金丽衢十二校2023学年高三第二次联考

2024-03-20

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{0,1,2\}$， $B=\{x\mid x=3k-1,k\in\mathbf{N}\}$，则 $A\cap B=$（ ▲ ）

A. $\{0，1，2\}$　　B. $\{1，2\}$　　C. $\{1\}$　　D. $\{2\}$

D

2. 若复数 z 满足：$z+2\bar{z}=3-2\mathrm{i}$，则 $|z|$ 为（ ▲ ）

A. 2　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. 5

C

3. 若函数 $f(x)=\ln(\mathrm{e}^x+1)+ax$ 为偶函数，则实数 a 的值为（ ▲ ）

A. $-\dfrac{1}{2}$　　B. 0　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 1

A

4. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a}-\dfrac{y^2}{a-1}=1$ 的离心率 e 的可能取值为（ ▲ ）

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

A

5. 在 $\triangle ABC$ 中，“ A,B,C 成等差数列且 $\sin A,\sin B,\sin C$ 成等比数列”是“ $\triangle ABC$ 是正三角形”的（ ▲ ）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

C

6. 已知抛物线C_1：$x^2=2y$的焦点为F，以F为圆心的圆C_2交C_1于A,B，交C_1的准线于C,D，若四边形$ABCD$是矩形，则圆C_2的方程为（ ▲ ）

A. $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=3$　　B. $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=4$

C. $x^2+(y-1)^2=12$　　D. $x^2+(y-1)^2=16$

B

B

7. 已知函数$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+1, x\leqslant 0,\\ \ln x, x>0,\end{cases}$ 若$f(x_1)=f(x_2)(x_1<x_2)$，则x_2-x_1的取值范围为（ ▲ ）

A. $[e,+\infty)$　　B. $[4-2\ln 2,+\infty)$　　C. $[4-2\ln 2,e]$　　D. $[e-1,+\infty)$

8.在三棱锥$D-ABC$中，底面是边长为2的正三角形，若AD为三棱锥$D-ABC$的外接球直径，且AC与BD所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{21}}{7}$，则该外接球的表面积为（ ）

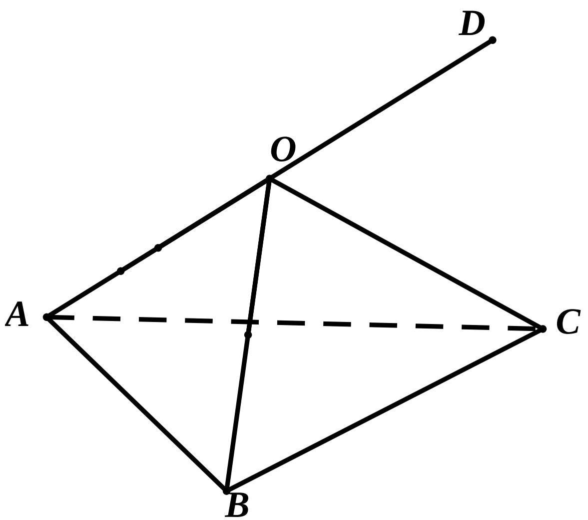
$A.\frac{19\pi}{3}$　　$B.\frac{28\pi}{3}$　　$C.7\pi$　　$D.16\pi$

key:设外接球球心为O,半径为R,则$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=R$,且

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=\frac{\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2-(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})^2}{2}=R^2-2$$

$$\therefore|\cos<\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}>|=\frac{|(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\cdot(-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})|}{2\cdot|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|}$$

$$=\frac{2}{2\sqrt{2R^2+2R^2-4}}=\frac{1}{2\sqrt{R^2-1}}=\frac{\sqrt{21}}{7}\text{得}R^2=\frac{19}{12},\therefore S_{\text{表}}=\frac{19\pi}{3}\text{，选}A$$



二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 关于函数 $f(x)=2\sin x\cdot\cos x+2\sqrt{3}\cos^2 x$，下列说法正确的是（ ▲ ）

