解析几何（4）抛物线解答（5）

2024-01-13

六、定点定值问题

（1997A）已知抛物线$y^2=2px$及定点$A(a,b),B(-a,0)(ab\ne 0,b^2\ne 2pa),M$是抛物线上的点，设直线$AM$、$BM$与抛物线的另一交点分别为$M_1$、$M_2$. 求证：当$M$点在抛物线上变动时(只要$M_1$、$M_2$存在且$M_1\ne M_2$)，直线$M_1M_2$恒过一个定点，并求出这个定点的坐标.

key：设$M(2pm^2,2pm),M_1(2pm_1^2,2pm_1),M_2(2pm_2^2,2pm_2)$

由M,A,M_1共线得$\dfrac{2pm_1-2pm}{2pm_1^2-2pm}=\dfrac{1}{m+m_1}=\dfrac{2pm-b}{2pm^2-a}$得$m_1=\dfrac{bm-a}{2pm-b}$,同理：$m_2=\dfrac{a}{2pm}$

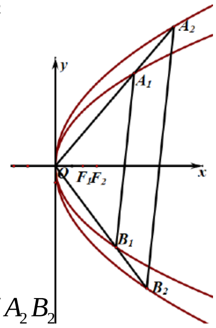
$\therefore$直线M_1M_2方程为$y-2pm_1=\dfrac{1}{m_1+m_2}(x-2pm_1^2)$即$(m_1+m_2)y-2pm_1m_2=x$

即$x=\dfrac{2pbm^2-ab}{2pm(2pm-b)}y-\dfrac{2pa(bm-a)}{2pm(2pm-b)}$

令$y=n$得$x=\dfrac{2pbnm^2-2pabm-abn+2pa^2}{2pm(2pm-b)}$为常数,$\therefore\dfrac{2pbn}{2p}=\dfrac{-2pab}{-b}$,且$2pa^2-abn=0$

即$n=\dfrac{2pa}{b}$,$2px=bn=2pa$即$x=a$,$\therefore M_1M_2$过定点$(a,\dfrac{2pa}{b})$

（2014 安徽） 19．如图，已知两条抛物线$E_1:y^2=2p_1x(p_1>0)$和$E_2:y^2=2p_2x(p_2>0)$,过原点O的两条直线l_1和l_2,l_1与E_1,E_2分别交于A_1,A_2两点，l_2与E_1,E_2分别交于B_1,B_2两点.（I）证明：$A_1B_1//A_2B_2$；
（II）过原点O作直线l（异于l_1,l_2）与E_1,E_2分别交于C_1,C_2两点,记$\triangle A_1B_1C_1$与$\triangle A_2B_2C_2$的面积分别为S_1与S_2，求$\dfrac{S_1}{S_2}$的值.



（Ⅰ）证明：设$A_1(2p_1a_1^2,2p_1a_1),A_2(2p_2a_2^2,2p_2a_2)$，则$\dfrac{2p_1a_1}{2p_1a_1^2}=\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{2p_2a_2}{2p_2a_2^2}=\dfrac{1}{a_2}$得$a_1=a_2$

设$B_1(2p_1b_1^2,2p_1b_1),B_2(2p_2b_2^2,2p_2b_2)$,则$\dfrac{2p_1b_1}{2p_1b_1^2}=\dfrac{1}{b_1}=\dfrac{2p_2b_2}{2p_2b_2^2}=\dfrac{1}{b_2}$得$b_1=b_2$,

$\therefore k_{A_1B_1}=\dfrac{2p_1a_1-2p_1b_1}{2pa_1^2-2pb_1^2}=\dfrac{1}{a_1+b_1},k_{A_2B_2}=\dfrac{2p_2a_2-2p_2b_2}{2p_2a_2^2-2p_2b_2^2}=\dfrac{1}{a_2+b_2}=\dfrac{1}{a_1+b_1}=k_{A_1B_1},\therefore A_1B_1//A_2B_2$

(2）解：设$C_1(2p_1c_1^2,2p_1c_1),C_2(2p_2c_2^2,2pc_2)$，则$\dfrac{1}{c_1}=\dfrac{1}{c_2}$即$c_1=c_2$,

$$\therefore S_1=\frac{1}{2}\begin{Vmatrix}2p_1a_1^2 & 2p_1a_1 & 1\\ 2p_1b_1^2 & 2p_1b_1 & 1\\ 2p_1c_1^2 & 2p_1c_1 & 1\end{Vmatrix}=2p_1^2\begin{Vmatrix}a_1^2 & a_1 & 1\\ b_1^2 & b_1 & 1\\ c_1^2 & c_1 & 1\end{Vmatrix},S_2=\frac{1}{2}\begin{Vmatrix}2p_2a_2^2 & 2p_2a_2 & 1\\ 2p_2b_2^2 & 2p_2b_2 & 1\\ 2p_2c_2^2 & 2p_2c_2 & 1\end{Vmatrix}=2p_2^2\begin{Vmatrix}a_1^2 & a_1 & 1\\ b_1^2 & b_1 & 1\\ c_1^2 & c_1 & 1\end{Vmatrix}$$

$\therefore\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{p_1^2}{p_2^2}$.

(2015湖北）过直线$x-2y+13=0$上一动点A(A不在y轴上）作抛物线$y^2=8x$的两条切线，M,N为切点，直线AM,AN分别与y轴交于B,C.

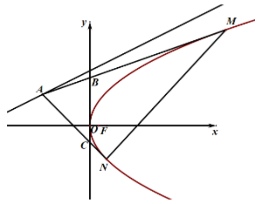
（1）证明：直线MN恒过定点；（2）证明：$\triangle ABC$的外接圆恒过一定点，并求该圆半径的最小值.

证明：（Ⅰ）设$A(a,\dfrac{a+13}{2}),M(2m^2,4m),N(2n,4n)$,

则AM方程为：$my=2m^2+x,\therefore 2m^2-\dfrac{a+13}{2}m+a=0$，同理$2n^2-\dfrac{a+13}{2}n+a=0,\therefore\begin{cases}m+n=\dfrac{a+13}{4}\\ mn=\dfrac{a}{2}\end{cases}$,

而MN方程为:$(m+n)y-4mn=2x$即$\frac{a+13}{4}y-2a=x$即$a(\frac{y}{4}-2)+\frac{13}{2}y-x=0$过定点$(13,8)$

（Ⅱ）由（Ⅰ）得$B(0,2m),C(0,2n)$,设$\triangle ABC$的外接圆方程为$x^2+y^2+dx+ey+f=0$



则$\begin{cases}4m^2+2me+f=0\\4n^2+2ne+f=0\\a^2+\frac{(a+13)^2}{4}+ad+\frac{a+13}{2}e+f=0\end{cases}$ 得$\begin{cases}e=-2(m+n)=-\frac{a+13}{2}\\f=4mn=2a\\d=-a-2\end{cases}$

$\therefore\triangle ABC$的外接圆方程为$x^2+y^2-(a+2)x-\frac{a+13}{2}y+2a=x^2+y^2-2x-\frac{13}{2}y+a(-x-\frac{y}{2}+2)=0$

由$\begin{cases}x^2+y^2-2x-\frac{13}{2}y=0\\-x-\frac{y}{2}+2=0\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}$,

$\therefore\triangle ABC$的外接圆经过定点$(2,0)$,最小半径为$\sqrt{\frac{185}{16}-(\frac{1+\frac{13}{8}-2}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}})^2}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$

变式 1（1） 设$A(a,b)$是抛物线$y^2=2px(p>0)$上的定点.

