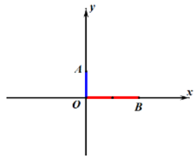
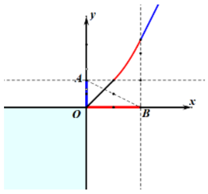
解析几何（4）抛物线解答（2）

2023-12-23

变式 1（1）①已知平面上的线段l及点P，在l上任取一点Q，线段PQ长度的最小值称为点P到线段l的距离，记作$d(P,l)$.已知点$A(0,1),B(2,0)$,写出集合$\Omega=\{P\,|\,d(P,OA)=d(P,OB)\}$.



key:如图$\Omega=\{(x,y)\,|\,x\le 0,y\le 0\}$
$\cup\{(x,y)\,|\,y=x,0<x\le 1\}$
$\cup\{(x,y)\,|\,x^2=2y-1,1<x\le 2\}$
$\cup\{(x,y)\,|\,4x-2y-3=0,x>2\}$



②点P到点$A(\frac{1}{2},0)$，$B(a,2)$及到直线$x=-\frac{1}{2}$的距离都相等，如果这样的点P恰好只有一个，那么$a=$(　　)

$A.\frac{1}{2}$　　$B.\frac{3}{2}$　　$C.\frac{1}{2}$或$\frac{3}{2}$　　$D.\frac{1}{2}$或$-\frac{1}{2}$

$key:\begin{cases}y^2=2x\\(x-\frac{1}{2})^2+y^2=(x-a)^2+(y-2)^2\text{即}(2a-1)x+4y-a^2-\frac{15}{4}=0\end{cases}$只有一个解

$\therefore \frac{2a-1}{2}y^2+4y-a^2-\frac{15}{4}=0$只有一个解,$\therefore a=\frac{1}{2},or\,\Delta=16+2(2a-1)(a^2+\frac{15}{4})=0$即$a=-\frac{1}{2}$

（2）已知圆$O:x^2+y^2=4$，点$A(-1,0),B(1,0)$，动抛物线过A,B两点，且以圆的切线为准线，则抛物线的焦点的轨迹方程为________.

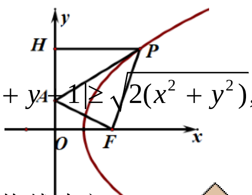
$key:|FA|+|FB|=|AA_1|+|BB_1|=4,\therefore \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1(y\ne 0)$

（3）若抛物线的准线l的方程为$x=-2$，抛物线过点$A(2,1)$,，则过焦点F的弦AB的另一个端点B的 轨迹方程为__.$key:|BA|=|BF|+|FA|=|BB_1|+2,\therefore\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=x+3$即$(y-2)^2=8(x+1)(x\ne -1)$

(2004Ⅰ)16.设P是曲线$y^2=4(x-1)$上的一个动点,则点P到点$(0,1)$的距离与点P到y轴的距离之和的最小值为__.

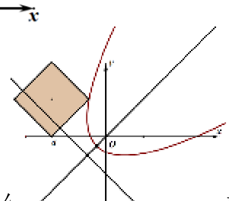
key:抛物线的焦点$F(2,0),A(0,1)$,

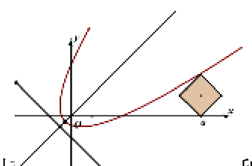
$\therefore|PA|+|PH|=|PA|+|PF|\ge|AF|=\sqrt{5}$



(2005江苏）已知平面上两个点集$M=\{(x,y)\,||x+y+1|\ge\sqrt{2(x^2+y^2)},x,y\in R\},N=\{(x,y)\,||x-a|+|y-1|\le 1,x,y\in R\}$.若$M\cap N\ne\Phi$，则$a$的取值范围为___.

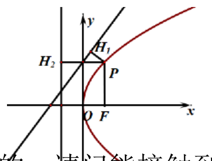
(2005江苏）$key:\frac{|x+y+1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{x^2+y^2}$得$M$是抛物线内部，而$N$是正方形内部，如图得$a\in[1-\sqrt{6},3+\sqrt{10}]$





(2009四川）已知直线$l_1:4x-3y+6=0$和直线$l_2:x=-1$，抛物线$y^2=4x$上一动点P到直线l_1和l_2的距离之和的最小值是（　）$A.2$　$B.3$　$C.\frac{11}{5}$　$D.\frac{37}{16}$

2009四川$key:d_1+d_2=|PH_1|+|PF|\ge\frac{|4+6|}{5}=2$,选$A$



(2011广东）一个玻璃杯的内壁是由抛物线$y=x^2(-2\le x\le 2)$绕y轴旋转而构成的，请问能接触到杯底的球的半径最大是______.

