2023-24（下）模拟（15）

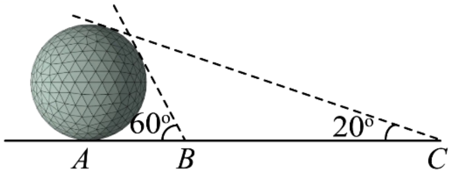
2024-02-20

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若 $iz=(1-2i)^2$ ，则 $z=$（　　）A. $4+3i$　B. $4-3i$　C. $-4+3i$　D. $-4-3i$

2. 已知 $(x^3+\frac{2}{x^2})^n$ 的展开式中各项系数和为 243，则展开式中常数项为（　　）A. 60　B. 80　C. 100　D. 120

3. 古代数学家刘徽编撰的《重差》是中国最早的一部测量学著作，现据《重差》测量一个球体建筑物的高度，如图，已知点 A 是球体建筑物与水平地面的接触点（切点），地面上 B，C 两点与点 A 在同一条直线上，且在点 A 的同侧．若在 B，C 处分别测得球体建筑物的最大仰角为 60°和 20°，且 $BC=100$m，则该球体建筑物的高度约为（$\cos 10°\approx 0.985$）（　　）　A. 58.60m　B. 56.74m　C. 50.76m　D. 49.25m



4. 在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$．若 $\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{DF}+n\overrightarrow{AE}$，则 $m+n=$（　　）

A. $\frac{1}{2}$　B. $\frac{3}{4}$　C. $\frac{5}{6}$　D. $\frac{4}{3}$

5. 记函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{4})(\omega>0)$ 的最小正周期为 T．若 $\frac{\pi}{2}<T<\pi$，且 $f(x)\le|f(\frac{\pi}{3})|$，则 $\omega=$（　　）

A. $\frac{3}{4}$　B. $\frac{9}{4}$　C. $\frac{15}{4}$　D. $\frac{27}{4}$

6.已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，$y=f(x)+e^x$ 是偶函数，$y=f(x)-3e^x$ 是奇函数，则 $f(x)$ 的最小值为（　）

A. e　B. $2\sqrt{2}$　C. $2\sqrt{3}$　D. $2e$

7. 已知 F_1,F_2 分别是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，点 P 在双曲线上，$PF_1\perp PF_2$，圆 $O:x^2+y^2=\frac{9}{4}(a^2+b^2)$，直线 PF_1 与圆 O 相交于 A，B 两点，直线 PF_2 与圆 O 相交于 M，N 两点．若四边形 $AMBN$ 的面积为 $9b^2$，则 C 的离心率为（　　）A $\frac{5}{4}$　B. $\frac{8}{5}$　C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　D. $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

8. 已知 $a=e^{0.02},b=1.01^2,c=\ln(2.02)$，则（　）A. $a>b>c$　B. $b>a>c$　C. $a>c>b$　D. $b>c>a$

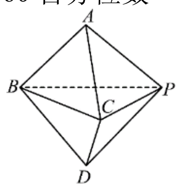
二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 已知甲种杂交水稻近五年的产量（单位：t/hm^2）数据为：9.8，10.0，10.0，10.0，10.2，乙种杂交水稻近五年的产量（单位：t/hm^2）数据为：9.6，9.7，10.0，10.2，10.5，则（　）

A. 甲种的样本极差小于乙种的样本极差　B. 甲种的样本平均数等于乙种的样本平均数

C. 甲种的样本方差大于乙种的样本方差　D. 甲种的样本 60 百分位数小于乙种的样本 60 百分位数

10. 如图，正三棱锥 A-PBC 和正三棱锥 D-PBC 的侧棱长均为 $\sqrt{2}$，$BC=2$．若将正三棱锥 A-PBC 绕 BC 旋转，使得点 A，P 分别旋转至点 A'，P' 处，且 A',B,C,D



四点共面，点 A'，D 分别位于 BC 两侧，则（　）A. $A'D\perp CP$　B. $PP'//$ 平面 $A'BDC$

C. 多面体 $PP'A'BDC$ 的外接球的表面积为 6π　D. 点 A，P 旋转运动的轨迹长相等

11. 已知 $a>0,e^{a}+\ln b=1$，则（　）A. $a+\ln b<0$　B. $e^{a}+b>2$　C. $\ln a+e^{b}<0$　D. $a+b>1$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知点 P 在抛物线 $C:y^{2}=2px(p>0)$ 上，过 P 作 C 的准线的垂线，垂足为 H，点 F 为 C 的焦点．若 $\angle HPF=60^{\circ}$，点 P 的横坐标为 1，则 $p=$_______.

