2023-24（下）模拟（13）

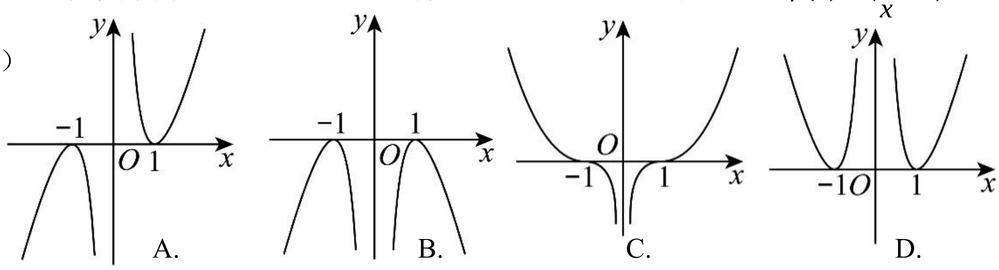
2024-02-21

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 若复数 z 与复数 $\frac{3+z}{2-z}$ 都是纯虚数，$\bar{z}$ 是 z 的共轭复数，则 $z\bar{z}=$（　　）A. 6 B. $\sqrt{6}$　C. $-\frac{3}{2}$　D. $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

2. 若 $(4x-m)(x-2)^5$ 的展开式中的 x^3 的系数为 -600，则实数 $m=$（　　）A. 8　B. 7　C. 9　D. 10

3. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，满足 $f(|x|)=f(x)$．当 $x<0$ 时 $f(x)=(\frac{1}{x}-x)\ln x^2$，则 $f(x)$ 的大致图象为（　　）



4. 已知 $2\sin\beta-\cos\beta+2=0,\sin\alpha=2\sin(\alpha+\beta)$，则 $\tan(\alpha+\beta)=$（　　）A. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　B. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$　C. $\frac{1}{3}$　D. $\frac{1}{2}$

5. 已知 $F(c,0)$ 为椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点，直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}b$ 与椭圆 E 交于 A、B 两点，若 $\triangle ABF$ 的周长等于 $4c$，则椭圆 E 的离心率等于（　　）A. $\frac{3}{4}$　B. $\frac{2}{3}$　C. $\frac{1}{4}$　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，公比为 $q(q\neq1)$，前 n 项和为 S_n，则"$S_2>0$"是"数列 $\{S_{2n}\}$ 是单调递增数列"的（　　）A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件　C. 充要条件　D. 既不充分也不必要条件

7. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c(a,b,c\in R)$，若不等式 $f(x)<0$ 的解集为 $\{x\,|\,x<m+1,且x\neq m\}$，则函数 $f(x)$ 的极小值是（　　）A. $-\frac{1}{4}$　B. 0　C. $-\frac{4}{27}$　D. $-\frac{4}{9}$

8. 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n, 2S_na_n=a_n^2+1(n\in N^*,a_n>0)$，则下列结论正确的是（　　）

A. $a_{2022}a_{2023}>1$　B. $a_{2023}>\sqrt{2023}$　C. $S_{2023}<\sqrt{2022}$　D. $\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\cdots+\frac{1}{S_{100}}<19$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 已知圆锥的侧面展开图是半径为 2 的半圆，则下列关于该圆锥的结论正确的是（　　）

A.体积等于 $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$　B.过顶点的截面面积最大值等于 2　C.外接球的体积等于 $\frac{32\sqrt{3}}{27}\pi$　D.内切球的表面积等于 2π

10. 已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，点 P 在抛物线上，点 $Q(m,n)$，点 P 到点 Q 和到 y 轴的距离分别为 d_1、d_2，则（　　）A. 抛物线 C　准线方程为 $y=-1$　B. 若 $m=n=1$，则 $\triangle PQF$ 周长的最小值等于 3

