2023-24（下）模拟（19）

2024-03-03

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 半径为 2 的圆上长度为 4 的圆弧所对的圆心角是（　　）A. 1　B. 2　C. 4　D. 8

2. 直线 l 过抛物线 $C: x^2=-4y$ 的焦点，且在 x 轴与 y 轴上的截距相同，则 l 的方程是（　　）

A. $y=-x-1$　B. $y=-x+1$　C. $y=x-1$　D. $y=x+1$

3. 如图，某种车桩可在左右两侧各停靠一辆单车，每辆单车只能停靠于一个车桩.某站点设有 4 个均停满共享单车的这样的车桩.若有两人在该站点各自挑选一辆共享单车骑行，且所挑单车不停靠于同一车桩，则不同的选法种数是（　）

A. 24　B. 36　C. 48　D. 96

4. 随机变量 X 服从正态分布 $X\sim N(1,\sigma^2)$.若 $P(1\le X<3)=0.2$，则 $P(X<1||X|>1)=$（　　）

A. $\frac{1}{4}$　B. $\frac{3}{8}$　C. $\frac{5}{8}$　D. $\frac{3}{4}$

5. 已知 $a>1,b>1$.设甲：$ae^b=be^a$，乙：$a^b=b^a$，则（　　）

A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件　B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

C. 甲是乙的充要条件　D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

6. 已知复数 $z=a+bi$，其中 $a,b\in R$ 且 $a+b=1$，则 $|z+1+i|$ 的最小值是（　　）

A. $\sqrt{2}$　B. 2　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

7. 高为 3，长宽为 $2\sqrt{2}$ 的长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，以 A_1,C_1,C 为球心的球 O_1,O_2,O_3 两两相切，过 B 点作球 O_3 的切线 PB 交球 O_3 于点 P,P 在长方体外部，则点 P 的轨迹长度是（　）A. $\frac{4\sqrt{5}}{5}\pi$　B. $2\sqrt{2}\pi$　C. $\frac{3\sqrt{2}\pi}{2}$　D. 3π

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，且对任意 $m,n\in N^*(m>n)$ 均有 $a_{m+n}+a_{m-n}=2a_m+2a_n$.记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 $S_7=$（　　）A. 28　B. 140　C. 256　D. 784

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分.

9. 已知集合 $A=\{x\in R|\ x^2+1=0\},B=\{\Phi\}$，则（　　）A. $A=\Phi$　B. $A=B$　C. $A\in B$　D. $A\subseteq B$

10. 设 $\theta\in(0,\pi)$，向量 $\vec{a}=(\sin\theta,\cos\theta)$，向量 $\vec{b}=(\sin 2\theta,\cos 2\theta)$，则（　）

A. $\vec{a},\vec{b}$ 必不互为平行向量　B. $\vec{a},\vec{b}$ 必不互为垂直向量　C. 存在 θ，使 $\vec{a}=\vec{b}$　D. 对任意 $\theta,(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-\vec{b})$

11. 已知函数 $f(x)=\ln^2 x$，曲线 $C: y=f(x)$.过不在 C 上的点 $P(a,b)(a>0)$ 恰能作两条 C 的切线，切点分别为 $(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2))(x_1<x_2)$，则（　　）A. $a>e$　B. $2a=e(b+1)$　C. $x_1<a$　D. $f(x_2)>b$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知函数 $f(x)=x\ln(e^x+1)-ax^2$ 是奇函数，则 $a=$__________.

13. 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=4$，且其前 n 项和为公比为 2 的等比数列.则$\{a_n\}$的前 n 项积是__________.（用含 n 的式子表示）.

14. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 与平行于 x 轴的动直线交于 A,B 两点，点 A 在点 B 左侧，双曲线 C 的左焦点为 F，且当 $AF\perp AB$ 时，$|AF|=|AB|$.则双曲线的离心率是__________；当直线运动时，延长 BF 至点 P 使 $|AF|=|FP|$，连接 AP 交 x 轴于点 Q，则 $\dfrac{|FQ|}{|FP|}$ 的值是__________.

