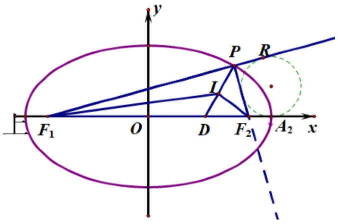
解析几何（2）椭圆解答（2）

2023-10-07

（III）如图，圆M与PF_2、F_1P的延长线及x轴都相切，则圆M与x轴切于点______. 左（右）顶点

$|F_1A_2|=|FR|=\dfrac{1}{2}(2a+2c)=a+c,\therefore |OA_2|=a,\therefore$ 切于右顶点A_2



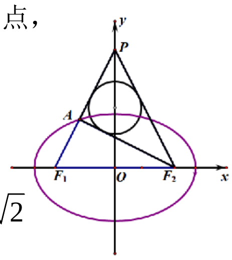
（2）① 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点为$F_1$、$F_2$. 点$P$在椭圆上，

若$\dfrac{a}{\sin\angle PF_1F_2}=\dfrac{c}{\sin\angle PF_2F_1}$，则椭圆的离心率$e$的取值范围为________.

$key:\dfrac{PF_1}{\sin\angle PF_2F_1}=\dfrac{PF_2}{\sin\angle PF_1F_2},\therefore e=\dfrac{PF_1}{PF_2}=\dfrac{2a-PF_2}{PF_2}=\dfrac{2a}{PF_2}-1\in[\dfrac{2}{e+1}-1,\dfrac{2}{1-e}-1]$得$e\in[\sqrt{2}-1,1)$

②已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左右焦点分别为$F_1,F_2,|F_1F_2|=\sqrt{10},P$是$y$轴正半轴上一点，

PF_1交椭圆于点A,若$AF_2\perp PF_1$,且$\triangle APF_2$的内切圆半径为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则椭圆的离心率是_____.



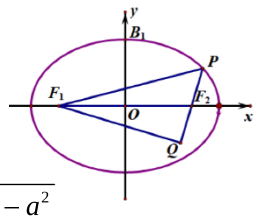
$key:\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{|AP|+|AF_2|-|PF_2|}{2}=\dfrac{|AP|+|AF_2|-|PF_1|}{2}=\dfrac{|AF_2|-|AF_1|}{2}$即$|AF_2|-|AF_1|=\sqrt{2}$

而$|AF_1|+|AF_2|=2a,\therefore 2(|AF_1|^2+|AF_2|^2)=4a^2+2=20$得$a=\dfrac{3}{\sqrt{2}},\therefore e=\dfrac{\frac{\sqrt{10}}{2}}{\frac{3}{\sqrt{2}}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

③在椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上有一点$P$，$F_1,F_2$为左，右焦点，椭圆内一点$Q$在$PF_2$的延长线上，

满足$QF_1\perp QP$,若$\sin\angle F_1PQ=\dfrac{5}{13}$,则该椭圆的离心率的取值范围为（　）A

$A.(\dfrac{1}{5},\dfrac{\sqrt{5}}{3})$ $B.(\dfrac{\sqrt{26}}{26},1)$ $C.(\dfrac{1}{5},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$ $D.(\dfrac{\sqrt{26}}{26},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$



$key:$设$|PF_1|=m,$则$|PF_2|=2a-m,|F_1Q|=\dfrac{5}{13}m,|PQ|=\dfrac{12}{13}m,$

$\therefore |F_2Q|=\dfrac{25}{13}m-2a>0,$且$m^2+(2a-m)^2-2m(2a-m)\cdot\dfrac{12}{13}=4c^2$即$m=\dfrac{5a+\sqrt{26c^2-a^2}}{5}$

$\therefore |F_2Q|=\dfrac{-a+5\sqrt{26c^2-a^2}}{13}>0$得$e>\dfrac{1}{5}$

由Q在椭圆内部,$\therefore |QF_1|+|QF_2|=\dfrac{5}{13}m+\dfrac{25}{13}m-2a=\dfrac{30}{13}m-2a<2a$

$\Leftrightarrow 15m<26a\Leftrightarrow 15a+3\sqrt{26c^2-a^2}<26a\Leftrightarrow e<\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

2°. 直线与椭圆：（1）位置关系；联立方程法，点差法

(2)弦:①弦长计算问题：弦长$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_A-x_B|=\sqrt{1+k^2}\cdot\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|p|}=\sqrt{1+t^2}\,|y_A-y_B|$

