一元二次函数、方程及不等式解答（2）

2022-11-06

②已知 $a>0, f(x)=ax^2-x+1(x>0), A=\{x\mid f(x)\le x\}, B=\{x\mid f(f(x))\le f(x)\le x\}$,

若$A=B\ne\Phi$,则实数a的取值范围为（　）$A.(0,1]$　　$B.(0,\frac{3}{4}]$　　$C.[\frac{3}{4},1]$　　$D.[1,+\infty)$　　C

key:设$g(x)=f(x)-x=ax^2-2x+1(x>0,a>0)$,有$g(0)=1>0$,对称轴$x=\frac{1}{a}>0$

$\therefore f(x)\le x\Leftrightarrow x_1\le x\le x_2(0<x_1\le x_2$,且$x_1,x_2$是$g(x)=0$的两根)，且$0<a\le1$

则$f(f(x))\le f(x)\le x\Leftrightarrow[x_1,x_2]\subseteq\{x\mid x_1\le f(x)\le x_2$即$x_1\le a(x-x_1)(x-x_2)+x\le x_2\}$

而$x_1\le a(x-x_1)(x-x_2)+x\le x_2\Leftrightarrow\begin{cases}(x-x_1)(x-x_2+\frac{1}{a})\ge0\\(x-x_2)(x-x_1+\frac{1}{a})\le0\text{即}x_1-\frac{1}{a}\le x\le x_2\end{cases}$

当$x_2-\frac{1}{a}\ge x_1$即$x_2-x_1\ge\frac{1}{a}$时，$x_1-1\le x\le x_1$,或$x_2-\frac{1}{a}\le x\le x_2$不合；

当$x_2-\frac{1}{a}\le x_1$即$x_2-x_1\le\frac{1}{a}$时，$x_1\le x\le x_2$,$\therefore\frac{\sqrt{4-4a}}{a}\le\frac{1}{a}$得$\frac{3}{4}\le a\le1$

变式 2（1）已知$b,c\in R$，若关于x的不等式$0\le x^2+bx+c\le4$的解集为$[x_1,x_2]\cup[x_3,x_4](x_2<x_3)$,则

$(2x_4-x_3)-(2x_1-x_2)$的最小值是________ $4\sqrt{3}$.

key:由图像得x_1,x_4是，方程$x^2+bx+c=4$的两根，x_2,x_3是方程$x^2+bx+c=0$的两根

$\therefore(2x_4-x_3)-(2x_1-x_2)=2(x_4-x_1-(x_3-x_2)=2\sqrt{b^2-4c+16}-\sqrt{b^2-4c}$

令$t=\sqrt{b^2-4c}\ge0, z=2\sqrt{t^2+16}-t$得$(z+t)^2=4(t^2+16)$即$3t^2-2zt+64-z^2=0$

$\therefore\Delta=4z^2-12(64-z^2)\ge0$得$z\le4\sqrt{3}$

key:抛物线型$(y=x=ax+b+\sqrt{px+q})$：换元

圆型$(y=ax+b+\sqrt{r^2-x^2})$：截距函数

双曲线型$(y=ax+b+\sqrt{x^2+a})$：单调性，截距函数

（2）①已知关于 x 的不等式$(x-1)^2>ax^2$有且仅有三个整数解，则实数a的取值范围为_________.

key:由已知得$a>0$,且原不等式$\Leftrightarrow(x-1-\sqrt{a}x)(x-1+\sqrt{a}x)>0$

$\therefore a>1$,且$(x-\frac{1}{1-\sqrt{a}})(x-\frac{1}{1+\sqrt{a}})<0,\because\frac{1}{1+\sqrt{a}}<\frac{1}{2},\therefore-3\le\frac{1}{1-\sqrt{a}}<-2$得$a\in[\frac{16}{9},\frac{9}{4})$

②关于x的不等式$ax^2+x-2a<0$的解集为A,若集合A中恰有四个整数，则实数a的取值范围是_____.　$(\frac{2}{7},\frac{3}{7}]$

key:设$f(x)=ax^2+x-2a$(由已知得$a>0$)

有$f(0)=-2a<0, f(1)=1-a, f(2)=2+2a>0, f(-1)=-1-a<0, f(-2)=2a-2$,

$\therefore f(-3)=7a-3<0, f(-4)=14a-4\ge0$得$\frac{2}{7}\le a<\frac{3}{7}$

（3）①设函数$f(x)=ax^2+bx+c$，若$-2<f(x)<-1$的解集为$(-2,-1)$，则a的取值范围为__________.