C. 若 $(m-3)^2+n^2=1$，则 d_1 的最小值等于 2　D. 若 $m-n=-4$，则 d_1+d_2 的最小值等于 $\frac{5\sqrt{2}}{2}-1$

11. 投掷一枚质地不均匀的硬币，已知出现正面向上的概率为 p，记 A_n 表示事件"在 n 次投掷中，硬币正面向上出现

偶数次”，则下列结论正确的是（　　）A. A_2 与 $\overline{A_2}$ 是互斥事件　　B. $P(A_2)=p^2$

C. $P(A_{n+1})=(1-2p)P(A_n)+p$　　　　D. $P(A_{2n})>P(A_{2n+2})$

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．把答案填在答题卡中的横线上．

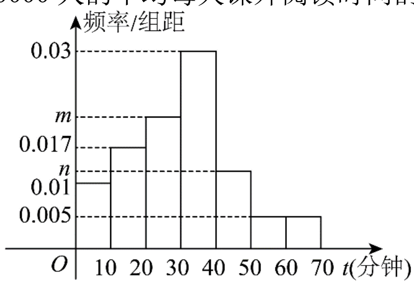
13. 已知平面向量 $\vec{b}=(1,1),|\vec{a}|=2$，$\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为 $90°$，则 $|\vec{a}+2\vec{b}|=$________.

14. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)+1(\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 的图象经过原点，若在 $(0,\pi)$ 上恰好有 3 个不同实数 $x_i(i=1,2,3)$ 使得对任意 x 都满足 $f(x)+f(2x_i-x)=2$，且对任意 α，使得 $f(x)$ 在 $(\alpha,\alpha+\frac{\pi}{3})$ 上不是单调函数，则 ω 的取值范围是__________.

16. 在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AB=2CD=2$，$\angle DAB=\angle CBA=\frac{\pi}{3}$，$O$ 为 AB 的中点.将 $\triangle BOC$ 沿 OC 折起，使点 B 到达点 B' 的位置，则三棱锥 $B'-ADC$ 外接球的表面积为_________；当 $B'D=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，三棱锥 $B'-ADC$ 外接球的球心到平面 $B'CD$ 的距离为_________.

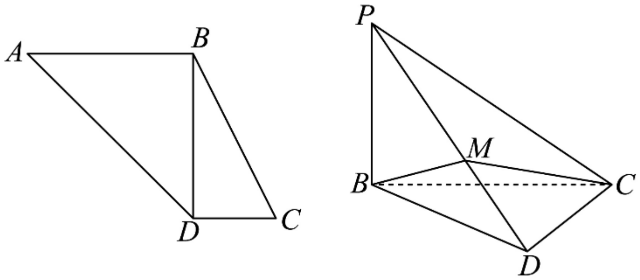
四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15. 联合国教科文组织确定每年的 4 月 23 日为“世界读书日”，以促进更多的人去阅读，享受阅读的乐趣．为建设读书校园，提升校园的读书氛围，市教育局准备在全市义务教育四年级至九年级学段开展“读书月”活动，活动前，为了解学生的阅读情况，从四年级至九年级在校学生中随机问卷调查了 10000 人，得到他们在过去一个月中平均每天课外的阅读时间 t（单位：分钟），整理得到如右的频率分布直方图，已知这 10000 人的平均每天课外阅读时间的中位数是 31．（1）求频率分布直方图中 m、n 的值；（2）若 t_0 为整数，将本次调查中平均每天课外阅读时间 $t\geq t_0$ 的学生选为“读书月”活动的宣传大使，教育局准备至少选出 1500 名“读书月”宣传大使，求 t_0 的最大值；



（3）为了进一步了解学生的课外阅读习惯受电子产品的影响，由频率分布直方图中平均阅读时间在 $[20,30)$ 和 $[30,40)$ 两组学生中，按人数比例分配的分层抽样方法抽取了 100 名学生，已知 $[20,30)$ 组的学生平均每天花在电子产品上的时间为 30 分钟，方差为 36，$[30,40)$ 组的学生平均每天花在电子产品上的时间为 20 分钟，方差为 16，求抽取的 100 名学生每天花在电子产品上的时间的方差．

16. 如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AB//CD, BD\perp CD, AB=BD=2CD=2$，将 $\triangle ABD$ 沿着 BD 折起到 $\triangle PBD$ 的位置，使得平面 $PBC\perp$ 平面 BCD．（1）证明：$PB\perp CD$；（2）点 M 满足 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PD}(0<\lambda<1)$，若二面角 $C-BM-D$ 的余弦值为 $\frac{2}{3}$，求 λ．



17. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$．（1）若 $a=1$，判断函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $a\geq 1$，证明：对任意 $x\in(2a,+\infty), f(x)<\ln 2^{a-2\ln a}$．

18. 已知圆 $M:(x-2)^2+y^2=4$，点 $N(-2,0)$，P 是圆 M 上的动点，线段 PN 的中垂线与直线 PM 交于点 Q，点 Q 的轨迹为曲线 C.（1）求曲线 C 的方程；（2）$A_1(-1,0),A_2(1,0)$，点 E、F（不在曲线 C 上）是直线 $x=2$ 上关于 x 轴对称的两点，直线 A_1E、A_2F 与曲线 C 分别交于点 A、B（不与 A_1、A_2 重合），证明：直线 AB 过定点.

