Serie 4: Cálculo Vectorial

Ricardo López Dante Argüello Eugenio
Ricardo Ruelas

5 de febrero de 2021

Ejercicio 1: Calcular $\int_0^1 \int_0^2 xy\,dy\,dx$.

Solución.

$$\int_0^1 \int_0^2 xy\,dy\,dx = \int_0^1 \left. \frac{xy^2}{2} \right|_2^0 \mathrm{d}x = \int_0^1 2x\,\mathrm{d}x = 1$$

Ejercicio 2: Evaluar la integral doble $\int\int_R x^2\sqrt{9-x^2}dA$ con R: $x^2+y^2=9$

Solución.

De $x^2+y^2=9$, $y=\sqrt{9-x^2} \to 0 \le x \le 3$ y $0 \le y \le \sqrt{9-x^2}$
Y para $\frac{1}{4}$ de región, la integral queda:

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} x^2\sqrt{9-x^2}\,dx\,dy$$

Entonces $I = 4\int_0^3 \sqrt{9-x^2}x^2\sqrt{9-x^2}\,dx = 4\int_0^3 9x^2 - x^4\,dx = 4(3\cdot 3^3 - \frac{1}{5}3^5)$
$I = 4(81 - \frac{243}{5})$ $\therefore$ $\boldsymbol{I = \frac{648}{5}}$

Ejercicio 3: Calcular la integral doble $\int\int_R e^{x^2+y^2}dA$ donde R es la región del plano XY entre las circunferencias $x^2+y^2=9$ y $x^2+y^2=1$

Solución.

Para R: $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $\leq r \leq 3$ y con $x^2 + y^2 = r^2$ con $x = rcos\theta$ y $y = rsen\theta$
Entonces $dA = J(\frac{x,y}{r,\theta}) = h_r h_\theta dr d\theta$, $h_r = 1$ y $h_\theta = r \quad \rightarrow \quad dA = rdrd\theta$
Y la integral $\int\int_R e^{x^2+y^2} dA$ quedaría como:

$$\int_0^{2\pi} \int_1^3 e^{r \cdot r} \, dr \, d\theta$$

$\int (e^{r \cdot r}) r \, dr = \frac{1}{2} \int e^u \, du = \frac{1}{2}(e^{r \cdot r})$ con $u = r^2$ y $du = 2dr$ $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(e^9 - e) \, d\theta$

$\therefore \qquad \boldsymbol{\pi((e^9 - e)}$

Ejercicio 4: Utiliza integrales dobles para calcular el área de la región del plano xy localizada en el primer cuadrante y limitada por las curvas de ecuaciones $16(x-1) = y^2$ y $8x = y^2$

Solución.

$$\int_0^4 \int_{\frac{y^2}{8}}^{\frac{y^2}{16}+1} dxdy = \int_0^4 (\frac{y^2}{16} + 1 - \frac{y^2}{8})dy$$

$$= \int_0^4 (-\frac{y^2}{16} + 1)dy = \left[-\frac{y^3}{48} + y \right]_0^4 = \frac{8}{3}u^2$$

Ejercicio 5: Calcular el área de la región del plano XY interior a las curvas de ecuaciones $x^2 + y^2 = 9$ y $x^2 + y^2 - 6x = 0$

Solución.

De la primera curva $r = 3$ y de la segunda $r = 6cos\theta$ Igualando $\rightarrow 3 = 6cos\theta$ y $\theta = \frac{\pi}{3}$
Entonces para $R_1 : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ y $0 \leq r \leq 3$ y para $R_2 : \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ y $0 \leq r \leq 6cos\theta$
Entonces la integral I=A quedaría como: A=2(

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^3 r \, dr \, d\theta$$

+

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{6cos\theta} r\, dr\, d\theta$$

)

$A = 2(\int_0^{\frac{\pi}{3}}]_0^3 \frac{r^2}{2} d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}]_0^{6cos\theta} \frac{r^2}{2} d\theta) = 2( ]_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{9}{2}\theta +]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 18(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\frac{sen2\theta}{2})) = 2(\frac{3}{2}\pi + \frac{9}{6}\pi + \frac{9}{2}\frac{\sqrt{3}}{2})$

$\therefore \qquad \boldsymbol{A = 6\pi + \frac{9}{2}\sqrt{3}}$

Ejercicio 6: Por medio de la integral doble, calcular el área de la región localizada entre las curvas de ecuación $2y^2 = x - 2$, $x^2 - 4y^2 = 4$, $x = 4$.

Solución.

Despejamos las ecuaciones de las curvas:

$$2y^2 = x - 2 \implies y^2 = \frac{x}{2} - 1 \implies y = \sqrt{\frac{x}{2} - 1} \tag{1}$$

$$x^2 - 4y^2 = 4 \implies 4y^2 = x^2 - 4 \implies y^2 = \frac{x^2}{4} - 1 \implies \boldsymbol{y = \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}} \tag{2}$$

Obtenemos el valor de x igualando ambas ecuaciones y resolviendo:

$$\sqrt{\frac{x}{2} - 1} = \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1} \implies \frac{x}{2} - \cancel{1} = \frac{x^2}{4} - \cancel{1} \implies 2x = x^2 \therefore \boldsymbol{x = 2} \tag{3}$$

Calculamos la doble integral para obtener el area:

$$\int\limits_2^4 \int\limits_{\sqrt{\frac{x}{2}-1}}^{\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}} \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x \implies \int\limits_2^4 \left(\sqrt{\frac{x}{2} - 1} - \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}\right) \mathrm{d}x \tag{4}$$

Aplicamos linealidad

$$\frac{1}{2}\int_{2}^{4}\sqrt{x^2-4}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{2}^{4}\sqrt{x-2}\,\mathrm{d}x \tag{5}$$

