнуты относительно деления на ненулевое рациональное число). Но это противоречит тому, что p иррационально.

Вывод: Если $q \neq 0$, то произведение $q \cdot p$ обязательно иррационально. Однако если $q = 0$, то $q \cdot p = 0 \in \mathbb{Q}$.

Ответ: Не обязательно, если рациональное число равно нулю. В остальных случаях — обязательно.

с) Рассмотрим два иррациональных числа:

1. $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$. Их сумма:

$$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \in \mathbb{Q}$$

2. $\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$. Их сумма:

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Вывод: Сумма двух иррациональных чисел может быть как рациональной (если они противоположны), так и иррациональной.

Ответ: Не обязательно.

Задача 2: Покажите, что $\sqrt{2}$ иррациональное число.

Решение:

От противного, предположим что $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, тогда его можно представить в виде:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$$

Важно учесть, что дробь несократима, по определению рационального числа $\Rightarrow \gcd(m, n) = 1$

$$\begin{aligned}\sqrt{2} = \frac{m}{n} &\Rightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2}, \\ 2n^2 &= m^2\end{aligned}$$

Тогда m^2 четное число $\Rightarrow m$ тоже четное число. Получим:

$$\begin{aligned}m &= 2m' \\ 2n^2 &= 4(m')^2\end{aligned}$$

поделим обе части на 2:

$$n^2 = 2(m')^2$$

Аналогично рассуждениям выше, n^2 четное, а значит n четное. $\Rightarrow \gcd(n, m) \neq 1$, так как оба числа четные.

Противоречие $\Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Задача 3:

Пусть $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$ - последовательность вложенных отрезков.

Покажите, что $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$.

Решение:

От противного, пусть $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \emptyset$.

Пусть $L = \{a_1, a_2, \dots\}$ и $R =$

$\{b_1, b_2, \dots\}$ множества левых и правых концов отрезков в последовательности, соответственно.

Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$ таких, что $a_n \leq b_n : a_n \leq c \leq b_n$ (Аксиома полноты)

Легко заметить, что c будет лежать в пересечении, **Противоречие!**

Про последовательности:

Задача 4: Докажите, что последовательность Коши ограничена.

Решение:

Напомним, что последовательность a_n называют последовательность Коши, если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \text{ такое, что } |a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$$

Идея, такая мы хотим ограничить все, что выше N , а затем все остальное.

По определению последовательности Коши мы знаем что для всех номеров $> N$ выполняется:

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad (\text{можем раскрыть})$$

$$-\varepsilon < a_n - a_m < \varepsilon$$

$$-\varepsilon + a_m < a_n < \varepsilon + a_m$$

(поздравляю мы ограничили номера выше N)

Заметим, что оставшаяся часть последовательности - это конечное количество членов от a_1 до a_{N-1} . А у конечного количества элементов можно взять максимум и минимум.

Сопоставив 2 этих факта мы получим, что последовательность Коши ограничена

Задача 5: Докажите, что если последовательность сходится, то она последовательность Коши.

Решение:

Пусть a_n — сходящаяся последовательность:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$$

.

Это значит:

$$\forall \varepsilon > 0$$

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

.

Тогда для любых $m, n \geq N$:

$$|a_n - a_m| = |a_n - A + A - a_m| \leq |a_n - A| + |a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Следовательно, последовательность a_n — последовательность Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N : |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Задача 6:

а) Докажите, что ограниченная монотонно возрастающая последовательность сходится и покажите, что предел равен ее точной верхней грани.

б) Приведите пример последовательности, чей предел не равен ее точной верхней/нижней грани.

Решение:

а) Поскольку множество значений $\{x_n\}$ непусто и ограничено сверху, существует *точная верхняя грань*:

$$a = \sup x_n$$

По определению супремума:

- $x_n \leq a$ для всех $n \in \mathbb{N}$
- Для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что:

$$a - \varepsilon < x_N \leq a$$

В силу монотонного возрастания для всех $n \geq N$:

$$x_N \leq x_n \leq a$$

Следовательно, для $n \geq N$:

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

Это означает, что $\lim(n \rightarrow \infty) x_n = a$.

б) Очевидно кажется:

$$x_n = (-1)^n$$

Решения задач на сходимость последовательностей

Напомним: из задачи 6а) мы знаем, что ограниченная монотонно возрастающая последовательность сходится.

Задача 7(а)

Рассмотрим последовательность: $x_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

Решение:

Заметим, что каждый член можно разложить: $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

Тогда сумма становится телескопической:

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Предел при $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 - 0 = 1$$

Ответ: Последовательность сходится к 1.

Задача 7(б)

Рассмотрим последовательность:

$$x_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

1. Ограниченность: Для

$$k \geq 2$$

верно неравенство:

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

Тогда:

$$x_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$$

Сумма справа является телескопической:

$$\sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n}$$

Таким образом:

$$x_n < 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2$$

Последовательность ограничена сверху числом 2.

2. Монотонность: Последовательность строго возрастает, так как:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{(n+1)^2} > x_n$$

Ответ: Последовательность монотонно возрастает и ограничена сверху, следовательно, она сходится.

