2023-24（下）模拟（14）

2024-02-20

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知 i 是关于 x 的方程 $2x^2+px+q=0(p,q\in R)$ 的一个根，则 $p+q=$（　　）A　0　B. -2　C. 2　D. 1

2. 已知向量 $\vec{a}=(3,1)$，$\vec{b}=(3,2),\vec{c}=(1,4)$，则 $\cos<\vec{a},\vec{b}-\vec{c}>=$（　）A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　C. $\frac{\sqrt{5}}{10}$　D. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

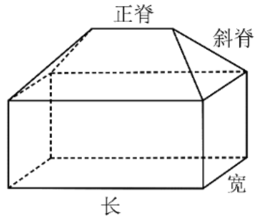
3. 二项式 $(x-\frac{1}{x})^6$ 的展开式中 x^4 的系数与 x^6 的系数之比为（　）A. 6　B. -6　C. 15　D. -15

4.已知正数 a,b 满足 $a+2b=1$，则（　　）A. $ab\geq\frac{1}{8}$　B. $ab>\frac{1}{8}$　C. $0<ab\leq\frac{1}{8}$ D. $0<ab<\frac{1}{8}$

5. 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则“$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$”是“数列 $\{a_n\}$ 是等差数列”的（　　）

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件　C. 充要条件　D. 既不充分也不必要条件

6. 成语“运筹帷幄之中，决胜千里之外”，意思是在小小的军帐之内作出正确的部署，决定了千里之外战场上的胜利，说的是运筹的重要性.“帷幄”是古代打仗必备的帐篷，又称“幄帐”，如图是一种幄帐示意图，帐顶采用“五脊四坡式”，四条斜脊的长度相等，一条正脊平行于底面.若各斜坡面与底面所成二面角的正切值均为 $\frac{1}{2}$，底面矩形的长与宽之比为 $2:1$，则正脊与斜脊长度的比值为（　）



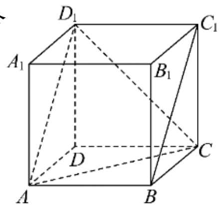
A. $\frac{2}{3}$　B. $\frac{4}{3}$　C. $\frac{3}{4}$　D. $\frac{5}{4}$

7.已知 A，B 为双曲线 $x^2-y^2=1$ 上不同两点，下列点中可为线段 AB 的中点的是（　　）

A. $(1,1)$　B. $(2,3)$　C. $(\sqrt{2},1)$　D. $(-1,\frac{1}{2})$

8. 已知在 $\triangle ABC$ 中，$a=2b$，$\sin B=\frac{1}{3}$，则 $\sin\frac{C}{2}-\sin\frac{B-A}{2}=$（　　）A. $\frac{\sqrt{10}}{3}$　B. $-\frac{\sqrt{10}}{3}$　C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　D. $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．



9. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，则下列四个命题正确的是（　　）

A. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的内切球的半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$　B. 两条异面直线 D_1C 和 BC_1 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$

C. 直线 BC 与平面 ABC_1D_1 所成的角等于 $\frac{\pi}{4}$　　D. 点 D 到面 ACD_1 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

10. 设 A，B 是一次随机试验中的两个事件，且 $P(\overline{A})=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{1}{4}$，$P(\overline{A}B+A\overline{B})=\frac{7}{12}$，则（　　）

A. A，B 相互独立　　B. $P(\vec{A}+\vec{B})=\frac{5}{6}$　　C. $P(B|A)=\frac{1}{3}$　　D. $P(\overline{A}|B)\neq P(\overline{B}|A)$

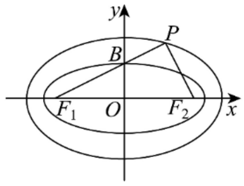
11. 已知函数 $f(x)=e^x-kx$，$g(x)=k\ln x-x,k>0$，则（　　）A. 当 $k>e$ 时，函数 $f(x)$ 有两个零点 B. 存在某个 $k\in(0,+\infty)$，使得函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 零点个数不相同　C. 存在 $k>e$，使得 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的零点

D. 若函数 $f(x)$ 有两个零点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，$g(x)$ 有两个零点 $x_3,x_4(x_3<x_4)$，一定有 $x_1x_4=x_2x_3$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知如下的两组数据：第一组：10、11、12、15、14、13；第二组：12、14、13、15、a、16.若两组数据的方差相等，则实数 a 的值为_________.

