2023-24（下）模拟（22）

2024-03-04

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1.已知 z_1, z_2 是方程 $x^2-2x+2=0$ 的两个复根，则 $\left|z_1^2-z_2^2\right|=$（　　）A. 2　　B. 4　　C. $2i$　　D. $4i$

2.M 是双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$ 上一点，点 F_1, F_2 分别是双曲线左右焦点，若 $\left|MF_1\right|=5$，则 $\left|MF_2\right|=$（　　）

A. 9 或 1　　B. 1　　C. 9　　D. 9 或 2

3.设 A，B 是一个随机试验中的两个事件，则下列结论正确的是（　　）

A. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$　B. $P(A)+P(B)\le 1$　C. $P(A\cap B)=P(A)P(B)$　D. 若 $A\subseteq B$，则 $P(A)\le P(B)$

4.中国南北朝时期的著作《孙子算经》中，对同余除法有较深的研究．设 $a,b,m(m>0)$ 为整数，若 a 和 b 被 m 除得的余数相同，则称 a 和 b 对模 m 同余，记为 $a\equiv b(\bmod m)$. 若 $a=C_{20}^0+C_{20}^1\times 3+C_{20}^2\times 3^2+\cdots+C_{20}^{20}\times 3^{20}$，$a\equiv b(\bmod 5)$，则 b 的值可以是（　）A. 2004　B. 2005　C. 2025　D. 2026

5.已知平面向量 $\vec{a},\vec{b}$ 不共线，$|\vec{a}|=1, \vec{a}\cdot\vec{b}=1$，记 $\vec{b}$ 与 $2\vec{a}+\vec{b}$ 的夹角是 θ，则 θ 最大时，$|\vec{a}-\vec{b}|=$（　）

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

6.已知三个函数 $f(x)=2^x+x-2$，$g(x)=x^3-8$，$h(x)=\log_2 x+x-2$ 的零点依次为 a，b，c，则 $a+b+c=$（　）

A. 6　　B. 5　　C. 4　　D. 3

7.等比数列 $\{a_n\}$ 中，首项 $a_1>0$，$a_1+a_2+a_3=a_1\cdot a_2\cdot a_3$，则（　）

A. $a_1\cdot a_3>2a_2$　　B. $a_1\cdot a_3<2a_2$　　C. $a_1+a_3>a_2^2$　　D. $a_1+a_3<a_2^2$

8.设 $\alpha,\beta\in R$，且 $\dfrac{3}{2+\sin 2\alpha}+\dfrac{2021}{2+\sin\beta}=2024$，则 $\tan(\alpha-\beta)=$（　）A. -1　B. 1　C. $\sqrt{3}$　D. $-\sqrt{3}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分.

9.已知复数 $z=2+\sqrt{x}\cdot i(x>0)$，设 $y=z\cdot\bar{z}$，当 x 取大于 0 的一组实数 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 时,所得的 y 值依次为另一组实数 y_1,y_2,y_3,y_4,y_5，则（　　）

A. 两组数据的中位数相同　B. 两组数据的极差相同　C. 两组数据的方差相同　D. 两组数据的均值相同

10.已知 P 是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的中心，过点 P 的直线 l 与该正方体的表面交于 E，F 两点．下列叙述正确的有（　　）A. 点 E，F 到正方体 6 个表面的距离分别为 e_i，$f_i(i=1,2,6)$，则 $\sum_{i=1}^{6}(e_i+f_i)$ 为定值．

B. 线段 EF 在正方体 6 个表面的投影长度为 $t_i(i=1,2,\cdots,6)$，则 $\sum_{i=1}^{6}t_i$ 为定值．

C. 正方体 8 个顶点到直线 l 的距离分别为 $d_i(i=1,2,\ldots,8)$，则 $\sum_{i=1}^{8}d_i$ 为定值．

D. 直线 l 与正方体 12 条棱所成的夹角的 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,12)$，则 $\sum_{i=1}^{12}\cos^2\alpha_i$ 为定值.

11.已知定义在 $[0,1]$ 上的函数 $f(x)$ 满足：$\forall x\in[0,1]$，都有 $f(1-x)+f(x)=1$，且 $f(\frac{x}{3})=\frac{1}{2}f(x)$，$f(0)=0$，当 $0\le x_1<x_2\le 1$ 时，有 $f(x_1)\le f(x_2)$，则（　　）A. $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$　B. $f(1)=\frac{1}{2}$　C. $f(\frac{1}{3})=\frac{1}{2}$　D. $f(\frac{\ln 3}{3})=\frac{1}{2}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12.设集合 $A=\{(m_1,m_2,m_3)\,|\,m_i\in\{-2,0,2\},i\in\{1,2,3\}\}$，则集合 A 满足条件："$2\le|m_1|+|m_2|+|m_3|\le 5$"的元素个数为__________.