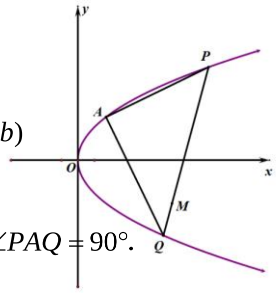
（Ⅰ）过A引抛物线的两条互相垂直的弦AP、AQ，则直线PQ恒过定点$M(2p+a,-b)$;

key:设$A(2pt^2,2pt)$(其中$a=2pt^2,b=2pt$)，$P(2pm^2,2pm),Q(2pn^2,2pn)$,

（Ⅰ）$\because AP\perp AQ,\therefore k_{AP}\cdot k_{AQ}=\frac{2pm-2pt}{2pm^2-2pt^2}\cdot\frac{2pn-2pt}{2pn^2-2pt}=\frac{1}{(m+t)(n+t)}=-1$即$mn+(m+n)t+t^2+1=0$

而PQ方程为：$y-2pm=\frac{1}{m+n}(x-2pm^2)$即$(m+n)y-2pmn=x=(m+n)(y+2pt)+2pt^2+2p$

$=(m+n)(y+b)+a+2p$过定点$(2p+a,-b)$，得证



变式：A 在 PQ 上的射影的轨迹方程为________.

$key1$:$\begin{cases}x=(m+n)(y+b)+a+2p\\y-b=-(m+n)(x-a)\end{cases}$ 消去m,n得:$(x-2p)(x-a)=-(y+b)(y-b)$

$key2$:以AM为直径的圆除去点A

（Ⅱ）过定点$M(2p+a,-b)$的动直线l交抛物线于另外两点P、Q，求证：$\angle PAQ=90°$.

（Ⅱ）$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{AQ}\Leftrightarrow mn+(m+n)t+t^2+1=0$

P,M,Q共线$\Leftrightarrow\frac{1}{m+n}=\frac{2pm+2pt}{2pm^2-2p-2pt^2}\Leftrightarrow mn+(m+n)t+t^2+1=0$

(Ⅲ）过A引抛物线的两条倾斜角互补的弦AP、AQ，则直线PQ定向.

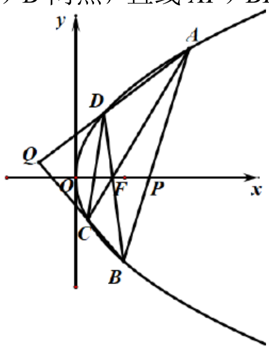
key:$k_{AP}+k_{AQ}=\frac{2pa-2pm}{2pa^2-2pm^2}+\frac{2pa-2pn}{2pa^2-2pn^2}=\frac{1}{a+m}+\frac{1}{a+n}=0\Leftrightarrow m+n+2a=0$

$\therefore k_{PQ}=\frac{1}{m+2}=\frac{1}{-2a}$为定值

变式 2.已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，过点 $T(p,0)$ 的直线交抛物线于 A，B 两点，直线 AF，BF 分别与抛物线交于点 C，D 设直线 AB，CD 的斜率分别为 k_1,k_2，则$\frac{k_1}{k_2}=$________;

直线 AD 与直线 BC 的交点 Q 轨迹方程为________；

$\triangle FCD$ 与 $\triangle FAB$ 的面积之和的最小值为______.



key:$A(2pa^2,2pa),B(2pb^2,2pb),C(2pc^2,2pc),D(2pd^2,2pd)$

则$k_{AC}=\frac{2pa-2pc}{2pa^2-2pc^2}=\frac{1}{a+c}=\frac{2pa}{2pa^2-\frac{p}{2}}$即$ac=-\frac{1}{4}$,同理$bd=-\frac{1}{4}$

$k_{AB}=\frac{1}{a+b}=\frac{2pa}{2pa^2-p}$即$ab=-\frac{1}{2}$,$\therefore\frac{k_1}{k_2}=\frac{\frac{1}{a+b}}{\frac{1}{c+d}}=\frac{c+d}{a+b}=\frac{-\frac{1}{4a}+\frac{-1}{4b}}{a+b}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{ab}=\frac{1}{2}$

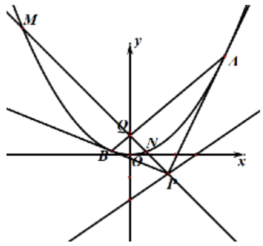
$AD:y-2pa=\frac{1}{a+d}(x-2pa^2)$即$(a+d)y-2pad=x\Leftrightarrow(a-\frac{1}{4b})y+2pa\cdot\frac{1}{4b}=x$即$-3y+2pa=4bx$

同理$BC:-3y+2pb=4ax,\therefore x=-\frac{p}{2}$

$CD:(c+d)y+\frac{1}{4}p=x$

$\therefore S_{\triangle FCD}+S_{\triangle FAB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{4}\cdot|2pd-2pc|+\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{2}\cdot|2pa-2pb|=\frac{5p^2}{8}(a+\frac{1}{2a})\geq\frac{5\sqrt{2}}{8}p^2$

（2017广西）已知抛物线$C:y=\frac{1}{2}x^2$与直线$l:y=kx-1$没有公共点，设点P为直线l上的动点，过P作抛物线C的两条切线，A,B为切点.(1) 证明：动直线AB恒过定点Q;
(2) 设点P与 (1) 中的定点Q的连线交抛物线C于M、N两点，证明:$\frac{PM}{PN}=\frac{QM}{QN}$.



(1) 解：由$\begin{cases}y=\frac{1}{2}x^2\\y=kx-1\end{cases}$ 得$x^2-2kx+2=0,\therefore\Delta=4k^2-8<0$得$k^2<2$

设$A(2a,2a^2),B(2b,2b^2)$,则$l_{PA}:2ax=y+2a^2,l_{PB}:2bx=y+2b^2$,得$P(a+b,2ab),\therefore 2ab=k(a+b)-1$

而$l_{AB}:y-2a^2=(a+b)(x-2a)$即$y=(a+b)x-2ab=(a+b)x-k(a+b)+1=(a+b)(x-k)+1$经过定点$Q(k,1)$

(2) 证明：设$l_{PQ}:y-1=\frac{2ab-1}{a+b-k}(x-k)$即$y=k_1x-k_1k+1(k_1=\frac{k(a+b)-2}{a+b-k})$

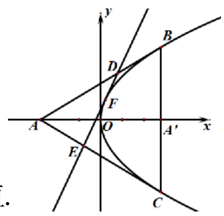
代入C得$x^2-2k_1x+2k_1k-2=0,\therefore\begin{cases}x_M+x_N=2k_1\\x_Mx_N=2kk_1-2\end{cases}$

$\therefore\frac{PM}{PN}=\frac{QM}{QN}\Leftrightarrow\frac{x_M-(a+b)}{x_N-(a+b)}=\frac{x_M-k}{k-x_N}\Leftrightarrow 2x_Mx_N-(a+b+k)(x_M+x_N)+2k(a+b)$

$=4k\cdot\frac{k(a+b)-2}{a+b-k}-4-(a+b+k)\cdot 2\cdot\frac{k(a+b)-2}{a+b-k}+2k(a+b)=0$

$\Leftrightarrow 4(a+b)k^2-4(a+b-k)-2[(a+b)k^2+((a+b)^2-2)k-2(a+b)]-2(a+b)k^2+2(a+b)^2k=0$得证

（2017四川）如图，点A与点A'在x轴上，且关于y轴对称，过点A'且垂直于x轴的直线与抛物线$y^2=2x$交于两点B,C，点D为线段AB上的动点，点E在线段AC上，满足$\frac{|CE|}{|CA|}=\frac{|AD|}{|AB|}$.(1) 证明：直线$DE$与抛物线有且仅有一个公共点；
(2) 设直线DE与抛物线的公共点为F，记$\triangle BCF$与$\triangle ADE$的面积分别为S_1,S_2，求$\frac{S_1}{S_2}$的值.



