余姚中学高一期中 2022-12-02

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.已知集合 $A=\{0,1,2,3,4\}$，$B=\{y|y=2x,x\in A\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A.$\{0,2\}$　　B.$\{0,2,4\}$　　C.$\{0,4\}$　　D.$\{0,1,2,4\}$

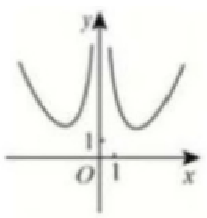
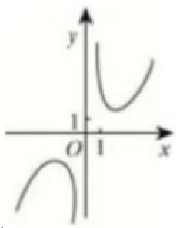
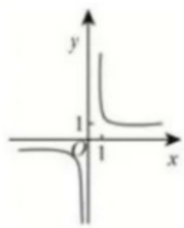
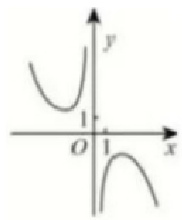
2.已知函数 $f(x)=x^2+6x+c$ 有零点，但不能用二分法求出，则 c 的值是（　　）

A.9　　B.8　　C.7　　D.6

3.设 a 为实数，则 $a>\dfrac{1}{a^2}$ 是 $a^2>\dfrac{1}{a}$ 的（　　）

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件　　C.充分必要条件　　D.既不充分也不必要条件

4.函数 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{x^2}$ 的图像大致为（　　）

A. 
B. 
C. 
D. 

5.若正实数 x，y 满足 $(x+1)(4y+1)=9$，则 $x+4y$ 的最小值为（　　）A.3　B.$\dfrac{26}{5}$　C.4　D.$\dfrac{42}{5}$

6.已知函数 $f(x)=a^{2x^2-x}$　（$a>0$，且 $a^{1}1$），若 $f(x)>1$ 对于任意 $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 恒成立，则函数 $f(x)$ 的单调递增区间为（　　）A.$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$　　B.$\left(\dfrac{1}{4},+\infty\right)$　　C.$\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$　　D.$\left(-\infty,\dfrac{1}{4}\right)$

7.中国 5G 技术领先世界，5G 技术的数学原理之一便是香农公式：$C=W\log_2\left(1+\dfrac{S}{N}\right)$，它表示：在受噪声干扰的信道中，最大信息传递速率 C 取决于信道带宽 W，信道内信号的平均功率 S，信道内部的高斯噪声功率 N 的大小，其中 $\dfrac{S}{N}$ 叫信噪比.扮照香农公式，若不改变带宽 W，将信噪比 $\dfrac{S}{N}$ 从 1000 提升至 5000，则 C 大约增加了（$\lg 2=0.3010$）（　　）A.20%　　B.23%　　C.28%　　D.50%

8.给出定义：若 $m-\dfrac{1}{2}<x\le m+\dfrac{1}{2}$（其中 m 为整数)，则 m 叫作关于 x 的“网红数”，记作 $\{x\}$，即 $\{x\}=m$.例如：$\{1.2\}=1$，$\{2.8\}=3$.给出下列关于函数 $f(x)=x-\{x\}$ 的四个命题：① $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$；② $f(3.4)=-0.4$；③ $f\left(-\dfrac{1}{4}\right)<f\left(\dfrac{1}{4}\right)$；④ $f(x)$ 的定义域是 R，值域是 $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，正确的有（　　）个

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9.下列函数中与函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 是同一个函数的是（　　）

A. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2}}$　　B. $y=\dfrac{x^0}{x}$　　C. $y=\dfrac{x}{x^2}$　　D. $y=\dfrac{1}{t}$

10.下列命题是真命题的是（　　）

A. $\forall x\in R$，$|x|\ge x$　B. $\exists x\in R$，$|x|\le -x$　C. $\forall x\in R$，$x^2-2x-3>0$　D. $\exists x\in R$，$x^2-2x-3>0$

11.设 a，b，c 都是正数，且 $9^a=15^b=25^c$，那么（　　）

A. $ab+bc=2ac$　　B. $ab+bc=ac$　　C. $\dfrac{1}{c}=\dfrac{2}{b}-\dfrac{1}{a}$　　D. $\dfrac{2}{c}=\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}$

12.已知函数 $f(x)=2^{2x}-2^{x+1}+2$，定义域为 M，值域为 $[1,2]$，则下列说法中正确的（　　）

A. $M=[0,2]$　　B. $M\subseteq(-\infty,1]$　　C. $0\in M$　　D. $1\in M$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.计算：$1.1^0+\sqrt[3]{216}-0.5^{-2}+\lg25+2\lg2=$______.

