2023-24（下）模拟（21）

2024-03-03

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的

1.设 $A=\{1,4,2x\},B=\{1,x^2\}$，若 $B\subseteq A$，则 $x=$（　　）A.0　　B.0 或 2　　C.0 或 -2　　D.2 或 -2

2.若 $(\sqrt{x}+\frac{2}{x^2})^n$ 展开式中只有第 6 项的二项式系数最大，则 $n=$（　　）A.9　　B.10　　C.11　　D.12

3.已知向量 $\vec{a}=(1,3),\vec{b}=(2,2)$，则 $\cos<\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b}>=$（　　）A. $\frac{1}{17}$　　B. $\frac{\sqrt{17}}{17}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

4.等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1，公差不为 0.若 a_2,a_3,a_6 成等比数列，则 $\{a_n\}$ 前 6 项的和为（　　）

A. -24　　B. -3　　C.3　　D.8

5.要得到函数 $y=\cos 2x$ 的图象，只需将函数 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象（　　）

A.向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位　　B.向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位　　C.向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位　　D.向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位

6.在三棱锥 $P-ABC$ 中，线段 PC 上的点 M 满足 $PM=\frac{1}{3}PC$，线段 PB 上的点 N 满足 $PN=\frac{2}{3}PB$，则三棱锥 $P-AMN$ 和三棱锥 $P-ABC$ 的体积之比为（　　）A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{2}{9}$　　D. $\frac{4}{9}$

7.为研究某池塘中水生植物的覆盖水塘面积 x（单位：dm^2）与水生植物的株数 y（单位：株）之间的相关关系，收集了 4 组数据，用模型 $y=ce^{kx}(c>0)$ 去拟合 x 与 y 的关系，设 $z=\ln y$，x 与 z 的数据如表格所示：得到 x 与 z 的线性回归方程 $\hat{z}=1.2x+a$，则 $c=$（　　）

x	3	4	6	7
z	2	2.5	4.5	7

A. -2　　B. -1　　C. e^{-2}　　D. e^{-1}

8.双曲线 $M:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右顶点分别为 A,B，曲线 M 上的一点 C 关于 x 轴的对称点为 D，若直线 AC 的斜率为 m，直线 BD 的斜率为 n，则当 $|mn+\frac{9}{mn}|$ 取到最小值时，双曲线离心率为（　　）

A.3　　B.4　　C. $\sqrt{3}$　　D.2

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9.已知复数 z 满足 $z^2+z+1=0$，则（　）A. $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$　　B. $|z|=1$　　C. $z^2=\bar{z}$　D. $z+z^2+z^3+\cdots+z^{2024}=0$

10.过线段 $x+y=4(0\le x\le 4)$ 上一点 P 作圆 $O:x^2+y^2=4$ 的两条切线，切点分别为 A,B，直线 AB 与 x,y 轴分别交于点 M,N，则（　　）A.点 O 恒在以线段 AB 为直径的圆上　　B.四边形 $PAOB$ 面积的最小值为 4

C. $|AB|$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$　　D. $|OM|+|ON|$ 的最小值为 4

11.已知函数 $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x+1)$，则（　　）

A. $f(x)$ 在其定义域上是单调递减函数　B. $y=f(x)$ 的图象关于 $(0,1)$ 对称

C. $f(x)$ 的值域是 $(0,+\infty)$　　D.当 $x>0$ 时，$f(x)-f(-x)\ge mx$ 恒成立，则 m 的最大值为 -1

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12.已知随机变量 $X\sim B(n,p)$.若 $E(X)=30,D(X)=20$，则 $p=$__________.

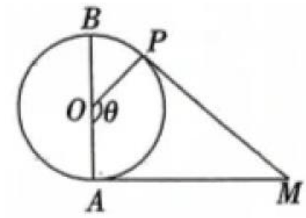
13.已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的右焦点，直线 l 过点 F 交抛物线于 A,B 两点，且 $|AB|=8$.直线 l_1,l_2 分别过点 A,B 且均与 x 轴平行，在直线 l_1,l_2 上分别取点 M,N（M,N 均在点 A,B 的右侧），$\angle ABN$ 和 $\angle BAM$ 的角平分线相交于点 P，则 $\triangle PAB$ 的面积为__________.