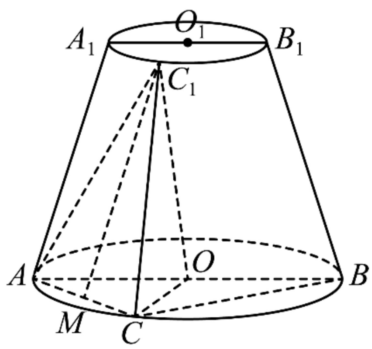
13. 已知一扇矩形窗户与地面垂直，高为 1.5m，下边长为 1m，且下边距地面 1 m．若某人观察到窗户在平行光线的照射下，留在地面上的影子恰好为矩形，其面积为 1.5 m^2，则窗户与地面影子之间光线所形成的几何体的体积为_______m^3.

14. "完全数"是一类特殊的自然数，它的所有正因数的和等于它自身的两倍．寻找"完全数"用到函数 $\sigma(n)$：$\forall n\in N^{*}$，$\sigma(n)$ 为 n 的所有正因数之和，如 $\sigma(6)=1+2+3+6=12$，则 $\sigma(20)=$_______；$\sigma(6^{n})=$_______.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 如图，在圆台 OO_1 中，A_1B_1,AB 分别为上、下底面直径，且 $A_1B_1//AB$，$AB=2A_1B_1$，CC_1 为异于 AA_1,BB_1 的一条母线.（1）若 M 为 AC 的中点，证明：$C_1M//$ 平面 ABB_1A_1；

（2）若 $OO_1=3,AB=4,\angle ABC=30^{\circ}$，求二面角 $A-C_1C-O$ 的正弦值.



16. 我国风云系列卫星可以监测气象和国土资源情况.某地区水文研究人员为了了解汛期人工测雨量 x（单位：dm）与遥测雨量 y（单位：dm）的关系，统计得到该地区 10 组雨量数据如下：

样本号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
人工测雨量 x_i	5.38	7.99	6.37	6.71	7.53	5.53	4.18	4.04	6.02	4.23
遥测雨量 y_i	5.43	8.07	6.57	6.14	7.95	5.56	4.27	4.15	6.04	4.49
$\lvert x_i-y_i\rvert$	0.05	0.08	0.2	0.57	0.42	0.03	0.09	0.11	0.02	0.26

并计算得$\sum_{i=1}^{10}x_i^2=353.6$，$\sum_{i=1}^{10}y_i^2=361.7$，$\sum_{i=1}^{10}x_iy_i=357.3$，$\overline{x}^2\approx33.62$，$\overline{y}^2\approx34.42$，$\overline{xy}\approx34.02$.

（1）求该地区汛期遥测雨量y与人工测雨量x的样本相关系数（精确到 0.01），并判断它们是否具有线性相关关系；（2）规定：数组(x_i,y_i)满足$|x_i-y_i|<0.1$为“I 类误差”；满足$0.1\le|x_i-y_i|<0.3$为“II 类误差”；满足$|x_i-y_i|\ge0.3$为“III 类误差”.为进一步研究，该地区水文研究人员从“I 类误差”、“II 类误差”中随机抽取 3 组数据与“III 类误差”数据进行对比，记抽到“I 类误差”的数据的组数为 X，求 X 的概率分布与数学期望.

附：相关系数$r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$，$\sqrt{304.5}\approx17.4$.

17. 已知椭圆$E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，焦距为 2，过 E 的左焦点 F 的直线 l 与 E 相交于 A、B 两点，与直线$x=-2$相交于点 M.（1）若$M(-2,-1)$，求证：$|MA|\cdot|BF|=|MB|\cdot|AF|$；（2）过点 F 作直线 l 的垂线 m 与 E 相交于 C、D 两点，与直线$x=-2$相交于点 N. 求$\dfrac{1}{|MA|}+\dfrac{1}{|MB|}+\dfrac{1}{|NC|}+\dfrac{1}{|ND|}$的最大值.

