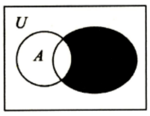
2023-24（下）模拟（49）

2024-03-26

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求.

1.若全集U,集合 A,B 及其关系如图所示,则图中阴影部分表示的集合是(　　)



A.$\complement_U(A\cap B)$　　B.$\complement_U(A\cup B)$　　C.$(\complement_U A)\cap B$　　D.$A\cap(\complement_U B)$

2.已知$\vec{a}=(1,2),|\vec{b}|=2$,且$\vec{a}\perp\vec{b}$,则$\vec{a}-\vec{b}$与$\vec{a}$的夹角的余弦值为(　　)A.$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　B.$\frac{\sqrt{5}}{3}$　C.$\frac{\sqrt{5}}{4}$　D.$\frac{\sqrt{5}}{6}$

3.设 b,c 表示两条直线,α,β 表示两个平面,则下列说法中正确的是(　　)

A.若$b//\alpha,c\subset\alpha$,则$b//c$ B.若$b//c,b\subset\alpha$,则$c//\alpha$ C.若$\alpha\perp\beta,c//\alpha$,则$c\perp\beta$　D.若$c//\alpha,c\perp\beta$,则$\alpha\perp\beta$

4.已知角α的终边过点$P(-3,2\cos\alpha)$,则$\cos\alpha=$(　　)A.$\frac{\sqrt{3}}{2}$　B.$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　C.$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$　D.$-\frac{1}{2}$

5.设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q,前 n 项和为S_n,则"$q=2$"是"$\{S_n+a_1\}$为等比数列"的(　　)

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件　　C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

6.已知实数 x,y 满足 $x>3$,且 $xy+2x-3y=12$,则 $x+y$ 的最小值为(　　)A.$1+2\sqrt{6}$　B.8　C.$6\sqrt{2}$　D.$1+2\sqrt{3}$

7.已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$,点 A 为双曲线的左顶点,以F_1F_2为直径的圆交双曲线的一条渐近线于 P,Q 两点,且$\angle PAQ=\frac{2\pi}{3}$,则该双曲线的离心率为(　　)A.$\sqrt{2}$　B.$\sqrt{3}$　C.$\frac{\sqrt{21}}{3}$　D.$\sqrt{13}$

8.在等边三角形 ABC 的三边上各取一点 D,E,F,满足 $DE=3,DF=2\sqrt{3},\angle DEF=90°$,则$\triangle ABC$ 的面积的最大值是

(　　)A.$7\sqrt{3}$　　B.$13\sqrt{3}$　　C.$\frac{7}{3}\sqrt{3}$　　D.$\frac{13}{3}\sqrt{3}$

二、选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分.

9.在学校组织的《青春如火,初心如炬》主题演讲比赛中,有 8 位评委对每位选手进行评分(评分互不相同),将选手的得分去掉一个最低评分和一个最高评分,则下列说法中正确的是(　　) A.剩下评分的平均值变大

B.剩下评分的极差变小　　C.剩下评分的方差变小　　D.剩下评分的中位数变大

10.在三棱锥$A-BCD$中,已知$AB=AC=BD=CD=3,AD=BC=2$,点 M,N 分别是 AD,BC 的中点，则(　　)

A.$MN\perp AD$　　B.异面直线 AN,CM 所成的角的余弦值是$\frac{7}{8}$

C.三棱锥$A-BCD$的体积为$\frac{4\sqrt{7}}{3}$　　D.三棱锥$A-BCD$的外接球的表面积为11π

11.已知函数$f(x)=e^x\cdot(\sin x+\cos x)$,则(　　)A.$f(x)$的零点为$x=k\pi-\frac{\pi}{4},k\in Z$

B.$f(x)$的单调递增区间为$[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}],k\in Z$　　C.当$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$时,若$f(x)\geq kx$恒成立,则$k\leq\frac{2}{\pi}\cdot e^{\frac{\pi}{2}}$

D.当$x\in[-\frac{1003\pi}{2},\frac{1005\pi}{2}]$时,过点$(\frac{\pi-1}{2},0)$作$f(x)$的图象的所有切线,则所有切点的横坐标之和为$502\pi$

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

12.直线$3x-4y+3=0$的一个方向向量是____________.