14.已知函数 $y=f\left(2^{1-x}\right)$ 的定义域是 $[0,1]$，则函数 $y=f\left(3^{-x}-1\right)$ 的定义域是______.

15．给出下列结论：① $\sqrt[4]{(-2)^4}=\pm2$；② $y=x^2+1$，$x\in[-1,2]$，y 的值域是 $[2,5]$；

③幂函数图象一定不过第四象限；④函数 $f(x)=a^{x+1}-2$（$a>0$，$a\ne1$）的图象过定点 $(-1,-1)$；

⑤若 $x\log_3 4=1$，则 2^x+2^{-x} 的值是 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，其中正确的序号是______.

16．已知 $a\in R$，函数 $f(x)=\left|x+\dfrac{16}{x}-a\right|+a$ 在区间 $[2,5]$ 上的最大值为 10，则 a 的取值范围是______.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）函数 $f(x)=\sqrt{2-4^x}$ 的定义域为 A，函数 $g(x)=-x^2+4x-1$ 的定义域为 $[0,3]$，值域为 B.

（1）记 $M=A\cap B\cap Z$，其中 Z 为整数集，写出 M 的所有子集；

（2）若 $P=\{x|m<x<2m+3\}$ 且 $P\cap B=\varnothing$，求实数 m 的取值范围.

18.（12 分）命题 p：“$\forall x\in[1,2]$，$x^2+x-a\geq 0$”，命题 q：“$\exists x\in R$，$x^2+3x+2-a=0$”.

（1）写出命题 p 的否定 $\neg p$，并求当命题 $\neg p$ 为真时，实数 a 的取值范围；

（2）若 p 和 q 中有且只有一个是真命题，求实数 a 的取值范围.

19.（12 分）杭州地铁项目正在如火如荼的进行中，通车后将给市民出行带来便利，已知某条线路通车后，列车的发车时间间隔 t（单位：分钟）满足 $2\leq t\leq 20$，经市场调研测算，列车载客量与发车时间间隔 t 相关，当 $10\leq t\leq 20$ 时列车为满载状态，载客量为 500 人，当 $2\leq t\leq 10$ 时，载客量会械少，减少的人数与 $(10-t)$ 的平方成正比，且发车时间间隔为 2 分钟时的载客量为 372 人，记列车载客量为 $p(t)$.

（1）求 $p(t)$ 的表达式，并求当发车时间间隔为 5 分钟时，列车的载客量；

（2）若该线路每分钟的净收益为 $Q(t)=\dfrac{8p(t)-2656}{t}-60$（元），问当发车时间间隔为多少时，该线路每分钟的净收益最大，并求出最大值.

20.（12 分）已知函数 $f(x)=-x^2+ax-1\ (a\in\mathbf{R})$.

（1）若函数 $f(x)$ 在区间 $[2a-1,+\infty)$ 上单调递减，求实数 a 的取值范围；

（2）若函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上的最大值为 $-\dfrac{1}{4}$，求实数 a 的值.

21.（12 分）已知函数 $f(x)=\log_3(1+ax)$，$g(x)=\log_3\left[(2a-1)x^2+(3a-2)x\right]$，$a\in R$

（1）若 $a=3$，求不等式 $f(3x+1)>f(x)$ 的解集；

（2）若方程 $f(x)-g(x)=0$ 有唯一的解，求实数 a 的取值范围.

22.（12 分）已知 $M=\{x\in R|x\neq 0且x=1\}$，$f_n(x)\ (n=1,2,\cdots)$ 是定义在 M 上的一系列函数，满足：

$f_1(x)=x, f_{i+1}(x)=f_i\left(\frac{x-1}{x}\right)\left(i\in N^*\right)$.（1）求 $f_3(x)$，$f_4(x)$ 的解析式；

（2）若 $g(x)$ 为定义在 M 上的函数，且 $g(x)+g\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x$.

①求 $g(x)$ 的解析式；②若方程 $(x-1)\cdot g(x)=mx$（$x>0$ 且 $x\neq 1$）有且仅有一个实根，求实数 m 的取值范围.

