数列（1）等差等比数列解答（4）

2024-03-02

一、等比数列

(1) 定义:$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=q$(q为非零常数)

$\Rightarrow a_n^2=a_{n+1}a_{n-1}\Rightarrow a_n=a_1q^{n-1}=a_mq^{n-m}$

$$\Rightarrow S_n=\begin{cases}na_1,q=1\\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q},q\neq 1\end{cases}$$

(2) 性质：若$\{a_n\}$是等比数列，则①若$\{k_n\}$是等差数列，且$k_n\in N^*$，则$\{a_{k_n}\}$是等比数列

②若$p_1+p_2+\cdots+p_m=q_1+q_2+\cdots+q_m,p_i,q_i\in N^*$,则$a_{p_1}\cdot a_{p_2}\cdot\cdots\cdot a_{p_m}=a_{q_1}\cdot a_{q_2}\cdot\cdots\cdot a_{q_m}$.

(2000全国）已知数列$\{c_n\},c_n=2^n+3^n$,且$\{c_{n+1}-pc_n\}$为等比数列，求常数p;
(2) 设$\{a_n\},\{b_n\}$是公比不相等的等比数列,$c_n=a_n+b_n$,证明:$\{c_n\}$不是等比数列.

(2000) (1) 解：由$c_{n+1}-pc_n=2^{n+1}+3^{n+1}-p(2^n+3^n)$

$=2^n(2-p)+3^n(3-p)$是等比数列的$2-p=0,or,3-p=0$即$p=2$或3.

(2) 证明：设$a_n=a_1q_1^{n-1},b_n=b_1q_2^{n-1},a_1b_1\neq0,q_1q_2\neq0,q_1\neq q_2$

则$c_2^2-c_1c_3=(a_1q_1+b_1q_2)^2-(a_1+b_1)(a_1q_1^2+b_1q_2^2)=-a_1b_1(q_1-q_2)^2\neq0$

$\therefore\dfrac{c_2}{c_1}\neq\dfrac{c_3}{c_2}$,即$c_1,c_2,c_3$不成等比数列,$\therefore\{c_n\}$不是等比数列

(2008 江苏）(1）设$a_1,a_2,\cdots,a_n$是各项均不为零的等差数列$(n\geq4)$，且公差$d\neq0$，若将此数列删去某一项得到的数列（按原来的顺序）是等比数列:（i）当$n=4$时，求$\dfrac{a_1}{d}$的数值;（ii）求 n 的所有可能值;

（2）求证：对于一个给定的正整数$n(n\geq4)$，存在一个各项及公差都不为零的等差数列$b_1,b_2,\cdots,b_n$，其中任意三项（按原来顺序）都不能组成等比数列.

(1) 解：（ⅰ）由已知得：a_1,a_1+d,a_1+3d，或a_1,a_1+2d,a_1+3d成等比数列

$\therefore a_1^2+2a_1d+d^2=a_1^2+3a_1d$，或$a_1^2+4a_1d+4d^2=a_1^2+3a_1d,\therefore\dfrac{a_1}{a}=1or-4;$

（ⅱ）由（ⅰ）得$n=4$,或$n=5$,此时a_1,a_2,a_4,a_5成等比数列

即$\begin{cases}a_1^2+2a_1d+d^2=a_1^2+3a_1d\\ a_1^2+6a_1d+9d^2=(a_1+d)(a_1+4d)=a_1^2+5a_1d+4d^2\end{cases}$无解,$\therefore n=4$

(2) 证明：设$b_n=b_1+(n-1)d,m<k<n$，$m,k,n\in N$,

若b_{m+1},b_{k+1},b_{n+1}成等比数列，则$b_{k+1}^2-b_{m+1}b_{n+1}=(b_1+kd)^2-(b_1+md)(b_1+nd)$

$=(2k-m-n)b_1d+(k^2-mn)d^2=0\Leftrightarrow\dfrac{b_1}{d}=\dfrac{mn-k^2}{2k-m-n}$为有理数

