2023-24（下）模拟（1）

2024-02-27

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求.

1．已知 i 为虚数单位，且 $zi-1=1+i$，则 $z\cdot\bar{z}=$（　　）A．3　　B．$\sqrt{3}$　C．5　D．$\sqrt{5}$

2. “$m=2$”是“幂函数 $f(x)=(m^2-m-1)x^{2m+1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件　C　充要条件　D. 既不充分也不必要条件

3.一组数据按从小到大的顺序排列为 2,4,m,13,16,17,若该组数据的中位数是极差的 $\frac{3}{5}$，则该组数据的 40 百分位数是（　　）A. 4　B. 4.5　C. 5　D. 9

4. 对于一些不太容易比较大小的实数，我们常常用构造函数的方法来进行，如，已知 $a=6^{\ln 5}, b=7^{\ln 4}, c=8^{\ln 3}$，要比较 a,b,c 的大小，我们就可通过构造函数 $f(x)=\ln x\ln(11-x)$ 来进行比较，通过计算，你认为下列关系正确的一项是（　）A．$a>b>c$　B．$a>c>b$　C．$b>c>a$　D．$c>b>a$

5. 已知 $|\varphi|\le\pi$,将 $y=\sin(x+\varphi)$ 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,再将横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$,得到函数 $y=f(x)$.若对 $\forall x\in(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{12})$,都有 $f(x)<0$ 成立，则实数 φ 的取值范围是（　　）A.$[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}]$ B.$[-\frac{\pi}{2},0]$ C.$[0,\frac{2\pi}{3}]$ D.$[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}]$

6. 已知 $|\vec{a}-\vec{b}|=3$，$|\vec{a}|=2|\vec{b}|$，则 $\cos<\vec{a},\vec{a}-\vec{b}>$ 的最小值为（　　）A．$\frac{1}{2}$　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　D. 1

7. 设 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列，S_n 是其前 n 项和，且 $a_1<0, S_{1999}=S_{2023}$，则（　　）

A．$d<0$　　B．$a_{2011}=0$　　C．$S_{4022}=0$　　D．$S_n\ge S_{2012}$

8. 三棱锥 $A-BCD$ 的四个顶点都在表面积为 20π 的球 O 上，点 A 在平面 BCD 的射影是线段 BC 的中点，$AB=BC=2\sqrt{3}$，则平面 BCD 被球 O 截得的截面面积为（　　）A．$2\sqrt{3}\pi$　B．3π　C．4π　D．$3\sqrt{3}\pi$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 已知直线 $l:x-2y+8=0$ 和三点 $A(2,0),B(-2,-4),C(2,5)$,过点 C 的直线 l_1 与 x 轴、y 轴的正半轴交于 M，N 两点.下列结论正确的是（　　）A. P 在直线 l 上,则 $|PA|+|PB|$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$　B.直线 l 上一点 $P(12,10)$ 使 $||PB|-|PA||$ 最大　C. 当 $|\overrightarrow{CM}|\cdot|\overrightarrow{CN}|$ 最小时 l_1 的方程是 $x+y-7=0$　D. 当 $|\overrightarrow{OM}|\cdot|\overrightarrow{ON}|$ 最小时 l_1 方程是 $5x+y-15=0$

10. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4}=1(a>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2 ,过 F_2 作直线 $y=\frac{2}{a}x$ 的垂线,垂足为 P,且与 C 的右支交于点 Q,O 为坐标原点,且 $\angle F_1PO=\frac{\pi}{6}$,则（　　）A. $|OP|=\sqrt{3}$　B. C 的离心率为 $\frac{\sqrt{13}}{3}$

C．$\sin\angle PF_1F_2=\frac{\sqrt{21}}{14}$　　D．$S_{\triangle OF_2Q}=4\sqrt{3}-6$

11. 已知数列 $\{a_n\}, a_1=a(0<a<1), a_{n+1}=a^{a_n}$ ．则下列四个结论正确的是（　　）

A. $a_2\in(a,1)$　B. $a_{10}>a_9$　C. $\{a_{2n}\}$ 为递增数列　D. $\forall n\in N^*$，使得 $|a_{n+1}-a_n|<1-a$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12. $(x^2-\frac{1}{x})^6$展开式中的常数项为__________.

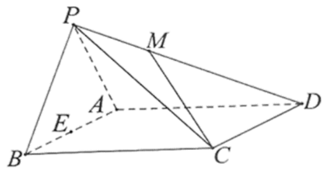
13. P 是抛物线$x^2=4y$准线为 l 上一点，A,B 在抛物线上，PA,PB 的中点也在抛物线上，直线 AB 与 l 交于点 Q，则$|PQ|$的最小值为__________.

14. 在$\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为a,b,c且$b\cos C+c\sin B=a$，$\frac{a+2b}{\sin A+2\sin B}=6\sqrt{2}$.则$b=$______；$AC$ 边上中线长的取值范围为______.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，$\angle ABC=60°$，$\triangle PAB$ 为正三角形，平面 $PAB\perp$平面 $ABCD$,E 为线段 AB 的中点，M 是线段 PD（不含端点）上的一个动点.

（1）记平面 BCM 交 PA 于点 N，求证：$MN//$平面 PBC；（2）是否存在点 M，使得二面角$P-BC-M$的正弦值为$\frac{\sqrt{10}}{10}$，若存在，确定点 M 的位置；若不存在，请说明理由.



