2023-24（下）模拟（39）

2024-03-20

一、选择题:本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．记复数 z 的共轭复数为 $\bar{z}$，若 $z(1+i)=2-2i$，则 $|\bar{z}|=$（　　）A．1　B．$\sqrt{2}$　C．2　D．$2\sqrt{2}$

2．已知集合 $A=\{x|x=\frac{k\pi}{2},k\in Z\}$，$B=\{x|x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z\}$，则（　　）

A．$A=B$　B．$A\bigcap B=\Phi$　C．$A\subseteq B$　D．$A\supseteq B$

3．过 $A(-1,0)$，$B(0,3)$，$C(9,0)$ 三点的圆与 y 轴交于 M，N 两点，则 $|MN|=$（　　）

A．3　B．4　C．8　D．6

4．假设甲和乙刚开始的“日能力值”相同，之后甲通过学习，“日能力值”都在前一天的基础上进步 2%，而乙疏于学习，“日能力值”都在前一天的基础上退步 1%．那么，大约需要经过（　）天，甲的“日能力值”是乙的 20 倍.（参考数据：$\lg 102\approx 2.0086$，$\lg 99\approx 1.9956$，$\lg 2\approx 0.3010$）A．23　B．100　C．150　D．232

5.“$\alpha=\frac{\pi}{4}+k\pi(k\in Z)$”是“$\frac{\sqrt{3}\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{3}+1$”的（　）

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件　C．充要条件　D．既不充分也不必要条件

6．分别以锐角 $\triangle ABC$ 的边 AB,BC,AC 为旋转轴旋转一周后得到的几何体体积之比为 $\sqrt{3}:\sqrt{6}:2$，则 $\cos B=$（　　）

A．$\frac{5\sqrt{3}}{12}$　B．$\frac{5\sqrt{2}}{12}$　C．$\frac{3\sqrt{2}}{8}$　D．$\frac{\sqrt{6}}{12}$

7．已知集合 $A=\{-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{3},2,3\}$，若 $a,b,c\in A$ 且互不相等，则使得指数函数 $y=a^x$，对数函数 $y=\log_b x$，幂函数 $y=x^c$ 中至少有两个函数在 $(0,+\infty)$ 上单调递增的有序数对 (a,b,c) 的个数是（　）

A．16　B．24　C．32　D．48

8. 抛物线有如下光学性质：由其焦点射出的光线经抛物线反射后，沿平行于抛物线对称轴的方向射出．反之，平行于抛物线对称轴的入射光线经抛物线反射后必过抛物线的焦点．已知抛物线 $C:y^2=2x$，O 为坐标原点，一束平行于 x 轴的光线 l_1 从点 $P(m,2)$ 射入，经过 C 上的点 $A(x_1,y_1)$ 反射后，再经过 C 上另一点 $B(x_2,y_2)$ 反射后，沿直线 l_2 射出，经过点 C，则（ ）A. $x_1x_2=\frac{1}{2}$　B. 延长 AO 交直线 $x=-\frac{1}{2}$ 于点 D，则 D,B,Q 三点共线

C. $|AB|=\frac{13}{4}$　D. 若 PB 平分 $\angle ABQ$，则 $m=\frac{9}{4}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9．已知向量 $\vec{a}=(1,\sqrt{3})$，$\vec{b}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，则下列结论正确的是（　　）

A．若 $\vec{a}//\vec{b}$，则 $\tan\alpha=\sqrt{3}$　B．若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $\tan\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

C．若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，则 $|\vec{a}-\vec{b}|=3$　D．若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相反，则 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影向量的坐标是 $(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$

10．已知偶函数 $f(x)$ 的定义域为 R，$f(\frac{1}{2}x+1)$ 为奇函数，且 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，则下列结论正确的是

2024-03-20

（　　）A．$f(-\frac{3}{2})<0$　　B．$f(\frac{4}{3})>0$　　C．$f(3)<0$　　D．$f(\frac{2024}{3})>0$

11．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的各个顶点都在表面积为 3π 的球面上，点 P 为该球面上的任意一点，则下列结论正确的是（　　）A．有无数个点 P，使得 $AP//$ 平面 BDC_1　　B．有无数个点 P，使得 $AP\perp$ 平面 BDC_1

C．若点 $P\in$ 平面 BCC_1B_1，则四棱锥 $P-ABCD$ 的体积的最大值为 $\frac{\sqrt{2}+1}{6}$

D．若点 $P\in$ 平面 BCC_1B_1，则 $AP+PC_1$ 的最大值为 $\sqrt{6}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12．随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，若 $P(X\geq 70)=P(X\leq 90)$ 且 $P(72\leq X\leq 80)=0.3$，则随机变量 X 的第 80 百分位数是______.

13．已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 在区间 $(\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{12})$ 上单调，且满足 $f(\frac{\pi}{6})=-1$，$f(\frac{3\pi}{4})=0$，则 $\omega=$____.

