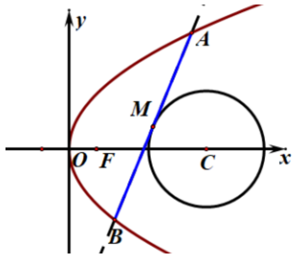
解析几何（4）抛物线解答（3）

2023-12-30

（2015四川）设直线l与抛物线$y^2=4x$相交于A、B两点，与圆$(x-5)^2+y^2=r^2(r>0)$相切于点M，且M为线段AB的中点，若这样是直线l恰有4条，则r的取值范围是（　）$A.(1,3)$　$B.(1,4)$　$C.(2,3)$　$D.(2,4)$

2015四川key：设$l_{AB}:x=ty+n$代入$y^2=4x$得$y^2-4ty-4n=0$



$\therefore AB$的中点坐标为$(2t^2+n,2t)(t^2+n>0)$,

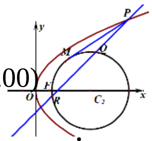
且$\dfrac{|5-n|}{\sqrt{1+t^2}}=r=\sqrt{(2t^2+n-5)^2+4t^2}$, 且$k_{MC}=\dfrac{2t}{2t^2+n-5}=-t$

当$t=0$时，l有两条；

当$t\neq 0$时,$2t^2+n=3$, 且$\dfrac{|2t^2+2|}{\sqrt{1+t^2}}=\sqrt{4+4t^2}$,$\therefore r=2\sqrt{1+t^2}\in(2,4)(t^2<3)$, 选$D$

（2017B）在平面直角坐标系 xOy 中，曲线$C_1:y^2=4x$,曲线$C_2:(x-4)^2+y^2=8$，经过C_1上一点 P 作一条倾斜角为 45°的直线 l，与C_2交于两个不同的点 Q、R，则$|PQ|\cdot|PR|$的取值范围为_____.$[4,8)\cup(8,200)$

key：设$P(t^2,2t)$，则$l:y-2t=x-t^2$即$x-y-t^2-2t=0,\therefore\dfrac{|4-t^2-2t|}{\sqrt{2}}<2\sqrt{2}$得$t\in(-4,-2)\cup(0,2)$



由切割线定理得$|PQ|\cdot|PR|=|PM|^2=(t^2-4)^2+4t^2-8=t^4-4t^2+8=(t^2-2)^2+4\in[4,8)\cup(8,200)$

变式 1.已知AB为抛物线$C:x^2=2py(p>0)$的长为$l(l>0)$的弦. 则 AB的中点P的轨迹方程为__________；AB的中点P到x轴的距离的最小值为________________.

$$key1:\begin{cases}\left.\begin{array}{l}x_A^2=2py_A\\x_B^2=2py_B\end{array}\right\}(x_A-x_B)\cdot 2x=2p(y_A-y_B)\\x_A+x_B=2x\\y_A+y_B=2y\\(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2=l^2\end{cases},\therefore\begin{cases}(x_A-x_B)^2=\dfrac{p^2l^2}{x^2+p^2}\\(y_a-y_B)^2=\dfrac{x^2l^2}{x^2+p^2}\end{cases}$$

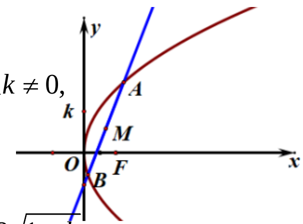
$$\therefore(x_A+x_B)^2+(x_A-x_B)^2=4x^2+\frac{p^2l^2}{x^2+p^2}=2(x_A^2+x_B^2)=4p(y_A+y_B)=8py\text{即}y=\frac{x^2}{2p}+\frac{pl^2}{8(x^2+p^2)}$$

$key2$：设$P(x,y)$，则$A(x+\dfrac{l}{2}\cos\theta,y+\dfrac{l}{2}\sin\theta),B(x-\dfrac{l}{2}\cos\theta,y-\dfrac{l}{2}\sin\theta)$,

$$\text{则}\begin{cases}(x+\dfrac{l}{2}\cos\theta)^2=2p(y+\dfrac{l}{2}\sin\theta)\\(x-\dfrac{l}{2}\cos\theta)^2=2p(y-\dfrac{l}{2}\sin\theta)\end{cases}\text{消去}\theta\text{得}y=\frac{x^2}{2p}+\frac{pl^2}{8(x^2+p^2)}.\therefore d=|PH|-\frac{p}{2}\geq\begin{cases}\dfrac{l-p}{2},l\geq 2p,\\\dfrac{l^2}{8},l<2p\end{cases}$$

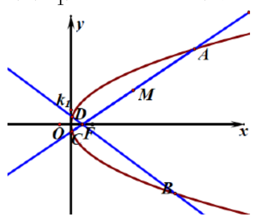
（2017山西）直线$y=kx-2$交抛物线$y^2=8x$于A、B两点, 若线段AB的中点横坐标为2, 则线段AB的长度为__.

$$2017\text{山西}key:\begin{cases}y=kx-2\\y^2=8x\end{cases}\text{消去}\frac{k}{8}y^2-y-2=0,\therefore\begin{cases}y_A+y_B=\dfrac{8}{k}\\y_Ay_B=-\dfrac{16}{k}\end{cases},\text{且}\Delta=1+k>0,\text{且}k\neq 0,$$



$$\therefore x_A+x_B=\frac{y_A+2}{k}+\frac{y_B+2}{k}=\frac{\frac{8}{k}+4}{k}=4\text{得}k=2,or,-1\text{（舍去）},\therefore|AB|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\cdot\frac{8\sqrt{1+k}}{|k|}=2\sqrt{15}$$

（2021重庆）过抛物线$E:y^2=2x$的焦点F作两条斜率之积为$-\dfrac{1}{2}$的直线l_1、l_2，其中l_1交E于A、C两点，l_2交E于B、D两点，则$|AC|+2|BD|$的最小值为_______.