余姚中学 2022 学年第一学期期中考试高一数学

参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.B　2.A　3.A　4.B　5.C　6.D　7.B　8.B

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9.BCD　10.ABD　11.AC　12.BCD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.5　14.$\left[-1,-\log_3 2\right]$　15.③④⑤　16.$\left(-\infty,9\right]$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（10 分）

解：（1）$A=\left\{x\middle||2x+1|\le 2\right\}=\left\{x\middle|-\frac{3}{2}\le x\le\frac{1}{2}\right\}$，$g\left(x\right)=-\left(x-2\right)^2+3$，

$x=0$ 时，$g\left(x\right)$取最小值-1，$x=2$ 时，$g\left(x\right)$取最大值 3，

$\therefore B=\left[-1,3\right]$，$\therefore A\cap B=\left\{x\middle|-1\le x\le\frac{1}{2}\right\}$，$M=\left(A\cap B\right)\cap Z=\left\{-1,0\right\}$

$\therefore M$ 的所有子集为：$\varnothing$，$\left\{-1\right\}$，$\left\{0\right\}$，$\left\{-1,0\right\}$.

① $P=\varnothing$ 时，$m\ge 2m+3$，解得 $m\le -3$

② $P=\varnothing$ 时，$\begin{cases} m>-3 \\ m\geq -3或2m+3\leq -1 \end{cases}$，解得 $m\geq 3$ 或 $-3<m\leq -2$

∴实数 m 的取值范围为 $\{m|m\leq -2或m\geq 3\}$

18.【小问 1 详解】

由题意，命题 p：“$\forall x\in[1,2]$，$x^2+x-a\geq 0$”，

根据全称命题的否定形式，$\neg p$：“$\exists x\in[1,2]$，$x^2+x-a<0$”

当命题 $\neg p$ 为真时，$(x^2+x-a)_{\min}<0$，当 $x\in[1,2]$

二次函数 $y=x^2+x-a$ 为开口向上的二次函数，对称轴为 $x=-\frac{1}{2}$

故当 $x=1$ 时，函数取得最小值，即 $(x^2+x-a)_{\min}=2-a<0$

故实数 a 的取值范围是 $a>2$

【小问 2 详解】

由（1）若 p 为真命题 $a\leq 2$，若 p 为假命题 $a>2$

若命题 q：“$\exists x\in R$，$x^2+3x+2-a=0$”为真命题

则 $\Delta=9-4(2-a)\geq 0$，解得 $a\geq -\frac{1}{4}$

故若 q 为假命题 $a<-\frac{1}{4}$

由题意，p 和 q 中有且只有一个是真命题，

当 p 真和 q 假时，$a\leq 2$ 且 $a<-\frac{1}{4}$，故 $a<-\frac{1}{4}$；

当 p 假和 q 真时，$a>2$ 且 $a\geq -\frac{1}{4}$，故 $a>2$；

综上：实数 a 的取值范围是 $a>2$ 或 $a<-\frac{1}{4}$.

19.（12 分）

解：（1）当 $10\leq t\leq 20$ 时，$p(t)=500$；

当 $2\leq t<10$ 时，$p(t)=500-k(10-t)^2$，

∵ $p(2)=372$，

∴ $372=500-k\times(10-2)^2$，解得 $k=2$，

∴ $p(t)=500-2(10-t)^2$，

$\therefore p(t)=\begin{cases}500-2(10-t)^2,2\le t<10\\500,10\le t\le 20\end{cases}$,

$\therefore p(5)=500-2\times 5^2=450$（人）;

（2）当$10\le t\le 20$时，$p(t)=500$,

$\therefore Q(t)=\dfrac{8\times 500-2656}{t}-60=\dfrac{1344}{t}-60$,

$\therefore Q(t)$在$10\le t\le 20$时单调递减，

$\therefore Q(t)_{\max}=Q(10)=74.4$;

当$2\le t<10$时，$p(t)=500-2(10-t)^2$,

$\therefore Q(t)=\dfrac{4000-16(10-t)^2-2656}{t}-60=-16\left(t+\dfrac{16}{t}\right)+260$,

$\because t+\dfrac{16}{t}\ge 8$，当且仅当$t=4$时，等号成立，

$\therefore Q(t)_{\max}=Q(4)=132$.

答：当列车发车时间间隔为 4 分钟时，该线路每分钟的净收益最大，最大为 132 元.

20.（12 分）

【答案】（1）$a\ge\dfrac{2}{3}$；（2）$a=\sqrt{3}$.