Resolvemos las integrales por separado:

$$\frac{1}{2}\int_{2}^{4}\sqrt{x^2-4}\,\mathrm{d}x \tag{6}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{2}^{4}\sqrt{x-2}\,\mathrm{d}x \tag{7}$$

Realizando sustitución trigonométrica:

$$x=2\sec(u)\rightarrow u=\operatorname{arcsec}(\frac{x}{2})\,,\ dx=2\sec(u)\tan(u)\mathrm{d}u$$

Sustituimos en (6):

$$\frac{1}{2}\int 2\sec(u)\sqrt{4\sec^2(u)-4}\tan(u)\mathrm{d}u$$

Simplificamos usando $4\sec^2(u)-4=4\tan^2(u)$:

$$\frac{1}{2}4\int\sec(u)\tan^2(u)\,\mathrm{d}u \implies 2\int\sec(u)\tan^2(u)\,\mathrm{d}u$$

Reescribimos usando identidades trigonométricas: $\tan^2(u)=\sec^2(u)-1$

$$=2\int\sec(u)(\sec^2(u)-1)\,\mathrm{d}u \implies =2\int(\sec^3(u)-\sec(u))\,\mathrm{d}u$$

$$=2\left(\int\sec^3(u)\,\mathrm{d}u-\int\sec(u)\,\mathrm{d}u\right)$$

Aplicamos la formula de reducción, con $n=3$:

$$\int \sec^n(u)\,\mathrm{d}u = \tfrac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}(u)\,\mathrm{d}u + \tfrac{\sec^{n-2}(u)\tan(u)}{n-1}$$

$$= 2\left(\frac{\sec(u)\tan(u)}{2} + \frac{1}{2}\int \sec(u)\,\mathrm{d}u - \int \sec(u)\,\mathrm{d}u\right)$$

$$= 2\left(\frac{\sec(u)\tan(u)}{2} - \frac{1}{2}\int \sec(u)\,\mathrm{d}u\right)$$

$$\Longrightarrow\ 2\left(\frac{\sec(u)\tan(u)}{2} - \frac{1}{2}\ln(\tan(u)+\sec(u))\right)$$

$$= \sec(u)\tan(u) - \ln(\tan(u)+\sec(u))$$

Deshacemos la sustitución $u = \operatorname{arcsec}(\frac{x}{2})$, usando:

$$\tan\left(\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \sqrt{\frac{x^2}{4}-1} \quad \text{y} \quad \sec\left(\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{x}{2}$$

$$\frac{x}{2}\sqrt{\frac{x^2}{4}-1} - \ln\left(\sqrt{\frac{x^2}{4}-1} + \frac{x}{2}\right)\Bigg|_2^4$$

$$= \left(\frac{4}{2}\sqrt{\frac{4^2}{4}-1} - \ln\Big(\sqrt{\frac{4^2}{4}-1} + \frac{4}{2}\Big)\right) - \left(\frac{2}{2}\cancelto{0}{\sqrt{\frac{2^2}{4}-1}} - \ln\Big(\cancelto{0}{\sqrt{\frac{2^2}{4}-1}} + \cancelto{1}{\frac{2}{2}}\Big)\right)$$

$$= \left(2\sqrt{3} - \ln(\sqrt{3}+2)\right) - \cancelto{0}{\ln(1)}$$

Por lo tanto tenemos que el resultado de la ecuación (6) es:

$$= 2\sqrt{3} - \ln(\sqrt{3}+2)$$

Ahora pasamos a resolver resolvemos la ecuación (7):

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{2}^{4}\sqrt{x-2}\,\mathrm{d}x$$

Utilizamos la sustitución $u = x - 2 \to \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$:

$$\int \sqrt{u}\,\mathrm{d}u \implies \int u^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u \implies \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$

Deshacemos la sustitución previa:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{2}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{2}^{4}\right] \implies \frac{2}{3\sqrt{2}}\left[(4-2)^{\frac{3}{2}} - \cancelto{0}{(2-2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$\implies \frac{2}{3\sqrt{2}}\left[(2)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2\sqrt{8}}{3\sqrt{2}} = \frac{4\cancel{\sqrt{2}}}{3\cancel{\sqrt{2}}} = \mathbf{\frac{4}{3}}$$

Resolvemos el problema sustituyendo los valores obtenidos de (6) y (7) en la ecuación (5):

$$\frac{1}{2}\int_{2}^{4}\sqrt{x^2-4}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{2}^{4}\sqrt{x-2}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{3} - \ln(\sqrt{3}+2) - \frac{4}{3} \qquad (1)$$

$$\therefore\ \boldsymbol{A = 2\sqrt{3} - \ln(\sqrt{3}+2) - \frac{4}{3} \quad u^2}$$

Ejercicio 7: Por medio de la integral doble, calcular el área de la región del primer cuadrante, limitada por las curvas de ecuaciones:
$x = 2; x = 6; y^2 = x^2 - 10x + 26; y^2 = x^2 - 10x + 30$

Solución.