13.甲、乙两人争夺一场羽毛球比赛的冠军,比赛为"三局两胜"制.如果每局比赛中甲获胜的概率为$\frac{2}{3}$,乙获胜的概率

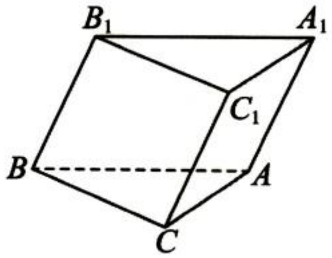
为$\frac{1}{3}$,则在甲获得冠军的情况下,比赛进行了三局的概率为___________.

14.已知函数$f(x)$及其导函数$f'(x)$的定义域均为R,记$g(x)=f'(x)$,若$f(2x-1),g(x-2)$均为偶函数,且当$x\in[1,2]$时,$f(x)=mx^3-2x$,则$g(2024)=$____________.

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分 13 分）如图,斜三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的底面是直角三角形,$\angle ACB=90°$,点B_1在底面ABC内的射影恰好是BC的中点,且$BC=CA=2$.（1）求证:平面$ACC_1A_1\perp$平面B_1C_1CB;

（2）若斜棱柱的高为$\sqrt{3}$,求平面ABB_1与平面AB_1C_1夹角的余弦值.



16.（本小题满分 15 分）已知函数$f(x)=\ln x-ax$,其中$a\in R$.

（1）若曲线$y=f(x)$在$x=1$处的切线在两坐标轴上的截距相等,求a的值;

(II)是否存在实数a,使得$f(x)$在$x\in(0,e]$上的最大值是-3?若存在,求出a的值;若不存在,说明理由.

17.（本小题满分 15 分）记复数的一个构造:从数集$\{0,1,\sqrt{3}\}$中随机取出 2 个不同的数作为复数的实部和虚部.重复 n 次这样的构造,可得到 n 个复数,将它们的乘积记为 z_n.已知复数具有运算性质:

$|(a+bi)\cdot(c+di)|=|(a+bi)|\cdot|(c+di)|$,其中 $a,b,c,d\in R$.（1）当 $n=2$ 时,记$|z_2|$的取值为 X,求 X 的分布列;

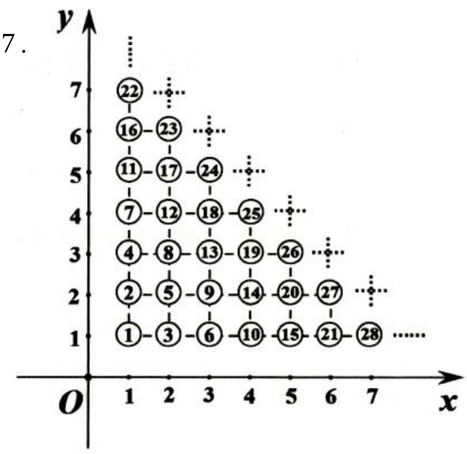
（2）当 $n=3$时,求满足$|z_3|\le 2$的概率;（3）求$|z_n|<5$的概率 P_n.

18.（本小题满分 17 分）在平面直角坐标系 xOy 中,我们把点$(x,y),x,y\in N^*$称为自然点.按如图所示的规则,将每个自然点(x,y)进行赋值记为$P(x,y)$,例如$P(2,3)=8$,$P(4,2)=14,P(2,5)=17$.

（1）求$P(x,1)$;（2）求证：$2P(x,y)=P(x-1,y)+P(x,y+1)$;

（3）如果$P(x,y)$满足方程$P(x+1,y-1)+P(x,y+1)+P(x+1,y)$,

$+P(x+1,y+1)=2024$，求$P(x,y)$的值.



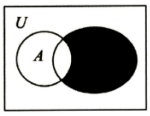
19.（本小题满分 17 分）在平面直角坐标系 xOy 中,过点 $F(1,0)$ 的直线 l 与抛物线 $C:y^2=4x$ 交于 M,N 两点（M 在第一象限）.（1）当 $|MF|=3|NF|$ 时,求直线 l 的方程;

（2）若三角形 OMN 的外接圆与曲线 C 交于点 D（异于点 O,M,N）.

