一元二次函数、方程即不等式解答（3）

2022-11-27

（12竞赛）设$f(x)=x^2+bx+c$，若方程$f(x)=x$无实根，则方程$f(f(x))=x$（　）D

$A.$有四个相异实根　$B.$有两个相异实根 $C.$有一个实根　$D.$无实根

$key1$:（因式分解）$A=\{x\mid f(x)=x\}\subseteq B=\{x\mid f(f(x))=x\}$

$key2: f(x)>x$恒成立$,\therefore f(f(x))>f(x)>x$

（1804 学考）设 a 为实数，若函数 $f(x)=2x^2-x+a$ 有零点，则函数 $y=f(f(x))$ 零点的个数是(　C)

$A.$ 1 或 3　　$B.$ 2 或 3　　$C.$ 2 或 4　　$D.$ 3 或 4

（1804）$key:\Delta=1-8a\geq 0$即$a\leq\frac{1}{8}$,令$t=f(x)$

当$a=\frac{1}{8}$时$,t=\frac{1}{4}$,则$f(f(x))$有2个零点;当$a<\frac{1}{8}$时，$f(x)=x_1,or,x_2(x_1<x_2)$,

而$\frac{8a-1}{8}<0<\frac{1}{4}$,且$f(\frac{8a-1}{8})=2(\frac{8a-1}{8})^2-\frac{8a-1}{8}+1>0,\therefore\frac{8a-1}{8}<x_1,\therefore f(f(x))$有4个零点

变式 1（1） 设$f(x)=x^2+mx+n\cdot 2^x,\{x\mid f(x)=0\}=\{x\mid f(f(x))=0,x\in R\}\neq\Phi$，则$m+n$的取值范围为__

$key:$设$x_0\in A$，则$f(x_0)=0,f(f(x_0))=f(0)=n=0,$

$\therefore f(x)=x^2+mx,f(f(x))=f(x)\cdot(f(x)+m)=x(x+m)(x^2+mx+m)=0$

$\therefore\Delta=m^2-4m<0,or,m=0,$即$0\leq m<4$

（2）已知函数 $f(x)=x^2+bx+c(b,c\in R)$,集合$A=\{x\mid f(x)=0\},B=\{x\mid f(f(x))=0\}$,若$A\cap B\neq\Phi$,且

存在$x_0\in B,x_0\notin A$，则实数 b 的取值范围是_________$(-\infty,0)\bigcup[4,+\infty)$

$key:\because A\cap B\neq\Phi$,不妨设$x_1\in A\cap B$,则有$f(f(x_1))=f(0)=c=0,$

$\therefore f(x)=0\Leftrightarrow x(x+b)=0,f(f(x))=0\Leftrightarrow f(x)(f(x)+b)=0$

$\Leftrightarrow x(x+b)=0,or,x^2+bx+b=0\therefore x^2+bx+b=0$有异于0，及$-b$的解，

$\therefore\Delta=b^2-4b\geq 0$，且$b\neq 0$,即$b\in(-\infty,0)\cup[4,+\infty)$

变式 2：已知$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，且方程$f(x)=x$无实数根，下列命题：

①方程$f(f(x))=x$也一定没有实数根；②若$a>0$，则不等式$f(f(x))>x$对一切实数x都成立；

③若$a<0$，则必存在实数x_0，使$f(f(x_0))>x_0$；④若$a+b+c=0$，则不等式$f(f(x))<x$对一切

实数x都成立.以上命题中正确命题的序号为_________. ①②④

$key:$若$a>0$,则$f(x)>x,\therefore f(f(x))>f(x)>x$;若$a<0$，则$f(x)<x,\therefore f(f(x))<f(x)<x$

④$f(1)=0<1,\therefore f(x)<x,\therefore f(f(x))<f(x)<x$

（2007 高考）设 $f(x)=\begin{cases}x^2,|x|\ge 1\\ x,|x|<1\end{cases}$，$g(x)$ 是二次函数，若 $f(g(x))$ 的值域是 $[0,+\infty)$，则 $g(x)$ 的值域是（ C ）

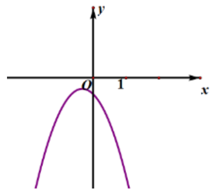
A.$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$　B．$(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$　C．$[0,+\infty)$　　D．$[1,+\infty)$

(1904）如果一个函数的值域与定义域相同，则称该函数为“同域函数”.已知函数$f(x)=\sqrt{ax^2+bx+a+1}$的定义域为$\{x\,|\,ax^2+bx+a+1\ge 0,且x\ge 0\}$.

