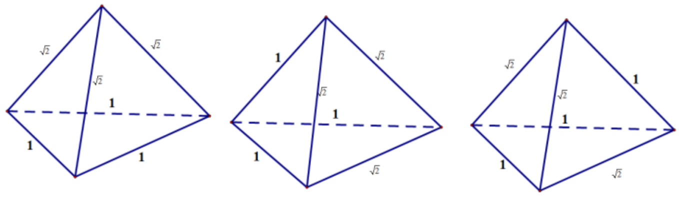
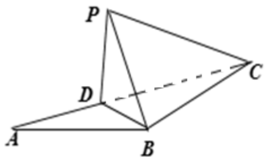
2023-05-02

（07竞赛）以$1,1,1,\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2}$为六条棱的四面体个数为____；最大体积为_____.

$07key:3;\dfrac{\sqrt{5}}{12}$



（16 高考）（15） 如图，$\triangle ABC$中，$AB=BC=2,\angle ABC=120°$.若平面ABC外的点P 和线段AC上的点D，满足$PD=DA,PB=BA$，则四面体$PBCD$的体积 的最大值是______．$\dfrac{1}{2}$



$2016key1:$ 设$\angle BDC=\theta,AD=x,$ 则$\dfrac{2}{\sin\theta}=\dfrac{2\sqrt{3}-x}{\sin(\theta+30°)}$

$$\therefore V_{P-BCD}\le\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{3}-x)\cdot1\cdot x\sin\theta=\frac{1}{6}\cdot\frac{2\sin(\theta+30°)}{\sin\theta}\cdot[2\sqrt{3}\sin\theta-2\sin(\theta+30°)]$$

$$=\frac{2}{3}(\sin\theta-\frac{1}{4\sin\theta})\le\frac{1}{2}$$

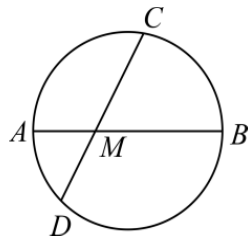
$key2:$ 设$\angle ABD=\theta\in(0°,120°),AD=x,$ 则$\dfrac{x}{\sin\theta}=\dfrac{2}{\sin(\theta+30°)}$ 即$x=\dfrac{2\sin\theta}{\sin(\theta+30°)}$

$$\therefore V_{P-BCD}\le\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(2\sqrt{3}-x)\cdot1\cdot2\sin\theta=\frac{1}{3}(2\sqrt{3}-\frac{2\sin\theta}{\sin(\theta+30°)})\sin\theta$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin(\theta+60°)\sin\theta}{\sin(\theta+30°)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\cos(\theta+60°-\theta)-\cos(\theta+60°+\theta)}{\sin(\theta+30°)}=\frac{1}{3}(2\sin(\theta+30°)-\frac{1}{2\sin(\theta+30°)})\le\frac{1}{2}$$

$$key3:V_{P-BCD}=V_{B-PCD}\le\frac{1}{6}PD\cdot DC\le\frac{1}{6}(\frac{PD+DC}{2})^2=\frac{1}{2}$$

（201901学考）如图，线段AB是圆AB的直径，圆内一条动弦CD与AB交于点M，且$MB=2AM=2$.现将半圆ACB沿直径AB翻折，则三棱锥$C-ABD$体积的最大值为（ ）$A.\dfrac{2}{3}$　　$B.\dfrac{1}{3}$　　$C.3$　　$D.1$　 D



$key:$ 由$MC\cdot MD=AM\cdot MB=2$

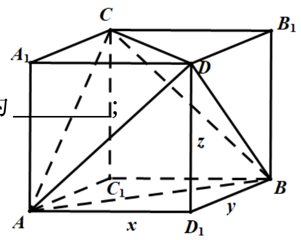
则$V_{C-ABD}\le\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}MD\cdot AB\sin\angle AMD\cdot CM\cdot\sin\angle CMD=\sin^2\angle AMD\le1$

变式 1（1） 在四面体$ABCD$中，$AB=AC=AD=CD=3,BC=2\sqrt{3},\angle BCD=90°$，则$V_{ABCD}=$______；$\dfrac{3\sqrt{5}}{4}$

$key:A$在BCD上的射影是$\triangle BCD$的外心

（2） 在四面体$ABCD$中，$AB=AD=CB=CD=3,AC=2\sqrt{3},BD=2$，则$V_{ABCD}=$______；$\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