（ⅰ）证明:$\triangle MND$ 的重心的纵坐标为定值，并求出此定值;（ⅱ）求凸四边形 $OMDN$ 的面积的取值范围.

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求.

1.若全集U,集合 A,B 及其关系如图所示,则图中阴影部分表示的集合是(C)



A.$\complement_U(A\cap B)$　　B.$\complement_U(A\cup B)$　　C.$(\complement_U A)\cap B$　　D.$A\cap(\complement_U B)$

2.已知$\vec{a}=(1,2),|\vec{b}|=2$,且$\vec{a}\perp\vec{b}$,则$\vec{a}-\vec{b}$与$\vec{a}$的夹角的余弦值为(B)A.$\frac{2\sqrt{5}}{5}$ B.$\frac{\sqrt{5}}{3}$ C.$\frac{\sqrt{5}}{4}$ D.$\frac{\sqrt{5}}{6}$

3.设 b,c 表示两条直线,α,β 表示两个平面,则下列说法中正确的是(D)

A.若$b//\alpha,c\subset\alpha$,则$b//c$ B.若$b//c,b\subset\alpha$,则$c//\alpha$ C.若$\alpha\perp\beta,c//\alpha$,则$c\perp\beta$ D.若$c//\alpha,c\perp\beta$,则$\alpha\perp\beta$

4.已知角α的终边过点$P(-3,2\cos\alpha)$,则$\cos\alpha=$(B)A.$\frac{\sqrt{3}}{2}$ B.$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C.$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ D.$-\frac{1}{2}$

5.设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q,前 n 项和为S_n,则“$q=2$”是“$\{S_n+a_1\}$为等比数列”的(C)

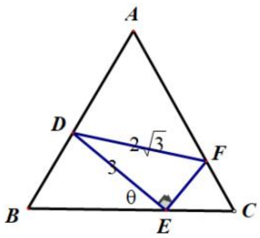
A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件　　C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

6.已知实数 x,y 满足 $x>3$,且$xy+2x-3y=12$,则$x+y$的最小值为(A)A.$1+2\sqrt{6}$ B.8 C.$6\sqrt{2}$ D.$1+2\sqrt{3}$

7.已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$,点 A 为双曲线的左顶点,以F_1F_2为直径的圆交双曲线的一条渐近线于 P,Q 两点,且$\angle PAQ=\frac{2\pi}{3}$,则该双曲线的离心率为(C)A.$\sqrt{2}$ B.$\sqrt{3}$ C.$\frac{\sqrt{21}}{3}$ D.$\sqrt{13}$

8.在等边三角形 ABC 的三边上各取一点 D,E,F,满足$DE=3,DF=2\sqrt{3},\angle DEF=90^\circ$,则$\triangle ABC$的面积的最大值是

(A)A.$7\sqrt{3}$　　B.$13\sqrt{3}$　　C.$\frac{7}{3}\sqrt{3}$　　D.$\frac{13}{3}\sqrt{3}$



key:如图，$\angle DEB=\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$,则$\frac{3}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{BE}{\sin(\theta+\frac{\pi}{3})}$,且$\frac{\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{CE}{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta+\frac{\pi}{3})}$

得$BC=2\sqrt{3}\sin(\theta+\frac{\pi}{3})+2\sin(\theta+\frac{\pi}{6})=2\sqrt{3}(\sin\theta\cdot\frac{1}{2}+\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2})+2(\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos\theta\cdot\frac{1}{2})$

$=2\sqrt{3}\sin\theta+4\cos\theta\le\sqrt{12+16}=2\sqrt{7},\therefore S_{\triangle ABC}\le\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 28=7\sqrt{3}$,选$A$

二、选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分.