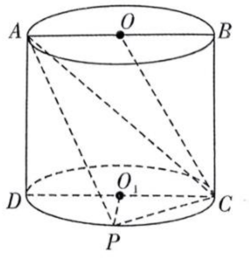
14．已知直线 l 与椭圆 $C:\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ 在第一象限交于 P，Q 两点，l 与 x 轴，y 轴分别交于 M，N 两点，且满足 $\frac{|PM|}{|QM|}+\frac{|QM|}{|PM|}=\frac{|PN|}{|QN|}+\frac{|QN|}{|PN|}$，则 l 的斜率为______.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15．已知 $0<a<1$，函数 $f(x)=\frac{ae^{x-a}}{x}(x\neq 0)$．（1）求 $f(x)$ 的单调区间；（2）讨论方程 $f(x)=a$ 的根的个数.

16．（15 分）如图，已知圆柱 OO_1 的轴截面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，点 P 是圆 O_1 上异于点 C，D 的任意一点．（1）若点 D 到平面 ACP 的距离为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$，证明：$O_1P\perp CD$；

（2）求 OC 与平面 ACP 所成角的正弦值的取值范围.



2024-03-20

17. 已知双曲线$C:x^2-y^2=4,A$是双曲线 C 的左顶点，直线$l:x=my+t(m\neq\pm1)$.

（1）设直线 l 过定点$B(1,0)$，且交双曲线 C 于 E,F 两点，求证：直线 AE 与 AF 的斜率之积为定值；

（2）设直线 l 与双曲线 C 有唯一的公共点 M.（i）已知直线 l 与双曲线 C 的两条渐近线相交于两点 R,S，求证：$|MR|=|MS|$；（ii）过点 M 且与 l 垂直的直线分别交 x 轴、y 轴于 $P(x,0),Q(0,y)$ 两点，当点 M 运动时，求点 $N(x,y)$ 的轨迹方程.

18.（17 分）某单位进行招聘面试，已知参加面试的 N 名学生全都来自 A，B，C 三所学校，其中来自 A 校的学生人数为$n(n>1)$．该单位要求所有面试人员面试前到场，并随机给每人安排一个面试号码$k(k=1,2,\cdots,N)$，按面试号码 k 由小到大依次进行面试，每人面试时长 5 分钟，面试完成后自行离场.

（1）求面试号码为 2 的学生来自 A 校的概率；

（2）若 $N=40$，$n=10$，且 B，C 两所学校参加面试的学生人数比为$1:2$，求 A 校参加面试的学生先于其他两校学生完成面试（A 校所有参加面试的学生完成面试后，B，C 两校都还有学生未完成面试）的概率.

（3）记随机变量 X 表示最后一名 A 校学生完成面试所用的时长（从第 1 名学生开始面试到最后一名 A 校学生完成面试所用的时间），$E(X)$ 是 X 的数学期望，证明：$E(X)=\dfrac{5n(N+1)}{n+1}$.

2024-03-20

19．（17 分）数值线性代数又称矩阵计算,是计算数学的一个重要分支,其主要研究对象包括向量和矩阵.对于平面向量$\vec{a}=(x,y)$,其模定义为$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$.类似地,对于 n 行 n 列的矩阵$A_{nn}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$,其模可由向量模拓展为$\|A\|=\left(\sum_{inj=1}^{n}\sum_{ij}^{n}a^2\right)^{\frac{1}{2}}$（其中$a_{ij}$为矩阵中第 i 行第 j 列的数,$\sum$为求和符号）,记作$\|A\|_F$,我们称这样的矩阵模为弗罗贝尼乌斯范数,例如对于矩阵$A_{22}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$,其矩阵模$\|A\|_F=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2^2+4^2+3^2+5^2}=3\sqrt{6}$．弗罗贝尼乌斯范数在机器学习等前沿领域有重要的应用.（1）$\forall n\in N^*$，$n\geq 3$，矩阵$B_{nn}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{n} \end{pmatrix}$，求使$\|B\|_F>3\sqrt{5}$的 n 的最小值.（2）$\forall n\in N^*$,$n\geq 3$,矩阵$C_{nn}=\begin{pmatrix} 1 & \cos\theta & \cos\theta & \cos\theta & \cdots & \cos\theta & \cos\theta \\ 0 & -\sin\theta & -\sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cdots & -\sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta \\ 0 & 0 & \sin^2\theta & \sin^2\theta\cos\theta & \cdots & \sin^2\theta\cos\theta & \sin^2\theta\cos\theta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (-1)^{n-2}\sin^{n-2}\theta & (-1)^{n-2}\sin^{n-2}\theta\cos\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{n-1}\sin^{n-1}\theta \end{pmatrix}$,求$\|C\|_F$.（3）矩阵$D_{nn}=\begin{pmatrix} \ln\frac{n+2}{n+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}} & \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \ln\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{\sqrt{n-1}}{n-1}} & \ln\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{\sqrt{n-1}}{n-1}} & \ln\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{\sqrt{n-1}}{n-1}} & \cdots & 0 \\ \ln\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{\sqrt{n}}{n}} & \ln\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{\sqrt{n}}{n}} & \ln\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{\sqrt{n}}{n}} & \cdots & \ln\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{\sqrt{n}}{n}} \end{pmatrix}$，证明：$\forall n\in N^*$，$n\geq 3$，$\|D\|_F>\sqrt{\frac{n}{3n+9}}$.