（分割）$BC\perp$平面$ADE,\therefore V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ADE}\cdot BC=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot\sqrt{\dfrac{15}{4}-\dfrac{9}{4}}\cdot1=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$



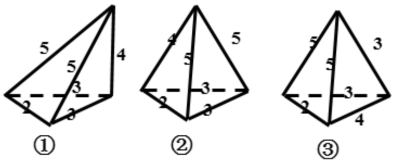
（3） 四面体$ABCD$中,$AB=CD=a,AC=BD=b,AD=BC=c$.则a,b,c的关系为_____；此四面体的体积为_______.

（补形）$\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\y^2+z^2=b^2\\z^2+x^2=c^2\end{cases},\therefore\begin{cases}z^2=b^2+c^2-a^2>0\\y^2=a^2+b^2-c^2>0\\x^2=a^2+c^2-b^2>0\end{cases},\therefore V_{ABCD}=\dfrac{2}{3}\cdot\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}$

（4）在六条棱长分别为$2,3,3,4,5,5$的所有四面体中，最大体积为________.

$$V_{①}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sqrt{2}\cdot 4=\frac{8\sqrt{2}}{3}>V_{②}$$

$$V_{③}\le\frac{1}{3}\cdot 3\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\sqrt{1-(\frac{4+16-9}{2\cdot 2\cdot 4})^2}=\frac{\sqrt{135}}{4}<\frac{8\sqrt{2}}{3}=V_{①}$$



（5）在棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的侧棱A_1A和B_1B上各有一个动点P、Q，且满足$A_1P=BQ$，M是棱CA上的动点，则$\dfrac{V_{M-ABQP}}{V_{ABC-A_1B_1C_1}-V_{M-ABQP}}$的最大值为____.

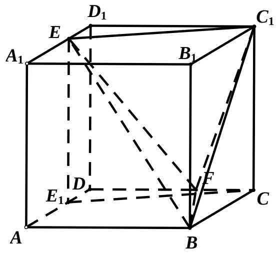
key: 由$A_1P=BQ$得PQ平分ABB_1A_1的面积

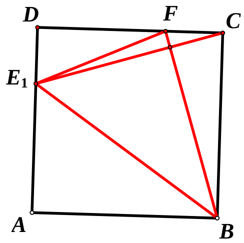
$\therefore V_{M-ABQP}=V_{M-ABB_1}$，设$AM=xAC(0\le x\le 1)$

则$$\frac{V_{M-ABQP}}{V_{ABC-A_1B_1C_1}-V_{M-ABQP}}=\frac{xV_{C-ABB_1}}{V_{ABC-A_1B_1C_1}-xV_{C-ABB_1}}=\frac{\frac{1}{3}x}{1-\frac{1}{3}x}=\frac{x}{3-x}=\frac{3}{3-x}-1\le\frac{1}{2}$$

（6）在棱长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点E在A_1D_1上，点F在CD上，$A_1E=2ED_1,DF=2FC$，则三棱锥$B-EFC_1$的体积是_______.

（补形）$V_{B-EFC_1}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}C_1E_1\cdot BF\cdot 1(\because C_1E_1\perp BF)=\dfrac{5}{27}$

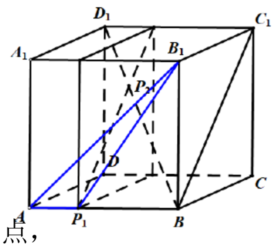




2（1）在单位正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中.若点P_1,P_2分别是线段AB,BD_1（不包括端点）上的动点，且线段P_1P_2平行于平面A_1ADD_1，则四面体$P_1P_2AB_1$的体积的最大值为________.

key: $P_2B=x$，则$P_1B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，

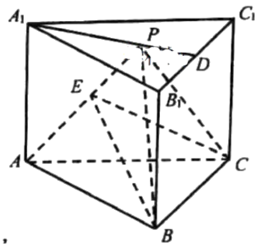
$$\therefore V_{P_2AB_1P_1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(1-\frac{\sqrt{3}}{3}x)\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}x\le\frac{1}{24}$$



（2）如图，正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的高为4，底面边长为$4\sqrt{3}$，D是B_1C_1的中点，P是线段A_1D上的动点，过BC作截面$\alpha\perp AP$于E，则三棱锥$P-BCE$体积的最小值为（　C　）A．3　B．$2\sqrt{3}$　C．$4\sqrt{3}$　D．12