9.在学校组织的《青春如火,初心如炬》主题演讲比赛中,有 8 位评委对每位选手进行评分(评分互不相同),将选手的得分去掉一个最低评分和一个最高评分,则下列说法中正确的是(BC) A.剩下评分的平均值变大

B.剩下评分的极差变小　　C.剩下评分的方差变小　　D.剩下评分的中位数变大

10.在三棱锥$A-BCD$中,已知$AB=AC=BD=CD=3,AD=BC=2$,点 M,N 分别是 AD,BC 的中点，则(ABD)

A.$MN\perp AD$　　B.异面直线 AN,CM 所成的角的余弦值是$\frac{7}{8}$

C.三棱锥$A-BCD$的体积为$\frac{4\sqrt{7}}{3}$　　D.三棱锥$A-BCD$的外接球的表面积为11π

11.已知函数$f(x)=e^x\cdot(\sin x+\cos x)$,则(ACD)A.$f(x)$的零点为$x=k\pi-\frac{\pi}{4},k\in Z$

B.$f(x)$的单调递增区间为$[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}],k\in Z$　C.当$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$时,若$f(x)\ge kx$恒成立,则$k\le\frac{2}{\pi}\cdot e^{\frac{\pi}{2}}$

D.当 $x\in[-\frac{1003\pi}{2},\frac{1005\pi}{2}]$ 时,过点 $(\frac{\pi-1}{2},0)$ 作 $f(x)$ 的图象的所有切线,则所有切点的横坐标之和为 502π

$key: f(x)=e^x\cdot\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=0\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=k\pi, A$对；

$f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)=e^x\cdot 2\cos x>0\Leftrightarrow x\in[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}], B$错；

C:（切线应用）过原点作$f(x)(0\le x\le\frac{\pi}{2})$的切线得$0-e^x(\sin x+\cos x)=2e^x\cos x\cdot(0-e^x(\sin x+\cos x))$

得$2e^x\cos x=1,\therefore k=2e^x\cos x=1$

设$p(x)=2e^x\cos x(0\le x\le\frac{\pi}{2})$，则$p'(x)=2e^x(\cos x-\sin x)>0\Leftrightarrow 0\le x<\frac{\pi}{4},\therefore p(x)_{\max}=p(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$,

而原点与点$(\frac{\pi}{2},f(\frac{\pi}{2}))$的连线斜率$k=\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}e^{\frac{\pi}{2}}<\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}},\therefore C$对；

$D: f'(x)=2e^x\cos x, f''(x)=2e^x(\cos x-\sin x)=0$得$x=k\pi+\frac{\pi}{4}$.

由$0-e^x(\sin x+\cos x)=2e^x\cos x\cdot(\frac{\pi-1}{2}-x)\Leftrightarrow\tan x=2x-\pi\Leftrightarrow 0=\tan x-2x+\pi$记为$p(x)$

则$p(\pi-x)+p(x)=-\tan x-2(\pi-x)+\pi+\tan x-2x+\pi=0,\therefore p(x)$的图象关于点$(\frac{\pi}{2},0)$对称，$\therefore D$对

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

12.直线 $3x-4y+3=0$ 的一个方向向量是____________. $(4\lambda,3\lambda)(\lambda\ne 0)$

13.甲、乙两人争夺一场羽毛球比赛的冠军,比赛为“三局两胜”制.如果每局比赛中甲获胜的概率为 $\frac{2}{3}$,乙获胜的概率为 $\frac{1}{3}$,则在甲获得冠军的情况下,比赛进行了三局的概率为____________. $\frac{2}{5}$

14.已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 R,记 $g(x)=f'(x)$,若 $f(2x-1), g(x-2)$ 均为偶函数,且当 $x\in[1,2]$ 时, $f(x)=mx^3-2x$,则 $g(2024)=$____________.