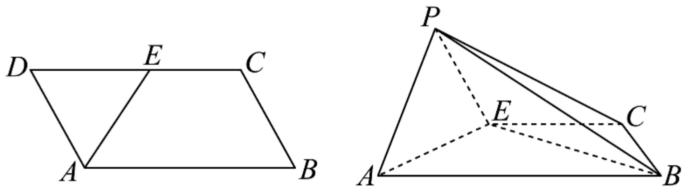
13. 若函数 $f(x)=\sin\omega x+\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})(\omega>0)$,在 $[0,\pi]$ 上恰有两个最大值点和四个零点,则实数 ω 的取值范围是______________.



14. 如图，椭圆 $C_1:\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1(a_1>b_1>0)$ 和 $C_2:\frac{x^2}{a_2^2}+\frac{y^2}{b_2^2}=1$ 有相同的焦点 F_1,F_2，离心率分别为 e_1,e_2，B 为椭圆 C_1 的上顶点，$F_2P\perp F_1P$，F_1,B,P 三点共线且垂足 P 在椭圆 C_2 上，则 $\frac{e_1}{e_2}$ 的最大值是______.

四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15. 如图，已知四边形 $ABCD$ 为平行四边形，E 为 CD 的中点，$AB=4$，$AD=AE=2$.将 $\triangle ADE$ 沿 AE 折起，使点 D 到达点 P 的位置，使平面 $APE\perp$ 平面 $ABCE$.



（1）求证：$AP\perp BE$；

（2）求平面 PAC 与平面 PBE 夹角的余弦值.

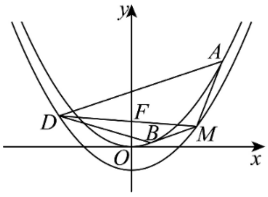
16. 已知函数 $f(x)=(e-a)e^{x}+x(a\in R)$.（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）若存在实数 a，使得关于 x 的不等式 $f(x)\le\lambda a$ 恒成立，求实数 λ 的取值范围.

17. 已知一个盒子中装有 1 个黑球和 2 个白球，这些球除颜色外全部相同.每次从盒子中随机取出 1 个球，并换入 1 个黑球，记以上取球换球活动为 1 次操作.设 n 次操作后盒子中所剩黑球的个数为 ξ.

（1）当 $n=3$ 时，求 ξ 的分布列；（2）当 $n=k(k\ge3)$ 时，求 ξ 的分布列和数学期望 $E(\xi)$.

18. 已知抛物线 $C_1:x^2=4y$ 的焦点为 F，M 为抛物线 $C_2:x^2=4(y+1)$ 上一点，且在第一象限内.过 M 作抛物线 C_1 的两条切线 MA，MB，A，B 是切点；射线 MF 交抛物线 C_2 于 D.



（1）求直线 AB 的方程（用 M 点横坐标 x_0 表示）；（2）求四边形 $MADB$ 面积的最小值.

19. 已知 $Q:a_1,a_2,\cdots,a_k$ 为有穷正整数数列，且 $a_1\le a_2\le\cdots\le a_k$，集合 $X=\{-1,0,1\}$．若存在 $x_i\in X,i=1,2,\cdots,k$，使得 $x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_ka_k=t$，则称 t 为 $k-$可表数，称集合 $T=\{t\,|\,t=x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_ka_k,x_i\in X,i=1,2,\cdots,k\}$ 为 $k-$可表集.（1）若 $k=10,a_i=2^{i-1},i=1,2,\cdots,k$，判定 31，1024 是否为 $k-$可表数，并说明理由；

（2）若 $\{1,2,\cdots,n\}\subseteq T$，证明：$n\le\dfrac{3^k-1}{2}$；（3）设 $a_i=3^{i-1},i=1,2,\cdots,k$，若 $\{1,2,\cdots,2024\}\subseteq T$，求 k 的最小值.