13.若曲线 $\frac{x^2}{4}+\frac{y|y|}{9}=1$ 和曲线 $kx+y-3=0$ 有三个交点，则 k 的取值范围是__________.

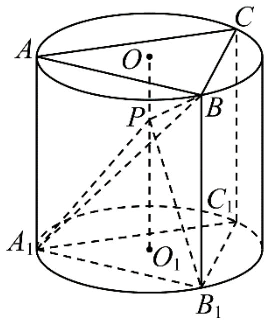
14.小王准备在单位附近的某小区买房，若小王看中的高层住宅总共有 n 层 $(20\le n\le 30,n\in N^*)$，设第 1 层的"环境满意度"为 1，且第 k 层 $(2\le k\le n,k\in N^*)$ 比第 $k-1$ 层的"环境满意度"多出 $3k^2-3k+1$; 又已知小王有"恐高症"，设第 1 层的"高层恐惧度"为 1，且第 k 层 $(2\le k\le n,k\in N^*)$ 比第 $k-1$ 层的"高层恐惧度"高出 $\frac{1}{3}$ 倍.在上述条件下，若第 k 层"环境满意度"与"高层恐惧度"分别为 a_k，b_k，记小王对第 k 层"购买满意度"为 c_k，且 $c_k=\frac{a_k}{b_k}$，则小王最想买第_________层住宅.(参考公式及数据：$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 其中 $n\in N^*$，$\ln 2\approx 0.6931$，$\ln 3\approx 1.0986$，$\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\approx 1.1006$)

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.已知函数 $f(x)=ax^2-x-\ln x$，其中 $a\in R$.（1）若 $a=1$，求函数的极值

（2）是否存在实数 a，使得函数 $y=f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调？若存在，求出 a 的取值范围；若不存在，请说明理由；

16．如图，圆柱上，下底面圆的圆心分别为 O，O_1，该圆柱的轴截面为正方形，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的三条侧棱均为圆柱的母线，且 $AB=AC=\frac{\sqrt{30}}{6}OO_1$，点 P 在轴 OO_1 上运动．



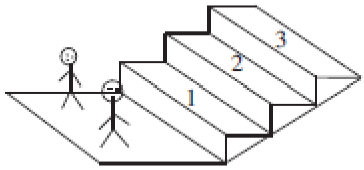
（1）证明：不论 P 在何处，总有 $BC\perp PA_1$；

（2）当 P 为 OO_1 的中点时，求平面 A_1PB 与平面 B_1PB 夹角的余弦值．

17.如图，小华和小明两个小伙伴在一起做游戏，他们通过划拳（剪刀、石头、布）比赛决胜谁首先登上第 3 个台阶，他们规定从平地开始，每次划拳赢的一方登上一级台阶，输的一方原地不动，平局时两个人都上一级台阶，如果一方连续两次赢，那么他将额外获得一次上一级台阶的奖励，除非已经登上第 3 个台阶，当有任何一方登上第 3 个台阶时，游戏结束，记此时两个小伙伴划拳的次数为 X.

（1）求游戏结束时小华在第 2 个台阶的概率；

（2）求 X 的分布列和数学期望.



18．已知椭圆$C_1:\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$与椭圆$C_2$有相同的离心率，椭圆$C_2$焦点在$y$轴上且经过点$(1,\sqrt{2})$.

（1）求椭圆C_2的标准方程；（2）设A为椭圆C_1的上顶点，经过原点的直线 l交椭圆C_2于P、Q，直线 AP、AQ与椭圆C_1的另一个交点分别为点M和N，若$\triangle AMN$与$\triangle APQ$的面积分别为S_1和S_2，求$\dfrac{S_1}{S_2}$的取值范围.

19.设正整数$n\geq 3$，有穷数列$\{a_n\}$满足$a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，且$a_1+a_2+\cdots+a_n=n$，定义积值$S=a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n$.