2011广东$key:d^2=x^2+(y-r)^2=y^2+(1-2r)y+r^2$的最小值在$y=0$处取到

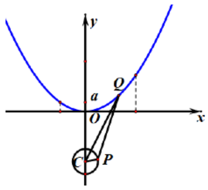
$key2:\begin{cases}x^2+(y-r)^2=r^2\\y=x^2\end{cases}$只有一个解$(0,0),\therefore r_{\max}=\frac{1}{2}$

(2015浙江）已知点$A(3,1)$,F为抛物线$y^2=5x$的焦点，M为抛物线上的动点，当$|MA|+|MF|$取最小值时，点M的坐标为______. $(\frac{1}{5},1)$

解析几何（4）抛物线解答（2）

2023-12-23

（2017广东）已知点P在圆$C: x^2+(y+2)^2=\frac{1}{4}$上运动，点$Q$在曲线$y=ax^2(a>0,-1\le x\le 2)$上运动，且$|PQ|$的最大值为$\frac{9}{2}$，则$a=$______.



2017广东$key: |PQ|\le|PC|+|CQ|=\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+(ax^2+2)^2}$

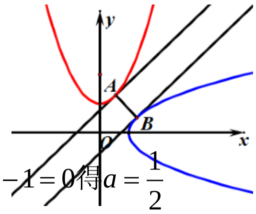
$=\frac{1}{2}+\sqrt{a^2x^4+(4a+1)x^2+4}=\frac{1}{2}+\sqrt{a^2(x^2+\frac{4a+1}{2a^2})^2-\frac{8a+1}{4a^2}}(x^2\in[0,4])$

$\le\max\{\frac{1}{2}+2,\frac{1}{2}+\sqrt{16a^2+16a+8}\}=\frac{9}{2}$得$a=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

（2018辽宁）已知A、B分别为$C_1: x^2-y+1=0$和$C_2: y^2-x+1=0$上的点，则$|AB|$的最小值为______.

2018辽宁key: 设$A(a,a^2+1),B(b^2+1,b)$

则A处切线l_1方程为：$ax-\frac{y+a^2+1}{2}+1=0$, B处切线l_2方程为: $by-\frac{b^2+1+x}{2}+1=0$



$\therefore\begin{cases}2a=\frac{1}{2b}\text{即}ab=\frac{1}{4}\\ k_{AB}\cdot k_{l_1}=\frac{b-a^2-1}{b^2+1-a}\cdot 2a=-1\end{cases}$, $\therefore 2a(\frac{1}{4a}-a^2-1)=a-1-\frac{1}{16a^2}$即$16a^4+48a^3-24a^2-1=0$得$a=\frac{1}{2}$

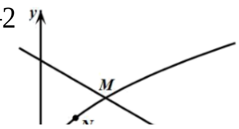
$\therefore|AB|_{\min}=\sqrt{(\frac{1}{2}-\frac{5}{4})^2+(\frac{5}{4}-\frac{1}{2})^2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$

（或直接求$|AB|=\sqrt{(a-b^2-1)^2+(a^2+1-b)^2}=\sqrt{(a-\frac{1}{16a^2}-1)^2+(a^2+1-\frac{1}{4a})^2}$的最小值）

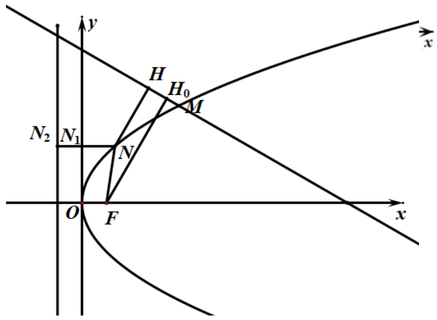
变式 1（1）已知抛物线$E: y^2=4x$和直线$l: x+\sqrt{3}y+m=0$在第一象限内的交点为$M(x_1,y_1)$．设$N(x_2,y_2)$是抛物线E上的动点，且满足$0<y_2<y_1$，记$2x_2+|x_2+\sqrt{3}y_2+m|=t$，则（　D　）