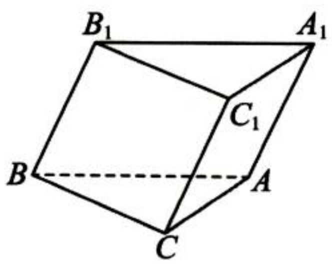
$key: f(-2x-1)=f(2x-1),\therefore -2f'(-2x-1)=2f'(2x-1),\therefore -f'(-x-1)=f'(x-1),$
$\therefore -g(-x-1)=g(x-1)\Leftrightarrow g(x-2)=-g(-x),$
而$g(x-2)=g(-x-2)\Leftrightarrow g(x-4)=g(-x)=-g(x-2)\Leftrightarrow g(x-2)=-g(x),$
$\therefore g(x)=g(x-4),\therefore T=4,$且$-g(1)=-g(-3)=g(1)$即$g(1)=0$

而 $\underset{x\in[1,2]}{f'(x)}=\underset{x\in[1,2]}{g(x)}=3mx^2-2,\therefore g(1)=3m-2=0$即$m=\frac{2}{3},\therefore g(2024)=g(0)=-g(-2)=-g(2)=-12m+2=-6$

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分 13 分）如图,斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面是直角三角形, $\angle ACB=90°$,点 B_1 在底面 ABC 内的射影恰好是 BC 的中点,且 $BC=CA=2$.（1）求证:平面 $ACC_1A_1\perp$平面 B_1C_1CB；

（2）若斜棱柱的高为 $\sqrt{3}$,求平面 ABB_1 与平面 AB_1C_1 夹角的余弦值.



15.(本小题满分 13 分)(第 I 问,6 分;第 II 问,7 分)

解:(I)取 BC 中点为 M,连接 B_1M,$\because B_1$ 在底面内的射影恰好是 BC 中点,

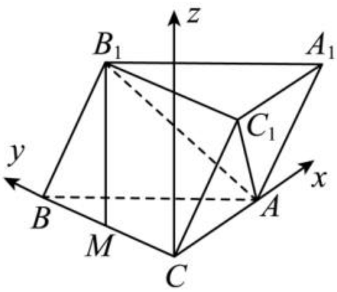
$\therefore B_1M\perp$ 平面 ABC,又$\because AC\subset$ 平面 $ABC,\therefore B_1M\perp AC$,

又$\because \angle ACB=90^\circ,\therefore AC\perp BC$,

$\because B_1M,BC\subset$ 平面 $B_1C_1CB,B_1M\cap BC=M,\therefore AC\perp$ 平面 B_1C_1CB,

又$\because AC\subset$ 平面 $ACC_1A_1,\therefore$ 平面 $ACC_1A_1\perp$ 平面 B_1C_1CB.

(II)以 C 为坐标原点,建立如图所示空间直角坐标系,$\because BC=CA=2$,



$\therefore A(2,0,0),B(0,2,0),M(0,1,0),B_1(0,1,\sqrt{3}),C_1(0,-1,\sqrt{3})$,

$\overrightarrow{AB_1}=(-2,1,\sqrt{3}),\overrightarrow{AB}=(-2,2,0),\vec{B_1C_1}=(0,-2,0)$,

设平面 BAB_1 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$,

$\therefore\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}$ 则有 $\begin{cases}-2x+y+\sqrt{3}z=0\\ -2x+2y=0\end{cases}$,令 $z=\sqrt{3}$,则 $x=y=3,\therefore\vec{n}=(3,3,\sqrt{3})$,

设平面 BAB_1 的法向量为 $\vec{m}=(a,b,c)$,

$\therefore\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{B_1C_1}=0\end{cases}$ 则有 $\begin{cases}-2a+b+\sqrt{3}c=0\\ -2b=0\end{cases}$,令 $a=\sqrt{3}$ 则 $b=0,c=2,\therefore\vec{n}=(\sqrt{3},0,2)$,

$\therefore|\cos<\vec{n},\vec{m}\rangle|=\dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{|\vec{n}||\vec{m}|}=\dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{9+9+3}\times\sqrt{3+0+4}}=\dfrac{5}{7}$,平面 ABB_1 与平面 AB_1C_1 夹角的余弦值为 $\dfrac{5}{7}$.

16.（本小题满分 15 分）已知函数 $f(x)=\ln x-ax$,其中 $a\in R$.

（1）若曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线在两坐标轴上的截距相等,求 a 的值;

（2）是否存在实数 a,使得 $f(x)$ 在 $x\in(0,e]$ 上的最大值是 -3?若存在,求出 a 的值;若不存在,说明理由.

