2023-24（下）模拟（2）

2024-02-17

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求.

1. 已知非零向量$\vec{a},\vec{b}$满足$\vec{a}\cdot\vec{b}=0,|\vec{a}|=3$, 且$\vec{a}$与$\vec{a}+\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{4}$，则$|\vec{b}|=$（ ）A. 6 B. $3\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. 3

2. 若$(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{x})^n(n\in N^*)$的展开式中所有项的二项式系数之和为 16，则$(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x})^{2n}$的展开式中的常数项为（ ）

A. 6 B. 8 C. 28 D. 56

3. 下列说法正确的是（ ）A. “$a=-1$”是“直线$a^2x-y+1=0$与直线$x-ay-2=0$互相垂直”的充要条件

B. 直线$x\sin\alpha+y+2=0$的倾斜角的取值范围是$[0,\frac{\pi}{4}]\cup[\frac{3\pi}{4},\pi)$

C. 过(x_1,y_1)，(x_2,y_2)两点的所有直线的方程$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$

D. 经过点$(1,1)$且在x轴和y轴上截距都相等的直线方程为$x+y-2=0$

4. 如果圆台的母线与底面成$60°$角，那么这个圆台的侧面积与轴截面面积的比为（ ）

A. 2π B. $\frac{3}{2}\pi$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ D. $\frac{1}{2}\pi$

5. 在$\triangle ABC$中，$2a\cos A=b\cos C+c\cos B$，则$\angle A=$（ ）A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

6. 设A,B是椭圆$C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{k}=1$的两个焦点，若$C$上存在点$P$满足$\angle APB=120°$，则$k$的取值范围是（ ）

A. $(0,1]\cup[16,+\infty)$ B. $(0,\frac{1}{2}]\cup[8,+\infty)$ C. $(0,\frac{1}{2}]\cup[16,+\infty)$ D. $(0,1]\cup[8,+\infty)$

7. 已知函数$f(x)=x^3+ax^2+bx+c(a,b,c\in R)$，若不等式$f(x)<0$的解集为$\{x|x<m+1,且x\neq m\}$，则函数$f(x)$的极小值是（ ）A. $-\frac{1}{4}$ B. 0 C. $-\frac{4}{27}$ D. $-\frac{4}{9}$

8. 已知定义域为R的函数$f(x)$的导函数为$f'(x)$，若函数$f(3x+1)$和$f'(x+2)$均为偶函数，且$f'(2)=-8$，则$\sum_{i=1}^{2023}f'(i)$的值为（ ）A. 0 B. 8 C. -8 D. 4

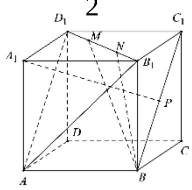
二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 数列$\{a_n\}$前n项的和为S_n,则下列说法正确的是（ ）A.若$a_n=-2n+11$,则数列$\{a_n\}$前 5 项的和最大 B. 若$\{a_n\}$为等比数列，$S_4=3$，$S_8=9$，则$S_{16}=54$ C. 若$a_1=2022$，$S_n=n^2a_n$，则$a_{2021}=\frac{2}{2021}$

D. 若$\{a_n\}$为等差数列，且$a_{1011}<0$，$a_{1011}+a_{1012}>0$，则当$S_n<0$时，n的最大值为 2022

10. 已知向量$\vec{a}=(\sin\omega x,\cos\omega x)(\omega>0),\vec{b}=(\sin^2(\frac{\omega x}{2}+\frac{\pi}{4}),\cos^2\frac{\omega x}{2})$，函数$f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}$，则（ ）

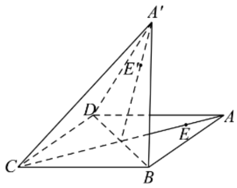
A. 若$f(x)$的最小正周期为π，则$f(x)$的图象关于点$(\frac{3\pi}{8},\frac{1}{2})$对称 B. 若$f(x)$的图象关于直线$x=\frac{\pi}{2}$对称，则$\omega$可能为$\frac{1}{2}$ C. 若$f(x)$在$[-\frac{2\pi}{5},\frac{\pi}{6}]$上单调递增，则$\omega\in(0,\frac{3}{2}]$



D. 若 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后得到一个偶函数的图象，则 ω 的最小值为 $\frac{3}{2}$

11. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1,点 P 是线段 BC_1 的中点,点 M,N 是线段 B_1D_1 上的动点,则下列结论正确的是（ ）A. AD_1 与平面 BMN 所成角为 $\frac{\pi}{6}$ B. 点 A_1 到平面 AB_1D_1 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