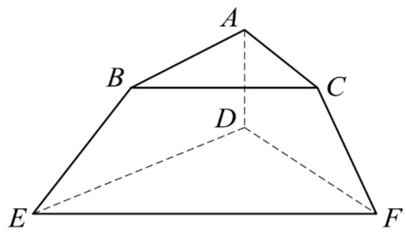
四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15. 设函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{ax}-\ln x-\dfrac{1}{x}(a\neq 0)$.（1） $a=e$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（2）证明： $f(x)$ 至多只有一个零点.

16. 如图，多面体 $ABCEF$ 中，四边形 $ABED$ 与四边形 $ACFD$ 均为直角梯形.已知点 B,C,E,F 四点共面，且 $AD\perp AB, AD\perp AC$.（1）证明：（i）平面 $ABC//$平面 DEF；（ii）多面体 $ABCDEF$ 是三棱台；

（2）若 $AB=AC=AD=1, DE=DF=2, BC=\sqrt{2}$，求平面 $BCEF$ 与平面 DEF 所成角的余弦值.



17. 记$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c.已知$\sin A\sin B=\sin^2 C$.（1）当角C最大时，求其最大值并判断$\triangle ABC$的形状；（2）若$\triangle ABC$的中线$|CD|=\sqrt{3}$，求$\triangle ABC$面积的最大值.

18. 已知曲线C由$x^2+y^2=4(x\le 0)$和$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1(x>0)$组成，点$A(-2,0)$，点$B(2,0)$，点$P,Q$在$C$上.

（1）求$|PA|+|PB|$的取值范围（当P与A重合时，$|PA|=0$）；（2）若$OP\perp OQ$，求$\triangle OPQ$面积的取值范围.

19. 一般地，n 元有序实数对 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 称为 n 维向量.对于两个 n 维向量 $\vec{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\vec{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，定义：两点间距离 $d=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+\ldots+(b_n-a_n)^2}$，利用 n 维向量的运算可以解决许多统计学问题.其中，依据“距离”分类是一种常用的分类方法：计算向量与每个标准点的距离 d_n，与哪个标准点的距离 d_n 最近就归为哪类.某公司对应聘员工的不同方面能力进行测试，得到业务能力分值 (a_1)、管理能力分值 (a_2)、计算机能力分值 (a_3)、沟通能力分值 (a_4)（分值 $a_i\in N^*,i\in\{1,2,3,4\}$ 代表要求度，1 分最低，5 分最高）并形成测试报告.不同岗位的具体要求见下表：

岗位	业务能力分值 (a_1)	管理能力分值 (a_2)	计算机能力分值 (a_3)	沟通能力分值 (a_4)	合计分值
会计（1）	2	1	5	4	12
业务员（2）	5	2	3	5	15
后勤（3）	2	3	5	3	13
管理员（4）	4	5	4	4	17

对应聘者的能力报告进行四维距离计算，可得到其最适合的岗位.设四种能力分值分别对应四维向量 $\vec{\beta}=(a_1,a_2,a_3,a_4)$ 的四个坐标.（1）将这四个岗位合计分值从小到大排列得到一组数据，直接写出这组数据的第三四分位数；（2）小刚与小明到该公司应聘，已知：只有四个岗位的拟合距离的平方 d_n^2 均小于 20 的应聘者才能被招录.（i）小刚测试报告上的四种能力分值为 $\overrightarrow{\beta_0}=(4,3,2,5)$，将这组数据看成四维向量中的一个点，将四种职业 1、2、3、4 的分值要求看成样本点，分析小刚最适合哪个岗位；

（ii）小明已经被该公司招录，其测试报告经公司计算得到四种职业 1、2、3、4 的推荐率 (p) 分别为 $\frac{14}{43},\frac{13}{43},\frac{9}{43},\frac{7}{43}$ $\left(p_n=\frac{d_n^2}{d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2}\right)$，试求小明的各项能力分值.

解答

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 半径为 2 的圆上长度为 4 的圆弧所对的圆心角是（ B ）A. 1 B. 2 C. 4 D. 8

2. 直线 l 过抛物线 $C: x^2=-4y$ 的焦点，且在 x 轴与 y 轴上的截距相同，则 l 的方程是（ A ）

A. $y=-x-1$ B. $y=-x+1$ C. $y=x-1$ D. $y=x+1$

$key: \frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$过焦点$(0,-1)$得$a=-1, \therefore x+y=-1$