A. 当$0<x_1<3$时，t　最小值是$|m+1|$ B. 当$0<x_1<3$时，t的最小值是$|m+1|-2$

C. 当$x_1>3$时，t的最小值是$|m+1|$　D. 当$x_1>3$时，t的最小值是$|m+1|-2$



key: 由$\begin{cases}x+\sqrt{3}y+m=0\\ y^2=4x\end{cases}$得$\begin{cases}x_1=\frac{y_1^2}{4}\\ y_1=2(-\sqrt{3}+\sqrt{3-m})>0\end{cases}$　即$m<0$



$\frac{t}{2}=x_2+\frac{|x_2+\sqrt{3}y_2+m|}{2}=|NN_1|+|NH|$

$=|NN_2|-1+|NH|=|NF|+NH|-1\ge|FH|-1=\frac{|m+1|}{2}-1,\therefore t\ge|m+1|-2$

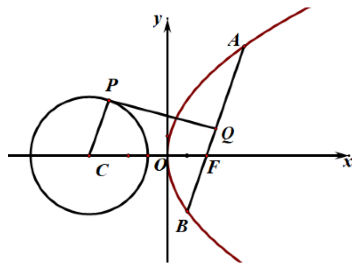
（当且仅当F在直线上的射影H_0在M的左上侧即$\frac{-\sqrt{3}(m+1)}{4}>-2\sqrt{3}+2\sqrt{3-m}$

即$m<-9$即$x_1>3$时，取$=$）

（2）已知抛物线$y^2=8x$焦点为F，斜率为k的直线过F交抛物线于A，B，AB中点为Q，若圆$(x+4)^2+y^2=9$上存在点P使得$|PQ|=\frac{1}{2}|AB|$，则k的取值范围是______.

key: 设$A(2a^2,4a),B(2b^2,4b)$，则$\frac{4a-4b}{2a^2-2b^2}=\frac{2}{a+b}=\frac{4a}{2a^2-2}$得$ab=-1$,

且$Q(a^2+b^2,2(a+b))$即$(t^2+2,2t)$, 且$k_{AB}=\frac{2}{a+b}=\frac{2}{t}(t=a+b)$



存在$|PQ|=\frac{1}{2}|AB|$，则$|QC|+3\ge\frac{1}{2}|AB|\ge|QC|-3$

$\therefore\sqrt{(t^2+6)^2+4t^2}-3\le t^2+4\le\sqrt{(t^2+6)^2+4t^2}+3$得$|t|\le\sqrt{\frac{13}{2}},\therefore k=\frac{2}{t}\in(-\infty,-\frac{2\sqrt{26}}{13}]\cup[\frac{2\sqrt{26}}{13},+\infty)$

二、弦问题

(1991全国）设O为抛物线的顶点, F为焦点且PQ为过F的弦, 已知$|OF|=a,|PQ|=b$,则$\triangle OPQ$的面积为____.

$key:|PF|=\frac{2a}{1-\cos\theta},|QF|=\frac{2a}{1+\cos\theta},\therefore|PQ|=\frac{4a}{\sin^2\theta}=b$得$\sin\theta=\sqrt{\frac{4a}{b}},\therefore S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\sin\theta=a\sqrt{ab}$

(2000Ⅰ）过抛物线$y=ax^2(a>0)$的焦点F作一直线交抛物线于P、Q两点，若线段PF与FQ的长分别是p、q，则$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=$（ ） $A.2a$　$B.\frac{1}{2a}$　$C.4a$　$D.\frac{4}{a}$

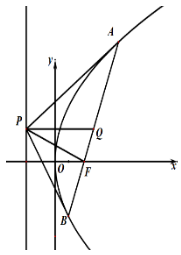
$key:x^2=\frac{1}{a}y,\therefore|PF|=\frac{\frac{1}{2a}}{1-\cos\theta}=p,|QF|=\frac{\frac{1}{2a}}{1+\cos\theta}=q,\therefore\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=2a(1-\cos\theta)+2a(1+\cos\theta)=4a$, 选$C$