2017四川 (1) 证明：设$B(2b^2,2b)(b>0)$，则$C(2b^2,-2b),A'(2b^2,0),A(-2b^2,0)$

设$\frac{|CE|}{|CA|}=\frac{|AD|}{|AB|}=\lambda\in(0,1)$，则$\begin{cases}(x_E-2b^2,y_E+2b)=\lambda(-4b^2,2b)\\(x_D+2b^2,y_D)=\lambda(4b^2,2b)\end{cases}$

得$E((2-4\lambda)b^2,2(\lambda-1)b),D((4\lambda-2)b^2,2\lambda b)$

$\therefore l_{DE}:y-2\lambda b=\dfrac{2b}{2(4\lambda-2)b^2}(x-(4\lambda-2)b^2)$即$(4\lambda-2)by=x+2(2\lambda-1)^2b^2$代入$y^2=2x$得

$\dfrac{y^2}{2}+(4\lambda-2)by+2(2\lambda-1)^2b^2=0,\therefore\Delta=4(2\lambda-1)^2b^2-4(2\lambda-1)^2b^2=0,$

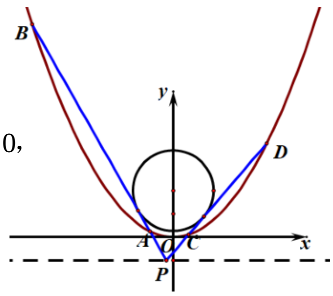
$\therefore DE$与抛物线有且仅有一个公共点

（2）解：由（1）得：$F((2-4\lambda)b),DE$与x轴的交点的横坐标为$-2(2\lambda-1)^2b^2$

$$\therefore\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}\cdot(2b^2-2(1-2\lambda)^2b^2)\cdot4b}{\frac{1}{2}(2b^2-2(2\lambda-1)^2b^2)\cdot2b}=2$$

变式 1.已知抛物线 T 的顶点在原点，对称轴为坐标轴，且过$(-2,1),(1,\frac{1}{4}),(-2,-2),(3,-2)$四点中的两点．

（1）求抛物线 T 的方程；（2）已知圆$x^2+(y-2)^2=3$，过点$P(m,-1)(m\neq\pm\sqrt{3})$作圆的两条切线，分别交抛物线 T 于$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$和$C(x_3,y_3),D(x_4,y_4)$四个点，试判断$x_1x_2x_3x_4$是否是定值？若是定值，求出定值，若不是定值，请说明理由．



(1) 解：抛物线T的方程为$:x^2=4y$

（2）设$l_{PAB}:y=k_1(x-m)-1,l_{PCD}:y=k_2(x-m)-1$

由$\dfrac{|-mk_1-3|}{\sqrt{1+k_1^2}}=\sqrt{3}$得$(m^2-3)k_1^2+6mk_1+6=0,$同理$:(m^2-3)k_2^2+6mk_2+6=0,$

$$\therefore\begin{cases}k_1+k_2=-\dfrac{6m}{m^2-3}\\k_1k_2=\dfrac{6}{m^2-3}\end{cases},$$

由$\begin{cases}y=k_1(x-m)-1\\x^2=4y\end{cases}$消去$y$得$x^2-4k_1x+4k_1m+4=0,\therefore x_1x_2=4mk_1+4,$同理$x_3x_4=4mk_2+4$

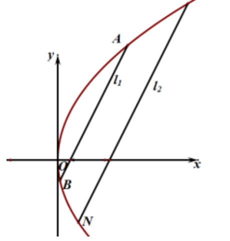
$\therefore x_1x_2x_3x_4=16(mk_1+1)(mk_2+1)=16(m^2\cdot\dfrac{6}{m^2-3}+m\cdot\dfrac{-6m}{m^2-3}+1)=16$为定值

变式 2. 已知抛物线$C:y^2=2px$经过点$(2,-2\sqrt{6})$，直线$l_1:y=kx+m(km\neq0)$与 C 交于 A、B 两点（异于坐标原点 O）.（1）若$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，证明：直线$l_1$过定点;

（2）已知$k=2$，直线l_2在直线l_1 右侧，$l_1//l_2$，l_1与l_2之间的距离$d=\sqrt{5}$，l_2交 C 于 M、N 两点，试问是否存在 m，使得$|MN|-|AB|=10$？若存在，求 m 的值；若不存在，说明理由．

解：由已知的$24=4p$得$p=6,\therefore$抛物线C的方程为$y^2=12x$

（1）设$A(3a^2,6a),B(3b^2,6b)(ab\neq0),$则$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=9a^2b^2+36ab=0$得$ab=-4$



$\therefore l_1:y-6a=\dfrac{6a-6b}{3a^2-3b^2}(x-3a^2)=\dfrac{2}{a+b}(x-3a^2)$即$(a+b)y+24=2x$过定点$(12,0)$,证毕

（2）由$k=\dfrac{2}{a+b}=2$得$a+b=1,$且$l_1:y-6a=\dfrac{2}{a+b}(x-3a^2)$即$y=2x-6a^2+6a$

设$M(3s^2,s),N(3n^2,6n)(s>a,s>n)),$则$s+n=1,$且$l_2:y=2x-6s^2+6s$

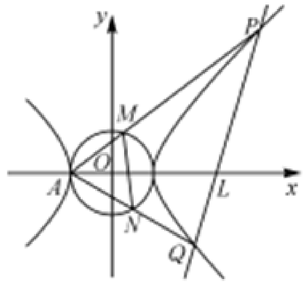
$\therefore d=\dfrac{-6a^2+6a+6s^2-6s}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$即$(s-a)(s+a-1)=\dfrac{5}{6}$

$\therefore|MN|-|AB|=\sqrt{5}|3a^2-3b^2-(3s^2-3n^2)|=3\sqrt{5}|a-b-(s-n)|=6\sqrt{5}(s-a)=10$即$s-a=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$\therefore s+a-1=\frac{\sqrt{5}}{2},\therefore a=\frac{\sqrt{5}}{12}+\frac{1}{2},\therefore m=6a(1-a)=\frac{31}{24},\therefore$ 存在，且$m=\frac{31}{24}$

变式 3. 如图,已知点 $T_1(3,-\sqrt{5})$ 和点 $T_2(-5,\sqrt{21})$ 在双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上,双曲线 C 的左顶点为 A，过点 $L(a^2,0)$ 且不与 x 轴重合的直线 l 与双曲线 C 交于 P，Q 两点，直线 AP，AQ 与圆 $O:x^2+y^2=a^2$ 分别交于 M，N 两点.（1）求双曲线 C 的标准方程;

（2）设直线 AP，AQ 的斜率分别为 k_1,k_2，求 k_1k_2 的值;（3）证明：直线 MN 过定点.