$$\begin{cases} y^2 - (x-5)^2 = 1 \\ y^2 - (x-5)^2 = 5 \\ x = 2 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$R:\begin{cases} x \leqslant x \leqslant 6 \\ \sqrt{(x-5)^2+1} \leqslant y \leqslant \sqrt{(x-5)^2+5} \end{cases}$$

$$A(R)=\int\limits_{2}^{6}\int\limits_{\sqrt{(x-5)^2+1}}^{\sqrt{(x-5)^2+5}} dydx=\int\limits_{2}^{6} y|_{\sqrt{(x-5)^2+1}}^{\sqrt{(x-5)^2+5}}dx$$

$$=\int\limits_{2}^{6}\sqrt{(x-5)^2+5}-\sqrt{(x-5)^2+1}dx$$

$$u=x-5 \to du=dx$$

$$=\int\limits_{-3}^{1}\sqrt{(u)^2+5}-\sqrt{(u)^2+1}du$$

$$A(R)=\int\limits_{-0{,}9302}^{0{,}4205}\sqrt{5}\sec\theta\sqrt{5}\sec^2\theta-\int\limits_{-1{,}249}^{\frac{\pi}{4}}\sec\theta\sec^2\theta d\theta$$

$$A(R)=\frac{5}{2}(\sec\theta\tan\theta+\ln(\sec\theta+\tan\theta))\Big|_{-0{,}9302}^{0{,}4205}-\frac{1}{2}(\sec\theta\tan\theta+\ln(\sec\theta+\tan\theta))\Big|_{-1{,}249}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$A(R)=3{,}879u^2$$

.

Ejercicio 8: Por medio de la integral doble, calcular el área de la región localizada entre las curvas de ecuación $x^2-14x-5y+59=0$, $x^2-14x+5y-11=0$.

Solución.

Empezamos obteniendo los puntos de intersección de las curvas

$$x^2-14x-5y+59=x^2-14x+5y-11 \implies y=7$$

$$
\begin{aligned}
&x^2 - 14x - 5y + 59 = 0 \\
&x^2 - 14x - 5(7) + 59 = 0 \\
&x = \frac{14 \pm \sqrt{196^2 - 96}}{2} \\
&x_1 = 2 \\
&x_2 = 12
\end{aligned}
$$

Despejando y de ambas ecuaciones

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{(x-y)^2}{5} + 2 \\
c_2 &= -\frac{(x-7)^2}{5} + 12
\end{aligned}
$$

Para calcular el área se resuelve la integral

$$
A = \int_{x_1}^{x_2} \int_{c_1}^{c_2} \mathrm{d}A = \int_{2}^{12} \int_{\frac{(x-y)^2}{5}+2}^{-\frac{(x-7)^2}{5}+12} \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x
$$

Se eligieron estos límites de integración porque en este caso se debe integrar desde el menor valor de x al mayor y desde la curva que limita al área por debajo hasta la que la limita por arriba

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{2}^{12} \int_{\frac{(x-y)^2}{5}+2}^{-\frac{(x-7)^2}{5}+12} \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \int_{2}^{1} 2\ x|_{\frac{(x-y)^2}{5}+2}^{-\frac{(x-7)^2}{5}+12} \mathrm{d}x \\
&= \int_{2}^{1} 2 - \frac{2}{5}(x-7)^2 + 10\, \mathrm{d}x = -\frac{2}{15}(x-7)^3 + 10x \Big|_{2}^{12} = \frac{200}{3} u^3
\end{aligned}
$$

Ejercicio 9: Calcular $\iint\limits_{R} \frac{x+y}{1+x-y}\, \mathrm{d}A$, donde R es la región limitada por las gráficas de $y = x$, $y = -x$, $y = x - 4$ y $y = -x + 4$.

Sugerencia: Haga la transformación $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$

Solución.

Considerando la transformación sugerida, obtenemos los factores de escala tales que: $\mathrm{d}A = h_u\, h_v\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \implies u + v = x + x + \cancel{y} - \cancel{y} \implies 2x = u + v \implies x = \frac{u+v}{2}$$

$$\begin{cases} u = x + y \\ -v = -x + y \end{cases} \implies u - v = \cancel{x} - \cancel{x} + y - y \implies 2y = u - v \implies y = \frac{u-v}{2}$$

$$\overline{R}(u,v) = \left(\frac{u+v}{2}\right)\hat{\imath} + (\frac{u-v}{2})\hat{\jmath} \tag{1}$$

Sabiendo que $h_u = |\frac{\partial \overline{R}}{\partial u}|$ y $h_v = |\frac{\partial \overline{R}}{\partial v}|$, entonces:

$$\frac{\partial \overline{R}}{\partial u} = \frac{1}{2}\hat{\imath} + \frac{1}{2}\hat{\jmath} \qquad\qquad \frac{\partial \overline{R}}{\partial v} = \frac{1}{2}\hat{\imath} - \frac{1}{2}\hat{\jmath}$$

$$\left|\frac{\partial \overline{R}}{\partial u}\right| = \left|\frac{\partial \overline{R}}{\partial v}\right| = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\mathrm{d}A = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \qquad \therefore \qquad \mathrm{d}A = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$$

Calculamos los límites de integración a partir de las curvas dadas y la transformación sugerida:

$$\begin{aligned} y = x &\implies \cancelto{u}{x - y} = 0 \implies {\color{blue}u} = 0 \\ y = -x &\implies \cancelto{v}{x + y} = 0 \implies {\color{red}v} = 0 \\ y = x - 4 &\implies \cancelto{u}{x - y} = 4 \implies {\color{blue}u} = 4 \\ y = -x + 4 &\implies \cancelto{v}{x + y} = 4 \implies {\color{red}v} = 4 \end{aligned}$$

Realizamos la integral doble, sustituyendo la transformación donde es posible:

$$\iint\limits_R \frac{x+y}{1+x-y}\,\mathrm{d}A = \int\limits_0^4\int\limits_0^4 \frac{u}{1+v}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int\limits_0^4\int\limits_0^4 \frac{u}{1+v}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$$

Es importante notar que al tener límites de integración iguales en la doble integral, se pueden intercambiar los diferenciales sin mayor complicación. Resolvemos:

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^4\int\limits_0^4 \frac{u}{1+v}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \tag{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^4 u\int\limits_0^4 \frac{\mathrm{d}v}{1+v}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 u\,\ln(1+v)\Big|_0^4\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 u(\ln(5) - \cancelto{0}{\ln(1)})\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^4 u\ln(5)\,\mathrm{d}u = \frac{\ln(5)}{2}\int\limits_0^4 u\,\mathrm{d}u = \frac{\ln(5)}{2}\,\frac{u^2}{2}\Bigg|_0^4 = \frac{\ln(5)}{\cancel{4}}\left(4^{\cancel{2}} - 0^2\right)$$

$$\therefore \iint\limits_R \frac{x+y}{1+x-y}\,\mathrm{d}A \;=\; 4\ln(5)$$

Ejercicio 10: Por medio de la integral doble, calcular el área de la región del primer cuadrante, limitada por las curvas $xy = 1$, $xy = 4$, $y = 2x$, $x = 2y$.