16. 为了解学生中午的用餐方式（在食堂就餐或点外卖）与最近食堂间的距离的关系，某大学于某日中午随机调查了 2000 名学生，获得了如下频率分布表（不完整）：

学生与最近食堂间的距离 $d(m)$	$(0,200]$	$(200,400]$	$(400,600]$	$(600,800]$	$(800,+\infty)$	合计
在食堂就餐	0.15		0.10		0.00	0.50
点外卖		0.20			0.00	0.50
合计	0.20			0.15	0.00	1.00

并且由该频率分布表，可估计学生与最近食堂间的平均距离为$370m$（同一组数据以该组数据所在区间的中点值作为代表）.（1）补全频率分布表，并根据小概率值$\alpha=0.0001$的独立性检验，能否认为学生中午的用餐方式与学生距最近食堂的远近有关（当学生与最近食堂间的距离不超过$400m$时，认为较近，否则认为较远）；（2）已知该校李明同学的附近有两家学生食堂甲和乙，且他每天中午都选择食堂甲或乙就餐.（i）一般情况下，学生更愿意去饭菜更美味的食堂就餐.某日中午，李明准备去食堂就餐.此时，记他选择去甲食堂就餐为事件 A，他认为甲食堂的饭菜比乙食堂的美味为事件 D，且 D、A 均为随机事件，证明：$P(D|A)>P(D|\overline{A})$；（ii）为迎接为期 7 天的校庆，甲食堂推出了如下两种优惠活动方案，顾客可任选其一.①传统型优惠方案：校庆期间，顾客任意一天中午去甲食堂就餐均可获得a元优惠；

②"饥饿型"优惠方案：校庆期间，对于顾客去甲食堂就餐的若干天（不必连续）中午，第一天中午不优惠（即"饥饿"一天），第二天中午获得$2b$元优惠，以后每天中午均获得 b 元优惠（其中 a,b 为已知数且$b>a>0$）.

校庆期间，已知李明每天中午去甲食堂就餐的概率均为$p(0<p<1)$，且是否去甲食堂就餐相互独立.又知李明是一名"激进型"消费者，如果两种方案获得的优惠期望不一样，他倾向于选择能获得优惠期望更大的方案，如果

两种方案获得的优惠期望一样，他倾向于选择获得的优惠更分散的方案.请你据此帮他作出选择，并说明理由.

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$.

α	0.10	0.010	0.001
x_α	2.706	6.635	10.828

17. 已知函数$f(x)=(x-2)e^x$.（1）求曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程；

（2）设函数$g(x)=f(x)-2ax^2+4ax(a>0)$.

①若$g(x)$在$x=1$处取得极大值，求$g(x)$的单调区间；②若$g(x)$恰有三个零点，求a的取值范围.

18. 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且其左顶点到椭圆外的直线$x=4$的距离为$4+2\sqrt{2}$.（1）求椭圆的标准方程；（2）过点$P(2,0)$且斜率为$k$的直线$AB$交椭圆$C$于$A,B$两点，$T$为直线$x=4$上的动点，直线$AT,BT$分别交直线$x=2$于$M,N$（异于$A,B$），求线段$MN$的中点坐标.

19. 若无穷数列$\{a_n\}$满足：$\exists m\in N^*$，对于$\forall n\geq n_0(n_0\in N^*)$，都有$\dfrac{a_{n+m}}{a_n}=q$（其中$q$为常数），则称$\{a_n\}$具有性质“$Q(m,n_0,q)$”.（1）若$\{a_n\}$具有性质“$Q(4,2,3)$”，且$a_3=1,\ a_5=2,a_6+a_9+a_{11}=20$，求$a_2$；（2）若无穷数列$\{b_n\}$是等差数列，无穷数列$\{c_n\}$是公比为2的等比数列，$b_2=c_3=4,b_1+c_1=c_2,a_n=b_n+c_n$，判断$\{a_n\}$是否具有性质“$Q(2,1,3)$”，并说明理由；（3）设$\{a_n\}$既具有性质“$Q(i,1,q_1)$”，又具有性质“$Q(j,1,q_2)$”，其中$i,j\in N^*,i<j$，求证：$\{a_n\}$具有性质“$Q(j-i,i+1,q_2^{\frac{j-i}{j}})$”.

2023-24（下）模拟（1）

2024-02-27

解答

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求.

1．已知 i 为虚数单位，且 $zi-1=1+i$，则 $z\cdot\overline{z}=$（ C ）A．3　B．$\sqrt{3}$　C．5　D．$\sqrt{5}$

2. "$m=2$"是"幂函数 $f(x)=(m^2-m-1)x^{2m+1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增"的（ C ）

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件　C 充要条件　D. 既不充分也不必要条件

3.一组数据按从小到大的顺序排列为 2,4,m,13,16,17,若该组数据的中位数是极差的 $\frac{3}{5}$，则该组数据的 40 百分位数是（ C ）A. 4　B. 4.5　C. 5　D. 9

4. 对于一些不太容易比较大小的实数，我们常常用构造函数的方法来进行，如，已知 $a=6^{\ln 5},b=7^{\ln 4},c=8^{\ln 3}$，要比较 a,b,c 的大小，我们就可通过构造函数 $f(x)=\ln x\ln(11-x)$ 来进行比较，通过计算，你认为下列关系正确的一项是（ A ）A. $a>b>c$　B. $a>c>b$　C. $b>c>a$　D. $c>b>a$

