Serie 4: Cálculo Vectorial

Ricardo López   Dante Argüello   Eugenio   Ricardo Ruelas

5 de febrero de 2021

Ejercicio 1: Calcular $\int_0^1 \int_0^2 xy\, dy\, dx$.

Solución.

$$\int_0^1 \int_0^2 xy\, dy\, dx = \int_0^1 \left. \frac{xy^2}{2} \right|_2^0 \mathrm{d}x = \int_0^1 2x\, \mathrm{d}x = 1$$

Ejercicio 6: Por medio de la integral doble, calcular el área de la región localizada entre las curvas de ecuación $2y^2 = x - 2$, $x^2 - 4y^2 = 4$, $x = 4$.

Solución.

Despejamos las ecuaciones de las curvas:

$$2y^2 = x - 2 \implies y^2 = \frac{x}{2} - 1 \implies y = \sqrt{\frac{x}{2} - 1} \tag{1}$$

$$x^2 - 4y^2 = 4 \implies 4y^2 = x^2 - 4 \implies y^2 = \frac{x^2}{4} - 1 \implies \boldsymbol{y = \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}} \tag{2}$$

Obtenemos el valor de x igualando ambas ecuaciones y resolviendo:

$$\sqrt{\frac{x}{2} - 1} = \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1} \implies \frac{x}{2} - \cancel{1} = \frac{x^2}{4} - \cancel{1} \implies 2x = x^2 \therefore \boldsymbol{x = 2} \tag{3}$$

Calculamos la doble integral para obtener el area:

$$\int_{2}^{4}\int_{\sqrt{\frac{x}{2}-1}}^{\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \implies \int_{2}^{4}\left(\sqrt{\frac{x}{2}-1}-\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}\right)\mathrm{d}x \tag{4}$$

Aplicamos linealidad

$$\frac{1}{2}\int_{2}^{4}\sqrt{x^2-4}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{2}^{4}\sqrt{x-2}\,\mathrm{d}x \tag{5}$$

Resolvemos las integrales por separado:

$$\frac{1}{2}\int_{2}^{4}\sqrt{x^2-4}\,\mathrm{d}x \tag{6}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{2}^{4}\sqrt{x-2}\,\mathrm{d}x \tag{7}$$

Realizando sustitución trigonométrica:

$$x = 2\sec(u) \rightarrow u = \operatorname{arcsec}(\frac{x}{2})\,,\ dx = 2\sec(u)\tan(u)\mathrm{d}u$$

Sustituimos en (6):

$$\frac{1}{2}\int 2\sec(u)\sqrt{4\sec^2(u)-4}\tan(u)\mathrm{d}u$$

Simplificamos usando $4\sec^2(u)-4 = 4\tan^2(u)$:

$$\frac{1}{2}4\int \sec(u)\tan^2(u)\,\mathrm{d}u \implies 2\int \sec(u)\tan^2(u)\,\mathrm{d}u$$

Reescribimos usando identidades trigonométricas: $\tan^2(u) = \sec^2(u)-1$

$$= 2\int \sec(u)(\sec^2(u)-1)\,\mathrm{d}u \implies = 2\int (\sec^3(u)-\sec(u))\,\mathrm{d}u$$

$$= 2\left(\int \sec^3(u)\,\mathrm{d}u - \int \sec(u)\,\mathrm{d}u\right)$$

Aplicamos la formula de reducción, con $n = 3$:

$$\int \sec^n(u)\,\mathrm{d}u = \tfrac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}(u)\,\mathrm{d}u + \tfrac{\sec^{n-2}(u)\tan(u)}{n-1}$$

$$= 2\left(\frac{\sec(u)\tan(u)}{2} + \frac{1}{2}\int \sec(u)\,\mathrm{d}u - \int \sec(u)\,\mathrm{d}u\right)$$

$$= 2\left(\frac{\sec(u)\tan(u)}{2} - \frac{1}{2}\int \sec(u)\,\mathrm{d}u\right) \implies 2\left(\frac{\sec(u)\tan(u)}{2} - \frac{1}{2}\ln(\tan(u)+\sec(u))\right)$$

$$= \sec(u)\tan(u) - \ln(\tan(u)+\sec(u))$$

Deshacemos la sustitución $u = \operatorname{arcsec}(\frac{x}{2})$, usando:

$$\tan\left(\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1} \quad \text{y} \quad \sec\left(\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{x}{2}$$