取$\dfrac{b_1}{d}=\sqrt{2}$为无理数，则$b_{k+1}^2-b_{m+1}b_{n+1}\neq0$,即$b_{m+1},b_{k+1},b_{n+1}$不成等比数列，得证

（2007 江苏）已知 $\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$是公比为q的等比数列，$a_1=b_1,a_2=b_2\neq a_1$，记S_n为数列$\{b_n\}$的前n项

2024-03-02

和.（1）若 $b_k = a_m(m, k$ 是大于 2 的正整数），求证：$S_{k-1} = (m-1)a_1$；

（2）若 $b_3 = a_i(i$ 是某一正整数），求证：q 是整数，且数列 $\{b_n\}$ 中每一项都是数列 $\{a_n\}$ 中的项；

（3）是否存在这样的正数 q，使等比数列 $\{b_n\}$ 中有三项成等差数列？若存在，写出一个 q 的值，并加以说明；若不存在，请说明理由.

⑴ 证明：设$\{a_n\}$的公差为d，则$\begin{cases} a_1 + d = a_1 q \neq a_1 \\ a_1 q^{k-1} = a_1 + (m-1)d \end{cases}$，$\therefore q^{k-1} = 1 + (m-1)(q-1)(q \neq 1)$

$\therefore S_{k-1} = \dfrac{a_1(1-q^{k-1})}{1-q} = (m-1)a_1$，证毕

（2）证明：由已知得$d = a_1(q-1)$，且$b_3 = a_1 q^2 = a_i = a_1 + (i-1)d$，

$\therefore q^2 - 1 = (i-1)(q-1)$得$q = i - 2 \in Z$，

$\therefore b_n = a_1 q^{n-1} = a_1(i-2)^{n-1} = a_1[C_{n-1}^0(i-3)^{n-1} + C_{n-1}^1(i-3)^{n-2} + \cdots + C_{n-1}^{n-2}(i-3)^1 + 1]$

$= a_1 + a_1(i-3)m = a_1 + md = a_{m+1}$（其中$m = C_{n-1}^0(i-3)^{n-2} + C_{n-1}^1(i-3)^{n-2} + \cdots + C_{n-1}^{n-2}(i-3)^0$），证毕.

（3）解：假设存在$b_i, b_j, b_k (i < j < k, i, j, k \in N^*)$成等差数列，

则$2b_j - b_i - b_k = a_1 q^{i-1}(2q^{j-i} - 1 - q^{k-i}) = 0 \Leftrightarrow 2q^{j-i} - 1 - q^{k-i} = 0$

取$j - i = 1, k - i = 2$，则$2q - 1 - q^2 = -(q-1)^2 \neq 0$

取$j - i = 1, k - i = 3$，则$2q - 1 - q^3 = (1-q)(q^2 + q - 1) = 0$得$q = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

$\therefore q = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$时，$b_i, b_{i+1}, b_{i+3}$成等差数列

（2009北京）已知数集$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}(1 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_n, n \ge 2)$具有性质$P$：对任意的$i, j(1 \le i \le j \le n)$，$a_i a_j$与$\dfrac{a_j}{a_i}$两个数中至少有一个属于$A$.⑴ 分别判断数集$\{1,3,4\}$与$\{1,2,3,6\}$是否具有性质$P$，并说明理由；

（2）证明：$a_1 = 1$，且$\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \cdots + a_n^{-1}} = a_n$；

（3）证明：当$n = 5$时，a_1, a_2, a_3, a_4, a_5成等比数列.

2009北京 ⑴ 解：$A = \{1,3,4\}$有$3 \times 4 \notin A$，且$\dfrac{4}{3} \notin A$，$\therefore \{1,3,4\}$不具有性质P

$A = \{1,2,3,6\}$有$1 \times 2, 1 \times 3, 1 \times 6 \in A; 2 \times 3 \in A, \dfrac{6}{2} = 3 \in A; \dfrac{6}{3} = 2 \in A, \therefore \{1,2,3,6\}$具有性质$P$

（2）证明：$\because 1 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_n, \therefore a_n \cdot a_n = a_n^2 > a_n, \therefore a_n \cdot a_n \notin A, \therefore 1 = \dfrac{a_n}{a_n} \in A, \therefore a_1 = 1$