A. 最小正周期为 2π

B. 关于点 $\left(-\frac{\pi}{6},\sqrt{3}\right)$ 中心对称

C. 最大值为 $\sqrt{3}+2$

D. 在区间 $\left[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]$ 上单调递减

BC

10. 设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，若 $\forall x\in\mathbf{R}$，均有 $xf'(x)=(x+1)f(x)$，则（ ▲ ）

A. $f(0)=0$

B. $f''(-2)=0$（$f''(x)$ 为 $f(x)$ 的二阶导数）

C. $f(2)<2f(1)$

D. $x=-1$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点

AB

10.key：由 $0\cdot f'(0)=f(0)=0$，A对；

$(xf'(x))'=f'(x)+xf''(x)=f(x)+(x+1)f'(x)\Leftrightarrow xf''(x)=f(x)+xf'(x)=(x+2)f(x)$

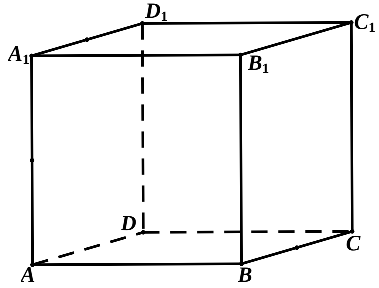
$\therefore -2f''(-2)=0,\therefore B$对；

取$f(x)=xe^x$，则$f'(x)=(x+1)e^x,\therefore xf'(x)=(x+1)xe^x=(x+1)f(x)$

$f'(x)>0\Leftrightarrow x>-1,\therefore -1$是$f(x)$的极小值点，$D$错；

$f(2)=2e^2>2f(1)=2e,C$错

11．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，点 P 是正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 上的一个动点，初始位置位于点 A_1 处，每次移动都会到达另外三个顶点．向相邻两顶点移动的概率均为 $\frac{1}{4}$，向对角顶点移动的概率为 $\frac{1}{2}$，如当点 P 在点 A_1 处时，向点 B_1，D_1 移动的概率均为 $\frac{1}{4}$，向点 C_1 移动的概率为 $\frac{1}{2}$，则（ ▲ ）



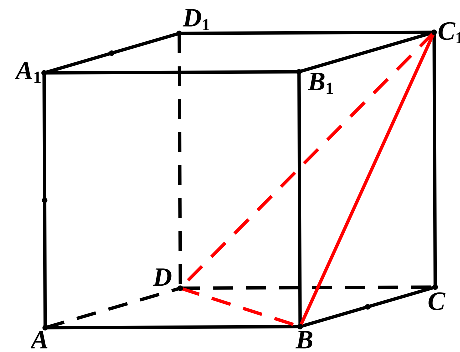
A．移动两次后，“$|PC|=\sqrt{3}$”的概率为 $\frac{3}{8}$

B．对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，移动 n 次后，“PA // 平面 BDC_1”的概率都小于 $\frac{1}{3}$

C．对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，移动 n 次后，“$PC\perp$ 平面 BDC_1”的概率都小于 $\frac{1}{2}$

D．对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，移动 n 次后，四面体 $P-BDC_1$ 体积 V 的数学期望 $E(V)<\frac{1}{5}$

（注：当点 P 在平面 BDC_1 上时，四面体 $P-BDC_1$ 体积为 0）



$key: A: |PC|=\sqrt{3} \Leftrightarrow P=A_1: A_1 \longrightarrow B_1(D_1,C_1) \longrightarrow A_1$的概率为$2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$, A对；

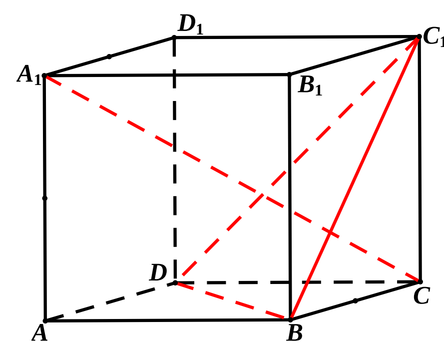
设n次移动后到达A_1,B_1,C_1,D_1的概率依次为$A_{1,n},B_{1,n},C_{1,n},D_{1,n}$,由对称性得$B_{1,n}=D_{1,n}$

$$\begin{cases} A_{1,n}=2\cdot\frac{1}{4}B_{1,n-1}+\frac{1}{2}C_{1,n-1} \\ B_{1,n}=\frac{1}{4}A_{1,n-1}+\frac{1}{4}C_{1,n-1}+\frac{1}{2}B_{1,n-1} \\ C_{1,n}=2\cdot\frac{1}{4}B_{1,n-1}+\frac{1}{2}A_{1,n-1} \end{cases}$$