（Ⅰ）若$a=-1,b=2,$求$f(x)$的定义域；（Ⅱ）当$a=1$时，若$f(x)$为“同域函数”，求实数b的值；

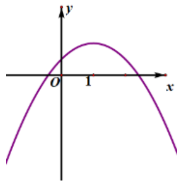
(Ⅲ）若存在实数$a<0,$且$a\ne -1$，使得$f(x)$为“同域函数”，求实数b的取值范围.

key:（Ⅰ）由$-x^2+2x\ge 0$得$0\le x\le 2,\therefore f(x)$的定义域为$[0,2]$



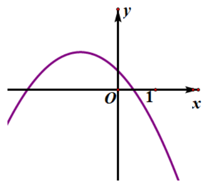
（Ⅱ）由$f(x)=\sqrt{x^2+bx+2}$得$\begin{cases}\Delta=b^2-8=0\\ -\dfrac{b}{2}>0\end{cases}$　即$b=-2\sqrt{2}$

(Ⅲ）当$a<-1$时，如图，不合；



当$-1<a<0$时，$\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}\ge 0即b\ge 0,\\ \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\sqrt{\dfrac{-\Delta}{4a}}即b=(\sqrt{-a}-1)\sqrt{\Delta}\end{cases}$（无解），

$or,\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}<0即b<0\\ \sqrt{a+1}=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\end{cases}$解得$b=-2\sqrt{a+1}\in(-2,0),$



综上b的取值范围为$(-2,0)$

变式 1（1）已知$f(x)=ax^2+bx+c,g(x)=f(f(x))$，若$g(x)$的值域为$[2,+\infty),\ f(x)$的值域为$[k,+\infty)$,

则实数k的最大值为（　）$A.0$　$B.1$　$C.2$　$D.4$　C

key:由已知得$a>0,$令$t=f(x)\in[k,+\infty),\therefore k\le 2$

（2）设$f(x)=x^2+ax+2(a\in R)$，若$\{y\,|\,y=f(f(x))\}=\{y\,|\,y=f(x)\}$，则实数$a$的取值范围为____.

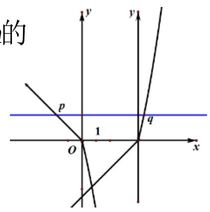
key:设$t=f(x)=(x+\dfrac{a}{2})^2+2-\dfrac{a^2}{4}\ge 2-\dfrac{a^2}{4}$,则$2-\dfrac{a^2}{4}\le -\dfrac{a}{2}$得$a\in(-\infty,-2]\cup[4,+\infty)$

变式 2（1）已知函数$f(x)=x^2-2(a+2)x+a^2,g(x)=-x^2+2(a-2)x-a^2+8,$设$H_1(x)=\max\{f(x),g(x)\}$,

$H_2(x)=\min\{f(x),g(x)\}$，记$H_1(x)$的最小值为A，$H_2(x)$的最大值为B，则$A-B=$_________. -16

（2）已知函数$f(x)=\sqrt{ax^2+bx}$，如果存在正数b，使得$f(x)$的定义域与值域相同，则$a=$____.　$0,-4$

（3）已知函数$f(x)=\begin{cases}x,x<m,\\ x^2+4x,x\ge m,\end{cases}$且$\forall p<m,\exists q>m,$使得$f(p)+f(q)=0,$则实数$m$的取值范围是________



$key: f(q)=-f(p)=\begin{cases}-p,x<m\\ -x^2-4x,x\ge m\end{cases}$,如图：$\therefore m\in(-\infty,0]$

（2017 高考）若函数$f(x)=x^2+ax+b$在区间$[0,1]$上的最大值为M，最小值为m，则$M-m$(　)B

$A.$与a有关，且与b有关 $B.$与a有关，但与b无关 $C.$与a无关，且与b无关 $D.$与a无关，但与b有关

变式 1（1）已知函数$f(x)=x^2+ax+b,m,n$满足$m<n,$且$f(m)=n-m,\ f(n)=m-n,$则当$m<x<n$时，有(　) $A.f(x)+x<n$　$B.f(x)+x>m$　$C.f(x)-x<0$　$D.f(x)-x>0$　A

（2）①若函数 $y=ax^2-2ax+1(a\in R)$ 在区间$[0,3]$上有最大值 4，则 a 的值是___1_或-3_____.