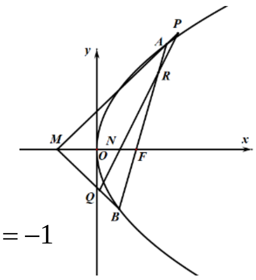


2021重庆key：设$l_1: y=k(x-\frac{1}{2})$代入E方程得：$\frac{k}{2}y^2-y-\frac{k}{2}=0$

$\therefore |AC|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\cdot\frac{2\sqrt{1+k^2}}{|k|}=\frac{2(1+k^2)}{k^2}$，同理$|BD|=\frac{2(1+\frac{1}{4k^2})}{\frac{1}{4k^2}}=2(1+4k^2)$

$\therefore |AC|+2|BD|=\frac{2(1+k^2)}{k^2}+4(1+4k^2)=\frac{2}{k^2}+16k^2+6\ge 8\sqrt{2}+6$

（2021浙江）如图，已知F是抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点，M是抛物线的准线与x轴的交点，且$|MF|=2$.（Ⅰ）求抛物线的方程；



（Ⅱ）设过点F的直线交抛物线于A、B两点，斜率为2的直线l与直线MA, MB, AB, x轴依次交于点P, Q, R, N，且$|RN|^2=|PN|\cdot|QN|$，求直线l在x轴上的截距的取值范围.

解：（Ⅰ）由已知得：$p=2, \therefore$ 抛物线方程为$y^2=4x$

（Ⅱ）设$A(a^2,2a)(a>0), B(b^2,2b)$，由$A, F, B$三点共线得：$\frac{2b-2a}{b^2-a^2}=\frac{2}{a+b}=\frac{2a}{a^2-1}$即$ab=-1$

设$l: x=\frac{1}{2}y+n(n\ne 1)$，得$x_N=n$，

l_{MA}：$y=\frac{2a}{a^2+1}(x+1)$，得$y_P=\frac{(2+2n)a}{a^2-a+1}$，同理$y_Q=\frac{(2+2n)b}{b^2-b+1}=\frac{(-2n-2)a}{a^2+a+1}$

$l_{AB}: y=\frac{2a}{a^2-1}(x-1)$联立$l: x=\frac{1}{2}y+n$得$y_R=\frac{(-2+2n)a}{a^2-a-1}$

$\therefore |RN|^2=|PN|\cdot|QN| \Leftrightarrow y_R^2=-y_Py_Q \Leftrightarrow \frac{(-2+2n)^2a^2}{(a^2-a-1)^2}=\frac{(2-m)^2a^2}{(a^2+1)^2-a^2}$

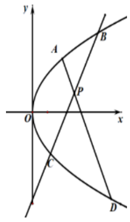
$\therefore (\frac{1-n}{1+n})^2=\frac{(a^2-a-1)^2}{(a^2+1)^2-a^2}=\frac{(a-\frac{1}{a}-1)^2}{(a+\frac{1}{a})^2-1}=\frac{(t-1)^2}{t^2+1}=\frac{t^2-2t+1}{t^2+3}\in[0,\frac{4}{3}]$，(其中$t=a-\frac{1}{a}\in R$)

$\therefore 3(n-1)^2\le 4(n+1)^2$即$n\le -7-4\sqrt{3}, or, n\ge -7+4\sqrt{3}$

$\therefore$ 直线l在x轴上的截距为$n\in(-\infty,-7-4\sqrt{3}]\cup[-7+4\sqrt{3},1)\cup(1,+\infty)$

变式 1．已知抛物线$E: y^2=2px(p>0)$，点$A(2,2\sqrt{2})$在抛物线上，斜率为2的直线l与抛物线交于B, C两点.（点C在点B的下方）．（Ⅰ）求抛物线E的方程；（Ⅱ）如图，点$D(x_1,y_1)$在抛物线E上，且$x_1>2$，线段AD与线段BC相交于点P.若$|PA|\cdot|PD|=2|PB|\cdot|PC|\ne 0$，当$\triangle ADC$面积取到最大值时，求点$C$的坐标

解：（Ⅰ）由$8=4p$得$p=2, \therefore$ 抛物线方程为$y^2=4x$；



（Ⅱ）设直线BC方程为$y=2x+m$，代入E得$\frac{y^2}{2}-y+m=0$，

$\therefore \begin{cases} y_B+y_C=2 \\ y_By_C=2m \end{cases}$，且$\Delta=1-2m>0$，设$P(\frac{t-m}{2},t)$，

则$2|PB|\cdot|PC|=\frac{5}{2}(y_B-t)(t-y_C)=\frac{5}{2}(-y_By_C+t(y_B+y_C)-t^2)=\frac{5}{2}(-2m+2t-t^2)$

设$l_{AD}: y-2\sqrt{2}=k(x-2)$即$y=kx-2k+2\sqrt{2}$(其中$k=\frac{t-2\sqrt{2}}{\frac{t-m}{2}-2}<0$)

代入E得$\frac{k}{4}y^2-y-2k+2\sqrt{2}=0,\therefore 2\sqrt{2}y_1=\frac{4(-2k+2\sqrt{2})}{k}$即$y_1=-2\sqrt{2}+\frac{4}{k}$

$\therefore|PA|\cdot|PD|=(1+\frac{1}{k^2})(t-2\sqrt{2})(\frac{4}{k}-2\sqrt{2}-t)=(1+\frac{1}{k^2})(\frac{4(t-2\sqrt{2})}{k}+8-t^2)=(1+\frac{1}{k^2})(2t-2m-t^2)$

