函数概念及性质解答（2）

2022-12-11

一、函数概念

1°. 函数定义：设A、B是非空的数集，如果按照某种确定的对应关系f，使对于集合A中的任意一个数x，
在集合B中都有唯一的数$f(x)$和它对应，那么就称$f: A\to B$为从集合A到集合B的一个函数，
记作$y=f(x), x\in A$.
定义域：A；值域：$C=f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}\subseteq B$；函数图象：集合$\{(x,y)\mid y=f(x), x\in A\}$

对应法则（表示方法）$\begin{cases}\text{解析法}\\ \text{列表法}\\ \text{图象法（图象变换：平移、伸缩、对称）}\end{cases}$

2°.反函数定义：函数$y=f(x)$的定义域为A，值域为C，由$y=f(x)$得$x=\varphi(y)$，如果对于C中的任意一个值y，通过$x=\varphi(y)$，在A中都有唯一的值x和它对应，那么$x=\varphi(y)$就表示C到B的函数，y是自变量，x是y的函数，这样的函数$x=\varphi(y)$叫做函数$y=f(x)$的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，改写为$y=f^{-1}(x)$.
性质：(1) $f(x)$反函数存在条件：$f(x)$的图像与垂直y轴的直线只有一个交点
(2) $f(x)$与$f^{-1}(x)$的图像关于直线$y=x$对称
(3) 若$f(x)$是奇函数，则$f^{-1}(x)$是奇函数
(4) 若$f(x)$是单调函数，则$f^{-1}(x)$也是单调函数，且单调性一致
(5) 恒等式：$f^{-1}(f(x))=x$, $f(f^{-1}(x))=x$.

（04）若 $f(x)$和$g(x)$ 都是定义在实数集 R 上的函数，且方程 $x-f[g(x)]=0$ 有实数解，则 $g[f(x)]$ 不可能是（　）A. $x^2+x-\frac{1}{5}$　B. $x^2+x+\frac{1}{5}$　C. $x^2-\frac{1}{5}$　D. $x^2+\frac{1}{5}$　B

$key:\exists x_0\in R, x_0=f(g(x_0))$, 即

$x_0 \xrightarrow{g}$ $x_0=f(g(x_0)) \xleftarrow{f}$	$g(x_0) \xrightarrow{f}$ $\xleftarrow{g}$	$f(g(x_0))=x_0$ x_0

$\therefore \exists x_0\in R, f(g(x_0))=g(f(x_0)), \therefore g(f(x))=x$有解

变式.（多选题）已知函数 $f(x)$与$g(x)$的值域都为R，则以下四个判断正确的是（　）AC

A. 若 $f[f(x)]=f(x)$，则 $f(x)=x$；B.若 $f[f(x)]=x$，则 $f(x)=x$；C.若 $f[g(x)]=x$ 且 $g(x)=g(y)$，则 $x=y$

D.若存在实数 x,使得 $f[g(x)]=x$ 有解,则存在实数 x,使得 $g[f(x)]=x^2+x+1$.

$key: A$：令$t=f(x)\in R$，则$f(t)=t, \therefore f(x)=x$, A对

B：取$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, x\neq 0,\\ 0, x=0\end{cases}$，则$f(f(x))=\begin{cases}f(\frac{1}{x})=x, x\neq 0,\\ f(0)=0, x=0,\end{cases}=x, \therefore B$错

$C:\because f(g(x))=x, \therefore f(g(y))=y$, 且 $\therefore x=f(g(x))=f(g(y))=y, \therefore x=y$，$C$对

D：取$f(x)=x+1, g(x)=x-1$，则$f(g(x))=f(x-1)=x$有解

则$g(f(x))=g(x+1)=x=x^2+x+1$无解，$\therefore D$错

（08竞赛）9.设$f(x)=\frac{1}{1+2^{\lg x}}+\frac{1}{1+4^{\lg x}}+\frac{1}{1+8^{\lg x}}$，则$f(x)+f(\frac{1}{x})=$_____.3

2022-12-11

（2015）7. 存在函数$f(x)$满足：对于任意$x\in R$都有（　）D

$A.f(\sin 2x)=\sin x$　　$B.f(\sin 2x)=x^2+x$　　$C.f(x^2+1)=|x+1|$　　$D.f(x^2+2x)=|x+1|$

（2022 甘肃）设函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，且满足$f(x)-2xf(\frac{1}{x})+x^2=0$，则$f(x)$的最小值为____.

$key:\begin{cases}f(x)-2xf(\frac{1}{x})=-x^2\\ f(\frac{1}{x})-\frac{2}{x}f(x)=-\frac{1}{x^2}\end{cases},\therefore f(x)=\frac{1}{3}(x^2+\frac{2}{x})=\frac{1}{3}(x^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x})\ge 1(\because x>0)$

变式1 (1) 已知函数$y=f(2x+1)$的定义域为$(0,2)$，则函数$y=\frac{f(2x-1)}{\sqrt{x-2}}$的定义域为___.