$B_{1,n}=\frac{1}{4}A_{1,n-1}+\frac{1}{4}C_{1,n-1}+\frac{1}{2}B_{1,n-1}$，$\therefore A_{1,n}+C_{1,n}=B_{1,n-1}+\frac{1}{2}(A_{1,n-1}+C_{1,n-1})$, 且$A_{1,n-1}+C_{1,n-1}=4B_{1,n}-2B_{1,n-1}$

$\therefore 4B_{n+1}-2B_{1,n}=B_{1,n-1}+2B_{1,n}-B_{1,n-1}$即$B_{1,n+1}=B_{1,n}=B_{1,1}=\frac{1}{4}$,

且$\begin{cases} A_{1,n}=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}C_{1,n-1} \\ A_{1,n-1}+C_{1,n-1}=\frac{1}{2} \end{cases}$, $\therefore A_{1,n}=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}A_{1,n-1}$, $\therefore A_{1,n}=\frac{1}{4}-(-\frac{1}{2})^{n+1}$, $C_{1,n}=\frac{1}{4}+(-\frac{1}{2})^{n+1}$,



$B: PA//$平面$BDC_1 \Leftrightarrow P=B_1(D_1)$其概率为$\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$, B错；

$C: PC\perp$平面$BDC_1 \Leftrightarrow P=A_1$其概率为$\frac{1}{4}-(-\frac{1}{2})^{n+1}<\frac{1}{2}$, C对；

$D: E(V)=(\frac{1}{4}-(-\frac{1}{2})^{n+1})\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}-\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{n+1}$, 当$n=2$时, $E(V)=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}=\frac{5}{24}>\frac{1}{5}$, $\therefore n$次后，D错；

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知圆柱的轴截面面积为 4，则该圆柱侧面展开图的周长最小值为__▲__.

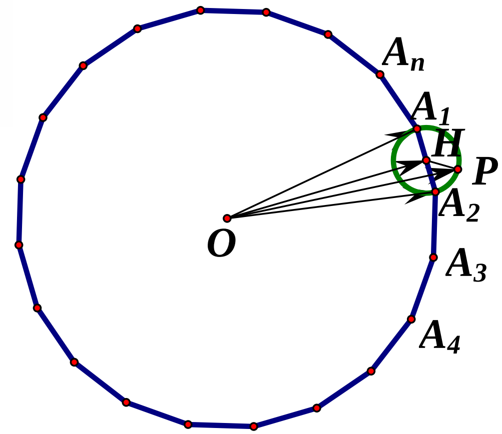
13. 某中学的 A、B 两个班级有相同的语文、数学、英语教师，现对此 2 个班级某天上午的 5 节课进行排课，2 节语文课，2 节数学课，1 节英语课，要求每个班级的 2 节语文课连在一起，2 节数学课连在一起，则共有__▲__种不同的排课方式.（用数字作答）

14. 设正 n 边形的边长为 1，顶点依次为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，若存在点 P 满足 $\overrightarrow{PA_1} \cdot \overrightarrow{PA_2} = 0$，且 $\left|\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{PA_k}\right| = 1$，则 n 的最大值为__▲__.（参考数据：$\tan 36° \approx 0.73$）

12. $8\sqrt{\pi}$

13. 8

14. 5



$14.key$：由 $\overrightarrow{PA_1} \cdot \overrightarrow{PA_2} = 0$ 得点 P 的轨迹为以 A_1A_2 为直径的圆 H，其半径为 $\frac{1}{2}$

