Листок 2

Топология в $\mathbb{R}^n$

Задача 1: Приведите пример множествак, которое открыто и замкнуто.
Решение: Таких всего 2, это: $\mathbb{R}, \emptyset$

Задача 2: Верно ли, что пересечение любого числа замкнутых множеств, замкнуто?
Решение:
Нужно доказать, что

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \text{ замкнуто, где } \forall \lambda \in \Lambda : U_\lambda \text{ - замкнуто} \tag{1}$$

Пусть выражение (1) равно A, если A замкнуто, то $\mathbb{R} \setminus A$ - открыто.

$$\mathbb{R} \setminus A = \mathbb{R} \setminus \bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \tag{2}$$

получили обьединение замкнутых множеств, такое обьединение **всегда замкнуто!**

■

Задача 3: Верно ли, что пересечение любого числа открытых множеств открыто?
Решение:
Нужно доказать, что

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \quad \text{открыто, где } \forall \lambda \in \Lambda : U_\lambda \text{ - открыто} \tag{3}$$

Рассмотрим пересечение:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \tag{4}$$

(4) явно пересечение открытых множеств, заметим что оно сходится к точке, а именно к 0. {0} - не открыто!
Ответ: не выполняется

Задача 4: Докажите,что непрерывность через определение “прообраз открытого открыт” совпадает с определением через $\varepsilon - \delta$.

Решение: пока мне не поддалось

Задача 5: Приведите пример подмножетсва:
$U \subset K$, где K - компакт, так, что U не компакт т.е. условие замкнутости с лекции убрать нельзя

Решение:
Из лекции мы помним, что:

$$[A, B] \text{ - компакт} \tag{5}$$

очевидно что:

$$[A, B) \subset [A, B] - \text{замкнуто и не компакт} \tag{6}$$

Ответ: смотрите (6)

Задача 6: Пусть K - компакт и $f : K \to \mathbb{R}$ - непрерывна, докажите, что $f(K)$ - компакт.

Решение: Вспомним определение непрерывности через открыте множетсва (**Прообраз открытого тоже открыт**).
Рассмотрим некое покрытие для $f(K)$,

$$\mathbb{R} \supset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \supset f(K) \tag{7}$$

По определению это пересечение открытых множеств, тогда мы можем рассмотреть их прообразы $U_{\lambda'}$, которые тоже будут открыты

$$\bigcap_{\lambda' \in \Lambda} U_{\lambda'} \supset K \tag{8}$$

Так как K - компакт, из (8) можно извлеч, конечное подпокрытие, если применить к нему f то получим конечное подпокрытие для $f(K) \Rightarrow f(K)$ - компакт, я когда-нибудь нарисую картинку

■

Задача 7: Существует ли непрерывная сюрьекция отрезка на плоскость? То есть сюрьективная функция $f : [A, B] \to \mathbb{R}^2$?

Решение: Вспомним, что $[A, B]$ - компакт, из **задачи 6**: $f([A, B])$ - тоже компакт. $\mathbb{R}^2$ не компакт, так что **сюрьекции не существует!**

Задача 8: Пусть $K \subset \mathbb{R}$ - компакт, а $f : K \to \mathbb{R}$ - непрерывная функция.
a) Докажите, что непрерывная функция на компакте принимает минимальное и максимальное значение
Решение:
K - компакт, тогда $f(K)$ тоже компакт, тогда $f(K)$ - замкнуто и ограничено $\Rightarrow f$ ограничена на K
Так как $f(K)$ ограничено существуют

$$m = \inf_{x \in K} f(x),\ \ M = \sup_{x \in K} f(x) \tag{9}$$

$f(K)$ - замкнуто $\Rightarrow$ содержит все свои предельные точки, M - это верхняя грань $f(K)$, значит существует последовательность $\{y_n\} \subset f(K)$, которая сходится к M
Но $f(K)$ - замкнуто, значит $M \in f(X)$
Аналогично для m!
Следовательно существуют такие точки $k_{\min}, k_{\max} \in K$ в которых функция примет значения m и M

■

b) Приведите пример функции f : R ⟶R, которая не достигает своих точных граней на некомпактном множестве.
Решение:

$$\begin{gathered} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = x \end{gathered} \tag{10}$$

$\mathbb{R}$ - не компакт

c) Покажите, что условие непрерывности существенно: приведите пример разрывной функции на компакте, не достигающей своих точных граней.
Решение:

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ если } x \in (0,1) \\ 0, \text{ если } x = 0 \text{ или } x = 1 \end{cases} \quad (11)$$
$$D_f = [0,1] \text{ - компакт}$$

Функция никогда не примет свой супремум и инфинум

Задача 9: Докажите, что компакт в $\mathbb{R}$ замкнут и ограничен (доказав это и пользуясь теоремой с лекции, получаем, что компакт в $\mathbb{R}^n \Longleftrightarrow$ замкнут и ограничен).

Решение:
Пусть $K \subset \mathbb{R}$ - компакт
Нам нужно доказать 2 факта по очереди от противного:

1) K ограничено:
- Предположим, что множество K не ограничено.
- Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ найдётся точка $x_m \in K$ такая, что $|x_m| > m$.
- Рассмотрим открытые шары $B_m = B_1(x_m)$. Их объединение покрывает K:
- Поскольку K компактно, существует конечное подпокрытие $\{B_{m_1}, ..., B_{m_k}\}$.
- Среди $\{x_{m_1}, ...x_{m_k}\}$ есть точка с максимальной нормой, скажем $\left|x_{m_k}\right| = M$.
- Тогда любая точка $x \in K$ с $|x| > M + 1$ не покрывается ни одним из B_{m_i}, так как:

$$\left|x - x_{m_i}\right| \geq |x| - \left|x_{m_i}\right| > (M + 1) - M = 1. \quad (12)$$

Противоречие: конечное подпокрытие не может покрыть всё K.

■

2) K замкнуто:

Метод: Через предельные точки.

- Пусть x' — предельная точка K.
- Тогда существует последовательность $\{x_m\} \subset K$ такая, что $x_m \to x'$.
- Рассмотрим открытое покрытие

$$\mathbb{R}^n \setminus \{x'\} \quad (13)$$

. Оно покрывает K, так как x' может не лежать в K.
- По компактности K существует конечное подпокрытие, но $x_m \to x'$, а значит, начиная с некоторого m, все x_m попадают в сколь угодно малую окрестность x', не покрытую этим конечным набором.

■