焦点弦:椭圆的焦点弦长的最小值为通径$\dfrac{2b^2}{a}$

②定点弦问题:中点弦方程，定点弦中点轨迹

解析几何（2）椭圆解答（2）

2023-10-07

③平行弦中点轨迹：直径

④定长弦中点轨迹问题

⑤垂直平分弦问题:圆锥曲线上存在两相异点关于直线对称

（3）切线：$\Delta=0$,利用韦达定理求切点坐标；公式：$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$

（一）弦长问题

（2006辽宁）10.直线$y=2k$与曲线$9k^2x^2+y^2=18|k|x^2(k\in R,$且$k\neq 0)$的公共点个数为（　）D

$A.1\quad B.2\quad C.3\quad D.4$

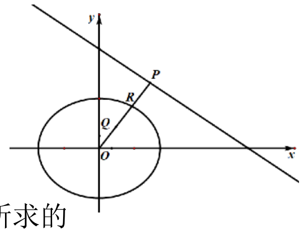
$key:9k^2x^2+4k^2=18k^2|x|\Leftrightarrow 9x^2-18|x|+4=0\Leftrightarrow |x|=\frac{9\pm3\sqrt{5}}{9}$

（2016吉林）已知椭圆$E:\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{4}=1$，对于任意实数$k$，下列直线被椭圆$E$截得的弦长与$l:y=kx+1$被椭圆$E$截得的弦长不可能相等的是（$D$　）

$A.kx+y+k=0\quad B.kx-y-1=0\quad C.kx+y-k=0\quad D.kx+y-2=0$

（1995全国）已知椭圆C:$\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{16}=1$,直线$l:\frac{x}{12}+\frac{y}{8}=1$，$P$是$l$上一点，射线$OP$交椭圆$C$于点$R$，又点$Q$在$OP$上且满足$|OQ|\cdot|OP|=|OR|^2$.当点$P$在$l$上移动时，求点$Q$的轨迹方程，并说明轨迹是什么曲线？

（1995全国）解:设$Q(x,y)$，$l_{OP}:y=kx$

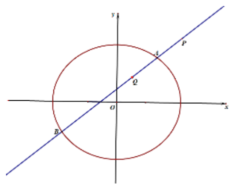


则$\frac{x_P}{8}+\frac{kx_p}{12}=1$即$x_P=\frac{24}{3+2k}$,且$\frac{x_R^2}{24}+\frac{k^2x_R^2}{16}=1$即$x_R^2=\frac{48}{2+3k^2}$

由$|OQ|\cdot|OP|=|OR|^2$得$xx_P=x_R^2$,

$\therefore \frac{48}{2+3k^2}=x\cdot\frac{24}{3+2k}\Leftrightarrow 2(3+2\cdot\frac{y}{x})=x(2+\frac{3y^2}{x^2})$即$2x^2+3y^2-4x-6y=0$即为所求的

（2008安徽）已知椭圆$C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，过点$P(2,2)$作直线$l$交椭圆于$A$、$B$两点，点$Q$在线段$AB$上，且$\frac{AQ}{QB}=\frac{PA}{PB}$,求点$Q$的轨迹方程.



（08安徽）$key1$:设AB方程为$y-2=k(x-2)$即$y=kx-2k+2$代入椭圆方程得:

$$(3+4k^2)x^2+16(1-k)kx+16(1-k)^2-12=0,\therefore\begin{cases}x_A+x_B=\frac{-16k(1-k)}{3+4k^2}\\ x_Ax_B=\frac{16(1-k)^2-12}{3+4k^2}\end{cases}\text{且}\Delta=48(8k-1)>0$$

$$\text{设}Q(x,y),\text{由}\frac{AQ}{QB}=\frac{PA}{PB}\text{得}\frac{x_A-x}{x-x_B}=\frac{2-x_A}{2-x_B},\therefore x=\frac{2(x_A+x_B)-2x_Ax_B}{4-(x_A+x_B)}=\frac{8k-2}{4k+3}=\frac{\frac{8(y-2)}{x-2}-2}{\frac{4(y-2)}{x-2}+3}$$

即$3x^2+4xy-12x-8y+12=(x-2)(3x+4y-6)=0,\therefore Q$的轨迹方程为$3x+4y-6=0$（再椭圆$C$内部）

$$key2:x=\frac{2(x_A+x_B)-2x_Ax_B}{4-(x_A+x_B)}=\frac{8k-2}{4k+3}=2-\frac{8}{4k+3}\in(-\frac{2}{7},2)$$

$且x-2=\dfrac{-8}{\dfrac{4(y-2)}{x-2}+3}=\dfrac{-8(x-2)}{3x+4y=14},\therefore Q的轨迹方程为3x+4y-6=0(-\dfrac{2}{7}<x<2)$