14.已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 $2\sqrt{3}$, M,N 为 BD_1 的三等分点，动点 P 在 $\triangle ACB_1$ 内，且 $\triangle PMN$ 的面积为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$，则点 P 的轨迹长度为__________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

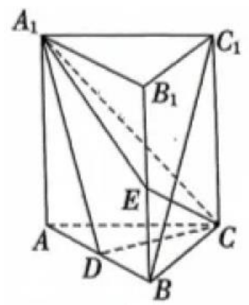
15.（13 分）如图所示，圆 O 的半径为 2，直线 AM 与圆 O 相切于点 A, $AM=4$，圆 O 上的点 P 从点 A 处逆时针转动到最高点 B 处，记 $\angle AOP=\theta,\theta\in(0,\pi]$.（1）当 $\theta=\frac{2\pi}{3}$ 时，求 $\triangle APM$ 的面积；

（2）试确定 θ 的值，使得 $\triangle APM$ 的面积等于 $\triangle AOP$ 的面积的 2 倍.



16.（15 分）如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D,E 分别是 AB,BB_1 的中点，$AA_1=AC=CB=\frac{\sqrt{2}}{2}AB$.

（1）证明：BC_1 // 平面 A_1CD；（2）求二面角 $D-A_1C-E$ 的正弦值.



17.（15 分）盒中有大小颜色相同的 6 个乒乓球，其中 4 个未使用过（称之为新球），2 个使用过（称之为旧球）．每局比赛从盒中随机取 2 个球作为比赛用球，比赛结束后放回盒中.使用过的球即成为旧球.

（1）求一局比赛后盒中恰有 3 个新球的概率；

（2）设两局比赛后盒中新球的个数为 X，求 X 的分布列及数学期望.

18.（17 分）已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-a\ln x, a\in R, f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，$g(x)=xe^x$.

（1）求 $f(x)$ 的单调区间；（2）若 $f(x)$ 有唯一零点.

①求实数 a 的取值范围；②当 $a>0$ 时，证明：$g(x)>f'(x)+4$.

19.（17 分）已知有穷数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geq 3)$ 中的每一项都是不大于 n 的正整数.对于满足$1\leq m\leq n$ 的整数 m，令集合 $A(m)=\{k\mid a_k=m,k=1,2,\cdots,n\}$.记集合 $A(m)$ 中元素的个数为 $s(m)$（约定空集的元素个数为 0）.

（1）若 $A:6,3,2,5,3,7,5,5$，求 $A(5)$ 及 $s(5)$；

（2）若 $\dfrac{1}{s(a_1)}+\dfrac{1}{s(a_2)}+\cdots+\dfrac{1}{s(a_n)}=n$，求证：$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互不相同；

（3）已知 $a_1=a,a_2=b$，若对任意的正整数 $i,j(i\neq j,i+j\leq n)$ 都有 $i+j\in A(a_i)$ 或 $i+j\in A(a_j)$，求 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 的值.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的

1.设 $A=\{1,4,2x\},B=\{1,x^2\}$，若 $B\subseteq A$，则 $x=$（ C ）A.0　B.0 或 2　C.0 或 -2　D.2 或 -2

2.若 $(\sqrt{x}+\frac{2}{x^2})^n$ 展开式中只有第 6 项的二项式系数最大，则 n=（ B ）A.9　B.10　C.11　D.12

$key:由T_{r+1}=C_n^r(\sqrt{x})^{n-r}(\frac{2}{x^2})^n得r=5的二项式系数最大,\therefore n=10$

3.已知向量 $\vec{a}=(1,3),\vec{b}=(2,2)$，则 $\cos<\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b}>=$（ B ）A. $\frac{1}{17}$　B. $\frac{\sqrt{17}}{17}$　C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

4.等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1，公差不为 0.若 a_2,a_3,a_6 成等比数列，则 $\{a_n\}$ 前 6 项的和为（A ）

A. -24　B. -3　C.3　D.8

5.要得到函数 $y=\cos 2x$ 的图象，只需将函数 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象（ D ）

A.向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位　B.向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位　C.向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位　D.向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位

6.在三棱锥 $P-ABC$ 中，线段 PC 上的点 M 满足 $PM=\frac{1}{3}PC$，线段 PB 上的点 N 满足 $PN=\frac{2}{3}PB$，则三棱锥 $P-AMN$ 和三棱锥 $P-ABC$ 的体积之比为（C ）A. $\frac{1}{9}$　B. $\frac{1}{3}$　C. $\frac{2}{9}$　D. $\frac{4}{9}$