Solución.

Primero se reescriben las ecuaciones de las curvas

$$y = \frac{1}{x} \qquad\qquad y = \frac{4}{x} \qquad\qquad y = 2x \qquad\qquad y = \frac{x}{2}$$

Luego, como apoyo, se grafican las curvas para reconocer los límites de integración

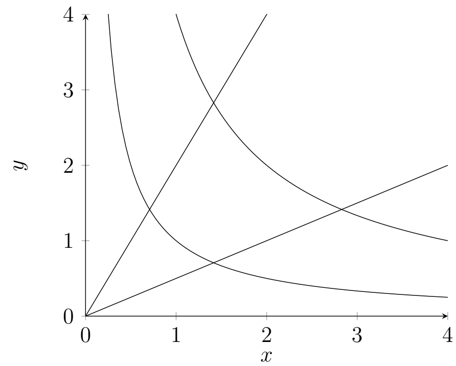

Figura 1: Gráfica de las curvas del problema 10.

De la figura 1 se deduce que se necesitan encontrar cuatro puntos de intersección, por lo que se obtienen el valor de x los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} y &= 2x \\ y &= \frac{1}{x} \end{cases} \implies x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases} y &= 2x \\ y &= \frac{4}{x} \end{cases} \implies x = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} y &= \frac{x}{2} \\ y &= \frac{1}{x} \end{cases} \implies x = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} y &= \frac{x}{2} \\ y &= \frac{4}{x} \end{cases} \implies x = 2\sqrt{2}$$

Con los puntos obtenidos, se llega a que el área debe ser

$$\begin{aligned} A &= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \int_{\frac{1}{x}}^{2x} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x + \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{4}{x}} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\ &= \left(2 - \frac{1}{2} - \ln\sqrt{2} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(4\ln 2\sqrt{2} - 4\ln\sqrt{2} - \frac{3}{2}\right) \\ &= \ln(8) u^2 \end{aligned}$$

Ejercicio 11: Calcular el volumen de la región localizada por arriba del plano XY, interior al paraboloide $z = 9 - (x^2 + y^2)$ y exterior al cilindro $x^2 + y^2 = 4$

Solución.

La región de integración está compuesta por un anillo, donde la circunferencia interna es el borde del cilindro, en tanto que la frontera externa es la intersección del paraboloide con el plano XY. Debido a esta forma de la región es adecuado el cambio a coordenadas polares para realizar la integral. Entonces, la circunferencia interior tiene la ecuación del cilindro, que en coordenadas polares es r=2; la circunferencia exterior tiene la ecuación.

$$0 = 9 - (x^2 + y^2)$$

$$x^2 + y^2 = 9 \rightarrow r = 3$$

Por lo que el intervalo de integración es r en [2,3], en tanto que para θ sería la vuelta completa a la circunferencia polar, [0,2pi] La altura del volumen está definida oír el paraboloide, por lo que solo hay que sustituir las ecuaciones de transformación para cambiar de coordenadas.

$$z = 9 - (x^2 + y^2) \tag{2}$$
$$z = 9 - r^2 \tag{3}$$
$$\tag{4}$$

La integral para calcular el volumen es

$$\begin{aligned}
V &= \iint_R f(x,y)dA && (5)\\
&= \int_2^3 \int_0^{2\pi} (9-r^2) r d\theta dr && (6)\\
&= \int_2^3 (9-r^3) \int_0^{2\pi} d\theta dr && (7)\\
&= \int_2^3 (9-r^3)\, \theta\big|_0^{2\pi}\, dr && (8)\\
&= 2\pi \int_2^3 (9-r^3) dr && (9)\\
&= 2\pi \left[\frac{9}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^2\right]_2^3 && (10)\\
V &= \frac{25}{2}\pi[u^3] && (11)\\
& && (12)
\end{aligned}$$

Ejercicio 12: Determinar el volumen de la región limitada por las superficies: $az = y^2$, $x^2 + y^2 = r2$, $z = 0$ donde a y r son constantes.

Solución.

Como una de las curvas es una circunferencia en el plano xy y se quiere calcular un volumen en que está involucrada, se utilizan coordenadas cilíndricas para facilitar los cálculos, por lo que

$$V = \int\int_R \frac{y^2}{a}\, \mathrm{d}A$$

donde

$$\mathrm{d}A = h_r h_\theta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \qquad h_r = 1 \qquad h_\theta = r$$

Como se debe considerar el volumen del cilindro completo se debe integrar desde 0 hasta r con respecto a r y desde 0 hasta 2π con respecto a θ, por lo que el volumen se define como

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{a} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r^4 \operatorname{sen}^2 \theta}{4a} \, \mathrm{d}\theta = \frac{r^4 \pi}{4a} u^3$$

Ejercicio 13: Calcular el volumen de la región que es limitada por las superficies S_1 y S_2 representadas por: $S_1 : x^2 + z^2 = 4 - y$, $S_2 : y + 5 = 0$.

Solución.