2024-03-20

解答

一、选择题:本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．记复数 z 的共轭复数为 $\bar{z}$，若 $z(1+i)=2-2i$，则 $|\bar{z}|=$（　C　）A．1　B．$\sqrt{2}$　C．2　D．$2\sqrt{2}$

2．已知集合 $A=\{x|x=\frac{k\pi}{2},k\in Z\}$，$B=\{x|x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z\}$，则（　D　）

A．$A=B$　　B．$A\bigcap B=\Phi$　　C．$A\subseteq B$　　D．$A\supseteq B$

3．过 $A(-1,0)$，$B(0,3)$，$C(9,0)$ 三点的圆与 y 轴交于 M，N 两点，则 $|MN|=$（　D　）

A．3　　B．4　　C．8　　D．6

4．假设甲和乙刚开始的“日能力值”相同，之后甲通过学习，“日能力值”都在前一天的基础上进步 2%，而乙疏于学习，“日能力值”都在前一天的基础上退步 1%．那么，大约需要经过（ B　）天，甲的“日能力值”是乙的 20 倍．（参考数据：$\lg 102\approx 2.0086$，$\lg 99\approx 1.9956$，$\lg 2\approx 0.3010$）A．23　B．100　C．150　D．232

5.“$\alpha=\frac{\pi}{4}+k\pi(k\in Z)$”是“$\frac{\sqrt{3}\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{3}+1$”的（　A　）

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件　C．充要条件　D．既不充分也不必要条件

$key:\frac{\sqrt{3}\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{3}+1\Leftrightarrow\sqrt{3}+1=\frac{\sqrt{3}+\tan^2\alpha}{\tan\alpha}\Leftrightarrow\sqrt{3}(\tan\alpha-1)=(\tan\alpha-1)(\tan\alpha+1)\Leftrightarrow\tan\alpha=1,or,\tan\alpha=\sqrt{3}-1$

6．分别以锐角 $\triangle ABC$ 的边 AB,BC,AC 为旋转轴旋转一周后得到的几何体体积之比为 $\sqrt{3}:\sqrt{6}:2$，则 $\cos B=$

（ C　）A．$\frac{5\sqrt{3}}{12}$　B．$\frac{5\sqrt{2}}{12}$　C．$\frac{3\sqrt{2}}{8}$　D．$\frac{\sqrt{6}}{12}$

7．已知集合 $A=\{-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{3},2,3\}$，若 $a,b,c\in A$ 且互不相等，则使得指数函数 $y=a^x$，对数函数 $y=\log_b x$，幂函数 $y=x^c$ 中至少有两个函数在 $(0,+\infty)$ 上单调递增的有序数对 (a,b,c) 的个数是（　B ）

A．16　　B．24　　C．32　　D．48

$key:y=a^x在x>0上递增\Leftrightarrow a>1;y=\log_b x在x>0上递增\Leftrightarrow b>1,y=x^c在x>0上递增\Leftrightarrow c>0$

$(a>1,b>1,c>0)A_2^2C_2^1+(a>1,b>1,c<0)A_2^2C_2^1+(a>1,b\in(0,1),c>0)C_2^1C_2^1C_2^1+(a\in(0,1),b>1,c>0)C_2^1C_2^1C_2^1=24$

8. 抛物线有如下光学性质：由其焦点射出的光线经抛物线反射后，沿平行于抛物线对称轴的方向射出．反之，平行于抛物线对称轴的入射光线经抛物线反射后必过抛物线的焦点．已知抛物线 $C:y^2=2x$，O 为坐标原点，一束平行于 x 轴的光线 l_1 从点 $P(m,2)$ 射入，经过 C 上的点 $A(x_1,y_1)$ 反射后，再经过 C 上另一点 $B(x_2,y_2)$ 反射后，沿直线 l_2 射出，经过点 C，则（ B　）A．$x_1x_2=\frac{1}{2}$　B. 延长 AO 交直线 $x=-\frac{1}{2}$ 于点 D，则 D,B,Q 三点共线

C. $|AB|=\frac{13}{4}$　　D. 若 PB 平分 $\angle ABQ$，则 $m=\frac{9}{4}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9．已知向量 $\vec{a}=(1,\sqrt{3})$，$\vec{b}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，则下列结论正确的是（　ABD ）

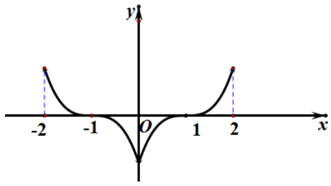
2024-03-20

A．若 $\vec{a}//\vec{b}$，则 $\tan\alpha=\sqrt{3}$　B．若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $\tan\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

C．若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$，则 $|\vec{a}-\vec{b}|=3$　D．若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相反，则 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影向量的坐标是 $(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$