(1)$\because x\in(0,2),\therefore 2x+1\in(1,5),\therefore\begin{cases}2x-1\in(1,5)\\ x-2>0\end{cases},\therefore$定义域为$(2,3)$

（2）求下列函数的定义域：$y=\sqrt{3-2^{2x-1}}$ ______；

$y=\sqrt{\log_a(2-\frac{1}{x})-1}$ ______；

$y=\frac{\ln(\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{-x^2-3x+4})}{x}$ ______.

$(2)3-2^{2x-1}\ge 0\Leftrightarrow 2^{2x-1}\le 3\Leftrightarrow 2x-1\le\log_2 3,\therefore$定义域为$(-\infty,\frac{1+\log_2 3}{2}]$

$\log_a(2-\frac{1}{x})-1\ge 0\Leftrightarrow\log_a(2-\frac{1}{x})\ge\log_a a,\therefore$定义域为$\begin{cases}[\frac{1}{2-a},0),a>2,\\ (-\infty,0),a=2,\\ (-\infty,0)\cup[\frac{1}{2-a},+\infty),1<a<2,\\ (\frac{1}{2},\frac{1}{2-a}],0<a<1.\end{cases}$

$\begin{cases}x^2-3x+2\ge 0\\ -x^2-3x+4\ge 0\\ |x^2-3x+2|+|-x^2-3x+4|\ne 0\\ x\ne 0\end{cases}$得定义域为$[-4,0)\cup(0,1)$

(3) 已知函数$f(x)=\log_3(3x)(1\le x\le 3)$，则函数$y=f(x)+f(x^2)$的值域为_____.

(3)由$\begin{cases}x\in[1,3]\\ x^2\in[1,3]\end{cases}$得$x\in[1,\sqrt{3}],\therefore y=1+\log_3 x+1+2\log_3 x=2+3\log_3 x\in[2,\frac{7}{2}]$

2(1) ①已知函数$f(\frac{1}{x}+1)=\frac{x}{x-1}$，则$f(x)=$________.

①令$t=\frac{1}{x}+1(x\ne 1)$得$x=\frac{1}{t-1}(t\ne 1$，且$t\ne 2),\therefore f(x)=\frac{1}{2-x}(x\ne 1)$

②已知定义域为R的函数$f(x)$满足$f(f(x)-x^2+x)=f(x)-x^2+x$.设仅有一个实数x_0，使得

函数概念及性质解答（2）

2022-12-11

$f(x_0)=x_0$, 则函数$f(x)=$______ x^2-x+1

$key: f(x)-x^2+x=x_0$即$f(x)=x^2-x+x_0,\therefore f(x_0)=x_0^2=x_0,\therefore x_0=0,or,1$

由$f(x)=x^2-x=x \Leftrightarrow x=0,2$不合；$f(x)=x^2-x+1=x \Leftrightarrow x=1,$

$\therefore f(x)=x^2-x+1$

③已知函数$f(x)$满足$f(1-x)-2f(x-1)=x-2$, 则$f(x)=$____.

key: 令$t=x-1$，则$f(-t)-2f(t)=t-1,\therefore f(t)-2f(-t)=-t-1,\therefore f(x)=1-\dfrac{x}{3}$

④ 奇函数$f(x)$及偶函数$g(x)$满足$f(x)-g(x)=\dfrac{1}{x+2}$, 则$f(x)=$_____, $g(x)=$______.

$key: f(x)-g(x)=\dfrac{1}{x+2},\therefore f(-x)-g(-x)=\dfrac{1}{-x+2}$即$-f(x)-g(x)=-\dfrac{1}{x-2},\therefore f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}, g(x)=\dfrac{2}{x^2-4}$

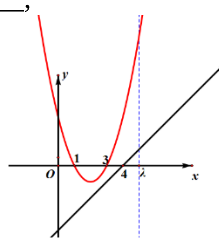
⑤若函数 $g(x)$ 满足 $g(x)+g(\dfrac{x-1}{x})=1+x$.则 $g(x)=$ __________.

$$key:\begin{cases} g(x)+g(\dfrac{x-1}{x})=1+x \\ g(\dfrac{x-1}{x})+g(\dfrac{1}{1-x})=2-\dfrac{1}{x} \\ g(\dfrac{1}{1-x})+g(x)=1+\dfrac{1}{1-x} \end{cases}$$

消去 $g(\dfrac{x-1}{x})$，$g(\dfrac{1}{1-x})$，可得 $g(x)=\dfrac{x^3-x^2-1}{2x(x-1)}$

（2018）已知$\lambda\in R$, 函数$f(x)=\begin{cases} x-4, x\ge\lambda, \\ x^2-4x+3, x<\lambda. \end{cases}$ 当$\lambda=2$时，不等式$f(x)<0$的解集是____;

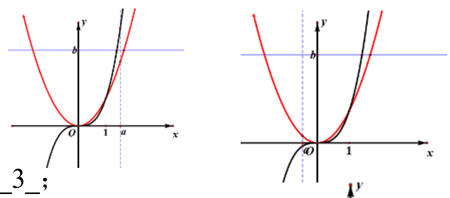
若函数$f(x)$恰有2个零点，则λ的取值范围是________.