18. 已知函数 $f(x)=ax-\ln x-\dfrac{a}{x}$．（1）若 $x>1$， $f(x)>0$，求实数 a 的取值范围；

（2）设 x_1,x_2 是函数 $f(x)$ 的两个极值点，证明：$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|<\dfrac{\sqrt{1-4a^2}}{a}$．

19. 若有穷数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_n(n>4)$ 满足：$a_i+a_{n+1-i}=c(c\in R,i=1,2,\cdots,n)$，则称此数列具有性质 P_c．

（1）若数列 $A:-2,a_2,a_3,2,6$ 具有性质 P_c，求 a_2,a_3,c 的值；（2）设数列 A 具有性质 P_0，且 $a_1<a_2<\cdots<a_n,n$ 为奇数，当 $a_i,a_j>0(1\le i,j\le n)$ 时，存在正整数 k，使得 $a_j-a_i=a_k$，求证：数列 A 为等差数列；

（3）把具有性质 P_c，且满足 $\left|a_{2k-1}+a_{2k}\right|=m$ （$k\in N^*,k\le\dfrac{n}{2},m$ 为常数）的数列 A 构成的集合记作 $T_c(n,m)$.求出所有的 n，使得对任意给定的 m,c，当数列 $A\in T_c(n,m)$ 时，数列 A 中一定有相同的两项，即存在

$a_i=a_j(i\ne j,1\le i,j\le n)$．

2023-24（下）模拟（15）

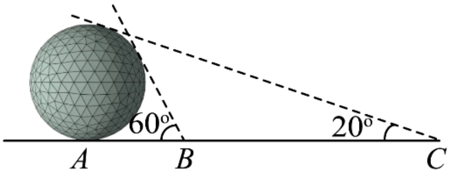
2024-02-20

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若 $iz=(1-2i)^2$ ，则 $z=$（　C　）A. $4+3i$　　B. $4-3i$　C. $-4+3i$　D. $-4-3i$

2. 已知 $(x^3+\frac{2}{x^2})^n$ 的展开式中各项系数和为 243，则展开式中常数项为（ B　　）A. 60　B. 80　　C. 100　　D. 120

3. 古代数学家刘徽编撰的《重差》是中国最早的一部测量学著作，现据《重差》测量一个球体建筑物的高度，如图，已知点 A 是球体建筑物与水平地面的接触点（切点），地面上 B，C 两点与点 A 在同一条直线上，且在点 A 的同侧．若在 B，C 处分别测得球体建筑物的最大仰角为 60°和 20°，且 $BC=100$m，则该球体建筑物的高度约为（ $\cos 10°\approx 0.985$ ）（　C　）　A. 58.60m　　B. 56.74m　　C. 50.76m　　D. 49.25m



4. 在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$．若 $\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{DF}+n\overrightarrow{AE}$，则 $m+n=$（　D　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{5}{6}$　　D. $\frac{4}{3}$

5. 记函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{4})(\omega>0)$ 的最小正周期为 T．若 $\frac{\pi}{2}<T<\pi$，且 $f(x)\leq|f(\frac{\pi}{3})|$，则 $\omega=$（　C　）

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{9}{4}$　　C. $\frac{15}{4}$　　D. $\frac{27}{4}$

6.已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，$y=f(x)+e^x$ 是偶函数，$y=f(x)-3e^x$ 是奇函数，则 $f(x)$ 的最小值为（B ）

A. e　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $2e$

7. 已知 F_1,F_2 分别是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，点 P 在双曲线上，$PF_1\perp PF_2$，圆 $O:x^2+y^2=\frac{9}{4}(a^2+b^2)$，直线 PF_1 与圆 O 相交于 A，B 两点，直线 PF_2 与圆 O 相交于 M，N 两点．若四边形 $AMBN$ 的面积为 $9b^2$，则 C 的离心率为（　D　）A $\frac{5}{4}$　B. $\frac{8}{5}$　C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　D. $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

8. 已知 $a=e^{0.02},b=1.01^2,c=\ln(2.02)$，则（　A　）

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$　　C. $a>c>b$　　D. $b>c>a$

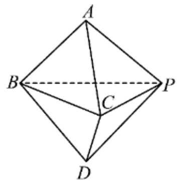
二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 已知甲种杂交水稻近五年的产量（单位：t/hm^2）数据为：9.8，10.0，10.0，10.0，10.2，乙种杂交水稻近五年的产量（单位：t/hm^2）数据为：9.6，9.7，10.0，10.2，10.5，则（ABD　　）

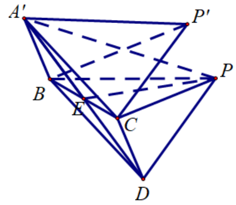
A. 甲种的样本极差小于乙种的样本极差　B. 甲种的样本平均数等于乙种的样本平均数

C. 甲种的样本方差大于乙种的样本方差　D. 甲种的样本 60 百分位数小于乙种的样本 60 百分位数

10. 如图，正三棱锥 A-PBC 和正三棱锥 D-PBC 的侧棱长均为 $\sqrt{2}$，$BC=2$．若将



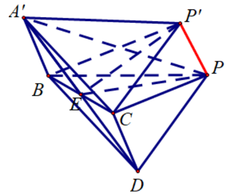
正三棱锥 $A\text{-}PBC$ 绕 BC 旋转，使得点 A，P 分别旋转至点 A'，P' 处，且 A',B,C,D 四点共面，点 A'，D 分别位于 BC 两侧，则（　BC）