（2018 河南）设经过定点$M(a,0)$的直线l与抛物线$y^2=4x$相交于P、Q两点，若$\frac{1}{|PM|^2}+\frac{1}{|QM|^2}$为常数，则$a$的值为______．2

key:设$l:x=ty+a$代入抛物线方程得$y^2-4ty-4a=0$

$\therefore\begin{cases}y_P+y_Q=4t\\y_Py_Q=-4a\end{cases},\therefore\frac{1}{|PM|^2}+\frac{1}{|QM|^2}=\frac{1}{(1+t^2)y_P^2}+\frac{1}{(1+t^2)y_Q^2}=\frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{16t^2+8a}{16a^2}$为常数,$\therefore a=2$

变式1.已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为F,过点F的直线与C交于A、B两点，C在A处的切线与C的准线交于P点.若$|PF|=3$，则$\frac{1}{|AF|^2}+\frac{4}{|BF|^2}$的最小值为_____.



key:设$A(2pa^2,2pa)(a>0),B(2pb^2,2pb)$,则$\frac{2pa-2pb}{2pa^2-2pb^2}=\frac{1}{a+b}=\frac{2pa}{2pa^2-\frac{p}{2}}$得$ab=-\frac{1}{4}$

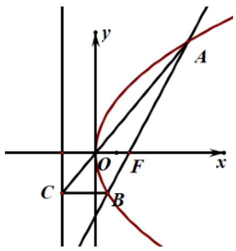
A处切线方程为$2pa\cdot y=2p\cdot\frac{2pa^2+x}{2}$令$x=-\frac{p}{2}$得$y_P=\frac{2pa^2-\frac{p}{2}}{2a}=p(a+b)$

$\therefore k_{PF}\cdot k_{AB}=\frac{p(a+b)}{-p}\cdot\frac{1}{a+b}=-1,k_{PA}k_{PB}=\frac{1}{2a}\cdot\frac{p(a+b)-2pb}{-\frac{p}{2}-2pb^2}=-1,\therefore PF\perp AB$,且$PA\perp PB$

$\therefore|AF|\cdot|BF|=|PF|^2=9,\therefore\frac{1}{|AF|^2}+\frac{4}{|BF|^2}=\frac{1}{|AF|^2}+\frac{4|AF|^2}{81}\ge\frac{8}{9}$

(2001Ⅰ）设抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点为F，经过点F的直线交抛物线于A、B两点，点C在抛物线的准线上，且$BC//x$轴，证明直线AC经过原点O.

证明一:设$A(2pa^2,2pa),B(2pb^2,2pb)$,



由A,F,B三点共线得$\frac{2pa-2pb}{2pa^2-2pb^2}=\frac{1}{a+b}=\frac{2pa}{2pa^2-\frac{p}{2}}$即$ab=-\frac{1}{4}$

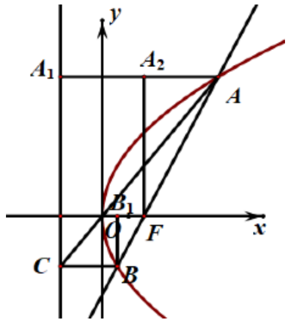
$\because BC//x$轴,$\therefore C(-\frac{p}{2},2pb^2)$

$\therefore k_{OA}-k_{OC}=\frac{2pa}{2pa^2}-\frac{2pb}{-\frac{p}{2}}=\frac{1}{a}+4b=\frac{1+4ab}{a}=0,\therefore AC$经过原点$O$

2023-12-23

$key2:设l_{AB}:x=ty+\frac{p}{2}$

$\therefore\frac{1}{|FA|}+\frac{1}{|FB|}=\frac{1}{x_A+\frac{p}{2}}+\frac{1}{x_B+\frac{p}{2}},or,\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(\frac{1}{y_A}+\frac{1}{y_B})$



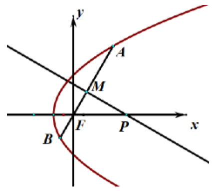
$证明二:\frac{|OF|}{|BF|}=\frac{|OF|}{|BC|}=\frac{|FA|}{|AB|}=\frac{|FA|}{|FA|+|FB|}\Leftrightarrow\frac{1}{|FA|}+\frac{1}{|FB|}=\frac{2}{p}$

$key1:设A在准线上的射影为A_1,F在AA_1上的射影为A_2,B在x轴上的射影为B_1,$

$则\triangle BB_1F\sim\triangle FA_2A,\therefore\frac{|FB|}{|FA|}=\frac{|AA_2|}{|FB_1|}=\frac{p-|FB|}{|FA|-p}\Leftrightarrow\frac{1}{|FA|}+\frac{1}{|FB|}=\frac{2}{p}$