C. A_1P // 平面 ACD_1 D. 三棱柱 $AA_1D_1-BB_1C_1$ 的外接球半径为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$



三．填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12. 设复数 $z_1=2-i$，$z_2=a+2i$（i 是虚数单位，$a\in R$），若 $z_1z_2\in R$，则 $a=$______．

13. 已知菱形 $ABCD$ 边长为 6，$\angle ADC=\frac{2\pi}{3}$，$E$ 为对角线 AC 上一点，$AE=\sqrt{3}$．将 $\triangle ABD$ 沿 BD 翻折到 $\triangle A'BD$ 的位置，E 移动到 E' 且二面角 $A'-BD-A$ 的大小为 $\frac{\pi}{3}$，则三棱锥 $A'-BCD$ 的外接球的半径为_____；过 E' 作平面 α 与该外接球相交，所得截面面积的最小值为__________．

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项都是正数，$a_{n+1}^2-a_{n+1}=a_n(n\in N^*)$. 若数列 $\{a_n\}$ 各项单调递增，则首项 a_1 的取值范围是__________；当 $a_1=\frac{2}{3}$ 时，记 $b_n=\frac{(-1)^{n-1}}{a_n-1}$，若 $k<b_1+b_2+\cdots+b_{2023}<k+\frac{1}{2}$，则整数 $k=$_____．

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15. 某专营店统计了最近 5 天到该店购物的人数 y_i 和时间第 x_i 天之间的数据,列表如下:

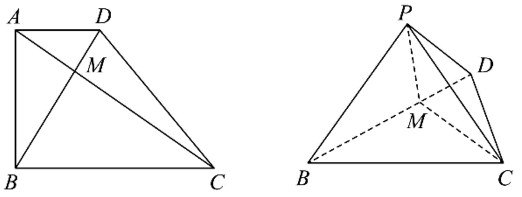
x_i	1	2	3	4	5
y_i	75	84	93	98	100

（1）由表中给出的数据，判断是否可用线性回归模型拟合人数 y 与时间 x 之间的关系？（若 $|r|>0.75$，则认为线性相关程度高，可用线性回归模型拟合;否则,不可用线性回归模型拟合.计算 r 时精确到 0.01）

（2）该专营店为了吸引顾客，推出两种促销方案:方案一，购物金额每满 100 元可减 10 元；方案二，购物金额超过 800 元可抽奖三次，每次中奖的概率均为 $\frac{1}{3}$，且每次抽奖互不影响，中奖一次打 9 折，中奖两次打 8 折，中奖三次打 6 折.某顾客计划在此专营店购买一件价值 1000 元的商品，请从实际付款金额的数学期望的角度分析，选哪种方案更优惠？参考数据: $\sqrt{4340}\approx 65.88$.附:相关系数 $r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$.

16. 如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AD//BC$，$AD\perp AB$，$BC=2AD=\sqrt{6}$，$AB=\sqrt{3}$，AC 与 BD 交于点 M，将 $\triangle ABD$ 沿 BD 翻折至 $\triangle PBD$，使点 A 到达点 P 的位置.（1）证明：$BD\perp PC$；

（2）若平面 PBC 与平面 PBD 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$，求三棱锥 $P-BCD$ 的体积.



17. 已知函数 $f(x)=x\cos x$，$g(x)=a\sin x$.（1）若 $a=1$，证明：当 $x\in(0,\pi)$ 时，$x>g(x)>f(x)$；

（2）当 $x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi)$ 时，$\frac{f(x)}{g(x)}<\frac{\sin x}{x}$，求 a 的取值范围.

18. 已知$\odot M$ 过点 $A(\sqrt{3},0)$，且与$\odot N:(x+\sqrt{3})^2+y^2=16$内切，设$\odot M$ 的圆心 M 的轨迹为 C.

（1）求轨迹 C 的方程；（2）设直线 l 不经过点 $B(2,0)$ 且与曲线 C 交于点 P,Q 两点，若直线 PB 与直线 QB 的斜率之积为$-\dfrac{1}{2}$，判断直线 l 是否过定点，若过定点，求出此定点的坐标，若不过定点，请说明理由.

19. 给定正整数$N\geq 3$，已知项数为 m 且无重复项的数对序列 A：$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_m,y_m)$满足如下三个性质：①$x_i,y_i\in\{1,2,\cdots,N\}$，且$x_i\neq y_i(i=1,2,\cdots,m)$；②$x_{i+1}=y_i(i=1,2,\cdots,m-1)$；③$(p,q)$与$(q,p)$不同时在数对序列 A 中.（1）当$N=3$，$m=3$时，写出所有满足$x_1=1$的数对序列 A；

（2）当$N=6$时，证明：$m\leq 13$；（3）当 N 为奇数时，记 m 的最大值为$T(N)$，求$T(N)$.