$key: (1,4)$; 画出两个函数$y=x-4$, 及$y=x^2-4x+3$在$x\in R$上的图像得$\lambda\in(1,3]\cup(4,+\infty)$

变式 1 （1）已知$f(x)=\begin{cases} x^3, x\le a, \\ x^2, x>a, \end{cases}$ 若存在实数b, 使函数$g(x)=f(x)-b$有两个零点，

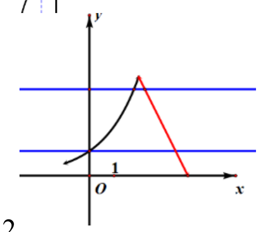
则a的取值范围为__________



$key: f(x)=b$, 如图, $\therefore a\in(1,+\infty)\cup(-\infty,0)$

（2）①设函数 $f(x)=\begin{cases} 2^x, x\in[-1,2], \\ 8-2x, x\in(2,4], \end{cases}$ 则 $f(\log_2 3)=$___3_;

若 $f(f(t))\in[0,1]$，则实数 t 的取值范围是_______.



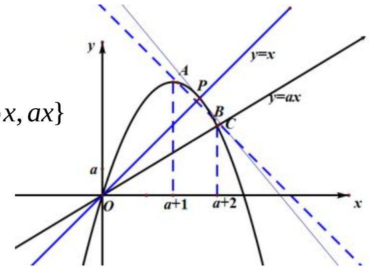
$key: f(t)\in[-1,0]\cup[\dfrac{7}{2},4],\therefore t\in[\log_2\dfrac{7}{2},\dfrac{9}{4}]$

②已知函数 $f(x)=\begin{cases} 2^x, x\le 0, \\ \log_2 x, x>0, \end{cases}$ 则 方程$f(f(x))+x=0$的实根的个数为____. 2

$key: f(f(x))=\begin{cases} f(2^x), x\le 0, \\ f(\log_2 x), x>0, \end{cases}=\begin{cases} 2^{2^x}, x\le 0, \\ x, 0<x\le 1, \\ \log_2(\log_2 x), x>1 \end{cases}=-x$的根的个数为2，如图

（3）已知 $a>0$，设函数$f(x)=\begin{cases} -x^2+(2+2a)x, 0<x<a+2, \\ ax, x\ge a+2, \end{cases}$存在$x_0$满足$f(f(x_0))=x_0$，且$f(x_0)\ne x_0$，则

a的取值范围是________. $(\frac{1}{2},1)$



$key:\because x>0,\therefore -x^2+(2+2a)x\ge ax \Leftrightarrow x<a+2,\therefore f(x)=\max\{-x^2+(2+2a)x, ax\}$

①当$a\ge 1$时，$ax\ge x,\therefore f(x)\ge x,\therefore f(f(x))\ge f(x)\ge x,\therefore$不存在$x_0$

②当$0<a<1$时，设$f(x_0)=y_0$，则$f(y_0)=f(f(x_0))=x_0$

$\therefore y=f(x)$图象上存在两点A、B关于直线$y=x$的对称点，

设AB方程为$y=-x+m$代入$y=-x^2+(2+2a)x$得：$x^2-(2a+3)x+m=0$

而直线AB与$y=x$的交点的横坐标为$\frac{m}{2},\therefore\begin{cases} \frac{2a+3}{2}=\frac{m}{2} \\ \Delta=(2a+3)^2-4m>0 \end{cases}$ 得$\frac{1}{2}<a<1$

（2001 全国）设$f(x)$是定义在R上的偶函数,其图像关于直线$x=1$对称,$\forall x_1,x_2\in[0,\frac{1}{2}]$,

都有$f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$,且$f(1)=a$.（1）求 $f(\frac{1}{2})$及$f(\frac{1}{4})$；（2）证明： $f(x)$是周期函数；

（3）记$a_n=f(2n+\frac{1}{2n})$，求 $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln a_n)$.

若$f(1)=a$,则$n\cdot\log_a[f(2n+\frac{1}{2n})]=$____ $n\in N^*$.

$key: f(-x)=f(x), f(-x)=f(x+2),\therefore T=2$

$f(x)=f^2(\frac{x}{2})\ge 0$,而$f(1)=f^2(\frac{1}{2})=a,\therefore f(\frac{1}{2})=a^{\frac{1}{2}}$

$f(\frac{1}{2})=f(\underbrace{\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{n个})=f(\frac{1}{2n})\cdot f(\underbrace{\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{n-1个})=f^n(\frac{1}{2n}),\therefore f(\frac{1}{2n})=a^{\frac{1}{2n}},\therefore n\log_a[f(2n+\frac{1}{2n})]=\frac{1}{2}$

结论：若$f(a+x)=f(a-x), f(b+x)=f(b-x)(b>a)$，则$f(x+2a)=f(-x)=f(2b+x),\therefore T=2b-2a$

若$f(a+x)=-f(a-x), f(b+x)=-f(b-x)(b>a)$，则$f(x+2a)=-f(-x)=f(2b+x),\therefore T=2b-2a$

若$f(a+x)=-f(a-x), f(b+x)=f(b-x)(b>a)$，则$f(x+2a)=-f(-x), f(-x)=f(2b+x)$,

$\therefore f(2b-2a+x)=-f(x),\therefore f(4b-4a+x)=-f(2b-2a+x)=f(x)\therefore T=2b-2a$

（2008竞赛）设$f(x)$是定义在R上的函数，若$f(0)=2008$,且对任意$x\in R$，满足$f(x+2)-f(x)\le 3\cdot 2^x$,

$f(x+6)-f(x)\ge 63\cdot 2^x$,则$f(2008)=$______.