（1）若$n=3$时，数列$\{\dfrac{1}{2},1,\dfrac{3}{2}\}$与数列$\{\dfrac{1}{6},\dfrac{2}{3},\dfrac{13}{6}\}$的$S$的值分别为$S_1,S_2$. ①试比较$S_1$与$S_2$的大小关系；

②若数列$\{a_n\}$的S满足$\min\{S_1,S_2\}<S<\max\{S_1,S_2\}$，请写出一个满足条件的$\{a_n\}$；

（2）若$n=4$时，数列$\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$存在$i,j\in\{1,2,3,4\}$，使得$a_i<1<a_j$，将a_i,a_j分别调整为$a_i'=a_i+a_j-1$，$a_j'=1$，其它 2 个$a_k(k\neq i,j)$，令$a_k'=a_k$.数列$\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$调整前后的积值分别为S,S'，写出S,S'的大小关系并给出证明；

（3）求$S=a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n$的最大值，并确定$S$取最大值时$a_1,a_2,\cdots,a_n$所满足的条件，并进行证明.

2023-24（下）模拟（22）

2024-03-04

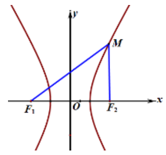
解答

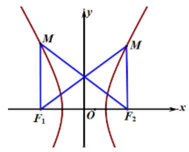
一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1.已知 z_1,z_2 是方程 $x^2-2x+2=0$ 的两个复根，则 $\left|z_1^2-z_2^2\right|=$（ B）A. 2　B. 4　C. $2i$　D. $4i$

2.M 是双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$ 上一点，点 F_1,F_2 分别是双曲线左右焦点，若 $\left|MF_1\right|=5$，则 $\left|MF_2\right|=$（B　）

A. 9 或 1　B. 1　C. 9　D. 9 或 2





$key:$ 若 M 在右支上，则 $5=|MF_1|\geq a+c=2+4=6$

$\therefore M$ 在左支上，$\therefore |MF_2|=|MF_1|+2a=9$，选 C

3.设 A，B 是一个随机试验中的两个事件，则下列结论正确的是（　D）

A. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$　B. $P(A)+P(B)\leq 1$　C. $P(A\cap B)=P(A)P(B)$　D. 若 $A\subseteq B$，则 $P(A)\leq P(B)$

4.中国南北朝时期的著作《孙子算经》中，对同余除法有较深的研究．设 $a,b,m(m>0)$ 为整数，若 a 和 b 被 m 除得的余数相同，则称 a 和 b 对模 m 同余，记为 $a\equiv b(\bmod m)$. 若 $a=C_{20}^0+C_{20}^1\times 3+C_{20}^2\times 3^2+\cdots+C_{20}^{20}\times 3^{20}$，$a\equiv b(\bmod 5)$，则 b 的值可以是（　D）A. 2004B. 2005　C. 2025　D. 2026

5.已知平面向量 $\vec{a},\vec{b}$ 不共线，$|\vec{a}|=1,\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，记 $\vec{b}$ 与 $2\vec{a}+\vec{b}$ 的夹角是 θ，则 θ 最大时，$|\vec{a}-\vec{b}|=$（　C）

A. 1　B. $\sqrt{2}$　C. $\sqrt{3}$　D. 2

6.已知三个函数 $f(x)=2^x+x-2$，$g(x)=x^3-8$，$h(x)=\log_2 x+x-2$ 的零点依次为 a，b，c，则 $a+b+c=$（C　）

A. 6　B. 5　C. 4　D. 3

7.等比数列 $\{a_n\}$ 中，首项 $a_1>0$，$a_1+a_2+a_3=a_1\cdot a_2\cdot a_3$，则（C　）

A. $a_1\cdot a_3>2a_2$　B. $a_1\cdot a_3<2a_2$　C. $a_1+a_3>a_2^2$　D. $a_1+a_3<a_2^2$

$key:a_1+a_2+a_3=a_1(1+q+q^2)=a_2^3=a_1^3q^3$ 得 $a_1^2=\dfrac{1+q+q^2}{q^3}>0$ 得 $q>0,\therefore a_2=a_1q=\sqrt{1+q+\dfrac{1}{q}}\geq\sqrt{3}$

$\therefore a_1+a_3-a_2^2=a_2^3-a_2-a_2^2=a_2(a_2^2-a_2-1)>0$

8.设 $\alpha,\beta\in R$，且 $\dfrac{3}{2+\sin 2\alpha}+\dfrac{2021}{2+\sin\beta}=2024$，则 $\tan(\alpha-\beta)=$（B　）A. -1　B. 1　C. $\sqrt{3}$　D. $-\sqrt{3}$