（2013II）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,(a>b>0)$ 的两个焦点分别为 $F_1(-1,0),F_2(1,0)$，且椭圆 C 经过点 $P(\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{3})$．（1）求椭圆 C 的离心率；（2）设过点 $A(0,2)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于 M、N 两点，点 Q 是线段 MN 上的点，且 $\dfrac{2}{|AQ|^2}=\dfrac{1}{|AM|^2}+\dfrac{1}{|AN|^2}$，求点 Q 的轨迹方程．

解：(1) $\begin{cases}\dfrac{16}{9a^2}+\dfrac{1}{9b^2}=1\\ b^2=a^2-1\end{cases}$ 得 $a=\sqrt{2},b=1,\therefore$ 椭圆 C 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(2) 当 l 与 y 轴重合时，$Q(0,2-\dfrac{3}{\sqrt{5}})$

当 l 与 y 轴不重合时，设 $l:y=kx+2$ 代入 C 得:$(1+2k^2)x^2+8kx+6=0$

$$\therefore\begin{cases}x_M+x_N=\dfrac{-8k}{1+2k^2}\\ x_Mx_N=\dfrac{6}{1+2k^2}\end{cases},且\Delta=8(2k^2-3)>0$$

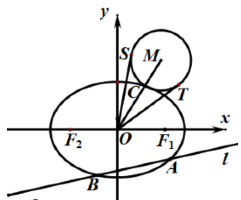
$$设Q(x,y),由\frac{2}{|AQ|^2}=\frac{1}{|AM|^2}+\frac{1}{|AN|^2}得\frac{2}{x^2}=\frac{1}{x_M^2}+\frac{1}{x_N^2}=\frac{x_M^2+x_N^2}{x_M^2x_N^2}=\frac{\dfrac{64k^2}{(1+2k^2)}-\dfrac{12}{1+2k^2}}{\dfrac{36}{(1+2k^2)^2}}=\frac{10k^2-3}{9}$$

$$即10k^2-3=\frac{18}{x^2}，而k=\frac{y-2}{x},\therefore 10\cdot\frac{(y-2)^2}{x^2}-3=\frac{18}{x^2}即\frac{5}{9}(y-2)^2-\frac{1}{6}x^2=1,$$

$$\therefore Q的轨迹方程为\frac{5}{9}(y-2)^2-\frac{1}{6}x^2=1(-\frac{\sqrt{6}}{2}<x<\frac{\sqrt{6}}{2})$$

（2017 山东）在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，焦距为 2．

（1）求椭圆 E 的方程；（2）如图，动直线 $l:y=k_1x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 交椭圆 E 于 A,B 两点，C 是椭圆 E 上一点，直线 OC 的斜率为 k_2，且 $k_1k_2=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，$M$ 是线段 OC 延长线上一点，且 $|MC|:|AB|=2:3$，$\odot M$ 的半径为 $|MC|$，OS,OT 是 $\odot M$ 的两条切线，切点分别为 S,T．求 $\angle SOT$ 的最大值，并求取得最大值时直线 l 的斜率．



解：(1) 由 $\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ 2c=2\end{cases}$ 得 $c=1,a=\sqrt{2},b=1,\therefore E:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$

(2) 由 $\begin{cases}y=k_1x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ x^2+2y^2=2\end{cases}$ 消去 x 得 $(1+2k_1^2)x^2-2\sqrt{3}k_1x-\dfrac{1}{2}=0,\therefore\begin{cases}x_A+x_B=\dfrac{2\sqrt{3}k_1}{1+2k_1^2}\\ x_Ax_B=-\dfrac{1}{2(1+2k_1^2)}\end{cases}$，且 $\Delta=2(8k_1^2+1)>0$

$$\therefore|AB|=\sqrt{1+k_1^2}\cdot\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{8k_1^2+1}}{1+2k_1^2}=\frac{\sqrt{2(1+k_1^2)(8k_1^2+1)}}{1+2k_1^2},\therefore|MC|=\frac{2\sqrt{2(1+k_1^2)(8k_1^2+1)}}{3(1+2k_1^2)}$$

由$\begin{cases}y=k_2x\\x^2+2y^2=2\end{cases}$得$x_C^2=\dfrac{2}{1+2k_2^2}$, ∴$|OC|=\sqrt{1+k_2^2}\,|x_C|=\sqrt{1+k_2^2}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{1+2k_2^2}}=\sqrt{\dfrac{8k_1^2+1}{4k_1^2+1}}$

$$\therefore \sin\frac{\angle SOT}{2}=\frac{|MC|}{|MO|}=\frac{|MC|}{|MC|+|OC|}=\frac{1}{1+\frac{|OC|}{|MC|}}=\frac{1}{1+\frac{3\sqrt{2\lambda}}{4}\cdot\frac{1+2k_1^2}{\sqrt{(\lambda+\lambda k_1^2)(1+4k_1^2)}}}\le\frac{1}{1+\frac{3\sqrt{2\lambda}}{4}\cdot\frac{1+2k_1^2}{\frac{\lambda+1+(\lambda+4)k_1^2}{2}}}$$