A. $A'D\perp CP$　　B. $PP'//$ 平面 $A'BDC$

C. 多面体 $PP'A'BDC$ 的外接球的表面积为 6π

D. 点 A，P 旋转运动的轨迹长相等



key：如图，$BC\perp$ 平面$A'PD, A$错；

P',P,D,A'共面，$EP=EP',\therefore PP'//AA',\therefore PP'//$平面$A'BDC,B$对；

$D-PBC$的外接球的半径为$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}$,球的表面积为$4\pi\cdot\frac{6}{4}=6\pi,C$对；

点A的运动轨迹长为$\pi-2\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$,点$P$的运动轨迹长为$\sqrt{3}(\pi-2\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}),D$错

11. 已知 $a>0,e^a+\ln b=1$，则（　ABD　）A. $a+\ln b<0$　B. $e^a+b>2$　C. $\ln a+e^b<0$ D. $a+b>1$

$key:\because a>0,\therefore e^a>1,\therefore 0<b<1,\therefore C$错；

$\therefore a+b=\ln(1-\ln b)+b$记为$p(b)$

则$p'(b)=\frac{1}{1-\ln b}\cdot\frac{-1}{b}+1=\frac{-\frac{1}{b}+1-\ln b}{1-\ln b}<0,\therefore p(b)>p(1)=1,\therefore D$对

$\because e^a>1+a,\therefore 1-\ln b>1+a$得$a+\ln b<0,A$对；

$\because \ln b<b-1,\therefore 1=e^a+\ln b<e^a+b-1,\therefore e^a+b>2,B$对；

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知点 P 在抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 上，过 P 作 C 的准线的垂线，垂足为 H，点 F 为 C 的焦点．若 $\angle HPF=60^\circ$，点 P 的横坐标为1，则 $p=$_______. $\frac{2}{3}$

13. 已知一扇矩形窗户与地面垂直，高为 1.5m，下边长为 1m，且下边距地面 1 m．若某人观察到窗户在平行光线的照射下，留在地面上的影子恰好为矩形，其面积为 1.5 m^2，则窗户与地面影子之间光线所形成的几何体的体积为_______m^3． $\frac{21}{8}$

14. “完全数”是一类特殊的自然数，它的所有正因数的和等于它自身的两倍．寻找“完全数”用到函数$\sigma(n)$：$\forall n\in N^*$，$\sigma(n)$为 n 的所有正因数之和，如$\sigma(6)=1+2+3+6=12$，则$\sigma(20)=$_______；$\sigma(6^n)=$_______.

$key:\because 20=2^2\cdot5,\therefore\sigma(20)=1+5+2+2\cdot5+2^2+2^2\cdot5=42$

$\because 6^n=2^n\cdot3^n,\therefore\sigma(6^n)=\frac{1}{2}[2^0\cdot(3^0+3^1+\cdots+3^n)+2^1\cdot(3^0+3^1+\cdots+3^n)+\cdots+2^n\cdot(3^0+3^1+\cdots+3^n)]$

$=\frac{1}{2}(2^0+2^1+\cdots+2^n)(3^0+3^1+\cdots+3^n)=\frac{1}{2}(2^{n+1}-1)(3^{n+1}-1)$

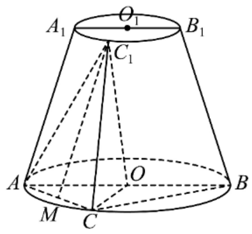
四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 如图，在圆台 OO_1 中，A_1B_1,AB 分别为上、下底面直径，且 $A_1B_1//AB$，$AB=2A_1B_1$，　CC_1 为异于 AA_1,BB_1 的一条母线．（1）若 M 为 AC 的中点，证明：$C_1M//$ 平面 ABB_1A_1；

（2）若 $OO_1=3, AB=4, \angle ABC=30^\circ$，求二面角 $A-C_1C-O$ 的正弦值．

【小问 1 详解】如图，连接 A_1C_1．因为在圆台 OO_1 中，上、下底面直径分别为 A_1B_1, AB，且 $A_1B_1 // AB$，

所以 AA_1, BB_1, C_1C 为圆台母线且交于一点 P，所以 A, A_1, C_1, C 四点共面．



在圆台 OO_1 中，平面 $ABC //$ 平面 $A_1B_1C_1$，

由平面 $AA_1C_1C \cap$ 平面 $ABC = AC$，平面 $AA_1C_1C \cap$ 平面 $A_1B_1C_1 = A_1C_1$，得 $A_1C_1 // AC$．