10．已知偶函数 $f(x)$ 的定义域为 R，$f(\dfrac{1}{2}x+1)$ 为奇函数，且 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，则下列结论正确的是（　BD　）A．$f(-\dfrac{3}{2})<0$　B．$f(\dfrac{4}{3})>0$　C．$f(3)<0$　D．$f(\dfrac{2024}{3})>0$

$key: f(x)$是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)=f(-x)$



$f(\dfrac{1}{2}x+1)$是奇函数 $\Leftrightarrow f(x+1)$是奇函数 $\Leftrightarrow f(-x+1)=-f(x+1)\Leftrightarrow f(x+2)=-f(-x)$

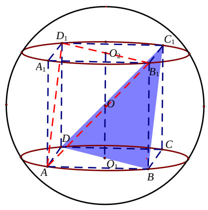
$\therefore f(x+2)=-f(x),\therefore f(x+4)=f(x)$，且$f(x)$的图象关于$(1,0)$对称，且$f(1)=0$，

且$f(x)$在$[0,2]$上单调递增，如图，

$\therefore f(-\dfrac{3}{2})>f(-1)=0, f(\dfrac{4}{3})>f(1)=0, f(3)=f(-1)=0, f(\dfrac{2024}{3})=f(2+\dfrac{2}{3})=f(\dfrac{2}{3}-2)>f(-1)=0$

11．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的各个顶点都在表面积为 3π 的球面上，点 P 为该球面上的任意一点，则下列结论正确的是（　ACD　）A．有无数个点 P，使得 $AP//$ 平面 BDC_1　B．有无数个点 P，使得 $AP\perp$ 平面 BDC_1

C．若点 $P\in$ 平面 BCC_1B_1，则四棱锥 $P-ABCD$ 的体积的最大值为 $\dfrac{\sqrt{2}+1}{6}$

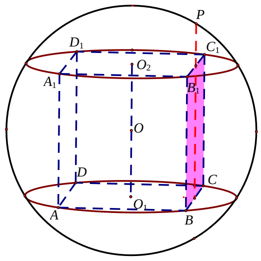


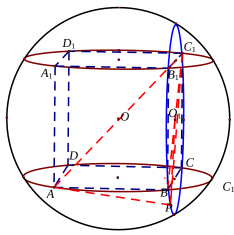
D．若点 $P\in$ 平面 BCC_1B_1，则 $AP+PC_1$ 的最大值为 $\sqrt{6}$

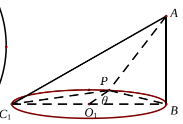
$key: A$：$\because$ 平面$AB_1D_1//$平面BDC_1，当在平面AB_1D_1与球面的交线上时，$AP//$平面BDC_1，A对；

B：$\because A_1C\perp$平面BDC_1，要使$AP\perp$平面BDC_1，只要$AP//A_1C$，$\therefore$只有一个点P，B错；

由$4\pi(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a)^2=3\pi$得正方体的棱长$a=1$，







$C:(V_{P-ABCD})_{\max}=\dfrac{1}{3}\cdot 1\cdot(\dfrac{1}{2}+\sqrt{\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{4}})=\dfrac{1+\sqrt{2}}{6}$，$C$对；

D：设$\angle PO_1B=\theta$（O_1为BCC_1B_1的外接圆圆心），

则$AP+PC_1=\sqrt{(\sqrt{2}\sin\dfrac{\theta}{2})^2+1}+\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi-\theta}{2}$

$=\sqrt{3-2\cos^2\dfrac{\theta}{2}}+\sqrt{2}\cos\dfrac{\theta}{2}(t=\sqrt{2}\cos\dfrac{\theta}{2}\in[0,\sqrt{2}])=\sqrt{3-t^2}+t\le\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$，$D$对

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

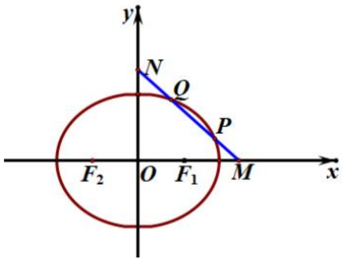
12．随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，若 $P(X\ge 70)=P(X\le 90)$ 且 $P(72\le X\le 80)=0.3$，则随机变量 X 的第 80 百分位数是__．88

13．已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 在区间 $(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{7\pi}{12})$ 上单调，且满足 $f(\dfrac{\pi}{6})=-1$，$f(\dfrac{3\pi}{4})=0$，则 $\omega=$__$\dfrac{6}{7}$__.