解答

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知非零向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0,|\vec{a}|=3,$ 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{a}+\vec{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$，则 $|\vec{b}|=$ （D ）A. 6 B. $3\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. 3

2. 若 $(\sqrt[3]{x}-\dfrac{1}{x})^n(n\in N^*)$ 的展开式中所有项的二项式系数之和为 16，则 $(\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{x})^{2n}$ 的展开式中的常数项为（ C ）A. 6 B. 8 C. 28 D. 56

3. 下列说法正确的是（ B ）A. “$a=-1$”是“直线 $a^2x-y+1=0$ 与直线 $x-ay-2=0$ 互相垂直”的充要条件

B. 直线 $x\sin\alpha+y+2=0$ 的倾斜角的取值范围是 $[0,\dfrac{\pi}{4}]\cup[\dfrac{3\pi}{4},\pi)$

C. 过 (x_1,y_1)，(x_2,y_2) 两点的所有直线的方程 $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$

D. 经过点 $(1,1)$ 且在 x 轴和 y 轴上截距都相等的直线方程为 $x+y-2=0$

4. 如果圆台的母线与底面成 $60°$ 角，那么这个圆台的侧面积与轴截面面积的比为（ C ）

A. 2π　　B. $\dfrac{3}{2}\pi$　　C. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$　　D. $\dfrac{1}{2}\pi$

5. 在 $\triangle ABC$ 中，$2a\cos A=b\cos C+c\cos B$，则 $\angle A=$（ B ）A. $\dfrac{\pi}{6}$　B. $\dfrac{\pi}{3}$　C. $\dfrac{\pi}{2}$　D. $\dfrac{2\pi}{3}$

6. 设 A,B 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{k}=1$ 的两个焦点，若 C 上存在点 P 满足 $\angle APB=120°$，则 k 的取值范围是（ A ）

A. $(0,1]\cup[16,+\infty)$ B. $(0,\dfrac{1}{2}]\cup[8,+\infty)$ C. $(0,\dfrac{1}{2}]\cup[16,+\infty)$ D. $(0,1]\cup[8,+\infty)$

7. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c(a,b,c\in R)$，若不等式 $f(x)<0$ 的解集为 $\{x|x<m+1,且x\neq m\}$，则函数 $f(x)$ 的极小值是（ C ）A. $-\dfrac{1}{4}$　B. 0　C. $-\dfrac{4}{27}$　D. $-\dfrac{4}{9}$

8. 已知定义域为 R 的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，若函数 $f(3x+1)$ 和 $f'(x+2)$ 均为偶函数，且 $f'(2)=-8$，则 $\sum\limits_{i=1}^{2023}f'(i)$ 的值为（ C ）A. 0　B. 8　C. -8　D. 4

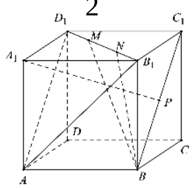
二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 数列 $\{a_n\}$ 前 n 项的和为 S_n,则下列说法正确的是（AC ）A.若 $a_n=-2n+11$,则数列 $\{a_n\}$ 前 5 项的和最大 B. 若 $\{a_n\}$ 为等比数列，$S_4=3$，$S_8=9$，则 $S_{16}=54$ C. 若 $a_1=2022$，$S_n=n^2a_n$，则 $a_{2021}=\dfrac{2}{2021}$

D. 若 $\{a_n\}$ 为等差数列，且 $a_{1011}<0$，$a_{1011}+a_{1012}>0$，则当 $S_n<0$ 时，n 的最大值为 2022

10. 已知向量 $\vec{a}=(\sin\omega x,\cos\omega x)(\omega>0),\vec{b}=(\sin^2(\dfrac{\omega x}{2}+\dfrac{\pi}{4}),\cos^2\dfrac{\omega x}{2})$，函数 $f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}$，则（ ABC ）

A. 若 $f(x)$ 的最小正周期为 π，则 $f(x)$ 的图象关于点 $(\dfrac{3\pi}{8},\dfrac{1}{2})$ 对称 B. 若 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称，则 ω 可能为 $\dfrac{1}{2}$ C. 若 $f(x)$ 在 $[-\dfrac{2\pi}{5},\dfrac{\pi}{6}]$ 上单调递增，则 $\omega\in(0,\dfrac{3}{2}]$