2023-24（下）模拟（14）

2024-02-20

解答

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知 i 是关于 x 的方程 $2x^2+px+q=0(p,q\in R)$ 的一个根，则 $p+q=$（ C ）

A 0　　B. -2　　C. 2　　D. 1

2. 已知向量 $\vec{a}=(3,1)$，$\vec{b}=(3,2),\vec{c}=(1,4)$，则 $\cos<\vec{a},\vec{b}-\vec{c}>=$（ A ）

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{10}$　　D. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

3. 二项式 $(x-\frac{1}{x})^6$ 的展开式中 x^4 的系数与 x^6 的系数之比为（ B ）

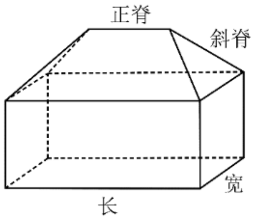
A. 6　　B. -6　　C. 15　　D. -15

4.已知正数 a,b 满足 $a+2b=1$，则（ C ）A. $ab\ge\frac{1}{8}$ B. $ab>\frac{1}{8}$　C. $0<ab\le\frac{1}{8}$ D. $0<ab<\frac{1}{8}$

5. 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则“$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$”是“数列 $\{a_n\}$ 是等差数列”的（ C ）

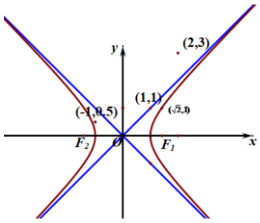
A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件　C. 充要条件　D. 既不充分也不必要条件

6. 成语“运筹帷幄之中，决胜千里之外”，意思是在小小的军帐之内作出正确的部署，决定了千里之外战场上的胜利，说的是运筹的重要性.“帷幄”是古代打仗必备的帐篷，又称“幄帐”，如图是一种幄帐示意图，帐顶采用“五脊四坡式”，四条斜脊的长度相等，一条正脊平行于底面.若各斜坡面与底面所成二面角的正切值均为 $\frac{1}{2}$，底面矩形的长与宽之比为 $2:1$，则正脊与斜脊长度的比值为（ B ）



A. $\frac{2}{3}$　B. $\frac{4}{3}$　C. $\frac{3}{4}$　D. $\frac{5}{4}$

7.已知 A，B 为双曲线 $x^2-y^2=1$ 上不同两点，下列点中可为线段 AB 的中点的是（ B ）



A. $(1,1)$　B. $(2,3)$　C. $(\sqrt{2},1)$　D. $(-1,\frac{1}{2})$

key:由图知A,D错;

若中点$(2,3)$:$\begin{cases}x_A^2-y_A^2=1\\x_B^2-y_B^2=1\end{cases}$得$(x_A-x_B)\cdot4-(y_A-y_B)\cdot6=0$得$l_{AB}:y-3=\frac{2}{3}(x-2)$

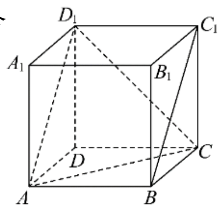
代入双曲线方程得:$5x^2 20x-34=0$得$\Delta>0,B$对

若中点$(\sqrt{2},1)$,则$\begin{cases}x_A^2-y_A^2=1\\x_B^2-y_B^2=1\end{cases}$得$(x_A-x_B)\cdot2\sqrt{2}-(y_A-y_B)\cdot2=0$得$l_{AB}:y-1=\sqrt{2}(x-\sqrt{2})$

代入双曲线方程得:$-x^2+2\sqrt{2}x-2=0$得$\Delta=0,A$与B重合，D错

8. 已知在 $\triangle ABC$ 中，$a=2b$，$\sin B=\frac{1}{3}$，则 $\sin\frac{C}{2}-\sin\frac{B-A}{2}=$（ A ）A. $\frac{\sqrt{10}}{3}$　B. $-\frac{\sqrt{10}}{3}$　C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　D. $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．



9. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，则下列四个命题正确的是（ BC ）

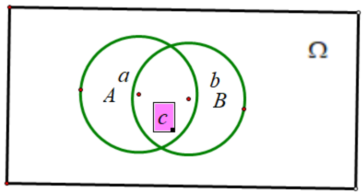
A. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的内切球的半径为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　B. 两条异面直线 D_1C 和 BC_1 所成的角为 $\dfrac{\pi}{3}$

C. 直线 BC 与平面 ABC_1D_1 所成的角等于 $\dfrac{\pi}{4}$　　D. 点 D 到面 ACD_1 的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

10. 设 A，B 是一次随机试验中的两个事件，且 $P(\bar{A})=\dfrac{1}{3}$，$P(B)=\dfrac{1}{4}$，$P(\bar{A}B+A\bar{B})=\dfrac{7}{12}$，则（ABD）