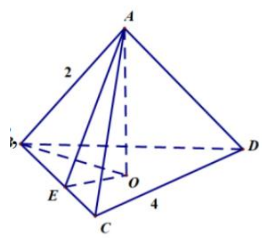
key: 设$A_1P=x$，则$AP=\sqrt{x^2+16}$，

$$\therefore\sqrt{x^2+16}\cdot BE=4\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}x^2+16}\text{即}BE=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{x^2+64}{x^2+16}}$$



$$\therefore V_{P-BEC}=\frac{PE}{PA}V_{P-ABC}=16\sqrt{3}(1-\frac{AE}{PA})=16\sqrt{3}(1-\frac{\sqrt{48-12\cdot\frac{x^2+64}{x^2+16}}}{\sqrt{x^2+16}})=16\sqrt{3}(1-\frac{6}{x+\frac{16}{x}})\ge 4\sqrt{3}$$

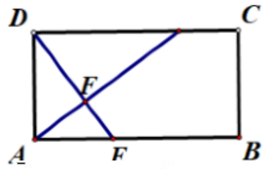
（3）已知四面体$ABCD$中，二面角$A-BC-D$的大小为$60°$，且$AB=2,CD=4,\angle CBD=120°$，则四面体$ABCD$体积的最大值是（　）$A.\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$　$B.\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$　$C.\dfrac{8}{3}$　$D.\dfrac{4}{3}$

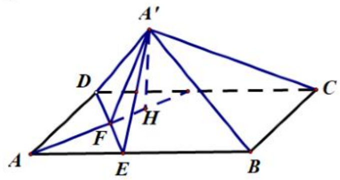


key：作$AE\perp BC$于E，$AO\perp$面BCD于O，连OE，$\therefore \angle AEO=60^\circ$，$\therefore \angle ABO\le \angle AEO=60^\circ$

$\because \angle CBD=120^\circ, CD=4, \therefore B$的轨迹为球面，$\therefore V_{ABCD}\le \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 2\sin 60^\circ=\frac{4}{3}$

④如图，在长方形 $ABCD$ 中，$AB=\frac{\sqrt{15}}{2}, AD=1$，点 E 在线段 AB(端点除外)上，现将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起为 $\triangle A'DE$. 设 $\angle ADE=\alpha$，二面角 $A'-DE-C$ 的大小为 β，若 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$，则四棱锥 $A'-BCDE$ 体积的最大值为（　　）A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{15}-1}{12}$　　D. $\frac{\sqrt{5}-1}{8}$





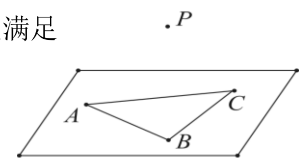
key：作$A'H\perp$平面$ABCD$于H，作$A'F\perp DE$于F，

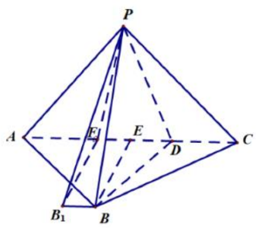
连FH，则$FH\perp DE$，$\therefore \angle AFH=\beta$，

$V_{A'-BCDE}=\frac{1}{3}\cdot(\frac{\sqrt{15}}{2}-\frac{1}{2}\tan\alpha)\cdot\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{6}(\sqrt{15}\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha)$

$=\frac{1}{6}(\frac{\sqrt{15}}{2}\sin 2\alpha-\frac{1-\cos 2\alpha}{2})=\frac{1}{6}[2\sin(2\alpha+\arctan\frac{1}{\sqrt{15}})-\frac{1}{2}]\le\frac{1}{4}$

（5）如图，点 P 是平面 ABC 外一点，点 D 是边 AC 上的动点(不含端点)，且满足 $PD=PA, PB=BA=BC=2, \angle ABC=\frac{2\pi}{3}$，则四面体 P-BCD 体积的最大值是（　　）A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$





key：取AC、AD的中点E、F，设$AF=x$，

连PF，则$PF\perp AC$，连BE，则$BE\perp AC$，

作$FB_1 \underset{=}{//} EB$，连BB_1，设$\angle PFB_1=\theta$，

则$V_{P-BCD}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(2\sqrt{3}-2x)\cdot 1\cdot PF\cdot\sin\theta=\frac{1}{3}(\sqrt{3}-x)\cdot PF\sin\theta\le\frac{2}{3}$