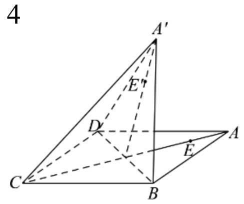
D. 若 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后得到一个偶函数的图象，则 ω 的最小值为 $\frac{3}{2}$

11. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1,点 P 是线段 BC_1 的中点,点 M,N 是线段 B_1D_1 上的动点,则下列结论正确的是（ AC ）A. AD_1 与平面 BMN 所成角为 $\frac{\pi}{6}$ B. 点 A_1 到平面 AB_1D_1 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

C. $A_1P//$ 平面 ACD_1　　D. 三棱柱 $AA_1D_1-BB_1C_1$ 的外接球半径为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

三．填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12. 设复数 $z_1=2-i$，$z_2=a+2i$（i 是虚数单位，$a\in R$），若 $z_1z_2\in R$，则 $a=$______． 4



13. 已知菱形 $ABCD$ 边长为 6，$\angle ADC=\frac{2\pi}{3}$，$E$ 为对角线 AC 上一点，$AE=\sqrt{3}$．将 $\triangle ABD$ 沿 BD 翻折到 $\triangle A'BD$ 的位置，E 移动到 E' 且二面角 $A'-BD-A$ 的大小为 $\frac{\pi}{3}$，则三棱锥 $A'-BCD$ 的外接球的半径为______；过 E' 作平面 α 与该外接球相交，所得截面面积的最小值为__________． $\sqrt{21}, 9\pi$

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项都是正数，$a_{n+1}^2-a_{n+1}=a_n(n\in N^*)$. 若数列 $\{a_n\}$ 各项单调递增，则首项 a_1 的取值范围是__________；当 $a_1=\frac{2}{3}$ 时，记 $b_n=\frac{(-1)^{n-1}}{a_n-1}$，若 $k<b_1+b_2+\cdots+b_{2023}<k+\frac{1}{2}$，则整数 $k=$_____． $(0,2),-4$

key: 由 $a_{n+1}^2-a_{n+1}=a_n>0$ 得 $a_{n+1}=\frac{1+\sqrt{1+4a_n}}{2}$，设 $f(x)=\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}$，则 $f(x)$ 在 $x>0$ 上递增，且 $f(x)=x\Leftrightarrow x=2$

由 $a_2=\frac{1+\sqrt{1+4a_1}}{2}>a_1$ 得 $0<a_1<2,\therefore 1<a_2<a_3<2,$

若 $0<a_k<a_{k+1}<2(k\geq 2)$ 成立，则 $f(0)<f(a_k)<f(a_{k+1})<f(2)$

而 $f(0)=1>0,\ f(a_k)=a_{k+1},\ f(a_{k+1})=a_{k+2},\ f(2)=2,$

$\therefore 0<a_{k+1}<a_{k+2}<2$ 也成立，$\therefore 1<a_n<a_{n+1}<2,\therefore a$ 的取值范围为 $(0,2)$,

由 $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_{n+1}(a_{n+1}-1)}=\frac{1}{a_{n+1}-1}-\frac{1}{a_{n+1}}$ 得 $b_{n+1}=\frac{(-1)^n}{a_{n+1}-1}=\frac{(-1)^n}{a_{n+1}}+\frac{(-1)^n}{a_n}=\frac{(-1)^n}{a_{n+1}}-\frac{(-1)^{n-1}}{a_n}$，且 $b_1=-3$

$\therefore b_1+b_2+\cdots+b_{2023}=-3+\frac{(-1)^{2022}}{a_{2023}}-\frac{(-1)^0}{a_1}=-4.5+\frac{1}{a_{2023}}\in(-4,-3.5)(\because a_{2023}\in(1,2),\therefore\frac{1}{a_{2023}}\in(\frac{1}{2},1)),\therefore k=-4$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15. 某专营店统计了最近 5 天到该店购物的人数 y_i 和时间第 x_i 天之间的数据,列表如下:

x_i	1	2	3	4	5
y_i	75	84	93	98	100

（1）由表中给出的数据，判断是否可用线性回归模型拟合人数 y 与时间 x 之间的关系？（若 $|r|>0.75$，则认为线性相关程度高，可用线性回归模型拟合;否则,不可用线性回归模型拟合.计算 r 时精确到 0.01）

（2）该专营店为了吸引顾客，推出两种促销方案:方案一，购物金额每满 100 元可减 10 元；方案二，购物金额超过 800 元可抽奖三次，每次中奖的概率均为 $\frac{1}{3}$，且每次抽奖互不影响，中奖一次打 9 折，中奖两次打 8 折，中奖三次打 6 折.某顾客计划在此专营店购买一件价值 1000 元的商品，请从实际付款金额的数学期望的角度分

析，选哪种方案更优惠？参考数据: $\sqrt{4340}\approx 65.88$.附:相关系数 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$.