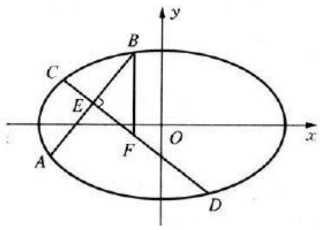
$=\dfrac{1}{2}$（当且仅当$\begin{cases}\dfrac{\lambda+1}{1}=\dfrac{\lambda+4}{2}\\ \lambda+\lambda k_1^2=1+4k_1^2\end{cases}$ 即$\lambda=2,k_1^2=\dfrac{1}{2}$时，取＝），∴$\angle SOT$的最大值为$\dfrac{\pi}{3}$, 相应的$l$的斜率为$\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

（2017湖南）如图所示，AB是椭圆$mx^2+ny^2=1(m,n>0,m\neq n)$的斜率为1的弦，$AB$的垂直平分线与椭圆交于两点$C$、$D$.⑴ 求证:$|CD|^2-|AB|^2=4|EF|^2$；（2）求证：四点$A$、$B$、$C$、$D$共圆.

证明：（1）设$l_{AB}:y=x+t$代入椭圆方程得$(m+n)x^2+2ntx+nt^2-1=0$

∴$\begin{cases}x_A+x_B=\dfrac{-2nt}{m+n}\\x_A+x_B=\dfrac{nt^2-1}{m+n}\end{cases}$, 且$\Delta=4(m+n-mnt^2)>0$, 且$AB$的中点$E(\dfrac{-nt}{m+n},\dfrac{mt}{m+n})$, 且$|AB|=\sqrt{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{m+n-mnt^2}}{m+n}$,

∴$l_{CD}:y-\dfrac{mt}{m+n}=-(x-\dfrac{-nt}{m+n})$即$y=-x+\dfrac{(m-n)t}{m+n}$代入椭圆方程得：



$(m+n)x^2-\dfrac{2n(m-n)t}{m+n}x+\dfrac{n(m-n)^2t^2}{(m+n)^2}-1=0$, ∴$\begin{cases}x_C+x_D=\dfrac{2n(m-n)t}{(m+n)^2}\\x_Cx_D=\dfrac{n(m-n)^2t^2}{(m+n)^3}-\dfrac{1}{m+n}\end{cases}$,

且$\Delta_1=4(m+n-\dfrac{mn(m-n)^2t^2}{(m+n)^2})>0$, 且$x_F=\dfrac{n(m-n)t}{(m+n)^2}$, 且$|CD|=\sqrt{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{m+n-\dfrac{mn(m-n)^2t^2}{(m+n)^2}}}{m+n}$

$$\therefore|CD|^2-|AB|^2-4|EF|^2=\frac{8(m+n-\frac{mn(m-n)^2t^2}{(m+n)^2})}{(m+n)^2}-\frac{8(m+n-mnt^2)}{(m+n)^2}-8\cdot(\frac{-nt}{m+n}-\frac{n(m-n)t}{(m+n)^2})^2$$

$=\dfrac{32m^2n^2t^2}{(m+n)^4}-\dfrac{8t^2\cdot4m^2n^2}{(m+n)^4}=0$, 证毕

（2）证明：由$|EA|\cdot|EB|-|EC|\cdot|ED|=\dfrac{1}{4}|AB|^2-|EC|\cdot|ED|$

$=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{8(m+n-mnt^2)}{(m+n)^2}-2(\dfrac{-nt}{m+n}-x_C)(x_D+\dfrac{nt}{m+n})$

$=2\cdot\dfrac{m+n-mnt^2}{(m+n)^2}-2[-\dfrac{n(m-n)^2t^2}{(m+n)^3}+\dfrac{1}{m+n}-\dfrac{nt}{m+n}\cdot\dfrac{2n(m-n)t}{(m+n)^2}-\dfrac{n^2t^2}{(m+n)^2}]$

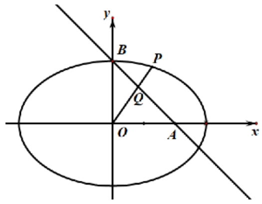
$=2\cdot\dfrac{m+n-mnt^2}{(m+n)^2}-2(\dfrac{1}{m+n}-\dfrac{mnt^2}{(m+n)^2})=0$, 即$|EA|\cdot|EB|=|EC|\cdot|ED|$, ∴ A,B,C,D四点共圆

