2023-24（上）模拟（12）

2024-02-21

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．设 i 为虚数单位，且 $z(1+i)=2$，则 $\overline{z}=$（　　）A．$-1-i$　　B．$1-i$　　C．$-1+i$　　D．$1+i$

2．已知非零向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=3|\vec{b}|$，向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 方向上的投影向量是 $\sqrt{2}\vec{b}$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角的余弦值为（　）

A．$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{6}$　　C．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\dfrac{2}{3}$

3．体育课上，老师让 2 名女生和 3 名男生排成一排，要求 2 名女生之间至少有 1 名男生，则这 5 名学生不同的排法共有（　）A．24 种　　B．36 种　　C．72 种　　D．96 种

4．已知 $f(x)=\ln\left|\dfrac{1}{x+1}-a\right|+b$ 是奇函数，则 $a+e^b=$（　　）A．1　　B．$\dfrac{3}{2}$　　C．2　　D．$\dfrac{5}{2}$

5．已知 $a>0,b>0$，则下列选项中，能使 $4a+b$ 取得最小值 25 的为（　　）

A．$ab=36$　　B．$ab=9a+b$　　C．$a^2+b=21$　　D．$16a^2+b^2=625$

6. 锐角 $\triangle ABC$ 满足 $\tan A=\tan B+\dfrac{1}{\sin 2A}$，则下列等式成立的是（　　）

A．$\cos 2A+\sin B=0$　B．$\cos 2A+\cos B=0$　C．$\sin 2A+\cos B=0$　D．$\sin 2A+\sin B=0$

7．已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2,A 是椭圆 C 的上顶点，线段 AF_1 的延长线交椭圆 C 于点 B．若 $\overrightarrow{F_2A}\cdot\overrightarrow{F_2B}=0$，则椭圆 C 的离心率 $e=$（　）A．$\dfrac{\sqrt{2}}{5}$　　B．$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　C．$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　D．$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

8．在平行四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB=4,AC=2\sqrt{3}$，将 $\triangle ABC$ 沿 AC 翻折得四面体 $AB'CD$．作一平面分别与 $AD,DC,CB',B'A$ 交于点 E,F,G,H．若四边形 $EFGH$ 是边长为 $\sqrt{3}$ 的正方形，则四面体 $AB'CD$ 外接球的表面积为（　　）A．22π　　B．24π　　C．44π　　D．48π

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9．数字经济是继农业经济、工业经济之后的主要经济形态．近年来，在国家的大力推动下，我国数字经济规模增长迅猛，《“十四五”数字经济发展规划》更是将数字经济上升到了国家战略的层面．某地区 2023 年上半年月份 x 与对应数字经济的生产总值（即 GDP）y（单位：亿元）如下表所示．根据上表可得到回归方程 $y=\dfrac{102}{35}x+a$，则（　　）

月份 x	1	2	3	4	5	6
生产总值 y	30	33	35	38	41	45

A．$a=\dfrac{134}{5}$　　B．y 与 x 正相关　　C．若 r 表示变量 y 与 x 之间的相关系数，则 $r=\dfrac{102}{35}$

D．若该地区对数字经济的相关政策保持不变，则该地区 7 月份的生产总值约为 $\dfrac{236}{5}$ 亿元

10．已知圆 $C:(x-5)^2+y^2=8$，抛物线 $\Gamma:y^2=4x$ 的焦点为 F,P 为抛物线 Γ 上一点，则（　　）

A.以点 P,F 为直径端点的圆与 y 轴相切　B.当 $|PC|$ 最小时，$|PF|=1$　C.当 $|PF|=4$ 时，直线 PF 与圆 C 相切

D.当 $|PF|=2$ 时，以 P 为圆心，线段 PF 长为半径的圆与圆 C 相交公共弦长为 $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

11．已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{2}{a_n})(n\in N^*)$，给出下列四个结论正确的是（　　）

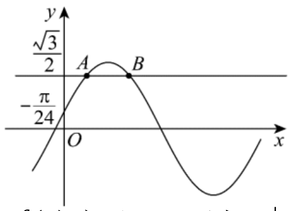
A.若$a_1=\sqrt{2}$，则数列$\{a_n\}$中有无穷多项等于$\sqrt{2}$　B.②若$a_1<-\sqrt{2}$，则对任意$n\in N^*$，有$a_{n+1}>a_n$；