【小问 1 详解】解：$\overline{x}=\dfrac{1+2+3+4+5}{5}=3$，$\overline{y}=\dfrac{75+84+93+98+100}{5}=90$，

所以，$\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)=-2\times(-15)-1\times(-6)+0+1\times 8+2\times 10=64$，

$\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\overline{x}\right)^2=4+1+0+1+4=10$，$\sum_{i=1}^{5}\left(y_i-\overline{y}\right)^2=(-15)^2+(-6)^2+3^2+8^2+10^2=434$，

所以，$r=\dfrac{\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\overline{x}\right)^2\cdot\sum_{i=1}^{5}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}=\dfrac{64}{\sqrt{10\times 434}}\approx\dfrac{64}{65.88}\approx 0.97>0.75$，

所以，y 与 x 的线性相关性很强，故可用线性回归模型拟合人数 y 与时间 x 之间的关系.

【小问 2 详解】解：设方案一的实际付款金额为 X 元，方案二的实际付款金额为 Y 元，

由题意可知，$E(X)=1000\times 0.9=900$（元），

Y 的可能取值有 600、800、900、1000，

$P(Y=600)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{1}{27}$，$P(Y=800)=C_3^2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{9}$，

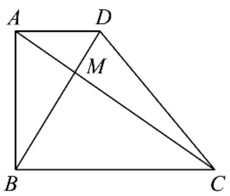
$P(Y=900)=C_3^1\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$，$P(Y=1000)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{8}{27}$，

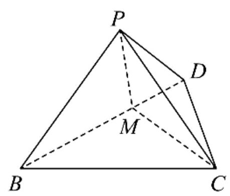
所以，$E(Y)=600\times\dfrac{1}{27}+800\times\dfrac{2}{9}+900\times\dfrac{4}{9}+1000\times\dfrac{8}{27}=\dfrac{24200}{27}<\dfrac{24300}{27}=E(X)$，

所以，方案二更优惠.

16. 如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AD//BC$，$AD\perp AB$，$BC=2AD=\sqrt{6}$，$AB=\sqrt{3}$，AC 与 BD 交于点 M，将 $\triangle ABD$ 沿 BD 翻折至 $\triangle PBD$，使点 A 到达点 P 的位置.（1）证明：$BD\perp PC$；

（2）若平面 PBC 与平面 PBD 的夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$，求三棱锥 $P-BCD$ 的体积.





【小问 1 详解】$\because \tan\angle ADB=\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{6}}{2}}=\sqrt{2}$，$\tan\angle CAB=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}$，

$\because \angle ADB, \angle CAB \in (0, \frac{\pi}{2})$ $\therefore \angle ADB = \angle CAB$，

$\therefore \angle ADB + \angle MAD = \angle CAB + \angle MAD = \frac{\pi}{2}$，$\therefore AC \perp BD$，即 $AM \perp BD$，$CM \perp BD$，

$\therefore PM \perp BD$，$CM \perp BD$，又 $PM \cap CM = M$，

$PM, CM \subset$ 平面 PMC，$\therefore BD \perp$ 平面 PMC，

$PC \subset$ 平面 PMC，$\therefore BD \perp PC$；

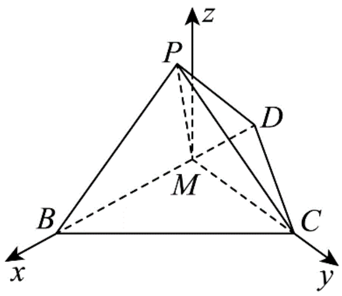
【小问 2 详解】直角 $\triangle ABC$ 中，$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 3$，

$\because AD \parallel BC$，$\therefore \frac{AM}{CM} = \frac{AD}{BC} = \frac{DM}{BM} = \frac{1}{2}$，

$\therefore AM = 1$，$CM = 2$，$BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{3-1} = \sqrt{2}$，则 $BD = \frac{3\sqrt{2}}{2}, MD = \frac{\sqrt{2}}{2}$

由（1）$BD \perp$ 平面 PMC，

以 M 为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系 $M-xyz$，



则 $B\left(\sqrt{2},0,0\right)$，$C\left(0,2,0\right)$，$D\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,0\right)$，