而 $\left|\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{PA_k}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} (\overrightarrow{OA_k} - \overrightarrow{OP})\right| = |-n\overrightarrow{OP}| = n|\overrightarrow{OP}| = 1$

而 $|\overrightarrow{OP}| \in [\frac{1}{2\tan\frac{\pi}{n}} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2\tan\frac{\pi}{n}} + \frac{1}{2}](n \geq 5), \therefore \frac{n}{\tan\frac{\pi}{n}} - n \leq 2 \leq \frac{n}{\tan\frac{\pi}{n}} + n$

$\therefore 1 \leq (1 + \frac{2}{n})\tan\frac{\pi}{n}$ 记为 $f(n)$（递减），而 $f(5) > 1, \therefore n$ 的最大值为5

四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分 13 分）

已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$2S_n=2a_n+n^2-1$.

（1）求a_n；

（2）求数列$\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$的前$n$项和$T_n$.

15．解：（1）$2S_n=2a_n+n^2-1$　①

当$n\geq 2$时，$2S_{n-1}=2a_{n-1}+(n-1)^2-1$　②　……………………………3 分

②-①得：$2a_n=2a_n-2a_{n-1}+2n-1$，整理得：$a_{n-1}=n-\frac{1}{2}$，$n\geq 2$

所以$a_n=n+\frac{1}{2}$，$n\in\mathbf{N}^*$.　……………………………6 分

（2）由（1）知$a_n=n+\frac{1}{2}$，$\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{3}{2}\right)}=\frac{1}{n+\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+\frac{3}{2}}=\frac{2}{2n+1}-\frac{2}{2n+3}$，

……………………………10 分

所以

$$T_n=\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{2}{3}-\frac{2}{5}+\frac{2}{5}-\frac{2}{7}+\cdots+\frac{2}{2n+1}-\frac{2}{2n+3}=\frac{2}{3}-\frac{2}{2n+3}.$$

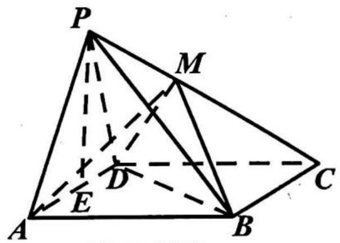
……………………………13 分

16.（本小题满分 15 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$PA=PD=\sqrt{5}$，点 E 是线段 AD 的中点，$\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{MP}$．

（1）证明：$PE//$平面 BDM；

（2）求平面 AMB 与平面 BDM 的夹角．



（第 16 题图）

16．**解**：（1）连接 EC 交 BD 于 N，由 E 是 AD 的中点可得 $DE=\frac{1}{2}BC=1$，

则 ΔDEN 与 ΔBCN 相似，所以 $EN=\frac{1}{2}NC$，　　…………………………3 分

又 $PM=\frac{1}{2}MC$，所以 $MN//PE$，　　…………………………5 分

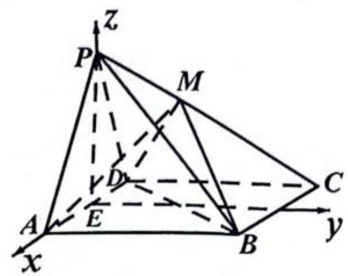
又 $MN\subset$ 平面 BDM，$PE\not\subset$ 平面 BDM 所以 $PE//$平面 BDM；……………7 分

（2）如图，建立空间直角坐标系，$E(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，

$D(-1,0,0)$，$B(1,2,0)$，$C(-1,2,0)$，$P(0,0,2)$，

$\overrightarrow{PC}=(-1,2,-2)$，$\overrightarrow{PM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PC}=\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$，

则 $M\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$，………9 分（**坐标系正确即给 2 分**）



设平面 AMB 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，由 $\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\\\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\end{cases}$ 可得 $\overrightarrow{n_1}=(1,0,1)$，　　……………………………………11 分

由（1）可取平面 BDM 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(1,-1,0)$，　　…………………13 分

所以平面 AMB 与平面 BDM 的夹角余弦值为 $\frac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{1}{2}$，所以夹角为 $\frac{\pi}{3}$……….15 分