3. 如图，某种车桩可在左右两侧各停靠一辆单车，每辆单车只能停靠于一个车桩.某站点设有 4 个均停满共享单车的这样的车桩.若有两人在该站点各自挑选一辆共享单车骑行，且所挑单车不停靠于同一车桩，则不同的选法种数是（ C ）A. 24 B. 36 C. 48 D. 96

4. 随机变量 X 服从正态分布 $X \sim N(1,\sigma^2)$.若 $P(1 \le X < 3)=0.2$，则 $P(X<1 \| X|>1)=$（ B ）

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{5}{8}$ D. $\frac{3}{4}$

5. 已知 $a>1, b>1$.设甲：$ae^b=be^a$，乙：$a^b=b^a$，则（ A ）

A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件 B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

C. 甲是乙的充要条件 D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

key:甲$\Leftrightarrow \ln a+b=\ln b+a \Leftrightarrow a-\ln a=b-\ln b$

乙$\Leftrightarrow b\ln a=a\ln b \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a}=\frac{\ln b}{b}$

设$p(x)=x-\ln x(x>1), q(x)=\frac{\ln x}{x}(x>1)$

则$p'(x)=1-\frac{1}{x}>0, q'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}>0 \Leftrightarrow 1<x<e, \therefore$甲$\Leftrightarrow a=b \Rightarrow$乙；

乙$\Leftrightarrow 1<a<e<b$，且$\frac{\ln a}{a}=\frac{\ln b}{b}$，

令$t=\frac{b}{a}>1$，则$\ln a=\frac{\ln t}{t-1}, \therefore b-a-\ln\frac{b}{a}=(t-1)e^{\frac{\ln t}{t-1}}-\ln t$记为$r(t)$，

则$r'(t)=e^{\frac{\ln t}{t-1}}+(t-1)e^{\frac{\ln t}{t-1}}\cdot\frac{\frac{t-1}{t}-\ln t}{(t-1)^2}=e^{\frac{\ln t}{t-1}}\cdot\frac{t^2-1-\ln t}{t(t-1)}>0, \therefore$乙$\nRightarrow$甲

6. 已知复数 $z=a+bi$，其中 $a,b\in R$ 且 $a+b=1$，则 $|z+1+i|$ 的最小值是（ D ）

A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

7. 高为 3，长宽为 $2\sqrt{2}$ 的长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，以 A_1, C_1, C 为球心的球 O_1, O_2, O_3 两两相切，过 B 点作球 O_3 的切线 PB 交球 O_3 于点 P,P 在长方体外部，则点 P 的轨迹长度是（ C ）A. $\frac{4\sqrt{5}}{5}\pi$ B. $2\sqrt{2}\pi$ C. $\frac{3\sqrt{2}\pi}{2}$ D. 3π

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，且对任意 $m,n\in N^*(m>n)$ 均有 $a_{m+n}+a_{m-n}=2a_m+2a_n$.记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 $S_7=$（ B ）A. 28 B. 140 C. 256 D. 784

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分.

9. 已知集合 $A=\{x\in R|\ x^2+1=0\},B=\{\Phi\}$，则（ACD ）A. $A=\Phi$　B. $A=B$　C. $A\in B$　D. $A\subseteq B$

$key: A=\Phi\in B, A=\Phi\subseteq B$

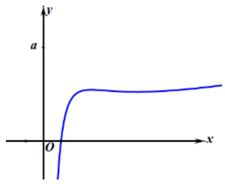
10. 设 $\theta\in(0,\pi)$，向量 $\vec{a}=(\sin\theta,\cos\theta)$，向量 $\vec{b}=(\sin 2\theta,\cos 2\theta)$，则（　AD　）

A. $\vec{a},\vec{b}$ 必不互为平行向量　B. $\vec{a},\vec{b}$ 必不互为垂直向量　C. 存在 θ，使 $\vec{a}=\vec{b}$　D. 对任意 $\theta,(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-\vec{b})$

11. 已知函数 $f(x)=\ln^2 x$，曲线 $C: y=f(x)$.过不在 C 上的点 $P(a,b)(a>0)$ 恰能作两条 C 的切线，切点分别为 $(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2))(x_1<x_2)$，则（ BCD　）A. $a>e$　B. $2a=e(b+1)$　C. $x_1<a$　D. $f(x_2)>b$

