函数性质基本题型解答（1）

2022-12-04

（2001 全国）设$f(x)$是定义在R上的偶函数,其图像关于直线$x=1$对称,$\forall x_1,x_2\in[0,\frac{1}{2}]$,

都有$f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$,且$f(1)=a$.（1）求 $f(\frac{1}{2})$及$f(\frac{1}{4})$；（2）证明： $f(x)$是周期函数；

（3）记$a_n=f(2n+\frac{1}{2n})$，求 $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln a_n)$.

若$f(1)=a$,则$n\cdot\log_a[f(2n+\frac{1}{2n})]=$_____ $n\in N^*$.

$key: f(-x)=f(x), f(-x)=f(x+2), \therefore T=2$

$f(x)=f^2(\frac{x}{2})\ge 0$,而$f(1)=f^2(\frac{1}{2})=a, \therefore f(\frac{1}{2})=a^{\frac{1}{2}}$

$f(\frac{1}{2})=f(\underbrace{\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{n个})=f(\frac{1}{2n})\cdot f(\underbrace{\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{n-1个})=f^n(\frac{1}{2n}), \therefore f(\frac{1}{2n})=a^{\frac{1}{2n}}, \therefore n\log_a[f(2n+\frac{1}{2n})]=\frac{1}{2}$

结论：若$f(a+x)=f(a-x), f(b+x)=f(b-x)(b>a)$，则$f(x+2a)=f(-x)=f(2b+x), \therefore T=2b-2a$

若$f(a+x)=-f(a-x), f(b+x)=-f(b-x)(b>a)$，则$f(x+2a)=-f(-x)=f(2b+x), \therefore T=2b-2a$

若$f(a+x)=-f(a-x), f(b+x)=f(b-x)(b>a)$，则$f(x+2a)=-f(-x), f(-x)=f(2b+x)$,

$\therefore f(2b-2a+x)=-f(x), \therefore f(4b-4a+x)=-f(2b-2a+x)=f(x) \therefore T=2b-2a$

（2008竞赛）设$f(x)$是定义在R上的函数，若$f(0)=2008$,且对任意$x\in R$，满足$f(x+2)-f(x)\le 3\cdot 2^x$,

$f(x+6)-f(x)\ge 63\cdot 2^x$,则$f(2008)=$______.

$key: 63\cdot 2^x\le f(x+6)-f(x)\le f(x+4)+3\cdot 2^{x+4}-f(x)$

$\ge f(x+2)+3\cdot 2^{x+2}+3\cdot 2^{x+4}-f(x)\le 3\cdot 2^x+3\cdot 2^{x+2}+3\cdot 2^{x+4}=63\cdot 2^x, \therefore f(x+2)-f(x)=3\cdot 2^x$

$\therefore f(2008)=f(2008)-f(2006)+\cdots+f(4)-f(2)+f(2)-f(0)+f(0)$

$=3(2^{2006}+\cdots+2^2+2^0)+2008=2^{2008}+2007$

$key2:$令$g(x)=f(x)-2^x$,则$g(x+2)-g(x)=f(x+2)-f(x)-2^{x+2}+2^x\le 3\cdot 2^x-3\cdot 2^x=0$,

$g(x+6)-g(x)=f(x+6)-f(x)-2^{x+6}+2^x\ge 63\cdot 2^x-63\cdot 2^x=0$,

即$g(x+2)\le g(x), g(x+6)\ge g(x)$,

$\therefore g(x)\le g(x+6)\le g(x+4)\le g(x+2)\le g(x), \therefore g(x+2)=g(x)$,

$\therefore f(2008)=g(2008)+2^{2008}=g(0)+2^{2008}=2^{2008}+2007$

（2018 吉林）3.已知函数 $f(x)$ 满足： $f(1)=\frac{1}{4}, 4f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y)\ (x,y\in R)$， 则 $f(2019)=$

（ B ）A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $-\frac{1}{4}$

$key: f(x+1)+f(x-1)=4f(x)f(1)=f(x)$即$f(x+1)=f(x)-f(x-1)$

$\therefore f(x+2)=f(x+1)-f(x)=-f(x-1), \therefore f(x+3)=-f(x), \therefore f(x+6)=f(x)$

$\therefore f(2019)=f(2016+3)=f(3)=-f(0)=-\frac{1}{2}$,(令$y=0, x=1$得$4f(1)f(0)=2f(1)$得$f(0)=\frac{1}{2}$)