$$\frac{x}{2}\sqrt{\frac{x^2}{4} - 1} - \ln\left(\sqrt{\frac{x^2}{4} - 1} + \frac{x}{2}\right)\Bigg|_2^4$$

$$= \left(\frac{4}{2}\sqrt{\frac{4^2}{4} - 1} - \ln\left(\sqrt{\frac{4^2}{4} - 1} + \frac{4}{2}\right)\right) - \left(\frac{2}{2}\cancelto{0}{\sqrt{\frac{2^2}{4} - 1}} - \ln\left(\cancelto{0}{\sqrt{\frac{2^2}{4} - 1}} + \cancelto{1}{\frac{2}{2}}\right)\right)$$

$$= \left(2\sqrt{3} - \ln(\sqrt{3}+2)\right) - \cancelto{0}{\ln(1)}$$

Por lo tanto tenemos que el resultado de la ecuación (6) es:

$$= 2\sqrt{3} - \ln(\sqrt{3}+2)$$

Ahora pasamos a resolver resolvemos la ecuación (7):

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{2}^{4} \sqrt{x-2}\,\mathrm{d}x$$

Utilizamos la sustitución $u = x - 2 \rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$:

$$\int \sqrt{u}\,\mathrm{d}u \implies \int u^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u \implies \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$

Deshacemos la sustitución previa:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{2}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{2}^{4}\right] \implies \frac{2}{3\sqrt{2}}\left[(4-2)^{\frac{3}{2}} - \cancelto{0}{(2-2)^{\frac{3}{2}}}\right] \implies \frac{2}{3\sqrt{2}}\left[(2)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2\sqrt{8}}{3\sqrt{2}} = \frac{4\cancel{\sqrt{2}}}{3\cancel{\sqrt{2}}} = \boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

Resolvemos el problema sustituyendo los valores obtenidos de (6) y (7) en la ecuación (5):

$$\frac{1}{2}\int_{2}^{4} \sqrt{x^2-4}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{2}^{4} \sqrt{x-2}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{3} - \ln(\sqrt{3}+2) - \frac{4}{3} \tag{1}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{A = 2\sqrt{3} - \ln(\sqrt{3}+2) - \frac{4}{3} \quad u^2}$$

Ejercicio 8: Por medio de la integral doble, calcular el área de la región localizada entre las curvas de ecuación $x^2 - 14x - 5y + 59 = 0$, $x^2 - 14x + 5y - 11 = 0$.

Solución.

Empezamos obteniendo los puntos de intersección de las cruvas

$$x^2 - 14x - 5y + 59 = x^2 - 14x + 5y - 11 \implies y = 7$$

$$\begin{aligned}
&x^2 - 14x - 5y + 59 = 0 \\
&x^2 - 14x - 5(7) + 59 = 0 \\
&x = \frac{14 \pm \sqrt{196^2 - 96}}{2} \\
&x_1 = 2 \\
&x_2 = 12
\end{aligned}$$

Despejando y de ambas ecuaciones

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{(x-y)^2}{5} + 2 \\
c_2 &= -\frac{(x-7)^2}{5} + 12
\end{aligned}$$

Para calcular el área se resuelve la integral

$$A = \int_{x_1}^{x_2} \int_{c_1}^{c_2} \mathrm{d}A = \int_2^{12} \int_{\frac{(x-y)^2}{5}+2}^{-\frac{(x-7)^2}{5}+12} \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$$

Se eligieron estos límites de integración porque en este caso se debe integrar desde el menor valor de x al mayor y desde la curva que limita al área por debajo hasta la que la limita por arriba

$$\begin{aligned}
A &= \int_2^{12} \int_{\frac{(x-y)^2}{5}+2}^{-\frac{(x-7)^2}{5}+12} \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \int_2^{1} 2\, x\Big|_{\frac{(x-y)^2}{5}+2}^{-\frac{(x-7)^2}{5}+12} \mathrm{d}x \\
&= \int_2^{1} 2 - \frac{2}{5}(x-7)^2 + 10\, \mathrm{d}x = -\frac{2}{15}(x-7)^3 + 10x\Big|_2^{12} = \frac{200}{3} u^3
\end{aligned}$$

Ejercicio 9: Calcular $\iint\limits_R \frac{x+y}{1+x-y}\, \mathrm{d}A$, donde R es la región limitada por las gráficas de $y = x$, $y = -x$, $y = x - 4$ y $y = -x + 4$.

Sugerencia: Haga la transformación $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$

Solución.