17.（本小题满分 15 分）

某工厂生产某种元件，其质量按测试指标划分为：指标大于或等于 82 为合格品，小于 82 为次品，现抽取这种元件 100 件进行检测，检测结果统计如下表：

测试指标	[20，76)	[76，82)	[82，88)	[88，94)	[94，100]
元件数（件）	12	18	36	30	4

（1）现从这 100 件样品中随机抽取 2 件，若其中一件为合格品，求另一件也为合格品的概率；

（2）关于随机变量，俄国数学家切比雪夫提出切比雪夫不等式：

若随机变量 X 具有数学期望 $E(X)=\mu$，方差 $D(X)=\sigma^2$，则对任意正数 ε，均有 $P(|x-\mu|\geqslant\varepsilon)\leqslant\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ 成立.

(i) 若 $X\sim B\left(100,\dfrac{1}{2}\right)$，证明：$P(0\leqslant X\leqslant 25)\leqslant\dfrac{1}{50}$；

(ii) 利用该结论表示即使分布未知，随机变量的取值范围落在期望左右的一定范围内的概率是有界的.若该工厂声称本厂元件合格率为 90%，那么根据所给样本数据，请结合“切比雪夫不等式”说明该工厂所提供的合格率是否可信？（注：当随机事件 A 发生的概率小于 0.05 时，可称事件 A 为小概率事件）

(1) 解：所求概率为 $\dfrac{C_{70}^2}{C_{100}^2-C_{30}^2}=\dfrac{23\times 7}{301}=\dfrac{23}{43}$

(2) （i）证明：由 $E(X)=100\cdot\dfrac{1}{2}=50, D(X)=100\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=25, \therefore \mu=50, \sigma=5,$

而 $P(0\le X\le 25)=\dfrac{1}{2}P(0\le X\le 25, or, 75\le X\le 100\}$

$=\dfrac{1}{2}P(|X-50|\ge 25)\le\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5^2}{25^2}=\dfrac{1}{50}$，证毕

（ii）由已知得从这100件样品中随机抽取一件是合格品的概率为 $p=0.7$,

$\varepsilon=100\cdot 90\%-100\cdot 70\%=20,$

按工厂的宣传 $E(X)=100\cdot 0.9=90, D(X)=100\cdot 0.9\cdot 0.1=9$

$\therefore P(|X-\mu|\ge\varepsilon)=\dfrac{9}{20^2}=0.0225<0.05$

$\therefore$ 工厂提供的合格率不可信.

17．**解**：（1）记事件 A 为抽到一件合格品，事件 B 为抽到两个合格品，

$P(AB)=\dfrac{C_{70}^2}{C_{100}^2}=\dfrac{161}{330}$，$P(A)=\dfrac{C_{100}^2-C_{30}^2}{C_{100}^2}=\dfrac{301}{330}$ …………………4 分

$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{161}{301}=\dfrac{23}{43}$. …………………5 分

（2）（i）由题：若 $X\sim B(100,\dfrac{1}{2})$，则 $E(X)=50$，$D(X)=25$ …………………6 分

又 $P(X=k)=C_{100}^k\left(\dfrac{1}{2}\right)^{100}=P(X=100-k)$， …………………8 分

所以 $P(0\leqslant X\leqslant 25)=\dfrac{1}{2}P(0\leqslant X\leqslant 25\text{或}75\leqslant X\leqslant 100)=\dfrac{1}{2}P(|X-50|\geqslant 25)$