设 $P\left(0,\cos\theta,\sin\theta\right)$，其中 $0<\theta<\pi$，

所以 $\overrightarrow{MB} = \left(\sqrt{2},0,0\right)$，$\overrightarrow{CB} = \left(\sqrt{2},-2,0\right)$，$\overrightarrow{BP} = \left(-\sqrt{2},\cos\theta,\sin\theta\right)$，

设平面 PBD 的一个法向量为 $\vec{n} = \left(x_1,y_1,z_1\right)$，则 $\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{MB} = \sqrt{2}x_1 = 0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BP} = -\sqrt{2}x_1 + y_1\cos\theta + z_1\sin\theta = 0 \end{cases}$，

取 $y_1 = \sin\theta$，$\vec{n} = \left(0,\sin\theta,-\cos\theta\right)$，

设平面 PBC 的一个法向量为 $\vec{m} = \left(x_2,y_2,z_2\right)$，则 $\begin{cases} \vec{m}\cdot\overrightarrow{CB} = \sqrt{2}x_2 - 2y_2 = 0 \\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BP} = -\sqrt{2}x_2 + y_2\cos\theta + z_2\sin\theta = 0 \end{cases}$，

取 $y_2 = \sin\theta$，则 $\vec{m} = \left(\sqrt{2}\sin\theta,\sin\theta,2-\cos\theta\right)$，

$$\left|\cos\left\langle\vec{m},\vec{n}\right\rangle\right| = \left|\frac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}||\vec{m}|}\right| = \left|\frac{1-2\cos\theta}{\sqrt{3\sin^2\theta + \left(2-\cos\theta\right)^2}}\right| = \frac{\sqrt{7}}{7},$$

解得 $\cos\theta = \frac{4}{5}$，$\sin\theta = \frac{3}{5}$ 或 $\cos\theta = 0$，$\sin\theta = 1$

则 $P\left(0,\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$ 或 $P\left(0,0,1\right)$

故 $V_{P-BCD}=\dfrac{1}{3}S_{\vartriangle BCD}\cdot|z_P|=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\cdot BD\cdot MC\right)\cdot|z_P|=\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$ 或 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

17. 已知函数 $f(x)=x\cos x$， $g(x)=a\sin x$.（1）若 $a=1$，证明：当 $x\in(0,\pi)$ 时， $x>g(x)>f(x)$；

（2）当 $x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi)$ 时， $\dfrac{f(x)}{g(x)}<\dfrac{\sin x}{x}$，求 a 的取值范围.

(1) 证明：设$p(x)=x-g(x)=x-\sin x,q(x)=g(x)-f(x)=\sin x-x\cos x(x\in(0,\pi))$,

则$p'(x)=1-\cos x>0,q'(x)=x\sin x>0,\therefore\ p(x)$在$(0,\pi)$上递增，$q(x)$在$(0,\pi)$上递增,

$\therefore\ p(x)>p(0)=0,q(x)>p(0)=0,\therefore\ x>g(x)>f(x)$,证毕

(2) 解：由$\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{x\cos x}{a\sin x}-\dfrac{\sin x}{x}(x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi))$是偶函数

得$\dfrac{f(x)}{g(x)}<\dfrac{\sin x}{x}(x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi))\Leftrightarrow\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x\cos x}{a\sin x}<\dfrac{\sin x}{x}(x\in(0,\pi))\Leftrightarrow\dfrac{1}{a}\cos x<\dfrac{\sin^2 x}{x^2}(0<x<\pi)$

$\because\ \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1,\therefore\dfrac{1}{a}\le1$即$a<0,or,a\ge1$

当$x=\dfrac{\pi}{2}$时，不等式成立；当$x\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$时,$\cos x<0,\dfrac{\sin x}{x}>0,\therefore\dfrac{1}{a}>\dfrac{\sin^2 x}{x^2\cos x}$记为$p(x)$

则$p'(x)=\dfrac{\sin x(\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}x\cos2x-\sin2x)}{x^2\cos^2 x}>0\Leftrightarrow0<\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}x\cos2x-\sin2x$记为$q(x)$

则$q'(x)=\dfrac{3}{2}-x\sin2x-\dfrac{3}{2}\cos2x=\sin x(3\sin x-2x\cos x)>0$

$\therefore\ q(x)_{\min}=q(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{\pi}{2}>0,\therefore\ p'(x)>0,\therefore\ p(x)<p(\pi)=0,\therefore\dfrac{1}{a}>0,\therefore\ a\ge1$

当$x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$时,$\dfrac{1}{a}<\dfrac{\sin^2 x}{x^2\cos x}$记为$p(x)$,则$p'(x)=\dfrac{\sin x(\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}x\cos2x-\sin2x)}{x^2\cos^2 x}>0$