Considerando la transformación sugerida, obtenemos los factores de escala tales que: $\mathrm{d}A = h_u \, h_v \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \quad \Longrightarrow \; u + v = x + x + \cancel{y} - \cancel{y} \; \Longrightarrow \; 2x = u + v \; \Longrightarrow \; x = \frac{u+v}{2}$$

$$\begin{cases} u = x + y \\ -v = -x + y \end{cases} \quad \Longrightarrow \; u - v = \cancel{x} - \cancel{x} + y - y \; \Longrightarrow \; 2y = u - v \; \Longrightarrow \; y = \frac{u-v}{2}$$

$$\overline{R}(u,v) = \left(\frac{u+v}{2}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{u-v}{2}\right)\hat{\jmath} \tag{1}$$

Sabiendo que $h_u = |\frac{\partial \overline{R}}{\partial u}|$ y $h_v = |\frac{\partial \overline{R}}{\partial v}|$, entonces:

$$\frac{\partial \overline{R}}{\partial u} = \frac{1}{2}\hat{\imath} + \frac{1}{2}\hat{\jmath} \qquad\qquad \frac{\partial \overline{R}}{\partial v} = \frac{1}{2}\hat{\imath} - \frac{1}{2}\hat{\jmath}$$

$$\left|\frac{\partial \overline{R}}{\partial u}\right| = \left|\frac{\partial \overline{R}}{\partial v}\right| = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\mathrm{d}A = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \qquad \therefore \qquad \mathrm{d}A = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$$

Calculamos los límites de integración a partir de las curvas dadas y la transformación sugerida:

$$\begin{aligned} y = x \; &\Longrightarrow \; \cancelto{u}{x - y} = 0 \; \Longrightarrow \; u = 0 \\ y = -x \; &\Longrightarrow \; \cancelto{v}{x + y} = 0 \; \Longrightarrow \; v = 0 \\ y = x - 4 \; &\Longrightarrow \; \cancelto{u}{x - y} = 4 \; \Longrightarrow \; u = 4 \\ y = -x + 4 \; &\Longrightarrow \; \cancelto{v}{x + y} = 4 \; \Longrightarrow \; v = 4 \end{aligned}$$

Realizamos la integral doble, sustituyendo la transformación donde es posible:

$$\iint\limits_R \frac{x+y}{1+x-y}\,\mathrm{d}A = \int\limits_0^4\int\limits_0^4 \frac{u}{1+v}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int\limits_0^4\int\limits_0^4 \frac{u}{1+v}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$$

Es importante notar que al tener límites de integración iguales en la doble integral, se pueden intercambiar los diferenciales sin mayor complicación. Resolvemos:

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^4\int\limits_0^4 \frac{u}{1+v}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \tag{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^4 u\int\limits_0^4 \frac{\mathrm{d}v}{1+v}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 u\,\ln(1+v)\big|_0^4\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 u(\ln(5)-\cancelto{0}{\ln(1)})\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^4 u\ln(5)\,\mathrm{d}u = \frac{\ln(5)}{2}\int\limits_0^4 u\,\mathrm{d}u = \frac{\ln(5)}{2}\left.\frac{u^2}{2}\right|_0^4 = \frac{\ln(5)}{\cancel{4}}\left(4^{\cancel{2}}-0^2\right)$$

$$\therefore \iint\limits_R \frac{x+y}{1+x-y}\,\mathrm{d}A = 4\ln(5)$$

Ejercicio 10: Por medio de la integral doble, calcular el área de la región del primer cuadrante, limitada por las curvas $xy = 1$, $xy = 4$, $y = 2x$, $x = 2y$.

Solución.

Primero se reescriben las ecuaciones de las curvas

$$y = \frac{1}{x} \qquad y = \frac{4}{x} \qquad y = 2x \qquad y = \frac{x}{2}$$

Luego, como apoyo, se grafican las curvas para reconocer los límites de integración

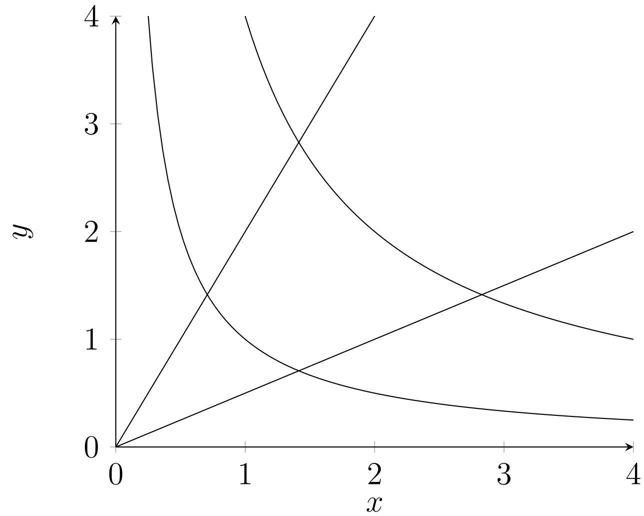

Figura 1: Gráfica de las curvas.