C.若$a_1>0$，则存在$n_0\in N^*$，当$n\geq n_0$时，有$a_n-\sqrt{2}\leq\frac{1}{2024}$

④若$a_1>\sqrt{2}$，则对任意$n\in N^*$，有$a_{n+1}-\sqrt{2}\geq\frac{1}{2}(a_n-\sqrt{2})$；

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12．$(x+2)^5$的展开式中x^3的系数为____________．（用数字作答）．



13．已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$.如图，直线$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$与曲线$y=f(x)$交于$A,B$两点，$|AB|=\frac{\pi}{6}$，

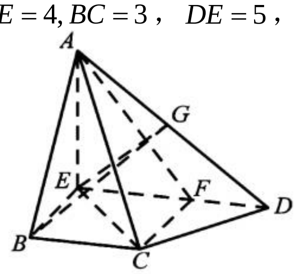
则$\varphi=$______；$y=f(x)$在区间$[t,t+\frac{\pi}{4}](t\in R)$上的最大值与最小值的差的范围是____.

14．若函数$f(x)=e^x+\cos x+(a-1)x$存在最小值，则a的取值范围是______.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15．如图，在四棱锥$A-BCDE$中，$AE\perp$底面$BCDE, BE\perp BC, BE\perp DE, AE=BE=4, BC=3$，$DE=5$，点$F$在$DE$上，$EF=3$，过点$E$作$AF$的垂线交$AD$于点$G$.

（1）证明：$AF\perp$平面BEG;（2）求平面BEG与平面ACD夹角的余弦值.



16．已知函数$f(x)=x\ln x-ax+1$，其中$a\in R$．（1）当$a=2$时，求曲线$f(x)$在$x=1$处的切线方程;

（2）记$f'(x)$为$f(x)$的导函数，若对$\forall x\in[1,3]$，都有$f(x)+\frac{5(x-1)}{x+1}\leq f'(x)$，求$a$的取值范围.

17.某次高三数学测试中选择题有单选和多选两种题型组成．单选题每题四个选项，有且仅有一个选项正确，选对得 5 分，选错得 0 分，多选题每题四个选项，有两个或三个选项正确，全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有错误选择或不选择得 0 分．（1）若小明对其中 5 道单选题完全没有答题思路，只能随机选择一个选项作答，每题选到正确选项的概率均为$\frac{1}{4}$，且每题的解答相互独立，记小明在这 5 道单选题中答对的题数为随机变量 X.

（i）求 $P(X=3)$；（ii）求使得 $P(X=k)$ 取最大值时的整数 k；

（2）若小明在解答最后一道多选题时，除发现 A,C 选项不能同时选择外，没有答题思路，只能随机选择若干选项作答．已知此题正确答案是两选项与三选项的概率均为$\frac{1}{2}$，问：小明应如何作答才能使该题得分的期望最大（写出小明得分的最大期望及作答方式）.

18.已知双曲线 C 的中心为坐标原点，右焦点为 $(\sqrt{7},0)$，且过点 $(-4,3)$．（1）求双曲线 C 的标准方程；

（2）已知点 $A(4,1)$，过点 $(1,0)$ 的直线与双曲线 C 的左、右两支分别交于点 M,N，直线 AN 与双曲线 C 交于另一点 P，设直线 AM,AN 的斜率分别为 k_1,k_2．（i）求证：k_1+k_2 为定值；（ii）求证：直线 MP 过定点，并求出该定点的坐标.

19. 对于数列$\{a_n\}$，如果存在正整数 T，使得对任意$n(n\in N^*)$，都有$a_{n+T}=a_n$，那么数列$\{a_n\}$就叫做周期数列，T叫做这个数列 周期．若周期数列$\{b_n\}$，$\{c_n\}$满足：存在正整数k，对每一个$i(i\leqslant k,i\in \mathbf{N}^*)$，都有$b_i=c_i$，我们称数列$\{b_n\}$和$\{c_n\}$为“同根数列”．(1) 判断下列数列是否为周期数列．如果是，写出该数列的周期，如果不是，说明理由；①$a_n=\sin n\pi$；②$b_n=\begin{cases}1, & n=1,\\ 3, & n=2,\\ b_{n-1}-b_{n-2}, & n\geq 3.\end{cases}$

（2）若$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是“同根数列”，且周期的最小值分别是 3 和 5，求证：$k\leq 6$；

（3）若$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是“同根数列”，且周期的最小值分别是$m+2$和$m+4$ $(m\in N^*)$，求k的最大值．