$\therefore a_n = a_n \cdot a_1^{-1} > a_n \cdot a_2^{-1} > \cdots > a_n \cdot a_n^{-1} = 1$，且$a_n a_i > a_n (i = 2, 3, \cdots, n-1)$

$\therefore a_n a_i \notin A, \therefore a_n \cdot a_i^{-1} \in A(i = 2, 3, \cdots n-1)$

$\therefore \{a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}\} = \{a_n a_2^{-1}, a_n a_3^{-1}, \cdots, a_n a_{n-1}^{-1}\}$，

$\therefore a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1^{-1}a_n + a_2^{-1}a_n + \cdots + a_n^{-1}a_n, \therefore \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \cdots + a_n^{-1}} = a_n$，证毕

2024-03-02

（3）证明：由（2）得$:a_1=1,$且$\dfrac{a_5}{a_4}=a_2,\dfrac{a_5}{a_3}=a_3,\dfrac{a_5}{a_2}=a_4,\therefore a_3^2=a_2a_4=a_5a_1$

$\therefore a_1,a_3,a_5$与a_2,a_3,a_4都成等比数列，设$q=\dfrac{a_3}{a_2},\therefore a_3=a_2q,a_4=a_2q^2,a_5=a_2^2q^2,$

若$a_2a_3=a_2^2q\in A$，则$a_2^2q=a_2q^2,\therefore a_2=q;$若$\dfrac{a_3}{a_2}=q\in A$，而$a_3=a_2q>q,\therefore a_2=q;$

$\therefore a_1=1,a_2=q,a_3=q^2,a_4=q^3,a_5=q^4,\therefore a_1,a_2,a_3,a_4,a_5$成等比数列；

（2020浙江10）设集合$S,T,S\subseteq N^*,T\subseteq N^*$，$S,T$中至少有两个元素，且$S,T$满足：

①对于任意$x,y\in S,$若$x\neq y,$都有$xy\in T$；②对于任意$x,y\in T,$若$x<y,$则$\dfrac{y}{x}\in S.$下列命题正确的是（　　）

$A.$若S有4个元素，则$S\cup T$有7个元素　　$B.$若S有4个元素，则$S\cup T$有6个元素

$C.$若S有3个元素，则$S\cup T$有4个元素　　$D.$若S有3个元素，则$S\cup T$有5个元素

$key:$若$S=\{q,q^2,q^3,q^4\},T=\{q^3,q^4,q^5,q^6,q^7\},\therefore card(A\cup B)=7$

若$S=\{1,q,q^2,q^3\},$则$T=\{q,q^2,q^3,q^4,q^5\},$但$q^4\notin S$

若$S=\{q,q^2,q^3\},T=\{q^3,q^4,q^5\},\therefore card(A\cup B)=5$

若$S=\{1,q,q^2\},$则$T=\{q,q^2,q^3\},\therefore card(A\cup B)=4$，故选$A$

变式 1.已知项数为$k(k\in N^*,\ k\geq 3)$的有穷数列$\{a_n\}$满足如下两个性质，则称数列$\{a_n\}$具有性质P：

①$1\leq a_1<a_2<a_3<\cdots<a_k$；②对任意的$i,\ j(1\leq i\leq j\leq k)$，$\dfrac{a_j}{a_i}$与$a_ja_i$至少有一个是数列$\{a_n\}$中的项.

（I）分别判断数列$1,2,4,16$和$2,4,8,16$是否具有性质P，并说明理由；

（II）若数列$\{a_n\}$具有性质P，求证：$a_k{}^k=(a_1a_2\cdots a_k)^2$；

（III）若数列$\{a_n\}$具有性质P，且$\{a_n\}$不是等比数列，求k的值.