key:当$a=0$时，符合题设；

$$当a>0时,\begin{cases}\dfrac{4ac-b^2}{4a}>-2\\ ax^2+bx+c<-1的解集为(-2,-1)得\begin{cases}-\dfrac{b}{a}=-3\\ \dfrac{c+1}{a}=2\end{cases}即b=3a,c=2a-1\end{cases},\therefore 4a(2a-1)-9a^2>-8a得0<a<4$$

$$当a<0时,\begin{cases}\dfrac{4ac-b^2}{4a}<-1\\ ax^2+bx+c>-2的解集为(-2,-1)得\begin{cases}-\dfrac{b}{a}=-3\\ \dfrac{c+2}{a}=2\end{cases}即b=3a,c=2a-2\end{cases},$$

$\therefore 4a(2a-2)-9a^2>-4a得-4<a<0.综上:a\in(-4,4)$

(13竞赛）已知$f(x)=x^2-(k+1)x+2$，若当$x>0$时$f(x)$恒大于0，则k的取值范围为_____.　$(-\infty,2\sqrt{2}-1)$

（1401 学考）34.设函数 $f(x)=x^2-ax+b(a,b\in R)$.

（I）已知 $f(x)$在区间$(-\infty,1)$上单调递减，求 a 的取值范围；

（II）存在实数 a，使得当 $x\in[0,b]$时,$2\le f(x)\le 6$ 恒成立，求 b 的最大值及此时 a 的值.

解：（Ⅰ）$\dfrac{a}{2}\ge 1$即$a\ge 2$即为所求的

(Ⅱ）（必要条件）令$x=0$得$2\le b\le 6$.

而$2\le f(x)\le 6(x\in[0,b])\Leftrightarrow x+\dfrac{b-6}{x}\le a\le x+\dfrac{b-2}{x}$对$0<x\le b$恒成立

由函数$x+\dfrac{b-6}{x}=x-\dfrac{6-b}{x}$在$0<x\le b$上递增，得$a\ge b+\dfrac{b-6}{b}$

由$b-\sqrt{b-2}=\dfrac{b^2-b+2}{b+\sqrt{b-2}}>0$得$b>\sqrt{b-2}$,$\therefore x+\dfrac{b-2}{x}\ge 2\sqrt{b-2}(0<x\le b)$

$\therefore$存在实数a，使得$b+\dfrac{b-6}{b}\le a\le 2\sqrt{b-2}$,$\therefore \dfrac{b^2+b-6}{b}=\dfrac{(b-2)(b+3)}{b}\le 2\sqrt{b-2}$

即$b^3-3b-18=(b-3)(b^2+3b+6)\le 0$得$b\le 3$

$\therefore b$的最大值为3,相应的$a=2$

(16竞赛）设函数$f(x)=x^2-(k^2-5ak+3)x+7(a,k\in R)$.已知对于任意的$k\in[0,2]$，若$x_1,x_2$满足$x_1\in[k,k+a]$，$x_2\in[k+2a,k+4a]$，则$f(x_1)\ge f(x_2)$，求正实数$a$的最大值. $\dfrac{2\sqrt{6}-4}{5}$

$key1$:最值应用

$key2$:因式分解

变式 3（1）设函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+(k^3-ak^2+\dfrac{1}{k})x+7a(a,k\in R)$，存在 $k\in[2,3]$，若 x_1,x_2 满足 $x_1\in[k,k+\dfrac{a}{2}]$，$x_2\in[k+2a,k+3a]$有 $f(x_1)\le f(x_2)$，则正实数 a 的最大值为_______.

key:（因式分解）$f(x_1)\le f(x_2)\Leftrightarrow f(x_2)-f(x_1)=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_2+x_1)+(k^3-ak^2+\frac{1}{k})(x_2-x_1)\ge 0$

$\because x_1\in[k,k+\frac{a}{2}],x_2\in[k+2a,k+3a],\therefore x_1+x_2\in[2k+2a,2k+\frac{7}{2}a],\therefore \frac{1}{2}(x_2+x_1)+k^3-ak^2+\frac{1}{k}\ge 0$

$\therefore k+a+k^3-ak^2+\frac{1}{k}\ge 0$即$a\le\frac{k^3+k+\frac{1}{k}}{k^2-1}=\frac{k^2+1+\frac{1}{k^2}}{k-\frac{1}{k}}$(令$t=k-\frac{1}{k}\in[\frac{3}{2},\frac{8}{3}]$)

$=\frac{t^2+3}{t}=t+\frac{3}{t}\le\frac{91}{24},\therefore a_{\max}=\frac{91}{24}$

（2）①已知函数$f(x)=x^2+ax+b(a,b\in R)$，对于任意实数a,总存在实数m,当$x\in[m,m+1]$时，使得$f(x)\le 0$

恒成立， 则实数b的取值范围为_______.