2023-24（上）模拟（12）

2024-02-21

解答

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．设 i 为虚数单位，且 $z(1+i)=2$，则 $\bar{z}=$（ D ）A． $-1-i$　　B． $1-i$　　C． $-1+i$　　D． $1+i$

2．已知非零向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=3|\vec{b}|$，向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 方向上的投影向量是 $\sqrt{2}\vec{b}$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角的余弦值为（A ）

A． $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　B． $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$　　C． $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D． $\dfrac{2}{3}$

3．体育课上，老师让 2 名女生和 3 名男生排成一排，要求 2 名女生之间至少有 1 名男生，则这 5 名学生不同的排法共有（ C ）A．24 种　　B．36 种　　C．72 种　　D．96 种

4．已知 $f(x)=\ln|\dfrac{1}{x+1}-a|+b$ 是奇函数，则 $a+e^{b}=$（ D ）A．1　　B． $\dfrac{3}{2}$　　C．2　　D． $\dfrac{5}{2}$

5．已知 $a>0,b>0$，则下列选项中，能使 $4a+b$ 取得最小值 25 的为（ B ）

A． $ab=36$　　B． $ab=9a+b$　　C． $a^{2}+b=21$　　D． $16a^{2}+b^{2}=625$

6. 锐角 $\triangle ABC$ 满足 $\tan A=\tan B+\dfrac{1}{\sin 2A}$，则下列等式成立的是（ A ）

A． $\cos 2A+\sin B=0$　B． $\cos 2A+\cos B=0$　C． $\sin 2A+\cos B=0$　D． $\sin 2A+\sin B=0$

7．已知椭圆 $C:\dfrac{x^{2}}{a^{2}}+\dfrac{y^{2}}{b^{2}}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2,A 是椭圆 C 的上顶点，线段 AF_1 的延长线交椭圆 C 于点 B．若 $\overrightarrow{F_2A}\cdot\overrightarrow{F_2B}=0$，则椭圆 C 的离心率 $e=$（ B ）A． $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$　　B． $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　C． $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　D． $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

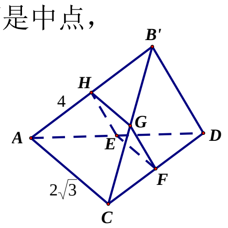
8．在平行四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB=4,AC=2\sqrt{3}$，将 $\triangle ABC$ 沿 AC 翻折得四面体 $AB'CD$．作一平面分别与 $AD,DC,CB',B'A$ 交于点 E,F,G,H．若四边形 $EFGH$ 是边长为 $\sqrt{3}$ 的正方形，则四面体 $AB'CD$ 外接球的表面积为（ A ）A． 22π　　B． 24π　　C． 44π　　D． 48π

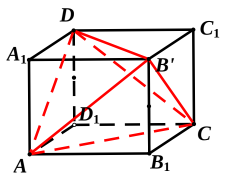
key:由已知得$EF//AC//GH,EH//B'D//GF$,且$AC\perp B'D,E,F,G,H$都是中点，

且$B'D=AC=2\sqrt{3},AB'=CD=4,B'C=AD,$

将此四面体补成长方体$AB_1CD_1-A_1B'C_1D$,且AB_1CD_1是正方形，

$\therefore 2R=\sqrt{\dfrac{12+16+16}{2}}=\sqrt{22},\therefore S=4\pi\cdot\dfrac{22}{4}=22\pi$





二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9．数字经济是继农业经济、工业经济之后的主要经济形态．近年来，在国家的大力推动下，我国数字经济规模增长迅猛，《“十四五”数字经济发展规划》更是将数字经济上升到了国家战略的层面．某地区 2023 年上半年月份 x 与对应数字经济的生产总值（即 GDP）y（单位：亿元）如下表所示．根据上表可得到回归方程 $y=\dfrac{102}{35}x+a$，则（ ABD ）

月份 x	1	2	3	4	5	6
生产总值 y	30	33	35	38	41	45

A． $a=\dfrac{134}{5}$　　B． y 与 x 正相关　　C．若 r 表示变量 y 与 x 之间的相关系数，则 $r=\dfrac{102}{35}$

