2023 年 I

2023-06-08

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1．已知集合 $M=\{-2,-1,0,1,2\}$，$N=\{x\mid x^2-x-6\geq 0\}$，则 $M\cap N=$（　　）

A．$\{-2,-1,0,1\}$　　B．$\{0,1,2\}$　　C．$\{-2\}$　　D．2

2．已知 $z=\dfrac{1-i}{2+2i}$，则 $z-\bar{z}=$（　　）A．$-i$　　B．i　　C．0　　D．1

3．已知向量 $\vec{a}=(1,1),\vec{b}=(1,-1)$，若 $(\vec{a}+\lambda\vec{b})\perp(\vec{a}+\mu\vec{b})$，则（　　）

A．$\lambda+\mu=1$　　B．$\lambda+\mu=-1$　　C．$\lambda\mu=1$　　D．$\lambda\mu=-1$

4．设函数 $f(x)=2^{x(x-a)}$ 在区间 $(0,1)$ 单调递减，则 a 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,-2]$　　B．$[-2,0)$　　C．$(0,2]$　　D．$[2,+\infty)$

5．设椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1),C_2:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的离心率分别为 e_1,e_2．若 $e_2=\sqrt{3}e_1$，则 $a=$（　　）

A．$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{6}$

6．过点 $(0,-2)$ 与圆 $x^2+y^2-4x-1=0$ 相切的两条直线的夹角为 α，则 $\sin\alpha=$（　　）

A．1　　B．$\dfrac{\sqrt{15}}{4}$　　C．$\dfrac{\sqrt{10}}{4}$　　D．$\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

7．记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，设甲：$\{a_n\}$ 为等差数列；乙：$\{\dfrac{S_n}{n}\}$ 为等差数列，则（　　）

A．甲是乙的充分条件但不是必要条件　　B．甲是乙的必要条件但不是充分条件

C．甲是乙的充要条件　　D．甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

8．已知 $\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{3},\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{6}$，则 $\cos(2\alpha+2\beta)=$（　　）A．$\dfrac{7}{9}$　B．$\dfrac{1}{9}$　C．$-\dfrac{1}{9}$　D．$-\dfrac{7}{9}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9．有一组样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_6$，其中 x_1 是最小值，x_6 是最大值，则（　　）

A．x_2,x_3,x_4,x_5 的平均数等于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的平均数　B．x_2,x_3,x_4,x_5 的中位数等于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的中位数

C．x_2,x_3,x_4,x_5 的标准差不小于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的标准差　D．x_2,x_3,x_4,x_5 的极差不大于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的极差

10．噪声污染问题越来越受到重视．用声压级来度量声音的强弱，定义声压级 $L_p=20\times\lg\dfrac{p}{p_0}$，其中常数 $p_0(p_0>0)$ 是听觉下限阈值，p 是实际声压．下表为不同声源的声压级：已知在距离燃油汽车、混合动力汽车、电动汽车 10m 处测得实际声压分别为 p_1,p_2,p_3，则（　　）

声源	与声源的距离 /m	声压级 /dB
燃油汽车	10	$60\sim90$
混合动力汽车	10	$50\sim60$
电动汽车	10	40

A．$p_1\geq p_2$　　B．$p_2>10p_3$　　C．$p_3=100p_0$　　D．$p_1\leq 100p_2$

11．已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，$f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)$，则（　　）

A．$f(0)=0$　　B．$f(1)=0$　　C．$f(x)$ 是偶函数　　D．$x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

12．下列物体中，能够被整体放入棱长为 1（单位：m）的正方体容器（容器壁厚度忽略不计）内的有（　　）

A．直径为 0.99m 的球体　B．所有棱长均为 1.4m 的四面体

C．底面直径为 0.01m，高为 1.8m 的圆柱体　　D．底面直径为 1.2m，高为 0.01m 的圆柱体

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．某学校开设了 4 门体育类选修课和 4 门艺术类选修课，学生需从这 8 门课中选修 2 门或 3 门课，并且每类选修课至少选修 1 门，则不同的选课方案共有________种（用数字作答）．

14．在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2, A_1B_1=1, AA_1=\sqrt{2}$，则该棱台的体积为________.

15．已知函数 $f(x)=\cos\omega x-1(\omega>0)$ 在区间 $[0,2\pi]$ 有且仅有 3 个零点，则 ω 的取值范围是________.

16．已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2．点 A 在 C 上，点 B 在 y 轴上，$\overrightarrow{F_1A}\perp\overrightarrow{F_1B},\overrightarrow{F_2A}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$，则 C 的离心率为________.