19. 对于给定的奇数 $m(m\geq 3)$，设 A 是由 $m\times m$ 个实数组成的 m 行 m 列的数表，且 A 中所有数不全相同，A 中第 i 行第 j 列的数 $a_{ij}\in\{-1,1\}$，记 $r(i)$ 为 A 的第 i 行各数之和，$c(j)$ 为 A 的第 j 列各数之和，其中 $i,j\in\{1,2,\cdots,m\}$.记 $f(A)=\dfrac{m^2-|r(1)+r(2)+\cdots+r(m)|}{2}$.设集合 $H=\{(i,j)|a_{ij}\cdot r(i)<0,或a_{ij}\cdot c(j)<0,i,j\in\{1,2,\cdots,m\}\}$ 或，记 $H(A)$ 为集合 H 所含元素的个数.（1）对以下两个数表 A_1，A_2，写出 $f(A_1)$，$H(A_1)$，$f(A_2)$，$H(A_2)$ 的值；

1	1	1	1	1
1	1	1	1	−1
1	1	1	−1	−1
1	1	−1	−1	−1
1	−1	−1	−1	−1

A_1

−1	−1	1	1	1
−1	1	1	1	−1
1	1	1	−1	−1
1	1	−1	−1	−1
1	−1	−1	−1	−1

A_2

（2）若 $r(1),r(2),\cdots,r(m)$ 中恰有 s 个正数，$c(1),c(2),\cdots,c(m)$ 中恰有 t 个正数.求证：$H(A)\geq mt+ms-2st$；（3）当 $m=5$ 时，求 $\dfrac{H(A)}{f(A)}$ 的最小值.

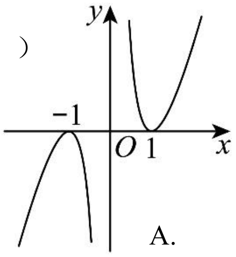
解答

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

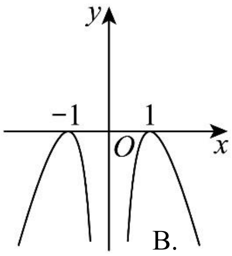
1. 若复数 z 与复数 $\frac{3+z}{2-z}$ 都是纯虚数，$\bar{z}$ 是 z 的共轭复数，则 $z\bar{z}=$（　A　）A. 6　B. $\sqrt{6}$　C. $-\frac{3}{2}$　D. $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

2. 若 $(4x-m)(x-2)^5$ 的展开式中的 x^3 的系数为 -600，则实数 $m=$（B　　）A. 8　　B. 7　C. 9　　D. 10

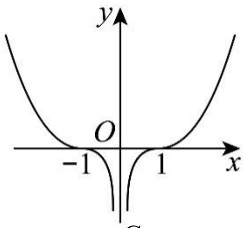
3. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，满足 $f(|x|)=f(x)$．当 $x<0$ 时 $f(x)=(\frac{1}{x}-x)\ln x^2$，则 $f(x)$ 的大致图象为（　D　）



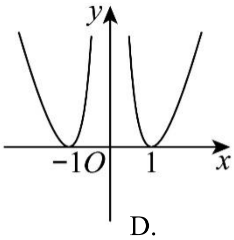
A.



B.



C.



D.