$key2:设\angle AFx=\theta,\ 则|AF|=\frac{p}{1-\cos\theta},|BF|=\frac{p}{1+\cos\theta},\therefore\frac{1}{|FA|}+\frac{1}{|FB|}=\frac{2}{p}$

（2003A）过抛物线$y^2=8(x+2)$的焦点F作倾斜角为60°的直线，若此直线与抛物线交于A、B两点，弦AB的中垂线与x轴交于P点，则线段PF的长等于（　）$A.\frac{16}{3}$　$B.\frac{8}{3}$　$C.\frac{16\sqrt{3}}{3}$　$D.8\sqrt{3}$



$key:|FA|=\frac{4}{1-\frac{1}{2}}=8,|FB|=\frac{4}{1+\frac{1}{2}}=\frac{8}{3},$

$\therefore|FM|=8-\frac{1}{2}(8+\frac{8}{3})=\frac{8}{3},\therefore|PF|=2|FM|=\frac{16}{3}$

（2007II）12.设F为抛物线$y^2=4x$的焦点，A、B、C为该抛物线上三点，若$\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\vec{0}$,

则$|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|+|\overrightarrow{FC}|=$（　）$A.9$　$B.6$　$C.4$　$D.3$

2007I $key:\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=0,\therefore x_A+x_B+x_C=3,$

$\therefore|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|+|\overrightarrow{FC}|=x_A+1+x_B+1+x_C+1=6,选B$

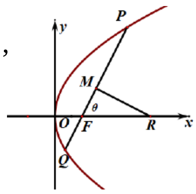
（2007 海南）6．已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，点 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$，$P_3(x_3,y_3)$ 在抛物线上，且 $2x_2=x_1+x_3$,则有（　C　）A． $|FP_1|+|FP_2|=|FP_3|$　　　B． $|FP_1|^2+|FP_2|^2=|FP_3|^2$

C． $2|FP_2|=|FP_1|+|FP_3|$　　　D． $|FP_2|^2=|FP_1|\cdot|FP_3|$

$key:|FP_1|=x_1+\frac{p}{2},|FP_2|=x_2+\frac{p}{2},|FP_3|=x_3+\frac{p}{2},选C$

（2012 新疆）过抛物线焦点的直线交抛物线于 P,Q 两点，PQ 的垂直平分线交抛物线的对称轴于 R，则 $\frac{|PQ|}{|FR|}$ 的值为（　　）A.5　　　B.4　　　C.3　　　D.2

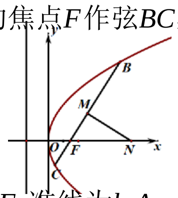
$key:|PF|=\frac{p}{1-\cos\theta},|QF|=\frac{p}{1+\cos\theta},\therefore|MF|=||PF|-\frac{1}{2}|PQ||=\frac{1}{2}||PF|-|QF||=\frac{p|\cos\theta|}{\sin^2\theta},$



$$\therefore\frac{|PQ|}{|FR|}=\frac{\frac{2p}{\sin^2\theta}}{\frac{p|\cos\theta|}{\sin^2\theta}\cdot\frac{1}{|\cos\theta|}}=2$$

（2017内蒙古）过抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点F作弦BC，若弦BC的垂直平分线交BC于M，交x轴于N，

则$\frac{|MN|^2}{|FB|\cdot|FC|}=$________.1



2017内蒙古$key:1$

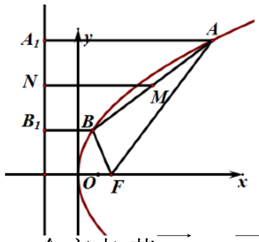
（2012A）抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点为F,准线为l,A、B是抛物线上的两个动点，且满足$\angle AFB=\frac{\pi}{3}$.

设线段AB的中点M在l上的投影为N，则$\frac{|MN|}{|AB|}$的最大值为__.