(1) 解：由已知得$\begin{cases}\frac{9}{a^2}-\frac{5}{b^2}=1\\ \frac{25}{a^2}-\frac{21}{b^2}=1\end{cases}$得$a=b=2,\therefore$ 双曲线C的标准方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$

(2) 由 (1) 的$L(4,0),A(-2,0),$圆$O:x^2+y^2=4,$

设$l_{PQ}:x=ty+4$代入C方程得$:(t^2-1)y^2+8ty+12=0,\therefore\begin{cases}y_P+y_Q=\frac{-8t}{t^2-1}\\ y_Py_Q=\frac{12}{t^2-1}\end{cases}$

$$\therefore k_1k_2=\frac{y_P}{x_P+2}\cdot\frac{y_Q}{x_Q+2}=\frac{y_Py_Q}{t^2y_Py_Q+6t(y_P+y_Q)+36}=\frac{\frac{12}{t^2-1}}{\frac{12t^2}{t^2-1}+\frac{-48t^2}{t^2-1}+\frac{36t^2-36}{t^2-1}}=-\frac{1}{3}$$

(3) 由 (2) 得$l_{AP}:y=k_1(x+2)$代入圆O方程得$:x_M=\frac{2-2k_1^2}{1+k_1^2},y_M=\frac{4k_1}{1+k_1^2},$同理$x_N=\frac{2-2k_2^2}{1+k_2^2},y_N=\frac{4k_2}{1+k_2^2}$

$$\therefore k_{MN}=\frac{\frac{4k_1}{1+k_1^2}-\frac{4k_2}{1+k_2^2}}{\frac{2-2k_1^2}{1+k_1^2}-\frac{2-2k_2^2}{1+k_2^2}}=-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{k_1+k_2}=-\frac{4}{3k_1-\frac{1}{k_1}}=\frac{-4k_1}{3k_1^2-1}$$

$$\therefore l_{MN}:y-\frac{4k_1}{1+k_1^2}=\frac{-4k_1}{3k_1^2-1}(x-\frac{2-2k_1^2}{1+k_1^2})\text{即}y=\frac{-4k_1}{3k_1^2-1}x+\frac{8k_1(1-k_1^2)}{(3k_1^2-1)(1+k_1^2)}+\frac{4k_1}{1+k_1^2}$$

$$=\frac{-4k_1}{3k_1^2-1}x+\frac{4k_1}{3k_1^2-1}=\frac{-4k_1}{3k_1^2-1}(x-1)\text{经过定点}(1,0),\text{证毕}$$

变式 4. 已知抛物线 $E:y^2=2px(p>0)$，过点 $(-1,0)$ 的两条直线 l_1、l_2 分别交 E 于 A、B 两点和 C、D 两点．当 l_1 的斜率为 $\frac{1}{2}$ 时，$|AB|=2\sqrt{10}$．（1）求 E 的标准方程;

（2）设 G 为直线 AD 与 BC 的交点，证明：点 G 在定直线上.

(1) 解：设$A(2pa^2,2pa),B(2pb^2,2pb),C(2pc^2,2pc),D(2pd^2,2pd),$

则$\begin{cases}\frac{2pa-2pb}{2pa^2-2pb}=\frac{1}{a+b}=\frac{2pa}{2pa^2+1}=\frac{1}{2}\text{即}a+b=2,\text{且}2pab=1,\\ |AB|=\frac{\sqrt{5}}{2}|2pa^2-2pb^2|=2\sqrt{10}\text{得}|a-b|=\sqrt{2}\end{cases}$ $,\therefore 4ab=2,\therefore p=1,\therefore E$的标准方程为$y^2=2x$

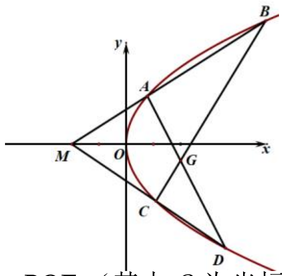
2024-01-13

（2）证明：由（1）得：$A(2a^2,2a),B(2b^2,2b),C(2c^2,2c),D(2d^2,2d)$，且$ab=\frac{1}{2}=cd$

而$l_{AD}:y-2a=\frac{1}{a+d}(x-2a^2)$即$(a+d)y-2ad=x;l_{BC}:(b+c)y-2bc=x$

设$G(x,y)$，则$\begin{cases}(a+d)y-2ad=x\text{即}(\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c})y-\frac{1}{2bc}=x\text{即}(b+c)y-1=2bcx\\(b+c)y-2bc=x\end{cases}$

得$(2bc-1)(x-1)=0,\therefore x=1,\therefore G$在定直线$x=1$上



变式 6. 设抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为 F，点 $P(a,4)$ 在抛物线 C 上，$\triangle POF$（其中 O 为坐标原点）的面积为 4．（1）求$\triangle POF$外接圆的方程；（2）若过点$(1,0)$的直线 l 与抛物线 C 交于 A，B 两点，延长 AF，BF 分别与抛物线 C 交于 M，N 两点，证明：直线 MN 过定点，并求出此定点坐标．

(1) 解：由$\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{2}\cdot 4=4$得$p=4,\therefore P(2,4),\therefore\triangle POF$的外接圆的方程为$(x-1)^2+(y-2)^2=5$

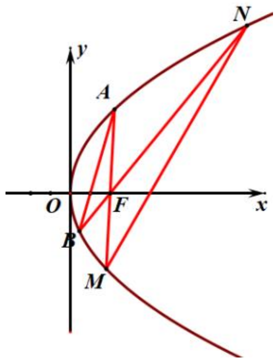
（2）证明：设$A(2a^2,4a),B(2b^2,4b),M(2m^2,4m),N(2n^2,4n)$，则

$\frac{4a-4b}{2a^2-2b^2}=\frac{2}{a+b}=\frac{4a}{2a^2-1}$得$2ab=-1$

由A,F,M共线得$\frac{4a-4m}{2a^2-2m^2}=\frac{2}{a+m}=\frac{4a}{2a^2-2}$得$am=-1$，同理$bn=-1,\therefore mn=-2$

$\therefore l_{MN}:y-4m=\frac{2}{m+n}(x-2m^2)$即$(m+n)y-4mn=2x$即$-\frac{a+b}{ab}y+8=2x$

$\therefore$直线MN经过定点$(4,0)$



七、曲线与曲线位置关系

（2018河南）已知方程$17x^2-16xy+4y^2-34x+16y+13=0$在$xOy$平面上表示一椭圆.试求它的对称中心及对称轴.