又 $A_1B_1 // AB, AB = 2A_1B_1$，所以 $\dfrac{PA_1}{PA}=\dfrac{A_1B_1}{AB}=\dfrac{1}{2}$，所以 $\dfrac{PC_1}{PC}=\dfrac{PA_1}{PA}=\dfrac{1}{2}$，即 C_1 为 PC 中点．

在 $\triangle PAC$ 中，又 M 为 AC 的中点，所以 $C_1M // AA_1$．

因为 $AA_1 \subset$ 平面 ABB_1A_1，$C_1M \not\subset$ 平面 ABB_1A_1，所以 $C_1M //$ 平面 ABB_1A_1；

【小问 2 详解】以 O 为坐标原点，OB, OO_1 分别为 y, z 轴，过 O 且垂直于平面 ABB_1A_1 的直线为 x 轴，

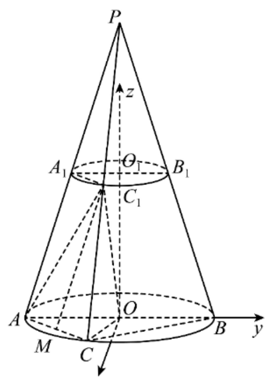
建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$．

因为 $\angle ABC=30^\circ$，所以 $\angle AOC=60^\circ$．则 $A(0,-2,0), C(\sqrt{3},-1,0), O_1(0,0,3)$．

因为 $\overrightarrow{OC}=(\sqrt{3},-1,0)$，所以 $\overrightarrow{O_1C_1}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}=(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2},0)$．所以 $C_1\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2},3\right)$，所以 $\overrightarrow{C_1C}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2},-3\right)$．

设平面 OCC_1 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，所以 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{OC}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{C_1C}=0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}\sqrt{3}x_1-y_1=0\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}x_1-\dfrac{1}{2}y_1-3z_1=0\end{cases}$，

令 $x_1=1$，则 $y_1=\sqrt{3}, z_1=0$，所以 $\overrightarrow{n_1}=(1,3,0)$，又 $\overrightarrow{AC}=(\sqrt{3},1,0)$，



设平面 ACC_1 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，

所以 $\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{C_1C}=0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}\sqrt{3}x_2+y_2=0\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}x_2-\dfrac{1}{2}y_2-3z_2=0\end{cases}$，

令 $x_2=1$，则 $y_2=-\sqrt{3}, z_2=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\overrightarrow{n_2}=(1,-\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3})$，

所以 $\cos\left\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\dfrac{1\times1+\sqrt{3}\times\left(-\sqrt{3}\right)+0\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{1+3}\times\sqrt{1+3+\dfrac{1}{3}}}=-\dfrac{\sqrt{39}}{13}$．

设二面角 $M-C_1C-O$ 大小为 θ，则 $\cos\theta=\left|\cos\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right|=\dfrac{\sqrt{39}}{13}$，所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{\sqrt{130}}{13}$．

所以二面角 $M-C_1C-O$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{130}}{13}$.

16. 我国风云系列卫星可以监测气象和国土资源情况.某地区水文研究人员为了了解汛期人工测雨量 x（单位：dm）与遥测雨量 y（单位：dm）的关系，统计得到该地区 10 组雨量数据如下：

样本号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
人工测雨量 x_i	5.38	7.99	6.37	6.71	7.53	5.53	4.18	4.04	6.02	4.23
遥测雨量 y_i	5.43	8.07	6.57	6.14	7.95	5.56	4.27	4.15	6.04	4.49
$\|x_i-y_i\|$	0.05	0.08	0.2	0.57	0.42	0.03	0.09	0.11	0.02	0.26

并计算得 $\sum_{i=1}^{10}x_i^2=353.6$，$\sum_{i=1}^{10}y_i^2=361.7$，$\sum_{i=1}^{10}x_iy_i=357.3$，$\overline{x}^2\approx 33.62$，$\overline{y}^2\approx 34.42$，$\overline{xy}\approx 34.02$.