【解析】（1）由题知函数$f(x)$的对称轴方程为$x=\dfrac{a}{2}$,

$\because f(x)$在区间$[2a-1,+\infty)$上单调递减，

$\therefore [2a-1,+\infty)\subseteq\left[\dfrac{a}{2},+\infty\right)$，则$2a-1\ge\dfrac{a}{2}$，解得$a\ge\dfrac{2}{3}$.

（2）由（1）知函数$f(x)$的对称轴方程为$x=\dfrac{a}{2}$,

当$\dfrac{a}{2}\le\dfrac{1}{2}$，即$a\le 1$时，函数$f(x)$在区间$\left[\dfrac{1}{2},1\right]$上单调递减，

$f(x)$最大值为$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{a}{2}-\dfrac{5}{4}=-\dfrac{1}{4}$，解得$a=2$，与$a\le 1$矛盾；

当$\dfrac{1}{2}<\dfrac{a}{2}<1$，即$1<a<2$时，函数$f(x)$在区间$\left[\dfrac{1}{2},1\right]$的最大值为$f\left(\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{a^2}{4}-1=-\dfrac{1}{4}$,

解得 $a=\pm\sqrt{3}$，舍去 $a=-\sqrt{3}$；

当 $\frac{a}{2}\geq 1$，即 $a\geq 2$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上单调递增，

$f(x)$ 最大值为 $f(1)=a-2=-\frac{1}{4}$，解得 $a=\frac{7}{4}$，与 $a\geq 2$ 矛盾，

综上，$a=\sqrt{3}$.

21.（12 分）

解：（1）若 $a=3$，$f(x)=\log_3(1+3x)$，函数 $f(x)$ 的定义域为 $\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$

所以 $\begin{cases}3x+1>-\frac{1}{3}\\x>-\frac{1}{3}\\3x+1>x\end{cases}$ $\therefore$ 不等式的解集是 $\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$

因为函数 $f(x)-g(x)=0$ 有唯一的解

所以 $1+ax=(2a-1)x^2+(3a-2)x$ 有唯一的解

即 $1+ax>0$ 时，方程 $(2a-1)x^2+(2a-2)x-1=0$ 有唯一的解

①若 $2a-1=0$ 时，解得 $x=-1$，此时 $1+ax=\frac{1}{2}>0$，所以 $a=\frac{1}{2}$

② $2a-1\neq 0$ 时，解得 $x_1=\frac{1}{2a-1}$，$x_2=-1$

当 $a=0$ 时，解得 $x_1=x_2=-1$，此时 $1+ax=1>0$

当 $a\neq 0$ 时，则 $\begin{cases}1+\frac{a}{2a-1}>0\\1-a\leq 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1-a>0\\1+\frac{a}{2a-1}\leq 0\end{cases}$，解得 $a\geq 1$ 或 $\frac{1}{3}\leq a<\frac{1}{2}$

$\therefore$ 实数 a 的取值范围为：$\{0\}\cup\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty)$

22.解：（1）$M=\{x\in R|x\neq 0且x\neq 1\}$，$f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 是定义在 M 上的一系列函数，满足：$f_1(x)=x$，

$f_{i+1}(x)=f_i\left(\frac{x-1}{x}\right)(i\in N_+)$，

$$f_2(x)=f_1\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{x-1}{x},$$

$$f_3(x)=f_2\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{\frac{x-1}{x}-1}{\frac{x-1}{x}}=\frac{1}{1-x},$$

$$f_4(x)=f_3\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{1}{1-\frac{x-1}{x}}=x,$$

$\therefore f_3(x)=\dfrac{1}{1-x}$， $f_4(x)=x$.

（2）①利用（1）中的结论，用 $\dfrac{x-1}{x}$ 替换 x 两次，

分别得到 $\begin{cases} g(x)+g\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=1+x \\ g\left(\dfrac{x-1}{x}\right)+g\left(\dfrac{1}{1-x}\right)=2-\dfrac{1}{x} \\ g\left(\dfrac{1}{1-x}\right)+g(x)=1+\dfrac{1}{1-x} \end{cases}$

消去 $g\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$， $g\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$，可得 $g(x)=\dfrac{x^3-x^2-1}{2x(x-1)}$，

②即方程 $\dfrac{x^3-x^2-1}{2x^2}=m$ 在 $x>0$ 且 $x\neq 1$ 上有唯一个实根，

设函数 $h(x)=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x^2}-1\right)$，当 $x>0$ 且 $x\neq 1$ 时， $h(x)$ 单调递增，

结合图象可知 $m\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$