$key:|x_2-x_1|=\sqrt{a^2-4b}\ge 1,\therefore b\le-\frac{1}{4}$

②设函数 $f(x)=x^2+ax+\frac{3}{4}(a\in R)$，若对任意的 $x_0\in R$, $f(x_0)$ 和 $f(x_0+1)$ 至多有一个为负值，则实数 a 的取值范围是_________. $[-2,2]$

$key:p:\forall x_0\in R,\ f(x_0)\le 0$与$f(x_0+1)$至多一个负值

$\neg p:\exists x_0\in R,\ f(x_0)<0$, 且$f(x_0+1)<0\Leftrightarrow\sqrt{a^2-3}>1$即$|a|>2$

③设函数 $f(x)=x^2-ax+a+3, g(x)=x-a$, 若不存在$x_0\in R$, 使得$f(x_0)<0$与$g(x_0)<0$ 同时成立，则实数 a 的取值范围是__________.

$key:g(x_0)<0\Leftrightarrow x_0<a,$

$\therefore f(x)=x^2-ax+a+3\ge 0$对$x<a$恒成立，

当$\frac{a}{2}\le 0$即$a\le 0$时，$\Delta=a^2-4(a+3)\le 0$得$-2\le a\le 6,\therefore -2\le a\le 0;$

当$a>0$时，$a>\frac{a}{2},\therefore\Delta=a^2-4(a+3)\le 0$得$-2\le a\le 6,\therefore 0<a\le 6$.综上：$a\in[-2,6]$

④设函数 $f(x)=x^2+mx+n^2, g(x)=x^2+(m+2)x+n^2+m+1, m,n\in R$.若对于任意的$t\in R$, $f(t)$和$g(t)$ 至少有一个为非负值，则实数m的最大值为（ ） $A.1$ $B.\sqrt{3}$ $C.2$ $D.\sqrt{5}$ A

$key1:p:\forall t\in R,\ f(t)\ge 0, or, g(t)\ge 0$; $\neg p:\exists t\in R,\ f(t)<0$, 且$g(t)<0$

$$\begin{cases}t^2+mt+n^2<0\text{即}\frac{-m-\sqrt{m^2-4n^2}}{2}<t<\frac{-m+\sqrt{m^2-4n^2}}{2}\\ t^2+(m+2)t+n^2+m+1<0\text{即}\frac{-m-2-\sqrt{m^2-4n^2}}{2}<t<\frac{-m-2+\sqrt{m^2-4n^2}}{2}\end{cases}$$

$\therefore\frac{-m-\sqrt{m^2-4n^2}}{2}<t<\frac{-m-2+\sqrt{m^2-4n^2}}{2},$

$\therefore\sqrt{m^2-4n^2}>1$即$m^2>4n^2+1,\therefore m^2\le 4n^2+1,\therefore m^2\le 1$即$-1\le m\le 1$

$key2$:由$\Delta_1=m^2-4n^2,\Delta_2=(m+2)^2-4(n^2+m+1)=m^2-4n^2$. 当$m^2-4n^2\le 0$时，符合题意；

当$m^2-4n^2>0$时，则$f(x)=0$的两根为$x_1,x_2(x_1<x_2)$,则$g(x)\ge 0$对$x\in(x_1,x_2)$恒成立，

$\because -\dfrac{m+2}{2}<-\dfrac{m}{2},\therefore g(x_1)=2x_1+m+1\ge 0$即$x_1\ge -\dfrac{m+1}{2}$,

$\therefore f(-\dfrac{m+1}{2})=\dfrac{-m^2+1}{4}+n^2\ge 0,\therefore m^2\le 4n^2+1,\therefore m^2\le 1,\therefore m\in[-1,1]$

（3）①已知函数$f(x)=x^2+2x+1$,若存在实数t,当$x\in[1,m]$时，$f(x+t)\le x$恒成立，则实数m的最大值为

（ C ） $A.2$　　$B.3$　　$C.4$　　$D.5$

②已知函数 $f(x)=(x-3)(x+1)$.若存在实数t，当$x\in[m,-2]$时，$f(x+t)\le -\dfrac{5}{2}x$恒成立，则 m的最小值为___.