$key2$:（必要条件）$ax^2-2ax+1\le4\Leftrightarrow a(x^2-2x)\le3$

$\Leftrightarrow a\le\dfrac{3}{x(x-2)}(2<x\le3),or,a\ge\dfrac{2}{x(x-2)}(0<x<2)$

②已知函数$y=\dfrac{3}{4}x^2-3x+4$的定义域与值域均为$[a,b]$，则$a=$______$,b=$______. 1，4

key:由$f(x)=\dfrac{3}{4}(x-2)^2+1$得$a\ge1$

当$b\le2$时,$\begin{cases}f(a)=\dfrac{3}{4}a^2-3a+4=b\cdots①\\ f(b)=\dfrac{3}{4}b^2-3b+4=a\cdots②\end{cases}$，①－②得$a+b=\dfrac{8}{3},\therefore a=b=\dfrac{4}{3}$（舍去）

当$a<2<b$时,$\begin{cases}a=1\\ \max\{\dfrac{7}{3},\dfrac{3}{4}b^2-3b+4\}=b\end{cases}$得$a=1,b=4$

当$a\ge2$时,$\begin{cases}f(a)=\dfrac{3}{4}a^2-3a+4=a\\ f(b)=\dfrac{3}{4}b^2-3b+4=b\end{cases}$得$a=\dfrac{4}{3},b=4$(舍去)

变式 2:已知不等式$a\le\dfrac{3}{4}x^2-3x+4\le b$的解集为$[a,b]$，则$a+b=$_______. 4

key:由图象得$\begin{cases}\dfrac{3}{4}x^2-3x+4\le b的解集为[a,b]\\ a\le1\end{cases},\therefore\begin{cases}a+b=4\\ ab=\dfrac{4}{3}(4-b)得a=0,b=4\\ a\le1\end{cases}$

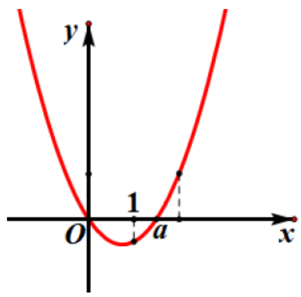
（3）已知函数$f(x)=x^2-ax,a\in R.$ 若$-2\le f(f(x))\le2$在$[1,2]$上恒成立，则实数a的取值范围为____.

$key:$由$f(f(1))=2a^2-3a+1\in[-2,2]$得$\frac{3-\sqrt{17}}{4}\le a\le\frac{3+\sqrt{17}}{4}$

由$f(f(2))=6a^2-20a+16\in[-2,2]$得$1\le a\le\frac{7}{3},\therefore 1\le a\le\frac{3+\sqrt{17}}{4}$

有$\frac{a}{2}\le\frac{3+\sqrt{17}}{8}<1,\therefore t=\underset{x\in[1,2]}{f(x)}\in[1-a,2-a]$，而$2-a\in[\frac{5-\sqrt{17}}{4},1]$

$\therefore\begin{cases}1\le a\le\frac{3+\sqrt{17}}{4}\\2-a\le\frac{a}{2}\end{cases},or,\begin{cases}1\le a\le\frac{3+\sqrt{17}}{4}\\2-a>\frac{a}{2}\\-\frac{a^2}{4}\ge-2\end{cases}$ 得$1\le a\le\frac{3+\sqrt{17}}{4}$



（1998 竞赛）已知函数$f(x)=ax^2+8x+3(a<0)$，对于给定的负数a有一个最大的正数$l(a)$，使得在区间$[0,l(a)]$上，不等式$|f(x)|\le 5$恒成立，则$l(a)$的最大值是（ B ） $A.\frac{1}{2}$ $B.\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ $C.2$ $D.3$

$key:$当$\frac{12a-64}{4a}>5$即$-8<a<0$时，由$ax^2+8x+3=5$得$l(a)=\frac{-4+\sqrt{16+2a}}{a}=\frac{2}{\sqrt{16+2a}+4}<\frac{1}{2}$

当$a\le-5$时，由$ax^2+8x+3=-5$得$l(a)=\frac{-4+\sqrt{16-8a}}{a}=\frac{8}{\sqrt{16-8a}+4}\le\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

（2008）（15）已知t为常数，函数$y=|x^2-2x-t|$在区间$[0,3]$上的最大值为 2，则$t=$___1___.