2023-12-23

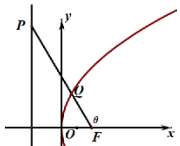
$key:|AB|^2=|AF|^2+|BF|^2-|AF|\cdot|BF|,\therefore\dfrac{|MN|}{|AB|}=\dfrac{\frac{1}{2}(|AA_1|+|BB_1|)}{|AB|}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{|AF|+|BF|}{|AB|}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{|AF|^2+|BF|^2+2|AF|\cdot|BF|}{|AF|^2+|BF|^2-|AF|\cdot|BF|}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+\dfrac{3}{\frac{|AF|}{|BF|}+\frac{|BF|}{|AF|}-1}}\le 1$



(2014Ⅰ)10.已知抛物线$C:y^2=8x$的焦点为F,准线为l, P是l上一点,Q是直线PF与C的一个交点,若$\overrightarrow{FP}=4\overrightarrow{FQ}$,

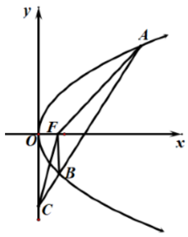
则$|QF|=$（　）$A.\dfrac{7}{2}$　　$B.\dfrac{5}{2}$　　$C.3$　　$D.2$



$key:$设$P(-2,t)$，则$Q(\dfrac{3}{2},\dfrac{t}{4}),\therefore|QF|=\dfrac{3}{2}+2=\dfrac{7}{2}$,选$A$

（2015 浙江）5．如图，设抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，不经过焦点的直线上有三个不同的点 A,B,C，其中点 A,B 在抛物线上，点 C 在 y 轴上，则$\triangle BCF$ 与$\triangle ACF$ 的面积之比是（　A）

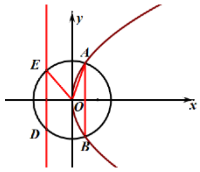
A. $\dfrac{|BF|-1}{|AF|-1}$　　B. $\dfrac{|BF|^2-1}{|AF|^2-1}$　　C. $\dfrac{|BF|+1}{|AF|+1}$　　D. $\dfrac{|BF|^2+1}{|AF|^2+1}$



2015浙江$key:\dfrac{S_{\triangle BCF}}{S_{\triangle ACF}}=\dfrac{|BC|}{|AC|}=\dfrac{x_B}{x_A}=\dfrac{x_B+1-1}{x_A+1-1}=\dfrac{|BF|-1}{|AF|-1}$,选$A$

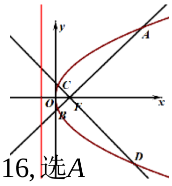
(2016Ⅰ)10.以抛物线C的顶点为圆心的圆交C于A、B两点，交C的准线于D、E两点，

已知$|AB|=4\sqrt{2},|DE|=2\sqrt{5}$,则$C$的焦点到准线的距离为（　）$A.2$　　$B.4$　　$C.6$　　$D.8$



2016Ⅰ $key:r^2=\dfrac{16}{p^2}+8=r^2=\dfrac{p^2}{4}+5$得$p=4$,选$B$

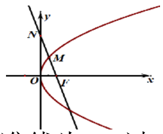
(2017Ⅰ)10.已知F为抛物线$C:y^2=4x$的焦点，过F作两条互相垂直的直线l_1、l_2，直线l_1与C交于A、B两点，直线l_2与C交于D、E两点，则$|AB|+|DE|$的最小为（　）$A.16$　　$B.14$　　$C.12$　　$D.10$



2017Ⅰ $key:$设$\angle AFx=\theta$,则$|AB|=|FA|+|FB|=\dfrac{2}{1-\cos\theta}+\dfrac{2}{1+\cos\theta}=\dfrac{4}{\sin^2\theta}$

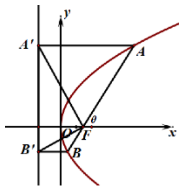
$\because AB\perp CD,\therefore|CD|=\dfrac{4}{\sin^2(\theta+\frac{\pi}{2})}=\dfrac{4}{\cos^2\theta},\therefore|AB|+|CD|=\dfrac{4}{\sin^2\theta}+\dfrac{4}{\cos^2\theta}\ge\dfrac{(2+2)^2}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=16$,选$A$

(2017Ⅱ)16.已知F是抛物线$C:y^2=8x$的焦点，M是C上一点，FM的延长线交y轴于点N，若M为FN的中点，则$|FN|=$______.