Para calcular el volumen de un sólido dada una región, empleamos una integral triple de volumen en xyz:

$$V = \iiint_V dV \implies V = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \tag{1}$$

Al aplicar la primera integral, obtenemos justamente la integral doble que se utiliza para calcular **el volumen entre dos superficies**:

$$V = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} h_2(x,y) - h_1(x,y) \, \mathrm{d}A \tag{2}$$

Notamos que tenemos es más sencillo trabajar con una función $h(x,z)$ debido a que la superficie S_2 ya nos da uno de los límites de integración en y, así podemos despejar y de la primera superficie para obtener el segundo límite:

$$S_1 : x^2 + z^2 = 4 - y \implies x^2 + z^2 + y = 4 \implies \boldsymbol{y = 4 - x^2 - z^2}$$

De esta forma podemos definir lo siguiente:

$$h_1(x,z) = -5 \qquad h_2(x,z) = 4 - x^2 - z^2$$

$$\implies h_2(x,z) - h_1(x,z) = 4 - x^2 - z^2 - (-5) = 4 - x^2 - z^2 + 5$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{h_2(x,z) - h_1(x,z) = 9 - x^2 - z^2}$$

Sustituimos la función obtenida en la ecuación (2):

$$V = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} 9 - x^2 - z^2 \, \mathrm{d}A$$

A partir de la ecuación anterior, podemos darnos cuenta de que nos conviene realizar una transformación a coordenadas polares, tal que $x^2 + z^2 = r^2$ y $\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$. Además, notamos que se tiene una circunferencia de radio 3, por lo que $a = 0$, $b = 2\pi$, $g_1(x) = 0$, $g_2(x) = 3$. Sustituimos en la integral y nos queda:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (9 - \underbrace{(x^2 + z^2)}_{r^2})\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (9 - r^2)\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (9r - r^3)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{9r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Bigg|_0^3 \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{81}{2} - \frac{81}{4} \right) \mathrm{d}\theta = \frac{81}{4} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = \frac{81}{4}\,(2\pi)$$

$$\therefore\ \boldsymbol{V = \frac{81}{2}\pi\, u^3}$$

Ejercicio 14: Calcular $\int\int_R cos\theta dA$ con R interior a $r = 4sen\theta$ y exterior a $r = 2$

Solución.

Para $R_1 : -2 \leq x \leq 2$ y $0 \leq y \leq 2$ y para $R_2 : -2 \leq x \leq 2$ y $\pm\sqrt{3} \leq y \leq 4$

Igualando $x^2 = 4y - y^2$ y $x^2 = 4 - y^2 \rightarrow 4y - y^2 = 4 - y^2, 4y = 4$ y con $y = 1$

Al sustituir en x tenemos $x^2 = 4 - 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$ Pero como $cos\theta \leq 1$

Entonces $cos\theta \not\subset$ a la región entre R_1 y R_2

$\therefore$ $\boldsymbol{\int\int_R cos\theta dA = 0}$

Ejercicio 15: Utilizar integración doble para calcular el área de la región del primer cuadrante interior a la curva cuya ecuación polar es $r = 3sen(4\theta)$

Solución.

$$R : \begin{cases} 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ o \leqslant r \leqslant 3sen(4\theta) \end{cases}$$

$$A(R) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{3sen(4\theta)} r dr d\theta$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2}\bigg|_0^{3sen(4\theta)} d\theta = \frac{9}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2(4\theta) d\theta$$

$$= \frac{9}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\theta - \frac{1}{8} sen(8\theta) \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9}{2} \left(\frac{1}{2} (\frac{\pi}{2} - 0) \right)$$

$$A(R) = \frac{9\pi}{8} u^2$$

Ejercicio 16: Utilizar la integración doble para calcular el área de la región interior a lac curva cuya ecuación polar es $r = 6\cos\theta$.

Solución.

Notamos que la ecuación polar dada corresponde a una circunferencia con centro en el punto $(3, 0)$ y radio $r = 3$. Se sabe que el cálculo de un area por medio de una integral doble esta dada por:

$$\iint_R \mathrm{d}A$$

Tomando en cuenta que en coordenadas polares $\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ y que los límites de integración vienen dados por $r_0 = 0$, $r = 3$, $\theta_0 = 0$ y $\theta = 2\pi$, sustituimos y resolvemos la integral doble:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{3} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2}\right)\Big|_0^3 \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{3^2}{2}\right) \mathrm{d}\theta = \frac{9}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = \frac{9}{2}\left(2\pi - 0\right) = \boldsymbol{9\pi}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{A = 9\pi\ u^2}$$

Ejercicio 17: Calcular el área de la región exterior a la circunferencia cuya ecuación polar es $r = 3$ e interior a la cardioide de ecuación polar $r = 3(1 + \cos\,\theta)$.

Solución.

Para calcular el área de la región emplearemos una doble integral en coordenadas polares, tal que:

$$\iint_R \mathrm{d}A = \iint_R r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \tag{1}$$

Para establecer los límites de integración utilizamos las dos curvas dadas, las cuales dependen de r de tal forma que tenemos: $\boldsymbol{3 < r < 3(1 + \cos\,\theta)}$. Ahora bien, para obtener los límites respecto a θ igualamos las dos ecuaciones para obtener los puntos de intersección:

$$\cancel{3} = \cancel{3}(1+\cos\,\theta) \implies \cancel{1} = \cancel{1} + \cos\,\theta \implies \cos\,\theta = 0 \implies \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2} \\ \theta = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Notamos que tenemos un ángulo que podría darnos problemas a la hora de realizar los cálculos, por lo que nos enfocaremos en el primer cuadrante $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ y aprovecharemos la simetría para multiplicar el area obtenida por 2. Ahora sustituimos los límites de integración obtenidos en la ecuación (1) y resolvemos:

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_3^{3(1+\cos\,\theta)} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2}\Big|_3^{3(1+\cos\,\theta)} \mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{9(1+\cos\,\theta)^2}{2} - \frac{9}{2}\right)\mathrm{d}\theta$$

$$\Longrightarrow \cancel{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{9(1+2\cos\,\theta+\cos^2\,\theta)}{\cancel{2}}\mathrm{d}\theta - \frac{9}{\cancel{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta\right]$$

$$\Longrightarrow\ 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+2\cos\,\theta+\cos^2\,\theta)\,\mathrm{d}\theta - 9(\frac{\pi}{2})$$

$$\Longrightarrow\ 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+2\cos\,\theta+\cos^2\,\theta)\,\mathrm{d}\theta - \frac{9\pi}{2}$$

$$\Longrightarrow\ \underbrace{9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+2\cos\,\theta+\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right)\,\mathrm{d}\theta - \frac{9\pi}{2}}_{\text{multiplicamos toda la expresión por } \frac{2}{2}}$$

$$\Longrightarrow\ \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2+4\cos\,\theta+1+\cos(2\theta)\,)\,\mathrm{d}\theta - \frac{18\pi}{4} =$$

$$\frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3+4\cos\,\theta+\cos(2\theta)\,)\,\mathrm{d}\theta - \frac{18\pi}{4}$$

$$\Longrightarrow\ \frac{9}{2}\left(3\theta+4\,\mathrm{sen}(\theta)+\cancelto{0}{\frac{\mathrm{sen}(2\theta)}{2}}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{18\pi}{4}$$

$$\Longrightarrow\ \frac{9}{2}\left[3\left(\frac{\pi}{2}\right)+4\underbrace{\left(\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2})-\mathrm{sen}(0)\right)}_{1}\right] - \frac{18\pi}{4}$$

$$\implies \frac{27\pi + 32 - 18}{4} = \frac{9\pi}{4} + 18$$

$$\therefore\ \boldsymbol{A = 18\,\frac{9\pi}{4}\ u^2}$$

Ejercicio 18: Calcular el área de la región limitada por la lemniscata cuya ecuación en coordenadas polares es $r^2 = 4\cos(2\theta)$.

Solución.

Para calcular el área de la lemniscata, emplearemos la siguiente integral doble tomando en cuenta que la ecuación brindada está en coordenadas polares:

$$\iint\limits_R \mathrm{d}A = \iint\limits_R r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \tag{1}$$

Una vez definida la doble integral que ocuparemos, necesitamos obtener los límites de integración. Como podemos observar en la ecuación (1), los primeros límites corresponden a los impuestos en r. En este caso el valor del radio de una lemniscata va de 0 al de la ecuación de la misma, por lo que debemos despejar a r:

$$r^2 = 4\cos(2\theta) \implies r = 2\sqrt{\cos(2\theta)}$$

Ahora, para el rango de valores de θ nos basaremos en el calculo de su primer cuadrante y multiplicaremos el area obtenida por 4. En cualquier lemniscata, el rango de θ en el primer cuadrante es $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$. Teniendo los dos límites de la integral doble, procedemos a resolverla:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \int\limits_0^{2\sqrt{\cos(2\theta)}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^2}{2}\bigg|_0^{2\sqrt{\cos(2\theta)}} \mathrm{d}\theta =$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(2\sqrt{\cos(2\theta)})^2}{2}\,\mathrm{d}\theta = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4\cos(2\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$\Longrightarrow\ 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \cancel{2}\ \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{\cancel{2}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) - \cancel{\operatorname{sen}(0)}^{\,0}\right) = 1$$

Tenemos que el valor del área del primer cuadrante de la lemniscata es de 1, por lo que dicho valor es multiplicado por los 4 cuadrantes que conforman esta figura y obtenemos:

$$\therefore\ \boldsymbol{A = 4\ u^2}$$

Ejercicio 19: Calcular el área de un pétalo de rosa dado por $r = cos4\theta$

Solución.

Si $r = 0 \to 0 = cos4\theta$ y $\theta = \frac{\pi}{8}$ Así, $R_1 : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{8}$ y $0 \leq r \leq cos4\theta$ la integral quedaría como:$A = 2\int\int_R r\,dA$ y con $dA = dxdy = h_r h_\theta dr d_\theta$ $A = 2\int\int_R r\,dr\,d\theta$ y sería:

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}}\int_0^{cos4\theta} r\,dr\,d\theta$$

Entonces $A = 2\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{2}cos^2 4\theta\,d\theta = \rceil_0^{\frac{\pi}{8}} (\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\frac{sen8\theta}{8}) = \frac{\pi}{16}\frac{1}{16}(0)$ $\qquad \therefore\ \boldsymbol{A = \frac{\pi}{16}}$

Ejercicio 20: Por medio de la integral doble, calcular el área de la región interior a la curva de ecuación polar $r = 2a(1+\cos\theta)$donde a es una constante.

Solución. Como se da una ecuación polar, se resuelve el ejercicio con coordenadas polares, por lo lo que

$$V = \int\int_R \mathrm{d}A$$

donde

$$\mathrm{d}A = h_r h_\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \qquad\qquad h_r = 1 \qquad\qquad h_\theta = r$$

Como se sabe que es un area cerrada y solo se nos da el valor de r, la integral que define el área queda de la siguiente manera

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2a(1+\cos\theta)} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2}\bigg|_0^{2a(1+\cos\theta)} \mathrm{d}\theta$$
$$= 2a^2\int_0^{2\pi} 1+2\cos\theta+\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = 2a^2\left(\theta+2\operatorname{sen}\theta+\frac{\operatorname{sen}2\theta}{4}+\frac{1}{2}\theta\right)\bigg|_0^{2\pi}$$
$$= 2\pi a^2 u^2$$

Ejercicio 21: Calcular $\iint_R (x^2+y^2)\mathrm{d}x$ siendo R la región interior del primer cuadrante limitado por las curvas $x\,y=1$, $x\,y=8$, $x^2-y^2=3$, $x^2-y^2=6$. Sugerencia: Hacer el cambio de variable $u=x\,y$, $v=x^2-y^2$.