$key: 63\cdot 2^x\le f(x+6)-f(x)\le f(x+4)+3\cdot 2^{x+4}-f(x)$

$\ge f(x+2)+3\cdot 2^{x+2}+3\cdot 2^{x+4}-f(x)\le 3\cdot 2^x+3\cdot 2^{x+2}+3\cdot 2^{x+4}=63\cdot 2^x,\therefore f(x+2)-f(x)=3\cdot 2^x$

$\therefore f(2008)=f(2008)-f(2006)+\cdots+f(4)-f(2)+f(2)-f(0)+f(0)$

$=3(2^{2006}+\cdots+2^2+2^0)+2008=2^{2008}+2007$

$key2:$令$g(x)=f(x)-2^x$,则$g(x+2)-g(x)=f(x+2)-f(x)-2^{x+2}+2^x\le 3\cdot 2^x-3\cdot 2^x=0,$

$g(x+6)-g(x)=f(x+6)-f(x)-2^{x+6}+2^x\ge 63\cdot 2^x-63\cdot 2^x=0,$

即$g(x+2)\le g(x),g(x+6)\ge g(x),$

$\therefore g(x)\le g(x+6)\le g(x+4)\le g(x+2)\le g(x),\therefore g(x+2)=g(x),$

$\therefore f(2008)=g(2008)+2^{2008}=g(0)+2^{2008}=2^{2008}+2007$

（2018 吉林）3.已知函数 $f(x)$ 满足： $f(1)=\frac{1}{4},4f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y)\ (x,y\in R)$， 则 $f(2019)=$

（ B ）A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $-\frac{1}{4}$

$key:f(x+1)+f(x-1)=4f(x)f(1)=f(x)$即$f(x+1)=f(x)-f(x-1)$

$\therefore f(x+2)=f(x+1)-f(x)=-f(x-1),\therefore f(x+3)=-f(x),\therefore f(x+6)=f(x)$

$\therefore f(2019)=f(2016+3)=f(3)=-f(0)=-\frac{1}{2},$(令$y=0,x=1$得$4f(1)f(0)=2f(1)$得$f(0)=\frac{1}{2}$)

（2019 江苏）7．设 $f(x)$ 是定义在 Z 上的函数，且对于任意的整数 n，满足 $f(n+4)-f(n)\le 2(n+1)$，$f(n+12)-f(n)\ge 6(n+5),f(-1)=-504,$则$\frac{f(2019)}{673}$的值是________． 1512

$key:f(2019)=f(2019)-f(2015)+f(2015)-f(2011)+\cdots+f(7)-f(3)+f(3)$

$\le 2\cdot 2016+2\cdot 2012+\cdots+2\cdot 4+f(3)=2020\cdot 504+f(3)$

$f(2019)=f(2019)-f(2007)+f(2007)-f(1995)+\cdots+f(15)-f(3)+f(3)$

$\ge 6\cdot 2012+\cdots+6\cdot 8+f(3)=2020\cdot 504+f(3)$

$\therefore f(2019)=2020\cdot 504+f(3),$且$f(3)=f(-1)=-504,\therefore\frac{f(2019)}{673}=\frac{2020\cdot 504-504}{673}=1512$

（2022 新高考II）8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，且 $f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y),f(1)=1$， 则 $\sum_{k=1}^{22}f(k)=$（ A ）A. -3 B. -2 C. 0 D. 1

$key:$令$y=0,x=1$得$2f(1)=f(1)\cdot f(0),\therefore f(0)=2,\therefore f(2)=-f(-1)=f(1)-f(0)=-1,$

令$y=1$得$f(x+1)+f(x-1)=f(x)\cdot f(1)=f(x)$即$f(x+1)=f(x)-f(x-1)$

$\therefore f(x+2)=f(x+1)-f(x)=-f(x-1),\therefore f(x+3)=-f(x),\therefore f(x+6)=f(x)$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=f(1)+f(2)+f(3)-f(1)-f(2)-f(3)=0$

$\therefore\sum_{k=1}^{22}f(k)=4[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)]-f(5)-f(6)=f(2)+f(3)=2f(2)-f(1)=-3$

（2022 北京）已知函数$f:R\to R$，使得任取实数x,y,z都有$f(xy)+f(xz)-2f(x)f(yz)\ge\frac{1}{2}$,则

$[1\cdot f(1)]+[2\cdot f(2)]+\cdots+[2022\cdot f(2022)]=$_____.(其中$[x]$表示不大于$x$的最大整数）1022121