$key:\because\dfrac{3\pi}{4}\in(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{7\pi}{12}), f(\dfrac{\pi}{6})=-1, f(\dfrac{3\pi}{4})=0,\therefore\begin{cases}\omega\cdot\dfrac{\pi}{6}+\varphi=2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\\ \omega\cdot\dfrac{3\pi}{4}+\varphi=2k\pi\end{cases}$ 得$\omega=\dfrac{6}{7}$

14．已知直线 l 与椭圆 $C:\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 在第一象限交于 P，Q 两点，l 与 x 轴，y 轴分别交于 M，N 两点，且满足

$\dfrac{|PM|}{|QM|}+\dfrac{|QM|}{|PM|}=\dfrac{|PN|}{|QN|}+\dfrac{|QN|}{|PN|}$，则 l 的斜率为______．$-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$



key: 设$l: y=kx+m(k<0,m>0)$,代入C方程得:$(2+3k^2)x^2+6kmx+3m^2-6=0$

$$\therefore\begin{cases}x_P+x_Q=-\dfrac{6km}{2+3k^2}>0\\ x_Px_Q=\dfrac{3m^2-6}{2+3k^2}>0\end{cases}，且\Delta=24(3k^2+2-m^2)>0,且M(-\frac{m}{k},0),N(0,m)$$

$$\therefore\frac{|PM|}{|QM|}+\frac{|QM|}{|PM|}=\frac{y_P^2+y_Q^2}{y_Py_Q}=\frac{|PN|}{|QN|}+\frac{|QN|}{|PN|}=\frac{x_P^2+x_Q^2}{x_Px_Q}\Leftrightarrow x_Px_Q\cdot[4-\frac{2}{3}(x_P^2+x_Q^2)]=(k^2x_Px_Q+km(x_P+x_Q)+m^2)(x_P^2+x_Q^2)$$

$$\Leftrightarrow 4x_Px_Q=((k^2+\frac{2}{3})x_Px_Q+km(x_P+x_Q)+m^2)(x_P^2+x_Q^2)\Leftrightarrow 1=(-1+\frac{2m^2}{3k^2+2})(\frac{6k^2m^2}{(2+3k^2)(m^2-2)}-1)$$

$$\Leftrightarrow\frac{12k^2m^4}{(2+3k^2)^2(m^2-2)}-\frac{2m^2}{3k^2+2}-\frac{6k^2m^2}{(2+3k^2)(m^2-2)}=0\Leftrightarrow\frac{6k^2m^2}{2+3k^2}-m^2+2-3k^2=m^2\cdot\frac{3k^2-2}{2+3k^2}+2-3k^2=0,\therefore k=-\frac{\sqrt{6}}{3}$$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15．已知 $0<a<1$,函数 $f(x)=\dfrac{ae^{x-a}}{x}(x\neq 0)$.（1）求 $f(x)$ 的单调区间;（2）讨论方程 $f(x)=a$ 的根的个数.

解：（1）由$f'(x)=a\cdot\dfrac{e^{x-a}\cdot x-e^{x-a}\cdot 1}{x^2}>0\Leftrightarrow x>1,\therefore f(x)$的递增区间为$(1,+\infty)$,递减区间为$(-\infty,0),(0,1)$

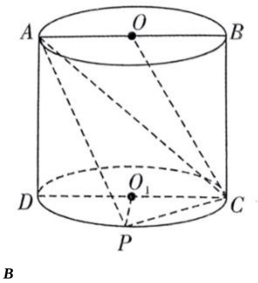
（2）由$f(x)=a\Leftrightarrow\dfrac{e^{x-a}}{x}=1\Leftrightarrow e^{x-a}=x(x>0)\Leftrightarrow x-a=\ln x\Leftrightarrow a=x-\ln x$记为$p(x)$

则$p'(x)=1-\dfrac{1}{x}>0\Leftrightarrow x>1,\therefore p(x)$在$(1,+\infty)$上递增，在$(0,1)$上递减

$\therefore p(x)_{\min}=p(1)=1$,而$\lim\limits_{x\to 0^+}p(x)=+\infty,\lim\limits_{x\to+\infty}p(x)=+\infty,$

$\because 0<a<1,\therefore$方程$f(x)=a$的根的个数0

16.（15 分）如图，已知圆柱 OO_1 的轴截面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，点 P 是圆 O_1 上异于点 C，D 的任意一点.（1）若点 D 到平面 ACP 的距离为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，证明：$O_1P\perp CD$；

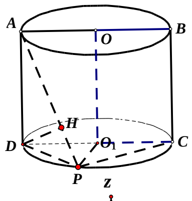


（2）求 OC 与平面 ACP 所成角的正弦值的取值范围.

(1) 证明：连接DP，则$DP\perp PC,\because AD\perp$平面$APC,\therefore$平面$ADP\perp$平面$DPC,\therefore PC\perp$平面$ADP,$

$\therefore$平面$APC\perp$平面ADP，作$DH\perp AP$于H，则$AH\perp$平面APC,

$\therefore AH=\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\because AD=2,\therefore DP=AD\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2},\therefore PC=PD=\sqrt{2},\therefore PO_1\perp DC$

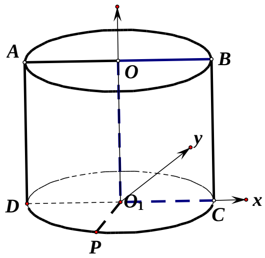


（2）建系如图，则$A(-1,0,2),O(0,0,2),C(1,0,0)$,设$P(\cos\theta,\sin\theta,0)(\theta\in(-\pi,0))$