$key2:$ 经过A,B,C,D四点的曲线方程为$\lambda(mx^2+ny^2-1)+(x-y+t)(x+y-\frac{(m-n)t}{m+n})=0$

即$(\lambda m+1)x^2+(\lambda n-1)y^2+(t-\frac{(m-n)t}{m+n})x+(t+\frac{(m-n)t}{m+n})y-\lambda-\frac{(m-n)t^2}{m+n}=0\cdots(*)$

取$\lambda m+1=\lambda n-1$即$\lambda=\frac{2}{m-n}$时,$(*)$是圆方程,$\therefore A,B,C,D$四点共圆

（2018 天津）19.设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 F，上顶点为 B. 已知椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$，点 A 的坐标为 $(b,0)$，且 $|FB|\cdot|AB|=6\sqrt{2}$.（1）求椭圆的方程；（2）设直线 $l:y=kx(k>0)$ 与椭圆在第一象限的交点为 P,且 l 与直线 AB 交于点 Q.若 $\frac{|AQ|}{|PQ|}=\frac{5\sqrt{2}}{4}\sin\angle AOQ$ （O 为原点），求 k 的值.



解：（1）由$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}\\ a\cdot\sqrt{2}b=6\sqrt{2}\end{cases}$ 得$a=3,b=2,c=\sqrt{5},\therefore$ 椭圆的方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

（2）由$\frac{|OQ|}{\sin 45^\circ}=\frac{|AQ|}{\sin\angle AOQ}$得$|AQ|=\sqrt{2}|OQ|\cdot\sin\angle AOQ$

$\therefore\frac{|AQ|}{|PQ|}=\frac{\sqrt{2}|OQ|\sin\angle AOQ}{|PQ|}=\frac{5\sqrt{2}}{4}\sin\angle AOQ\Leftrightarrow\frac{|OQ|}{|PQ|}=\frac{5}{4}\Leftrightarrow\frac{|OQ|}{|OP|}=\frac{5}{9}$

由$\begin{cases}y=kx\\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$得$x_P=\frac{6}{\sqrt{4+9k^2}}$,由$\begin{cases}y=kx\\ x+y=2\end{cases}$得$x_Q=\frac{2}{1+k}$

$\therefore\frac{|OQ|}{|OP|}=\frac{\frac{2}{1+k}}{\frac{6}{\sqrt{4+9k^2}}}=\frac{\sqrt{4+9k^2}}{3(1+k)}=\frac{5}{9}$得$k=\frac{1}{2},or,\frac{11}{28}$

（2020II）16．已知直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ 在第一象限交于 A，B 两点，l 与 x 轴、y 轴分别相交于 M，N 两点，且 $|MA|=|NB|,|MN|=2\sqrt{3}$，则 l 的方程为____________. $x+\sqrt{2}y-2\sqrt{2}=0$

$key:AB$与MN的中点重合

（2021II）20. 已知椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，右焦点为 $F(\sqrt{2},0)$，且离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

（1）求椭圆 C 的方程；（2）设 M，N 是椭圆 C 上的两点，直线 MN 与曲线 $x^2+y^2=b^2(x>0)$ 相切．证明：M，N，F 三点共线的充要条件是 $|MN|=\sqrt{3}$．

（1）由$\begin{cases}c=\sqrt{2}\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}\end{cases}$得$a=\sqrt{3},b=1,\therefore C:\frac{x^2}{3}+y^2=1$

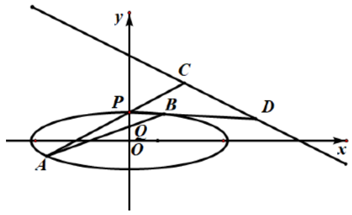
（2）设$l_{MN}:x=ty+n$代入C得$:(t^2+3)y^2+2tny+n^2-3=0,\therefore\begin{cases}y_M+y_N=-\frac{2tn}{t^2+3}\\ y_My_N=\frac{n^2-3}{t^2+3}\end{cases}$,且$\Delta=12(t^2+3-n^2)>0$

由MN与曲线$x^2+y^2=b^2=1$相切$\Leftrightarrow \dfrac{|n|}{\sqrt{1+t^2}}=1$即$n^2=t^2+1(n>0)$

$|MN|=\sqrt{1+t^2}\cdot\dfrac{2\sqrt{3}\sqrt{t^2+3-n^2}}{t^2+3}=n\cdot\dfrac{2\sqrt{6}}{n^2+2}=\sqrt{3}\Leftrightarrow n^2-2\sqrt{2}n+2=0\Leftrightarrow n=\sqrt{2}$

M,N,F三点共线$\Leftrightarrow n=\sqrt{2}$,$\therefore M,N,F$三点共线的充要条件为$|MN|=\sqrt{3}$

（2022浙江）如图，已知椭圆$\dfrac{x^2}{12}+y^2=1$，设A,B是椭圆上异于$P(0,1)$的两点，且点$Q(0,\dfrac{1}{2})$在线段AB上，直线PA,PB分别交直线$y=-\dfrac{1}{2}x+3$于C,D两点.