$key:$由$f'(x)=2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}$得$b-\ln^2 x=\dfrac{2\ln x}{x}(a-x)$即$b=\ln^2 x-2\ln x+\dfrac{2a\ln x}{x}$有两个相异解$x_1,x_2(0<x_1<x_2)$

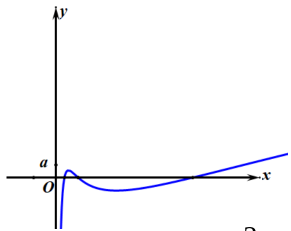
设$p(x)=\ln^2 x-2\ln x+\dfrac{2a\ln x}{x}$，则$p'(x)=2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x}+2a\cdot\dfrac{1-\ln x}{x^2}=2(\ln x-1)\cdot\dfrac{x-a}{x^2}$

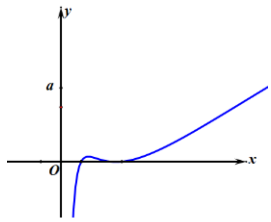


当$a=e$时，$p'(x)\ge 0$,不合；

当$a>e$时$,p'(x)>0\Leftrightarrow 0<x<e,or,x>a,\therefore p(x)_{\max}=p(e)=\dfrac{2a}{e}-1>0,p(x)_{\min}=p(a)=\ln^2 a$

而$\lim\limits_{x\to 0^+}p(x)=-\infty,\lim\limits_{x\to\infty}p(x)=+\infty$,如图，不合,$A$错；





当$0<a<e$时$,p'(x)>0\Leftrightarrow 0<x<a,or,x>e$

$\therefore p(x)_{\max}=p(a)=\ln^2 a>0,p(x)_{\min}=p(e)=\dfrac{2a}{e}-1$

而$\lim\limits_{x\to 0^+}p(x)=-\infty,\lim\limits_{x\to\infty}p(x)=+\infty$,如图，

$\therefore\dfrac{2a}{e}-1=b$，且$b\ne\ln a$即$2a=e(b+1)$,且$x_1<a,\therefore B,C$对；且$x_2=e,\therefore f(x_2)=1>\dfrac{2a}{e}-1\Leftrightarrow f(x_2)>b,D$对

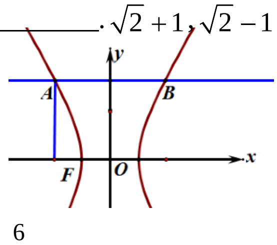
三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

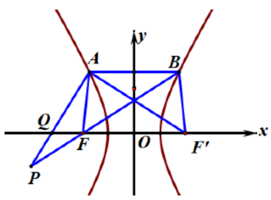
12. 已知函数 $f(x)=x\ln(e^x+1)-ax^2$ 是奇函数，则 $a=$__________.$\dfrac{1}{2}$

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=4$，且其前 n 项和为公比为 2 的等比数列.则 $\{a_n\}$ 的前 n 项积是__________.（用含 n 的式子表示）.$2^{\frac{n^2+n+2}{2}}$

14. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 与平行于 x 轴的动直线交于 A,B 两点，点 A 在点 B 左侧，双曲线 C 的左焦点为 F，且当 $AF\perp AB$ 时，$|AF|=|AB|$.则双曲线的离心率是__________；当直线运动时，延长 BF 至点 P 使 $|AF|=|FP|$，连接 AP 交 x 轴于点 Q，则 $\dfrac{|FQ|}{|FP|}$ 的值是__________.$\sqrt{2}+1,\sqrt{2}-1$

$key:\dfrac{b^2}{a}=2c\Leftrightarrow e^2-1=2e$得$e=1+\sqrt{2}$





设$A(s,t)$(其中$\dfrac{s^2}{a^2}-\dfrac{t^2}{b^2}=1(s<0,t>0)$, 则$B(-s,t)$, $\therefore \overrightarrow{BF}=(-c+s,-t)$,

$|AF|=-a-es, |AF'|=a-es=|BF|$,

$\therefore \overrightarrow{FP}=\dfrac{|AF|}{|BF|}\overrightarrow{BF}=\dfrac{-a-es}{a-es}(-c+s,-t)$, $\therefore P(\dfrac{s(-a+2ec-es)}{a-es},\dfrac{(a+es)t}{a-es})$

$$\therefore \frac{t}{s-x_Q}=\frac{\frac{(a+es)t}{a-es}-t}{\frac{s(-a+2ec-es)}{a-es}-s}=\frac{t\cdot 2es}{s(-2a+2ec)}=\frac{et}{-a+ec}\text{得}x_Q=s-c+\frac{a^2}{c}$$

$$\therefore \frac{|FQ|}{|FP|}=\frac{s+\frac{a^2}{c}}{a+es}=\frac{\frac{1}{c}(a^2+cs)}{a+\frac{c}{a}s}=\frac{1}{e}=\sqrt{2}-1$$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15. 设函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{ax}-\ln x-\dfrac{1}{x}(a\neq 0)$.（1） $a=e$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（2）证明： $f(x)$ 至多只有一个零点.