7.为研究某池塘中水生植物的覆盖水塘面积 x（单位：dm^2）与水生植物的株数 y（单位：株）之间的相关关系，收集了 4 组数据，用模型 $y=ce^{kx}(c>0)$ 去拟合 x 与 y 的关系，设 $z=\ln y$, x 与 z 的数据如表格所示：得到 x 与 z 的线性回归方程 $\hat{z}=1.2x+a$，则 $c=$（C ）

x	3	4	6	7
z	2	2.5	4.5	7

A. -2　B. -1　C. e^{-2}　D. e^{-1}

8.双曲线 $M:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右顶点分别为 A,B，曲线 M 上的一点 C 关于 x 轴的对称点为 D，若直线 AC 的斜率为 m，直线 BD 的斜率为 n，则当 $|mn+\frac{9}{mn}|$ 取到最小值时，双曲线离心率为（D ）

A.3　B.4　C. $\sqrt{3}$　D.2

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9.已知复数 z 满足 $z^2+z+1=0$，则（ BC ）A. $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$　B. $|z|=1$　C. $z^2=\bar{z}$　D. $z+z^2+z^3+\cdots+z^{2024}=0$

$key:由求根公式得z=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}，A错，B，C对，$

$\therefore z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)=0,\therefore z^{3n}=1(n\in Z),\therefore z+z^2+\cdots+z^{2024}=\frac{z(1-z^{2024})}{1-z}=\frac{z-1}{1-a}=-1,D错$

10.过线段 $x+y=4(0\le x\le 4)$ 上一点 P 作圆 $O:x^2+y^2=4$ 的两条切线，切点分别为 A,B，直线 AB 与 x,y 轴分别交于点 M,N，则（ BCD ）A.点 O 恒在以线段 AB 为直径的圆上　B.四边形 $PAOB$ 面积的最小值为 4

C. $|AB|$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$　D. $|OM|+|ON|$ 的最小值为 4

11.已知函数 $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x+1)$，则（ ACD ）

A. $f(x)$ 在其定义域上是单调递减函数　B. $y=f(x)$ 的图象关于 $(0,1)$ 对称

C. $f(x)$ 的值域是 $(0,+\infty)$　　D.当 $x>0$ 时，$f(x)-f(-x)\ge mx$ 恒成立，则 m 的最大值为 -1

key:由$\sqrt{x^2+1}-x+1>0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}>x-1\Leftrightarrow x<1,or,\begin{cases}x\ge1\\x^2+1\ge x^2-2x+1\end{cases}$得定义域为$(-\infty,+\infty)$

$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x+1}\cdot(\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-1)<0,A$对；

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}+1)=0,\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty,C$对

$f(-x)+f(x)=\ln[(\sqrt{x^2+1}+x+1)(\sqrt{x^2+1}-x+1)]=\ln[(\sqrt{x^2+1}+1)^2-x^2]$不恒为2,$B$错；

$f(x)-f(-x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x+1)-\ln(\sqrt{x^2+1}+x+1)=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x+1}{\sqrt{x^2+1}+x+1}$

$=\ln(1-\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}+x+1})=\ln(1-\dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}})\ge mx\Leftrightarrow m\le\dfrac{1}{x}\cdot\ln(1-\dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}})$(在$x>0$上递减)

而$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(\sqrt{x^2+1}-x+1)-\ln(\sqrt{x^2+1}+x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-1}{\sqrt{x^2+1}-x+1}-\dfrac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}+1}{\sqrt{x^2+1}+x+1}}{1}=-1,\therefore m\le-1$

key:设$p(x)=f(x)-f(-x)-mx$,则$p(0)=0$

$p'(x)=\dfrac{\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}-1}{\sqrt{x^2+1}-x+1}-\dfrac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}+1}{\sqrt{x^2+1}+x+1}-m,\therefore p'(0)=-1-m\ge0$得$m\le-1$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12.已知随机变量 $X\sim B(n,p)$.若 $E(X)=30,D(X)=20$，则 $p=$__________.$\dfrac{1}{3}$

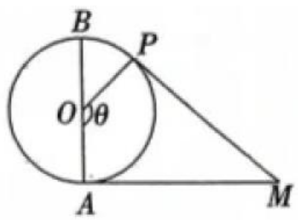
13.已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的右焦点，直线 l 过点 F 交抛物线于 A,B 两点，且 $|AB|=8$.直线 l_1,l_2 分别过点 A,B 且均与 x 轴平行，在直线 l_1,l_2 上分别取点 M,N（M,N 均在点 A,B 的右侧），$\angle ABN$ 和 $\angle BAM$ 的角平分线相交于点 P，则 $\triangle PAB$ 的面积为__________.$8\sqrt{2}$