Задача 7(с)

Рассмотрим последовательность:

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

1. Ограниченность: Рассмотрим подпоследовательность

$$x_{2^n}$$

:

$$x_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

Разобьём сумму на блоки:

$$x_{2^n} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)$$

Каждый блок содержит

$$2^{k-1}$$

слагаемых, каждое из которых не меньше

$$\frac{1}{2^k}$$

:

$$\frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k} > 2^{k-1} * \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}$$

Таким образом:

$$x_{2^n} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}$$

Последовательность неограничена.

2. Монотонность: Последовательность строго возрастает, так как:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{n+1} > x_n$$

Ответ: Последовательность монотонно возрастает и неограничена, следовательно, она расходится к

$$+\infty$$

.

Теорема Штольца:

Задача 8:

Найдём предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{\ln n} \quad (1)$$

Решение:

Тогда:

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\ln(n+1) - \ln n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \quad (2)$$

Используем асимптотическое равенство:

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \approx \frac{1}{n} \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (3)$$

Получаем:

$$\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (4)$$

По теореме Штольца:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = 1 \quad (5)$$

Ответ: 1

Задача 9: Пусть $a_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$, покажите, что $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$

Обозначим числитель как $A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, знаменатель — $B_n = n$.

Применим теорему Штольца:

- Последовательность $B_n = n$ строго возрастает и $B_n \rightarrow \infty$.
- Разность $A_{\{n+1\}} - A_n = a_{\{n+1\}}$.
- Разность $B_{\{n+1\}} - B_n = 1$.

Тогда:

$$\frac{A_{\{n+1\}} - A_n}{B_{\{n+1\}} - B_n} = a_{n+1}. \quad (6)$$

Следовательно, по теореме Штольца:

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \rightarrow a. \quad (7)$$

Задача 10 Решение(мне уже лень писать тут условие)

Исследуем сходимость последовательности:

$$\frac{a^n}{n} \quad (8)$$

Пусть:

- $A_n = a^n, B_n = n$.
- Тогда $A_{n+1} - A_n = a^{n+1} - a^n = a^n(a - 1)$ и $B_{n+1} - B_n = 1$.

Следовательно:

$$\frac{A_{n+1} - A_n}{B_{n+1} - B_n} = a^n(a - 1) \rightarrow \infty \quad (9)$$

Значит, по теореме Штольца:

$$\frac{a^n}{n} \rightarrow \infty \quad (10)$$

Ответ: последовательность расходится.

Бонусные задачи**Задача 11:**

Решение:

Задача 12:

а) Сто различных чисел таковы, что сумма любых двух рациональна. Докажите, что все эти числа рациональны.

Решение: Возьмем $a \neq b \neq c$ из нашего набора, тогда по условию задачи:

$$\begin{aligned} a + b &\in \mathbb{Q} \\ b + c &\in \mathbb{Q} \\ a + c &\in \mathbb{Q} \end{aligned} \quad (11)$$

Попытаемся выразить a :

$$(a + b) + (a + c) - (b + c) = 2a + b - b + c - c = 2a \quad (12)$$

Видно что справа рациональное число, тогда $2a \in \mathbb{Q}$ тогда $a \in \mathbb{Q}$

Аналогично можно проделать с любым числом из набора!

■

б) Верно ли то же самое, если разность двух любых двух рациональна?

Множество может состоять из иррациональных чисел, у которых попарные разности рациональны. Например, $\{\sqrt{2} + q \mid q \in \mathbb{Q}\}$.

Ответ: нет

Задача 13: Может ли, при каких либо рациональных значениях $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ выполниться равенство:

$$(a_1 + b_1\sqrt{2})^2 + (a_2 + b_2\sqrt{2})^2 + \dots + (a_n + b_n\sqrt{2})^2 = 7 + 5\sqrt{2} \quad (13)$$

Решение: Рассмотрим i -е слагаемое:

$$(a_i + b_i\sqrt{2})^2 = a_i^2 + 2\sqrt{2}a_ib_i + 2b_i^2 \quad (14)$$

Что бы равенство выполнялось нужно, чтобы в частности выполнялось условие:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n 2a_ib_i &= 5 \\ 2 \sum_{i=1}^n a_ib_i &= 5 \end{aligned} \quad (15)$$

Задача 14: Докажите что $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ иррациональное число

Решение:

В номере 2 мы уже доказали, что $\sqrt{2}$ рационален, используя условие несократимости в представлении рационального числа в виде дроби $\frac{m}{n}$, Аналогично можно доказать, что $\sqrt{6}$ рационален.

Найдем такую сумму иррациональных чисел, которая равна рациональному числу:

Рассмотрим $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Возведём обе части в квадрат:

$$\begin{aligned} x^2 &= (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \\ x^2 &= 2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + 3 \end{aligned}$$

Упростим выражение:

$$x^2 = 5 + 2 \cdot \sqrt{6}$$

Перенесём рациональную часть:

$$x^2 - 5 = 2 \cdot \sqrt{6}$$

Теперь разделим обе части на 2:

$$\frac{x^2 - 5}{2} = \sqrt{6}$$

По предположению, если x рациональное, то левая часть уравнения рациональна. Однако правая часть $\sqrt{6}$ иррациональна. Получаем противоречие, так как рациональное число не может быть равно иррациональному.

Следовательно, исходное предположение неверно, и $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ является иррациональным числом. ■