【小问 1 详解】当 $a=\mathrm{e}$ 时， $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{x-1}}{x}-\ln x-\dfrac{1}{x}$， 则 $f'(x)=\dfrac{(x-1)\mathrm{e}^{x-1}}{x^2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$，

所以 $f'(1)=0$， 又 $f(1)=0$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-0=0\times(x-1)$， 即 $y=0$.

【小问 2 详解】由 $f(x)=0$， 得到 $\dfrac{\mathrm{e}^x}{ax}-\ln x-\dfrac{1}{x}=0$， 整理得到 $\dfrac{1}{a}=\dfrac{x\ln x+1}{\mathrm{e}^x}$，

令 $h(x)=\dfrac{x\ln x+1}{\mathrm{e}^x}$， 则 $h'(x)=\dfrac{(\ln x+1)\mathrm{e}^x-(x\ln x+1)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2}=\dfrac{\ln x-x\ln x}{\mathrm{e}^x}=\dfrac{(1-x)\ln x}{\mathrm{e}^x}$，

当 $x\in(0,1)$ 时， $(1-x)\ln x<0$， 当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $(1-x)\ln x<0$，

所以 $h'(x)\le 0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立，当且仅当 $x=1$ 时取等号，

故 $h(x)=\dfrac{x\ln x+1}{\mathrm{e}^x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，则 $y=\dfrac{1}{a}$ 与 $h(x)=\dfrac{x\ln x+1}{\mathrm{e}^x}$ 最多有一个交点，

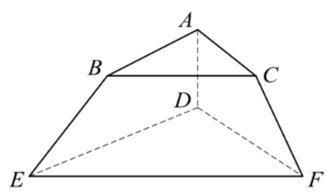
即 $f(x)$ 至多只有一个零点

16. 如图，多面体 $ABCEF$ 中，四边形 $ABED$ 与四边形 $ACFD$ 均为直角梯形.已知点 B,C,E,F 四点共面，且 $AD\perp AB, AD\perp AC$.（1）证明：（i）平面 ABC // 平面 DEF ；（ii）多面体 $ABCDEF$ 是三棱台；

（2）若 $AB=AC=AD=1, DE=DF=2, BC=\sqrt{2}$， 求平面 $BCEF$ 与平面 DEF 所成角的余弦值.

【小问 1 详解】（i）四边形 $ABED$ 与四边形 $ACFD$ 均为直角梯形，

$AD\perp AB, AD\perp AC$， 故 $AB//DE$， $AC//DF$，



因为 $AB \not\subset$ 平面 DEF， $DE \subset$ 平面 DEF，

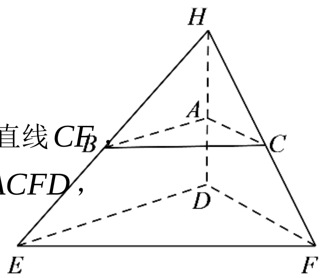
所以 $AB//$ 平面 DEF，同理可得 $AC//$ 平面 DEF，

因为 $AB, AC \subset$ 平面 ABC， $AB \cap AC = A$，所以平面 $ABC//$ 平面 DEF；

（ii）由（i）知，平面 $ABC//$ 平面 DEF，又 B, C, E, F 四点共面，

平面 $ABC \cap$ 平面 $BCEF = BC$，平面 $DEF \cap$ 平面 $BCEF = EF$，故 $BC//EF$，

由于四边形 $ABED$ 与四边形 $ACFD$ 均为直角梯形，且 $AD \perp AB, AD \perp AC$，



故 BE 与 DE 不垂直且夹角为锐角，CF 与 DF 不垂直且夹角为锐角，

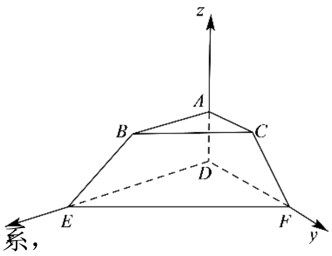
所以 BE, CF 为相交直线，延长两直线相交于点 H，所以 $H \in$ 直线 BE， $H \in$ 直线 CF，