$key:\dfrac{3}{2+\sin 2\alpha}+\dfrac{2021}{2+\sin\beta}=2024\Leftrightarrow 0=3-\dfrac{3}{2+\sin 2\alpha}+2021-\dfrac{2021}{2+\sin\beta}=3\cdot\dfrac{1+\sin 2\alpha}{2+\sin 2\alpha}+2021\cdot\dfrac{1+\sin\beta}{2+\sin\beta}$

$\because\dfrac{1+\sin 2\alpha}{2+\sin 2\alpha}\geq 0,\dfrac{1+\sin\beta}{2+\sin\beta}\geq 0,\therefore 1+\sin 2\alpha=0$，且 $1+\sin\beta=0,\therefore 2\alpha=2k_1\pi-\dfrac{\pi}{2}$，且 $\beta=2k_2\pi-\dfrac{\pi}{2},k_1,k_2\in Z,$

$\therefore\tan(\alpha-\beta)=\tan(k_1\pi-\dfrac{\pi}{4}-2k_2\pi+\dfrac{\pi}{2})=1$

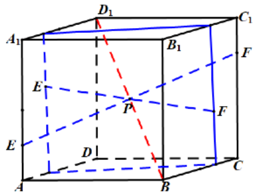
二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分.

9.已知复数 $z=2+\sqrt{x}\cdot i(x>0)$，设 $y=z\cdot\overline{z}$，当 x 取大于 0 的一组实数 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 时,所得的 y 值依次为另一组实数 y_1,y_2,y_3,y_4,y_5，则（　BC）

A. 两组数据的中位数相同　B. 两组数据的极差相同　C. 两组数据的方差相同　D. 两组数据的均值相同

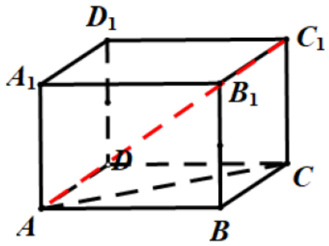
10.已知 P 是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的中心，过点 P 的直线 l 与该正方体的表面交于 E，F 两点．下列叙述正确的有(AD)A. 点 E，F 到正方体 6 个表面的距离分别为 e_i，$f_i(i=1,2,6)$，则 $\sum_{i=1}^{6}(e_i+f_i)$ 为定值．

B. 线段 EF 在正方体 6 个表面的投影长度为 $t_i(i=1,2,\cdots,6)$，则 $\sum_{i=1}^{6}t_i$ 为定值．



C. 正方体 8 个顶点到直线 l 的距离分别为 $d_i(i=1,2,\ldots,8)$，则 $\sum_{i=1}^{8}d_i$ 为定值．

D. 直线 l 与正方体 12 条棱所成的夹角的 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,12)$，则 $\sum_{i=1}^{12}\cos^2\alpha_i$ 为定值．



key:设正方体的棱长为1,

A:如图,$\sum_{i=1}^{6}(e_i+f_i)=0+0+1+1+1+1=4$

B:如图，EF在面$ABCD$,面$A_1B_1C_1D_1$上的投影长度为E_1F_1,E_2F_2之和不为定值，

$\therefore\sum_{i=1}^{6}t_i$不是定值，$B$错，$C$也错；

D:由长方体体对角线性质:$\cos^2\angle C_1AB+\cos^2\angle C_1AD+\cos^2\angle C_1AA_1=\dfrac{AB^2+AD^2+AA_1^2}{AC_1^2}=1,\therefore D$对

11.已知定义在 $[0,1]$ 上的函数 $f(x)$ 满足：$\forall x\in[0,1]$，都有 $f(1-x)+f(x)=1$，且 $f(\frac{x}{3})=\frac{1}{2}f(x)$，$f(0)=0$，当 $0\le x_1<x_2\le 1$时，有 $f(x_1)\le f(x_2)$，则（ACD　）A. $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$　B. $f(1)=\frac{1}{2}$　C. $f(\frac{1}{3})=\frac{1}{2}$　D. $f(\frac{\ln 3}{3})=\frac{1}{2}$