（2019 江苏）7．设 $f(x)$ 是定义在 Z 上的函数，且对于任意的整数 n，满足 $f(n+4)-f(n)\le 2(n+1)$，

$f(n+12)-f(n)\ge 6(n+5),f(-1)=-504,$则$\dfrac{f(2019)}{673}$的值是________． 1512

$key:f(2019)=f(2019)-f(2015)+f(2015)-f(2011)+\cdots+f(7)-f(3)+f(3)$

$\le 2\cdot 2016+2\cdot 2012+\cdots+2\cdot 4+f(3)=2020\cdot 504+f(3)$

$f(2019)=f(2019)-f(2007)+f(2007)-f(1995)+\cdots+f(15)-f(3)+f(3)$

$\ge 6\cdot 2012+\cdots+6\cdot 8+f(3)=2020\cdot 504+f(3)$

$\therefore f(2019)=2020\cdot 504+f(3),$且$f(3)=f(-1)=-504,\therefore \dfrac{f(2019)}{673}=\dfrac{2020\cdot 504-504}{673}=1512$

（2022 新高考II）8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，且 $f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y),f(1)=1$，则 $\sum\limits_{k=1}^{22}f(k)=$（ A ）A. -3 B. -2 C. 0 D. 1

$key:$令$y=0,x=1$得$2f(1)=f(1)\cdot f(0),\therefore f(0)=2,\therefore f(2)=-f(-1)=f(1)-f(0)=-1,$

令$y=1$得$f(x+1)+f(x-1)=f(x)\cdot f(1)=f(x)$即$f(x+1)=f(x)-f(x-1)$

$\therefore f(x+2)=f(x+1)-f(x)=-f(x-1),\therefore f(x+3)=-f(x),\therefore f(x+6)=f(x)$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=f(1)+f(2)+f(3)-f(1)-f(2)-f(3)=0$

$\therefore \sum\limits_{k=1}^{22}f(k)=4[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)]-f(5)-f(6)=f(2)+f(3)=2f(2)-f(1)=-3$

（2022 北京）已知函数$f:R\to R$，使得任取实数x,y,z都有$f(xy)+f(xz)-2f(x)f(yz)\ge\dfrac{1}{2}$,则

$[1\cdot f(1)]+[2\cdot f(2)]+\cdots+[2022\cdot f(2022)]=$_____.（其中$[x]$表示不大于$x$的最大整数）1022121

$key:$令$x=y=z=0$得$2f(0)-2f^2(0)\ge\dfrac{1}{2}$得$f(0)=\dfrac{1}{2}$

令$x=y=z=1$得$2f(1)-2f^2(1)\ge\dfrac{1}{2}$即$4f^2(1)-4f(1)+1\le 0,\therefore f(1)=\dfrac{1}{2}$

令$y=z=0$得$1-f(x)\ge\dfrac{1}{2}$得$f(x)\le\dfrac{1}{2}$;令$y=z=1$得$2f(x)-2f(x)f(1)=f(x)\ge\dfrac{1}{2},\therefore f(x)=\dfrac{1}{2},$

（2022四川）已知函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上严格递减，对任意$x>0,$均有$f(x)\cdot f(f(x)+\dfrac{2}{x})=\dfrac{1}{3},$

记$g(x)=f(x)+4x^2,x\in(0,+\infty)$，则$g(x)$的最小值为_____.

$key:f(x)\cdot f(f(x)+\dfrac{2}{x})=\dfrac{1}{3}$得$f(f(x)+\dfrac{2}{x})=\dfrac{1}{3f(x)}$

得$f(f(x)+\dfrac{2}{x})\cdot f(f(f(x)+\dfrac{2}{x})+\dfrac{2}{f(x)+\dfrac{2}{x}})=\dfrac{1}{3f(x)}\cdot f(\dfrac{1}{3f(x)}+\dfrac{2x}{xf(x)+2})=\dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow f(\dfrac{1}{3f(x)}+\dfrac{2x}{xf(x)+2})=f(x),\therefore \dfrac{1}{3f(x)}+\dfrac{2x}{xf(x)+2}=x$得$f(x)=\dfrac{1}{x}$,或$f(x)=-\dfrac{2}{3x}$(舍去)

$\therefore g(x)=\dfrac{1}{x}+4x^2=\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2x}+4x^2\ge 3$