由切比雪夫不等式可知，$P(|X-50|\geqslant 25)\leqslant\dfrac{25}{25^2}=\dfrac{1}{25}$

所以 $P(0\leqslant X\leqslant 25)\leqslant\dfrac{1}{50}$； …………………11 分

（ii）设随机抽取 100 件产品中合格品的件数为 X，

假设厂家关于产品合格率为 90% 的说法成立，则 $X\sim B(100,0.9)$，

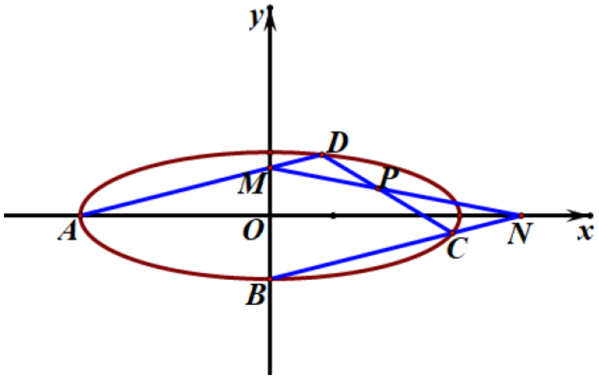
所以 $E(X)=90, D(X)=9$， …………………12 分

由切比雪夫不等式知，$P(X=70)\leqslant P(|X-90|\geqslant 20)\leqslant\dfrac{9}{400}=0.0225$，

即在假设下 100 个元件中合格品为 70 个的概率不超过 0.0225，此概率极小，由小概率原理可知，一般来说在一次试验中是不会发生的，据此我们有理由推断工厂的合格率不可信. …………………15 分

18.（本小题满分 17 分）

已知椭圆 $L:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左顶点 $A(-3,0)$ 和下顶点 B，焦距为 $4\sqrt{2}$，直线 l 交椭圆 L 于 C，D（不同于椭圆的顶点）两点，直线 AD 交 y 轴于 M，直线 BC 交 x 轴于 N，且直线 MN 交 l 于 P.



（1）求椭圆 L 的标准方程；

（2）若直线 AD，BC 的斜率相等，证明：点 P 在一条定直线上运动.

(1) 解：由已知得 $\begin{cases} a=3, \\ 2c=4\sqrt{2} \end{cases}$, $\therefore a=3, c=2\sqrt{2}, b=1, \therefore$ 椭圆L的标准方程为 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$

(2) 证明：由直线AD,BC的斜率相等，设$l_{AD}: x=ty-3$, 则$l_{BC}: x=t(y+1)$, 且$M(0,\frac{3}{t}), N(t,0)$,

由$\begin{cases} x=ty-3 \\ x^2+9y^2=9 \end{cases}$消去$x$得$:(t^2+9)y^2-6ty=0, \therefore D(\frac{3t^2-27}{t^2+9},\frac{6t}{t^2+9})$

由$\begin{cases} x=t(y+1) \\ x^2+9y^2=9 \end{cases}$消去$x$得$:(t^2+9)y^2+2t^2y+t^2-9=0, \therefore C(\frac{18t}{t^2+9},\frac{9-t^2}{t^2+9})$

$\because AD//BC, \therefore \frac{|MD|}{|CN|}=\frac{|MP|}{|PN|}$

$$\therefore \begin{cases} \frac{3}{t}=\dfrac{\frac{3t^2-27}{t^2+9}}{t-\frac{18t}{t^2+9}}=\dfrac{y_P-\frac{3}{t}}{0-y_P} \text{得} y_P=\dfrac{3}{t+3} \\ \frac{3}{t}=\dfrac{x_P-0}{t-x_P} \text{得} x_P=\dfrac{3t}{3+t} \end{cases} \text{消去} t \text{得}: x_p+3y_P=3,$$

$\therefore$点P在定直线$x+3y-3=0$上

19.（本小题满分 17 分）

①在微积分中，求极限有一种重要的数学工具——洛必达法则，法则中有一结论：若函数 $f(x),g(x)$ 的导函数分别为 $f'(x),g'(x)$，且 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$，则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

②设 $a>0$，k 是大于 1 的正整数，若函数 $f(x)$ 满足：对任意 $x\in[0,a]$，均有 $f(x)\geq f\left(\frac{x}{k}\right)$ 成立，且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，则称函数 $f(x)$ 为区间 $[0,a]$ 上的 k 阶无穷递降函数.

结合以上两个信息，回答下列问题：（1）试判断 $f(x)=x^3-3x$ 是否为区间 $[0,3]$ 上的2阶无穷递降函数；

（2）计算：$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$；（3）证明：$(\frac{\sin x}{x-\pi})^3<\cos x,x\in(\pi,\frac{3}{2}\pi)$.