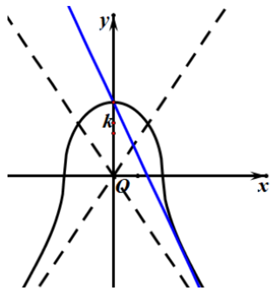
key:由$f(1-x)+f(x)=1$得$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2},A$对；$f(1)+f(0)=f(1)=1,B$错；$f(\frac{1}{3})=\frac{1}{2}f(1)=\frac{1}{2},C$对；

$\because\frac{1}{2}>\frac{1}{3}\ln 3>\frac{1}{3},\therefore f(\frac{\ln 3}{3})=\frac{1}{2},D$对

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12.设集合 $A=\{(m_1,m_2,m_3)\mid m_i\in\{-2,0,2\},i\in\{1,2,3\}\}$，则集合 A 满足条件：“$2\le|m_1|+|m_2|+|m_3|\le 5$”的元素个数为___________. $key:(|m_1|+|m_2|+|m_3|=2)C_3^1\cdot 2+(|m_1|+|m_2|+|m_3|=4)C_3^2\cdot 2^2=18$

13.若曲线 $\frac{x^2}{4}+\frac{y|y|}{9}=1$和曲线$kx+y-3=0$ 有三个交点，则 k 的取值范围是__________.



$key:\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1(y<0)\\ kx+y-3=0\end{cases}$消去$y$得:$(9-4k^2)x^2+24kx-72=0$

$\therefore 9-4k^2\ne 0,$且$\Delta=32\times 9(9-2k^2)=0$得$k=\pm\dfrac{3}{\sqrt{2}}$,如图,$\therefore k\in(-\frac{3\sqrt{2}}{2},-\frac{3}{2})\cup(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2})$

14.小王准备在单位附近的某小区买房，若小王看中的高层住宅总共有 n 层 $(20 \le n \le 30, n \in N^*)$，设第 1 层的“环境满意度”为 1，且第 k 层 $(2 \le k \le n, k \in N^*)$ 比第 $k-1$ 层的“环境满意度”多出 $3k^2-3k+1$; 又已知小王有“恐高症”，设第 1 层的“高层恐惧度”为 1，且第 k 层 $(2 \le k \le n, k \in N^*)$ 比第 $k-1$ 层的“高层恐惧度”高出 $\frac{1}{3}$ 倍.在上述条件下，若第 k 层“环境满意度”与“高层恐惧度”分别为 a_k，b_k，记小王对第 k 层“购买满意度”为 c_k，且 $c_k=\frac{a_k}{b_k}$，则小王最想买第___10_______层住宅.(参考公式及数据：$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 其中 $n \in N^*$，$\ln 2 \approx 0.6931$，$\ln 3 \approx 1.0986$，$\sqrt[3]{\frac{4}{3}} \approx 1.1006$)

key:由已知得$a_k=a_{k-1}+3k^2-3k+1, b_k=\frac{4}{3}b_{k-1}$

$\therefore a_k=a_k-a_{k-1}+\cdots+a_2-a_1+a_1=3(k^2+\cdots+2^2)-3(k+\cdots+2)+k-1+1=k^3, b_k=(\frac{4}{3})^{k-1}, \therefore c_k=(k^3-k+1)\cdot(\frac{3}{4})^{k-1}$

$\therefore \frac{c_{k+1}}{c_k}=\frac{(k+1)^3}{k^3}\cdot\frac{3}{4}>1 \Leftrightarrow k<\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{4}{3}}-1}\approx 9.9,$

$\therefore c_1<c_2<\cdots<c_9<c_{10}>c_{11}>\cdots, \therefore c_{10}$最大

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.已知函数 $f(x)=ax^2-x-\ln x$，其中 $a \in R$.（1）若 $a=1$，求函数的极值

(2) 是否存在实数 a，使得函数 $y=f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调？若存在，求出 a 的取值范围；若不存在，请说明理由；

解：(1) 函数的定义域为 $(0,+\infty)$，当 $a=1$ 时，$f'(x)=2x-1-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-x-1}{x}=\frac{(2x+1)(x-1)}{x}$

当 $x \in (0,1), f'(x)<0$，函数单调递减，当 $x \in (1,+\infty), f'(x)>0$，函数单调递增，

$\therefore x=1$ 是函数的极小值点，函数的极小值为 $f(1)=1-1-0=0$

(2) 若函数 $y=f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调递增，

则 $f'(x)=2ax-1-\frac{1}{x}\geqslant 0$ 在 $(0,1)$ 恒成立.即 $a\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)$在 $(0,1)$ 恒成立.