2018河$key1$：设AB是椭圆的任意的一条斜率为k的弦，其中点$M(x,y)$，

则$\begin{cases}17x_A^2-16x_Ay_A+4y_A^2-34x_A+16y_A+13=0\cdots①\\17x_B^2-16x_By_B+4y_B^2-34x_B+16y_B+13=0\cdots②\end{cases}$

$①-②$得$34x(x_A-x_B)-8[(x_A-x_B)(y_A+y_B)+(y_A-y_B)(x_A+x_B)]+8y(y_A-y_B)-34(x_A-x_B)+16(y_A-y_B)=0$

$\Leftrightarrow 34x-8(2y+2kx)+8ky-34+16k=0$即$17x-8y-17-k(8x-4y-8)=0$过中心$(1,0)$

设对称轴方程为$y=k(x-1)$代入椭圆方程得$(4k^2-16k+17)x^2-(8k^2-32k+34)x+4k^2-16k+13=0$

$\therefore|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{4\sqrt{4k^2-16k+17}}{4k^2-16k+17}=4\cdot\sqrt{\frac{k^2+1}{4k^2-16k+17}}$

令$t=\frac{k^2+1}{4k^2-16k+17}$，则$(4t-1)k^2-16tk+17t-1=0$

$\therefore\Delta=256t^2-4(4t-1)(17t-1)\geq 0$得$\frac{21-5\sqrt{17}}{8}\leq t\leq\frac{21+5\sqrt{17}}{8}$

相应的$k=\frac{8t}{4t-1}=\frac{13\pm5\sqrt{17}}{16},\therefore$中心$(1,0)$，对称轴方程为$y=\frac{13\pm5\sqrt{17}}{16}(x-1)$

$key2$：设弦AB的中点$M(x,y)$，AB方程为$y=kx+m$代入椭圆方程得：

$(4k^2-16k+17)x^2+(8km-16m+16k-34)x+4m^2+16m+15=0$

$\therefore\begin{cases}x=-\frac{4km-8m+8k-17}{4k^2-16k+17}\\y=kx+m\end{cases}$消去$m$得$(4k^2-16k+17)x=(8-4k)(y-kx)-8k+17$

即$(8k-17)x+(8-4k)y-8k+17=0$即$k(8x-4y-8)-17x+8y+17=0$经过定点$(1,0)$即为椭圆的中心，

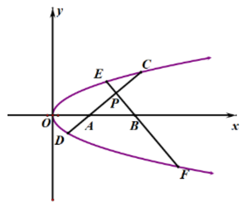
且$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{4k^2-16k+17}}{4k^2-16k+17}=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{\dfrac{k^2+1}{4k^2-16k+17}}(m=-k)$

令$t=\dfrac{k^2+1}{4k^2-16k+17}$，则$(4t-1)k^2-16tk+17t-1=0$

$\therefore\Delta=256t^2-4(4t-1)(17t-1)\ge 0$得$\dfrac{21-5\sqrt{17}}{8}\le t\le\dfrac{21+5\sqrt{17}}{8}$

相应的$k=\dfrac{8t}{4t-1}=\dfrac{13\pm5\sqrt{17}}{16},\therefore$中心$(1,0)$,对称轴方程为$y=\dfrac{13\pm5\sqrt{17}}{16}(x-1)$

（1993A）设$0<a<b$，过定点$A(a,0)$和$B(b,0)$分别引直线l和m，使与抛物线$y^2=x$有四个不同的交点，当这四点共圆时，则这种直线l与m当交点P的轨迹方程为____.



（1993）$key1$:设$P(s,t)$,则$l_{CD}:\dfrac{x-a}{s-a}=\dfrac{y}{t}$即$t(x-a)-(s-a)y=0$

同理$l_{EF}:t(x-b)-(s-b)y=0$

$\therefore$过C,E,F,D的曲线方程为:$[t(x-a)-(s-a)y]\cdot[t(x-b)-(s-b)y]+\lambda(y^2-x)=0$

是圆方程，则$-t(s-b)-t(s-a)=0,\therefore s=\dfrac{a+b}{2}(t\ne\pm\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}$,且$t\ne0)$

$key2$:四点共圆$\Leftrightarrow|PC|\cdot|PD|=|PE|\cdot|PE|$

（1998A）若椭圆$x^2+4(y-a)^2=4$与抛物线$x^2=2y$有公共点，则实数a的取值范围为_____.

1998$Akey$:$\begin{cases}x^2+4(y-a)^2=4\\x^2=2y\end{cases}$消去$x$得$y^2+(1-2a)y+a^2-2=0$在$y\ge0$上有解

$\therefore\begin{cases}\dfrac{2a-1}{2}\le0\\a^2-2\le0\end{cases},or,\begin{cases}\dfrac{2a-1}{2}>0\\\Delta=(1-2a)^2-4(a^2-2)\ge0\end{cases}$ 得$a\in[-\sqrt{2},\dfrac{9}{4}]$

（2005江西）设$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，曲线$x^2\sin\theta+y^2\cos\theta=1$和$x^2\cos\theta-y^2\sin\theta=1$有4个不同的交点.

(1) 求θ的取值范围；（2）证明：这4个交点共圆，并求圆半径的取值范围.

2005江西（1）解：由$\begin{cases}x^2\sin\theta+y^2\cos\theta=1\\x^2\cos\theta-y^2\sin\theta=1\end{cases}$消去$y$得$x^2=\sin\theta+\cos\theta<\dfrac{1}{\sin\theta}$得$\tan\theta<1,\therefore\theta\in(0,\dfrac{\pi}{4})$,

$key2:\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=\sin\theta+\cos\theta>0\\y^2=\cos\theta-\sin\theta>0\end{cases}$得$\tan\theta<1,\therefore\theta\in(0,\dfrac{\pi}{4})$

（2）证明：由$(x^2\sin\theta+y^2\cos\theta-1)+\lambda(x^2\cos\theta-y^2\sin\theta-1)=0$是圆方程

$\Leftrightarrow\sin\theta+\lambda\cos\theta=\cos\theta-\lambda\sin\theta\Leftrightarrow\lambda=\dfrac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$

$\therefore$四个交点共圆，且圆半径$r=\sqrt{\dfrac{1+\lambda}{\sin\theta+\lambda\cos\theta}}=\sqrt{\dfrac{2\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}}=\sqrt{\dfrac{2}{1+\tan\theta}}\in(1,\sqrt{2})$

（2011江苏）已知圆$x^2+y^2=1$与抛物线$y=x^2+h$有公共点，则实数h的取值范围为______.

2011江苏key:$\begin{cases}x^2+y^2=1\\y=x^2+h\end{cases}$消去$x$得$y^2+y-h-1=0(y\ge h)$

$\therefore\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\le h\\ h^2-1\le 0\end{cases},or,\begin{cases}-\dfrac{1}{2}>h\\ \Delta=1+4(h+1)\ge 0\end{cases}$ 得$h\in[-\dfrac{1}{2},1]\cup[-\dfrac{5}{4},-\dfrac{1}{2})=[-\dfrac{5}{4},1]$

(2013福建）设P为曲线C_1上任意一点，Q为曲线C_2上任意一点，定义P、Q两点间的距离$|PQ|$的最小值为曲线C_1与C_2间的距离.已知曲线$C_1:y=x^2-1$,曲线$C_2:x^2+(y-r)^2=r^2(r>0)$.

(1) 求曲线C_1与曲线C_2间的距离$f(r)$的表达式；（2）若关于r的方程$f(r)=m$有解，求m的取值范围.