（1）求该地区汛期遥测雨量 y 与人工测雨量 x 的样本相关系数（精确到 0.01），并判断它们是否具有线性相关关系；（2）规定：数组 (x_i,y_i) 满足 $|x_i-y_i|<0.1$ 为“I 类误差”；满足 $0.1\le|x_i-y_i|<0.3$ 为“II 类误差”；满足 $|x_i-y_i|\ge 0.3$ 为“III 类误差”.为进一步研究，该地区水文研究人员从“I 类误差”、“II 类误差”中随机抽取 3 组数据与“III 类误差”数据进行对比，记抽到“I 类误差”的数据的组数为 X，求 X 的概率分布与数学期望.

附：相关系数 $r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$，$\sqrt{304.5}\approx 17.4$.

【小问 1 详解】因为 $r=\frac{\sum_{i=1}^{10}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10}\left(x_i-\overline{x}\right)^2\sum_{i=1}^{10}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}=\frac{\sum_{i=1}^{10}x_iy_i-10\overline{xy}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{10}x_i^2-10\overline{x}^2\right)\times\left(\sum_{i=1}^{10}y_i^2-10\overline{y}^2\right)}}$，

代入已知数据，得 $r=\frac{357.3-10\times 34.02}{\sqrt{\left(353.6-10\times 33.62\right)\times\left(361.7-10\times 34.42\right)}}=\frac{17.1}{\sqrt{304.5}}\approx 0.98$

【小问 2 详解】依题意，“I 类误差”有 5 组，“II 类误差”有 3 组，“III 类误差”有 2 组.

若从“I 类误差”和“II 类误差”数据中抽取 3 组，

抽到“I 类误差”的组数 X 的所有可能取值为 0，1，2，3.

则 $P\left(X=0\right)=\frac{C_3^3}{C_8^3}=\frac{1}{56}$，$P\left(X=1\right)=\frac{C_5^1C_3^2}{C_8^3}=\frac{15}{56}$，$P\left(X=2\right)=\frac{C_5^2C_3^1}{C_8^3}=\frac{30}{56}=\frac{15}{28}$，

$P\left(X=3\right)=\frac{C_5^3C_3^0}{C_8^3}=\frac{10}{56}=\frac{5}{28}$.所以 X 的概率分布为

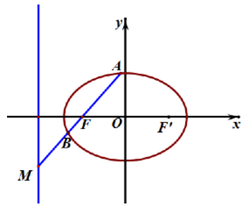
X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{28}$

所以 X 的数学期望 $E(X)=1\times\frac{15}{56}+2\times\frac{15}{28}+3\times\frac{5}{28}=\frac{15}{8}$.

另解：因为 $X\sim H(3,5,8)$，所以 $E(X)=\frac{3\times5}{8}=\frac{15}{8}$.

17. 已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，焦距为 2，过 E 的左焦点 F 的直线 l 与 E 相交于 A、B 两点，与直线 $x=-2$ 相交于点 M.（1）若 $M(-2,-1)$，求证：$|MA|\cdot|BF|=|MB|\cdot|AF|$；

（2）过点 F 作直线 l 的垂线 m 与 E 相交于 C、D 两点，与直线 $x=-2$ 相交于点 N. 求 $\frac{1}{|MA|}+\frac{1}{|MB|}+\frac{1}{|NC|}+\frac{1}{|ND|}$ 的最大值.



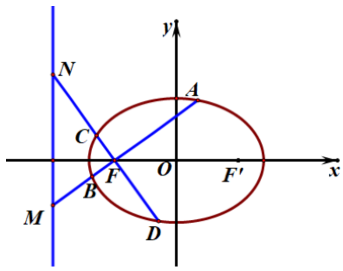
(1) 证明：由已知得 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\2c=2\end{cases}$ 得 $a=\sqrt{2},b=c=1,\therefore$ 椭圆 $E:\frac{x^2}{2}+y^2=1$

设 $\angle AFx=\theta$, 则 $|FA|=\frac{1}{\sqrt{2}-\cos\theta},|FB|=\frac{1}{\sqrt{2}+\cos\theta},|FM|=\frac{1}{\cos\theta},(\theta=\frac{\pi}{4})$

$|MA|=\frac{1}{\sqrt{2}-\cos\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-\cos\theta)\cos\theta},|MB|=\frac{1}{\cos\theta}-\frac{1}{\sqrt{2}+\cos\theta}=\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+\cos\theta)\cos\theta}$,

$\therefore|MA|\cdot|BF|=\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2})\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{4}{3},|MB|\cdot|AF|=\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2})\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{4}{3}$

$\therefore|MA|\cdot|BF|=|MB|\cdot|AF|$, 证毕



（2）解：如图，由 (1) 得 $|FC|=\frac{1}{\sqrt{2}-\cos(\theta+\frac{\pi}{2})}=\frac{1}{\sqrt{2}+\sin\theta},|FD|=\frac{1}{\sqrt{2}-\sin\theta}$,