(1) 求点P到椭圆上的点距离的最大值； (2) 求$|CD|$的最小值.

解： (1) 设$M(x,y)$是椭圆上任意一点，则$|PM|=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$

$=\sqrt{-11y^2-2y+13}=\sqrt{-11(y+\dfrac{1}{11})^2+\dfrac{144}{11}}\le\dfrac{12}{\sqrt{11}}$（当且仅当$y=-\dfrac{1}{11}$时取$=$）

$\therefore$所求距离的最大值为$\dfrac{12\sqrt{11}}{11}$

(2) 设$l_{AB}:y=kx+\dfrac{1}{2}$代入椭圆方程得:$(1+12k^2)x^2+12kx-9=0$

$$\therefore\begin{cases}x_A+x_B=-\dfrac{12k}{1+12k^2}\\ x_Ax_B=-\dfrac{9}{1+12k^2}\end{cases},\text{且}\Delta=36(16k^2+1)>0$$

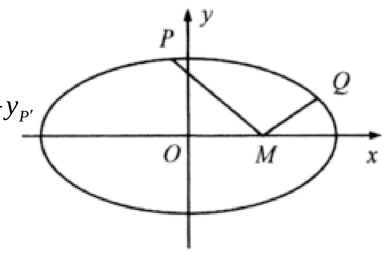
由A,P,C共线得$\dfrac{-\frac{1}{2}x_C+3-1}{x_C}=\dfrac{1-y_A}{-x_A}$得$x_C=\dfrac{4x_A}{x_A+2y_A-2}=\dfrac{4x_A}{(1+2k)x_A-1}$,同理$x_D=\dfrac{4x_B}{(1+2k)x_B-1}$

$$\therefore|CD|=\frac{\sqrt{5}}{2}\left|\frac{4x_A}{(1+2k)x_A-1}-\frac{4x_B}{(1+2k)x_B-1}\right|=2\sqrt{5}\cdot\frac{|x_A-x_B|}{|(1+2k)^2x_Ax_B-(1+2k)(x_A+x_B)+1|}$$

$$=2\sqrt{5}\cdot\frac{\dfrac{6\sqrt{16k^2+1}}{1+12k^2}}{\dfrac{|24k+8|}{1+12k^2}}=\frac{3\sqrt{5}}{2}\cdot\sqrt{\frac{16k^2+1}{(3k+1)^2}}(\text{令}t=\frac{1}{3k+1}\text{得}k=\frac{1-t}{3t})=\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{(5t-\frac{16}{5})^2+\frac{144}{25}}\ge\frac{6\sqrt{5}}{5}\text{即为所求的}$$

(柯西:$(16k^2+1)(\dfrac{9}{16}+1)\ge(3k+1)^2$)

变式 1（1）如图，$M(1,0)$,P,Q 是椭圆$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$上的两点（点 Q 在第一象限），且直线 PM，QM 的斜率互为相反数．若$|PM|=2|QM|$，则直线 QM 的斜率为__________．$\dfrac{\sqrt{15}}{6}$



$key1$:设P关于x轴的对称点为P'，则P',M,Q共线，且$|P'M|=2|MQ|$即$2y_Q=-y_{P'}$

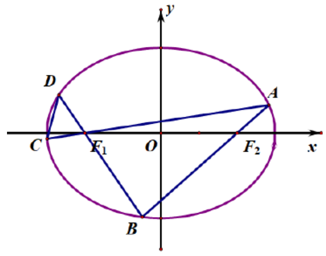
设$P'Q$方程为$x=ty+1$代入

2023-10-07

$key2:$ 设$\overrightarrow{MQ}=(s,t)$, 则$\overrightarrow{MP}=2(-s,t)$，则$P(1-2s,2t),Q(1+s,t)$,

$$\therefore\begin{cases}\dfrac{(1-2s)^2}{4}+4t^2=1\\ \dfrac{(1+s)^2}{4}+t^2=1\end{cases}\text{解得}\begin{cases}s=\dfrac{3}{4}\\ t=\dfrac{\sqrt{15}}{8}\end{cases},\therefore k_{QM}=\frac{\sqrt{15}}{6}$$

（2） 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$的左、右焦点为$F_1$、$F_2$，过$F_2$的直线与椭圆$C$交于$A$、$B$两点，若$AF_1$交椭圆$C$于$M$，$BF_1$交椭圆$C$于$N$，则$\dfrac{k_{AB}}{k_{MN}}=$________.