D．若该地区对数字经济的相关政策保持不变，则该地区 7 月份的生产总值约为 $\dfrac{236}{5}$ 亿元

10．已知圆 $C:(x-5)^2+y^2=8$，抛物线 $\Gamma: y^2=4x$ 的焦点为 F,P 为抛物线 Γ 上一点，则（AD ）

A.以点 P,F 为直径端点的圆与 y 轴相切　B.当 $|PC|$ 最小时,$|PF|=1$　C.当 $|PF|=4$ 时，直线 PF 与圆 C 相切

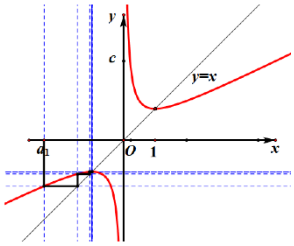
D.当 $|PF|=2$ 时，以 P 为圆心，线段 PF 长为半径的圆与圆 C 相交公共弦长为 $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

11．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+\dfrac{2}{a_n})(n\in N^*)$，给出下列四个结论正确的是（ ABC ）

A.若 $a_1=\sqrt{2}$，则数列 $\{a_n\}$ 中有无穷多项等于 $\sqrt{2}$　B.若 $a_1<-\sqrt{2}$，则对任意 $n\in N^*$，有 $a_{n+1}>a_n$；

C.若 $a_1>0$，则存在 $n_0\in N^*$，当 $n\ge n_0$ 时，有 $a_n-\sqrt{2}\le\dfrac{1}{2024}$

D.若 $a_1>\sqrt{2}$，则对任意 $n\in N^*$，有 $a_{n+1}-\sqrt{2}\ge\dfrac{1}{2}(a_n-\sqrt{2})$；

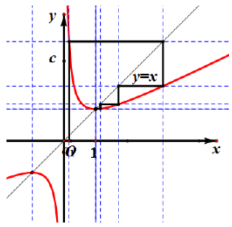


key：设 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+\dfrac{2}{x})$, 则 $f(x)=x\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$, 如图，

$A: a_1=\sqrt{2}$, 则 $a_2=\sqrt{2}$, $\therefore\{a_n\}$ 是常数数列，A 对；

$B: a_1<-\sqrt{2}$, 则 $a_2=\dfrac{1}{2}(a_1+\dfrac{2}{a_1})>a_1\Leftrightarrow a_1<-\sqrt{2}$, 由蛛网图得 B 对；

$C:\because a_1>0,\therefore a_2=\dfrac{1}{2}(a_1+\dfrac{2}{a_1})>\sqrt{2},\therefore$ 由蛛网图得：$\sqrt{2}<a_{n+1}<a_n(n\ge 2)$,



且 $a_{n+1}-\sqrt{2}=\dfrac{a_n^2+2}{2a_n}-\sqrt{2}=\dfrac{(a_n-\sqrt{2})^2}{2a_n}=(a_n-2)\cdot\dfrac{a_n-\sqrt{2}}{2a_n}\to 0$, C 对；

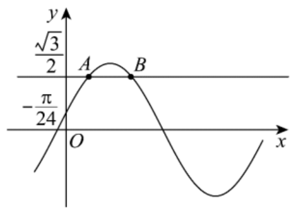
$\dfrac{a_{n+1}-\sqrt{2}}{a_n-\sqrt{2}}=\dfrac{a_n-\sqrt{2}}{2a_n}\to 0$, D 错

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12．$(x+2)^5$ 的展开式中 x^3 的系数为__________.（用数字作答）．40

13．已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2})$.如图，直线 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 与曲线 $y=f(x)$ 交于 A,B 两点，$|AB|=\dfrac{\pi}{6}$，

则 $\varphi=$______；　$y=f(x)$ 在区间 $[t,t+\dfrac{\pi}{4}](t\in R)$ 上的最大值与最小值的差的范围是____.



$\dfrac{\pi}{12}$，$[1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}]$

14．若函数 $f(x)=e^x+\cos x+(a-1)x$ 存在最小值，则 a 的取值范围是______．　$(-\infty,1)$

key：当 $a>1$ 时, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\therefore f(x)$ 没有最小值；

当 $a=1$ 时, $f(x)=e^x+\cos x$，有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, 且 $f(x)>-1$, 且 $f(2k\pi+\pi)=e^{2k\pi+\pi}-1$

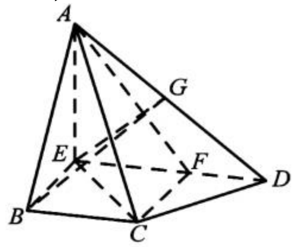
当 $x\ge 0$ 时，$f'(x)=e^x-\sin x\ge 0,\therefore f(x)\ge f(0)=2$;

当 $x<0$ 时，$f(-2k\pi+\pi)=e^{2k\pi}-1>-1(k\in N^*)$, 有 $\lim\limits_{k\to\infty}(e^{2k\pi}-1)=-1,\therefore f(x)$ 没有最小值.

