立体几何（3）线面角解答（1）

2023-05-14

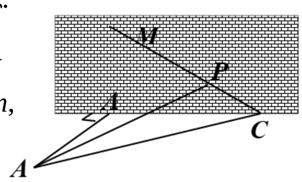
三、线面角

斜线与平面所成角：

- 斜线与平面所成角：斜线与斜线在平面内的射影所成角
  或斜线与平面内过斜足的所有直线所成角的最小角（$\cos\theta_1=\cos\theta\cos\theta_2$）；
- 范围：$(0,\frac{\pi}{2})$（而线面角的取值范围为$[0,\frac{\pi}{2}]$）
- 求法：
  - 利用定义作出所成角θ：$\sin\theta=\frac{d_P}{PA}$
  - 向量方法：$\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{n_\alpha}|}{|\overrightarrow{n_\alpha}|\cdot|\overrightarrow{PA}|}$

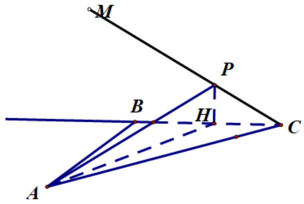
（2009）（5）在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，各棱长相等，侧接垂直于底面，点 D 是侧面 BB_1C_1C 的中心，则 AD 与平面 BB_1C_1C 所成角的大小是（ C ）A． 30° B． 45° C． 60° D． 90°

（2014）如图，某人在垂直于水平地面ABC的墙面前的A处进行射击训练.已知点A到墙面的距离为AB，某目标点P沿墙面的射击线CM移动，此人为了准确瞄准目标点P，需计算点A观察点P点仰角θ的大小. 若$AB=15cm$, $AC=25cm, \angle BCM=30°$, 则$\tan\theta$的最大值是________. $\frac{5\sqrt{3}}{9}$



$key1$：作$PH\perp BC$于H，则$PH\perp$平面ABC，

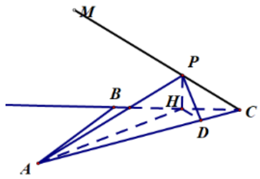
连AH，设$PC=x, \angle HAC=\theta$，则$PH=\frac{1}{2}x, HC=\frac{\sqrt{3}}{2}x$,



且$\frac{HC}{\sin\theta}=\frac{AH}{\frac{3}{5}}, \therefore \tan\angle PAH=\frac{PH}{AH}=\frac{\frac{1}{2}x}{\frac{3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x}{5\sin\theta}}=\frac{5\sin\theta}{3\sqrt{3}}\le\frac{5\sqrt{3}}{9}$

$key2$：由对称性，A看P的视角等于P看A的视角，

作$PH\perp BC$于H，则$PH\perp$平面ABC，作$HD\perp AC$于D，连PD，则$PD\perp AC$



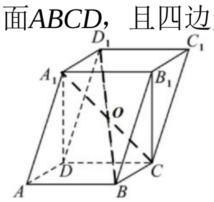
令$PC=1$, 则$PH=\frac{1}{2}, HC=\frac{\sqrt{3}}{2}, HD=\frac{3\sqrt{3}}{10}, \therefore \sin\theta\le\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3\sqrt{3}}{10}}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$

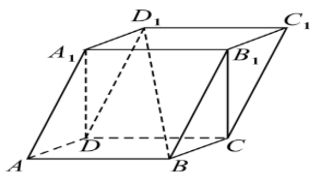
（1604 学考）16. 如图所示，在侧棱垂直于底面的三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，P 是棱 BC 上的动点.记直线 A_1P 与平面 ABC 所成的角为θ_1，与直线 BC 所成的角为θ_2，则 θ_1,θ_2 的大小关系是（ ） C

A. $\theta_1=\theta_2$ B. $\theta_1>\theta_2$ C. $\theta_1<\theta_2$ D.不能确定

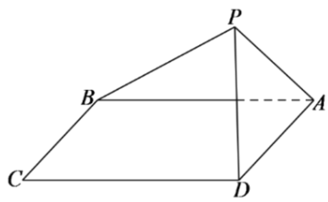
（201901学考）如图，四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，平面$A_1B_1CD\perp$平面$ABCD$，且四边形$ABCD$和四边形A_1B_1CD都是正方形，则直线BD_1与平面A_1B_1CD所成角的正切值是（ ）C

$A.\frac{\sqrt{2}}{2}$ $B.\frac{\sqrt{3}}{2}$ $C.\sqrt{2}$ $D.\sqrt{3}$





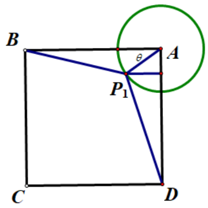
（202007学考）如图，已知点P为边长等于4的正方形所在平面外的动点，$|PA|=2, PA$与平面$ABCD$所成角等于45°，则$\angle BPD$的大小可能是（ ）$A.\frac{\pi}{6}$ $B.\frac{\pi}{3}$ $C.\frac{\pi}{2}$ $D.\frac{5\pi}{6}$