5. 已知 $|\varphi|\le\pi$,将 $y=\sin(x+\varphi)$ 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,再将横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$,得到函数 $y=f(x)$.若对 $\forall x\in(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{12})$,都有 $f(x)<0$ 成立，则实数 φ 的取值范围是（ A ）A.$[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}]$ B.$[-\frac{\pi}{2},0]$ C.$[0,\frac{2\pi}{3}]$ D.$[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}]$

6. 已知 $|\vec{a}-\vec{b}|=3$，$|\vec{a}|=2|\vec{b}|$，则 $\cos<\vec{a},\vec{a}-\vec{b}>$ 的最小值为（ C ）A. $\frac{1}{2}$　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　D. 1

7. 设 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列，S_n 是其前 n 项和，且 $a_1<0,S_{1999}=S_{2023}$，则（C ）

A. $d<0$　　B. $a_{2011}=0$　　C. $S_{4022}=0$　　D. $S_n\ge S_{2012}$

8. 三棱锥 $A-BCD$ 的四个顶点都在表面积为 20π 的球 O 上，点 A 在平面 BCD 的射影是线段 BC 的中点，$AB=BC=2\sqrt{3}$，则平面 BCD 被球 O 截得的截面面积为（ C ）A. $2\sqrt{3}\pi$　B. 3π　C. 4π　D. $3\sqrt{3}\pi$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 已知直线 $l:x-2y+8=0$ 和三点 $A(2,0),B(-2,-4),C(2,5)$,过点 C 的直线 l_1 与 x 轴、y 轴的正半轴交于 M，N 两点.下列结论正确的是(BC)A. P 在直线 l 上,则 $|PA|+|PB|$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$　B.直线 l 上一点 $P(12,10)$ 使 $||PB|-|PA||$ 最大　C. 当 $|\overrightarrow{CM}|\cdot|\overrightarrow{CN}|$ 最小时 l_1 的方程是 $x+y-7=0$　D. 当 $|\overrightarrow{OM}|\cdot|\overrightarrow{ON}|$ 最小时 l_1　方程是 $5x+y-15=0$

10. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4}=1(a>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2 ,过 F_2 作直线 $y=\frac{2}{a}x$ 的垂线,垂足为 P,且与 C 的右支交于点 Q,O 为坐标原点,且 $\angle F_1PO=\frac{\pi}{6}$,则（ACD ）A.$|OP|=\sqrt{3}$　B. C 的离心率为 $\frac{\sqrt{13}}{3}$

C. $\sin\angle PF_1F_2=\frac{\sqrt{21}}{14}$　　D. $S_{\triangle OF_2Q}=4\sqrt{3}-6$

11. 已知数列 $\{a_n\},a_1=a(0<a<1),a_{n+1}=a^{a_n}$. 则下列四个结论正确的是（ABD ）

A. $a_2\in(a,1)$　B. $a_{10}>a_9$　C. $\{a_{2n}\}$ 为递增数列　D. $\forall n\in N^*$，使得 $|a_{n+1}-a_n|<1-a$

11.key：易得$a_n>0$，且$\ln a_{n+1}=a_n\ln a<0,\therefore a_{n+1}\in(0,1),\therefore \ln a_{n+1}=a_n\ln a>\ln a$得$a_{n+1}>a$，$A$对；

设$f(x)=a^x$，则$f(x)$递减，且$g(x)=f(f(x))$递增

$\because 0<a<1,a<a_n<1(n\ge 2),\therefore a_2=a^a>a^1=a_1$

$\therefore a_3=f(a_2)<f(a_1)=a_2,a_4=f(a_3)>f(a_2)=a_3,\therefore a_5=f(a_4)<f(a_3)=a_4,\therefore a_{10}>a_9$，$B$对

且$a_{n+1}-a_n\in(a-1,1-a),\therefore|a_{n+1}-a_n|<1-a$，$D$对

设$p(x)=a^x\ln a-\ln x(a<x<1)$，则$p(a)=\ln a\cdot(a^a-1)>0,p(1)=a\ln a<0$

$\therefore a_4=a^{a_3}=a^{a^{a_2}}$与$a_2$的大小关系不定，$C$错；

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12. $(x^2-\dfrac{1}{x})^6$展开式中的常数项为__________．15

13. P是抛物线$x^2=4y$准线为l上一点，A,B在抛物线上，PA,PB的中点也在抛物线上，直线AB与l交于点Q，

则$|PQ|$的最小值为__________.6

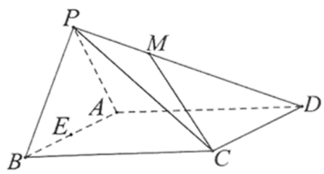
14. 在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c且$b\cos C+c\sin B=a,\dfrac{a+2b}{\sin A+2\sin B}=6\sqrt{2}$.则$b=$______；

AC边上中线长的取值范围为______．6，$(3,3+3\sqrt{2}]$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是边长为 2 的菱形，$\angle ABC=60°$，$\triangle PAB$为正三角形，平面$PAB\perp$平面$ABCD,E$为线段AB的中点，M是线段PD（不含端点）上的一个动点．

（1）记平面BCM交PA于点N，求证：$MN//$平面PBC；（2）是否存在点M，使得二面角$P-BC-M$的正弦值为$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，若存在，确定点M的位置；若不存在，请说明理由．



【小问 1 详解】证明：因为四边形$ABCD$为菱形，则$BC//AD$，

因为$BC\not\subset$平面PAD，$AD\subset$平面PAD，所以，$BC//$平面PAD，

因为$BC\subset$平面BCM，平面$BCM\cap$平面$PAD=MN$，则$MN//BC$，

因为$MN\not\subset$平面PBC，$BC\subset$平面PBC，因此，$MN//$平面PBC.