$\Leftrightarrow0<\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}x\cos2x-\sin2x$记为$q(x)$,则$q'(x)=\dfrac{3}{2}-x\sin2x-\dfrac{3}{2}\cos2x=\sin x\cos x(3\tan x-2x)>0$

设$r(x)=\tan x-x(0<x<\dfrac{\pi}{2})$,则$r'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1>0,\therefore\ r(x)>r(0)=0,\therefore\ q'(x)>0,\therefore\ p'(x)>0$,

而$\lim\limits_{x\to0^+}p(x)=1,\therefore\dfrac{1}{a}\le1$即$a\ge1$.综上：$a$的取值范围为$[1,+\infty)$

18. 已知$\odot M$ 过点 $A(\sqrt{3},0)$，且与$\odot N:(x+\sqrt{3})^2+y^2=16$内切，设$\odot M$ 的圆心 M 的轨迹为 C.

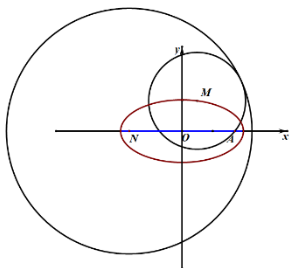
（1）求轨迹 C 的方程；（2）设直线 l 不经过点 $B(2,0)$ 且与曲线 C 交于点 P,Q 两点，若直线 PB 与直线 QB 的斜率之积为$-\dfrac{1}{2}$，判断直线 l 是否过定点，若过定点，求出此定点的坐标，若不过定点，请说明理由.

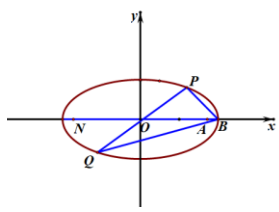
解： (1) 由已知得:$|MA|=4-|MN|,\therefore\ C$的方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

(2) 由题意设$l_{PQ}:x=ty+n(n\ne2)$

代入C方程得:$(t^2+4)y^2+2tny+n^2-4=0$

$\therefore\begin{cases}y_P+y_Q=-\dfrac{2tn}{t^2+4}\\y_Py_Q=\dfrac{n^2-4}{t^2+4}\end{cases}$,且$\Delta=16(t^2+4-4)>0$





$$\therefore k_{BP}k_{BQ}=\frac{y_P}{x_P-2}\cdot\frac{y_Q}{x_Q-2}=\frac{y_Py_Q}{(ty_P+n-2)(ty_Q+n-2)}=\frac{\frac{n^2-4}{t^2+4}}{\frac{t^2(n^2-4)}{t^2+4}+t(n-2)\cdot\frac{-2tn}{t^2+4}+(n-2)^2}=-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -2(n^2-4)=t^2(n^2-4)-2t^2(n^2-2n)+(n^2-4n+4)(t^2+4)$$

$$\Leftrightarrow 3n^2-8n+4=(3n-2)(n-2)=0,\therefore n=\frac{2}{3},\therefore \text{直线}l\text{经过定点}(\frac{2}{3},0)$$

19. （西城区上期末） 给定正整数 $N\ge 3$，已知项数为 m 且无重复项的数对序列 A：$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_m,y_m)$ 满足如下三个性质：① $x_i,y_i\in\{1,2,\cdots,N\}$，且 $x_i\ne y_i(i=1,2,\cdots,m)$；② $x_{i+1}=y_i(i=1,2,\cdots,m-1)$；③ (p,q) 与 (q,p) 不同时在数对序列 A 中.（1）当 $N=3$，$m=3$ 时，写出所有满足 $x_1=1$ 的数对序列 A；

（2）当 $N=6$ 时，证明：$m\le 13$；（3）当 N 为奇数时，记 m 的最大值为 $T(N)$，求 $T(N)$.

(1) 解：由题意得$x_i,y_i 1,2,3\},\therefore A:(1,2),(2,3),(3,1),$或$A:(1,3),(3,2),(2,1)\}$

(2) 证明：$\because N=6$,由(p,q)与(q,p)不同时在数对序列A中，得$m\le C_6^2=15$,
且$1,2,3,4,5,6$每个数至多出现5次
由(x_1,y_i)在数对序列中,则(y_i,x_1)不在数对序列中,(x_i,y_m)在数对序列中，
则(y_m,x_i)不在数对序列中，x_1,y_m可以出现5次，其它数最多只能出现4次，
$\therefore m\le\frac{1}{2}(2\times5+4\times4)=13$,证毕