（Ⅰ）解：数列$1,2,4,16$满足①$,\dfrac{a_4}{a_2}=8$与$a_4\cdot a_2=32$都不在数列中$,\therefore$数列$1,2,4,16$不具有性质$P;$

数列$2,4,8,16$满足①$,\dfrac{16}{16}=1,16\cdot 16=256$都不在数列中$,\therefore$数列$2,4,8,16$不具有性质$P\cdots 4$分

（Ⅱ）证明$:\because\{a_n\}$具有性质$P,$

$\therefore$由①得$1\leq a_1<a_2<\cdots<a_k$得$a_2a_k,a_3a_k,\cdots,a_{k-1}a_k,a_ka_k>a_k$

$\therefore$由②得$\dfrac{a_k}{a_k}=1,\dfrac{a_k}{a_{k-1}},\dfrac{a_k}{a_{k-2}},\cdots,\dfrac{a_k}{a_2}$这$k$个数都在$\{a_n\}$中，

而$1=\dfrac{a_k}{a_k}<\dfrac{a_k}{a_{k-1}}<\cdots<\dfrac{a_k}{a_3}<\dfrac{a_k}{a_2}<a_k$

$\therefore a_1=1,\dfrac{a_k}{a_{k-1}}=a_2,\cdots,\dfrac{a_k}{a_3}=a_{k-2},\dfrac{a_k}{a_2}=a_{k-1}$即$a_1=1,a_k=a_{k-1}a_2,\cdots,a_k=a_3a_{k-2},a_k=a_2a_{k-1},a_k=a_k$

$\therefore(a_2a_{k-1})(a_3a_{k-2})\cdots(a_2a_{k-1})=a_2^2a_3^2\cdots a_{k-1}^2=a_k^{k-2}$

$\therefore(a_1a_2\cdots a_k)^2=a_2^2a_3^2\cdots a_{k-1}^2a_k^2=a_k^k,$证毕$\cdots 10$分

2024-03-02

（III）解$:$当$k=3$时，由（II）得$:a_1=1,a_3^3=(a_1a_2a_3)^2$即$a_2^2=a_3a_1,\therefore\{a_n\}$是等比数列

当$k=4$时，数列$1,2,6,12$具有性质P,但不是等比数列

当$k\ge 5$时，由（II）得$1=\dfrac{a_k}{a_k}=a_1,\dfrac{a_k}{a_{k-1}}=a_2,\cdots,\dfrac{a_k}{a_2}=a_{k-1},\dfrac{a_k}{a_1}=a_k$,即$\dfrac{a_k}{a_{k-i}}=a_{i+1}(1\le i\le k-1)$

由$a_{k-1}a_i>a_{k-1}a_2=a_k\,(3\le i\le k-2)$,得$\dfrac{a_{k-1}}{a_i}$是数列$\{a_n\}$中的项，

而$1=\dfrac{a_{k-1}}{a_{k-1}}<\dfrac{a_{k-1}}{a_{k-2}}<\cdots<\dfrac{a_{k-1}}{a_3}<\dfrac{a_k}{a_3}=a_{k-2}<\dfrac{a_k}{a_2}=a_{k-1}<\dfrac{a_k}{a_1}=a_k,\therefore\dfrac{a_{k-1}}{a_{k-i}}=a_i\,(1\le i\le k-3)\cdots$②

①$\div$②得$:\dfrac{a_k}{a_{k-1}}=\dfrac{a_{i+1}}{a_i},\therefore$当$k\ge 5$时，数列$\{a_n\}$是等比数列.综上$:k=4\cdots17$分

（1990A）$n^2(n\ge 4)$个正数排成n行n列如下（a_{ij}表示位于第i行,第j列的一个数）$\boxed{\begin{matrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{matrix}}$

其中每一行的数成等差数列，每一列的数成等比数列,且各个等比数列公比都相同.若$a_{24}=1,a_{42}=\dfrac{1}{8}$,

$a_{43}=\dfrac{3}{16}$,求$a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{nn}$.