【小问 2 详解】

解：连接PE、CE、AC，

因为$\triangle PAB$为等边三角形，E为AB的中点，则$PE\perp AB$，

因为平面$PAB\perp$平面$ABCD$，平面$PAB\cap$平面$ABCD=AB$，$PE\subset$平面PAB，

所以，$PE\perp$平面$ABCD$，

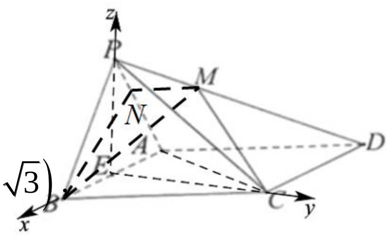
因为四边形$ABCD$是边长为2的菱形，则$AB=BC=2$，

又因为$\angle ABC=60^\circ$，则$\triangle ABC$为等边三角形，则$CE\perp AB$，

以点E为坐标原点，EB、EC、EP所在直线分别为x、y、z轴建立如下图所示的空间直角坐标系，

则$B(1,0,0)$、$C\left(0,\sqrt{3},0\right)$、$D\left(-2,\sqrt{3},0\right)$、$P\left(0,0,\sqrt{3}\right)$，

设$\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PD}=\lambda\left(-2,\sqrt{3},-\sqrt{3}\right)=\left(-2\lambda,\sqrt{3}\lambda,-\sqrt{3}\lambda\right)$，其中$0<\lambda<1$，



设平面PBC的法向量为$\vec{m}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$，$\overrightarrow{BC}=\left(-1,\sqrt{3},0\right)$，$\overrightarrow{BP}=\left(-1,0,\sqrt{3}\right)$

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BC}=-x_1+\sqrt{3}y_1=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BP}=-x_1+\sqrt{3}z_1=0\end{cases}$，取$x_1=\sqrt{3}$，可得$\vec{m}=\left(\sqrt{3},1,1\right)$，

设平面BCM的法向量为$\vec{n}=\left(x_2,y_2,z_2\right)$，

$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PM}=\left(-1,0,\sqrt{3}\right)+\left(-2\lambda,\sqrt{3}\lambda,-\sqrt{3}\lambda\right)=\left(-2\lambda-1,\sqrt{3}\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda\right)$，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=-x_2+\sqrt{3}y_2=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BM}=-\left(2\lambda+1\right)x_2+\sqrt{3}y_2+\sqrt{3}\left(1-\lambda\right)z_2=0\end{cases}$，

取$x_2=\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda$，则$y_2=1-\lambda$，$z_2=\lambda+1$，所以，$\vec{n}=\left(\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda,1-\lambda,\lambda+1\right)$，

由题意可得$\left|\cos\left\langle\vec{m},\vec{n}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\vec{m}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\left|5-3\lambda\right|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{4\left(1-\lambda\right)^2+\left(\lambda+1\right)^2}}=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，

整理可得$27\lambda^2+6\lambda-5=0$，即$\left(3\lambda-1\right)\left(9\lambda+5\right)=0$，因为$0<\lambda<1$，解得$\lambda=\dfrac{1}{3}$，

故当点M为线段PD上靠近点P的三等分点时，二面角$P-BC-M$的正弦值为$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

16. 为了解学生中午的用餐方式（在食堂就餐或点外卖）与最近食堂间的距离的关系，某大学于某日中午随机调查了 2000 名学生，获得了如下频率分布表（不完整）：

学生与最近食堂间的距离 $d(m)$	$(0,200]$	$(200,400]$	$(400,600]$	$(600,800]$	$(800,+\infty)$	合计
在食堂就餐	0.15		0.10		0.00	0.50
点外卖		0.20			0.00	0.50
合计	0.20			0.15	0.00	1.00

并且由该频率分布表，可估计学生与最近食堂间的平均距离为$370m$（同一组数据以该组数据所在区间的中点值作为代表）.（1）补全频率分布表，并根据小概率值$\alpha=0.0001$的独立性检验，能否认为学生中午的用餐方式与学生距最近食堂的远近有关（当学生与最近食堂间的距离不超过$400m$时，认为较近，否则认为较远）；（2）已知该校李明同学的附近有两家学生食堂甲和乙，且他每天中午都选择食堂甲或乙就餐.（i）一般情况下，学生更愿意去饭菜更美味的食堂就餐.某日中午，李明准备去食堂就餐.此时，记他选择去甲食堂就餐为事件A，他认为甲食堂的饭菜比乙食堂的美味为事件D，且D、A均为随机事件，证明：$P(D|A)>P(D|\overline{A})$；（ii）为迎接为期 7 天的校庆，甲食堂推出了如下两种优惠活动方案，顾客可任选其一.①传统型优惠方案：校庆期间，顾客任意一天中午去甲食堂就餐均可获得a元优惠；②“饥饿型”优惠方案：校庆期间，对于顾客去甲食堂就餐的若干天（不必连续）中午，第一天中午不优惠（即“饥饿”一天），第二天中午获得$2b$元优惠，以后每天中午均获得b元优惠（其中a,b为已知数且$b>a>0$）.校庆期间，已知李明每天中午去甲食堂就餐的概率均为$p(0<p<1)$，且是否去甲食堂就餐相互独立.又知李明是一名“激进型”消费者，如果两种方案获得的优惠期望不一样，他倾向于选择能获得优惠期望更大的方案，如果两种方案获得的优惠期望一样，他倾向于选择获得的优惠更分散的方案.请你据此帮他作出选择，并说明理由.