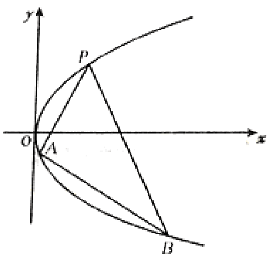
$=2|PB|\cdot|PC|=\frac{5}{2}(-2m+2t-t^2)$得$k=-\frac{\sqrt{6}}{3}$得$AD$的斜率为定值，

要使$\triangle ADC$面积最大，只要C到直线AD的距离最大，只要C处的切线与AD平行，

由点C处切线方程为$y_C y=2(x+x_C)$得$\frac{2}{y_C}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$得$y_C=-\sqrt{6},x_C=\frac{3}{2},\therefore$点$C$的坐标为$(\frac{3}{2},-\sqrt{6})$.

（2004北京）如图，过抛物线$y^2=2px(p>0)$上一定点$P(x_0,y_0)(y_0>0)$，作两条直线分别交抛物线于$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$.(1) 求该抛物线上纵坐标为$\frac{p}{2}$的点到其焦点F的距离；

(2) 当PA于PB的斜率存在且倾斜角互补时，求$\frac{y_1+y_2}{y_0}$的值，并证明直线AB的斜率是非零常数.



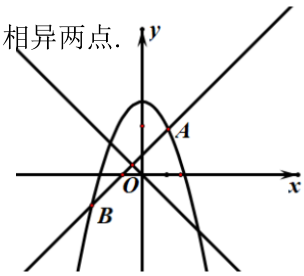
解：(1) 所求距离为$\frac{p}{2}+\frac{p}{2}=p$

(2) 设$P(2pt^2,2pt)(2pt^2=x_0,2pt=y_0),A(2pa^2,2pa)(x_1=2pa^2,y_1=2pa)$,
$B(2pb^2,2pb)(x_2=2pb^2,y_2=2pb)$

则$k_{PA}+k_{PB}=\frac{2pa-2pt}{2pa^2-2pt^2}+\frac{2pb-2pt}{2pb^2-2pt^2}=\frac{1}{a+t}+\frac{1}{b+t}=0$得$a+b+2t=0$

$\therefore\frac{y_1+y_2}{y_0}=\frac{2pa+2pb}{2pt}=\frac{a+b}{t}=-2,$且$k_{AB}=\frac{1}{a+b}=\frac{1}{-2t}=-\frac{p}{y_0}$

（2007 四川 2016 陕西）已知 A、B 为抛物线 $y=3-x^2$ 上关于直线 $x+y=0$ 对称的相异两点.



则$|AB|$等于（　C　）A．3　　B．4　　C．$3\sqrt{2}$　　D．$4\sqrt{2}$

key:设$l_{AB}:x-y+m=0$代入$y=3-x^2$得$x^2+x+m-3=0$

$\therefore AB$的中点$(-\frac{1}{2},m-\frac{1}{2})(\Delta=1-4(m-3)>0),\therefore-\frac{1}{2}+m-\frac{1}{2}=0$即$m=1$

$\therefore|AB|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{13-4m}=3\sqrt{2}$

变式 1.已知曲线$y^2=ax$与其关于点$(1,1)$对称曲线有两个不同的交点的直线的倾斜角为$45°$,则$a=$(　　)

$A.1$　$B.\frac{\sqrt{2}}{2}$　$C.2$　$D.\pm2$

$key1$:由已知得弦AB的中点为$(1,1)$,且$k_{AB}=1=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{a}{y_A+y_B}=\frac{a}{2},\therefore a=2$

$key2$:对称曲线方程为:$(2-y)^2=a(2-x)$,

$\therefore(2-y)^2-y^2=a(2-x)-ax=a(2-2x)=(2-2y)\cdot2$即$ax-2y+2-a=0,\therefore a=2$

（2008 湖南）若 A、B 是抛物线 $y^2=4x$ 上的不同两点，弦 AB（不平行于 y 轴）的垂直平分线与 x 轴相交于点 P，则称弦 AB 是点 P 的一条“相关弦”.已知当 $x>2$ 时，点 $P(x,0)$ 存在无穷多条“相关弦”.给定 $x_0>2$.

(I) 证明：点 $P(x_0,0)$ 的所有“相关弦” 的中点的横坐标相同；

(2) 试问：点 $P(x_0,0)$ 的“相关弦”的弦长中是否存在最大值？若存在，求其最大值（用 x_0 表示）；若不存在，请说明理由.

(1) 证明：设$A(a^2,2a),B(b^2,2b)$,则AB的中点M的坐标为$(\frac{a^2+b^2}{2},a+b)$

由已知得$PM\perp AB,\therefore k_{AB}k_{MP}=\frac{2a-2b}{a^2-b^2}\cdot\frac{a+b}{\frac{a^2+b^2}{2}-x_0}=\frac{2}{\frac{a^2+b^2}{2}-x_0}=-1,\therefore\frac{a^2+b^2}{2}=x_0-2>0$,证毕

(2) 解二：设$l_{AB}:y=kx+m(k\neq 0)$代入$y^2=4x$得$:\frac{k}{4}y^2-y+m=0$

$\therefore\begin{cases}y_A+y_B=\frac{4}{k}\\ y_Ay_B=\frac{4m}{k}\end{cases}$,且$\Delta=1-km>0$,且$AB$的中点$M(x_M,\frac{2}{k})$

$\therefore k_{MP}=\frac{\frac{2}{k}}{x_M-x_0}=-\frac{1}{k}$即$m=x_0-2,\therefore AB$的中点的横坐标相同，且为$x_0-2$

$\therefore|AB|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\cdot\frac{4\sqrt{1-km}}{|k|}$(其中$\frac{2}{k}=k(x_0-2)+m$)

$=4\sqrt{\frac{(k^2+1)((x_0-2)k^2-1)}{k^4}}=4\sqrt{-(\frac{1}{k^2})^2+(x_0-3)\cdot\frac{1}{k^2}+x_0-2}=4\sqrt{-(\frac{1}{k^2}-\frac{x_0-3}{2})^2+(\frac{x_0-1}{2})^2}$

$\therefore$当$x_0>3$时，弦长的最大值为$2x_0-2$；当$2<x_0\leq 3$时，弦长无最大值.