2013福建 (1) 由$|PQ|\ge|PC_2|-r$

$=\sqrt{x_P^2+(y_P-r)^2}-r=\sqrt{y_P^2+(1-2r)y_P+r^2+1}-r=\sqrt{(y_P-\dfrac{2r-1}{2})^2+r+\dfrac{3}{4}}-r(\because y_P\ge -1)$

$\because\dfrac{2r-1}{2}>-1,\therefore|PC_2|_{\min}=\sqrt{r+\dfrac{3}{4}}-r$

当$\sqrt{r+\dfrac{3}{4}}-r>0$即$0<r<\dfrac{3}{2}$时，$f(r)=\dfrac{\sqrt{4r+3}}{2}-r$;当$r\ge\dfrac{3}{2}$时，$f(r)=0.$

$$\therefore f(r)=\begin{cases}0,r\ge\dfrac{3}{2},\\ \dfrac{\sqrt{4r+3}}{2}-r,0<r<\dfrac{3}{2},\end{cases}$$

(2) 当$0<r<\dfrac{3}{2}$时，$f(r)=\sqrt{r+\dfrac{3}{4}}-(r+\dfrac{3}{4})+\dfrac{3}{4}=-(\sqrt{r+\dfrac{3}{4}}-\dfrac{1}{2})^2+1<\dfrac{\sqrt{3}}{2},\therefore m\in[0,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$

(2014大纲)21.已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为F，直线$y=4$与y轴的交点为P,与C的交点为Q,

且$|QF|=\dfrac{5}{4}|PQ|$.（Ⅰ）求C的方程；

(2) 过F的直线l与C相交于A、B两点，若AB的垂直平分线l'与C相交于M、N两点，且A、M、B、N四点在同一圆上，求l的方程.

2014大纲解：（1）由已知得$\dfrac{16}{2p}+\dfrac{p}{2}=|QF|=\dfrac{5}{4}|PQ|=\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{16}{2p}$得$p=2,\therefore C$的方程为$y^2=4x$

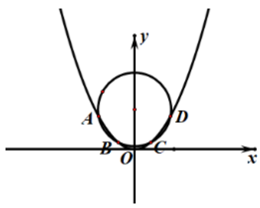
(2) 设$l:x=ty+1$,则$l_{MN}:tx+y+n=0$

则经过A,M,B,N四点的圆方程为$(x-ty-1)(tx+y+n)+\lambda(y^2-4x)=0$

$\therefore 1-t^2=0$即$t=\pm1,\therefore l$的方程为$x\pm y-1=0$

（2015 年上海）在平面直角坐标系 xOy 中，以 $M(0,1)$ 为圆心的$\odot M$ 与抛物线 $y=x^2$ 依次交于 A、B、C、D 四点.（1）求$\odot M$ 的半径 r 的取值范围；（2）求四边形 $ABCD$ 面积的最大值（精确到10^{-4}）.

2015上海解：（1）由$\begin{cases}y=x^2\\ x^2+(y-1)^2=r^2\end{cases}$消去$x$得：$y^2-y+1-r^2=0$在$y>0$上有两个相异解，



$\therefore\begin{cases}1>0\\ 1-r^2>0\\ \Delta=1-4(1-r^2)>0\end{cases}$ 得$r\in(\dfrac{\sqrt{3}}{2},1)$

(2) 由（1）得$\begin{cases}y_A+y_B=1\\ y_Ay_B=1-r^2\end{cases}$

$S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}\cdot 2(|x_A|+|x_B|)\cdot|y_A-y_B|=(\sqrt{y_A}+\sqrt{y_B})\cdot\sqrt{4r^2-3}$

$=\sqrt{(1+2\sqrt{1-r^2})(4r^2-3)}=\sqrt{(1+2t)(1-4t^2)}(t=\sqrt{1-r^2}\in(0,\frac{1}{2}))$

$=\sqrt{\frac{1}{2}(1+2t)^2(2-4t)}\le\sqrt{\frac{1}{2}(\frac{2+4t+2-4t}{3})^3}=\frac{4\sqrt{6}}{9}$(当且仅当$t=\frac{1}{6}$时取$=$)$\approx 1.0887$

设$f(x)=\sqrt{1+x}$，则$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}, f''(x)=-\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}, f^{(3)}=\frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}, f^{(4)}(x)=-\frac{15}{16}(1+x)^{-\frac{7}{2}}$

$\therefore f(x)=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\cdots$

$\therefore \frac{4\sqrt{6}}{9}=\sqrt{1+\frac{5}{27}}=1+\frac{5}{54}-\frac{1}{8}\cdot\frac{25}{27^2}+\frac{1}{16}\cdot\frac{125}{27^3}\approx 1.0887$

（2016天津）设a为实数，两条抛物线$y=x^2+x+a$与$x=4y^2+3y+a$有四个交点.(1) 求a的取值范围；(2) 证明这四个交点共圆，并求该圆圆心的坐标.

2016天津 (1) 解：由$\begin{cases}y=x^2+x+a\\x=4y^2+3y+a\end{cases}$消去$a$得$x^2+2x-4y^2-4y=0$

$\therefore\begin{cases}x=2y\\\frac{1}{2}x=x^2+x+a\text{即}x^2+\frac{1}{2}x+a=0\end{cases}, or, \begin{cases}x+2y+2=0\\-\frac{1}{2}x-1=x^2+x+a\text{即}x^2+\frac{3}{2}x+a+1=0\end{cases}$

$\therefore \Delta_1=\frac{1}{4}-4a>0$, 且$\Delta_2=\frac{9}{4}-4(a+1)>0$，且$a\ne-\frac{1}{2}$得$a\in(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{2},-\frac{7}{16})$

(2) 由$\lambda(x^2+x+a-y)+(4y^2+3y+a-x)=0\cdots(*)$是圆方程$\Leftrightarrow\lambda=4$

$\therefore$当$\lambda=4$时,$(*)$是圆方程,$\therefore$四个交点共圆

此时圆方程为$4x^2+4y^2+3x-y+4=0$，其圆心坐标为$(-\frac{3}{8},\frac{1}{8})$

（2016山东）已知椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，过椭圆左焦点$F(-c,0)$的直线$l$与椭圆交于$A$、$B$两点，线段$AB$的垂直平分线与椭圆交于$C$、$D$两点，若$AC\perp AD$，则直线$l$的方程为______.

2016山东key: 设$l: x=ty-c, l_{AB}: tx+y+n=0$

$\therefore AC\perp AD, \therefore A,B,C,D$四点共圆，

过A,B,C,D四点的圆方程为$(x-ty+c)(tx+y+n)+\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1)=0$

$\therefore -t^2+1=0$即$t=\pm1, \therefore l: y=\pm(x-c)$

变式：设直线$y=3x-2$与椭圆$E:\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$交于$A$、$B$两点，过$A$、$B$的圆与椭圆$E$交于$C$、$D$，则直线$CD$的斜率$k=$______.

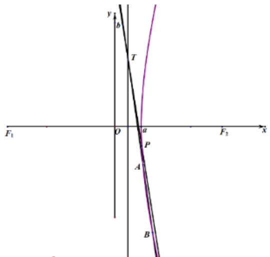
变式key: 设$CD: y=kx+m$, 则圆方程为$(3x-y-2)(kx-y+m)+\lambda(\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-1)=0, \therefore k=-3$

（2021Ⅰ）在平面直角坐标系xOy中，已知点$F_1(-\sqrt{17},0), F_2(\sqrt{17},0)$, 点$M$满足$|MF_1|-|MF_2|=2$, 记$M$的轨迹为$C$.（Ⅰ）求$C$的方程；（Ⅱ）设点$T$在直线$x=\frac{1}{2}$上，过$T$的两条直线分别交$C$于$A,B$两点和$P,Q$两点，且$|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$, 求直线$AB$的斜率与直线$PQ$的斜率之和.