4. 已知 $2\sin\beta-\cos\beta+2=0,\sin\alpha=2\sin(\alpha+\beta)$，则 $\tan(\alpha+\beta)=$（　　D）A. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　B. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$　C. $\frac{1}{3}$　D. $\frac{1}{2}$

5. 已知 $F(c,0)$ 为椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点，直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}b$ 与椭圆 E 交于 A、B 两点，若 $\triangle ABF$ 的周长等于 $4c$，则椭圆 E 的离心率等于（　A　）A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，公比为 $q(q\neq 1)$，前 n 项和为 S_n，则"$S_2>0$"是"数列 $\{S_{2n}\}$ 是单调递增数列"的（　C　）A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件　　C. 充要条件　D. 既不充分也不必要条件

7. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c(a,b,c\in R)$，若不等式 $f(x)<0$ 的解集为 $\{x\,|\,x<m+1,且x\neq m\}$，则函数 $f(x)$ 的极小值是（C　　）A. $-\frac{1}{4}$　　B. 0　　C. $-\frac{4}{27}$　　D. $-\frac{4}{9}$

8. 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n,2S_na_n=a_n^2+1(n\in N^*,a_n>0)$，则下列结论正确的是（ D　）

A. $a_{2022}a_{2023}>1$　B. $a_{2023}>\sqrt{2023}$　C. $S_{2023}<\sqrt{2022}$　D. $\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\cdots+\frac{1}{S_{100}}<19$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 已知圆锥的侧面展开图是半径为 2 的半圆，则下列关于该圆锥的结论正确的是（ AC　）

A.体积等于 $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$　B.过顶点的截面面积最大值等于 2　C.外接球的体积等于 $\frac{32\sqrt{3}}{27}\pi$　D.内切球的表面积等于 2π

10. 已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，点 P 在抛物线上，点 $Q(m,n)$，点 P 到点 Q 和到 y 轴的距离分别为 d_1、d_2，则（ BD　）A. 抛物线 C　准线方程为 $y=-1$　B. 若 $m=n=1$，则 $\triangle PQF$ 周长的最小值等于 3

C. 若 $(m-3)^2+n^2=1$，则 d_1 的最小值等于 2　D. 若 $m-n=-4$，则 d_1+d_2 的最小值等于 $\frac{5\sqrt{2}}{2}-1$

$key:$抛物线的准线l方程为$x=-1,A$错；

P在l上的设由为$P_1,Q(1,1)$,则$\triangle PQF$的周长为$1+|PQ|+|PF|$

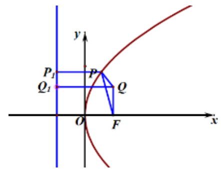
$=1+|PQ|+|PP_1|\geq 1+|QQ_1|=3,B$对；

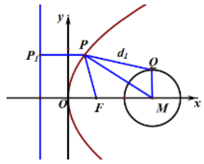
Q在圆$M:(x-3)^2+y^2=1$上，$\therefore d_1\geq|PM|-|MQ|=|PM|-1$

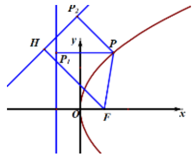
$=\sqrt{(x-3)^2+4x}-1=\sqrt{x^2-2x+9}-1\geq 2\sqrt{2}-1,C$错；

Q在直线$y=x+4$上,如图，$d_1+d_2\geq|PP_2|+|PP_1|-1$

$=|PP_2|+|PF|-1\geq|FH|-1=\dfrac{5}{\sqrt{2}}-1,D$对







11. 投掷一枚质地不均匀的硬币，已知出现正面向上的概率为 p，记 A_n 表示事件“在 n 次投掷中，硬币正面向上出现偶数次”，则下列结论正确的是（　ACD　）A. A_2 与 $\overline{A_2}$ 是互斥事件 B. $P(A_2)=p^2$

C. $P(A_{n+1})=(1-2p)P(A_n)+p$　　　　　　　　D. $P(A_{2n})>P(A_{2n+2})$

$key:P(A_2)=C_2^0p^0(1-p)^2+C_2^2p^2\neq p^2,\therefore A$对，$B$错；

$P(A_{n+1})=P(A_n)\cdot(1-p)+(1-P(A_n))\cdot p=(1-2p)P(A_n)+p,C$对；

$P(A_{2n+2})=P(A_{2n})\cdot((1-p)^2+p^2)+(1-P(A_{2n}))\cdot(1-p)p=(1-3p+2p^2)P(A_{2n})+p-p^2$

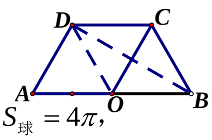
$\therefore P(A_{2n+2})-P(A_{2n})=p(2p-3)P(A_{2n})+p(1-p)<0,D$对

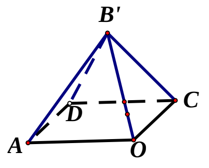
三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．把答案填在答题卡中的横线上．