当 $a<1$ 时, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty,\therefore f(x)$ 有最小值；

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15．如图，在四棱锥 $A-BCDE$ 中，$AE\perp$底面 $BCDE, BE\perp BC, BE\perp DE, AE=BE=4, BC=3$，$DE=5$，点 F 在 DE 上，$EF=3$，过点 E 作 AF 的垂线交 AD 于点 G.



（1）证明：$AF\perp$平面 BEG；（2）求平面 BEG 与平面 ACD 夹角的余弦值.

19．（1）因为 $AE\perp$平面 $BCDE, BE\subset$平面 $BCDE$，所以 $AE\perp BE$.

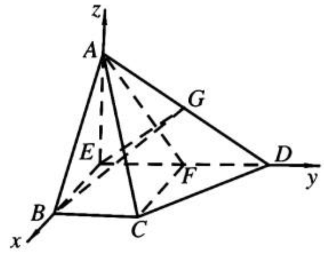
又因为 $BE\perp DE$，且 $AE\cap DE=E$，所以 $BE\perp$平面 AED，

又 $AF\subset$平面 AEF，所以 $BE\perp AF$，而 $EG\perp AF$，且 $BE\bigcap EG=E$，

所以 $AF\perp$平面 BEG.

（2）如图，以 E 为原点，EB, ED, EA 方向分别为 x, y, z 轴正向，建立空间直角坐标系 $E-xyz$，则

$A(0,0,4), B(4,0,0), D(0,5,0), C(4,3,0), F(0,3,0)$.



由（1）知，平面 BEG 的一个法向量为 $\overrightarrow{AF}=(0,3,-4)$，

设平面 ACD 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

$\overrightarrow{AD}=(0,5,-4), \overrightarrow{CD}=(-4,-2,0)$

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}5y-4z=0\\ -4x-2y=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}y=\dfrac{4}{5}z\\ y=-2x\end{cases}$，取 $\vec{n}=(-2,4,5)$，

设平面 BEG 与平面 ACD 的夹角为 θ，

则 $\cos\theta=\left|\cos<\overrightarrow{AF},\vec{n}>\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{AF}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AF}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{8}{5\cdot 3\sqrt{5}}=\dfrac{8\sqrt{5}}{75}$，

即平面 BEG 与平面 ACD 的夹角余弦值为 $\dfrac{8\sqrt{5}}{75}$.

16．已知函数 $f(x)=x\ln x-ax+1$，其中 $a\in R$．（1）当 $a=2$ 时，求曲线 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程；

（2）记 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，若对 $\forall x\in[1,3]$，都有 $f(x)+\dfrac{5(x-1)}{x+1}\le f'(x)$，求 a 的取值范围.

解：由$f'(x)=\ln x+1-a$

(1) 曲线$f(x)$在$x=1$处的切线方程为$y+1=-(x-1)$即$y=-x$

(2) 由已知得：$f(x)+\dfrac{5(x-1)}{x+1}\le f'(x)\Leftrightarrow x\ln x-ax+1+\dfrac{5(x-1)}{x+1}\le \ln x+1-a$对$1\le x\le 3$恒成立

$\Leftrightarrow a\ge \ln x+\dfrac{5}{x+1}$记为$p(x)(1<x\le 3)$

则$p'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{5}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2-3x+1}{x(x+1)^2}>0\Leftrightarrow \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}<x\le 3$

$\therefore p(x)_{\min}=p(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2})$, 而$p(1)=\dfrac{5}{2}, p(3)=\ln 3+\dfrac{5}{4}<\dfrac{5}{2}, \therefore a\ge\dfrac{5}{2}$

17.某次高三数学测试中选择题有单选和多选两种题型组成．单选题每题四个选项，有且仅有一个选项正确，选对得 5 分，选错得 0 分，多选题每题四个选项，有两个或三个选项正确，全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有错误选择或不选择得 0 分．（1）若小明对其中 5 道单选题完全没有答题思路，只能随机选择一个选项作答，每题选

到正确选项的概率均为$\frac{1}{4}$，且每题的解答相互独立，记小明在这 5 道单选题中答对的题数为随机变量 X.