2024-01-13

解：（Ⅰ）由已知得轨迹C为双曲线的右支，且$c=\sqrt{17},a=1,\because=4$

$\therefore C$的方程为$x^2-\dfrac{y^2}{16}=1(x\ge 1)$.



（Ⅱ）设$T(\dfrac{1}{2},t)$，直线AB的方程为$y-t=k_1(x-\dfrac{1}{2})$即$k_1(x-\dfrac{1}{2})-y+t=0$

直线PQ的方程为$y-t=k_2(x-\dfrac{1}{2})$即$k_2(x-\dfrac{1}{2})-y+t=0$

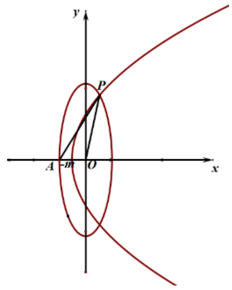
$\therefore$过A,B,P,Q四点的曲线系方程为$[k_1(x-\dfrac{1}{2})-y+t]\cdot[k_2(x-\dfrac{1}{2})-y+t]+\lambda(x^2-\dfrac{y^2}{16}-1)=0\cdots(*)$

由$|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$得$A,B,P,Q$四点共圆

若(*)是圆方程，则$\begin{cases}k_1k_2+\lambda=1-\dfrac{\lambda}{16}\ne 0\\-k_1-k_2=0\end{cases}$，$\therefore$直线$AB$与直线$PQ$的斜率之和为0

（2001A）设曲线$C_1:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$（$a$为正常数）与$C_2:y^2=2(x+m)$在$x$轴上方仅有一个公共点$P$.

(1) 求实数m的取值范围（用a表示）；（2）O为原点，若C_1与x轴的负半轴交于点A，当$0<a<\dfrac{1}{2}$时，试求$\triangle OAP$的面积的最大值.（用a表示）



解：(1) 由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1\\y^2=2(x+m)\end{cases}$ 得$f(x)=x^2+2a^2x+2a^2m-a^2=0$在$x>-m$上只有一个解

当$f(-m)=m^2-a^2<0$即$-a<m<a$，有唯一解

当$f(-m)=m^2-a^2=0$时，$\dfrac{2a^2m-a^2}{-m}>-m$即$m=a\in(0,1)$,

当$f(-m)=m^2-a^2>0$即$m^2>a^2$时，则$\begin{cases}-a^2>-m\\\Delta=4a^4-4(2a^2m-a^2)=4a^2(a^2+1-2m)=0\end{cases}$

得$m=\dfrac{a^2+1}{2}$，且$-a^2>-\dfrac{a^2+1}{2}$即$0<a<1$

综上：m的取值范围为$\begin{cases}(-a,a]\cup\{\dfrac{a^2+1}{2}\},0<a<1,\\(-a,a),a\ge 1.\end{cases}$

(2)$\because 0<a<\dfrac{1}{2}$，当$m=\dfrac{a^2+1}{2}$时，$S_{\triangle OAP}=\dfrac{1}{2}\cdot a\sqrt{1-a^2}$

当$-a<m\le a$时，$x_P=-a^2+a\sqrt{a^2+1-2m}$，$y_P=\sqrt{2(-a^2+a\sqrt{a^2+1-2m}+m)}$

$\therefore S_{\triangle OAP}=\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot\sqrt{2(-a^2+a\sqrt{a^2+1-2m}+m)}=\dfrac{\sqrt{2}a}{2}\sqrt{-\dfrac{1}{2}t^2+at+\dfrac{1-a^2}{2}}$

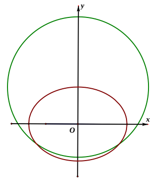
$=\dfrac{\sqrt{2}a}{2}\sqrt{-\dfrac{1}{2}(t-a)^2+\dfrac{1}{2}}\le a\sqrt{a-a^2}$（$\because 0<a<1,\therefore a<1-a$）（其中$t=\sqrt{a^2+1-2m}\in[1-a,a+1)$，则$m=\dfrac{a^2+1-t^2}{2}$）

由$a\sqrt{a-a^2}>\dfrac{1}{2}a\sqrt{1-a^2}$得$a>\dfrac{1}{3}.\therefore(S_{\triangle OAP})_{\max}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}a\sqrt{1-a^2},0<a<\dfrac{1}{3},\\a\sqrt{a-a^2},\dfrac{1}{3}\le a<\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

（2016浙江）如图，设椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$.（Ⅰ）求直线$y=kx+1$被椭圆截得的线段长（用$a,k$表示）；

（Ⅱ）若任意以点$A(0,1)$为圆心的圆与椭圆至多有3个公共点，求椭圆离心率的取值范围.

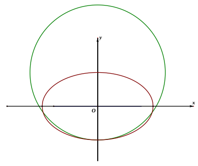
解:（Ⅰ）$\dfrac{2a^2|k|\sqrt{1+k^2}}{1+a^2k^2}$;

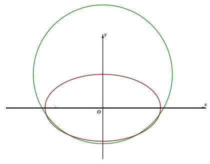


（Ⅱ）$key1$:当圆与椭圆有四个交点时，在y轴的右侧的交点为P_1,Q_1

设AP_1方程为$y=k_1x+1$, AQ_1的方程为$y=k_2x+1(k_1,k_2>0)$

由（Ⅰ）得$|AP_1|=|AQ_1|$即$\dfrac{2a^2k_1\sqrt{1+k_1^2}}{1+a^2k_1^2}=\dfrac{2a^2k_2\sqrt{1+k_2^2}}{1+a^2k_2^2}$





$$\Leftrightarrow\frac{[1+k_1^2+(a^2-1)k_1^2]^2}{k_1^2(1+k_1^2)}=\frac{[1+k_2^2+(a^2-1)k_2^2]^2}{k_2^2(1+k_2^2)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1+k_1^2}{k_1^2}+2(a^2-1)+(a^2-1)^2\cdot\frac{k_1^2}{1+k_1^2}=\frac{1+k_2^2}{k_2^2}+2(a^2-1)+(a^2-1)^2\cdot\frac{k_2^2}{1+k_2^2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{k_1^2}+(a^2-1)^2\cdot\frac{k_1^2}{1+k_1^2}=\frac{1}{k_2^2}+(a^2-1)^2\cdot\frac{k_2^2}{1+k_2^2}\Leftrightarrow(a^2-1)^2=\frac{(1+k_1^2)(1+k_2^2)}{k_1^2k_2^2}=(1+\frac{1}{k_1^2})(1+\frac{1}{k_2^2})>1,$$

$key2$: $(1+a^2k_2^2)^2k_1^2(1+k_1^2)=k_1^2+2a^2k_1^2k_2^2+a^4k_1^2k_2^4+k_1^4+2a^2k_1^4k_2^2+a^4k_1^4k_2^4$

$=(1+a^2k_1^2)^2k_2^2(1+k_2^2)=k_2^2+2a^2k_1^2k_2^2+a^4k_1^4k_2^2+k_2^4+2a^2k_2^4k_1^2+a^4k_1^4k_2^4$