$key:\max\{3-t,t+1\}=2$得$t=1$

（2017）已知函数$f(x)=|x+\frac{4}{x}-a|+a$在$x\in[1,4]$上的最大值为5，则a的取值范围为______. $(-\infty,\frac{9}{2}]$

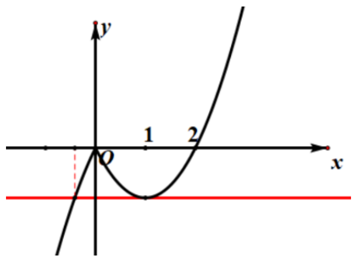
公式：$\underset{x\in[p,q]}{|f(x)|_{\max}}=\max\{\underset{x\in[p,q]}{[f(x)]_{\max}},\underset{x\in[p,q]}{-[f(x)]_{\min}}\}$

（10竞赛）设$p,q\in R,f(x)=x^2+p|x|+q$，当函数$f(x)$的零点多于1个时，$f(x)$在以其最小零点与最大零点为端点的闭区间上的最大值为______. $0,or,q$

（11竞赛）18.设$a\le 2$，求$y=(x-2)|x|$在$[a,2]$上的最大值和最小值.

$key:y=\begin{cases}(x-2)x,x\ge0,\\(2-x)x,x\le0,\end{cases}$如图，

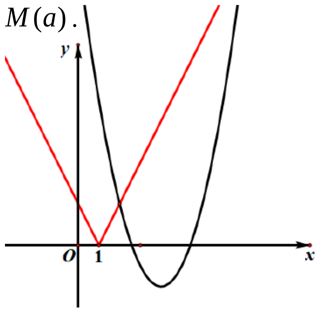
由图知，$y_{\min}=\begin{cases}a^2-2a,1<a\le2,\\-1,1-\sqrt{2}\le a\le1,\\2a-a^2,a\le1-\sqrt{2},\end{cases}$ $y_{\max}=0$



（2016）18．已知$a\ge3$，函数$F(x)=\min\{2|x-1|,x^2-2ax+4a-2\}$，其中$\min\{p,q\}=\begin{cases}p,p\le q,\\q,p>q.\end{cases}$

（I）求使得等式$F(x)=x^2-2ax+4a-2$成立的x的取值范围；

（II）（i）求 $F(x)$ 的最小值 $m(a)$；（ii）求 $F(x)$ 在区间[0,6]上的最大值 $M(a)$.



（Ⅰ）$[2,a]$

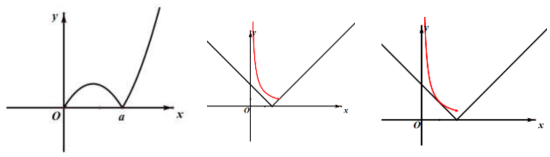
（Ⅱ）（ⅰ）$m(a)=\min\{0,-a^2+4a-2\}=\begin{cases}0,a\ge 2+\sqrt{2},\\ -a^2+4a-2,3\le a<2+\sqrt{2}\end{cases}$

（ⅱ）$M(a)=\max\{2,34-8a\}=\begin{cases}2,a\ge 4,\\ 34-8a,3\le a\le 4\end{cases}$

（202107）若函数$f(x)=x|x-a|(0\le x\le 2)$的最大值是1，则实数a的值是____.

202107$key1$:（必要条件1）由$f(2)=2|2-a|\le 1$得$\frac{3}{2}\le a\le\frac{5}{2}$，且$f(1)=|1-a|\le 1$得$0\le a\le 2,\therefore\frac{3}{2}\le a\le 2$

如图，$\therefore\max\{f(\frac{a}{2}),f(2)\}=\max\{\frac{a^2}{4},2(2-a)\}=1$得$a=2,or,\frac{3}{2}$

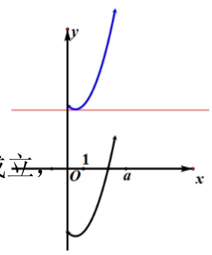


$key2$:（必要条件2）$x|x-a|\le 1$

即$|x-a|\le\frac{1}{x}$对$0<x\le 2$恒成立，且等号要取得到，

如图，$2-a=\frac{1}{2},or,\Delta=a^2-4=0$即$a=2$

变式 1（1）已知函数 $f(x)=|x^2-x-a|$在区间[0,3]上的值域为[0,4]，则$a=$________.