因为$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]\in(1,+\infty)$

所以使得函数 $y=f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调递增的 a 不存在，

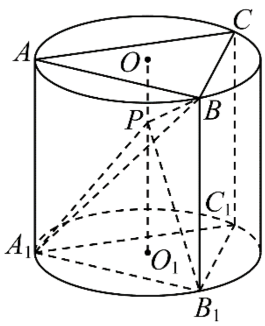
若函数 $y=f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调递减,则 $f'(x)=2ax-1-\frac{1}{x}\leqslant 0$ 在 $(0,1)$ 恒成立.

即 $a\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)$在 $(0,1)$ 恒成立.即 $a\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]$在 $(0,1)$ 恒成立.

又 $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]\in(1,+\infty)$,所以 $a\leqslant1$ 时，函数 $y=f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调递减.

综上，当 $a\leqslant1$ 时，使得函数 $y=f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调递减.

16．如图，圆柱上，下底面圆的圆心分别为 O，O_1，该圆柱的轴截面为正方形，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的三条侧棱均为圆柱的母线，且 $AB=AC=\frac{\sqrt{30}}{6}OO_1$，点 P 在轴 OO_1 上运动.



（1）证明：不论 P 在何处，总有 $BC\perp PA_1$；

（2）当 P 为 OO_1 的中点时，求平面 A_1PB 与平面 B_1PB 夹角的余弦值.

【答案】(1) 证明：连接 AO 并延长，交 BC 于 M，交圆柱侧面于 N.

因为 $AB=AC$， $OB=OC$， $AO=AO$，所以 $\triangle AOB\cong\triangle AOC$，所以 $\angle BAM=\angle CAM$，

因为 $AB=AC$， $AM=AM$，所以 $\triangle ABM\cong\triangle ACM$，所以 $MB=MC$，即 M 为 BC 中点，

所以 $OA\perp BC$.

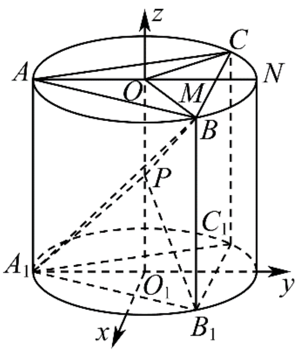
又在圆柱 OO_1 中， $AA_1\perp$ 平面 ABC， $BC\subset$ 平面 ABC，

所以 $AA_1\perp BC$，因为 $AO\cap AA_1=A$， $AO,AA_1\subset$ 平面 AOO_1A_1，

所以 $BC\perp$ 平面 AOO_1A_1.

因为不论 P 在何处，总有 $PA_1\subset$ 平面 AOO_1A_1，

所以 $BC\perp PA_1$.



(2) 解：设 $OO_1=AA_1=AN=a(a>0)$，则 $AB=AC=\frac{\sqrt{30}}{6}a$.

在 $\triangle ABC$ 中， $AM=AC\cos\angle CAM=AC\times\frac{AC}{AN}=\frac{5}{6}a$，

则 $OM=\frac{1}{3}a$. 所以 $CM=BM=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{30}}{6}a\right)^2-\left(\frac{5}{6}a\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{6}a$.

如图，以 O_1 为原点，建立空间直角坐标系 O_1-xyz，其中 $B_1C_1//x$ 轴，y 轴是 B_1C_1 的垂直平分线，

则 $A_1\left(0,-\frac{1}{2}a,0\right)$， $B_1(\frac{\sqrt{5}}{6}a,\frac{1}{3}a,0)$， $B\left(\frac{\sqrt{5}}{6}a,\frac{1}{3}a,a\right)$， $P\left(0,0,\frac{1}{2}a\right)$，

所以 $\overrightarrow{A_1B}=(\frac{\sqrt{5}}{6}a,\frac{5}{6}a,a)$， $\overrightarrow{A_1P}=(0,\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}a)$， $\overrightarrow{B_1B}=(0,0,a)$， $\overrightarrow{B_1P}=(-\frac{\sqrt{5}}{6}a,-\frac{1}{3}a,\frac{1}{2}a)$.

设平面 A_1PB 的一个法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\frac{\sqrt{5}}{6}ax+\frac{5}{6}ay+az=0\frac{1}{2}ay+\frac{1}{2}az=0\end{cases}$，取 $x=1$，得 $\vec{m}=(1,\sqrt{5},-\sqrt{5})$.