$\therefore k_1^2-k_2^2+(k_1^2-k_2^2)(k_1^2+k_2^2)+a^4k_1^2k_2^2(k_2^2-k_1^2)+2a^2k_1^2k_2^2(k_1^2-k_2^2)=0,\therefore a^4-2a^4=\dfrac{1+k_1^2+k_2^2}{k_1^2k_2^2}>0,$

$\therefore a>\sqrt{2},\therefore e=\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a}=\sqrt{1-\dfrac{1}{a^2}}>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\therefore$所求的椭圆的离心率的取值范围为$(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}]$

$key2$:设圆A的方程为$x^2+(y-1)^2=r^2$联立椭圆方程消去x得：

$f(y)=(a^2-1)y^2-2y+a^2+1-r^2=0,$

若椭圆E与圆A有四个不同交点，则$f(y)=0$在$y\in(-1,1)$上有两相异解

$$\therefore\begin{cases}f(-1)=2a^2+2-r^2>0\text{即}r^2<2a^2+2\\ f(1)=2a^2-2+r^2>0\\ -1<\dfrac{1}{a^2-1}<1\text{即}a^2>2\\ \Delta=4-4(a^2-1)(a^2+1-r^2)>0\text{即}r^2>\dfrac{a^4-2}{a^2-1}\end{cases}\Leftrightarrow a^2>\sqrt{2}$$

$key3$:设$P(x,y)(-1\le y<0)$是下半椭圆上任意一点，则$|AP|=\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{a^2-a^2y^2+y^2-2y+1}$

$=\sqrt{-(a^2-1)y^2-2y+a^2+1}=\sqrt{-(a^2-1)(y+\dfrac{1}{a^2-1})^2+\dfrac{a^4}{a^2-1}}$当$y=-1$时取得最大值

$\therefore-\dfrac{1}{2(a^2-1)}\le-\dfrac{1}{2}$即$a^2\le2,\therefore$椭圆的离心率$e=\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a}=\sqrt{1-\dfrac{1}{a^2}}\in(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}]$

（2020广西）已知O为坐标原点，曲线$C_1:x^2-y^2=1$与曲线$C_2:y^2=2px$交于点M、N,若$\triangle OMN$的外接圆经过点$P(\dfrac{7}{2},0)$，则曲线C_2的方程为______.

2020广西key:由$\begin{cases}x^2-y^2=1\\ y^2=2px\end{cases}$得$x^2-2px-1=0$得$x_M=x_N=p+\sqrt{p^2+1}$

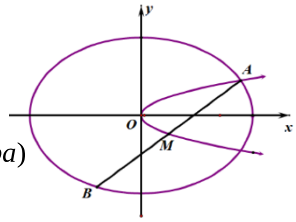
由已知得$OM\perp MP$, $\therefore\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{MP}=(-x_M,-y_M)\cdot(\dfrac{7}{2}-x_M,-y_M)=-\dfrac{7}{2}x_M+x_M^2+y_M^2$

$=-\dfrac{7}{2}x_M+x_M^2+2px_M=0\Leftrightarrow-\dfrac{7}{2}+x_M+2p=0$得$p=\dfrac{3}{4}$, $\therefore y^2=\dfrac{3}{2}x$

2024-01-13

（2020浙江）如图，已知椭圆$C_1:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$,抛物线$C_2:y^2=2px(p>0)$,点A是椭圆C_1与抛物线C_2的交点. 过点A的直线l交椭圆C_1于点B,交抛物线C_2于点M（B,M不同于A).（Ⅰ）若$p=\dfrac{1}{16}$，求抛物线C_2的焦点坐标；

（Ⅱ）若存在不过原点的直线l使得M是线段AB的中点，求p的最大值.



解：（Ⅰ）抛物线C_2的焦点坐标为$(\dfrac{1}{32},0)$

（Ⅱ）$key1:$设$A(2pa^2,2pa)(a>0),M(2pm^2,2pm)(m\neq a)$,则$B(4pm^2-2pa^2,4pm-2pa)$

$\therefore\begin{cases}2p^2a^4+4p^2a^2=1\cdots①\\2p^2(2m^2-a^2)^2+4p^2(2m-a)^2=1\cdots②\end{cases}$,①−②得：$a=-m-\dfrac{2}{m}\geq2\sqrt{2}$,

$\therefore 2p^2=\dfrac{1}{a^4+2a^2}\leq\dfrac{1}{64+16}=\dfrac{1}{80},\therefore p_{\max}=\dfrac{\sqrt{10}}{40}$

$key2:$设$A(2pa^2,2pa)$,则$2p^2a^4+4p^2a^2=1$,

设AB方程为：$x-2pa^2=t(y-2pa)$即$x=ty+n$（其中$n=2pa(a-t)$）代入C_1得：$y_M=\dfrac{-tn}{t^2+2}$

由$k_{AM}=\dfrac{y_A-y_M}{x_A-x_M}=\dfrac{2p}{y_A+y_M}=\dfrac{1}{t}$得$y_M=2pt-2pa=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{-tn}{t^2+2}=\dfrac{-t\cdot2pa(a-t)}{t^2+2}$

即$t^2+2=at,\therefore a=t+\dfrac{2}{t}\in(-\infty,-2\sqrt{2}]\cup[2\sqrt{2},+\infty)$

由$2p^2a^4+4p^2a^2=1$得$p^2=\dfrac{1}{2a^4+4a^2}\leq\dfrac{1}{160},\therefore p_{\max}=\dfrac{\sqrt{10}}{40}$

变式：已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$关于直线$l:y=kx+1$的对称双曲线C',若C与C'有公共点,则k的取值范围为__________.

$key:$当直线l与曲线C有公共点时，得$\begin{cases}y=kx+1\\x^2-3y^2=3\end{cases}$得$(1-3k^2)x^2-6kx-6=0$

$\Leftrightarrow k=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3},or,\begin{cases}1-3k^2\neq0\\\Delta=12(2-3k^2)\geq0\end{cases}\Leftrightarrow k\in[-\dfrac{\sqrt{6}}{3},\dfrac{\sqrt{6}}{3}]$，此时$C$与$C'$有公共点

当$k\in(-\infty,-\dfrac{\sqrt{6}}{3})\cup(\dfrac{\sqrt{6}}{3},+\infty)$时，则与直线$l$垂直的直线$l'$与曲线$C$有两个相异交点且交点的中点在直线$l$上

由$\begin{cases}x+ky+n=0\\x^2-3y^2=3\end{cases}$消去$x$得:$(k^2-3)y^2+2kny+n^2-3=0$

$\therefore$中点坐标为$(\dfrac{3n}{k^2-3},-\dfrac{kn}{k^2-2})$,且$\Delta=12(n^2+k^2-3)>0,\therefore-\dfrac{kn}{k^2-3}=\dfrac{3kn}{k^2-3}+1$即$n=-\dfrac{k^2-3}{4k}$,

$\therefore\dfrac{(k^2-3)^2}{16k^2}+k^2-3>0$得$k^2>3,or,k^2<\dfrac{1}{17},\therefore k^2>3$

综上：k的取值范围为$(-\infty,-\sqrt{3})\cup[-\dfrac{\sqrt{6}}{3},\dfrac{\sqrt{6}}{3}]\cup(\sqrt{3},+\infty)$