Листок 1

Вещественные числа:

Задача 1:
а) Обязательно ли сумма рационального и иррационального числа быть иррациональной?
б) Обязательно ли произведение рационального и иррационального числа быть иррациональным?
с) Обязательно ли сумма двух иррациональных чисел будет иррациональной?

Решение :
а) По определению мы знаем, что рациональное число это число, котрое можно представить в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$ где $m \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$
Пусть $a + b$ - сумма рациональных чисел($a \in \mathbb{Q}$ and $b \in \mathbb{Q}$), тогда эту сумму можно представить в виде: $\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2}$, где $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ и $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$
Приведем к общему знаменателю $\frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}$, нетрудно увидеть, что эта дробь так же удовлетворяет определению рационального числа выше. Из вышесказанного можно сделать вывод, что сумма двух рациональных чисел, рациональна.
Рассмотрим сумму $q + p$ где $q \in \mathbb{Q}$, а $p \notin \mathbb{Q}$ (как раз то, что нам нужно по условию)
Пусть $q + p = c$, Предположим, что $c \in \mathbb{Q}$, тогда выразим p, $p = c - q = c + (-q) \Rightarrow p$ сумма некоторых рациональных чисел, тогда $p \in \mathbb{Q}$.
Ответ: не обязательно.

б) Пусть $q \in \mathbb{Q}$ (рациональное число), а $p \notin \mathbb{Q}$ (иррациональное число). Рассмотрим их произведение: $q \cdot p = r$

Предположим, что $r \in \mathbb{Q}$. Тогда, если $q \neq 0$, можно выразить p: $p = \frac{r}{q}$

Так как r и q — рациональные числа, их частное $\frac{r}{q}$ также рационально (поскольку рациональные числа замкнуты относительно деления на ненулевое рациональное число). Но это противоречит тому, что p иррационально.

Вывод: Если $q \neq 0$, то произведение $q \cdot p$ обязательно иррационально. Однако если $q = 0$, то $q \cdot p = 0 \in \mathbb{Q}$.

Ответ: Не обязательно, если рациональное число равно нулю. В остальных случаях — обязательно.

с) Рассмотрим два иррациональных числа:
1. $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$. Их сумма:

$$\sqrt{2} + \left(-\sqrt{2}\right) = 0 \in \mathbb{Q}$$
2. $\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$. Их сумма:

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Вывод: Сумма двух иррациональных чисел может быть как рациональной (если они противоположны), так и иррациональной.

Ответ: Не обязательно.

Задача 2: Покажите, что $\sqrt{2}$ иррациональное число.
Решение:
От противного, предположим что $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, тогда его можно представить в виде:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$$

Важно учесть, что дробь несократима, по определению рационального числа $\Rightarrow \gcd(m, n) = 1$

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \Rightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2},$$
$$2n^2 = m^2$$

Тогда m^2 четное число $\Rightarrow m$ тоже четное число. Получим:

$$m = 2m'$$
$$2n^2 = 4(m')^2$$

поделим обе части на 2:

$$n^2 = 2(m')^2$$

Аналогично рассуждениям выше, n^2 четное, а значит n четное. $\Rightarrow \gcd(n, m) \neq 1$, так как оба числа четные.

Противоречие $\Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Задача 3:
Пусть $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots$ - последовательность вложеных отрезков.
Покажите, что $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$.

Решение:
От противного, пусть $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \emptyset$.

Пусть $L = \{a_1, a_2, \ldots\}$ и $R = \{b_1, b_2, \ldots\}$ множества левых и правых концов отрезков в последовательности, соответственно.
Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$ таких, что $a_n \leq b_n : a_n \leq c \leq b_n$ (Аксиома полноты)
Легко заметить, что c будет лежать в пересечении, **Противоречие!**

Про последовательности:

Задача 4: Докажите, что последовательность Коши ограничена.
Решение:
Напомним, что последовательность a_n называют последовательность Коши, если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \text{ такое, что } |a_n - a_m| < \varepsilon \ \forall n, m \geq N$$

Идея, такая мы хотим ограничить все, что выше N, а затем все остальное.
По определению последовательности Коши мы знаем что для всех номеров $> N$ выполняется:

$$\begin{gathered} |a_n - a_m| < \varepsilon \quad \text{(можем раскрыть)} \\ -\varepsilon < a_n - a_m < \varepsilon \\ -\varepsilon + a_m < a_n < \varepsilon + a_m \\ \text{(поздравляю мы ограничили номера выше } N) \end{gathered}$$

Заметим, что оставшаяся часть последовательности - это конечное количество членов от a_1 до a_{N-1} А у конечного количества элементов можно взять максимум и минимум.
Сопоставив 2 этих факта мы получим, что последовательность Коши ограничена

Задача 5: Докажите,что если последовательность сходится,то она последовательность Коши.