16.(本小题满分 15 分)(第 I 问,6 分;第 II 问,9 分)

解：（1）由$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a$得曲线$y=f(x)$在$x=1$处的切线方程为:$y+a=(1-a)(x-1)$

令$y=0$得$x=\dfrac{a}{1-a}+1$;令$x=0$得$y=-1=\dfrac{1}{1-a}$得$a=2$

（2）当$a\le 0$时，$f'(x)>0,\therefore f(x)$在$(0,e]$上递增,$\therefore f(x)_{\max}=f(e)=1-ea=-3$得$a=\dfrac{4}{e}>0$，舍去;

当$a>0$且$\dfrac{1}{a}\ge e$即$0<a\le\dfrac{1}{e}$时,$f'(x)\ge\dfrac{1}{e}-a\ge 0$,

$\therefore f(x)$在$(0,e]$上递增,$\therefore f(x)_{\max}=f(e)=1-ea=-3$得$a=\dfrac{4}{e}>\dfrac{1}{e}$,舍去;

当$a>\dfrac{1}{e}$时，$f'(x)>0\Leftrightarrow 0<x<\dfrac{1}{a}$,$\therefore f(x)$在$(0,\dfrac{1}{a})$上递增，在$(\dfrac{1}{a},e]$上递减，

$\therefore f(x)_{\max}=f(\dfrac{1}{a})=-\ln a-1=-3$得$a=e^2$.综上:存在$a=e^2$.

17.（本小题满分 15 分）记复数的一个构造：从数集 $\{0,1,\sqrt{3}\}$ 中随机取出 2 个不同的数作为复数的实部和虚部.重复 n 次这样的构造，可得到 n 个复数，将它们的乘积记为 z_n .已知复数具有运算性质:

$|(a+bi)\cdot(c+di)|=|(a+bi)|\cdot|(c+di)|$,其中 $a,b,c,d\in R$.（1）当 $n=2$ 时,记 $|z_2|$ 的取值为 X,求 X 的分布列;

（2）当 $n=3$ 时,求满足 $|z_3|\le 2$ 的概率;（3）求 $|z_n|<5$ 的概率 P_n .

17.(本小题满分 15 分)(第 I 问,6 分;第 II 问,4 分;第 III 问,5 分)

解：（1）由已知得 $P(X=1)=(\frac{1}{3})^2=\frac{1}{9}, P(X=\sqrt{3})=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}, P(X=2)=\frac{2}{9},$

$P(X=2\sqrt{3})=\frac{2}{9}, P(x=3)=\frac{1}{9}, P(X=4)=\frac{1}{9}, \therefore X$ 的分布列为

X	1	$\sqrt{3}$	2	3	$2\sqrt{3}$	4
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

（2）记三次构造所得的复数 $x_i(i=1,2,3)$, 则 $|x_i|\in\{1,\sqrt{3},2,3,3\sqrt{3},4\}$,

且 $z_3=|x_1|\cdot|x_2|\cdot|x_3|\le 2, \therefore$ 3次所得复数的模都为1,或两次所得复数的模为1,1次的模为2，或2次的模为1,1次的模为 $\sqrt{3}$

$\therefore P(|z_3|\le 2)=(\frac{1}{3})^3+C_3^2(\frac{1}{3})^2\cdot\frac{1}{3}+C_3^2(\frac{1}{3})^2.\frac{1}{3}=\frac{7}{27}$

（3）设第 i 次操作得到的复数为 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$，则 $|x_i|\in\{1,\sqrt{3},2\}$

设在这 n 个复数中, $|x_i|=\sqrt{3}$ 出现 $p(p\le 2)$, $|x_i|=2$ 出现 $q(q\le 2)$ 次

若 $p=0,q=0$, 则 $p_1=\frac{1}{3^n}$; 若 $p=0,q=1$, 则 $p_2=C_n^1\cdot\frac{1}{3^n}$; 若 $p=0,q=2$, 则 $p_3=C_n^2\cdot\frac{1}{3^n}$;

若 $p=1,q=0$，则 $p_4=C_n^1\cdot\frac{1}{3^n}$; 若 $p=1,q=1$, 则 $p_5=A_n^2\cdot\frac{1}{3^n}$; 若 $p=2,q=0$，则 $p_6=C_n^2\cdot\frac{1}{3^n}$;