12. 已知平面向量$\vec{b}=(1,1),|\vec{a}|=2$，$\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为$90°$，则$|\vec{a}+2\vec{b}|=$________．　$2\sqrt{3}$

13. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)+1(\omega>0,-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2})$ 的图象经过原点，若在 $(0,\pi)$ 上恰好有 3 个不同实数 $x_i(i=1,2,3)$ 使得对任意 x 都满足 $f(x)+f(2x_i-x)=2$，且对任意 α，使得 $f(x)$ 在 $(\alpha,\alpha+\dfrac{\pi}{3})$ 上不是单调函数，则 ω 的取值范围是__________．　$(3,\dfrac{19}{6}]$

14. 在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AB=2CD=2$，$\angle DAB=\angle CBA=\dfrac{\pi}{3}$，$O$ 为 AB 的中点.将$\triangle BOC$ 沿 OC 折起，使点 B 到达点 B' 的位置，则三棱锥 $B'-ADC$ 外接球的表面积为_________；当 $B'D=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时，三棱锥 $B'-ADC$ 外接球的球心到平面 $B'CD$ 的距离为_________．　　4π，$\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$

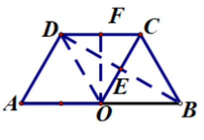


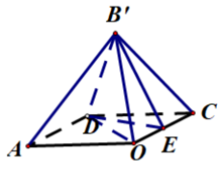


$key:$由已知得$OB'=OA=OC=OD,\therefore O$是三棱锥$B'-ADC$的外接球的球心，$\therefore S_{球}=4\pi,$

取OC的中点E，则$OC\perp$平面$B'DE,ED=EB'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\because B'D=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\therefore\triangle B'DE$是正三角形，

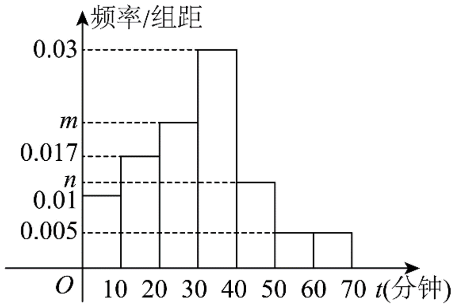




$\therefore\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=V_{B'-OCD}=V_{O-B'CD}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\dfrac{3}{16}}\cdot d_{O\to B'CD}$得$d_{O\to B'CD}=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15. 联合国教科文组织确定每年的 4 月 23 日为“世界读书日”，以促进更多的人去阅读，享受阅读的乐趣．为建设读书校园，提升校园的读书氛围，市教育局准备在全市义务教育四年级至九年级学段开展“读书月”活动，活动前，为了解学生的阅读情况，从四年级至九年级在校学生中随机问卷调查了 10000 人，得到他们在过去一个月中平均每天课外的阅读时间 t（单位：分钟），整理得到如右的频率分布直方图，已知这 10000 人的平均每天课外阅读时间的中位数是 31．（1）求频率分布直方图中 m、n 的值；



（2）若 t_0 为整数，将本次调查中平均每天课外阅读时间 $t \geq t_0$ 的学生选为“读书月”活动的宣传大使，教育局准备至少选出 1500 名“读书月”宣传大使，求 t_0 的最大值；

（3）为了进一步了解学生的课外阅读习惯受电子产品的影响，由频率分布直方图中平均阅读时间在 $[20,30)$ 和 $[30,40)$ 两组学生中，按人数比例分配的分层抽样方法抽取了 100 名学生，已知 $[20,30)$ 组的学生平均每天花在电子产品上的时间为 30 分钟，方差为 36，$[30,40)$ 组的学生平均每天花在电子产品上的时间为 20 分钟，方差为 16，求抽取的 100 名学生每天花在电子产品上的时间的方差．

【小问 1 详解】由题意中位数是 31，则 $0.1+0.17+10\times m+0.03=0.5$，所以 $m=0.02$，

又 $0.1+0.17+0.2+0.3+0.1+10n=1 \quad \therefore n=0.013$．

【小问 2 详解】通过直方图可知第 85 百分位数 x_0 落在第 $[40,50)$ 组，

$0.1+0.17+0.2+0.3+\left(x_0-40\right)\times 0.013=0.85$，解得 $t_0 \approx 46.15$，因为 $t_0 \in \mathrm{Z}$，所以 $t_0=46$，