$key:$ 设$AB:x=ty+2$代入C得:$(5t^2+9)y^2+20ty-25=0$,

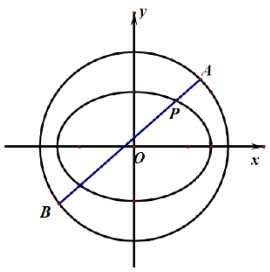
$$\therefore\begin{cases}y_A+y_B=\dfrac{-20t}{5t^2+9}\\ y_Ay_B=\dfrac{-25}{5t^2+9}\end{cases},$$

AF_1方程为：$x=\dfrac{x_A+2}{y_A}y-2$代入C得：$y_C=\dfrac{-5y_A}{4x_A+13},x_C=\dfrac{-5x_A-10}{4x_A+13}-2$,

同理$y_D=\dfrac{-5y_B}{4x_B+13},x_C=\dfrac{-5x_B-10}{4x_B+13}-2$

$$\therefore k_{CD}=\frac{\dfrac{-5y_A}{4x_A+13}+\dfrac{5y_B}{4x_B+13}}{\dfrac{-5x_A-10}{4x_A+13}+\dfrac{5x_B+10}{4x_B+13}}=\frac{-y_A(4ty_B+21)+y_B(4ty_A+21)}{(-ty_A-4)(4ty_B+21)+(ty_B+4)(4ty_A+21)}=\frac{21}{5t},\therefore\frac{k_{CD}}{k_{AB}}=\frac{21}{5}$$

变式 2（1）已知点P是$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上一点，过点$P$的一条直线与圆$x^2+y^2=a^2+b^2$相交于$A,B$两点，若存在点$P$，使得$|PA|\cdot|PB|=a^2-b^2$，则椭圆的离心率取值范围为______.



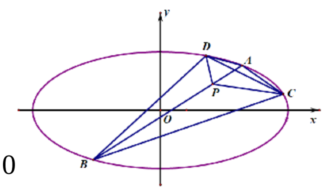
$key:|PA|\cdot|PB|=(\sqrt{a^2+b^2-x_P^2}-y_P)(y_P+\sqrt{a^2+b^2-x_P^2})$

$=a^2+b^2-x_P^2-y_P^2=a^2+b^2-x_P^2-b^2(1-\dfrac{x_P^2}{a^2})=a^2-\dfrac{a^2-b^2}{a^2}x_P^2=a^2-b^2$

$\therefore b^2=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}x_P^2\le a^2-b^2,\therefore e\in[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1)$

（2）过点$P(2,1)$斜率为正的直线交椭圆$\dfrac{x^2}{24}+\dfrac{y^2}{5}=1$于$A,B$两点.$C,D$是椭圆上相异的两点，满足$CP,DP$分别平分$\angle ACB$, $\angle ADB$.则$\triangle PCD$外接圆半径的最小值为（ D ）

A. $\dfrac{2\sqrt{15}}{5}$　　B. $\dfrac{\sqrt{65}}{5}$　　C. $\dfrac{24}{13}$　　D. $\dfrac{19}{13}$



$key:$由$\begin{cases}y-1=k(x-2)(k>0)\\ 5x^2+24y^2=120\end{cases}$消去$y$得$(5+24k^2)x^2-48k(2k-1)x+24(2k-1)^2-120=0$

$$\therefore\begin{cases}x_A+x_B=\dfrac{48k(2k-1)}{24k^2+5}\\ x_Ax_B=\dfrac{96k^2-96k-96}{24k^2+5}\end{cases},\text{且}\Delta=1920(5k^2+k+1)>0,\text{（阿波罗尼斯圆）设}\frac{PA}{PB}=\lambda=\frac{x_A-2}{2-x_B},$$

则圆的半径$R=\frac{\lambda}{|1-\lambda^2|}|AB|=\frac{(x_A-2)(2-x_B)}{4-(x_A+x_B)}\cdot\sqrt{1+k^2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{\frac{-96k^2+96k+96}{24k^2+5}+\frac{96(2k^2-k)}{24k^2+5}-4}{4-\frac{48(2k^2-k)}{24k^2+5}}$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{19}{12k+5}=\frac{19}{12}\sqrt{169(t-\frac{5}{169})^2+\frac{144}{169}}\ge\frac{19}{13}(t=\frac{1}{12k+5}\in(0,\frac{1}{5}))$

（3）已知椭圆$C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$与直线$l:x+y-m=0$有两个相异交点A、B. 点P在直线l上,