（i）求$P(X=3)$；（ii）求使得$P(X=k)$取最大值时的整数k；（2）若小明在解答最后一道多选题时，除发现 A,C 选项不能同时选择外，没有答题思路，只能随机选择若干选项作答．已知此题正确答案是两选项与三选项的概率均为$\frac{1}{2}$，问：小明应如何作答才能使该题得分的期望最大（写出小明得分的最大期望及作答方式）.

17.（1）（i）因为$X\sim B\left(5,\frac{1}{4}\right)$，所以$P\left(X=3\right)=C_5^3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{45}{512}$.

（ii）因为$P\left(X=k\right)=C_5^k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{5-k},k=0,1,\cdots,5$.

$$\frac{P\left(X=k+1\right)}{P\left(X=k\right)}=\frac{C_5^{k+1}\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\left(\frac{3}{4}\right)^{4-k}}{C_5^k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{5-k}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{5-k}{k+1}=\frac{1}{3}\left(-1+\frac{6}{k+1}\right).$$

令$\frac{P\left(X=k+1\right)}{P\left(X=k\right)}\geq1$，解得$k\leq\frac{1}{2}$，所以当$k=1$时，$P\left(X=k\right)$最大，此时$P\left(X=k\right)=\frac{405}{1024}$.

（2）由题知，A,C选项不能同时选择，故小明可以选择单选、双选和三选.

正确答案是两选项的可能情况为AB,AD,BC,BD,CD，每种情况出现的概率均为$\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$.

正确答案是三选项的可能情况为ABD,BCD，每种情况出现的概率为$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

若小明做出的决策是单选，则$E\left(A\right)=E\left(C\right)=2\times\frac{1}{10}\times2+\frac{1}{4}\times2=\frac{9}{10}$（分），

$E\left(B\right)=E\left(D\right)=3\times\frac{1}{10}\times2+\frac{1}{2}\times2=\frac{8}{5}$（分），

若小明做出的决策是双选，则$E\left(AB\right)=E\left(AD\right)=E\left(BC\right)=E\left(CD\right)=\frac{1}{10}\times5+\frac{1}{4}\times2=1$（分），

$E\left(BD\right)=\frac{1}{10}\times5+\frac{1}{2}\times2=\frac{3}{2}$（分）.

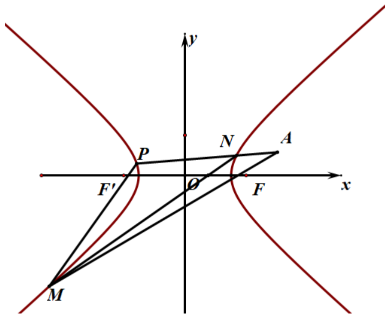
若小明做出的决策是三选，则$E\left(ABD\right)=E\left(BCD\right)=\frac{1}{4}\times5=\frac{5}{4}$（分）.

经比较，小明选择单选 B 或单选 D 的得分期望最大，最大值为$\frac{8}{5}$分

18.已知双曲线 C 的中心为坐标原点，右焦点为$(\sqrt{7},0)$，且过点$(-4,3)$.（1）求双曲线 C 的标准方程；

（2）已知点$A(4,1)$，过点$(1,0)$的直线与双曲线 C 的左、右两支分别交于点 M,N，直线 AN 与双曲线 C 交于另一点 P，设直线 AM,AN 的斜率分别为k_1,k_2.（i）求证：k_1+k_2为定值；（ii）求证：直线 MP 过定点，并求出该定点的坐标.

（1）解：由已知得$\begin{cases} c=\sqrt{7} \\ \dfrac{16}{a^2}-\dfrac{9}{b^2}=1 \end{cases}$得$a=2,b=\sqrt{3},\therefore$双曲线$C$的标准方程为$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$



（2）证明：设$l_{MN}:x=ty+1$代入C方程得$:(3t^2-4)y^2+6ty-9=0$

$$\therefore\begin{cases} y_M+y_N=-\dfrac{6t}{3t^2-4} \\ y_My_N=-\dfrac{9}{3t^2-4} \end{cases},且\Delta=144(t^2-1)>0,且|t|>\frac{2}{\sqrt{3}},$$