Решение:
Пусть a_n — сходящаяся последовательность:

$$l\,\mathrm{im}_{n \to \infty} a_n = A$$

.

Это значит:

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0 \\ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N : |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} \end{gathered}$$

.

Тогда для любых $m, n \geq N$:

$$|a_n - a_m| \ = |a_n - A + A - a_m|, \leq |a_n - A| + |a_m - A|, < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Следовательно, последовательность a_n — последовательность Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall m, n \geq N : |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Задача 6:

а) Докажите,что ограниченная монотонно возрастающая последовательность сходится и покажите, что предел равен ее точной верхней грани.

б) Приведите пример последовательности, чей предел не равен ее точной верхней/нижней грани.

Решение:

а) Поскольку множество значений $\{x_n\}$ непусто и ограничено сверху, существует *точная верхняя грань*:

$$a = \sup x_n$$

По определению супремума:
- $x_n \leq a$ для всех $n \in \mathbb{N}$
- Для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что:

$$a - \varepsilon < x_N \leq a$$

В силу монотонного возрастания для всех $n \geq N$:

$$x_N \leq x_n \leq a$$

Следовательно, для $n \geq N$:

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

Это означает, что $\lim(n \to \infty) x_n = a$.

б) Очевидно кажется:

$$\boldsymbol{x_n = (-1)^n}$$

Решения задач на сходимость последовательностей

Напомним: из задачи 6а) мы знаем, что ограниченная монотонно возрастающая последовательность сходится.

Задача 7(а)

Рассмотрим последовательность: $x_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$

Решение:

Заметим, что каждый член можно разложить: $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

Тогда сумма становится телескопической:

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Предел при $n \to \infty$:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 1 - 0 = 1$$

Ответ: Последовательность сходится к 1.

Задача 7(б)

Рассмотрим последовательность:

$$x_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$

1. Ограниченность: Для

$$k \geq 2$$

верно неравенство:

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

Тогда:

$$x_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$

Сумма справа является телескопической:

$$\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

Таким образом:

$$x_n < 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2$$

Последовательность ограничена сверху числом 2.

2. Монотонность: Последовательность строго возрастает, так как:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{(n+1)^2} > x_n$$

Ответ: Последовательность монотонно возрастает и ограничена сверху, следовательно, она сходится.

Задача 7(c)

Рассмотрим последовательность:

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$$

1. Ограниченность: Рассмотрим подпоследовательность

$$x_{2^n}$$

:

$$x_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2^n}$$

Разобьём сумму на блоки:

$$x_{2^n} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + ... + \frac{1}{8}\right) + ... + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + ... + \frac{1}{2^n}\right)$$

Каждый блок содержит

$$2^{k-1}$$

слагаемых, каждое из которых не меньше

$$\frac{1}{2^k}$$

:

$$\frac{1}{2^{k-1}+1} + ... + \frac{1}{2^k} > 2^{k-1} * \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}$$

Таким образом:

$$x_{2^n} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}$$

Последовательность неограничена.

2. Монотонность: Последовательность строго возрастает, так как:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{n+1} > x_n$$

Ответ: Последовательность монотонно возрастает и неограничена, следовательно, она расходится к

$$+\infty$$

.

Теорема Штольца:

Задача 8:

Найдём предел:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}{\ln n} \tag{1}$$

Решение:

Тогда:

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\ln(n+1) - \ln n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \tag{2}$$

Используем асимптотическое равенство:

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \approx \frac{1}{n} \quad \text{при} \quad n \to \infty \tag{3}$$

Получаем:

$$\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty \tag{4}$$

По теореме Штольца:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = 1 \tag{5}$$

Ответ: 1

Задача 9: Пусть $a_n \to a$ при $n \to \infty$, покажите, что $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \to a$ при $n \to \infty$

Обозначим числитель как $A_n = a_1 + a_2 + c \ldots + a_n$, знаменатель – $B_n = n$.

Применим теорему Штольца:
- Последовательность $B_n = n$ строго возрастает и $B_n \to \inf$.
- Разность $A_{\{n+1\}} - A_n = a_{\{n+1\}}$.
- Разность $B_{\{n+1\}} - B_n = 1$.