14.已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 $2\sqrt{3}$, M, N 为 BD_1 的三等分点，动点 P 在 $\triangle ACB_1$ 内，且 $\triangle PMN$ 的面积为 $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，则点 P 的轨迹长度为__________.$\dfrac{2\sqrt{6}\pi}{3}$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（13 分）如图所示，圆 O 的半径为 2，直线 AM 与圆 O 相切于点 $A,AM=4$，圆 O 上的点 P 从点 A 处逆时针转动到最高点 B 处，记 $\angle AOP=\theta,\theta\in(0,\pi]$.（1）当 $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$ 时，求 $\triangle APM$ 的面积；

（2）试确定 θ 的值，使得 $\triangle APM$ 的面积等于 $\triangle AOP$ 的面积的 2 倍.

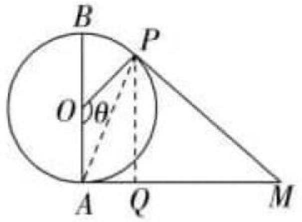


15.【解析】（1）过点 P 作 $PQ\perp AM$ 交 AM 于点 Q，如图：

因为圆 O 的半径为 2，

由题意 $PQ=2-2\cos\theta=2-2\cos\dfrac{2\pi}{3}=3$，

所以 $\triangle APM$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}\times4\times3=6$



（2）连接 AP，设 $\triangle AOP$ 的面积为 S_1,$\triangle APM$ 的面积为 S_2，

又 $S_1=\dfrac{1}{2}\times2\times2\times\sin\theta=2\sin\theta$，

$S_2=\dfrac{1}{2}AM\cdot PQ=\dfrac{1}{2}\times4\times2\times(1-\cos\theta)=4(1-\cos\theta)$，

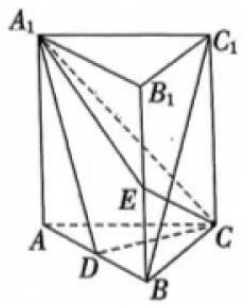
由题意 $S_2=2S_1$，所以 $4(1-\cos\theta)=4\sin\theta$，即 $\sin\theta+\cos\theta=1$，所以 $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

因为 $\theta\in(0,\pi)$，所以 $\theta+\dfrac{\pi}{4}\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\right)$，所以 $\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}$，所以 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，

所以当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时，使得 $\triangle APM$ 的面积等于 $\triangle AOP$ 的面积的 2 倍.

16.（15 分）如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D,E 分别是 AB,BB_1 的中点，$AA_1=AC=CB=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AB$.

（1）证明：$BC_1//$ 平面 A_1CD；（2）求二面角 $D-A_1C-E$ 的正弦值.



16.【解析】（1）证明：连接 AC_1，交点 A_1C 于点 F，则 F 为 AC_1 的中点.

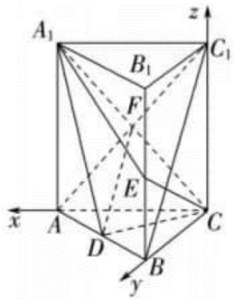
又 D 是 AB 的中点.连接 DF，则 BC_1 // DF.

因为 $DF\subset$ 平面 $A_1CD,BC\not\subset$ 平面 A_1CD.所以 BC_1 // 平面 A_1CD.

（2）解：由 $AC=CB=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AB$，得 $AC\perp BC$.

以 C 为坐标原点，$\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CC_1}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $C-xyz$

不妨设 $CA=2$，则 $D(1,1,0),E(0,2,1),A_1(2,0,2)$.



所以 $\overrightarrow{CD}=(1,1,0),\overrightarrow{CE}=(0,2,1),\overrightarrow{CA_1}=(2,0,2)$.

设 $\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$ 是平面 A_1CD 的法向量.

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CA_1}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_1+y_1=0\\ 2x_1+2z_1=0\end{cases}$，取 $\vec{n}=(1,-1,-1)$.

同理，设 $\vec{m}=(x_2,y_2,z_2)$ 是平面 A_1CE 的法向量，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{CE}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{CA_1}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}2y_2+z_2=0\\ 2x_2+2z_2=0\end{cases}$，取 $\vec{m}=(2,1,-2)$.