设平面ACP的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=(x,y,z)\cdot(2,0,-2)=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=(x,y,z)\cdot(\cos\theta+1,\sin\theta,-2)\end{cases}$ 得$\vec{n}=(2\sin\theta,2-2\cos\theta,2\sin\theta)$

$\therefore\sin<\overrightarrow{OC}$,平面$ACP>=\dfrac{|(1,0,-2)\cdot(2\sin\theta,2-2\cos\theta,2\sin\theta)|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{4(3-2\cos\theta-\cos^2\theta)}}$



$= \dfrac{|\sin\theta|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{(3+\cos\theta)(1-\cos\theta)}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{3+\cos\theta}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{1-\dfrac{2}{3+\cos\theta}} \in (0,\dfrac{\sqrt{10}}{10})$即为所求的

17. 已知双曲线 $C: x^2-y^2=4, A$ 是双曲线 C 的左顶点，直线 $l: x=my+t(m\neq\pm1)$.

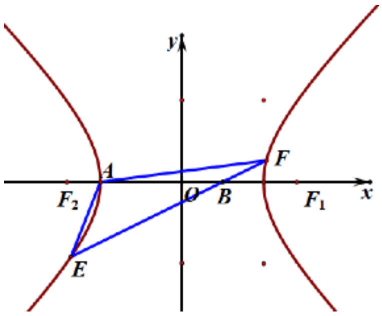
（1）设直线 l 过定点 $B(1,0)$，且交双曲线 C 于 E,F 两点，求证：直线 AE 与 AF 的斜率之积为定值；

（2）设直线 l 与双曲线 C 有唯一的公共点 M.（i）已知直线 l 与双曲线 C 的两条渐近线相交于两点 R,S，求证：$|MR|=|MS|$；（ii）过点 M 且与 l 垂直的直线分别交 x 轴、y 轴于 $P(x,0),Q(0,y)$ 两点，当点 M 运动时，求点 $N(x,y)$ 的轨迹方程.

(1) 证明：由直线l经过$B(1,0)$得$l: x=my+1$

代入C方程得$(m^2-1)y^2+2my-3=0, \therefore \begin{cases} y_E+y_F=-\dfrac{2m}{m^2-1} \\ y_Ey_F=\dfrac{-3}{m^2-1} \end{cases}$，且$\Delta=4(4m^2-3)>0)$，且$m\neq\pm1$

$\therefore k_{AE}k_{AF}=\dfrac{y_Ey_F}{(x_E+2)(x_F+2)}=\dfrac{y_Ey_F}{(my_E+3)(my_F+3)}=\dfrac{\dfrac{-3}{m^2-1}}{\dfrac{-3m^2}{m^2-1}+\dfrac{-6m^2}{m^2-1}+9}=\dfrac{1}{3}$为定值



(2) （i）由l与双曲线C有唯一公共点，且$m\neq\pm1$,

联立$\begin{cases} x^2-y^2=4 \\ x=my+t \end{cases}$消去$x$得$(m^2-1)y^2+2mty+t^2-4=0$

$\therefore \Delta=4m^2t^2-4(m^2-1)(t^2-4)=4(t^2+4m^2-4)=0$，且$M(-\dfrac{t}{m^2-1},-\dfrac{mt}{m^2-1})$即$(\dfrac{4}{t},\dfrac{4m}{t})$

由$\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ x=my+t \end{cases}$消去$x$得$(m^2-1)y^2+2mty+t^2=0$

$\therefore x_R+x_S=-\dfrac{2mt}{m^2-1}=2x_M, \therefore M$是$RS$的中点，$\therefore |MR|+|MS|$

（ii）由（i）得：$l_{PQ}: m(x-\dfrac{4}{t})+y-\dfrac{4m}{t}=0$得$\begin{cases} x=\dfrac{8}{t} \\ y=\dfrac{8m}{t} \end{cases}$，且$t^2+4m^2=4, \therefore \dfrac{64}{x^2}+\dfrac{4y^2}{x^2}=4$

$\therefore N$的轨迹方程为$x^2-y^2=16$

18.（17 分）某单位进行招聘面试，已知参加面试的 N 名学生全都来自 A，B，C 三所学校，其中来自 A 校的学生人数为 $n(n>1)$．该单位要求所有面试人员面试前到场，并随机给每人安排一个面试号码 $k(k=1,2,\cdots,N)$，按面试号码 k 由小到大依次进行面试，每人面试时长 5 分钟，面试完成后自行离场.

（1）求面试号码为 2 的学生来自 A 校的概率；

（2）若 $N=40$，$n=10$，且 B，C 两所学校参加面试的学生人数比为$1:2$，求 A 校参加面试的学生先于其他两校学生完成面试（A 校所有参加面试的学生完成面试后，B，C 两校都还有学生未完成面试）的概率.