(2010A) 已知抛物线$y^2=6x$上两个动点$A(x_1,y_1)$和$B(x_2,y_2)$,其中$x_1\neq x_2$,且$x_1+x_2=4$,线段AB的垂直平分线与x轴交于点C，则$\triangle ABC$面积的最大值为______.

2010$Akey$:设$A(6a^2,6a),B(6b^2,6b)$，则$a^2+b^2=\frac{2}{3}$

且$\frac{3a+3b}{2-x_C}\cdot\frac{6(a-b)}{6(a^2-b^2)}=\frac{3}{2-x_C}=-1$得$x_C=5$,

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}6a^2&6a&1\\6b^2&6b&1\\5&0&1\end{matrix}\right\|=3|(a-b)(6ab+5)|$(令$t=|a-b|$，则$ab=2-3t^2$)

$=3|t(7-3t^2)|=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sqrt{6t^2(7-3t^2)^2}\leq\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{(\frac{14}{3})^3}=\frac{14\sqrt{7}}{3}$

(2021B) 在平面直角坐标系xOy中，已知抛物线$y=ax^2-3x+3(a\neq 0)$的图象与抛物线$y^2=2px(p>0)$的图象关于直线$y=x+m$对称，则实数a,p,m的乘积为________.

2021$Bkey$:设$P(x,y)$是抛物线$y^2=2px$关于$y=x+m$的对称抛物线上的任意一点，

而$P(x,y)$关于$y=x+m$的对称点$P'(y-m,x+m)$

$\therefore(x+m)^2=2p(y-m)$即$y=\frac{x^2}{2p}+\frac{mx}{p}+\frac{m^2}{2p}+m=ax^2-3x+3$

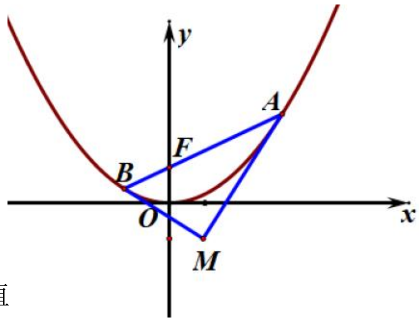
$\therefore\begin{cases}\frac{1}{2p}=a\\ \frac{m}{p}=-3\\ \frac{m^2}{2p}+m=3\end{cases}$ 得$p=2,m=-6,a=\frac{1}{4},\therefore apm=-3$

三、面积

2023-12-30

（2006Ⅱ）（21）已知抛物线 $x^2=4y$ 的焦点为 F,A,B 是抛物线上的两动点，且 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}(\lambda>0)$ 过 A、B 两点分别作抛物线的切线，设其交点为 M.（I）证明: $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{AB}$ 为定值;

（II）设△ABM 的面积为 S，写出 $S=f(\lambda)$ 的表达式，并求 S 的最小值.



（Ⅰ）证明：设$A(2a,a^2),B(2b,b^2)$,

由$\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}$得$A,F,B$三点共线,$\therefore\dfrac{b^2-a^2}{2b-2a}=\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{a^2-1}{2a}$得$ab=-1$

$l_{AM}:2ax=4\cdot\dfrac{a^2+y}{2}$即$ax=a^2+y$联立$l_{BM}:bx=b^2+y$得$M(a+b,-1)$

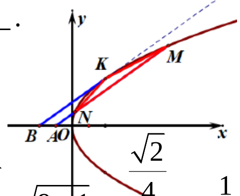
$\therefore\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{AB}=(a+b,-2)\cdot(2b-2a,b^2-a^2)=2(b^2-a^2)-2(b^2-a^2)=0$为定值

（Ⅱ）解：由$\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}$得$-2a=\lambda\cdot 2b=2\lambda\cdot\dfrac{-1}{a}$即$\lambda=a^2$

$$\therefore S=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}2a & a^2 & 1\\ 2b & b^2 & 1\\ a+b & -1 & 1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}|(a-b)(a^2+b^2+2)|=\frac{1}{2}(\sqrt{\lambda}+\frac{1}{\sqrt{\lambda}})^3\geq 4$$

$\therefore f(\lambda)=\dfrac{1}{2}(\sqrt{\lambda}+\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}})^3$,且$S$的最小值为4

（2018B）设抛物线$C:y^2=2x$的准线与x轴交于点A，过点$B(-1,0)$作一直线l与抛物线C相切于点K，过点A作l的平行线，与抛物线C交于点M,N，则△KMN的面积为______.