若$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=2$,则点$P$的轨迹方程为__________.

key:设$P(s,t)$，则$s+t-m=0$

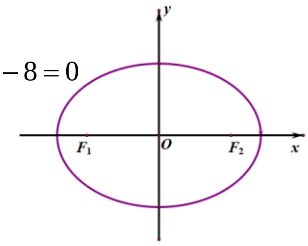
由$\begin{cases}x+y-m=0\\x^2+2y^2=2\end{cases}$消去$y$得$3x^2-4mx+2m^2-2=0,\therefore\begin{cases}x_A+x_B=\frac{4m}{3}\\x_Ax_B=\frac{2m^2-2}{3}\end{cases}$,且$\Delta=8(3-m^2)>0$

$\therefore 2=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=2(x_A-s)(x_B-s)\Leftrightarrow 1=x_Ax_B-s(x_A+x_B)+s^2=\frac{2m^2-2}{3}-\frac{4sm}{3}+s^2$

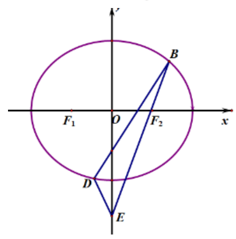
$=\frac{2(s^2+2st+t^2)-2}{3}-\frac{4s(s+t)}{3}+s^2=\frac{s^2}{3}+\frac{2t^2}{3}-\frac{2}{3},\therefore P$的轨迹方程为$\frac{x^2}{5}+\frac{2y^2}{5}=1(-\sqrt{3}<x+y<\sqrt{3})$

（4）已知F_1,F_2分别是椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，点$A(\frac{2\sqrt{3}}{3},\sqrt{2})$在椭圆$C$上，且$\triangle AF_1F_2$的面积为$\sqrt{2}$.（Ⅰ）求椭圆$C$的方程；（Ⅱ）设直线$y=kx-1$与椭圆$C$交于$B$、$D$两点，$O$为坐标原点，$y$轴上是否存在点$E$，使得$\angle OEB=\angle OED$，若存在，求出$E$点的坐标；若不存在，说明理由；
（Ⅲ）设P为椭圆C上非长轴顶点的任意一点，Q为线段F_1F_2上一点，若$\triangle PQF_1$与$\triangle PQF_2$的内切圆面积相等，求证：线段PQ的长度为定值.

（Ⅰ）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$;（Ⅱ）假设存在$E(0,m)$,由$\begin{cases}y=kx-1\\\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$消去$y$得:$(3+4k^2)x^2-8kx-8=0$



$\therefore\begin{cases}x_B+x_D=\frac{8k}{3+4k^2}\\x_Bx_D=\frac{-8}{3+4k^2}\end{cases}$,而$\angle OEB=\angle OED\Leftrightarrow k_{ED}+k_{EB}=\frac{y_D-m}{x_D}+\frac{y_B-m}{x_B}=0$

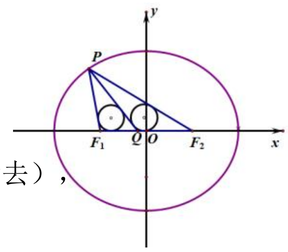


$\Leftrightarrow(kx_D-m-1)x_B+x_D(kx_B-m-1)=2kx_Bx_D-(m+1)(x_B+x_D)$

$=\frac{-16k}{3+4k^2}-\frac{8k(m+1)}{3+4k^2}=0$得$m=-3,\therefore$存在$E$，且坐标为$(0,-3)$

（Ⅲ）由已知得:$\frac{2\cdot\frac{1}{2}|F_1Q|\cdot|t|}{|PF_1|+|PQ|+|F_1Q|}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}|F_2Q|\cdot|t|}{|PF_2|+|PQ|+|F_2Q|},\therefore|PQ|=\frac{|F_1Q|\cdot|PF_2|-|F_2Q|\cdot|PF_1|}{|F_2Q|-|F_1Q|}$

$=\frac{(x_Q+1)(2-\frac{1}{2}x_P)-(1-x_Q)(2+\frac{1}{2}x_P)}{(1-x_Q)-(x_Q+1)}=\frac{4x_Q-x_P}{-2x_Q}$



而$|PQ|=\sqrt{(x_P-x_Q)^2+3(1-\frac{x_P^2}{4})}=\sqrt{\frac{1}{4}x_P^2-2x_Qx_P+x_Q^2+3}=\frac{4x_Q-x_P}{-2x_Q}$得$x_Q^2=1$(舍去)，

或$x_P^2-8x_Qx_P+4x_Q^2=0$即$x_P=4x_Q\pm2\sqrt{3}x_Q,\therefore\therefore|PQ|=\sqrt{3}$为定值