Solución.

Obtenemos los límites de integración a partir del cambio de variable sugerido:

$$\begin{aligned} x\,y=1 &\implies u=1\\ x\,y=8 &\implies u=8\\ x^2-y^2=3 &\implies v=3\\ x^2-y^2=6 &\implies v=6 \end{aligned}$$

Ahora obtenemos $\mathrm{d}A$, tal que $\mathrm{d}A = J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$:

$$J\left(\frac{u,\ v}{x,\ y}\right) = \begin{vmatrix} y & 2x\\ x & -2y\end{vmatrix} = -2y^2-2x^2 = -2(x^2+y^2)$$
$$\implies J\left(\frac{u,\ v}{x,\ y}\right)^{-1} = J\left(\frac{x,\ y}{u,\ v}\right) = \frac{1}{-2\,(x^2+y^2)}$$
$$\int_3^6\int_1^8 \frac{-1}{2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_3^6\left[-\frac{1}{2}\right]_1^8 \mathrm{d}v = \int_3^6 -\frac{1}{2}(8-1) = \frac{7}{2}\int_3^6 \mathrm{d}v = \frac{7}{2}\,(6-3)$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\iint_R (x^2+y^2)\mathrm{d}x = \frac{21}{2}}$$

Ejercicio 22: Comprobar el teorema de Green con el campo vectorial $\overline{v} = xy\hat{\imath} + y^2\hat{\jmath}$ y la trayectoria cerrada de la figura $x^2+y^2=4$ con las curvas $x=0$ y $y=0$

Solución.

Para $C : C_1 : x^2+y^2=4, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, C_2 : x=0, 0 \leq t \leq 2, C_3 : y=0, 0 \leq t \leq 2$

Y con $\oint_C \overline{v} \cdot d\overline{r} = \int\int_R Q_x - P_y dA \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial y^2}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial x\, y}{\partial y} = x$ entonces:

$\oint_C \overline{v} \cdot d\overline{r} = \int\int_R -xdA$ y usando coordenadas polares $r^2=4, r=2 \quad \rightarrow \quad 0 \leq r \leq 2$

Y como $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ la integral quedaría de la siguiente manera:

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 rcos\theta r\, dr\, d\theta$$

$I = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\theta(\frac{2^3}{3}) =]_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{8}{3}sen\theta = -\frac{8}{3}(1)$ $\qquad \therefore \oint_C Pdx + Qdy = -\frac{8}{3}$

Ejercicio 23: Utilizar el teorema de Green en el plano mediante integrales de línea, el área de la región mostrada en al figura. **Solución.**

$$R : \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2x^2-1 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}$$

$$A(R) : \int_{-1}^{1}\int_{2x^2-1}^{1} dydx$$

$$= \int_{-1}^{1} 2(1-x^2)dx = 2\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}$$

$$= 2[(1-\frac{1}{3}) - (-1+\frac{1}{3})] = 2[\frac{2}{3}+\frac{2}{3}] = 2[\frac{4}{3}]$$

$$A(R) = \frac{8}{3}u^2$$

Ejercicio 25: Utilizar el teorema de Green para calcular el valor de $\int_c 4xy^2\,\mathrm{d}x + y + 2x^2\,\mathrm{d}y$ a lo largo de la trayectoria mostrada en la figura . Comentar el resultado.

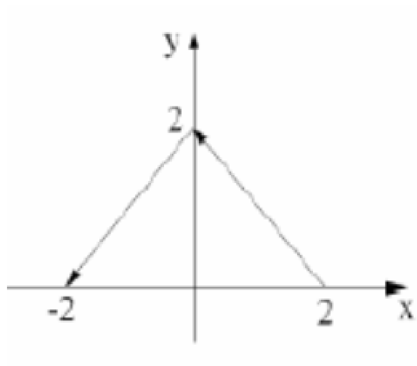

Figura 2: Gráfica del problema 25.

Solución. El teorema de Green dice que

$$\oint_c P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

y como

$$\begin{cases} Q = 4xy^2 \implies \frac{\partial Q}{\partial x} = 4x \\ P = y + 2x^2 \implies \frac{\partial P}{\partial y} = 8xy \end{cases}$$

$$W = \int_{-2}^{0}\int_{0}^{x+2} 4x - 8xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2}\int_{0}^{-x+2} 4x - 8xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

El problema se divide en dos integrales debido a que dos funciones delimitan el área donde se calcula la integral.

$$\begin{aligned} W &= \int_{-2}^{0} 4x^2 + 8x - 4x^3 - 16x^2 - 16x\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} -4x^2 + 8x - 4x^3 + 16x^2 - 16x\,\mathrm{d}x \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

lo que nos dice el resultado es que el campo propuesto es conservativo, ya que una de las características de este tipo de campos es que la trayectoria no importa en el cálculo del trabajo y, como en una curva cerra se empieza y termina en un mismo lugar, entonces el trabajo es cero.

Ejercicio 26: Haciendo uso del teorema de Green, determinar el área del cardioide $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = (2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t)$.