【小问 3 详解】按分层抽样在 $[20,30)$ 组抽取 40 人记为 $x_1, x_2, \cdots, x_{40}$，

则 $\dfrac{1}{40}\left(x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_{40}^2\right)-900=36, \therefore x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_{40}^2=936\times 40$，

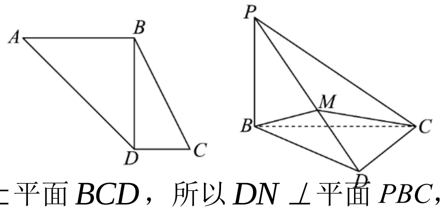
在 $[30,40)$ 组抽取 60 人，记为 $y_1, y_2\cdots\cdots y_{60}$，

同理可得 $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{60}^2=416\times 60$，平均值为 $\bar{x}=\dfrac{40\times 30+60\times 20}{100}=24$，

$\therefore$ 抽取的 100 名学生每天花在电子产品上的时间的方差

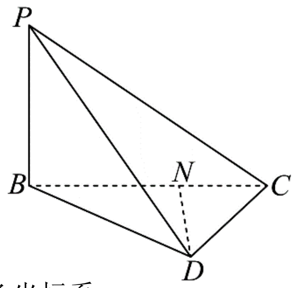
$$S^2=\frac{1}{100}(936\times 40+416\times 60)-24^2=624-576=48.$$

16. 如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AB//CD, BD\perp CD, AB=BD=2CD=2$，将 $\triangle ABD$ 沿着 BD 折起到 $\triangle PBD$ 的位置，使得平面 $PBC \perp$ 平面 BCD．（1）证明：$PB \perp CD$；（2）点 M 满足 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PD}(0<\lambda<1)$，若二面角 $C-BM-D$ 的余弦值为 $\dfrac{2}{3}$，求 λ．



【小问 1 详解】过 D 作 $DN \perp BC$，垂足为 N，

因为平面 $BCD \perp$ 平面 PBC，平面 $BCD \cap$ 平面 $PBC=BC$，$DN \subset$ 平面 BCD，所以 $DN \perp$ 平面 PBC，



因为 $PB\subset$ 平面 PBC，所以 $DN\perp PB$，

因为 $PB\perp BD$， $BD\cap DN=D$，所以 $PB\perp$ 平面 BCD，

因为 $CD\subset$ 平面 BCD，所以 $PB\perp CD$.

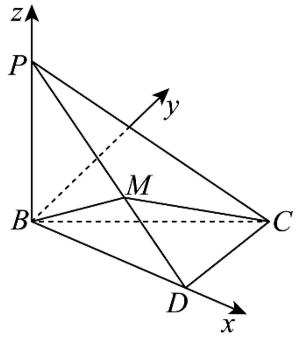
【小问 2 详解】由（1）可知 $PB\perp$ 平面 BCD，又 $BD\perp CD$，

以 B 为坐标原点，以 $\overrightarrow{BD}$、$\overrightarrow{DC}$、$\overrightarrow{BP}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向建立空间直角坐标系，

则 $D(2,0,0),C(2,1,0),P(0,0,2)$，

$\overrightarrow{BC}=(2,1,0)$， $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{BP}+\lambda\overrightarrow{PD}=(0,0,2)+\lambda(2,0,-2)=(2\lambda,0,2-2\lambda)$，

设平面 BCM 的一个法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，由 $\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{BM}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2x+y=0\\ \lambda x+(1-\lambda)z=0\end{cases}$，令 $x=-1$ 得 $\vec{n}=\left(-1,2,\dfrac{\lambda}{1-\lambda}\right)$，



平面 BDM 的一个法向量可取 $\vec{m}=(0,1,0)$，

因为二面角 $C-BM-D$ 的余弦值为 $\dfrac{2}{3}$，

所 $\left|\cos\vec{m},\vec{n}\right|=\left|\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}\right|=\dfrac{2}{\sqrt{5+\left(\dfrac{\lambda}{1-\lambda}\right)^2}}=\dfrac{2}{3}$，解得 $\dfrac{\lambda}{1-\lambda}=2$，所以 $\lambda=\dfrac{2}{3}$.

17. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$.（1）若 $a=1$，判断函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $a\geq 1$，证明：对任意 $x\in(2a,+\infty),\ f(x)<\ln 2^{a-2\ln a}$.