A. A，B 相互独立　　B. $P(\vec{A}+\vec{B})=\dfrac{5}{6}$　　C. $P(B|A)=\dfrac{1}{3}$　　D. $P(\bar{A}|B)\neq P(\bar{B}|A)$

$$key:\text{如图,由已知得}\begin{cases}a+b=\dfrac{7}{12}\\ b+c=\dfrac{1}{4}\\ 1-a-c=\dfrac{1}{3}\text{即}a+c=\dfrac{2}{3}\end{cases}\qquad \text{得}a+b+c=\dfrac{3}{4},c=\dfrac{1}{6},a=\dfrac{1}{2},b=\dfrac{1}{12}$$



$$\therefore P(AB)=c=\frac{1}{6}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=P(A)\cdot P(B);P(\bar{A}+\bar{B})=1-c=\frac{5}{6};P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{c}{a+c}=\frac{1}{4},$$

$$P(\bar{A}|B)=\frac{P(\bar{A}B)}{P(B)}=\frac{b}{b+c}=\frac{1}{3},P(\bar{B}|A)=\frac{P(\bar{B}A)}{P(A)}=\frac{a}{a+c}=\frac{3}{4},\therefore\text{选}ABD$$

11. 已知函数 $f(x)=e^x-kx$，$g(x)=k\ln x-x,k>0$，则（ ACD 　）

A. 当 $k>e$ 时，函数 $f(x)$ 有两个零点　B. 存在某个 $k\in(0,+\infty)$，使得函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 零点个数不相同

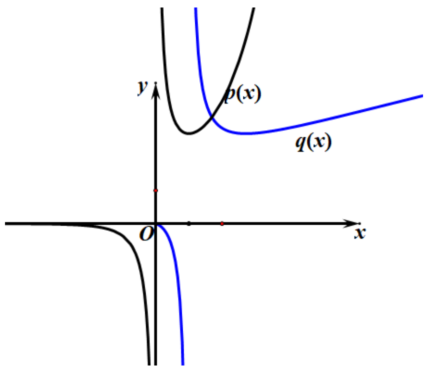
C. 存在 $k>e$，使得 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的零点

D. 若函数 $f(x)$ 有两个零点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，$g(x)$ 有两个零点 $x_3,x_4(x_3<x_4)$，一定有 $x_1x_4=x_2x_3$

$$key:f(x)=0\Leftrightarrow k=\frac{e^x}{x}\text{记为}p(x),g(x)=0\Leftrightarrow k=\frac{x}{\ln x}\text{记为}q(x)$$

$$\text{则}p'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}>0\Leftrightarrow x>1;q'(x)=\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}>0\Leftrightarrow x>e,$$

$$\therefore p(x)_{\min}=p(1)=e=q(x)_{\min},\text{如图},A,\ C\text{对},\ B\text{错}$$



$$D:k>e,\text{且}k=\frac{e^{x_1}}{x_1}=\frac{e^{x_2}}{x_2}=\frac{x_3}{\ln x_3}=\frac{x_4}{\ln x_4}(0<x_1<1<x_2,0<x_3<e<x_4)$$

$$\text{而}\frac{e^{x_1}}{x_1}=\frac{e^{x_1}}{\ln e^{x_1}},\frac{e^{x_2}}{x_2}=\frac{e^{x_2}}{\ln e^{x_2}},\text{且}0<e^{x_1}<e<e^{x_2}$$

$$\therefore e^{x_1}=x_3\text{即}x_1=\ln x_3=\frac{x_3}{k},\text{且}e^{x_2}=x_4\text{即}x_2=\ln x_4=\frac{x_4}{k},$$

$$\therefore x_1x_4=\frac{x_3}{k}\cdot kx_2=x_2x_3,D\text{对}.$$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知如下的两组数据：第一组：10、11、12、15、14、13；第二组：12、14、13、15、a、16.