Тогда:

$$\frac{A_{\{n+1\}} - A_n}{B_{\{n+1\}} - B_n} = a_{n+1}. \tag{6}$$

Следовательно, по теореме Штольца:

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \to a. \tag{7}$$

Задача 10 Решение(мне уже лень писать тут условие)

Исследуем сходимость последовательности:

$$\frac{a^n}{n} \tag{8}$$

Пусть:

- $A_n = a^n$, $B_n = n$.
- Тогда $A_{n+1} - A_n = a^{n+1} - a^n = a^n(a-1)$ и $B_{n+1} - B_n = 1$.

Следовательно:

$$\frac{A_{n+1} - A_n}{1} = a^n(a-1) \to \infty \tag{9}$$

Значит, по теореме Штольца:

$$\frac{a^n}{n} \to \infty \tag{10}$$

Ответ: последовательность расходится.

Бонусные задачи

Задача 11: пока что не поддается

Задача 12:
а) Сто различных чисел таковы,что сумма любых двух рациональна. Докажите,что все эти числа рациональны.

Решение: Возьмем $a \neq b \neq c$ из нашего набора, тогда по условию задачи:

$$\begin{gathered} a + b \in \mathbb{Q} \\ b + c \in \mathbb{Q} \\ a + c \in \mathbb{Q} \end{gathered} \tag{11}$$

Попытаемся выразить a:

$$(a + b) + (a + c) - (b + c) = 2a + b - b + c - c = 2a \tag{12}$$

Видно что справа рациональное число, тогда $2a \in \mathbb{Q}$ тогда $a \in \mathbb{Q}$
Аналогично можно проделать с любым числом из набора!

■

б) Верно ли то же самое, если разность двух любых двух рациональна?

Множество может состоять из иррациональных чисел, у которых попарные разности рациональны. Например, $\{\sqrt{2} + q \mid q \in \mathbb{Q}\}$.

Ответ: нет

Задача 13: Может ли, при каких либо рациональных значениях $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ выполнится равенство:

$$\left(a_1 + b_1\sqrt{2}\right)^2 + \left(a_2 + b_2\sqrt{2}\right)^2 + ... + \left(a_n + b_n\sqrt{2}\right)^2 = 7 + 5\sqrt{2} \tag{13}$$

Решение:

1. Раскрываем квадраты:

$$\left(a_i + b_i\sqrt{2}\right)^2 = a_i^2 + 2\sqrt{2}a_i b_i + 2b_i^2 \tag{14}$$

2. Суммируем:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sqrt{2}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 7 + 5\sqrt{2} \tag{15}$$

3. Получаем систему:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(a_i^2 + 2b_i^2) = 7 \\ 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 5 \end{cases} \tag{16}$$

4. Упрощаем:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \frac{5}{2} \tag{17}$$

5. Анализ решений:

- Для $n = 1$: $a_1 b_1 = \frac{5}{2}$ и $a_1^2 + 2b_1^2 = 7$
- Подстановка $b_1 = \frac{5}{2a_1}$ даёт:

$$4a_1^4 - 28a_1^2 + 25 = 0 \tag{18}$$

- Решения: $a_1^2 = \frac{7+2\sqrt{6}}{2} \notin \mathbb{Q}$

Ответ: Не существует рациональных чисел a_i, b_i, удовлетворяющих исходному равенству. Требуемые значения обязательно содержат иррациональные компоненты.

Задача 14: Докажите что $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ иррациональное число
Решение:
В номере 2 мы уже доказали, что $\sqrt{2}$ рационален, используя условие несократимости в представлении рационального числа в виде дроби $\frac{m}{n}$, Аналогично можно доказать, что $\sqrt{6}$ рационален.
Найдем такую сумму иррациональных чисел, которая равна рациональному числу:

Рассмотрим $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Возведём обе части в квадрат:

$$x^2 = \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2$$
$$x^2 = 2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + 3$$

Упростим выражение:

$$x^2 = 5 + 2 \cdot \sqrt{6}$$

Перенесём рациональную часть:

$$x^2 - 5 = 2 \cdot \sqrt{6}$$

Теперь разделим обе части на 2:

$$\frac{x^2-5}{2} = \sqrt{6}$$

По предположению, если x рациональное, то левая часть уравнения рациональна. Однако правая часть $\sqrt{6}$ иррациональна. Получаем противоречие, так как рациональное число не может быть равно иррациональному.

Следовательно, исходное предположение неверно, и $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ является иррациональным числом.

■