De la figura 1 se deduce que se necesitan encontrar cuatro puntos de intersección, por lo que se optienen el valor de x los siguentes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} y &= 2x \\ y &= \frac{1}{x} \end{cases} \implies x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases} y &= 2x \\ y &= \frac{4}{x} \end{cases} \implies x = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} y &= \frac{x}{2} \\ y &= \frac{1}{x} \end{cases} \implies x = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} y &= \frac{x}{2} \\ y &= \frac{4}{x} \end{cases} \implies x = 2\sqrt{2}$$

Con los puntos obtenidos, se llega a que el área debe ser

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \int_{\frac{1}{x}}^{2x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{4}{x}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \left(2 - \frac{1}{2} - \ln\sqrt{2} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(4\ln 2\sqrt{2} - 4\ln\sqrt{2} - \frac{3}{2}\right) \\
&= \ln(8)u^2
\end{aligned}
$$

Ejercicio 12 Determinar el volumen de la región limitada por las superficies: $az = y^2$, $x^2 + y^2 = r2$, $z = 0$ donde a y r son constantes.

Solución.

Como una de las curvas es una circunferencia en el plano xy y se quiere calcular un volumen en que está involucrada, se utilizan coordenadas cilindricas para faciliar los cálculos, por lo que

$$
V = \int\int_R \frac{y^2}{a}\,\mathrm{d}A
$$

donde

$$
\mathrm{d}A = h_r h_\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \qquad h_r = 1 \qquad h_\theta = r
$$

Como se debe considerar el volumen del cilindro completo se debe integrar desde 0 hasta r con respecto a r y desde 0 hasta 2π con respecto a θ, por lo que el volumen se define como

$$
V = \int_0^{2\pi}\int_0^r \frac{r^2\operatorname{sen}^2\theta}{a} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r^4\operatorname{sen}^2\theta}{4a}\,\mathrm{d}\theta = \frac{r^4\pi}{4a}u^3
$$

Ejercicio 13: Calcular el volumen de la región que es limitada por las superficies S_1 y S_2 representadas por: $S_1 : x^2 + z^2 = 4 - y$, $S_2 : y + 5 = 0$.

Solución.

Para calcular el volumen de un sólido dada una región, empleamos una integral triple de volumen en xyz:

$$V = \iiint_V dV \implies V = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

Al aplicar la primera integral, obtenemos justamente la integral doble que se utiliza para calcular **el volumen entre dos superficies**:

$$V = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} h_2(x,y) - h_1(x,y)\,\mathrm{d}A \tag{2}$$

Notamos que tenemos es más sencillo trabajar con una función $h(x,z)$ debido a que la superficie S_2 ya nos da uno de los límites de integración en y, así podemos despejar y de la primera superficie para obtener el segundo límite:

$$S_1 : x^2 + z^2 = 4 - y \implies x^2 + z^2 + y = 4 \implies \boldsymbol{y = 4 - x^2 - z^2}$$

De esta forma podemos definir lo siguiente:

$$h_1(x,z) = -5 \qquad h_2(x,z) = 4 - x^2 - z^2$$

$$\implies h_2(x,z) - h_1(x,z) = 4 - x^2 - z^2 - (-5) = 4 - x^2 - z^2 + 5$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{h_2(x,z) - h_1(x,z) = 9 - x^2 - z^2}$$

Sustituimos la función obtenida en la ecuación (2):

$$V = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} 9 - x^2 - z^2\,\mathrm{d}A$$

A partir de la ecuación anterior, podemos darnos cuenta de que nos conviene realizar una transformación a coordenadas polares, tal que $x^2 + z^2 = r^2$ y $\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$. Además, notamos que se tiene una circunferencia de radio 3, por lo que $a = 0$, $b = 2\pi$, $g_1(x) = 0$, $g_2(x) = 3$. Sustituimos en la integral y nos queda:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (9 - \underbrace{(x^2 + z^2)}_{r^2})\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (9 - r^2)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (9r - r^3)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{9r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Bigg|_0^3 \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{81}{2} - \frac{81}{4} \right) \mathrm{d}\theta = \frac{81}{4} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = \frac{81}{4} (2\pi)$$

$$\therefore\ \boldsymbol{V = \frac{81}{2}\pi\, u^3}$$

Ejercicio 16: Utilizar la integración doble para calcular el área de la región interior a lac urva cuya ecuación polar es $r = 6\cos\theta$.