$|FN|=\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)}=\frac{1}{\sin\theta}(\theta\in(0,\frac{\pi}{2}))$,

$\therefore|NC|=\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\sqrt{2}+\sin\theta}=\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+\sin\theta)\sin\theta},|ND|=\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\sqrt{2}-\sin\theta}=\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-\sin\theta)\sin\theta}$,

则 $\frac{1}{|MA|}+\frac{1}{|MB|}+\frac{1}{|NC|}+\frac{1}{|ND|}=\frac{(\sqrt{2}-\cos\theta)\cos\theta}{\sqrt{2}}+\frac{(\sqrt{2}+\cos\theta)\cos\theta}{\sqrt{2}}+\frac{(\sqrt{2}-\sin\theta)\sin\theta}{\sqrt{2}}+\frac{(\sqrt{2}+\sin\theta)\sin\theta}{\sqrt{2}}$

$=2\cos\theta+2\sin\theta=2\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\le2\sqrt{2}$(当且仅当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，取 $=$)，$\therefore$ 所求最大值为 $2\sqrt{2}$

18. 已知函数 $f(x)=ax-\ln x-\frac{a}{x}$.（1）若 $x>1$，$f(x)>0$，求实数 a 的取值范围；

（2）设 x_1,x_2 是函数 $f(x)$ 的两个极值点，证明：$|f(x_1)-f(x_2)|<\dfrac{\sqrt{1-4a^2}}{a}$.

⑴ 解：由$f'(x)=a-\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{x^2}=\dfrac{ax^2-x+a}{x^2}(x>1)$, 且$f(1)=0$

$\therefore f'(1)=2a-1\ge 0$得$a\ge\dfrac{1}{2}$,

由$f'(x)>0\Leftrightarrow ax^2-x+a>0,\therefore x>1,\therefore ax^2-x+a=a(x^2+1)-x\ge\dfrac{1}{2}(x^2+1)-x=\dfrac{1}{2}(x-1)^2\ge 0$

$\therefore f(x)>f(1)=0,\therefore a$的取值范围为$[\dfrac{1}{2},+\infty)$

（2）证明：由 ⑴ 得$f'(x)=0\Leftrightarrow ax^2-x+a=0\Leftrightarrow a=\dfrac{x}{x^2+1}$记为$p(x)(x>0)$,

则$p'(x)=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}>0\Leftrightarrow 0<x<1$,

$\therefore p(x)$在$(0,1)$上递增,$(1,+\infty)$上递减,$\therefore p(x)_{\max}=p(1)=\dfrac{1}{2}$

而$\lim\limits_{x\to+\infty}p(x)=0, p(0)=0$,不妨设$x_1<x_2$,

$\therefore a\in(0,\dfrac{1}{2})$, 且$0<x_1<1<x_2$, 且$x_1,x_2$是方程$ax^2-x+a=0$的两根，且$\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{1}{a}\\ x_1x_2=1\end{cases}$

$\therefore|f(x_1)-f(x_2)|=|ax_1-\ln x_1-\dfrac{a}{x_1}-ax_2+\ln x_2+\dfrac{a}{x_2}|=|ax_1-\ln x_1-ax_2+\ln x_2-ax_2+ax_1|$

$=|2a(x_1-x_2)+\ln\dfrac{x_2}{x_1}|=|\dfrac{2x_2}{x_2^2+1}\cdot\dfrac{1-x_2^2}{x_2}+2\ln x_2|=2|\dfrac{1-x_2^2}{1+x_2^2}+\ln x_2|=2(\ln x_2+\dfrac{1-x_2^2}{1+x_2^2})$

（设$p(x)=\dfrac{1}{2}\ln x+\dfrac{1-x}{1+x}(x>1)$, 则$p'(x)=\dfrac{1}{2x}+\dfrac{-2}{(1+x)^2}=\dfrac{(x-1)^2}{2x(1+x)^2}>0,\therefore p(x)>p(1)=0$)

而$\dfrac{\sqrt{1-4a^2}}{a}=x_2-x_1=x_2-\dfrac{1}{x_2}$

要证$:|f(x_1)-f(x_2)|<\dfrac{\sqrt{1-4a^2}}{a}$, 只要证明$:2(\ln x_2+\dfrac{1-x_2^2}{1+x_2^2})<x_2-\dfrac{1}{x_2}\cdots(*)$

设$q(x)=2\ln x+\dfrac{2(1-x^2)}{1+x^2}-x+\dfrac{1}{x}(x>1)$

则$q'(x)=\dfrac{2}{x}+\dfrac{-8x}{(1+x)^2}-1-\dfrac{1}{x^2}=-(1-\dfrac{1}{x})^2-\dfrac{8x}{(1+x^2)^2}<0,\therefore q(x)<q(1)=0,\therefore(*)$成立，证毕

19. 若有穷数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_n(n>4)$ 满足：$a_i+a_{n+1-i}=c(c\in R,i=1,2,\cdots,n)$，则称此数列具有性质 P_c.