El teorema de Green dice que

$$\iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_c P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

y como para calcular el área $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 1$, se puede escoger arbitrariamente Q y P como

$$Q = x \qquad P = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad A = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int x\,\mathrm{d}y$$

o

$$Q = 0 \qquad P = y \qquad \Longrightarrow \qquad A = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int -y\,\mathrm{d}x$$

Combinando los resultados anteriores se obtiene que

$$A = \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}y + \int -y\,\mathrm{d}x \tag{13}$$

Ahora, obteniendo x, $\mathrm{d}x$, y y $\mathrm{d}y$ se tiene que

$$\begin{cases} x = 2a\cos t - a\cos 2t \\ \mathrm{d}x = (-2a)(\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = 2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 25p \\ dy = (2\cos t - 2\cos 2t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

Sustituyendo en 13 se llega a que

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} -\left(2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t\right)\left(-2a\right)\left(\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t\right) + \\ \left(2a\cos t - a\cos 2t\right)\left(2\cos t - 2\cos 2t\right)\mathrm{d}t$$

Desarrollando

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 4a\operatorname{sen}^2 t - 6a\operatorname{sen} t\operatorname{sen} 2t + 2a\operatorname{sen}^2 2t + \\ 4a\cos^2 t - 6a\cos t\cos 2t + 2a\cos^2 2t\,\mathrm{d}t$$

Agrupando términos semejantes

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 6a(1 - \operatorname{sen} t\operatorname{sen} 2t + \cos t\cos 2t)\,\mathrm{d}t$$

Aplicando la identidad del ángulo doble a $\operatorname{sen} 2t$ y a $\cos 2t$ y simplificando

$$A^1 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 6a(1 - \cos t)\,\mathrm{d}t = 6a\pi u^2$$

Ejercicio 27: Utilizar el Teorema de Green para calcular el área de la región cerrada que es limitada por la elipse de ecuación $9x^2 + 4y^2 = 36$.

Solución.

Se sabe que calcular el área por integral doble equivale a integrar la función $f(x, y) = 1$. De esta forma, el integrando puede trabajarse como:

$$f(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \implies 1 = 1 - 0 \tag{1}$$

De la ecuación (1) obtenemos que $Q_x = 1$ y $P_y = 0$. Estas funciones se calculan a partir de la integración:

[1] El resultado difiere con el proporcionado en la serie, pero no se encontró forma de llenar a él. Además, obteniendo el área de un caso específico, el resultado es más cercano al presentado aquí.

$$Q_x = 1 \implies \int Q_x \, \mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x \implies Q = x + C_1$$

$$P_y = 0 \implies \int P_y \, \mathrm{d}y = \int 0 \, \mathrm{d}y \implies P = C_2$$

Como C_1 y C_2 son constantes arbitrarias, para el cálculo del área asumiremos que ambas son 0. Por lo tanto, la integral de línea a calcular es:

$$\iint_R \mathrm{d}A = \oint_C P \, \mathrm{d}x + Q \, \mathrm{d}y = \oint_C x \, \mathrm{d}y$$

Ahora debemos parametrizar la elipse dada, por lo que reescribimos la ecuación de forma estándar y posteriormente parametrizamos:

$$9x^2 + 4y^2 = 36 \implies \frac{9x^2 + 4y^2}{36} = \frac{36}{36} \implies \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\implies \begin{cases} x = 2\cos(t) \implies \mathrm{d}x = -2\operatorname{sen}(t) \\ y = 3\operatorname{sen}(t) \implies \mathrm{d}y = 3\cos(t) \end{cases} \implies \underbrace{0 \leq t \leq 2\pi}_{\text{Se trata de una elipse cerrada.}}$$

Procedemos a calcular la integral de línea a partir de la parametrización y los límites obtenidos:

$$\oint_C x \, \mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} (2\cos t)(3\cos t) \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (6\cos^2 t) \, \mathrm{d}t$$

$$= 6 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2t)}{2}, \mathrm{d}t \implies \frac{6}{2} \int_0^{2\pi} 1 + \cos(2t) \, \mathrm{d}t$$

$$= 3\left(t + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 3\left[(2\pi - 0) + \left(\overbrace{\cancel{\frac{\operatorname{sen}(4\pi)}{2}}}^{0} - \overbrace{\cancel{\frac{\operatorname{sen}(0)}{2}}}^{0}\right)\right] = 3(2\pi)$$

$$\therefore\ \boldsymbol{A = 6\pi\ u^2}$$

Ejercicio 28: Utilizar el teorema de Green en el plano, para calcular $\iint\limits_R (x^2 + y^2)dxdy$siendo R la región del plano XY donde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ siendo a y b constantes.

Solución.

$$\iint_C \left(\frac{\partial Q}{\partial d} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_C F \cdot dr = \int_C Pdx + Qdy$$

$$\iint_R (2x - 2y)dA$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1 \rightarrow C : \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = bsen\theta \end{cases}$$

$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

$$\begin{cases} dx = a\cos\theta \\ dy = bsen\theta \end{cases} \rightarrow x = a; y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

$$A(R) = (a^2 + b^2)\int_{2\pi}^{0} b\sqrt{1 - \frac{a^2 \cos^2\theta}{a^2}}(-asen\theta)d\theta$$

$$A(R) = (a^2 + b^2)\int_{2\pi}^{0} b\sqrt{1 - \cos^2\theta}(-asen\theta)d\theta$$

$$= (a^2 + b^2)\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -absen^2\theta d\theta$$

$$= (a^2 + b^2)(-ab)\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta$$

$$= (a^2 + b^2)(-ab)\left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}sen(2\theta)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{0}$$

$$A(R) = (a^2 + b^2)(-ab)\left[\frac{\frac{\pi}{2}}{2} - \frac{1}{4}sen(2\frac{\pi}{2})\right]$$

$$A(R) = \frac{\pi}{4}(a^2 + b^2)(-ab)$$