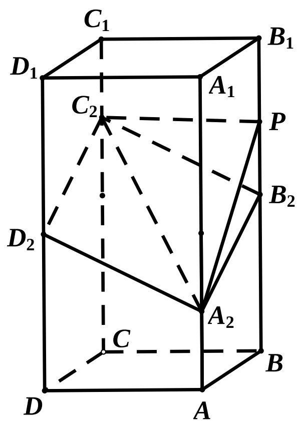
四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10 分）已知在 $\triangle ABC$ 中，$A+B=3C, 2\sin(A-C)=\sin B$．

（1）求 $\sin A$；（2）设 $AB=5$，求 AB 边上的高．

18．（12 分）如图，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2, AA_1=4$．点 A_2,B_2,C_2,D_2 分别在棱 AA_1,BB_1,CC_1,DD_1 上，$AA_2=1, BB_2=DD_2=2, CC_2=3$．（1）证明：$B_2C_2//A_2D_2$；

（2）点 P 在棱 BB_1 上，当二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 为 $150°$ 时，求 B_2P．



19．（12 分）已知函数 $f(x)=a(e^x+a)-x$．（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）证明：当 $a>0$ 时，$f(x)>2\ln a+\dfrac{3}{2}$．

20．（12 分）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，且 $d>1$．令 $b_n=\dfrac{n^2+n}{a_n}$，记 S_n,T_n 分别为数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的前 n 项和．（1）若 $3a_2=3a_1+a_3,S_3+T_3=21$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $\{b_n\}$ 为等差数列，且 $S_{99}-T_{99}=99$，求 d．

2023年 I

21．（12 分）甲、乙两人投篮，每次由其中一人投篮，规则如下：若命中则此人继续投篮，若末命中则换为对方投篮．无论之前投篮情况如何，甲每次投篮的命中率均为 0.6，乙每次投篮的命中率均为 0.8．由抽签确定第 1 次投篮的人选，第 1 次投篮的人是甲、乙的概率各为 0.5．（1）求第 2 次投篮的人是乙的概率；（2）求第 i 次投篮的人是甲的概率；

（3）已知：若随机变量 X_i 服从两点分布，且 $P(X_i=1)=1-P(X_i=0)=q_i, i=1,2,\cdots,n$，则 $E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}q_i$．记前 n 次（即从第 1 次到第 n 次投篮）中甲投篮的次数为 Y，求 $E(Y)$．

22.（12 分）在直角坐标系 xOy 中,点 P 到 x 轴的距离等于点 P 到点 $(0,\frac{1}{2})$ 的距离，记动点 P 的轨迹为 W.

（1）求 W 的方程；（2）已知矩形 $ABCD$ 有三个顶点在 W 上，证明：矩形 $ABCD$ 的周长大于 $3\sqrt{3}$．

(2023II)22.⑴ 证明：当$0<x<1$时，$x-x^2<\sin x<x$;

(2) 已知函数$f(x)=\cos ax-\ln(1-x^2)$,若$x=0$是$f(x)$的极大值点，求a的取值范围.

(2018年全国III理科）已知函数$f(x)=(2+x+ax^2)\ln(1+x)-2x$.

(1) 若$a=0$，证明:当$-1<x<0$时，$f(x)<0$；当$x>0$时，$f(x)>0$;

(2) 若$x=0$是$f(x)$的极大值点，求a的值.

2023 年 I

2023-06-08

解答

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1．已知集合 $M=\{-2,-1,0,1,2\}$，$N=\{x\mid x^2-x-6\geq 0\}$，则 $M\cap N=$（　　）

A．$\{-2,-1,0,1\}$　　B．$\{0,1,2\}$　　C．$\{-2\}$　　D．2

2．已知 $z=\dfrac{1-i}{2+2i}$，则 $z-\bar{z}=$（　　）A．$-i$　　B．i　　C．0　　D．1

3．已知向量 $\vec{a}=(1,1),\vec{b}=(1,-1)$，若 $(\vec{a}+\lambda\vec{b})\perp(\vec{a}+\mu\vec{b})$，则（　　）

A．$\lambda+\mu=1$　　B．$\lambda+\mu=-1$　　C．$\lambda\mu=1$　　D．$\lambda\mu=-1$

4．设函数 $f(x)=2^{x(x-a)}$ 在区间 $(0,1)$ 单调递减，则 a 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,-2]$　　B．$[-2,0)$　　C．$(0,2]$　　D．$[2,+\infty)$

5．设椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1),C_2:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的离心率分别为 e_1,e_2．若 $e_2=\sqrt{3}e_1$，则 $a=$（　　）

A．$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{6}$

6．过点 $(0,-2)$ 与圆 $x^2+y^2-4x-1=0$ 相切的两条直线的夹角为 α，则 $\sin\alpha=$（　　）

A．1　　B．$\dfrac{\sqrt{15}}{4}$　　C．$\dfrac{\sqrt{10}}{4}$　　D．$\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

7．记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，设甲：$\{a_n\}$ 为等差数列；乙：$\{\dfrac{S_n}{n}\}$ 为等差数列，则（　　）

A．甲是乙的充分条件但不是必要条件　　B．甲是乙的必要条件但不是充分条件

C．甲是乙的充要条件　　D．甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

8．已知 $\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{3},\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{6}$，则 $\cos(2\alpha+2\beta)=$（　　）A．$\dfrac{7}{9}$　B．$\dfrac{1}{9}$　C．$-\dfrac{1}{9}$　D．$-\dfrac{7}{9}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．有一组样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_6$，其中 x_1 是最小值，x_6 是最大值，则（　　）