若两组数据的方差相等，则实数 a 的值为__________.11 或 17

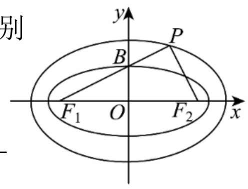
$key:D(X)=(10-\frac{25}{2})^2+(11-\frac{25}{2})^2+(12-\frac{25}{2})^2+(15-\frac{25}{2})^2+(14-\frac{25}{2})^2+(13-\frac{25}{2})^2=\frac{35}{2}$

$=D(Y)=(12-\frac{70+a}{6})^2+(14-\frac{70+a}{6})^2+(13-\frac{70+a}{6})^2+(15-\frac{70+a}{6})^2+(a-\frac{70+a}{6})^2+(16-\frac{70+a}{6})^2$

$=\frac{(2-a)^2}{36}+\frac{(14-a)^2}{36}+\frac{(8-a)^2}{36}+\frac{(20-a)^2}{36}+\frac{(5a-70)^2}{36}+\frac{(26-a)^2}{36}=\frac{30a^2-840a+6240}{36}$ 得$a=11,or,17$

13. 若函数 $f(x)=\sin\omega x+\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})(\omega>0)$,在$[0,\pi]$上恰有两个最大值点和四个零点,则实数 ω 的取值范围是______________. $[\frac{23}{6},\frac{13}{3})$

14. 如图，椭圆$C_1:\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1(a_1>b_1>0)$和$C_2:\frac{x^2}{a_2^2}+\frac{y^2}{b_2^2}=1$有相同的焦点$F_1,F_2$，离心率分别为$e_1,e_2$，$B$为椭圆$C_1$的上顶点，$F_2P\perp F_1P$，$F_1,B,P$三点共线且垂足$P$在椭圆$C_2$上，则$\frac{e_1}{e_2}$的最大值是______. $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

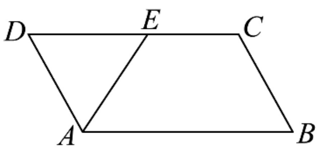


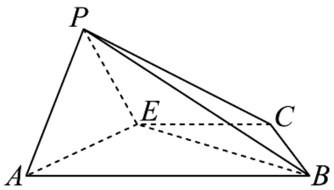
四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15. 如图，已知四边形$ABCD$为平行四边形，E为CD的中点，$AB=4$，$AD=AE=2$.将$\triangle ADE$沿AE折起，使点D到达点P的位置，使平面$APE\perp$平面$ABCE$.

（1）求证：$AP\perp BE$；

（2）求平面PAC与平面PBE夹角的余弦值.





【小问 1 详解】因为四边形$ABCD$为平行四边形，由E为CD的中点，

$AB=4$，$AD=AE=2$，则$\triangle ADE$为等边三角形，所以$\angle BCE=120^\circ$.

则$CE=ED=DA=CB$，所以$\triangle BCE$为等腰三角形，

可得$\angle CEB=30^\circ$，$\angle AEB=180^\circ-\angle AED-\angle BCE=90^\circ$，

即$BE\perp AE$，因为平面$APE\perp$平面$ABCE$，平面$APE\cap$平面$ABCE=AE$，

$BE\subset$平面$ABCE$，

则$BE\perp$平面APE，且$AP\subset$平面APE，所以$AP\perp BE$.

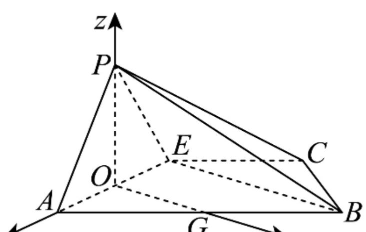
【小问 2 详解】作$PO\perp AE$，过O作$Oy//EB$，

由面$APE\perp$面$ABCE$得$PO\perp$面$ABCE$

则OA,Oy,OP两两垂直，建立如图所示空间直角坐标系.

$P(0,0,\sqrt{3})$，$A(1,0,0)$，$E(-1,0,0)$，$B(-1,2\sqrt{3},0)$，$C(-2,\sqrt{3},0)$

设平面PAC的一个法向量为$\vec{m}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$



由$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{PA}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$知$\begin{cases}x_1=\sqrt{3}z_1\\ y_1=\sqrt{3}x_1\end{cases}$可取$\vec{m}=(\sqrt{3},3,1)$，

同理得平面 PBE 一个法向量$\vec{n}=(-\sqrt{3},0,1)$.

设平面 PAC 与平面 PBE 的夹角为θ.

则$\cos\theta=\left|\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}\right|=\left|\dfrac{-3+1}{\sqrt{13}\times 2}\right|=\dfrac{\sqrt{13}}{13}$.∴面 PAC 与面 PBE 夹角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{13}}{13}$.

16. 已知函数 $f(x)=(e-a)e^x+x(a\in R)$.（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）若存在实数 a，使得关于 x 的不等式 $f(x)\le\lambda a$ 恒成立，求实数 λ 的取值范围.