(1) 解：由$f'(x)=\dfrac{\dfrac{x-1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}>0\Leftrightarrow 0<1-\dfrac{1}{x}-\ln x$记为$p(x)$

则$p'(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1-x}{x^2}>0\Leftrightarrow 0<x<1,\therefore\ p(x)_{\max}=p(1)=0$

$\therefore\ f'(x)<0,\therefore\ f(x)$在$(0,1),(1,+\infty)$上递减

(2) 证明：由$f'(x)=\dfrac{\dfrac{x-a}{x}-(\ln x-\ln a)\cdot 1}{(x-a)^2}>0\Leftrightarrow 0<1-\dfrac{a}{x}-\ln x+\ln a$记为$q(x)$

则$q'(x)=\dfrac{a}{x^2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{a-x}{x^2}<0(\because x>2a)$,

而$q(a)=0,\therefore\ f'(x)<0,\therefore\ f(x)<f(2a)=\dfrac{\ln 2}{a}$

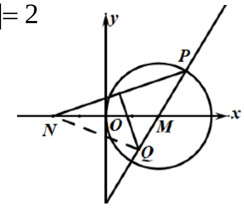
要证：$f(x)<\ln 2^{a-2\ln a}(x>2a)$,只要证明:$\dfrac{\ln 2}{a}\leq(a-2\ln a)\ln 2\cdots(*)$

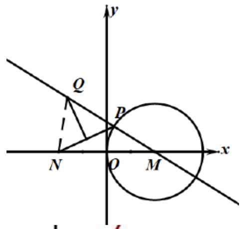
$\Leftrightarrow 0<a-2\ln a-\dfrac{1}{a}$记为$r(a)(a\geq 1)$

则$r'(a)=1-\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{(a-1)^2}{a^2}\geq 0,\therefore r(a)\geq r(1)=0.\therefore(*)$成立，证毕

18. 已知圆 $M:(x-2)^2+y^2=4$，点 $N(-2,0)$，P 是圆 M 上的动点，线段 PN 的中垂线与直线 PM 交于点 Q，点 Q

的轨迹为曲线 C.（1）求曲线 C 的方程；（2）$A_1(-1,0),A_2(1,0)$，点 E、F（不在曲线 C 上）是直线 $x=2$ 上关于 x 轴对称的两点，直线 A_1E、A_2F 与曲线 C 分别交于点 A、B（不与 A_1、A_2 重合），证明：直线 AB 过定点.



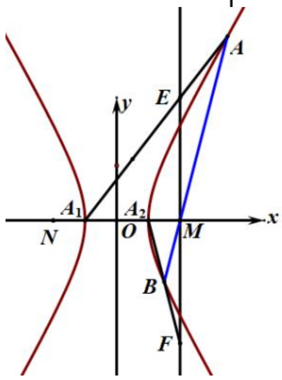


(1) 解：由已知得 $|QM|+|MP|=|QP|=|QN|$ 及 $|QN|-|QM|=|MP|=2$

$or,|QM|-|QN|=|QM|-|QP|=|MP|=2,\therefore ||QN|-|QM||=2$

$\therefore Q$的轨迹曲线C的方程为$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$

（2）证明：设$E(2,t)(t>0)$,则$F(2,-t)$



则$l_{A_1E}:x=\dfrac{3}{t}y-1$代入$C$方程得:$(\dfrac{9}{t^2}-\dfrac{1}{3})y^2-\dfrac{6}{t}y=0,\therefore A(\dfrac{27+t^2}{27-t^2},\dfrac{18t}{27-t^2})$,

$l_{A_2F}:x=-\dfrac{1}{t}y+1$代入$C$方程得:$(\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{1}{3})y^2-\dfrac{2}{t}y=0,\therefore B(\dfrac{-3-t^2}{3-t^2},\dfrac{6t}{3-t^2})$

$$\therefore k_{AB}=\frac{\dfrac{18t}{27-t^2}-\dfrac{6t}{3-t^2}}{\dfrac{27+t^2}{27-t^2}-\dfrac{-3-t^2}{3-t^2}}=\frac{6t}{t^2-9}$$

$$\therefore l_{AB}:y-\frac{6t}{3-t^2}=\frac{6t}{t^2-9}(x+\frac{3+t^2}{3-t^2})\text{即}y=\frac{6t}{t^2-9}x+\frac{6t}{t^2-9}\cdot\frac{3+t^2}{3-t^2}+\frac{6t}{3-t^2}$$

$$=\frac{6t}{t^2-9}x+\frac{6t}{3-t^2}(\frac{3+t^2}{t^2-9}+1)=\frac{6t}{t^2-9}(x-2)\text{经过定点}(2,0)\text{,证毕}$$