（1）若数列 $A:-2,a_2,a_3,2,6$ 具有性质 P_c，求 a_2,a_3,c 的值；

（2）设数列 A 具有性质 P_0，且 $a_1<a_2<\cdots<a_n,n$ 为奇数，当 $a_i,a_j>0(1\le i,j\le n)$ 时，存在正整数 k，使得 $a_j-a_i=a_k$，求证：数列 A 为等差数列；

（3）把具有性质 P_c，且满足 $|a_{2k-1}+a_{2k}|=m$ （$k\in N^*,k\le\dfrac{n}{2},m$ 为常数）的数列 A 构成的集合记作 $T_c(n,m)$.求出所

有的 n，使得对任意给定的 m,c，当数列 $A\in T_c(n,m)$ 时，数列 A 中一定有相同的两项，即存在

$a_i=a_j(i\neq j,1\le i,j\le n)$.

(1) 解：$\because A$具有性质P_c，$\therefore\begin{cases}-2+6=c\\ a_2+2=c\\ 2a_3=c\end{cases}$ 得$c=4,a_2=2,a_3=2$,

(2) 证明：$\because$ 数列A具有性质P_0，且$a_1<a_2<\cdots<a_n$，n为奇数，

$\therefore a_i+a_{n+1-i}=0(i=1,2,\cdots,n)$，令$n=2m+1$,

$\therefore a_1<a_2<\cdots<a_m<a_{m+1}=0<a_{m+2}<\cdots<a_{2m+1}$

$\because a_j-a_i=a_k$，且$a_i,a_j>0(1\le i<j\le n,k\in N^*)$,

$\therefore a_{m+3}-a_{m+2},a_{m+4}-a_{m+2},\cdots,a_{2m+1}-a_{m+2}$共$m-1$项均为数列$A$中的项，

而$0<a_{m+3}-a_{m+2}<a_{m+4}-a_{m+2}<\cdots<a_{2m+1}-a_{m+2}<a_{2m+1}$

$\therefore a_{m+3}-a_{m+2}=a_{m+2},a_{m+4}-a_{m+2}=a_{m+3}$即$a_{m+4}-a_{m+3}=a_{m+2},\cdots,a_{2m+1}-a_{m+2}=a_{2m}$即$a_{2m+1}-a_{2m}=a_{m+2}$

$\therefore a_{m+2},a_{m+3},\cdots,a_{2m+1}$成公差为$a_{m+2}$的等差数列，即$a_i=ia_{m+2}(i=m+2,m+3,\cdots,2m+1)$

$\therefore a_i=-a_{2m+2-i}(i=1,2,\cdots,m)$，$\therefore a_{i+1}-a_i=a_{m+2}(i=1,2,\cdots,2m)$,

$\therefore$ 数列A为等差数列

(3) 解：当$n=4k+2(k\in N^*)$时，$A:a_1,a_2,\cdots,a_{2k-1},a_{2k},a_{2k+1},a_{2k+3}\cdots,a_{4k+1},a_{4k+2}$,

$\because$ 数列A具有性质P_c，且$|a_{2k-1}+a_{2k}|=m=|c|$即$c=\pm m$,

当$c=m$时，由$a_1+a_2=m$，且$a_{4k+2}+a_1=m$，$\therefore a_{4k+2}=a_2$,

当$c=-m$时，由$a_1+a_2=-m$，且$a_{4k+2}+a_1=c=-m$，$\therefore a_{4k+2}=a_2$,

当$n=4k(k\in N^*)$时，取$c=0,m=1$,

$A:-2k,2k-1,-2k+2,2k-3,\cdots,-2,1,-1,2,\cdots,-2k+1,2k$没有相同的项

当$n=2k+3(k\in N^*)$时，取$c=0,m=1$,

$A=(-1)^{k+1}(k+1),(-1)^k k,(-1)^{k-1}(k-1),\cdots,-1,0,1,-2,\cdots,(-1)^{k-2}(k-1),(-1)^{k-1}k,(-1)^k(k+1)$没有相同项

综上：$n=4k+2,k\in N^*$.