2017Ⅱ $key:\dfrac{4}{1-\cos\theta}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{-\cos\theta}$得$\cos\theta=-\dfrac{1}{3},\therefore|FN|=6$

（2018 年陕西）如图，已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，准线为 l，过点 F 的直线与抛物线交于 A,B 两点，且$|AB|=3p$.设点 A,B 在 l 上的射影为 A',B'，则 $\dfrac{S_{\triangle FA'B'}}{S_{AA'B'B}}=$______. $\dfrac{1}{3}$



$key:|AB|=\dfrac{p}{1-\cos\theta}+\dfrac{p}{1+\cos\theta}=\dfrac{2p}{\sin^2\theta}=3p$得$\sin\theta=\sqrt{\dfrac{2}{3}},\therefore\dfrac{S_{\triangle FA'B'}}{S_{AA'B'B}}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot p\cdot 3p\sin\theta}{\frac{1}{2}\cdot 3p\cdot 3p\sin\theta}=\dfrac{1}{3}$

$(2018A)$在平面直角坐标系xOy中，设AB是抛物线$y^2=4x$的过点$F(1,0)$的弦,$\triangle AOB$的外接圆交抛物线于点P(不同于点O,A,B).若PF平分$\angle APB$，求$|PF|$的所有可能值.

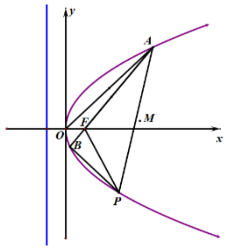
2018A解：设$A(a^2,2a)(a>0),B(b^2,2b)(b<0)$

由A、F、B共线得$\dfrac{2a-2b}{a^2-b^2}=\dfrac{2}{a+b}=\dfrac{2a}{a^2-1}$即$ab=-1$,

2023-12-23

设△OAB的外接圆方程为：$x^2+y^2+dx+ey=0$联立$x=\frac{y^2}{4}$

得$\frac{y^4}{16}+(1+\frac{d}{4})y^2+ey=0,\therefore y_P+0+y_A+y_B=0$即$y_P=-2(a-\frac{1}{a}),\therefore P((\frac{1}{a}-a)^2,2(\frac{1}{a}-a))$，且$a\neq 1$



$\therefore |PA|=\sqrt{((\frac{1}{a}-a)^2-a^2)^2+(\frac{2}{a}-2a-2a)^2}=\frac{|1-2a^2|\sqrt{1+4a^2}}{a^2}$，

$|PB|=\sqrt{((\frac{1}{a}-a)^2-\frac{1}{a^2})^2+(\frac{2}{a}-2a+\frac{2}{a})^2}=\frac{|a^2-2|\sqrt{a^2+4}}{a}$

$\because PF$是$\angle APB$的平分线，$\therefore a^2=\frac{2a}{-2b}=\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{|1-2a^2|\sqrt{1+4a^2}}{a|a^2-2|\sqrt{a^2+4}}$

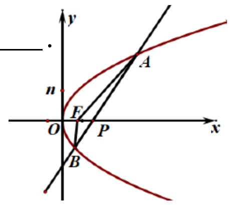
$\Leftrightarrow a^6(a^2-2)^2(a^2+4)=(1-2a^2)^2(4a^2+1)\Leftrightarrow a^{12}-12a^8+12a^4-1=(a^4-1)(a^8-11a^4+1)=0$

$\therefore 11=a^4+\frac{1}{a^4}=(a^2+\frac{1}{a^2})^2-2$即$a^2+\frac{1}{a^2}=\sqrt{13}$（或$a^4=\frac{22\pm 2\sqrt{13\times 9}}{4}$得$a^2=\frac{\sqrt{13}\pm 3}{2}$）

$\therefore |PF|=(\frac{1}{a}-a)^2+1=a^2+\frac{1}{a^2}-1=\sqrt{13}-1$即为所求的

（2019Ⅰ）19.已知抛物线$C:y^2=3x$的焦点为F，斜率为$\frac{3}{2}$的直线l与C交于A、B两点，与x轴的交点为P.

(1) 若$|AF|+|BF|=4$，则l的方程为____；（2）若$\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$，则$|AB|=$______.