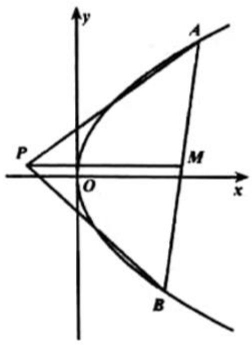
$2018Bkey$:设$K(2k^2,2k)$，则$l_{BK}:2ky=2k^2+x,\therefore -2k^2=-1$得$k=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore l_{MN}:y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+\dfrac{1}{2})$代入$C$方程得：$x^2-3x+\dfrac{1}{4}=0,\therefore S_{\triangle KMN}=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+\dfrac{1}{2}}\cdot\sqrt{9-1}\cdot\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{1+\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{2}$

（2018）21. 如图，已知点P是y轴左侧（不含y轴）一点，抛物线$C:y^2=4x$上存在不同的两点A,B满足PA,PB 的中点均在C上.

（Ⅰ）设AB的中点为M,证明：PM垂直于y轴;

（Ⅱ）若P是半椭圆$x^2+\dfrac{y^2}{4}=1(x<0)$上的动点，求△$PAB$的面积的取值范围.



（Ⅰ）设$A(a^2,2a),B(b^2,2b)$，$P(s,t)$,则$\begin{cases}(\dfrac{2a+t}{2})^2=4\cdot\dfrac{a^2+s}{2}\text{即}a^2-ta+2s-\dfrac{t^2}{4}=0,\\(\dfrac{2b+t}{2})^2=4\cdot\dfrac{b^2+s}{2}\text{即}b^2-tb+2s-\dfrac{t^2}{4}=0,\end{cases}$

$\therefore a,b$是关于x的方程$x^2-tx+2s-\dfrac{t^2}{4}=0$的两根,$\therefore\begin{cases}a+b=t\\ab=2s-\dfrac{t^2}{4}\end{cases}$

$\therefore y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}=a+b=t=y_P,\therefore PM$垂直于$y$轴,得证

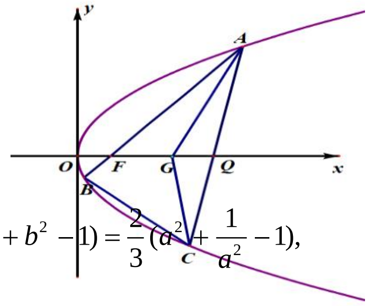
（Ⅱ）由（Ⅰ）得：$S_{\triangle PAB}=\dfrac{1}{2}|(x_M-s)\cdot(y_A-y_B)|$

$=\dfrac{1}{2}|(\dfrac{a^2+b^2}{2}-s)\cdot\sqrt{4t^2-4(-t^2+8s)}|=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}|(t^2-4s)\sqrt{t^2-4s}|$,令$u=\sqrt{t^2-4s}=\sqrt{-4s^2-4s+4}$

$\because s\in[-1,0),\therefore u\in[2,\sqrt{5}],\therefore S_{\triangle PAB}=\dfrac{3}{4}\sqrt{2}u^3\in[6\sqrt{2},\dfrac{15\sqrt{10}}{4}]$即为所求的

2023-12-30

(2019浙江）如图，已知点$F(1,0)$为抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点，过点F的直线交抛物线于A,B两点，点C在抛物线上，使得$\triangle ABC$的重心G在x轴上，直线AC交x轴于点Q，且Q在点F的右侧，记$\triangle AFG$、$\triangle CQG$的面积分别为S_1、S_2.（Ⅰ）求p的值及抛物线的准线方程；（Ⅱ）求$\dfrac{S_1}{S_2}$的最小值及此时点G的坐标.



解：（Ⅰ）$p=2,$准线方程为$x=-1;$

（Ⅱ）设$A(a^2,2a),B(b^2,2b)(a>0>b),C(c^2,2c),$

由A,F,B共线得$\dfrac{2}{b+a}=\dfrac{2b-2a}{b^2-a^2}=\dfrac{2a}{a^2-1}$得$ab=-1,$

由$\triangle ABC$的重心为G得$\begin{cases}a^2+b^2+c^2=3x_G\\2a+2b+2c=0\end{cases}$得$c=-a-b=-a+\dfrac{1}{a},x_G=\dfrac{2}{3}(a^2+b^2-1)=\dfrac{2}{3}(a^2+\dfrac{1}{a^2}-1),$

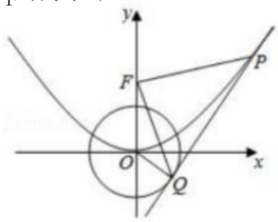
由A,Q,C共线得$\dfrac{2}{a+c}=\dfrac{2a}{a^2-x_Q}$得$x_Q=-ac=a^2-1>1$得$a>\sqrt{2},$

$$\therefore\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}(\frac{2}{3}(a^2+\frac{1}{a^2}-1)-1)\cdot 2a}{\frac{1}{2}(a^2-1-\frac{2}{3}(a^2+\frac{1}{a^2}-1))\cdot 2(a-\frac{1}{a})}=\frac{\frac{1}{3a}(2a^2-1)(a^2-2)}{\frac{a^2-1}{3a^3}(a^2-2)(a^2+1)}=\frac{a^2(2a^2-1)}{(a^2-1)(a^2+1)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(a^2+1+a^2-1)(\frac{a^2+1+a^2-1}{2}+a^2-1)}{(a^2-1)(a^2+1)}=\frac{1}{4}(\frac{a^2+1}{a^2-1}+\frac{3(a^2-1)}{a^2+1})\ge\frac{1}{4}(2\sqrt{3}+4)=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

（当且仅当$a^2=2+\sqrt{3}$时，取$=$）,$\therefore$所求最小值为$1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,相应$G(2,0)$

(2022甘肃）如图，O为坐标原点，点F为抛物线$C_1:x^2=2py(p>0)$的焦点，且抛物线C_1上点P处的切线与圆$C_2:x^2+y^2=1$相切与点Q.⑴ 当直线PQ的方程$x-y-\sqrt{2}=0$时，求抛物线C_1的方程；



(2）当正数p变化时，记S_1、S_2分别为$\triangle FPQ$、$\triangle FOQ$的面积，求$\dfrac{S_1}{S_2}$的最小值.