又 $BE \subset$ 平面 $ABED$，$CF \subset$ 平面 $ACFD$，故 $H \in$ 平面 $ABED$， $H \in$ 平面 $ACFD$，

又平面 $ABED \cap$ 平面 $ACFD = AD$，故 $H \in AD$，

故直线 EB, FC, DA 相交于点 H，故多面体 $ABCDEF$ 是三棱台；

【小问 2 详解】因为 $AB = AC = 1, BC = \sqrt{2}$，故 $AB^2 + AC^2 = BC^2$，



则 $AB \perp AC$，故 $DE \perp DF$，

又 $AD \perp AB, AD \perp AC$，故 $AD \perp DE, AD \perp DF$，

以 D 为坐标原点， DE, DF, DA 所在直线分别为 x, y, z 轴，建立空间直角坐标系，

因为 $AD = 1, DE = DF = 2$，故 $D(0,0,0), E(2,0,0), F(0,2,0), B(1,0,1)$，

设平面 $BCEF$ 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$，则 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{BE} = (x,y,z) \cdot (1,0,-1) = x - z = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{BF} = (x,y,z) \cdot (-1,2,-1) = -x + 2y - z = 0 \end{cases}$，

令 $x = 1$，则 $z = 1$， $y = 1$，故 $\vec{m} = (1,1,1)$，平面 DEF 的法向量为 $\vec{n} = (0,0,1)$，

设平面 $BCEF$ 与平面 DEF 所成角大小为 θ，则 $\cos\theta = |\cos\langle\vec{m}, \vec{n}\rangle| = \dfrac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \dfrac{|(1,1,1) \cdot (0,0,1)|}{\sqrt{1+1+1}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

17. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c .已知 $\sin A \sin B = \sin^2 C$.

（1）当角 C 最大时，求其最大值并判断 $\triangle ABC$ 的形状；

（2）若 $\triangle ABC$ 的中线 $|CD| = \sqrt{3}$，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

【小问 1 详解】由 $\sin A \sin B = \sin^2 C$ 得到 $ab = c^2$，

又由余弦定理得 $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2bc} = \dfrac{a^2 + b^2}{2bc} - \dfrac{1}{2} \geq \dfrac{2ab}{2bc} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$，当且仅当 $a = b$ 取等号，

又 $C \in (0, \pi)$，且 $y = \cos x$ 在区间 $(0, \pi)$ 上单调递减，所以 $C \leq \dfrac{\pi}{3}$，

即角 C 最大值为 $\dfrac{\pi}{3}$，又 $a = b$，所以 $\triangle ABC$ 为等边三角形.

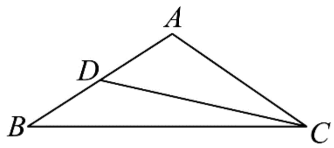
【小问 2 详解】因为$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$，得到$4\left|\overrightarrow{CD}\right|^2=\left|\overrightarrow{CA}\right|^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\left|\overrightarrow{CB}\right|^2=b^2+a^2+2ab\cos C$，

又$|CD|=\sqrt{3}$，所以$12=b^2+a^2+2ab\cos C$①，

又由余弦定理得$c^2=b^2+a^2-2ab\cos C$②，由①+②得到$12+c^2=2(b^2+a^2)$，

又$ab=c^2$，所以$12+ab=2(b^2+a^2)\geq 4ab$，得到$ab\leq 4$，当且仅当$a=b=2$时取等号，

此时，$c=2,C=\frac{\pi}{3}$，由（1）知$C\leq\frac{\pi}{3}$，

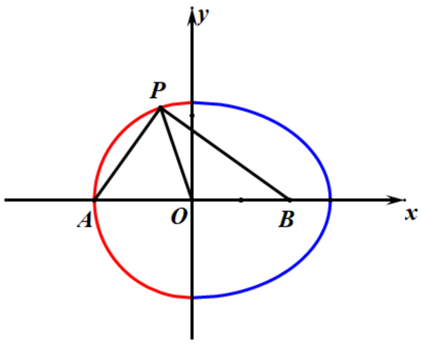


所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C\leq\frac{1}{2}\times 4\times\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，即$\triangle ABC$面积的最大值为$\sqrt{3}$.