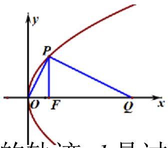
key：设$l_{AB}:x=\frac{2}{3}y+n(x_P=n)$代入$C$方程得：$y^2-2y-3n=0$，

$\therefore \begin{cases} y_A+y_B=2 \\ y_Ay_B=-3n \end{cases}$，且$\Delta=4+12n>0$

(1) $\therefore |AF|+|BF|=x_A+\frac{3}{4}+x_B+\frac{3}{4}=\frac{2}{3}(y_A+y_B)+2n+\frac{3}{2}=2n+\frac{17}{6}=4$得$n=\frac{7}{6}$，$\therefore l$的方程为$x=\frac{2}{3}y+\frac{7}{6}$

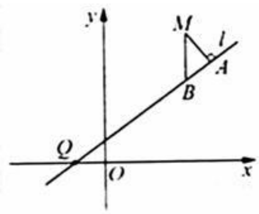
(2) 由$\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{BP}$得$y_A=-3y_B$，$\therefore \begin{cases} y_B=-1 \\ -3y_B^2=-3n \end{cases}$得$n=1$，$\therefore |AB|=\sqrt{1+\frac{4}{9}}\cdot\sqrt{16}=\frac{4\sqrt{13}}{3}$

（2021Ⅰ）14.已知O为坐标原点，抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为F，P为C上一点，PF与x轴垂直，Q为x轴上一点，且$PQ\perp OP$，若$|FQ|=6$，则C的准线方程为______.



2021Ⅰ key：$P(\frac{p}{2},p)$，$\therefore$由射影定理得$\frac{p}{2}\cdot 6=p^2$即$p=3$，$\therefore$准线$x=-\frac{3}{2}$

（2008）(20) 已知曲线 C 是到点 $P(-\frac{1}{2},\frac{3}{8})$ 和到直线 $y=-\frac{5}{8}$ 距离相等的点的轨迹. l 是过点 $Q(-1,0)$ 的直线，M 是 C 上（不在 l 上）的动点；A,B 在 l 上，$MA\perp l$，$MB\perp x$ 轴（如图）.



（Ⅰ）求曲线 C 的方程；（Ⅱ）求出直线 l 的方程，使得 $\frac{|QB|^2}{|QA|}$ 为常数.

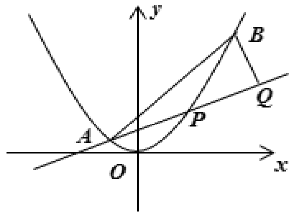
（Ⅰ）由已知得C的方程为：$(x+\frac{1}{2})^2=2(y+\frac{1}{8})$即$y=\frac{1}{2}(x^2+x)$

（Ⅱ）设$l:y=k(x+1)$，$M(x,\frac{1}{2}(x^2+x))$，则$\frac{|QB|^2}{|QA|}=\frac{(\sqrt{1+k^2}(x+1))^2}{\frac{|\overrightarrow{QM}\cdot(1,k)|}{\sqrt{1+k^2}}}$

$=(1+k^2)^{\frac{3}{2}}|\frac{x+1}{1+\frac{k}{2}}|$为常数，得$\frac{k}{2}=1$，$\therefore l$的方程为$2x-y+2=0$

2023-12-23

(17高考）如图，已知抛物线$x^2=y$,点$A(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}),B(\frac{3}{2},\frac{9}{4})$，抛物线上的点$P(x,y)(-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2})$，过点$B$作直线$AP$的垂线，垂足为$Q$.（Ⅰ）求直线$AP$的斜率的取值范围；（Ⅱ）求$|PA|\cdot|PQ|$的最大值.



解：（Ⅰ）$k_{AP}=\dfrac{x^2-\frac{1}{4}}{x-\frac{1}{2}}=x+\frac{1}{2}\in(0,2)$即为所求的

（Ⅱ）$|PA|\cdot|PQ|=|PA|\cdot\dfrac{|\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{AP}|}{|AP|}=|(\frac{3}{2}-x,\frac{9}{4}-x^2)\cdot(x+\frac{1}{2},x^2-\frac{1}{4})|$

$=(\frac{3}{2}-x)(x+\frac{1}{2})(1+(\frac{3}{2}-x)(x-\frac{1}{2})=\frac{1}{3}(\frac{9}{2}-3x)(x+\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})$

$\le\frac{1}{3}(\dfrac{\frac{9}{2}+\frac{3}{2}}{4})^4=\frac{27}{16}$（当且仅当$x=1$时，取$=$），$\therefore$所求最大值为$\frac{27}{16}$