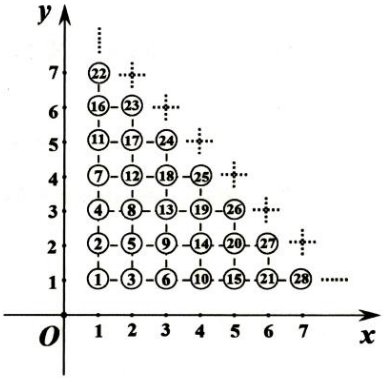
$$\therefore P_n=P(|z_n|<5)=\frac{1+n+\frac{n(n-1)}{2}+n+n(n-1)+\frac{n(n-1)}{2}}{3^n}=\frac{2n^2+1}{3^n}.$$

18.（本小题满分 17 分）在平面直角坐标系 xOy 中,我们把点 $(x,y), x,y\in N^*$ 称为自然点.按如图所示的规则,将每个自然点 (x,y) 进行赋值记为 $P(x,y)$,例如 $P(2,3)=8$, $P(4,2)=14, P(2,5)=17$.（1）求 $P(x,1)$;

（2）求证： $2P(x,y)=P(x-1,y)+P(x,y+1)$;

（3）如果 $P(x,y)$ 满足方程 $P(x+1,y-1)+P(x,y+1)+P(x+1,y)+P(x+1,y+1)=2024$ ，求 $P(x,y)$ 的值.

18.(本小题满分 17 分)(第 I 问,4 分;第 II 问,7 分;第 III 问,6 分)



(1) 解：由已知得 : $P(x,1)-P(x-1,1)=x(x\ge 2, x\in N^*)$

$\therefore P(x,1)=P(x,1)-P(x-1,1)+\cdots+P(2,1)-P(1,1)+P(1,1)$

$=x+(x-1)+\cdots+2+1=\frac{x^2+x}{2}(x\in N^*)$

(2) 证明：由已知得 $P(x,y)=1+2+\cdots+(x+y-2)+x=\frac{(x+y-2)(x+y-1)}{2}+x$

$\therefore P(x-1,y)+P(x,y+1)=\frac{(x+y-3)(x+y-2)}{2}+x-1+\frac{(x+y-1)(x+y)}{2}+x$

$=(x+y)^2-3(x+y)+2x+2$

$2P(x,y)=(x+y)^2-3(x+y)+2x+2=P(x-1,y)+P(x,y+1)$, 证毕

（3）解：由（2）得: $P(x+1,y-1)=\frac{(x+y-2)(x+y-1)}{2}+x+1, P(x,y+1)=\frac{(x+y-1)(x+y)}{2}+x,$

$P(x+1,y)=\frac{(x+y-1)(x+y)}{2}+x+1, P(x+1,y+1)=\frac{(x+y)(x+y+1)}{2}+x+1,$

$\therefore P(x+1,y-1)+P(x,y+1)+P(x+1,y)+P(x+1,y+1)=2(x+y)^2-2(x+y)+4x+4=2024$

即$(x+y)^2+x-y=1010$即$(x+y)(x+y+1)=2(505+y)\ge(y+1)(y+2)$

得$2\le y\le \frac{-1+\sqrt{4033}}{2}\approx 31.3$,（且$x=\frac{-2y-1+\sqrt{8y+4041}}{2}$得$8y+4041$是完全平方数）

$\therefore 1012\le(x+y)(x+y+1)\le 1072, \therefore 31.3\approx\frac{-1+\sqrt{4049}}{2}\le x+y\le\frac{-1+\sqrt{4229}}{2}\approx 32.2,$

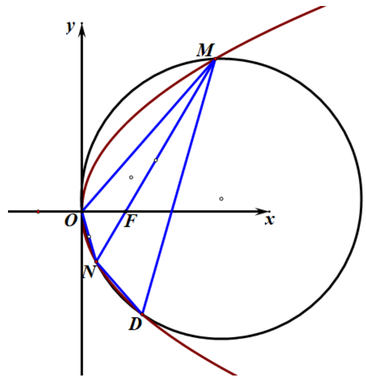
$\therefore x+y=32, \therefore 32\times33=2(505+y)$得$y=23, x=9, \therefore P(x,y)=\frac{30\times31}{2}+9=474$