Solución.

Notamos que la ecuación polar dada corresponde a una circunferencia con centro en el punto $(3, 0)$ y radio $r = 3$. Se sabe que el cálculo de un area por medio de una integral doble esta dada por:

$$\iint_R \mathrm{d}A$$

Tomando en cuenta que en coordenadas polares $\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ y que los límites de integración vienen dados por $r_0 = 0$, $r = 3$, $\theta_0 = 0$ y $\theta = 2\pi$, sustituimos y resolvemos la integral doble:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{3} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{3^2}{2}\right) \mathrm{d}\theta = \frac{9}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = \frac{9}{2}(2\pi - 0) = \boldsymbol{9\pi}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{A = 9\pi\, u^2}$$

Ejercicio 17: Calcular el área de la región exterior a la circunferencia cuya ecuación polar es $r = 3$ e interior a la cardioide de ecuación polar $r = 3(1 + \cos\theta)$.

Solución.

Para calcular el área de la región emplearemos una doble integral en coordenadas polares, tal que:

$$\iint_R \mathrm{d}A = \iint_R r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \tag{1}$$

Para establecer los límites de integración utilizamos las dos curvas dadas, las cuales dependen de r de tal forma que tenemos: $\boldsymbol{3 < r < 3(1+\cos\theta)}$. Ahora bien, para obtener los límites respecto a θ igualamos las dos ecuaciones para obtener los puntos de intersección:

$$\cancel{3} = \cancel{3}(1+\cos\,\theta) \implies \cancel{1} = \cancel{1} + \cos\,\theta \implies \cos\,\theta = 0 \implies \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2} \\ \theta = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Notamos que tenemos un ángulo que podría darnos problemas a la hora de realizar los cálculos, por lo que nos enfocaremos en el primer cuadrante ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) y aprovecharemos la símetria para multiplicar el area obtenida por 2. Ahora sustituimos los límites de integración obtenidos en la ecuación (1) y resolvemos:

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_3^{3(1+\cos\,\theta)} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2}\bigg|_3^{3(1+\cos\,\theta)} \mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{9(1+\cos\,\theta)^2}{2} - \frac{9}{2}\right)\mathrm{d}\theta$$

$$\implies \cancel{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{9(1+2\cos\,\theta+\cos^2\,\theta)}{\cancel{2}}\mathrm{d}\theta - \frac{9}{\cancel{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta\right]$$

$$\implies 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+2\cos\,\theta+\cos^2\,\theta)\,\mathrm{d}\theta - 9(\frac{\pi}{2})$$

$$\implies 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+2\cos\,\theta+\cos^2\,\theta)\,\mathrm{d}\theta - \frac{9\pi}{2}$$

$$\Longrightarrow\ \underbrace{9\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos\,\theta+\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right)\,\mathrm{d}\theta-\frac{9\pi}{2}}_{\text{multiplicamos toda la expresión por } \frac{2}{2}}$$

$$\Longrightarrow\ \frac{9}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(2+4\cos\,\theta+1+\cos(2\theta)\,\right)\,\mathrm{d}\theta-\frac{18\pi}{4}=\frac{9}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(3+4\cos\,\theta+\cos(2\theta)\,\right)\,\mathrm{d}\theta-\frac{18\pi}{4}$$

$$\Longrightarrow\ \frac{9}{2}\left.\left(3\theta+4\,\mathrm{sen}(\theta)+\cancelto{0}{\frac{\mathrm{sen}(2\,\theta)}{2}}\right)\right|_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{18\pi}{4}$$

$$\Longrightarrow\ \frac{9}{2}\left[3\left(\frac{\pi}{2}\right)+4\underbrace{\left(\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2})-\mathrm{sen}(0)\right)}_{1}\right]-\frac{18\pi}{4}$$

$$\Longrightarrow\ \frac{27\pi+32-18}{4}=\frac{9\pi}{4}+18$$

$$\therefore\ \boldsymbol{A=18\,\frac{9\pi}{4}\ u^2}$$

Ejercicio 18: Calcular el área de la región limitada por la lemniscata cuya ecuación en coordenadas polares es $r^2=4\cos(2\theta)$.