key:（必要条件）$(x+t-3)(x+t+1)\le -\dfrac{5}{2}x$, 令$x=-2$得$0\le t\le 6$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0\le t\le 6\\(t+m)^2-2(t+m)-3=(m+t-3)(m+t+1)\le -\dfrac{5}{2}m\end{cases}\Leftrightarrow \text{存在}t\in[0,6],\text{使得}(t+m-1)^2\le 4-\dfrac{5}{2}m\text{成立}$$

$$\Leftrightarrow |t+m-1|\le\sqrt{4-\dfrac{5}{2}m}\Leftrightarrow -\sqrt{4-\dfrac{5}{2}m}\le t+m-1\le\sqrt{4-\dfrac{5}{2}m}\Leftrightarrow -m+1-\sqrt{4-\dfrac{5}{2}m}\le t\le 1-m+\sqrt{4-\dfrac{5}{2}m}$$

$$\therefore\begin{cases}-m+1-\sqrt{4-\dfrac{5}{2}m}\le 6\\-m+1+\sqrt{4-\dfrac{5}{2}m}\ge 0\end{cases}\text{即}\frac{3}{2}\ge m\ge -\frac{21}{2}$$

③ 设函数$f(x)=\dfrac{1}{3}ax^2+(2b+1)x-a-2(a,b\in R,a\ne 0)$,若对任意的$x\in[-1,3]$,都有$f(x)\le 2$,

则$(a+3b)_{\min}=$________,$(a+3b)_{\max}=$_______.

key:（变量转换）$f(x)=(\dfrac{1}{3}x^2-1)a+(2x)b+x-2\le 2$,由$\dfrac{\frac{1}{3}x^2-1}{1}=\dfrac{2x}{3}$的$x=-1,3$

$\therefore f(3)=2a+6b+1\le 2$得$a+3b\le\dfrac{1}{2}$; $f(-1)=-\dfrac{2}{3}a-2b-3\le 2$得$a+3b\ge -\dfrac{15}{2}$

（2021福建）已知$f(x)$和$g(x)$是两个二次项系数均为1的二次函数.若$g(6)=35,\dfrac{f(-1)}{g(-1)}=\dfrac{f(1)}{g(1)}=\dfrac{21}{20}$，则$f(6)=$_.

key: $f(x)=x^2+ax+b,g(x)=x^2+cx+d$,则$g(6)=36+6c+d=35$,

且$\dfrac{1-a+b}{1-c+d}=\dfrac{1+a+b}{1+c+d}=\dfrac{21}{20},\therefore\begin{cases}a=\dfrac{21}{20}c\\b=\dfrac{21}{20}(1+d)-1\end{cases}$,

$\therefore f(6)=36+6a+b=36+6\cdot\dfrac{21}{20}c+\dfrac{21}{20}d+\dfrac{1}{20}=36+\dfrac{21}{20}\cdot(-1)+\dfrac{1}{20}=35$

（2014 高考）已知函数$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，且$0<f(-1)=f(-2)=f(-3)\le 3$，则（ ）C

$A.c\le 3$　　$B.3<c\le 5$　　$C.6<c\le 9$　　$D.c>9$

$key: f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)+k(k\in(0,3])$

$\therefore c=6+k\in(6,9]$

变式 1（1）①已知二次函数 $f(x)$满足$f(1)=1, f(2)=2, f(3)=4$，则$f(x)=$______ $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+1$

（牛顿插值公式：$f(x)=\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}\cdot 1+\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}\cdot 2+\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}\cdot 4$ ）

②已知二次函数$f(x)$满足$f(2)=f(-1)=1$,且$f(x)$的最大值为10，试确定此二次函数的解析式__.

$key: f(x)=a(x-\frac{1}{2})^2+10(a<0)$,且$f(2)=\frac{9}{4}a+10=1\therefore a=-4$

$\therefore f(x)=-4x^2+4x+9$

③ 函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{b}{2a}$ 对称.据此可推测，对任意的非零实数 a，b，c，m，n，p，关于 x 的方程 $mf^2(x)+nf(x)+p=0$ 的解集都不可能是（ D ）

A. $\{1,2\}$　　B. $\{1,4\}$　　C. $\{1,2,3,4\}$　　D. $\{1,4,16,64\}$

变式：若 $f(x)=a|x-b|+c(a\neq 0,a,b,c\in R)$ 呢？ 也选 D