1990A解：由$a_{4j}=a_{43}+(j-3)(a_{43}-a_{42})=\dfrac{3}{16}+\dfrac{j-3}{16}=\dfrac{j}{16}$

$\therefore a_{44}=\dfrac{1}{4}=a_{42}q^2=q^2(\because q>0),\therefore q=\dfrac{1}{2},\therefore a_{ij}=a_{4j}\cdot(\dfrac{1}{2})^{i-4}=\dfrac{j}{16}\cdot(\dfrac{1}{2})^{i-4}=\dfrac{j}{2^i}$

$\therefore a_{ii}=\dfrac{i}{2^i}=\dfrac{i+1}{2^{i-1}}-\dfrac{i+2}{2^i},\therefore a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=2-\dfrac{n+2}{2^n}$

（1992A）设实数x,y,z是实数,$3x,4y,5z$成等比数列，且$\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{y},\dfrac{1}{z}$成等差数列，则$\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x}$的值是______.

1992$Akey$:由已知得$16y^2=15xz$,且$\dfrac{2}{y}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}$即$y=\dfrac{2xz}{x+z}$

$\therefore\dfrac{64x^2z^2}{(x+z)^2}=15xz\Leftrightarrow 64xz=15(x^2+2xz+z^2)\Leftrightarrow 64=15(\dfrac{x}{z}+2+\dfrac{z}{x}),\therefore\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x}=\dfrac{32}{15}$

（2008A）设$\triangle ABC$的内角A,B,C所对的边a,b,c成等比数列，则$\dfrac{\sin A+\cos A\tan C}{\sin B+\cos B\tan C}$的取值范围是

（　）$A.(0,+\infty)$　$B.(0,\dfrac{\sqrt5+1}{2})$　$C.(\dfrac{\sqrt5-1}{2},\dfrac{\sqrt5+1}{2})$　$D.(\dfrac{\sqrt5-1}{2},+\infty)$

2008$Akey$:由$b^2=ac$且$\begin{cases}a+b>c\Leftrightarrow\dfrac{b^2}{c}+b>c\text{即}t^2+t-1>0\\b+c>a\Leftrightarrow b+c>\dfrac{b^2}{c}\text{即}t^2-t-1<0\end{cases}(t=\dfrac{b}{c})$得$t\in(\dfrac{\sqrt5-1}{2},\dfrac{1+\sqrt5}{2})$

$\therefore\dfrac{\sin A+\cos A\tan C}{\sin B+\cos B\tan C}=\dfrac{\sin A\cos C+\cos A\sin C}{\sin B\cos C+\cos B\sin C}=\dfrac{\sin(A+C)}{\sin(B+C)}=\dfrac{\sin B}{\sin C}=\dfrac{b}{c}$,选$C$

（2000A）给定正数p,q,a,b,c,其中$p\ne q$，若p,a,q是等比数列，p,b,c,q是等差数列，则一元二次

方程$bx^2-2ax+c=0$(　)$A.$无实根 $B.$有两个相等实根 $C.$有两个同号相异实根 $D.$有两个异号实根

数列（1）等差等比数列解答（4）

2024-03-02

$2000Akey: a^2 = pq,$ 且 $\begin{cases} 2b = p + c \\ 2c = b + q \\ b + c = p + q \end{cases}$ 即 $\begin{cases} p = 2b - c \\ q = 2c - b \end{cases}$

$\therefore \Delta = 4a^2 - 4bc = 4(pq - bc) = -8(b - c)^2 < 0,$ 选A

(2015福建)8.若a,b是函数$f(x) = x^2 - px + q(p > 0, q > 0)$的两个不同的零点，且$a,b-2$这三个数可适当排序后成等差数列，也可适当排序后成等比数列，则$p+q=$（D）$A.6$　$B.7$　$C.8$　$D.9$

2015福建$key: \begin{cases} a + b = p > 0 \\ ab = q > 0 \end{cases}, \therefore a - 2 = 2b,$ 或$b - 2 = 2a$

由对称性只需考虑:$a - 2 = 2b,$ 且$ab = 4, \therefore b = 1, a = 4, \therefore p + q = a + b + ab = 9,$ 选D

(2015湖北)5.设$a_1, a_2, \cdots, a_n \in R, n \ge 3.$若$p: a_1, a_2, \cdots, a_n$成等比数列；