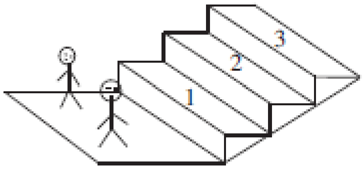
设平面 B_1PB 的一个法向量为 $\vec{n}=(b,c,d)$，

则 $\begin{cases}ad=0-\frac{\sqrt{5}}{6}ab-\frac{1}{3}ac+\frac{1}{2}ad=0\end{cases}$，取 $b=2$，得 $\vec{n}=(2,-\sqrt{5},0)$.

设平面 A_1PB 与平面 B_1PB 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=|\cos<\vec{m},\vec{n}>|=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{\sqrt{11}}{11}$，

所以平面 A_1PB 与面 B_1PB 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{11}}{11}$.

17.如图，小华和小明两个小伙伴在一起做游戏，他们通过划拳（剪刀、石头、布）比他们规定从平地开始，每次划拳赢的一方登上一级台阶，输的一方原地不动，平局方连续两次赢，那么他将额外获得一次上一级台阶的奖励，除非已经登上第 3 个台阶时，游戏结束，记此时两个小伙伴划拳的次数为 X.



（1）求游戏结束时小华在第 2 个台阶的概率；（2）求 X 的分布列和数学期望.

解：(1) 设第i次划拳小华赢为事件A_i，平为B_i，输为C_i，则$P(A_i)=P(B_i)=P(C_i)=\frac{1}{3}$，

所以游戏结束时小华在第2台阶，小明在第3台阶，

即$A_1B_2C_3C_4+A_1C_2B_3C_4+A_1C_2A_3C_4C_5+B_1A_2C_3C_4+B_1C_2A_3C_4+B_1B_2C_3+B_1C_2B_3$
$+C_1B_2B_3+C_1B_2A_3C_4+C_1A_2C_3A_4C_5+C_1A_2C_3B_4+C_1A_2B_3C_4$

$\therefore$ 所求概率为 $\frac{3}{3^3}+\frac{7}{3^4}+\frac{2}{3^5}=\frac{50}{243}$

(2) 依题可知 X 的可能取值为 2、3、4、5，

$P(X=5)=2P(A_1)P(C_2)P(A_3)P(C_4)=2\times(\frac{1}{3})^4=\frac{2}{81}$，

$P(X=2)=2P(A_1)P(A_2)=2\times(\frac{1}{3})^2=\frac{2}{9}$，

$P(X=3)=2P(A_1)P(B_2)P(A_3)+2P(B_1)P(A_2)P(A_3)+P(B_1)P(B_2)P(B_3)$

$+2P(A_1)P(B_2)P(B_3)+2P(B_1)P(A_2)P(B_3)+2P(B_1)P(B_2)P(A_3)\ +2P(C_1)P(A_2)P(A_3)=\frac{13}{27}$

$P(X=4)=1-P(X=5)-P(X=2)-P(X=3)=\frac{22}{81}$，

所以 X 的分布列为：

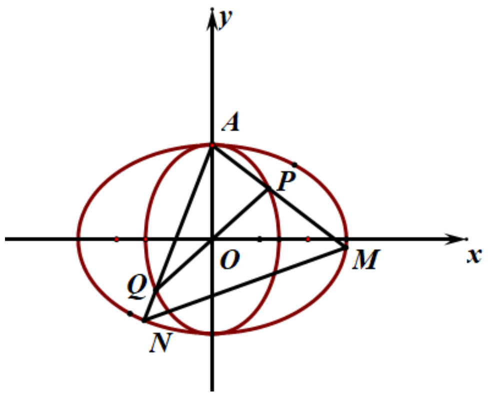
X	2	3	4	5
P	$\frac{2}{9}$	$\frac{13}{27}$	$\frac{22}{81}$	$\frac{2}{81}$

所以 X 的数学期望为：$E(X)=2\times\frac{2}{9}+3\times\frac{13}{27}+4\times\frac{22}{81}+5\times\frac{2}{81}=\frac{251}{81}$.

18．已知椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 与椭圆 C_2 有相同的离心率，椭圆 C_2 焦点在 y 轴上且经过点 $(1,\sqrt{2})$.