(由$4=PB^2=(\sqrt{3}-x)^2+PF^2+1-2PF\cos\theta=(\sqrt{3}-x)^2+(PF\sin\theta)^2+(PF\cos\theta-1)^2$

$\ge(\sqrt{3}-x)^2+(PF\sin\theta)^2\ge 2(\sqrt{3}-x)\cdot PF\sin\theta$)

（201906学考）已知四面体$ABCD$中，棱BC, AD所在直线所成的角为60°，且$BC=2, AD=3, \angle ACD=120^\circ$，则四面体$ABCD$的体积的最大值是（　　）$A.\frac{\sqrt{3}}{2}$　　$B.\frac{\sqrt{3}}{4}$　　$C.\frac{9}{4}$　　$D.\frac{3}{4}$　　D

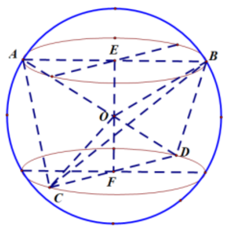
key:补成平行六面体

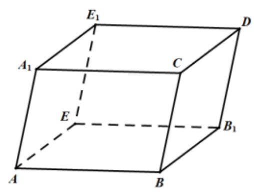
（2000全国竞赛）在四面体$ABCD$中，设$AB=1, CD=\sqrt{3}$，直线AB与CD的距离为2，夹角为$\frac{\pi}{3}$，则四面体$ABCD$的体积等于（　　）$A.\frac{\sqrt{3}}{2}$　$B.\frac{1}{2}$　$C.\frac{1}{3}$　$D.\frac{\sqrt{3}}{3}$

2000key：（补成平行六面体）$V=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot\sqrt{3}\cdot\sin 60^\circ\cdot 2=\frac{1}{2}$

（2010 全国Ⅰ）（12）已知在半径为 2 的球面上有 A、B、C、D 四点，若 $AB=CD=2$，则四面体 $ABCD$ 的体积的最大值为（B　）A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　B. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　C. $2\sqrt{3}$　D. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

2010key：$V\le\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot 2\sqrt{3}$(或$\frac{1}{6}\cdot 2\cdot 2\cdot 2\sqrt{3}$)$=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

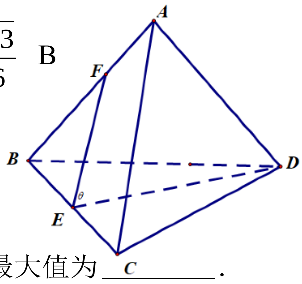




2023-05-02

变式 1（1）在三棱锥$A-BCD$中，$\triangle BCD$是边长为$\sqrt{3}$的等边三角形，$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，二面角$A-BC-D$的大小为θ，

且$\cos\theta=\frac{1}{3}$，则三棱锥$A-BCD$体积的最大值为（　）A.$\frac{3\sqrt{6}}{4}$　B.$\frac{\sqrt{6}}{4}$　C.$\frac{\sqrt{3}}{2}$　D.$\frac{\sqrt{3}}{6}$　B



key: A的轨迹为球面，

$\therefore V_{1-BCD}\le\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}\sin\theta=\frac{\sqrt{6}}{4}$

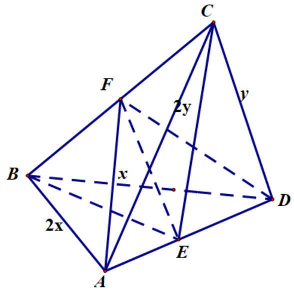
（2）四面体$ABCD$中，已知$AD\perp BC, AD=6, BC=2$，且$\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CD}=2$，则$V_{ABCD}$的最大值为__C____.