19.（本小题满分 17 分）在平面直角坐标系 xOy 中,过点 $F(1,0)$ 的直线 l 与抛物线 $C:y^2=4x$ 交于 M,N 两点（M 在第一象限）.（1）当 $|MF|=3|NF|$ 时,求直线 l 的方程;（2）若三角形 OMN 的外接圆与曲线 C 交于点 D（异于点 O,M,N）.（ⅰ）证明:$\triangle MND$ 的重心的纵坐标为定值，并求出此定值;（ⅱ）求凸四边形 $OMDN$ 的面积的取值范围.

19.(本小题满分 17 分)(第 I 问,4 分;第 II 问,5 分;第 III 问,8 分)

(1) 解：由已知得$F(1,0)$是C的焦点，设l的倾斜角为$\theta(\theta\in(0,\frac{\pi}{2}))$,

则$|MF|=\frac{2}{1-\cos\theta}=3|NF|=3\cdot\frac{2}{1+\cos\theta}$得$\cos\theta=\frac{1}{2}$,$\therefore l$的方程为$y=\sqrt{3}(x-1)$



(2) 设$M(m^2,2m), N(n^2,2n)$(不妨设$m>0>n$), $D(d^2,2d)$

由M,F,N三点共线得$\frac{2m-2n}{m^2-n^2}=\frac{2}{m+n}=\frac{2m}{m^2-1}$即$mn=-1$

设$\triangle OMN$的外接圆方程为$x^2+y^2+Dx+Ey=0$,则$\begin{cases}m^4+4m^2+m^2D+2mE=0\\n^4+4n^2+n^2D+2E=0\\d^4+4d^2+d^2D+2dE=0\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}m^3+(4+D)m+2E=0\\n^3+(4+D)n+2E=0\\d^3+(4+D)d+2E=0\end{cases}$ $,\therefore m+n+d=0$即$d=-m-n$

(ⅰ)$\therefore\triangle DMN$的重心的纵坐标为$\frac{2m+2n+2d}{3}=0$为定值

$key2$:（曲线系：陈江淮，李悠然，赵璟瑜,周奕彤，颜子涵，汪琪峰，张怡欣，梁思成，李俊霖）

由$l_{OD}:y=\frac{2d}{d^2}x$即$2x-dy=0$;

$l_{MN}:y-2m=\frac{2}{m+n}(x-m^2)$即$2x-(m+n)y-2=0$

则经过O,M,D,N的曲线系方程为:$(2x-dy)(2x-(m+n)y-2)+\lambda(y^2-4x)=0\cdots(*)$

$\because O,M,D,N$四点共圆，则(*)可以是圆方程，

$\therefore -2(m+n)-2d=0$即M,N,D三点的纵坐标之和为0,$\therefore\triangle DMN$的重心纵坐标为定值0

（ⅱ）$\because OMDN$是凸四边形，且$l_{MN}:2x-(m+n)y-2=0$

$\therefore$（邵卿）$-2\cdot(2(-m-n)^2-(m+n)\cdot(-2m-2n)-2)=-4(2(m+n)^2-1)<0$即$(m+n)^2=(m-\frac{1}{m})^2>\frac{1}{2}$

$\therefore S_{OMDN}=S_{\vartriangle OMN}+S_{\vartriangle DMN}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot(2m-2n)+\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}m^2 & 2m & 1\\ n^2 & 2n & 1\\ d^2 & 2d & 1\end{matrix}\right\|(\because d=-(m+n))$

$=m+\frac{1}{m}+(m+\frac{1}{m})|2(m-\frac{1}{m})^2-1|=2t\sqrt{t+4}>\frac{3\sqrt{2}}{2}$（令$t=(m-\frac{1}{m})^2>\frac{1}{2}$）

$\therefore$凸四边形$OMDN$的面积的取值范围为$(\frac{3\sqrt{2}}{2},+\infty)$