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$.

α	0.10	0.010	0.001
x_α	2.706	6.635	10.828

小问 1 详解】（1）设$d\in(200,400]$组的频率为t，则$d\in(400,600]$组的频率为$1-0.20-0.15-t=0.65-t$，

估计学生与最近食堂间的平均距离 $\overline{d}=100\times0.20+300t+500(0.65-t)+700\times0.15=450-200t=370$，解得 $t=0.40$，

故可补全频率分布表如下：

学生与最近食堂间的距离 $d(m)$	$(0,200]$	$(200,400]$	$(400,600]$	$(600,800]$	$(800,+\infty)$	合计
在食堂就餐	0.15	0.20	0.10	0.05	0.00	0.50
点外卖	0.05	0.20	0.15	0.10	0.00	0.50
合计	0.20	0 40	0.25	0.15	0.00	1.00

据此结合样本容量为 2000 可列出 2×2 列联表如下：

	学生距最近食堂较近	学生距最近食较堂远	合计
在食堂就餐	700	300	1000
点外卖	500	500	1000
合计	1200	800	2000

零假设 H_0：学生中午的用餐情况与学生距最近食堂的远近无关.

注意到 $x^2=\dfrac{2000\times(700\times500-300\times500)^2}{1000\times1000\times1200\times800}=\dfrac{500}{6}>10.828=x_{0.001}$.

据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，推断 H_0 不成立，

即可以认为学生中午的用餐方式与学生距最近食堂的远近有关.

【小问 2 详解】（i）证法一：由题意得 $P(A|D)>P(\overline{A}|D)$，$P(\overline{A}|\overline{D})>P(A|\overline{D})$，

结合 $P(A|D)+P(\overline{A}|D)=P(\overline{A}|\overline{D})+P(A|\overline{D})=1$，$P(A|D)>0.5>P(A|\overline{D})$.

结合条件概率公式知 $\dfrac{P(AD)}{P(D)}>\dfrac{P(A\overline{D})}{P(\overline{D})}=\dfrac{P(A)-P(AD)}{1-P(D)}$，即 $P(AD)>P(A)P(D)$.

$$P(D|A)-P(D|\overline{A})=\frac{P(AD)}{P(A)}-\frac{P(\overline{A}D)}{P(\overline{A})}$$

$$=\frac{P(AD)[1-P(A)]-\left[P(D)-P(AD)\right]P(A)}{P(A)[1-P(A)]}=\frac{P(AD)-P(A)P(D)}{P(A)[1-P(A)]}>0,$$

即 $P(D|A)>P(D|\vec{A})$ 成立.

证法二：由题意得 $P(A|D)>P(\bar{A}|D)$，$P(\bar{A}|\bar{D})>P(A|\bar{D})$，

所以 $\dfrac{P(AD)}{P(D)}>\dfrac{P(\bar{A}D)}{P(D)}\Leftrightarrow P(AD)>P(\bar{A}D)$，同理 $P(\overline{AD})>P(A\bar{D})$，

于是 $P(AD)P(\overline{AD})>P(\bar{A}D)P(A\bar{D})$，

故 $P(D|A)-P(D|\bar{A})=\dfrac{P(AD)}{P(A)}-\dfrac{P(\bar{A}D)}{P(\bar{A})}$

$$=\frac{P(AD)\left[P(\bar{A}D)+P(\overline{AD})\right]-P(\bar{A}D)[P(AD)+P(A\bar{D})]}{P(A)P(\bar{A})}$$

$=\dfrac{P(AD)P(\overline{AD})-P(\bar{A}D)P(A\bar{D})}{P(A)P(\bar{A})}>0$，即 $P(D|A)>P(D|\bar{A})$ 成立.

（ii）设李明在校庆期间去食堂甲就餐的次数为 ξ，

若选择传统型优惠方案获得的优惠为 X 元，若选择“饥饿型”优惠方案获得的优惠为 Y 元，

则 $\xi\sim B(7,p)$，$X=a\xi$，对 $0\le k\le 7$，有 $P(Y=kb)=\begin{cases}P(\xi=0)+P(\xi=1),k=0\\0,k=1\\P(\xi=k),2\le k\le 7\end{cases}$，

故 $E(X)=E(a\xi)=aE(\xi)=7pa$，

$$E(Y)=\sum_{k=2}^{7}kbP(Y=kb)=b\sum_{k=2}^{7}kP(\xi=k)=b\left[\sum_{k=0}^{7}kP(\xi=k)-P(\xi=1)\right]$$

$=b[E(\xi)-P(\xi=1)]=7pb[1-(1-p)^6]$，

令 $E(X)=E(Y)$，结合 $a<b$ 得 $p=1-a\sqrt[6]{1-\dfrac{a}{b}}$，记为 p_0.

若 $p_0<p<1$，则 $E(Y)-E(X)=7p\{b[q-(1-p)^6]-a\}>0$，$E(Y)>E(X)$，

此时李明应选择“饥饿型”优惠方案；

若 $0<p<p_0$，则 $E(Y)-E(X)=7p\{b[q-(1-p)^6]-a\}<0$，$E(Y)<E(X)$，

此时李明应选择传统型优惠方案.

若 $p=p_0$，则 $(1-p)^6=1-\dfrac{a}{b}$，$E(X)=E(Y)$.