$key1$: 作$BE\perp AD$于E，则$AD\perp$面BCE

且$4x^2-AE^2=x^2-DE^2, 4y^2-AE^2=y^2-DE^2, \therefore 4x^2-4y^2=x^2-y^2$

$\therefore x=y$，取BC的中点F，则$AF\perp BC, DF\perp BC$，

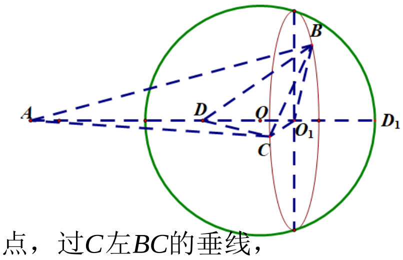
$\therefore BC\perp$面AED，且$AF=\sqrt{4x^2-1}, BF=\sqrt{x^2-1}$



$\therefore V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{\triangle BCE}\cdot AD=\frac{1}{3}\cdot2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{4x^2-1}\cdot\sqrt{x^2-1}\cdot\sqrt{1-(\frac{4x^2-1+x^2-1-36}{2\sqrt{4x^2-1}\cdot\sqrt{x^2-1}})^2}$

$=\sqrt{-\frac{1}{4}x^4+10x^2-40}\le2\sqrt{15}$

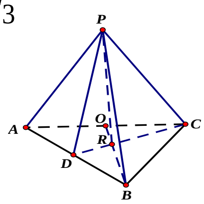
$key2$: B, C在阿波罗尼斯球面上，



$V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{\triangle O_1BC}\cdot AD\le\frac{1}{3}\cdot6\cdot\frac{1}{2}\cdot2\cdot\sqrt{16-1}=2\sqrt{15}$

（3）在三棱锥$P-ABC$中，$AB\perp BC, AB=6, BC=2\sqrt{3}$，$O$为$AC$的中点，过$C$左$BC$的垂线，交$BO, AB$分别于$R, D$.若$\angle DPR=\angle CPR$，则三棱锥$P-ABC$体积的最大值为_____.　$3\sqrt{3}$

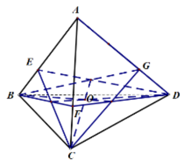
key: $\frac{PD}{PC}=\frac{DR}{RC}=\frac{1}{3}$，$\therefore P$的轨迹是阿波罗尼斯球面，且球半径为$\frac{3}{2}$



$\therefore V_{P-ABC}\le\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot6\cdot2\sqrt{3}\cdot\frac{3}{2}=3\sqrt{3}$

（05重庆）在体积为1的三棱柱$A-BCD$侧棱AB、AC、AD上分别取点E、F、G，使$AE:EB=AF:FC$ $=AG:GD=2:1$，记O为三平面BCG、CDE、DBF的交点，则三棱锥$O-BCD$的体积为__.

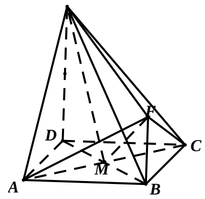
$05key$: $DO_1=\frac{3}{5}DE, CO=\frac{5}{7}CO_1$



$\therefore V_{O-BCD}=\frac{5}{7}V_{O_1-BCD}=\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{5}V_{E-BCD}=\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot V_{A-BCD}=\frac{1}{7}$

（2022新高考 II）11.如图，四边形$ABCD$为正方形，$ED\perp$平面$ABCD, FB//ED$，$AB=ED=2FB$，记三棱锥$E-ACD, F-ABC, F-ACE$的体积分别为V_1, V_2, V_3，

则（）A.$V_3=2V_2$　B.$V_3=V_1$　C.$V_3=V_1+V_2$　D.$2V_3=3V_1$



2022 II：$V_1=V_{E-ACD}=2V_{F-ACD}=2V_{F-ABC}=2V_2$

$V_3=V_{F-ACE}=2V_{F-AME}=2V_{A-MEF}=3V_{A-BMF}=3V_2$，$\therefore$ 选CD

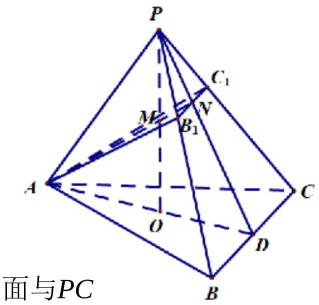
（1991 全国竞赛）设正三棱锥 P-ABC 的高为 PO，M 为 PO 的中点，过 AM 作与棱 BC 平行的平面，将三棱锥截为上、下两部分，则此两部分体积之比为_______.