Solución.

Para calcular el área de la lemniscata, emplearemos la siguiente integral doble tomando en cuenta que la ecuación brindada está en coordenadas polares:

$$\iint\limits_{R}\,\mathrm{d}A=\iint\limits_{R}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \tag{1}$$

Una vez definida la doble integral que ocuparemos, necesitamos obtener los límites de integración. Como podemos observar en la ecuación (1), los primeros límites corresponden a los impuestos en r. En este caso el valor del radio de una lemniscata va de 0 al de la ecuación de la misma, por lo que debemos despejar a r:

$$r^2 = 4\cos(2\theta) \implies r = 2\sqrt{\cos(2\theta)}$$

Ahora, para el rango de valores de θ nos basaremos en el calculo de su primer cuadrante y multiplicaremos el area obtenida por 4. En cualquier lemniscata, el rango de θ en el primer cuadrante es $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$. Teniendo los dos límites de la integral doble, procedemos a resolverla:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\sqrt{\cos(2\theta)}} r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left. \frac{r^2}{2} \right|_0^{2\sqrt{\cos(2\theta)}} \mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(2\sqrt{\cos(2\theta)})^2}{2} \,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4\cos(2\theta)}{2} \,\mathrm{d}\theta$$

$$\implies 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \cancel{2}\left. \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{\cancel{2}} \right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) - \cancelto{0}{\operatorname{sen}(0)}\right) = 1$$

Tenemos que el valor del área del primer cuadrante de la lemniscata es de 1, por lo que dicho valor es multiplicado por los 4 cuadrantes que conforman esta figura y obtenemos:

$$\therefore\ \boldsymbol{A = 4\ u^2}$$

Ejercicio 27: Utilizar el Teorema de Green para calcular el área de la región cerrada que es limitada por la elipse de ecuación $9x^2 + 4y^2 = 36$.

Solución.

Se sabe que calcular el área por integral doble equivale a integrar la función $f(x, y) = 1$. De esta forma, el integrando puede trabajarse como:

$$f(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \implies 1 = 1 - 0 \tag{1}$$

De la ecuación (1) obtenemos que $Q_x = 1$ y $P_y = 0$. Estas funciones se calculan a partir de la integración:

$$Q_x = 1 \implies \int Q_x \, \mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x \implies Q = x + C_1$$
$$P_y = 0 \implies \int P_y \, \mathrm{d}y = \int 0 \, \mathrm{d}y \implies P = C_2$$

Como C_1 y C_2 son constantes arbitrarias, para el cálculo del área asumiremos que ambas son 0. Por lo tanto, la integral de línea a calcular es:

$$\iint_R \mathrm{d}A = \oint_C P \, \mathrm{d}x + Q \, \mathrm{d}y = \oint_C x \, \mathrm{d}y$$

Ahora debemos parametrizar la elipse dada, por lo que reescribimos la ecuación de forma estándar y posteriormente parametrizamos:

$$9x^2 + 4y^2 = 36 \implies \frac{9x^2 + 4y^2}{36} = \frac{36}{36} \implies \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\implies \begin{cases} x = 2\cos(t) \implies \mathrm{d}x = -2\,\mathrm{sen}(t) \\ y = 3\,\mathrm{sen}(t) \implies \mathrm{d}y = 3\cos(t) \end{cases} \implies \underbrace{0 \le t \le 2\pi}_{\text{Se trata de una elipse cerrada.}}$$

Procedemos a calcular la integral de línea a partir de la parametrización y los límites obtenidos:

$$\oint_C x \, \mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} (2\cos t)(3\cos t) \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (6\cos^2 t) \, \mathrm{d}t$$

$$= 6 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2t)}{2}, \mathrm{d}t \implies \frac{6}{2} \int_0^{2\pi} 1 + \cos(2t) \, \mathrm{d}t$$

$$= 3 \left(t + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 3\left[(2\pi - 0) + \left(\cancelto{0}{\frac{\operatorname{sen}(4\pi)}{2}} - \cancelto{0}{\frac{\operatorname{sen}(0)}{2}}\right)\right] = 3(2\pi)$$

$$\boldsymbol{\therefore\ A = 6\pi\ u^2}$$