$q: (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2)(a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2) = (a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n)^2$，则（$A$）

$A.p$是q的充分条件，当不是必要条件　　$B.p$是q的必要条件，当不是q的充分条件

$C.p$是a的充分必要条件　　$D.p$既不是q的充分条件，也不是q的必要条件

2015湖北$key:$若p，则$a_n = a_1q^{n-1}, \therefore (a_1^2 + \cdots + a_{n-1}^2)(a_2^2 + \cdots + a_n^2) = q^2(a_1^2 + \cdots + a_{n-1}^2)^2$

$= (a_1^2q + \cdots + a_{n-1}^2q)^2 = (a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n)^2, \therefore q$成立；

若q，则$(a_1^2 + a_2^2)(a_2^2 + a_3^2) = (a_1a_2 + a_2a_3)^2 \Leftrightarrow a_1^2a_3^2 + a_2^4 - 2a_1a_2^2a_3 = (a_1a_3 - a_2^2)^2 = 0, \therefore a_1a_3 = a_2^2$

当$a_1 = 0$时，a_1, a_2, a_3不成等比数列$, \therefore$ 选A

变式：已知a,b,c,d都是偶数，且$0 < a < b < c < d, d - a = 90$，若$a,b,c$成等差数列，$b,c,d$成等比数列，则$a + b + c + d =$ __________.

$key:$由已知设a,b,c,d依次为$:2a_1, 2a_1 + 2x, 2a_1 + 4x, \dfrac{(2a_1 + 4x)^2}{2a_1 + 2x},$

$\therefore \dfrac{2(a_1 + 2x)^2}{a_1 + x} - 2a_1 = 90$即$3a_1 = \dfrac{x(45 - 4x)}{x - 15} > 0$得$\dfrac{45}{4} < x < 15$即$x = 12, 13, 14$

且$3a_1 = -4x - 15 - \dfrac{225}{x - 15} \in N^*, \therefore x = 12, a_1 = 4$

$\therefore a + b + c + d = 8 + 32 + 56 + \dfrac{56^2}{32} = 194$

(1999A）给定公比为$q(q \ne 1)$的等比数列$\{a_n\}$，设$b_1 = a_1 + a_2 + a_3, b_2 = a_4 + a_5 + a_6, b_n = a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n}$，则数列$\{b_n\}$(　)

$A.$是等差数列 $B.$是公比为q的等比数列 $C.$是公比为q^3的等比数列 $D.$既不是等差数列也不是等比数列

$key: b_1 = a_1(1 + q + q^2) \ne 0$

$\dfrac{b_2}{b_1} = q^3, b_n = a_{3n-3}(1 + q + q^2) = a_1q^{3n-3}(1 + q + q^2) = b_1(q^3)^{n-1},$ 选C

(2021甲)7.等比数列$\{a_n\}$的公比为q，前n项和为S_n，设甲：$q > 0,$乙$:\{S_n\}$是递增数列，则（ ）

$A.$甲是乙的充分条件但不是必要条件 $B.$甲是乙的必要条件但不是充分条件

$C.$甲是乙的充要条件 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

数列（1）等差等比数列解答（4）

2024-03-02

2021甲key：当$q=1$时，$S_n=na_1$，当$a_1<0$时，$\{S_n\}$递减；

若$\{S_n\}$递增，则$S_{n+1}>S_n$，$\therefore a_{n+1}=a_1q^n>0(n\in N^*)$，$\therefore q>0$，$\therefore$ 选B

（2009江苏）14.设$\{a_n\}$是公比为q的等比数列，$|q|>1$，令$b_n=a_n+1(n=1,2,\cdots)$，若数列$\{b_n\}$有连续四项在集合$\{-53,-23,19,37,82\}$中，则$6q=$_____.-9

2009江苏key：$\{a_n\}:(-54,-24,18,36,81):-24,36,-54,81\therefore q=-\dfrac{3}{2}$，$\therefore 6q=-9$