（3）记随机变量 X 表示最后一名 A 校学生完成面试所用的时长（从第 1 名学生开始面试到最后一名 A 校学生完

成面试所用的时间），$E(X)$ 是 X 的数学期望，证明：$E(X)=\dfrac{5n(N+1)}{n+1}$.

(1) 解：所求概率为$\dfrac{C_{N-1}^{1}C_{n}^{1}}{A_{N}^{2}}=\dfrac{n}{N}$

(2) 解：由已知得B学校的人数为10，C学校的人数为20，

最后一位来自A学校的方法数：$A_{39}^{39}C_{10}^{1}$

最后一位来自B学校但A比C后结束的方法数：$C_{39}^{9}A_{10}^{10}\cdot C_{20}^{1}A_{29}^{29}$，

最后一位是C学校但A比B后结束的方法数为：$C_{39}^{19}A_{20}^{20}\cdot C_{10}^{1}A_{19}^{19}$

所以所求概率为$1-\dfrac{A_{39}^{39}C_{10}^{1}+C_{39}^{9}A_{10}^{10}\cdot C_{20}^{1}A_{29}^{29}+C_{39}^{19}A_{20}^{20}\cdot C_{10}^{1}A_{19}^{19}}{A_{40}^{40}}=1-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{12}$

*key*2:记“最后面试的学生来自 B 校”为事件 B，“最后面试的学生来自 C 校”为事件 C，显然事件 B，C 互斥．记“A 校参加面试的学生先于其他两校学生完成面试”为事件 D，则 $D=BD+CD$．

当事件 B 发生时，只需考虑 A，C 两所学校所有参加面试的学生中最后面试的那位来自 C 校，

则 $P(BD)=P(B)P(D\mid B)=\dfrac{10}{40}\times\dfrac{20}{30}=\dfrac{1}{6}$.

当事件 C 发生时，只需考虑 A，B 两所学校所有参加面试的学生中最后面试的那位来自 B 校，

则 $P(CD)=P(C)P(D\mid C)=\dfrac{20}{40}\times\dfrac{10}{20}=\dfrac{1}{4}$．所以 $P(D)=P(BD)+P(CD)=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{12}$.

(3) 证明：X的分布列为：$P(X=5k)=\dfrac{C_{k-1}^{n-1}}{C_{N}^{n}}\cdot(k=n,n+1,\cdots,N)$

$\because kC_{k-1}^{n-1}=k\cdot\dfrac{(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!}=nC_{k}^{n}$

$\therefore E(X)=\sum\limits_{k=n}^{N}[5k\cdot\dfrac{C_{k-1}^{n-1}}{C_{N}^{n}}]=\dfrac{5n}{C_{N}^{n}}(C_{n}^{n}+C_{n+1}^{n}+\cdots+C_{N}^{n})=\dfrac{5n}{C_{N}^{n}}(C_{n+1}^{n+1}+C_{n+1}^{n}+\cdots+C_{N}^{n})$

$=\dfrac{5n}{C_{N}^{n}}\cdot C_{N+1}^{n+1}=\dfrac{5n}{\dfrac{N!}{n!(N-n)!}}\cdot\dfrac{(N+1)\cdot N!}{(n+1)\cdot n!(N-n)!}]=\dfrac{5n(N+1)}{n+1}$，证毕

19.（17 分）数值线性代数又称矩阵计算，是计算数学的一个重要分支，其主要研究对象包括向量和矩阵．对于平面向量 $\vec{a}=(x,y)$，其模定义为$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$．类似地，对于 n 行 n 列的矩阵 $A_{nn}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，其模可由向量模拓展为$\|A\|_F=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$（其中 a_{ij} 为矩阵中第 i 行第 j 列的数，$\sum$ 为求和符号），记作$\|A\|_F$，我们称这样的矩阵模为弗罗贝尼乌斯范数，例如对于矩阵 $A_{22}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$，其矩阵模

$\|A\|_F=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2^2+4^2+3^2+5^2}=3\sqrt{6}$．弗罗贝尼乌斯范数在机器学习等前沿领域有重要的应用．

2024-03-20

（1）$\forall n\in N^*$，$n\geq 3$，矩阵 $B_{nn}=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&\sqrt{2}&0&\cdots&0\\0&0&\sqrt{3}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&\sqrt{n}\end{pmatrix}$，求使 $\|B\|_F>3\sqrt{5}$ 的 n 的最小值．

（2）$\forall n\in N^*,n\geq 3$,矩阵 $C_{nn}=\begin{pmatrix}1&\cos\theta&\cos\theta&\cos\theta&\cdots&\cos\theta&\cos\theta\\0&-\sin\theta&-\sin\theta\cos\theta&-\sin\theta\cos\theta&\cdots&-\sin\theta\cos\theta&-\sin\theta\cos\theta\\0&0&\sin^2\theta&\sin^2\theta\cos\theta&\cdots&\sin^2\theta\cos\theta&\sin^2\theta\cos\theta\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&(-1)^{n-2}\sin^{n-2}\theta&(-1)^{n-2}\sin^{n-2}\theta\cos\theta\\0&0&0&0&\cdots&0&(-1)^{n-1}\sin^{n-1}\theta\end{pmatrix}$