$key:$令$x=y=z=0$得$2f(0)-2f^2(0)\ge\frac{1}{2}$得$f(0)=\frac{1}{2}$

令$x=y=z=1$得$2f(1)-2f^2(1)\ge\frac{1}{2}$即$4f^2(1)-4f(1)+1\le 0,\therefore f(1)=\frac{1}{2}$

令$y=z=0$得$1-f(x)\ge\frac{1}{2}$得$f(x)\le\frac{1}{2}$；令$y=z=1$得$2f(x)-2f(x)f(1)=f(x)\ge\frac{1}{2},\therefore f(x)=\frac{1}{2}$,

（2022四川）已知函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上严格递减，对任意$x>0$,均有$f(x)\cdot f(f(x)+\frac{2}{x})=\frac{1}{3}$,

记$g(x)=f(x)+4x^2,x\in(0,+\infty)$，则$g(x)$的最小值为_____.

$key: f(x)\cdot f(f(x)+\frac{2}{x})=\frac{1}{3}$得$f(f(x)+\frac{2}{x})=\frac{1}{3f(x)}$

得$f(f(x)+\frac{2}{x})\cdot f(f(f(x)+\frac{2}{x})+\frac{2}{f(x)+\frac{2}{x}})=\frac{1}{3f(x)}\cdot f(\frac{1}{3f(x)}+\frac{2x}{xf(x)+2})=\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow f(\frac{1}{3f(x)}+\frac{2x}{xf(x)+2})=f(x),\therefore\frac{1}{3f(x)}+\frac{2x}{xf(x)+2}=x$得$f(x)=\frac{1}{x}$,或$f(x)=-\frac{2}{3x}$(舍去)

$\therefore g(x)=\frac{1}{x}+4x^2=\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x}+4x^2\ge 3$

变式 1（1）已知定义在R上的函数$f(x)$,对任意的实数a,b都有$f(ab)=af(b)+bf(a)$,且$f(2)=1$.则$f(16)=$___.

$key: f(4)=4f(2)=4,\therefore f(16)=8f(4)=32$

（2）①定义在R上的函数$f(x)$与$g(x)$满足$f(x-y)=f(x)\cdot g(y)-g(x)f(y)$,若$f(-2)=f(1)\ne 0$,则

$g(1)+g(-1)=$_________

①$key1$:（赋值法）令$x=y$得$f(0)=0$; $x=0$得$f(-y)=f(0)g(y)-g(0)f(y)=-g(0)f(y)$

$y=0$得$f(x)=f(x)g(0)-g(x)f(0)=f(x)g(0),\therefore g(0)=1,\therefore f(-y)=-f(y)$

令$x=-1,y=1$得$f(-2)=f(-1)g(1)-g(-1)f(1)=-f(1)g(1)-g(-1)f(1),\therefore g(1)+g(-1)=-1$

$key2$:（类比）$f(x)=\sin\frac{2\pi}{3}x, g(x)=\cos\frac{2\pi}{3}x,\therefore g(1)+g(-1)=-1$

②已知函数$f(x)$满足$f(1)=\frac{1}{2}$,且对任意$x,y\in R$恒有$2f(\frac{x+y}{2})f(\frac{x-y}{2})=f(x)+f(y)$,则

$f(2021)+f(2022)=$_______.

②$key1$:令$x=y=1$得$:2f(1)f(0)=2f(1),\therefore f(0)=1$

令$y=-x$得$2f(0)f(x)=f(x)+f(-x),\therefore f(-x)=f(x)$

令$x-y=2$得$:f(x-1)=f(x)+f(x-2)$即$f(x)=f(x-1)-f(x-2)$

$\therefore f(x+1)=f(x)-f(x-1)=-f(x-2),\therefore f(x+3)=-f(x),\therefore f(x+6)=f(x)$

$\therefore f(2021)+f(2022)=f(-1)+f(0)=\frac{3}{2}$

$key2$:（类比）令$f(x)=\cos\omega x$, $f(1)=\cos\omega=\frac{1}{2}$得$\omega=\frac{\pi}{3},\therefore T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6,\therefore f(2021)+f(2022)=f(-1)+f(0)=\frac{3}{2}$

（3）函数$f(a,b)$满足：（ⅰ）$f(a,a)=a$;（ⅱ）$f(ka,kb)=kf(a,b)$;（ⅲ）$f(a,b)=f(b,\frac{a+b}{2})$;

（ⅳ）$f(a_1+a_2,b_1+b_2)=f(a_1,b_1)+f(a_2,b_2)$.则$f(20,22)=$______.