$key:$ 设$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AN}$,

而$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$,

$\therefore\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2\lambda}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{3\lambda}\overrightarrow{AD},\therefore\frac{1}{2\lambda}+\frac{1}{3\lambda}=1$得$\lambda=\frac{5}{6},\therefore\overrightarrow{AN}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AP}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$

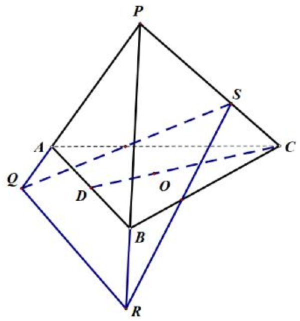
$\therefore\frac{PN}{PD}=\frac{2}{5},\therefore\frac{S_{\triangle PB_1C_1}}{S_{\triangle PBC}}=\frac{4}{25},\therefore\frac{V_{A-PB_1C_1}}{V_{A-BCC_1B_1}}=\frac{4}{21}$



(1995全国竞赛）设O是正三棱锥$P-ABC$底面$\triangle ABC$的中心，过O的动平面与PC交于S，与PA,PB的延长线分别交于Q,R，则和式$\frac{1}{PQ}+\frac{1}{PR}+\frac{1}{PS}$(　　)

$A.$有最大值无最小值　　　　　　　$B.$有最小值而无最大值

$C.$既有最大值又有最小值，两者不等　　$D.$是一个与面QPS无关的常数



(1995）$key1:\frac{PA}{PQ}=\frac{PQ-AQ}{PQ}=1-\frac{d_A}{d_p},\frac{PB}{PR}=\frac{PR-AR}{PR}=1-\frac{d_B}{d_p}$,

$\frac{PC}{PS}=\frac{PS+SC}{PS}=1+\frac{d_C}{d_p}$

$\therefore\frac{PA}{PQ}+\frac{PB}{PR}+\frac{PC}{PS}=3+\frac{d_C-d_A-d_B}{d_P}=3(\because d_A+d_B=2d_D=d_C)$

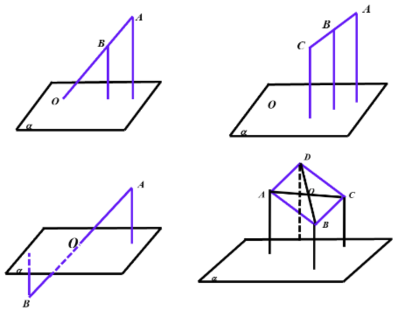
$key2:$ 设$\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PR}=\mu\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PS}=\nu\overrightarrow{PC}$

由Q,R,S,O共面得$\overrightarrow{PO}=x\overrightarrow{PQ}+y\overrightarrow{PR}+z\overrightarrow{PS}(x+y+z=1)$

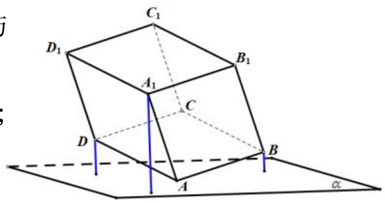
$=x\lambda\overrightarrow{PA}+y\mu\overrightarrow{PB}+z\nu\overrightarrow{PC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PC}$

$\therefore 3x\lambda=1,3y\mu=1,3z\nu=1,\therefore\frac{1}{PQ}+\frac{1}{PR}+\frac{1}{PS}=\frac{1}{PA}(\frac{PA}{PQ}+\frac{PB}{PR}+\frac{PC}{PS})$

$=\frac{1}{PA}(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu})=\frac{1}{PA}(3x+3y+3z)=\frac{3}{PA}$为定值



(06安徽）多面体上，位于同一条棱两端的顶点称为相邻的，如图.正方体的一个顶点A在平面α内，其余顶点在α的同侧，正方体上与顶点A相邻的三个顶点到平面α的距离分别为1, 2和4，P是正方体的其余四个顶点中的一个，则P到平面α的距离可能是：①3;②4;③5;④6;⑤7.以上结论正确的为________；此正方体的棱长为______.



$key:$①③④⑤

设棱长为a，建系如图，设平面α的法向量$\vec{n}=(x,y,z)$, 且$|\vec{n}|=n$

则$\begin{cases}n=\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=ax\\2n=\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=ay\\4n=\vec{n}\cdot\overrightarrow{AA_1}=az\\n^2=x^2+y^2+z^2\end{cases},\therefore n^2=\frac{n^2}{a^2}+\frac{4n^2}{a^2}+\frac{16n^2}{a^2}$得$a=\sqrt{21}$