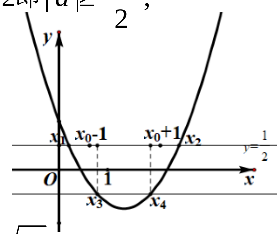


key:（最值的必要条件是恒成立）$|x^2-x-a|\le 4\Leftrightarrow x^2-x-4\le a\le x^2-x+4$在$x\in[0,3]$恒成立，

且等号成立，如图，$a=\frac{15}{4},or,2$

（2）已知函数 $f(x)=x^2+2ax+1$，若存在 $x_0\in R$，使得$|f(x_0-1)|\le\frac{1}{2}$及$|f(x_0+1)|\le\frac{1}{2}$同时成立，则实数 a 的取值范围为 ________.

key:（必要条件）$f(x)=x^2+2ax+1=\frac{1}{2}$得$|x_1-x_2|=\sqrt{\Delta_1}=\sqrt{4a^2-2}\ge x_0+1-(x_0-1)=2$即$|a|\ge\frac{\sqrt{6}}{2}$;



此时$f(x)=x^2+2ax+1=-\frac{1}{2}$得$\Delta_2=4a^2-6\ge 0$

有$x_3-x_1=\frac{1}{2}(\sqrt{4a^2-2}-\sqrt{4a^2-6})=\frac{2}{\sqrt{4a^2-2}+\sqrt{4a^2-6}}<2$

$\therefore|x_4-x_3|=\sqrt{\Delta_2}=\sqrt{4a^2-6}\le 2$得$|a|\le\frac{\sqrt{10}}{2}$.综上：$a$的取值范围为$[-\frac{\sqrt{10}}{2},-\frac{\sqrt{6}}{2}]\cup[\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{10}}{2}]$

（201811月学考）设函数$f(x)=3|ax|-(x+a)^2$，其中$a\in R$.

（Ⅱ）若对任意$x\in[a,a+1]$，恒有$f(x)\ge -1$，求实数a的取值范围.

key:（Ⅰ）$f(x)=3|x|-(x+1)^2=\max\{-x^2+x-1,-x^2-5x-1\}$（如图）$\in(-\infty,\frac{21}{4}]$即为所求的

（Ⅱ）令$x=a$得$f(a)=3a^2-4a^2=-a^2\ge -1$得$-1\le a\le 1$;

令$x=a+1$得$f(a+1)=3|a(a+1)|-(2a+1)^2\ge -1$得$-1\le a\le 0$

$\therefore f(x)=\max\{3ax-(x+a)^2,-3ax-(x+a)^2\}=\max\{-x^2+ax-a^2,-x^2-5ax-a^2\}$

（由$-x^2+ax-a^2-(-x^2-5ax-a^2)=6ax>0\Leftrightarrow x<0),\therefore f(x)$的图象如图，

$\therefore \underset{x\in[a,a+1]}{f(x)_{\min}}=\min\{f(a),f(a+1),f(0)\}(\because f(0)=-a^2=f(a))$

$=\min\{f(a),f(a+1)\}\ge -1$（前面已证）$.\therefore a$的取值范围为$[-1,0]$

变式 1（1）已知$a,b,c\in R^+(a>c)$，关于x的方程$|x^2-ax+b|=cx$恰有三个不等实根，且

函数$f(x)=|x^2-ax+b|+cx$的最小值是c^2，则$\frac{a}{c}=$___. 5

key:$\Leftrightarrow|x+\frac{b}{x}-a|=c$有三个实根$,\therefore 2\sqrt{b}-a=-c$即$b=\frac{(a-c)^2}{4}$

$f(x)=\max\{x^2-(a-c)x+\frac{(a-c)^2}{4},-x^2+(a+c)x-\frac{(a-c)^2}{4}\}$

$\therefore x^2-(a-c)x+\frac{(a-c)^2}{4}=-x^2+(a+c)x-\frac{(a-c)^2}{4}=c^2$得$\begin{cases}2cx=2c^2\text{即}x=c\\2x^2-2ax+\frac{(a-c)^2}{2}=0\end{cases},\therefore \frac{a}{c}=5$

（2）已知函数 $f(x)=ax+1+|2x^2+ax-1|(a\in R)$ 的最小值为 0，则 $a=$（　　）C

A. $\frac{1}{2}$　　B. -1　　C. ± 1　　D. $\pm\frac{1}{2}$

（3）已知$a,b\in R$,函数$f(x)=\frac{1}{2}(x^2+ax+b+|x^2-ax-b|)$最小值为$b^2$,则$b$的取值范围为______.

key:（必要条件）$f(0)=\frac{1}{2}(b+|b|)\ge b^2$得$0\le b\le 1$

$f(x)=\max\{x^2,ax+b\}$,如图，得$\begin{cases}a\ge 0\\-ab+b=b^2\end{cases},or,\begin{cases}a<0\\ab+b=b^2\end{cases}$，得$0\le b\le 1,$