$key: f(20,22)=f(20,20+22)=f(20,20)+f(0,2)=20+2f(0,1)$

$f(0,1)=f(1,\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})+f(\frac{1}{2},0)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}f(1,0)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}f(0,\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}f(0,1),$

$\therefore f(0,1)=\frac{2}{3},\therefore f(20,22)=\frac{64}{3}$

（4） 定义在$(0,+\infty)$上的函数$f(x)$满足：①$f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数;②$f(x)f(f(x)+\frac{1}{x})=1$.则$f(1)=$_____.

key：令$f(1)=a$，则$af(a+1)=1$即$f(a+1)=\frac{1}{a}$；令$x=a+1$，则$\frac{1}{a}f(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1})=1,\therefore\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}=1$得$a=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，

若$a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，则$f(a+1)=\frac{1}{a}<f(1)$矛盾，$\therefore f(1)=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

二、单调性

1.增函数定义：$\forall x_1,x_2\in D$，且$x_1<x_2$，则$f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow(x_1-x_2)(f(x_1)-f(x_2))>0\Leftrightarrow\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$

不是增函数定义：$\exists x_1,x_2\in D,\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le 0$

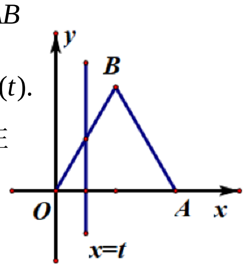
减函数定义：$\forall x_1,x_2\in D$，且$x_1<x_2$，则$f(x_1)>f(x_2)\Leftrightarrow(x_1-x_2)(f(x_1)-f(x_2))<0\Leftrightarrow\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$

不是减函数定义：$\exists x_1,x_2\in D,\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\ge 0$

2.应用：（1）$\begin{cases}\text{证明单调性：利用定义}\\\text{判断单调性：定义，单调性运算}\\\text{求单调区间：图象，单调性运算，定义}\end{cases}$

（2）求最值，比较大小，解不等式及方程，

（1804学考）如图，在直角坐标系xOy中，已知点$A(2,0),B(1,\sqrt{3})$直线$x=t(0<t<2)$，将$\triangle OAB$分成两部分，记左侧部分的多边形为Ω，设Ω各边长的平方和为$f(t)$，Ω各边长倒数和为$g(t)$.（Ⅰ）分别求函数$f(t)$和$g(t)$的解析式；（Ⅱ）是否存在区间(a,b)，使得函数$f(t)$和$g(t)$在该区间上均为单调递减？若存在，求$b-a$的最大值，若不存在，说明理由.



（Ⅰ）$f(t)=\begin{cases}8t^2,0<t\le 1,\\8t^2-20t+20,1<t<2,\end{cases}$ $g(t)=\begin{cases}(\frac{3}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}})\frac{1}{t},0<t<1,\\\frac{1}{2}+\frac{1}{t}+\frac{1}{\sqrt{3}(2-t)}+\frac{1}{2(t-1)},1<t<2,\end{cases}$

（Ⅱ）假设存在，由（Ⅰ）得$f(t)$的递减区间为$(1,\frac{5}{4})$，

$\forall t_1,t_2\in(1,\frac{5}{4})$，且$t_1<t_2$，则$g(t_2)-g(t_1)=(t_1-t_2)[\frac{1}{t_1t_2}-\frac{1}{\sqrt{3}(2-t_1)(2-t_2)}+\frac{1}{2(t_1-1)(t_2-1)}]<0$

$(\because 1<t_1<t_2<\frac{5}{4},\therefore\frac{1}{t_1t_2}\in(\frac{16}{25},1),-\frac{1}{\sqrt{3}(2-t_1)(2-t_2)}\in(-\frac{16}{9\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})\subseteq(-2,0),\frac{1}{2(t_1-1)(t_2-1)}\in(8,+\infty))$

$\therefore g(t)$在$(1,\frac{5}{4})$上递减，所以存在，$\therefore b-a$的最大值为$\frac{1}{4}$.

（201710 学考）已知函数$g(x)=-t\cdot 2^{x+1}-3^{x+1},h(x)=t\cdot 2^{x}-3^{x}$,其中$x,t\in R$.定义$[1,+\infty)$上的函数

$f(x)=\begin{cases}g(x),x\in[2k-1,2k),\\ h(x),x\in[2k,2k+1)\end{cases}(k\in N^{*})$.若$f(x)$在$[1,m)$上是减函数，当实数$m$取最大值时，求$t$的取值范围.

key:由$g(1)=-4t-9>g(2)=-8t-27$得$t>-\dfrac{9}{2}$; $g(2)=-8t-27\ge h(2)=4t-9$得$t\le-\dfrac{3}{2}$;

$h(3)=8t-27\ge g(3)=-16t-81$得$t\ge-\dfrac{9}{4}$; $g(4)=-32t-243\ge h(4)=16t-81$得$t\le-\dfrac{27}{8}$, $\therefore -\dfrac{9}{4}\le t\le-\dfrac{3}{2}$, $m_{\max}=4$

下面证明：$g(x)=-t\cdot 2^{x+1}-3^{x+1}$在$x\in[1,2]$上递减

$\forall x_1,x_2\in[1,2]$，且$x_1<x_2$,则

$g(x_1)=-t\cdot 2^{x_1+1}-3^{x_1+1}=3^{x_1+1}[-t\cdot(\frac{2}{3})^{x_1+1}-1]>3^{x_2+1}[-t(\frac{2}{3})^{x_1+1}-1]>3^{x_2+1}[-t\cdot(\frac{2}{3})^{x_2+1}-1]=-t\cdot 2^{x_2+1}-3^{x_2+1}=g(x_2)$