2022甘肃解：⑴ 设$P(2pt,2pt^2)$,则$l_{PQ}:2ptx=p(2pt^2+y)$即$2tx=2pt^2+y$

$\because PQ$与圆C_2相切,$\therefore\dfrac{2pt^2}{\sqrt{1+4t^2}}=1,$

$\because PQ$的方程为$x-y-\sqrt{2}=0,\therefore\begin{cases}2t=1\\-2pt^2=-\sqrt{2}\end{cases}$得$p=2\sqrt{2},\therefore C$的方程为$x^2=4\sqrt{2}y$

(2）由（1）得$\begin{cases}2tx=2pt^2+y\\y=-\dfrac{1}{2t}x\end{cases}$得$Q(\dfrac{4pt^3}{1+4t^2},\dfrac{-2pt^2}{1+4t^2}),$

$$\therefore S_1=\frac{1}{2}\sqrt{1+4t^2}\cdot|2pt-\frac{4pt^3}{1+4t^2}|\cdot\frac{|2pt^2+\frac{p}{2}|}{\sqrt{1+4t^2}}=\frac{1}{2}p^2|t|(1+2t^2),S_2=S_{\triangle FOQ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{2}\cdot|\frac{4pt^3}{1+4t^2}|=|\frac{p^2t^3}{1+4t^2}|,$$

$\therefore\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{(1+2t^2)(1+4t^2)}{2t^2}=4t^2+\dfrac{1}{2t^2}+3\ge2\sqrt{2}+3$(当且仅当$t^2=\dfrac{1}{8}$时，取=）,$\therefore\dfrac{S_1}{S_2}$的最小值为$3+2\sqrt{2}$.

(2023甲)20.已知直线$x-2y+1=0$与抛物线$C:y^2=2px(p>0)$交于A、B两点，且$|AB|=4\sqrt{15}$.

⑴ 求p；（2）设F为C的焦点，M、N为C上两点,$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0$,求$\triangle MFN$面积的最小值.

解析几何（4）抛物线解答（3）

2023-12-30

2023甲解：（1）由$\begin{cases}x-2y+1=0\\ y^2=2px\end{cases}$消去$x$得$y^2-4py+2p=0$

$\therefore\begin{cases}y_A+y_B=4p\\ y_Ay_B=2p\end{cases}$，且$\Delta=8p(2p-1)>0$

$\therefore|AB|=\sqrt{5}\cdot\sqrt{8p(2p-1)}=4\sqrt{15}$得$p=2$

（2）设$M(m^2,2m),N(n^2,2n)$

则$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=(m^2-1)(n^2-1)+4mn=0\Leftrightarrow m^2n^2+4mn-(m^2+n^2)+1=0$

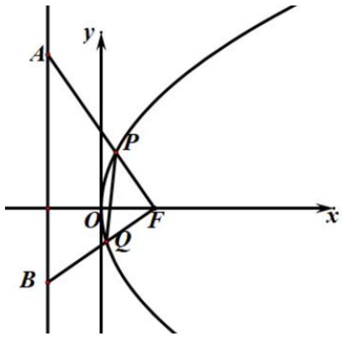
$\therefore S_{\triangle MFN}=\frac{1}{2}(m^2+1)(n^2+1)=\frac{1}{2}(m^2n^2+m^2+n^2+1)=\frac{1}{2}(2m^2n^2+4mn+2)$

$=(mn+1)^2$（由$m^2n^2+4mn+1=m^2+n^2\ge 2|mn|$得$mn\in(-\infty,-3-2\sqrt{2}]\cup[-3+2\sqrt{2},+\infty)$）

$\ge 4(3-2\sqrt{2})$（当$mn=-3+2\sqrt{2}$时，取$=$）

$\therefore\triangle ABC$面积的最小值为$12-8\sqrt{2}$

变式 1. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线$C:y^2=4x$ 的焦点为 F,A,B 是其准线上的两个动点，且 $FA\perp FB$，线段 FA,FB 分别与抛物线 C 交于 P，Q 两点，记$\triangle PQF$ 的面积为S_1，$\triangle ABF$ 的面积为S_2，当$\frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{9}$时，$|AB|=$__________.$\frac{64}{9}$



key：设$P(p^2,2p),Q(q^2,2q)(pq<0)$，则$\frac{2p}{p^2-1}\cdot\frac{2q}{q^2-1}=-1$即$(p^2-1)(q^2-1)=-4pq$，

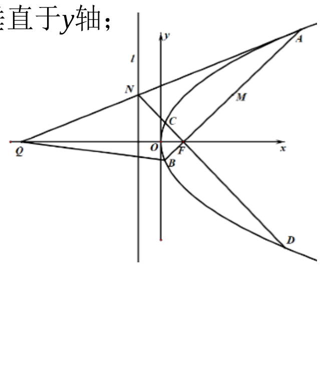
$\therefore p^2q^2-p^2-q^2+1=-4pq\Leftrightarrow(pq+1)^2=(p-q)^2$即$|pq+1|=|p-q|$

由$\frac{y_A}{-2}=\frac{2p}{p^2-1}$得$y_A=\frac{-4p}{p^2-1}$，同理$y_B=\frac{-4q}{q^2-1}$，

$$\therefore\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix}p^2&2p&1\\ q^2&2q&1\\ 1&0&1\end{vmatrix}\right\|}{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left|\frac{-4p}{p^2-1}+\frac{4q}{q^2-1}\right|}=\frac{|(p^2-1)(q^2-1)|}{4}=|pq|=\frac{1}{9},$$

$$\therefore|AB|=\left|\frac{-4p}{p^2-1}+\frac{4q}{q^2-1}\right|=\frac{4|(p-q)(pq+1)|}{4|pq|}=9(pq+1)^2=\frac{64}{9}$$

变式 2. 如图所示，过抛物线$y^2=4x$的焦点F作互相垂直的直线l_1,l_2，l_1交抛物线于A,B两点（A在x轴上方），l_2交抛物线于C,D两点，交其准线于点N.（Ⅰ）设AB的中点为M，求证：MN垂直于y轴；（Ⅱ）若直线AN与x轴交于Q，求$\triangle AQB$面积的最小值.