18. 已知曲线C由$x^2+y^2=4(x\leq 0)$和$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1(x>0)$组成，点$A(-2,0)$，点$B(2,0)$，点$P,Q$在$C$上.

（1）求$|PA|+|PB|$的取值范围（当P与A重合时，$|PA|=0$）；（2）若$OP\perp OQ$，求$\triangle OPQ$面积的取值范围.

解：(1) 由已知得A,B是椭圆$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$的两个焦点，



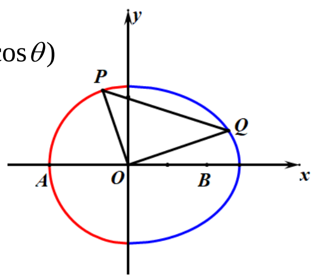
当P在曲线$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1(x>0)$上时，$|PA|+|PB|=2\cdot 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$，

当P在曲线$x^2+y^2=4(x\leq 0)$上时，AB是圆$x^2+y^2=4$的直径，$\therefore PA\perp PB$，

$\therefore |AP|+|PB|\leq 2\sqrt{\frac{PA^2+PB^2}{2}}=4\sqrt{2}$，且$|PA|+|PB|\geq|AB|=4$

$\therefore |PA|+|PB|$的取值范围为:$[4,4\sqrt{2}]$.

(2) 如图，设$Q(2\sqrt{2}\cos\theta,2\sin\theta)(\theta\in[0,\frac{\pi}{2}])$，则$P(2\cos(\theta+\frac{\pi}{2}),2\sin(\theta+\frac{\pi}{2}))$即$(-2\sin\theta,2\cos\theta)$



$$\therefore S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}0&0&1\\2\sqrt{2}\cos\theta&2\sin\theta&1\\-2\sin\theta&2\cos\theta&1\end{matrix}\right\|=2\sqrt{2}\cos^2\theta+2\sin^2\theta=2+(2\sqrt{2}-2)\cos^2\theta\in[2,2\sqrt{2}]$$

$\therefore\triangle OPQ$面积的取值范围为$[2,2\sqrt{2}]$

19. 一般地，n元有序实数对$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$称为n维向量.对于两个n维向量$\vec{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\vec{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，定义：两点间距离$d=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+\ldots+(b_n-a_n)^2}$，利用$n$维向量的运算可以解决许多统计学问题.其中，依据"距离"分类是一种常用的分类方法：计算向量与每个标准点的距离d_n，与哪个标准点的距离d_n最近就归为哪类.某公司对应聘员工的不同方面能力进行测试，得到业务能力分值(a_1)、管理能力分值(a_2)、计算机能力分值(a_3)、沟通能力分值(a_4)（分值$a_i\in N^*,i\in\{1,2,3,4\}$代表要求度，1 分最低，5 分最高）并形成测试报告.不同岗位的具

体要求见下表：

岗位	业务能力分值 (a_1)	管理能力分值 (a_2)	计算机能力分值 (a_3)	沟通能力分值 (a_4)	合计分值
会计（1）	2	1	5	4	12
业务员（2）	5	2	3	5	15
后勤（3）	2	3	5	3	13
管理员（4）	4	5	4	4	17

对应聘者的能力报告进行四维距离计算，可得到其最适合的岗位.设四种能力分值分别对应四维向量 $\vec{\beta}=(a_1,a_2,a_3,a_4)$ 的四个坐标.（1）将这四个岗位合计分值从小到大排列得到一组数据，直接写出这组数据的第三四分位数；（2）小刚与小明到该公司应聘，已知：只有四个岗位的拟合距离的平方 d_n^2 均小于 20 的应聘者才能被招录.（i）小刚测试报告上的四种能力分值为 $\overrightarrow{\beta_0}=(4,3,2,5)$，将这组数据看成四维向量中的一个点，将四种职业 $1、2、3、4$ 的分值要求看成样本点，分析小刚最适合哪个岗位；

（ii）小明已经被该公司招录，其测试报告经公司计算得到四种职业 $1、2、3、4$ 的推荐率 (p) 分别为 $\frac{14}{43},\frac{13}{43},\frac{9}{43},\frac{7}{43}$

$(p_n=\frac{d_n^2}{d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2})$，试求小明的各项能力分值.