(3) 解：记$N=2k+1(k\in N^*)$,
由（2）得$T(N)\le\frac{1}{2}[2k\cdot2+(2k-1)\cdot2k]=\frac{1}{2}(4k^2+2k+1),\therefore T(N)_{\max}=2k^2+k=\frac{N(N-1)}{2}(=C_N^2)$,

下面构造一个有C_N^2项的数对序列A:集合中每个集合只有一个元素在A中，
$\{(1,2),(2,1)\},\{(1,3),(3,1)\},\{(1,4),(4,1)\},\cdots,\{(1,2k+1),(2k+1,1)\}$,
$\{(2,3),(3,2)\},\{(2,4),(4,2)\},\{(2,5),(5,2)\},\cdots,\{(2,2k+1),(2k+1,2)\}$,
$\{(3,4),(4,3)\},\{(3,5),(5,3)\},\{(3,6),(6,3)\},\cdots,\{(3,2k+1),(2k+1,3)\}$,
…………
$\{(2k-3,2k-2),(2k-2,2k-3)\},\{(2k-3,2k-1),(2k-1,2k-3)\},\{(2k-3,2k),(2k,2k-3)\},\{(2k-3,2k+1),(2k+1,2k-3)\}$,
$\{(2k-2,2k-1),(2k-1,2k-2)\},\{(2k-2,2k),(2k,2k-2)\},\{(2k-2,2k+1),(2k+1,2k-2)\}$,
$\{(2k-1,2k),(2k,2k-1)\},\{(2k-1,2k+1),(2k+1,2k-1)\}$,
$\{(2k,2k+1),(2k+1,2k)\}$,
构造$A:(1,2),(2,3),\cdots(2k,2k+1),(2k+1,2k-1),(2k-1,2k-3),(2k-3,2k),(2k,2k-2),(2k-2,2k+1),(2k+1,2k-3)$,
$\cdots,(2k+1,1)$.刚好有$C_N^2=\frac{N(N-1)}{2}$项

【小问 3 详解】当 N 为奇数时，先证明 $T(N+2)=T(N)+2N+1$.

因为 (p,q) 与 (q,p) 不同时在数对序列 A 中，

所以 $T(N)\le C_N^2=\frac{1}{2}N(N-1)$，

当 $N=3$ 时，构造 $A:(1,2),(2,3),(3,1)$ 恰有 C_3^2 项，且首项的第1个分量与末项的第 2 个分量都为1.

对奇数 N，如果和可以构造一个恰有 C_N^2 项的序列 A，且首项的第1个分量与末项的第 2 个分量都为1，

那么多奇数 $N+2$ 而言，可按如下方式构造满足条件的序列 A'：

首先，对于如下 $2N+1$ 个数对集合：

$\{(1,N+1),(N+1,1)\},\{(1,N+2),(N+2,1)\}$，$\{(2,N+1),(N+1,2)\},\{(2,N+2),(N+2,2)\}$，

……$\{(N,N+1),(N+1,N)\},\{(N,N+2),(N+2,N)\}$，$\{(N+1,N+2),(N+2,N+1)\}$，

每个集合中都至多有一个数对出现在序列 A' 中，所以 $T(N+2)\le T(N)+2N+1$，

其次，对每个不大于 N 的偶数 $i\in\{2,4,6,\cdots,N-1\}$，

将如下 4 个数对并为一组：$(N+1,i),(i,N+2),(N+2,i+1),(i+1,N+1)$，

共得到 $\dfrac{N-1}{2}$ 组，将这 $\dfrac{N-1}{2}$ 组对数以及 $(1,N+1),(N+1,N+2),(N+2,1)$，

按如下方式补充到 A 的后面，即 $A,(1,N+1),(N+1,2),(2,N+2),(N+2,3),(3,n+1),\cdots,$

$(N+1,N-1),(N-1,N+2),(N+2,N),(N,N+1),(N+1,N+2),(N+2,1)$.

此时恰有 $T(N)+2N+1$ 项，所以 $T(N+2)=T(N)+2N+1$.

综上，当 N 为奇数时，$T(N)=\big(T(N)-T(N-2)\big)+\big(T(N-2)-T(N-4)\big)+\cdots+\big(T(5)-T(3)\big)+T(3)$

$=\big(2(N-2)+1\big)+\big(2(N-4)+1\big)+\cdots+(2\times3+1)+3$

$=\big(2(N-2)+1\big)+\big(2(N-4)+1\big)+\cdots+(2\times3+1)+(2\times1+1)$

$=(2N-3)+(2N-7)+\cdots+7+3=\dfrac{2N-3+3}{2}\times\dfrac{N-2+1}{2}=\dfrac{1}{2}N(N-1)$.