解：（1）由$f'(x)=(e-a)e^x+1$

当$a\le e$时, $f'(1)\ge 1>0$,∴ $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上递增；

当$a>e$时，$f'(x)>0\Leftrightarrow x>-\ln(a-e)$,∴ $f(x)$在$(-\infty,-\ln(a-e))$上递减，在$(-\ln(a-e),+\infty)$上递增

(2）由（1）得:当$a\le e$时，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，不合；

当$a>e$时, $f(x)_{\min}=f(-\ln(a-e))=(e-a)\cdot\dfrac{1}{a-e}-\ln(a-e)=-1-\ln(a-e)\le\lambda a$

∴存在$a>e$，使得$\lambda\ge\dfrac{-1-\ln(a-e)}{a}$记为$p(a)$,

则$p'(a)=\dfrac{-\dfrac{e}{a-e}+\ln(a-e)}{a^2}>0\Leftrightarrow 0<\ln t-\dfrac{e}{t}$(在$t>0$上递增，其中$t=a-e>0$)

$\Leftrightarrow t>e\Leftrightarrow a>2e$

∴ $p(a)_{\min}=p(2e)=-\dfrac{1}{e}$,∴ λ的取值范围为$[-\dfrac{1}{e},+\infty)$.

17. 已知一个盒子中装有 1 个黑球和 2 个白球，这些球除颜色外全部相同.每次从盒子中随机取出 1 个球，并换入 1 个黑球，记以上取球换球活动为 1 次操作.设 n 次操作后盒子中所剩黑球的个数为ξ.

（1）当$n=3$时，求ξ 的分布列；（2）当$n=k(k\ge 3)$时，求ξ 的分布列和数学期望$E(\xi)$.

【小问 1 详解】$n=3$，即 3 次摸换球后ξ的可能取值为 1，2，3.

当$\xi=1$，即 3 次摸球都摸到黑球，$P(\xi=1)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{27}$

当$\xi=2$，即 3 次摸球中有且仅有 2 次摸到黑球，1 次白球，

$$P(\xi=2)=P_{(黑黑白)}+P_{(黑白黑)}+P_{(白黑黑)}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{14}{27}$$

当$\xi=3$，即 3 次摸球中有且仅有 1 次摸到黑球，2 次白球，

$$P(\xi=3)=P_{(黑白白)}+P_{(白黑白)}+P_{(白白黑)}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times 1=\frac{12}{27}.$$

∴分布列为

ξ	1	2	2
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{14}{27}$	$\frac{12}{27}$

【小问 2 详解】$n=k(k\geq 3)$时，即k次摸球换球后，黑球个数ξ可能取值为 1，2，3

同（1）当$\xi=1$，即k次摸球都摸到黑球$P(\xi=1)=\left(\frac{1}{3}\right)^k$，

当$\xi=2$，即k次摸球有且仅有“$k-1$”次摸到黑球，1 次摸到白球，

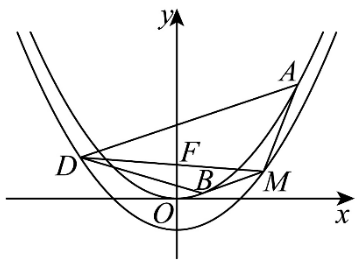
$P(\xi=2)=P_{(白黑\cdots黑)}+P_{(黑白黑\cdots黑)}+\cdots\cdots+P_{(黑黑\cdots黑白)}$

$=\frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3^k}\left(2^k+2^{k-1}+\cdots+2\right)$

$=\frac{1}{3^k}\cdot\frac{2\left(1-2^k\right)}{1-2}=2\cdot\frac{2^k-1}{3^k}$.当$\xi=3$，$P(\xi=3)=1-P(\xi=1)-P(\xi=2)$

$=1-\left(\frac{1}{3}\right)^k-\frac{2\left(2^k-1\right)}{3^k}=1-\frac{2^{k+1}-1}{3^k}$ $\therefore E(\xi)=\left(\frac{1}{3}\right)^k+\frac{4\left(2^k-1\right)}{3^k}+3-\frac{3\left(2^{k+1}-1\right)}{3^k}$，$=3-\frac{2\cdot 2^k}{3^k}$，$=3-2\left(\frac{2}{3}\right)^k$

18. 已知抛物线$C_1:x^2=4y$的焦点为F，M为抛物线$C_2:x^2=4(y+1)$上一点，且在第一象限内.过M作抛物线C_1的两条切线MA，MB，A，B是切点；射线MF交抛物线C_2于D.