（ⅰ）$\therefore k_1+k_2=\dfrac{y_M-1}{x_M-4}+\dfrac{y_N-1}{x_N-4}=\dfrac{y_M-1}{ty_M-3}+\dfrac{y_N-1}{ty_N-3}=\dfrac{2ty_My_N-(t+3)(y_M+y_N)+6}{t^2y_My_N-3t(y_M+y_N)+9}$

$$=\frac{\dfrac{-18t}{3t^2-4}+\dfrac{6t^2+18t}{3t^2-4}+\dfrac{18t^2-24}{3t^2-4}}{\dfrac{-9t^2}{3t^2-4}+\dfrac{18t^2}{3t^2-4}+\dfrac{27t^2-36}{3t^2-4}}=\frac{2}{3}$$

（ⅱ）设$l_{PM}:x=sy+n$代入C方程得$:(3s^2-4)y^2+6sny+3n^2-12=0$

$$\therefore\begin{cases} y_P+y_M=\dfrac{-6sn}{3s^2-4} \\ y_Py_M=\dfrac{3n^2-12}{3s^2-4} \end{cases},且\Delta_1=48(3s^2+n^2-4)>0$$

$$\therefore k_{AP}+k_{AM}=k_1+k_2=\frac{y_M-1}{x_M-4}+\frac{y_P-1}{x_P-4}=\frac{(y_M-1)(sy_P+n-4)+(y_P-1)(sy_M+n-4)}{(sy_M+n-4)(sy_P+n-4)}=\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 6sy_My_P+3(n-s-4)(y_M+y_P)-6(n-4)=2s^2y_My_P+2s(n-4)(y_P+y_M)+2(n-4)^2$$

$$\Leftrightarrow (2s^2-6s)\cdot\frac{3n^2-12}{3s^2-4}+(2sn-5s-3n+12)\cdot\frac{-6sn}{3s^2-4}+2(n-4)^2+6(n-4)=0$$

$\Leftrightarrow n^2+9sn-5n-9s+4=(n-1)(n+9s-4)=0,\therefore n+9s-4=0,$或$n=1$舍去，

$\therefore$直线$l_{MN}:x=sy+4-9s$经过定点$(4,9).$

19. 对于数列$\{a_n\}$，如果存在正整数 T，使得对任意$n(n\in N^*)$，都有$a_{n+T}=a_n$，那么数列$\{a_n\}$就叫做周期数列，T叫做这个数列　周期．若周期数列$\{b_n\}$，$\{c_n\}$满足：存在正整数 k，对每一个$i(i\le k,i\in N^*)$，都有$b_i=c_i$，我们称数列$\{b_n\}$和$\{c_n\}$为“同根数列”．（1）判断下列数列是否为周期数列．如果是，写出该数列的周期，如果不是，说明理由；①$a_n=\sin n\pi$；②$b_n=\begin{cases} 1, & n=1, \\ 3, & n=2, \\ b_{n-1}-b_{n-2}, & n\ge 3. \end{cases}$

（2）若$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是“同根数列”，且周期的最小值分别是 3 和 5，求证：$k\le 6$；

（3）若$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是“同根数列”，且周期的最小值分别是$m+2$和$m+4$ $(m\in N^*)$，求 k 的最大值．

（1）解：①$a_{n+1}=\sin(n+1)\pi=0=\sin n\pi=a_n,\therefore\{a_n\}$是周期数列

②$b_1=1,b_2=3,b_3=2,b_4=-1,b_5=-3,b_6=-2,b_7=1,b_8=3,\therefore b_{n+6}=b_n,\therefore\{b_n\}$是周期数列

（2）证明：若$k \geq 7$，则$a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3, a_1 = b_4, a_2 = b_5, a_3 = b_6, a_1 = b_7, \cdots$

$\therefore \{b_n\}$的周期也为3, 与周期为5矛盾, $\therefore k \leq 6$, 证毕

（3）解：若$k \geq 2m+5$,

由已知得$\{a_n\}: a_1, a_2, \cdots, a_{m+2}, a_1, a_2, \cdots, a_{m+2}, a_1, a_2, \cdots,$

$\{b_n\}: a_1, a_2, \cdots, a_{m+2}, a_1, a_2, \cdots, a_{m+2}, a_1, a_2, \cdots,$

则$\{b_n\}$的周期也为$m+2$, 与周期为$m+4$矛盾，

$\therefore k \leq 2m+4$,

当$m = 2l-1$为奇数时，取

$\{a_n\}: \underbrace{1, 2, 1, 2, \cdots, 1, 2, 1, 2}_{2l\text{项}}, 1 |, \underbrace{1, 2, 1, 2, \quad \cdots, 1, 2}_{2l\text{项}}, 1, | 1, 2, \cdots,$