注意到 $D(X)=D(a\xi)=a^2D(\xi)=7pa^2(1-p)$，

$$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\sum_{k=2}^{7}(kb)^2P(Y=kb)-[E(X)]^2$$

$=b^2\sum_{k=2}^{7}k^2P(\xi=k)-49p^2a^2=b^2\left[\sum_{k=0}^{7}k^2P(\xi=k)-P(\xi=1)\right]-49p^2a^2$

$=b^2\left[E(\xi^2)-P(\xi=1)\right]-49p^2a^2=b^2\{[E(\xi)]^2+D(\xi)-P(\xi=1)\}-49p^2a^2$

$=b^2\left[49p^2+7p(1-p)-7p(1-p)^6\right]-49p^2a^2=7p\{b^2\left[6p+1-(1-p)^6\right]-7pa^2\}$.

因此 $D(Y)-D(X)=7p\{b^2[6p+1-(1-p)^6]-7pa^2-(1-p)a^2\}$

$=7p\left\{6pb^2+ab-(6p+1)a^2\right\}=7p(b-a)\cdot\left[6p(b+a)+a\right]>0$，即 $D(Y)>D(X)$.

此时李明选择获得的优惠更分散的方案，即获得的优惠方差更大的方案，即“饥饿型”优惠方案.

综上所述，当 $0<p<p_0$ 时，李明应选择传统型优惠方案；

当 $p_0\le p<1$ 时，李明应选择“饥饿型”优惠方案.

17. 已知函数 $f(x)=(x-2)e^x$.（1）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（2）设函数 $g(x)=f(x)-2ax^2+4ax(a>0)$.

①若 $g(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，求 $g(x)$ 的单调区间；②若 $g(x)$ 恰有三个零点，求 a 的取值范围.

【小问 1 详解】因为 $f(x)=(x-2)\mathrm{e}^x$，

所以 $f'(x)=\mathrm{e}^x+(x-2)\mathrm{e}^x=(x-1)\mathrm{e}^x$，

所以 $f(0)=-2, f'(0)=-1$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y+2=-x$，即 $x+y+2=0$；

【小问 2 详解】①因为函数 $g(x)=f(x)-2ax^2+4ax$，

所以 $g(x)=(x-2)\mathrm{e}^x-2ax^2+4ax$，

所以 $g'(x)=(x-1)\mathrm{e}^x-4ax+4a=(x-1)(\mathrm{e}^x-4a)$，

令 $g'(x)=0$，得 $x=1$，或 $x=\ln 4a$，

（i）当 $\ln 4a<1$ 时，即 $0<a<\frac{\mathrm{e}}{4}$ 时，

令 $g'(x)<0$，得 $\ln 4a<x<1$；令 $g'(x)>0$，得 $x<\ln 4a$，或 $x>1$，

所以 $g(x)$ 在区间 $(\ln 4a,1)$ 上单调递减，在区间 $(-\infty,\ln 4a)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，此时不符合题意，

（ii）当$\ln 4a=1$时，即$a=\frac{e}{4}$时，$g'(x)=(x-1)(e^x-4a)\geq 0$，

所以$g(x)$在区间$\mathbf{R}$上单调递增，

所以$g(x)$在$x=1$处不取极值，此时不符合题意，

（iii）当$\ln 4a>1$时，即$a>\frac{e}{4}$时，

令$g'(x)<0$，得$1<x<\ln 4a$；令$g'(x)>0$，得$x<1$，或$x>\ln 4a$，

所以$g(x)$在区间$(1,\ln 4a)$上单调递减，在区间$(-\infty,1)$和$(\ln 4a,+\infty)$上单调递增，

所以$g(x)$在$x=1$处取得极大值，此时符合题意，

综上所述，$g(x)$的单调递减区间为$(1,\ln 4a)$，单调递增区间为$(-\infty,1)$和$(\ln 4a,+\infty)$；

②因为$g(x)=(x-2)e^x-2ax^2+4ax$，

所以$g(x)=(x-2)(e^x-2ax)$，

所以$x=2$是$g(x)$的一个零点，

因　$g(x)$恰有三个零点，

所以方程$e^x-2ax=0$有两个不为2实数根，即方程$\frac{1}{2a}=\frac{x}{e^x}$有两个不为2实数根，

令$h(x)=\frac{x}{e^x}$，所以$h'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，

令$h'(x)<0$，得$x>1$，令$h'(x)>0$，得$x<1$，

所以$h(x)$在区间$(-\infty,1)$上单调递增，在区间$(1,+\infty)$上单调递减，

当$x\in(-\infty,1]$时，$h(x)$的值域为$\left(-\infty,\frac{1}{e}\right]$；当$x\in(1,+\infty)$时，$h(x)$的值域为$\left(0,\frac{1}{e}\right)$，

所以$0<\frac{1}{2a}<\frac{1}{e}$，且$\frac{1}{2a}\neq\frac{2}{e^2}$，

所以$a>\frac{e}{2}$，且$a\neq\frac{e^2}{4}$，

所以a的取值范围是$\left(\frac{e}{2},\frac{e^2}{4}\right)\cup\left(\frac{e^2}{4},+\infty\right)$.

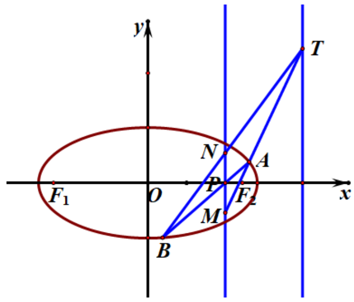
18. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，且其左顶点到椭圆外的直线$x=4$的距离为$4+2\sqrt{2}$.