（2017Ⅲ）9.等差数列$\{a_n\}$的首项为1，公差不为0，若a_2,a_3,a_6成等比数列，则$\{a_n\}$的前6项的和为（　）

$A.-24$　$B.-3$　$C.3$　$D.8$

2017Ⅲkey：$(1+2d)^2=(1+d)(1+5d)(d\ne 0)$得$d=-2$，$\therefore S_6=6+15\cdot(-2)=-24$，选$A$

（2018浙江）已知a_1,a_2,a_3,a_4成等比数列，$a_1+a_2+a_3+a_4=\ln(a_1+a_2+a_3)$.若$a_1>1$，则（　　）

$A.a_1<a_3,a_2<a_4$　$B.a_1>a_3,a_2<a_4$　$C.a_1<a_3,a_2>a_4$　$D.a_1>a_3,a_2>a_4$

2018浙江key：$a_1+a_2+a_3+a_4=\ln(a_1+a_2+a_3)<a_1+a_2+a_3-1$，$\therefore a_4=a_1q^3<-1$，

$\therefore q^3<\dfrac{-1}{a_1}\in(-1,0)$，$\therefore q<0$

$\therefore \dfrac{a_1(1-q^4)}{1-q}=a_1+a_2+a_3+a_4=\ln(a_1+a_2+a_3)=\ln(a_1(1+q+q^2))$，

若$q<-1$，则$1+q+q^2>1$，$\therefore \ln a_1(1+q+q^2)>0>\dfrac{a_1(1-q^4)}{1-q}$，$\therefore q\in(-1,0)$，$\therefore$ 选B

（2022乙）8.已知等比数列$\{a_n\}$的前3项和为168，$a_2-a_5=42$，则$a_6=$（ D ）$A.14$　$B.12$　$C.6$　$D.3$

（2018）key：$a_1+a_2+a_3+a_4=\ln(a_1+a_2+a_3)<a_1+a_2+a_3-1$，$\therefore a_4=a_1q^3<-1$，

$\therefore q^3<\dfrac{-1}{a_1}\in(-1,0)$，$\therefore q<0$

$\therefore \dfrac{a_1(1-q^4)}{1-q}=a_1+a_2+a_3+a_4=\ln(a_1+a_2+a_3)=\ln(a_1(1+q+q^2))$，

若$q<-1$，则$1+q+q^2>1$，$\therefore \ln a_1(1+q+q^2)>0>\dfrac{a_1(1-q^4)}{1-q}$，$\therefore q\in(-1,0)$，$\therefore$ 选B

（1991Ⅰ）已知$\{a_n\}$是等比数列，且$a_n>0$，$a_2a_4+2a_3a_5+a_4a_6=25$，那么$a_3+a_5=$（ ）$A.5$　$B.10$　$C.15$　$D.20$

2019Ⅰ key：$a_3^2+2a_3a_5+a_5^2=25$得$a_3+a_5=5$，选A

（1996A）等比数列$\{a_n\}$的首项$a_1=1536$，公比是$q=-\dfrac{1}{2}$，用T_n表示它的前n向之积，则$T_n(n\in N)$的最大值是（　）$A.T_9$　$B.T_{11}$　$C.T_{12}$　$D.T_{13}$

1996$Akey$：$T_n=a_1^nq^{1+2+\cdots+(n-1)}=1536^n\cdot(-\dfrac{1}{2})^{\frac{(n-1)n}{2}}$

$\therefore \dfrac{|T_{n+1}|}{|T_n|}=1536\cdot(\dfrac{1}{2})^n>1\Leftrightarrow n\le 10$，$\therefore |T_1|<\cdots<|T_{10}|<|T_{11}|>|T_{12}|>|T_{13}|>\cdots$

2024-03-02

而$T_{11}<0,T_{10}<0,T_9>0,T_{12}>0,$且$\dfrac{T_{12}}{T_9}=1536^3\cdot\dfrac{1}{2^{30}}=(\dfrac{1536}{1024})^3>1,$选$C$

（2013 江苏）在正项等比数列$\{a_n\}$中，$a_5=\dfrac{1}{2},a_6+a_7=3.$则满足$a_1+a_2+\cdots+a_n>a_1a_2\cdots a_n$的最大正整数$n$的值为_____.