$\{b_n\}: \underbrace{1, 2, 1, 2, \cdots, 1, 2, 1, 1}_{2l\text{项}}, 1, \ 1, 2, | \underbrace{1, 2, 1, 2, \cdots, 1, 2}_{2l\text{项}}, 1, 2, \cdots$, 此时$k = 2m+4$

当$m = 2l$时，取$a_i = 2(1 \leq i \leq 2l+1), a_{2l+2} = 1$,

则$\{a_n\}: \underbrace{2, \cdots, 2}_{2l+1\text{项}}, 1, 2, 2, | \underbrace{2, \cdots, 2}_{2l-1\text{项}}, 1, | 2, 2, \cdots$

$\{b_n\}: \underbrace{2, \cdots, 2}_{2l+1\text{项}}, 1, 2, 2, | \underbrace{2, \cdots, 2,}_{2l-1\text{项}} 2, \ 2, 1, 2, 2, | \cdots$, 此时$k = 2l+1+3+2l-1 = 2m+3$

【小问 3 详解二】当 m 是奇数时，首先证明 $k \geqslant 2m+5$ 不存在数列满足条件.

假设 $k \geqslant 2m+5$，即对于$1 \leqslant i \leqslant 2m+5$，都有 $a_i = b_i$.

因为 $a_{m+t} = b_{m+t}\left(5 \leq t \leq m+4\right)$,

所以 $a_{t-2} = b_{t-4} = a_{t-4}\left(5 \leq t \leq m+4\right)$,

即 $a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = a_{m+2}$， 及 $a_2 = a_4 = a_6 = \cdots = a_{m+1}$.

又 $t = m+5$ 时， $a_1 = a_{2(m+2)+1} = b_{2m+5} = b_{m+1} = a_{m+1}$,

所以 $a_{n+1} = a_n$， 与 T_1 的最小值是 $m+2$ 矛盾.

其次证明 $k = 2m+4$ 存在数列满足条件.

取 $a_{(m+2)l+i} = \begin{cases} 1, i = 2k-1 (1 \leq k \leq \dfrac{m+3}{2}) \\ 2, i = 2k (1 \leq k \leq \dfrac{m+1}{2}) \end{cases} \quad (l \in \mathbf{N})$

及 $b_{(m+4)l+i}=\begin{cases}1, i=2k-1(1\le k\le \dfrac{m+3}{2})\\ 2, i=2k(1\le k\le \dfrac{m+1}{2})\\ 1, i=m+3\\ 2, i=m+4\end{cases}$ $(l\in \mathbf{N})$，

对于$1\leqslant i\leqslant 2m+4$，都有$a_i=b_i$．

当m是偶数时，首先证明$k\geqslant 2m+4$时不存在数列满足条件.

假设$k\geqslant 2m+4$，即对于$1\leqslant i\leqslant 2m+4$，都有$a_i=b_i$．

因为$a_{m+t}=b_{m+t}\left(5\le t\le m+3\right)$，

所以$a_{t-2}=b_{t-4}=a_{t-4}\left(5\le t\le m+3\right)$，

即$a_1=a_3=a_5=\cdots=a_{m+1}$，及$a_2=a_4=a_6=\cdots=a_m$．

又$t=m+4$时，$a_{m+2}=b_m=a_m$，

所以a_{n+2}=a_n，与T_1的最小值是$m+2$矛盾.

其次证明$k=2m+3$时存在数列满足条件.

取 $a_{(m+2)l+i}=\begin{cases}1, i=2k-1(1\le k\le \dfrac{m+2}{2})\\ 2, i=2k(1\le k\le \dfrac{m}{2})\\ 3, i=m+2\end{cases}$ $(l\in \mathbf{N})$

及 $b_{(m+4)l+i}=\begin{cases}1, i=2k-1(1\le k\le \dfrac{m+2}{2})\\ 2, i=2k(1\le k\le \dfrac{m}{2})\\ 3, i=m+2\\ 1, i=m+3\\ 2, i=m+4\end{cases}$ $(l\in \mathbf{N})$，

对于$1\leqslant i\leqslant 2m+3$，都有$a_i=b_i$．

综上，当m是奇数时，k的最大值为$2m+4$；

当m是偶数时，k的最大值为$2m+3$.