（1）求椭圆的标准方程；（2）过点 $P(2,0)$ 且斜率为 k 的直线 AB 交椭圆 C 于 A,B 两点，T 为直线 $x=4$ 上的动点，直线 AT,BT 分别交直线 $x=2$ 于 M,N（异于 A,B），求线段 MN 的中点坐标.

解：（1）由已知得：$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ 4+a=4+2\sqrt{2}\end{cases}$ 得$a=2\sqrt{2},b=\sqrt{2}$,∴椭圆的标准方程为$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$

(2) 设$A(2\sqrt{2}\cos\alpha,\sqrt{2}\sin\alpha),B(2\sqrt{2}\cos\beta,\sqrt{2}\sin\beta)$

由A,P,B三点共线得：$\dfrac{\sqrt{2}\sin\alpha-\sqrt{2}\sin\beta}{2\sqrt{2}\cos\alpha-2\sqrt{2}\cos\beta}=\dfrac{\sqrt{2}\sin\alpha}{2\sqrt{2}\cos\alpha-2}$得$0=\sqrt{2}\sin(\alpha-\beta)-\sin\alpha+\sin\beta$



$=2\sqrt{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}-2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\Leftrightarrow\tan\dfrac{\alpha}{2}\tan\dfrac{\beta}{2}=-(\sqrt{2}-1)^2$,

设$T(4,t)$,由T,A,M三点共线得$\dfrac{t-\sqrt{2}\sin\alpha}{4-2\sqrt{2}\cos\alpha}=\dfrac{t-y_M}{2}$得

$y_M=t-\dfrac{t-\sqrt{2}\sin\alpha}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-\cos\alpha)}=t-\dfrac{tu^2-2\sqrt{2}u+t}{\sqrt{2}[(\sqrt{2}+1)u^2+\sqrt{2}-1]}$（其中$u=\tan\dfrac{\alpha}{2}$）

同理$y_N=t-\dfrac{t-\sqrt{2}\sin\beta}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-\cos\beta)}=t-\dfrac{t\cdot\dfrac{(\sqrt{2}-1)^4}{u^2}+\dfrac{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^2}{u}+t}{\sqrt{2}[(\sqrt{2}+1)\cdot\dfrac{(\sqrt{2}-1)^4}{u^2}+\sqrt{2}-1]}=t-\dfrac{t(\sqrt{2}-1)^4+2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^2u+tu^2}{(2-\sqrt{2})(u^2+(\sqrt{2}-1)^2]}$

$\therefore y_M+y_N=2t-\dfrac{tu^2-2\sqrt{2}u+t}{(2+\sqrt{2})(u^2+(\sqrt{2}-1)^2)}-\dfrac{t(\sqrt{2}-1)^4+2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^2u+tu^2}{(2-\sqrt{2})(u^2+(\sqrt{2}-1)^2]}$

$=2t-\dfrac{4(u^2+(\sqrt{2}-1)^2)}{2(u^2+(\sqrt{2}-1)^2)}=0$,∴$MN$的中点的坐标为$(2,0)$

$key2$:由已知设$l_{AB}:x=ty+2$代入椭圆方程得:$(t^2+4)y^2+4ty-4=0$,

$\therefore\begin{cases}y_A+y_B=-\dfrac{4t}{t^2+4}\\ y_Ay_B=-\dfrac{4}{t^2+4}\end{cases}$,设$T(4,t)$

由T, A, M三点共线得$\dfrac{t-y_A}{4-x_A}=\dfrac{t-y_M}{2}$得$y_M=t-\dfrac{2t-2y_A}{4-x_A}$,同理$y_N=t-\dfrac{2t-2y_B}{4-x_B}$

$\therefore y_M+y_N=2t-2(\dfrac{t-y_A}{4-x_A}+\dfrac{t-y_B}{4-x_B})=2t-2(\dfrac{t-y_A}{2-ty_A}+\dfrac{t-y_B}{2-ty_B})$

$=2t-2\cdot\dfrac{4t-(t^2+2)(y_A+y_B)+2ty_Ay_B}{4-2t(y_A+y_B)+t^2y_Ay_B}=2t-2\cdot\dfrac{4t-(t^2+2)\cdot\dfrac{-4t}{t^2+4}+\dfrac{-8t}{t^2+4}}{4+\dfrac{8t^2}{t^2+4}+\dfrac{-4t^2}{t^2+4}}$

$=2t-2t\cdot\dfrac{4(t^2+4)+4(t^2+2)-8}{4(t^2+4)+8t^2-4t^2}=0$,∴$MN$的中点的坐标为$(2,0)$

19. 若无穷数列$\{a_n\}$满足：$\exists m\in N^*$，对于$\forall n\geq n_0(n_0\in N^*)$，都有$\dfrac{a_{n+m}}{a_n}=q$（其中 q 为常数），则称$\{a_n\}$具有性质

“$Q(m,n_0,q)$”.（1）若 $\{a_n\}$ 具有性质“$Q(4,2,3)$”，且 $a_3=1$, $a_5=2$, $a_6+a_9+a_{11}=20$，求 a_2；

（2）若无穷数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，无穷数列 $\{c_n\}$ 是公比为 2 的等比数列，$b_2=c_3=4$, $b_1+c_1=c_2$, $a_n=b_n+c_n$，判断 $\{a_n\}$ 是否具有性质“$Q(2,1,3)$”，并说明理由；

（3）设 $\{a_n\}$ 既具有性质“$Q(i,1,q_1)$”，又具有性质“$Q(j,1,q_2)$”，其中 $i,j\in N^*$, $i<j$，求证：$\{a_n\}$ 具有性质“$Q(j-i,i+1,q_2^{\frac{j-i}{j}})$”.