从而 $\cos\langle\vec{n},\vec{m}\rangle=\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}||\vec{m}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，故 $\sin\langle\vec{n},\vec{m}\rangle=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.所以二面角 $D-A_1C-E$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

17.（15 分）盒中有大小颜色相同的 6 个乒乓球，其中 4 个未使用过（称之为新球），2 个使用过（称之为旧球）.每局比赛从盒中随机取 2 个球作为比赛用球，比赛结束后放回盒中.使用过的球即成为旧球.

（1）求一局比赛后盒中恰有 3 个新球的概率；

（2）设两局比赛后盒中新球的个数为 X，求 X 的分布列及数学期望.

17.【解析】解答：（1）$P=\dfrac{C_2^1C_4^1}{C_6^2}=\dfrac{8}{15}$

（2）X 的可能取值为 $0,1,2,3,4$. $P(X=0)=\dfrac{C_4^2}{C_6^2}\cdot\dfrac{C_2^2}{C_6^2}=\dfrac{6}{225}$，$P(X=1)=\dfrac{C_4^2}{C_6^2}\cdot\dfrac{C_4^1C_2^1}{C_6^2}+\dfrac{C_4^1C_2^1}{C_6^2}\cdot\dfrac{C_3^2}{C_6^2}=\dfrac{72}{225}$，

$P(X=2)=\dfrac{C_4^2}{C_6^2}\cdot\dfrac{C_4^2}{C_6^2}+\dfrac{C_4^1C_2^1}{C_6^2}\cdot\dfrac{C_3^1C_3^1}{C_6^2}+\dfrac{C_2^2}{C_6^2}\cdot\dfrac{C_4^2}{C_6^2}=\dfrac{114}{225}$，$P(X=3)=\dfrac{C_2^2}{C_6^2}\cdot\dfrac{C_4^1C_2^1}{C_6^2}+\dfrac{C_4^1C_2^1}{C_6^2}\cdot\dfrac{C_3^2}{C_6^2}=\dfrac{32}{225}$，

$P(X=4)=\dfrac{C_2^2}{C_6^2}\cdot\dfrac{C_2^2}{C_6^2}=\dfrac{1}{225}$，

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\dfrac{6}{225}$	$\dfrac{72}{225}$	$\dfrac{114}{225}$	$\dfrac{32}{225}$	$\dfrac{1}{225}$

$E(X)=0\times\dfrac{6}{225}+1\times\dfrac{72}{225}+2\times\dfrac{114}{225}+3\times\dfrac{32}{225}+4\times\dfrac{1}{225}=\dfrac{16}{9}$.

18.（17 分）已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-a\ln x,a\in R$, $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，$g(x)=xe^x$.

（1）求 $f(x)$ 的单调区间；（2）若 $f(x)$ 有唯一零点.

①求实数 a 的取值范围；②当 $a>0$ 时，证明：$g(x)>f'(x)+4$.

(1) 解：由 $f'(x)=x-\dfrac{a}{x}$ 得：

当 $a\le 0$ 时，$f'(x)>0,\therefore f(x)$ 的递增区间为 $(0,+\infty)$，无递减区间；

当 $a>0$ 时，$f'(x)>0\Leftrightarrow x>\sqrt{a},\therefore f(x)$ 的递增区间为 $(\sqrt{a},+\infty)$，递减区间为 $(0,\sqrt{a})$

（2）①解：由（1）得：当$a<0$时，$f(x)$在$x>0$上递增，且$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$, $\therefore f(x)$有唯一零点，

当$a=0$时, $f(x)=\frac{1}{2}x^2(x>0)$无零点；

当$a>0$时，$f(x)_{\min}=f(\sqrt{a})=\frac{1}{2}a-a\ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}a(1-\ln a)$

而$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$,

$\therefore f(x)_{\min}=f(\sqrt{a})=\frac{1}{2}a-a\ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}a(1-\ln a)=0$, $\therefore a=e$, $\therefore a$的取值范围为$(-\infty,0)\cup\{e\}$

②证明：$\because a>0$, $\therefore$由①得$a=e$

要证：$g(x)>f'(x)+4 \Leftrightarrow xe^x>x-\frac{e}{x}+4 \Leftrightarrow x^2e^x-x^2-4x+e>0$对$x>0$恒成立$\cdots(*)$