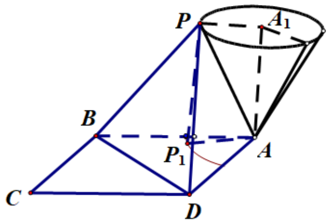


2023-05-14

$key: PB=\sqrt{2+(4-\sqrt{2}\cos\theta)^2+(\sqrt{2}\sin\theta)^2}=\sqrt{20-8\sqrt{2}\cos\theta}$（其中$\theta=\angle BAP_1\in R$）

$PD=\sqrt{2+(4-\sqrt{2}\sin\theta)^2+(\sqrt{2}\cos\theta)^2}=\sqrt{20-8\sqrt{2}\sin\theta}$



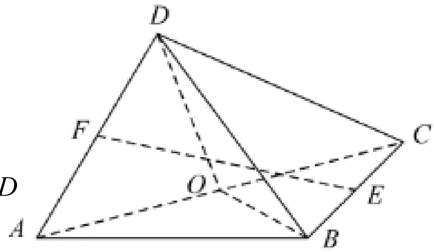


$\therefore\cos\angle BPD=\dfrac{40-8\sqrt{2}\cos\theta-8\sqrt{2}\sin\theta-32}{2\sqrt{20-8\sqrt{2}\cos\theta}\cdot\sqrt{20-8\sqrt{2}\sin\theta}}$

$=\dfrac{1-\sqrt{2}\sin\theta-\sqrt{2}\cos\theta}{\sqrt{25-10\sqrt{2}\cos\theta-10\sqrt{2}\sin\theta+8\sin\theta\cos\theta}}$

$=\dfrac{1-t}{\sqrt{2t^2-10t+21}}$ 记为$f(t)$(设$t=\sqrt{2}\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta=2\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})\in[-2,2]$,

则$4\sin\theta\cos\theta=t^2-2$),则$f(t)\in[-\dfrac{1}{3},\dfrac{3}{7}]$



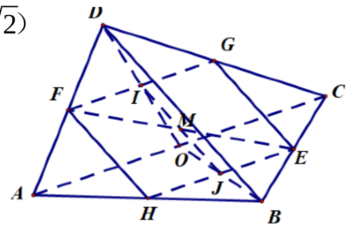
（202101 学考）18. 如图，在三棱锥$D-ABC$中，$AB=BC=CD=DA$，$\angle ABC=90°,E,F,O$分别为棱BC,DA,AC的中点，记直线EF与平面BOD所成角为θ，则θ的取值范围是（　C　）

A. $(0,\dfrac{\pi}{4})$　　B. $(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3})$　　C. $(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})$　　D. $(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2})$

key:由已知得：$DO\perp AC,BO\perp AC,\therefore AC\perp$平面$BOD$,

G,H分别为CD,AB的中点，则$\tan\theta=\dfrac{FF}{GE}$(令$DA=1,\angle ABC=90°$,则$AC=\sqrt{2}$)

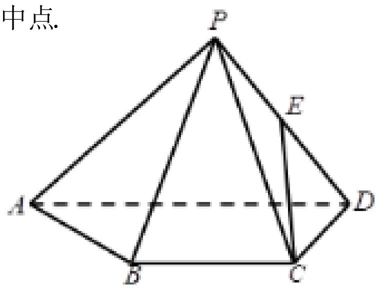
$=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sin\dfrac{\angle DOB}{2}}>1,\therefore\theta\in(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})$



(17高考）如图，已知四棱锥$P-ABCD$,$\triangle PAD$是以AD为斜边的等腰直角三角形，$BC//AD,CD\perp AD,PC=AD=2DC=2CB,E$为$PD$的中点.

（Ⅰ）证明：$CE//$平面PAB;

（Ⅱ）求直线CE与平面PBC所成角的正弦值.$\dfrac{\sqrt{2}}{8}$



（Ⅰ）$key1: EF\underset{=}{//}BC$

$key2: CE//PQ$

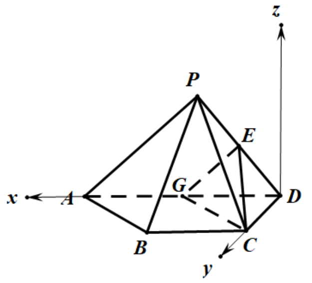
$key3$: 平面$CEG//$平面PAB

（Ⅱ）建系，如图，令$BC=1$,

则$A(2,0,0),B(1,1,0),C(0,1,0),D(0,0,0)$，设$P(a,b,c)(c>0)$

则$\begin{cases}|\overrightarrow{PA}|=\sqrt{(a-2)^2+b^2+c^2}=|\overrightarrow{PD}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\\ \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}=a^2-2a+b^2+c^2=0\\ |\overrightarrow{PC}|=\sqrt{a^2+(b-1)^2+c^2}=2\end{cases}$　　解得$a=1,b=-\dfrac{1}{2},c=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\therefore E(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{4},\dfrac{\sqrt{3}}{4})$

设平面PBC的法向量$\vec{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=-x=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CP}=x-\dfrac{3}{2}y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z=0\end{cases}$,令$y=1$得$\vec{n}=(0,1,\sqrt{3})$



$$\therefore \sin\theta = \frac{|\overrightarrow{CE}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{CE}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{|(\frac{1}{2},-\frac{5}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})\cdot(0,1,\sqrt{3})|}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{25}{16}+\frac{3}{16}}\cdot\sqrt{1+3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}\cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$ 即为所求的