解：（1）四个岗位的合计分值:12,13,15,17

而 $i=np=4\times0.75=3,\therefore$ 这组数据的第三四分位数为 $\frac{15+17}{2}=16$

（2）（ i ）由题意得 $d_{会计}^2=(4-2)^2+(3-1)^2+(2-5)^2+(5-4)^2=18$

$d_{业务员}^2=(4-5)^2+(3-2)^2+(2-3)^2+(5-5)^2=3,$

$d_{后勤}^2=(4-2)^2+(3-3)^2+(2-5)^2+(5-3)^2=17,$

$d_{管理员}^2=(4-4)^2+(3-5)^2+(2-4)^2+(5-4)^2=9,\therefore$ 小刚最适合的岗位是业务员

（ ii ）设小明的四种能力分值为 $\vec{\beta}=(a,b,c,d)$

$$\text{则}\begin{cases}d_1^2=(a-2)^2+(b-1)^2+(c-5)^2+(d-4)^2=\frac{14}{43}(d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2)\\ d_2^2=(a-5)^2+(b-2)^2+(c-3)^2+(d-5)^2=\frac{13}{43}(d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2)\\ d_3^2=(a-2)^2+(b-3)^2+(c-5)^2+(d-3)^2=\frac{9}{43}(d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2)\\ d_4^2=(a-4)^2+(b-5)^2+(c-4)^2+(d-4)^2=\frac{7}{43}(d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2)\end{cases},$$

$$(\text{由}\begin{pmatrix}29&-14&-14&-14&0\\13&-30&13&13&0\\9&9&-34&9&0\\7&7&7&-36&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\13&-30&13&13&0\\9&9&-34&9&0\\7&7&7&-36&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\13&-30&13&13&0\\9&9&-34&9&0\\1&1&1&-\frac{36}{7}&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&-\frac{36}{7}&0\\0&-43&0&\frac{43\times13}{7}&0\\0&0&-43&\frac{43\times9}{7}&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&-\frac{36}{7}&0\\0&-1&0&\frac{13}{7}&0\\0&0&-1&\frac{9}{7}&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-2&0\\0&1&0&-\frac{13}{7}&0\\0&0&1&-\frac{9}{7}&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix})$$

$$\therefore\begin{cases}29d_1^2-14d_2^2-14d_3^2-14d_4^2=0\\13d_1^2-30d_2^2+13d_3^2+13d_4^2=0\\9d_1^2+9d_2^2-34d_3^2+9d_4^2=0\\7d_1^2+7d_2^2+7d_3^2-36d_4^2=0\end{cases},\therefore d_1^2=2d_4^2,d_2^2=\frac{13}{7}d_4^2,d_3^2=\frac{9}{7}d_4^2,$$

$\because a,b,c,d \in \{1,2,3,4,5\}$, 且$d_i^2 < 20(i=1,2,3,4)$, $\therefore d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2 < 80$,

$\therefore d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2 = 43$

$$\therefore \begin{cases}(a-2)^2+(b-1)^2+(c-5)^2+(d-4)^2=14\cdots①\\(a-5)^2+(b-2)^2+(c-3)^2+(d-5)^2=13\cdots②\\(a-2)^2+(b-3)^2+(c-5)^2+(d-3)^2=9\cdots③\\(a-4)^2+(b-5)^2+(c-4)^2+(d-4)^2=7\cdots④\end{cases}$$

①$-$③得$:2b-d=3$得$\begin{cases}b=2\\d=1\end{cases}, or, \begin{cases}b=3\\d=3\end{cases}, or, \begin{cases}b=4\\d=5\end{cases}$

①$-$④得$:2a+4b-c=17$即$2a-c=17-4b$

①$-$②得$:3a+b-2c+d=9$即$3a-2c=9-b-d$

若$b=2,d=1$,则$a=12>5$舍去；若$b=3,d=3$,则$a=7>5$,舍去；若$b=4,d=5$,则$a=2,c=3$,此时①成立.

$\therefore$ 小明的四种能力分值为$(2,4,3,5)$