设$p(x)=x^2e^x-x^2-4x+e$,

则$p'(x)=(2x+x^2)e^x-2x-4=(x+2)(xe^x-2)>0 \Leftrightarrow 0<xe^x-2$记为$q(x)$

则$q'(x)=(x+1)e^x>0$, 而$q(\ln 2)=2(\ln 2-1)<0$, $q(0.9)=0.9e^{0.9}-2>0$

$\therefore$存在唯一$x_0\in(\ln 2,0.9)$, 使得$q(x_0)=0$, $\therefore p'(x)>0 \Leftrightarrow x>x_0$

$\therefore p(x)_{\min}=p(x_0)=x_0^2e^{x_0}-x_0^2-4x_0+e=2x_0-x_0^2-4x_0+e=-x_0^2-2x_0+e>-0.81-1.8+e>0$

$\therefore (*)$成立，证毕

19.（17 分）已知有穷数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_n(n\ge 3)$ 中的每一项都是不大于 n 的正整数.对于满足$1\le m\le n$ 的整数m，令集合 $A(m)=\{k\,|\,a_k=m,k=1,2,\cdots,n\}$.记集合 $A(m)$ 中元素的个数为$s(m)$（约定空集的元素个数为 0）.

（1）若 $A:6,3,2,5,3,7,5,5$，求 $A(5)$ 及 $s(5)$；（2）若 $\frac{1}{s(a_1)}+\frac{1}{s(a_2)}+\cdots+\frac{1}{s(a_n)}=n$，求证：$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互不相同；

（3）已知 $a_1=a, a_2=b$，若对任意的正整数$i,j(i\ne j,i+j\le n)$都有$i+j\in A(a_i)$或$i+j\in A(a_j)$，求$a_1+a_2+\cdots+a_n$的值.

（1）解：由已知得$A(5)=\{k\,|\,a_k=5,k=1,2,\cdots,8\}=\{4,7,8\}$, $s(5)=3$

（2）证明：由已知得：$A(a_i)=\{k\,|\,a_k=a_i,k=1,2,\cdots,n\}$至少有一个元素$i$

$\therefore s(a_i)\ge 1(i=1,2,\cdots,n)$, $\therefore n=\frac{1}{s(a_1)}+\frac{1}{s(a_2)}+\cdots+\frac{1}{s(a_n)}\le n$, $\therefore s(a_i)=1(i=1,2,\cdots,n)$

$\therefore a_1,a_2,\cdots,a_n$互不相同,

（3）解：$\because A(a_i)=\{k\mid a_k=a_i,k=1,2,\cdots,n\},A(a_j)=\{k\mid a_k=a_j,k=1,2,\cdots,n\}$,

$\therefore i+j\in A(a_i)\Leftrightarrow a_{i+j}=a_i$, 且$i+j\in A(a_j)\Leftrightarrow a_{i+j}=a_j$

$\therefore a_{1+j}=a_1(j=2,3,\cdots,n-1)$, 或$a_{1+j}=a_j(j=2,3,\cdots,n-1)$,

当$b=a$时，$a_2=a_1,\therefore a_3=a_1,or,a_2,a_4=a_1,or,a_3$,

$\therefore a_3=a,a_4=a,\cdots,a_n=a,\therefore a_1+a_2+\cdots+a_n=na$

当$b\neq a$时，$\mathrm{a}_k=a_{1+k-1}=a_1,or,a_{k-1}$

若$a_k\in\{a_1,a_2\}$, 则$a_{k+1}=a_{1+k}=a_1,or,a_k\in\{a_1,a_2\},\therefore a_n\in\{a_1,a_2\}$

若$a_3=a$, 则$\mathrm{a}_4=a_{1+3}=a_1,or,a_3,\therefore a_4=a,\cdots,a_n=a,\therefore a_1+a_2+\cdots+a_n=(n-1)a+b$,

若$a_3=b$, 则$a_4=a_{1+3}=a,or,b,a_5=a_{1+4}=a,or,a_4$, 且$a_5=a_{2+3}=b,or,b,\therefore a_4=b,a_5=b$,

若$a_i=b(i=3,\cdots,k)$, 则$a_{i+1}=a_{2+i-1}=a_2,or,a_{i-1}=b,\therefore a_k=n(k=2,3,\cdots,n)$

$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_n=a+(n-1)b.$

总说$:a_1+a_2+\cdots+a_n=\begin{cases}na,a=b,\\(n-1)a+b,a_3=a\neq b,\\a+(n-1)b,a_3=b\neq a,\end{cases}$