（1）求椭圆 C_2 的标准方程；（2）设 A 为椭圆 C_1 的上顶点，经过原点的直线 l 交椭圆 C_2 于 P、Q，直线 AP、AQ 与椭圆 C_1 的另一个交点分别为点 M 和 N，若 $\triangle AMN$ 与 $\triangle APQ$ 的面积分别为 S_1 和 S_2，求 $\dfrac{S_1}{S_2}$ 的取值范围.

解：（1）由已知得 $\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}\\ \dfrac{2}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1\end{cases}$ 得 $c=b=\sqrt{2},a=2,\therefore$ 椭圆 C_2 的标准方程为 $\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{x^2}{2}=1$



（2）设AP、AQ的斜率分别为k$_1$、k_2，

则 $k_1k_2=\dfrac{y_P-2}{x_P}\cdot\dfrac{-y_P-2}{-x_P}=\dfrac{4-y_P^2}{-x_P^2}=-2$

将 $l_{AP}:y=k_1x+2$ 代入 C_2 方程得 $(k_1^2+2)x^2+4k_1x=0,\therefore x_P=\dfrac{-4k_1}{k_1^2+2}$

将 $l_{AP}:y=k_1x+2$ 代入 C_1 方程得 $(1+2k_1^2)x^2+8k_1x=0,\therefore x_M=-\dfrac{8k_1}{1+2k_1^2}$

$\therefore\dfrac{|AM|}{|AP|}=|\dfrac{x_M}{x_P}|=\dfrac{2(k_1^2+2)}{2k_1^2+1}$，同理 $\dfrac{|AN|}{|AQ|}=\dfrac{2(k_2^2+2)}{2k_2^2+1}=\dfrac{4(k_1^2+2)}{k_1^2+8}$

$\therefore\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{|AM|}{|AP|}\cdot\dfrac{|AN|}{|AQ|}=\dfrac{8(k_1^2+2)^2}{(2k_1^2+1)(k_1^2+8)}$（令 $t=k_1^2+2>2$）

$=\dfrac{8}{-18(\frac{1}{t}-\frac{1}{4})^2+\frac{25}{8}}\in[\dfrac{16}{25},4)$ 即为所求的

19.设正整数 $n\geq 3$，有穷数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=n$，定义积值 $S=a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n$.

（1）若 $n=3$ 时，数列 $\{\dfrac{1}{2},1,\dfrac{3}{2}\}$ 与数列 $\{\dfrac{1}{6},\dfrac{2}{3},\dfrac{13}{6}\}$ 的 S 的值分别为 S_1,S_2. ①试比较 S_1 与 S_2 的大小关系；

②若数列 $\{a_n\}$ 的 S 满足 $\min\{S_1,S_2\}<S<\max\{S_1,S_2\}$，请写出一个满足条件的 $\{a_n\}$；

（2）若 $n=4$ 时，数列 $\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ 存在 $i,j\in\{1,2,3,4\}$，使得 $a_i<1<a_j$，将 a_i,a_j 分别调整为 $a_i'=a_i+a_j-1$，$a_j'=1$，其它 2 个 $a_k(k\neq i,j)$，令 $a_k'=a_k$. 数列 $\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ 调整前后的积值分别为 S,S'，写出 S,S' 的大小关系并给出证明；

（3）求 $S=a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n$ 的最大值，并确定 S 取最大值时 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 所满足的条件，并进行证明.

(1) 解：$S_1=\dfrac{3}{4},S_2=\dfrac{13}{54}$，①$S_1>S_2$；

② $\min\{S_1,S_2\}=\dfrac{13}{54}<S<\max\{S_1,S_2\}=\dfrac{3}{4}$，一个 $\{a_n\}$ 为：$\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},2$,

(2) 解：由已知得 $a_i'+a_j'+a_{k_1}'+a_{k_2}'=a_1+a_2+a_3+a_4=4(a_i>0,i=1,2,3,4)$

不妨设 $a_i<1<a_2$，则 $S=a_1a_2a_3a_4,S'=(a_1+a_2-1)\cdot 1\cdot a_3a_4$

$\therefore S-S'=a_3a_4(a_1a_2-a_1-a_2+1)=a_3a_4(a_1-1)(a_2-1)<0,\therefore S>S'$

（3）解：由已知得$:a_1+a_2+\cdots+a_n=n(a_i>0,i=1,2,\cdots,n)$

则$S=a_1a_2\cdots a_n\le(\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n})^n=1$（当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n=1$时，取$=$）

$\therefore S$的最大值为1, 且$a_1=a_2=\cdots=a_n=1$