$(\because 1\le x_1<x_2\le 2,-\frac{9}{4}\le t\le-\frac{3}{2},\therefore \frac{4}{9}\ge(\frac{2}{3})^{x_1+1}>(\frac{2}{3})^{x_2+1}\ge\frac{8}{27},\therefore -\frac{5}{9}<-t(\frac{2}{3})^{x_1}-1\le 0)$

$\therefore g(x)$在$[1,2]$上递减, $\therefore g(x)$在$[3,4)$上递减，而$h(x)$递减，

$\therefore f(x)$在$[1,4)$上递减, $\therefore m$取最大值4时，t的取值范围为$[-\dfrac{9}{4},-\dfrac{3}{2}]$

变式 1（1）证明函数 $f(x)=3x^3+x-2$在$(-\infty,+\infty)$是单调递增函数.

证明; $\forall x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，且$x_1<x_2$

则$f(x_2)-f(x_1)=3(x_2-x_1)(x_2^2+x_2x_1+x_1^2)+(x_2-x_1)$

$=(x_2-x_1)[\frac{9}{4}(x_2+x_1)^2+\frac{3}{4}(x_2-x_1)^2+1]>0(\because x_2>x_1,\therefore x_2-x_1>0)$

$\therefore f(x_2)>f(x_1),\therefore f(x)$在$R$上单调递增.

（2）证明：函数$f(x)=e^x+2x$是R上的增函数.

证明：$\forall x_1,x_2\in R$, 且$x_1<x_2$，则$f(x_2)-f(x_1)=e^{x_2}-e^{x_1}+x_2-x_1$

$=e^{x_1}(e^{x_2-x_1}-1)+x_2-x_1$

下略

（3）证明：函数$f(x)=\log_2\dfrac{x-2}{x+2}+2x$是$(2,+\infty)$上的增函数.

证明：$\forall x_1,x_2\in(2,+\infty)$, 且$x_1<x_2$

则$f(x_2)-f(x_1)=\log_2\dfrac{x_2-2}{x_2+2}-\log_2\dfrac{x_1-2}{x_1+2}+2(x_2-x_1)$

$=\log_2[\dfrac{(x_2-2)(x_1+2)}{(x_2+2)(x_1-2)}-1+1]+2(x_2-x_1)=\log_2[\dfrac{4(x_2-x_1)}{(x_2+2)(x_1-2)}+1]+2(x_2-x_1)$

下略

（4）①判断函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x-2}$ 在$(3,4)$上的单调性，并说明理由.

解：$f(x)=\dfrac{2}{(x-4)(x-2)}=\dfrac{2}{(x-3)^2-1}$ 在(3,4)上递减

②已知函数 $f(x)=|x-a|-\dfrac{9}{x}+a, x\in[1,6], a\in R.$ （I）若 $a=1$，试判断并证明函数 $f(x)$ 的单调性；

（II）求函数 $f(x)$ 的最大值的表达式 $M(a)$.

解：（Ⅰ）$\because a=1, \therefore f(x)=x-\dfrac{9}{x}$, 且 $f(x)$ 在[1,6]上递增

$\forall x_1,x_2\in[1,6]$，且 $x_1<x_2$，则 $f(x_2)-f(x_1)=(x_2-1-\dfrac{9}{x_2})-(x_1-1-\dfrac{9}{x_1})=(x_2-x_1)\cdot(1+\dfrac{9}{x_1x_2})>0$

$(\because 1\le x_1<x_2\le 6, \therefore x_2-x_1>0, 1+\dfrac{9}{x_1x_2}>0), \therefore f(x_2)>f(x_1), \therefore f(x)$ 在[1,6]上递增

（Ⅱ）$f(x)=\max\{x-\dfrac{9}{x}, 2a-(x+\dfrac{9}{x})\}$, 如图

由图知 $M(a)=\max\{\dfrac{9}{2}, 2a-6\}=\begin{cases}\dfrac{9}{2}, a\le\dfrac{21}{4}\\ 2a-6, \dfrac{21}{4}\le a\end{cases}$

（5）设函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$，求 a 的取值范围，使函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调函数.

解：当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上时增函数，

当 $a>0$ 时，$\forall x_1,x_2\in[0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，

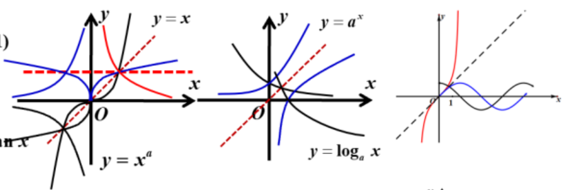
则 $f(x_2)-f(x_1)=\dfrac{x_2^2-x_1^2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a(x_2-x_1)=(x_2-x_1)(\dfrac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a)$

$\because x_2>x_1\ge 0, \therefore \dfrac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}\in(0,1), \therefore$ 当 $a\ge 1$ 时，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上递减