A．x_2,x_3,x_4,x_5 的平均数等于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的平均数　B．x_2,x_3,x_4,x_5 的中位数等于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的中位数

C．x_2,x_3,x_4,x_5 的标准差不小于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的标准差　D．x_2,x_3,x_4,x_5 的极差不大于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的极差

10．噪声污染问题越来越受到重视．用声压级来度量声音的强弱，定义声压级 $L_p=20\times\lg\dfrac{p}{p_0}$，其中常数 $p_0(p_0>0)$ 是听觉下限阈值，p 是实际声压．下表为不同声源的声压级：已知在距离燃油汽车、混合动力汽车、电动汽车 10m 处测得实际声压分别为 p_1,p_2,p_3，则（　　）

声源	与声源的距离 /m	声压级 /dB
燃油汽车	10	$60\sim 90$
混合动力汽车	10	$50\sim 60$
电动汽车	10	40

A．$p_1\geq p_2$　　B．$p_2>10p_3$　　C．$p_3=100p_0$　　D．$p_1\leq 100p_2$

11．已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，$f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)$，则（　　）

A．$f(0)=0$　　B．$f(1)=0$　　C．$f(x)$ 是偶函数　　D．$x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

12．下列物体中，能够被整体放入棱长为 1（单位：m）的正方体容器（容器壁厚度忽略不计）内的有（　　）

A．直径为 0.99m 的球体　　B．所有棱长均为 1.4m 的四面体

C．底面直径为 0.01m，高为 1.8m 的圆柱体　　D．底面直径为 1.2m，高为 0.01m 的圆柱体

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．某学校开设了 4 门体育类选修课和 4 门艺术类选修课，学生需从这 8 门课中选修 2 门或 3 门课，并且

每类选修课至少选修 1 门，则不同的选课方案共有________种（用数字作答）.

14．在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2,A_1B_1=1,AA_1=\sqrt{2}$，则该棱台的体积为________.

15．已知函数 $f(x)=\cos\omega x-1(\omega>0)$ 在区间 $[0,2\pi]$ 有且仅有 3 个零点，则 ω 的取值范围是________.

16．已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2．点 A 在 C 上，点 B 在 y 轴上，$\overrightarrow{F_1A}\perp\overrightarrow{F_1B},\overrightarrow{F_2A}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$，则 C 的离心率为________.

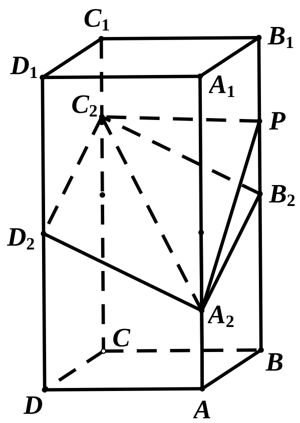
四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17．（10 分）已知在 $\triangle ABC$ 中，$A+B=3C,2\sin(A-C)=\sin B$.

（1）求 $\sin A$；（2）设 $AB=5$，求 AB 边上的高.

18．（12 分）如图，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2,AA_1=4$．点 A_2,B_2,C_2,D_2 分别在棱 AA_1,BB_1,CC_1,DD_1 上，$AA_2=1,BB_2=DD_2=2,CC_2=3$．（1）证明：$B_2C_2//A_2D_2$；

（2）点 P 在棱 BB_1 上，当二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 为 $150°$ 时，求 B_2P.



2023 年 I

2023-06-08

19．（12 分）已知函数 $f(x)=a(e^{x}+a)-x$．（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）证明：当 $a>0$ 时，$f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$．

20．（12 分）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，且 $d>1$．令 $b_n=\frac{n^2+n}{a_n}$，记 S_n,T_n 分别为数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的前 n 项和．（1）若 $3a_2=3a_1+a_3, S_3+T_3=21$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $\{b_n\}$ 为等差数列，且 $S_{99}-T_{99}=99$，求 d．

21．（12 分）甲、乙两人投篮，每次由其中一人投篮，规则如下：若命中则此人继续投篮，若末命中则换为对方投篮．无论之前投篮情况如何，甲每次投篮的命中率均为 0.6，乙每次投篮的命中率均为 0.8．由抽签确定第 1 次投篮的人选，第 1 次投篮的人是甲、乙的概率各为 0.5．（1）求第 2 次投篮的人是乙的概率；（2）求第 i 次投篮的人是甲的概率；

（3）已知：若随机变量 X_i 服从两点分布，且 $P(X_i=1)=1-P(X_i=0)=q_i, i=1,2,\cdots,n$，则 $E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}q_i$．记前 n 次（即从第 1 次到第 n 次投篮）中甲投篮的次数为 Y，求 $E(Y)$．

22.（12 分）在直角坐标系 xOy 中,点 P 到 x 轴的距离等于点 P 到点 $(0,\frac{1}{2})$ 的距离，记动点 P 的轨迹为 W.

（1）求 W 的方程；（2）已知矩形 $ABCD$ 有三个顶点在 W 上，证明：矩形 $ABCD$ 的周长大于 $3\sqrt{3}$．