（1）求直线AB的方程（用M点横坐标x_0表示）；

（2）求四边形$MADB$面积的最小值.

解：（Ⅰ）$\because x_0=2,\therefore M(2,0)$

而$l_{MA}:x_Ax=2(y+y_A),\therefore x_A=y_A$,同理$x_B=y_B$,$\therefore$直线$AB$的方程为$:y=x$

（2）设$M(2t,t^2-1)(t>1),A(2a,a^2),B(2b,b^2),D(2d,d^2-1)$

则$l_{MA}:2ax=2(y+a^2)$即$ax=y+a^2,\therefore 2ta=t^2-1+a^2$即$a^2-2ta+t^2-1=0$

同理$b^2-2tb+t^2-1=0,\therefore\begin{cases}a+b=2t\\ab=t^2-1\end{cases}$,且$\Delta=4>0$

$\therefore l_{AB}:y-a^2=\dfrac{a^2-b^2}{2a-2b}(x-2a)$即$2y=(a+b)x-2ab=2tx-2(t^2-1)$即$tx-y-t^2+1=0$

由M,F,D三点共线得$\dfrac{t^2-1-(d^2-1)}{2t-2d}=\dfrac{t+d}{2}=\dfrac{t^2-1-1}{2t}$得$d=-\dfrac{2}{t}$

$\therefore S_{MADB}=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+t^2}\cdot|2a-2b|\cdot\dfrac{|t\cdot2t-(t^2-1)-t^2+1-(t\cdot\frac{-4}{t}-(\frac{4}{t^2}-1)-t^2+1)|}{\sqrt{1+t^2}}$

$=2(t^2+\dfrac{4}{t^2}+4)\geq16$(当且仅当$t=\sqrt{2}$时，取=)

$\therefore$四边形$MADB$面积的最小值为16

19. 已知$Q:a_1,a_2,\cdots,a_k$为有穷正整数数列，且$a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_k$，集合$X=\{-1,0,1\}$．若存在$x_i\in X,i=1,2,\cdots,k$，使得$x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_ka_k=t$，则称$t$为$k-$可表数，称集合$T=\{t\,|\,t=x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_ka_k,x_i\in X,i=1,2,\cdots,k\}$为$k-$可表集．（1）若$k=10,a_i=2^{i-1},i=1,2,\cdots,k$，判定 31，1024 是否为$k-$可表数，并说明理由；

（2）若$\{1,2,\cdots,n\}\subseteq T$，证明：$n\leq\dfrac{3^k-1}{2}$；

（3）设$a_i=3^{i-1},i=1,2,\cdots,k$，若$\{1,2,\cdots,2024\}\subseteq T$，求$k$的最小值．

(1) 解：由$31=2^5-1=1\times2^0+1\times2^1+1\times2^2+1\times2^3+1\times2^4+0\cdot2^5+\cdots+0\cdot2^9$得31是10-可表数

$1024=2^{10}>2^{10}-1=2^0+2^1+2^2+\cdots+2^9$,$\therefore$1024不是10－可表数

(2) 证明：由$t=x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_ka_k,t=1,2,\cdots,n,x_i\in\{-1,0,1\}(i=1,2,\cdots,k)$

$\therefore$形如$x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_ka_k$的数最多有$3^k$个

$\because t\geq1,\therefore$由对称性得$T$中负数与正数一样多,$\therefore 2n+1\leq3^k$即$n\leq\dfrac{3^k-1}{2}$,证毕

(3) 解：由$x_1\cdot3^0+x_2\cdot3^1+\cdots+x_k\cdot3^{k-1}=t(t=1,2,\cdots,2024)$

得$3^0+3^1+\cdots+3^{k-1}=\dfrac{1-3^k}{1-3}=\dfrac{3^k-1}{2}\geq2024$得$k\geq8$

当$k=8$时，$t+\dfrac{3^8-1}{2}=(y_8y_7\cdots y_1)_{(3)}$是3进制数，其中$y_i=x_i+1\in\{0,1,2\}$,

共有3280个数，其中最大的数是3280,最小的数是0,

$\therefore k$的最小值为8