(1) 解：由已知得 $\begin{cases}a_6+a_9+a_{11}=3a_2+3a_5+9a_3=20\\a_3=1\\a_5=2\end{cases}$ 得 $a_2=\dfrac{5}{3}\cdots 4$分

(2) 解: 由已知得 $\begin{cases}b_1+d=4c_1=4\\b_1+c_1=2c_1\end{cases}$ 得 $c_1=b_1=1, d=1, \therefore a_n=n+2^{n-1}$,

若 $\{a_n\}$ 具有性质"$Q(2,1,3)$", 则 $\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=3 \Leftrightarrow n+2+2^{n+1}=3(n+2^{n-1}) \Leftrightarrow 0=3\cdot 2^{n-1}-2n+2$ 对 $n\in N^*$ 恒成立

设 $p(n)=3\cdot 2^{n-1}-2n+2$, 则 $p(n+1)-p(n)=3\cdot 2^{n-1}-2\ge 1>0$

$\therefore p(n)$ 在 $n\in N^*$ 上递增, $\therefore p(n)\ge p(1)=3>0, \therefore p(n)\ne 0$

$\therefore \{a_n\}$ 不具有性质"$Q(2,1,3)$"

(3) 证明: $\because \{a_n\}$ 具有性质“$Q(i,1,q_1)$”, $\therefore \exists i\in N^*$, 使得 $\dfrac{a_{n+i}}{a_n}=q_1(n\in N^*)$ 即 $a_{n+i}=a_nq_1$,

$\because \{a_n\}$ 也具有性质“$Q(j,1,q_2)$”, $\therefore \exists j\in N^*$, 使得 $\dfrac{a_{n+j}}{a_n}=q_2(n\in N^*)$ 即 $a_{n+j}=a_nq_2$,

$\therefore a_{n+ij}=a_{n+i}q_1^{j-1}=a_nq_1^j$, 且 $a_{n+ij}=a_{n+j}q_2^{j-1}=a_nq_2^j$, $\therefore q_1^j=q_2^i$

$\{a_n\}$ 具有性质“$Q(j-i,i+1,q_2^{\frac{j-i}{j}})$” $\Leftrightarrow \dfrac{a_{n+j-i}}{a_n}=q_2^{\frac{j-i}{j}}(n\ge i+1)\cdots(*)$

而 $\dfrac{a_{n+j-i}}{a_n}=\dfrac{a_{n-i+j}}{a_{n-i}}\cdot\dfrac{a_{n-i}}{a_n}=q_2\cdot\dfrac{1}{\dfrac{a_{n-i+i}}{a_{n-i}}}=\dfrac{q_2}{q_1}$(其中 $n-i\ge 1$)

$\therefore (*) \Leftrightarrow \dfrac{q_2}{q_1}=q_2^{\frac{j-i}{j}} \Leftrightarrow q_2^{\frac{i}{j}}=q_2^{1-\frac{j-i}{j}}=q_1 \Leftrightarrow q_2^i=q_1^j$ 成立，证毕

小问 3 详解】

由$\{a_n\}$既具有性质“$Q(i,1,q_1)$”，又具有性质“$Q(j,1,q_2)$”，

即当$n\geq 1$时，有$\dfrac{a_{n+i}}{a_n}=q_1$，$\dfrac{a_{n+j}}{a_n}=q_2$，

则有$\dfrac{a_{1+i}}{a_1}\times\dfrac{a_{2+i}}{a_2}\times\cdots\times\dfrac{a_{j+i}}{a_j}=q_1^j$，$\dfrac{a_{1+j}}{a_1}\times\dfrac{a_{2+j}}{a_2}\times\cdots\times\dfrac{a_{i+j}}{a_i}=q_2^i$，

由$i<j$，故$\dfrac{\dfrac{a_{1+i}}{a_1}\times\dfrac{a_{2+i}}{a_2}\times\cdots\times\dfrac{a_{j+i}}{a_j}}{\dfrac{a_{1+j}}{a_1}\times\dfrac{a_{2+j}}{a_2}\times\cdots\times\dfrac{a_{i+j}}{a_i}}=\dfrac{q_1^j}{q_2^i}=\dfrac{a_{1+i}a_{2+i}\cdots a_j}{a_{i+1}a_{i+2}\cdots a_j}=1$，

故$q_1^j=q_2^i$，即$q_1=q_2^{\frac{i}{j}}$，由$\dfrac{a_{n+i}}{a_n}=q_1$，$\dfrac{a_{n+j}}{a_n}=q_2$，则$\dfrac{a_{n+j}}{a_{n+i}}=\dfrac{q_2}{q_1}$，

当$n\geq i+1$，即$n-i\geq 1$时，有$\dfrac{a_{n-i+j}}{a_{n-i+i}}=\dfrac{a_{n+j-i}}{a_n}=\dfrac{q_2}{q_1}=\dfrac{q_2}{q_2^{\frac{i}{j}}}=q_2^{\frac{j-i}{j}}$，

即对任意的$n\geq i+1$时，有$\dfrac{a_{n+j-i}}{a_n}=q_2^{\frac{j-i}{j}}$，即$\{a_n\}$具有性质“$Q\left(j-i,i+1,q_2^{\frac{j-i}{j}}\right)$”.