（Ⅰ）证明：设$A(a^2,2a)(a>0),B(b^2,2b)$，则$y_M=a+b$

由A,F,B共线得$\dfrac{2a-2b}{a^2-b^2}=\dfrac{2}{a+b}=\dfrac{2a}{a^2-1}$即$ab=-1$，

$\therefore AB$方程为$y=\dfrac{2}{a+b}(x-1)$即$2x-(a+b)y-2=0$

$\therefore$直线CD方程为：$y=-\dfrac{a+b}{2}(x-1)$令$x=-1$得$y_N=a+b=y_M$，$\therefore MN$垂直于y轴.

（Ⅱ）由A,N,Q三点共线得$\dfrac{2a-(a+b)}{a^2+1}=\dfrac{a-b}{a^2+1}=\dfrac{2a}{a^2-x_Q}$即$x_Q=\dfrac{a^3+a}{b-a}=\dfrac{a^3+a}{-\frac{1}{a}-a}=-a^2$

$\therefore S_{\triangle QAB}=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+(\dfrac{a+b}{2})^2}\,|2b-2a|\cdot\dfrac{|-2a^2-2|}{\sqrt{4+(a+b)^2}}=\dfrac{(a^2+1)^2}{a}$

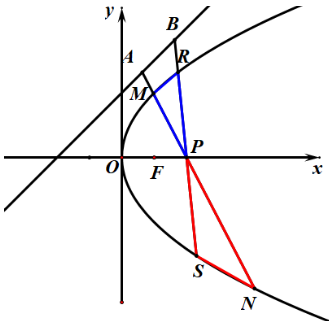
（或$S_{\triangle QAB}=\dfrac{1}{2}(1+a^2)\cdot|2a-2b|=\dfrac{(a^2+1)^2}{a}$）记为$f(a)$，

则$f'(a)=\dfrac{(a^2+1)(3a^2-1)}{a^2}>0\Leftrightarrow a>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore f(a)_{\min}=f(\dfrac{\sqrt{3}}{3})=\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$

$key2:a^2+1=a^2+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\ge 4(a^2\cdot(\dfrac{1}{3})^3)^{\frac{1}{4}}=4\cdot 3^{-\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{1}{2}}$，$\therefore S_{\triangle QAB}\ge\dfrac{16\cdot 3^{-\frac{3}{2}}\cdot a}{a}=\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$

变式 3.已知点 A,B 在直线$l:y=x+2$上（B 在 A 上方），$P(2,0)$，$|AB|=\sqrt{2}$，斜率为k_1的直线 AP 交抛物线$\Gamma:y^2=4x$于点 M,N，直线 BP 交Γ于点 R，S.

（I）求k_1的取值范围；（II）若$0<k_1<\dfrac{1}{5}$，求$S_{\Delta MPR}\cdot S_{\Delta SPN}$的取值范围.



解：（Ⅰ）设$A(a,a+2)(a\ne 0$，且$a+3\ne 0)$，则$B(a+1,a+3)$，

$\therefore k_1=\dfrac{a+2}{a-2}=1+\dfrac{4}{a-2}\in(-\infty,0)\cup(0,\dfrac{1}{5})\cup(\dfrac{1}{5},1)\cup(1,+\infty)$，

（Ⅱ）设$l_{AP}:y=k_1(x-2)$代入Γ得：$\dfrac{k_1}{4}y^2-y-2k_1=0$，$\therefore\begin{cases}y_M+y_N=\dfrac{-4}{k_1}\\ y_My_N=-8\end{cases}$

设$l_{BP}:y=k_2(x-2)$（其中$\dfrac{k_1}{1}=\dfrac{a+2}{a-2}$得$\dfrac{k_1+1}{k_1-2}=\dfrac{2a}{4}$，$\therefore k_2=\dfrac{a+3}{a-1}=\dfrac{5k_1-1}{k_1+3}$），同理$\begin{cases}y_R+y_S=\dfrac{-4}{k_2}\\ y_Ry_S=-8\end{cases}$

$\therefore S_{\triangle MPR}\cdot S_{\triangle SPN}=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+\dfrac{1}{k_1^2}}\cdot|y_M|\cdot\dfrac{|k_1(x_R-2)-y_R|}{\sqrt{1+k_1^2}}\cdot\dfrac{1}{2}\sqrt{1+\dfrac{1}{k_1^2}}\cdot|y_N|\cdot\dfrac{|k_1(x_S-2)-y_S|}{\sqrt{1+k_1^2}}$

$=\dfrac{2}{k_1^2}\cdot|(\dfrac{k_1}{k_2}-1)y_R\cdot(\dfrac{k_1}{k_2}-1)y_S|=16(\dfrac{1}{k_2}-\dfrac{1}{k_1})^2$

$=16(\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{k_1+3}{1-5k_1})^2=16[\dfrac{5k_1+1-5k_1}{k_1}+\dfrac{k_1+3(5k_1+1-5k_1)}{1-5k_1}]^2$

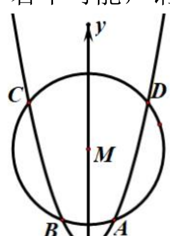
$=16(8+\dfrac{1-5k_1}{k_1}+\dfrac{16k_1}{1-5k_1})^2\ge 4096$（当且仅当$k_1=\dfrac{1}{9}$时取$=$），$\therefore$所求的取值范围为$[4096,+\infty)$

变式 4.已知抛物线$E:y=x^2$与圆$M:x^2+(y-4)^2=r^2(r>0)$相交于 A,B,C,D 四个点.