2013江苏$key:$由已知得$q=2,a_1=\dfrac{1}{2^5},\therefore a_1+\cdots+a_n=\dfrac{1}{2^5}(2^n-1)>\dfrac{1}{2^{5n}}\cdot2^{\frac{n(n-1)}{2}}$

$\Leftrightarrow 2^n>2^n-1>2^{\frac{n^2-11n+10}{2}},\therefore n>\dfrac{n^2-11n+10}{2}$得$n\le12,$

且当$n=12$时$,2^{12}-1=4095>2^{11},\therefore n_{\max}=12$

(2016Ⅰ)15.设等比数列$\{a_n\}$满足$a_1+a_3=10,a_2+a_4=5$，则$a_1a_2\cdots a_n$的最大值为_____.64

2016Ⅰ $key:\begin{cases}a_1(1+q^2)=10\\a_1q(1+q^2)=5\end{cases}$得$q=\dfrac{1}{2},a_1=8$

$\therefore a_1a_2\cdots a_n=8^n\cdot(\dfrac{1}{2})^{\frac{n(n-1)}{2}}=2^{-\frac{1}{2}n^2+\frac{7}{2}n}=2^{-\frac{1}{2}(n-\frac{7}{2})^2+\frac{49}{8}}\le2^6=64$

（2014浙江）已知等比数列$\{a_n\}:a_1=5,a_4=625,$则$\sum\limits_{k=1}^{2014}\dfrac{1}{\log_5a_k\log_5a_{k+1}}=$（　）A

$A.\dfrac{2014}{2015}$　$B.\dfrac{2013}{2014}$　$C.\dfrac{2012}{4028}$　$D.\dfrac{2013}{4030}$

(2014广东)13.等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且$a_{10}a_{11}+a_9a_{12}=2e^5$，则$\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_{20}=$_______. 50

2014广东$key:a_{10}a_{11}=e^5,\therefore\ln(a_1a_2\cdots a_{20})=\ln\sqrt{(a_1a_{20})^{20}}=50$

(2015Ⅱ)4.等比数列$\{a_n\}$满足$a_1=3,a_1+a_3+a_5=21,$则$a_3+a_5+a_7=$（　）$A.21$　$B.42$　$C.63$　$D.84$

2015Ⅱ $key:a_1+a_3+a_5=3(1+q^2+q^4)=21$得$q^2=4,\therefore a_3+a_5+a_7=q^2(a_1+a_3+a_5)=84,$选$D$

（2016B）等比数列$\{a_n\}$的各项均为整数，且$a_1a_3+a_2a_6+2a_3^2=36,$则a_2+a_4的值为_______.　6

2016$Bkey:36=a_2^2+a_4^2+2a_2a_4$得$a_2+a_4=6,$

(2017B) 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_2=\sqrt{2},a_3=\sqrt[3]{3},$则$\dfrac{a_1+a_{2011}}{a_7+a_{2017}}$为_______.　$\dfrac{8}{9}$

(2017B)$\dfrac{a_2}{a_3}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}},$原式$=\dfrac{1}{q^6}=\dfrac{8}{9}$

数列（1）等差等比数列解答（4）

2024-03-02

（2017湖北）已知正项等比数列$\{a_n\}$满足$a_6+a_5+a_4-a_3-a_2-a_1=49$,则$a_9+a_8+a_7$的最小值为______.

（2017湖北）$key:(a_1+a_2+a_3)(q^3-1)=49>0$得$q^3>1$

$\therefore a_7+a_8+a_9=(a_1+a_2+a_3)q^6=\dfrac{49q^6}{q^3-1}=49(q^3-1+\dfrac{1}{q^3-1}+2)\geq 196$

(2023乙)15.已知$\{a_n\}$等比数列,$a_2a_4a_5=a_3a_6,a_9a_{10}=-8$,则$a_7=$_______. -2

2023乙$key:a_2=1,a_9a_{10}=a_2^2q^7\cdot q^8=q^{15}=-8,\therefore a_7=a_2q^5=q^5=-2$