$\therefore a$ 的取值范围为 $(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$

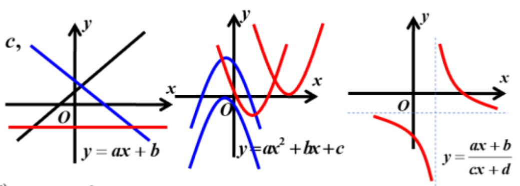
常见初等函数的图象

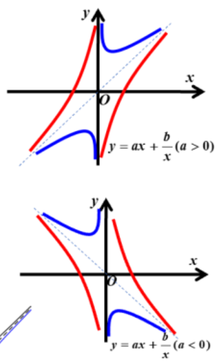
1°.基本初等函数 $\begin{cases} y=C \\ y=x^a\ (a=1,2,3,\frac{1}{3},\frac{1}{2},-1) \\ y=a^x \\ y=\log_a x \\ y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x \end{cases}$



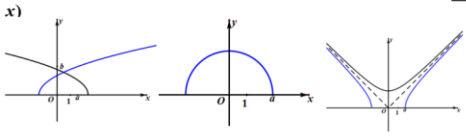
2°. 初等函数(基本初等函数 经四则运算后得到的函数)

如 $\begin{cases} y=ax+b \\ y=ax^2+bx+c, \\ y=\dfrac{ax+b}{cx+d} \\ y=ax+\dfrac{b}{x} \end{cases}$





3°.复合函数: $\begin{cases} y=a^{f(x)}, y=\log_a f(x), \\ y=f(a^x), y=g(\log_a x) \\ y=\sqrt{ax+b} \\ y=\sqrt{a^2-x^2}\ (a>0) \\ y=\sqrt{x^2+a^2}\ (a>0) \\ y=\sqrt{x^2-a^2}\ (a>0) \end{cases}$



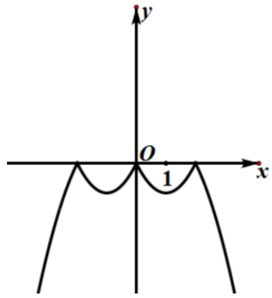
函数概念及性质解答（2）

2022-12-11

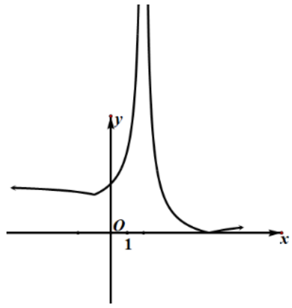
变式 2（1）（利用函数图像求单调区间）①（Ⅰ） 函数 $f(x)=-|x^2-2|x||$ 的递增区间为_________，

$(-\infty,-2],[-1,0],[1,2],$

递减区间为________.$[-2,-1],[0,1],[2,+\infty)$



（Ⅱ） $f(x)=|2-\dfrac{|x+1|+1}{x-2}|$ 的单调区间及值域.



$$key:f(x)=\begin{cases}|2-\dfrac{x+2}{x-2}|,x\geq -1,\\ |2-\dfrac{2}{x-2}|,x\leq -1,\end{cases}$$

递增区间为$[-1,2),[6,+\infty)$递减区间为$(-\infty,-1],(2,6]$

值域为$[0,+\infty)$

②（利用复合函数单调性规律）函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{-x^2+2x+8}}$ 的递增区间为________,递减区间为____________.

key:递减区间为$(-2,1]$,递增区间为$[1,4)$

③函数 $y=x^4-2x^2-3$ 的递增区间为_________,递减区间为________..

$key:y=(x^2-1)^2-4$,令$t=x^2-1,y=t^2-3$

则当$x^2-1\geq 0$即$x\geq 1$时，函数y递增，当$x\leq -1$时，函数y递减；

当$x^2-1\leq 0$即$0\leq x\leq 1$时，函数y递减，当$-1\leq x\leq 0$时，函数y递增

$\therefore$递增区间为$[-1,0],[1,+\infty)$;递减区间为$(-\infty,-1],[0,1]$

（2）已知函数$f(x)=x^2-(2m-1)x+m^2$.

① 若$f(x)$在$[-1,2]$上单调递增，则m的取值范围为_______；$(-\infty,-\dfrac{1}{2}]$

② 若$\log_2 f(x)$在$[-1,2]$上单调递减，则m的取值范围为_______；$[\dfrac{5}{2},+\infty)$

变式：若函数 $f(x)=|e^x+\dfrac{a}{e^x}|$ 在$[0,1]$上单调递减，则实数 a 的取值范围是______. $(-\infty,-e^2]\cup[e^2,+\infty)$

key:（必要条件）由$f(0)=|1+a|>f(1)=|e+\dfrac{a}{e}|$得$a<-e,or,a>e$

当$a>e$时，$f(x)=e^x+\dfrac{a}{e^x}$在$x\in[0,1]$上递减，则函数$y=t+\dfrac{a}{t}$在$t\in[1,e]$上递减,$\therefore e\leq\sqrt{a}$得$a\geq e^2$

当$a<-e$时，函数$e^x+\dfrac{a}{e^x}$在$x\in[0,1]$上递增,$\therefore e+\dfrac{a}{e}\leq 0$即$a\leq -e^2$ $\therefore a\in(-\infty,-e^2]\cup[e^2,+\infty)$