（1）当$r=2$时，求四边形 $ABCD$ 的面积；

（2）四边形 $ABCD$ 的对角线交点是否可能为 M，若可能，求出此时 r 的值，若不可能，请说明理由；

（3）当四边形 $ABCD$ 的面积最大时，求圆 M 的半径 r 的值.



解析几何（4）抛物线解答（3）

2023-12-30

解：（1）由$\begin{cases} y=x^2 \\ x^2+(y-4)^2=4 \end{cases}$得$y^2-7y+12=0,\therefore \begin{cases} y=3 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{cases}, or, \begin{cases} y=4 \\ x=\pm 2 \end{cases}$

$\therefore S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}\cdot(2\sqrt{3}+4)\cdot 1=2+\sqrt{3}$

（2）假设可能，则$AD\perp CD,$

由$\begin{cases} y=x^2 \\ x^2+(y-4)^2=r^2 \end{cases}$消去$x$得$y^2-7y+16-r^2=0,\therefore CD//AB//x$轴$,\therefore AD\perp x$轴

且$\Delta=49-4(16-r^2)=4r^2-15>0,\therefore y_A\ne y_D, y_A, y_D>0,\therefore x_A\ne x_D,\therefore AD\not\perp x$轴$,\therefore$不可能

（3）由（2）得$S_{ABCD}=(x_A+x_D)(y_D-y_A)=(\sqrt{y_A}+\sqrt{y_D})(y_D-y_A)$

$=\sqrt{y_A+y_D+2\sqrt{y_Ay_D}}\cdot(y_D-y_A)=\sqrt{7+2\sqrt{16-r^2}}\cdot\sqrt{4r^2-15}=\sqrt{(4r^2-15)(7+2\sqrt{16-r^2})},$

设$f(x)=(7-2x)(7+2x)^2(x=\sqrt{16-r^2}\in(0,\dfrac{7}{2}))$

则$f'(x)=-2(7+2x)^2+(7-2x)\cdot 2(7+2x)\cdot 2>0\Leftrightarrow x<\dfrac{7}{6},$

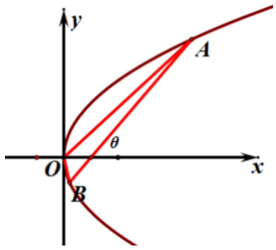
$\therefore f(x)_{\max}=f(\dfrac{7}{6})=\dfrac{7^3\cdot 2^5}{3^3},\therefore ABCD$面积的最大值是$\sqrt{16-r^2}=\dfrac{7}{6}$即$r=\dfrac{\sqrt{527}}{6}$

四、斜率问题

（2007上海）已知抛物线$y^2=2px(p>0), AB$是过焦点F的弦，如果AB与x轴所成角为$\theta(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}),$

则$\angle AOB=$________.

2007上海$key1: A(2pa^2,2pa), B(2pb^2,2pb)(a>0>b)$



由A,F,B三点共线得$\dfrac{2pa-2pb}{2pa^2-2pb^2}=\dfrac{1}{a+b}=\dfrac{2pa}{2pa^2-\dfrac{p}{2}}$得$ab=-\dfrac{1}{4}$

且$k_{AB}=\dfrac{1}{a+b}=\tan\theta$即$a+b=\dfrac{1}{\tan\theta}$，而$k_{OA}=\dfrac{1}{a}, k_{OB}=\dfrac{1}{b},$

$$\therefore \tan\angle AOB=-\frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{1+\frac{1}{ab}}=-\frac{a-b}{ab+1}=-\frac{4}{3\sin\theta},$$

$$a-b=\sqrt{(a-b)^2}=\sqrt{(a+b)^2-4ab}=\sqrt{\frac{1}{\tan^2\theta}+1}=\frac{1}{\sin\theta},\therefore \angle AOB=\pi-\arctan\frac{4}{3\sin\theta}$$

2007上海$key:|FA|=\dfrac{p}{1-\cos\theta},\therefore A(\dfrac{p}{2}+\dfrac{p\cos\theta}{1-\cos\theta},\dfrac{p\sin\theta}{1-\cos\theta}), B(\dfrac{p}{2}-\dfrac{p\cos\theta}{1+\cos\theta},-\dfrac{p\sin\theta}{1+\cos\theta})$

$$\therefore k_{OA}=\frac{\frac{p\sin\theta}{1-\cos\theta}}{\frac{p}{2}\cdot\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}=\frac{2\sin\theta}{1+\cos\theta}=2\tan\frac{\theta}{2}, k_{OB}=\frac{\frac{-p\sin\theta}{1+\cos\theta}}{\frac{p}{2}\cdot\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\frac{-2\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{-2}{\tan\frac{\theta}{2}}$$

$$\therefore \tan\angle AOB=\frac{\frac{-2}{\tan\frac{\theta}{2}}-2\tan\frac{\theta}{2}}{1+(\frac{-2}{\tan\frac{\theta}{2}})\cdot 2\tan\frac{\theta}{2}}=-\frac{4}{3\sin\theta},\therefore \angle AOB=\pi-\arctan\frac{4}{3\sin\theta}$$