求 $\|C\|_F$．

（3）矩阵 $D_{nn}=\begin{pmatrix}\ln\frac{n+2}{n+1}&0&0&\cdots&0\\\ln(\frac{n+1}{n})^{\frac{\sqrt{2}}{2}}&\ln(\frac{n+1}{n})^{\frac{\sqrt{2}}{2}}&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\\ln(\frac{4}{3})^{\frac{\sqrt{n-1}}{n-1}}&\ln(\frac{4}{3})^{\frac{\sqrt{n-1}}{n-1}}&\ln((\frac{4}{3})^{\frac{\sqrt{n-1}}{n-1}}&\cdots&0\\\ln(\frac{3}{2})^{\frac{\sqrt{n}}{n}}&\ln(\frac{3}{2})^{\frac{\sqrt{n}}{n}}&\ln(\frac{3}{2})^{\frac{\sqrt{n}}{n}}&\cdots&\ln(\frac{3}{2})^{\frac{\sqrt{n}}{n}}\end{pmatrix}$，证明：$\forall n\in N^*,n\geq 3$，$\|D\|_F>\sqrt{\frac{n}{3n+9}}$．

(1) 解：由已知得 $\|B\|_F=\sqrt{1+2+3+\cdots+n}=\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}>3\sqrt{5}\Leftrightarrow n(n+1)>90\Leftrightarrow n>9,\therefore n$的最小值为10

(2) 解：由已知得 $\|C\|_F=\sqrt{1+(n-1)\cos^2\theta+\sin^2\theta[1+(n-2)\cos^2\theta]+\sin^4\theta[1+(n-3)\cos^2\theta+\cdots+\sin^{2(n-2)}\theta(1+\cos^2\theta)+\sin^{2(n-1)}\theta}$

$=\sqrt{1+\sin^2\theta+\sin^4\theta+\cdots+\sin^{2(n-2)}\theta+\sin^{2(n-1)}\theta+(1-\sin^2\theta)[n-1+(n-2)\sin^2\theta+\cdots+\sin^{2(n-2)}\theta]}$

$=\sqrt{1+\sin^2\theta+\sin^4\theta+\cdots+\sin^{2(n-2)}\theta+\sin^{2(n-1)}\theta+n-1+(n-2)\sin^2\theta+\cdots+\sin^{2(n-2)}\theta-(n-1)\sin^2\theta-(n-2)\sin^4\theta-\cdots-\sin^{2(n-1)}\theta}=\sqrt{n}$

(3) 证明：由已知得 $\|D\|_F=\sqrt{\ln^2\frac{n+2}{n+1}+\ln^2\frac{n+1}{n}+\cdots+\ln^2\frac{4}{3}+\ln^2\frac{3}{2}}>\sqrt{\frac{n}{3n+9}}$

只要证明:$\ln^2\frac{n+2}{n+1}+\ln^2\frac{n+1}{n}+\cdots+\ln^2\frac{4}{3}+\ln^2\frac{3}{2}>\frac{n}{3n+9}$

设$p(x)=\ln x-1+\frac{1}{x}$， 则$p'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}>0\Leftrightarrow x>1,\therefore\ p(x)_{\min}=p(1)=0,\therefore$ 当$x\neq 1$时,$\ln x>1-\frac{1}{x}$.

当$n=1$时,$\ln\frac{3}{2}>1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}>\frac{1}{2\sqrt{3}},\therefore\ln^2\frac{3}{2}>\frac{1}{12}$成立

若$\ln^2\frac{n+2}{n+1}+\ln^2\frac{n+1}{n}+\cdots+\ln^2\frac{4}{3}+\ln^2\frac{3}{2}>\frac{n}{3n+9}$,

则$\ln^2\frac{n+3}{n+2}+\ln^2\frac{n+2}{n+1}+\ln^2\frac{n+1}{n}+\cdots+\ln^2\frac{4}{3}+\ln^2\frac{3}{2}>\frac{n}{3n+9}+\ln^2\frac{n+3}{n+2}>\frac{n+1}{3(n+1)+9}$

2024-03-20

只要证明:$\ln^2\dfrac{n+3}{n+2}>\dfrac{1}{3}(\dfrac{n+1}{n+4}-\dfrac{n}{n+3})=\dfrac{1}{(n+3)(n+4)}\Leftrightarrow\ln\dfrac{n+3}{n+2}>\dfrac{1}{\sqrt{(n+4)(n+3)}}$

$\because\ln\dfrac{n+3}{n+2}>1-\dfrac{n+2}{n+3}=\dfrac{1}{n+3}>\dfrac{1}{\sqrt{(n+3)(n+4)}}$成立，证毕

$key2$:先证$\ln^2\dfrac{n+2}{n+1}>\dfrac{1}{(n+2)^2}\Leftrightarrow\ln\dfrac{n+2}{n+1}>\dfrac{1}{n+2}$