(1) 解：若 $f(x)$ 是，

则由②得：$f(x)=x^3-3x\geq f(\frac{x}{2})=(\frac{x}{2})^3-3(\frac{x}{2})$ 对 $x\in[0,3]$ 上恒成立

$\Leftrightarrow \frac{x}{2}(x^2+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^2)-\frac{3}{2}x=\frac{1}{2}x(\frac{7}{4}x^2-\frac{3}{2})\geq 0$ 对 $x\in[0,3]$ 恒成立，

而当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)-f(\frac{x}{2})=-\frac{5}{32}<0$,

$\therefore f(x)$ 不是区间 $[0,3]$ 上的2阶无穷递降函数

(2) 解：$\because \lim\limits_{x\to 0}\ln(x+1)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=1$,

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}=e$

(3) 证明：令 $t=x-\pi\in(0,\frac{\pi}{2})(\because x\in(\pi,\frac{3}{2}\pi))$

$\therefore$ 要证：$(\frac{\sin x}{x-\pi})^3<\cos x(\pi<x<\frac{3}{2}\pi)\Leftrightarrow(\frac{\sin t}{t})^3>\cos t(0<t<\frac{\pi}{2})\cdots(*)$

设 $p(t)=\sin t-t+\frac{1}{6}t^3,0<t<\frac{\pi}{2}$

则 $p'(t)=\cos t-1+\frac{1}{2}t^2,p''(t)=-\sin t+t,p'''(t)=-\cos t+1>0$

$\therefore p''(t)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上递增，$\therefore p''(t)>p''(0)=0,\therefore p'(t)>p'(0)=0$,

$\therefore p(t)>p(0)=0,\therefore \sin t>t-\frac{1}{6}t^3,\therefore\frac{\sin t}{t}>1-\frac{1}{6}t^2>1-\frac{1}{6}\cdot\frac{\pi^2}{4}>0$

$\therefore(\frac{\sin t}{t})^3>1-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{12}t^4-\frac{1}{216}t^6=1-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{24}t^4+\frac{t^4}{24}(1-\frac{t^2}{9})>1-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{24}t^4$

设 $q(t)=1-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{24}t^4-\cos t(0<t<\frac{\pi}{2})$,

则 $q'(t)=-t+\frac{1}{6}t^3+\sin t=p(t)>0,\therefore q(t)>q(0)=0,\therefore 1-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{24}t^4>\cos t$

$\therefore(\frac{\sin t}{t})^3>1-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{24}t^4>\cos t,\therefore(*)$ 成立，证毕.

（3）令 $x-\pi=t$，则原不等式等价于 $\tan t\cdot\sin^2 t\geqslant t^3, t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ ………………11 分

记 $f(t)=\dfrac{\tan t\cdot\sin^2 t}{t^3}, t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $f(\dfrac{t}{2})=\dfrac{8\tan\dfrac{t}{2}\cdot\sin^2\dfrac{t}{2}}{t^3}$，

所以 $\dfrac{f(t)}{f(\frac{t}{2})}=\dfrac{\tan t\cdot\sin^2 t}{t^3}\cdot\dfrac{t^3}{8\tan\dfrac{t}{2}\cdot\sin^2\dfrac{t}{2}}=\dfrac{\cos^2\dfrac{t}{2}}{1-\tan^2\dfrac{t}{2}}=\dfrac{1}{1-\tan^4\dfrac{t}{2}}>1$， ………………13 分

即有对任意 $t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，均有 $f(t)>f(\dfrac{t}{2})$，所以 $f(t)>f(\dfrac{t}{2})>\cdots>f(\dfrac{t}{2^n})$， ……15 分

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$，所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(\dfrac{t}{2^n})=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{\sin\left(\dfrac{t}{2^n}\right)}{\dfrac{t}{2^n}}\right]^3\cdot\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{t}{2^n}\right)}=1$，

所以 $f(t)>1$， $t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，证毕! ………………………………17 分