19. 对于给定的奇数 $m(m\ge 3)$，设 A 是由 $m\times m$ 个实数组成的 m 行 m 列的数表，且 A 中所有数不全相同，A 中第 i 行第 j 列的数 $a_{ij}\in\{-1,1\}$，记 $r(i)$ 为 A 的第 i 行各数之和，$c(j)$ 为 A 的第 j 列各数之和，其中 $i,j\in\{1,2,\cdots,m\}$.记 $f(A)=\dfrac{m^2-|r(1)+r(2)+\cdots+r(m)|}{2}$.设集合 $H=\{(i,j)\,|\,a_{ij}\cdot r(i)<0,\text{或}a_{ij}\cdot c(j)<0,i,j\in\{1,2,\cdots,m\}\}$，记 $H(A)$ 为集合 H 所含元素的个数.（1）对以下两个数表 A_1，A_2，写出 $f(A_1)$，$H(A_1)$，$f(A_2)$，$H(A_2)$ 的值；

1	1	1	1	1
1	1	1	1	−1
1	1	1	−1	−1
1	1	−1	−1	−1
1	−1	−1	−1	−1

A_1

−1	−1	1	1	1
−1	1	1	1	−1
1	1	1	−1	−1
1	1	−1	−1	−1
1	−1	−1	−1	−1

A_2

（2）若 $r(1),r(2),\cdots,r(m)$ 中恰有 s 个正数，$c(1),c(2),\cdots,c(m)$ 中恰有 t 个正数.求证：$H(A)\ge mt+ms-2st$；

（3）当 $m=5$ 时，求 $\dfrac{H(A)}{f(A)}$ 的最小值.

(1) 解：$A_1:r(1)=5,r(2)=3,r(3)=1,r(4)=-1,r(5)=-3,\therefore f(A_1)=\dfrac{25-|5+3+1-1-3|}{2}=10,$

$c(1)=5,c(2)=3,c(3)=1,c(4)=-1,c(5)=-3,\therefore H(A_1)=1+2+2+1+1+2+2+1=12$

$A_2:r(1)=1,r(2)=1,r(3)=1,r(4)=-1,r(5)=-3,\therefore f(A_2)=\dfrac{25-|1+1+1-1-3|}{2}=12$

$c(1)=1,c(2)=1,c(3)=1,c(4)=-1,c(5)=-3,\therefore H(A_2)=2+2+2+2+1+2+2+2+2+1=18$

（2）证明：由$a_{ij}\cdot r(i)\cdot a_{ij}\cdot c(j)=a_{ij}^2\cdot r(i)c(j)<0$

$\because r(1),r(2),\cdots,r(m)$中恰有$s$个正数，$c(1),c(2),\cdots,c(m)$中恰有$t$个正数,

$\therefore H(A)\ge m(m-t)+t(m-s)-(m-t)(m-s)=ms+mt-2st$, 证毕

(3) 解:由已知得数表A中的每个数变为其相反数，或交换两行（列）, $H(A)$, $f(A)$的值不变，

$\because m$为奇数, $a_{ij}\in\{-1,1\}$, $\therefore r(1),r(2),\cdots,r(m);c(1),c(2),\cdots,c(m)$均不为0

设$r(1),r(2),\cdots,r(5)$中恰有$s(s\le 5)$个正数，$c(1),c(2),\cdots,c(5)$中恰有$t(t\le 5)$个正数,

①当$s\in\{0,5\}$或$t\in\{0,5\}$, 不妨设$s=0,r(i)<0(i=1,2,\cdots,5)$

$\therefore$ 当$a_{ij}=1$时, $(i,j)\in H$, 设A中1的个数为$a(a\ge 1)$, 则$f(A)=\dfrac{5^2+r(1)+r(2)+\cdots+r(5)}{2}=\dfrac{25+a-(25-a)}{2}=a$,

$\therefore H(a)\ge a\ \therefore \dfrac{H(A)}{f(A)}\ge 1$;

②由①设$s\in\{0,5\}$, 且$t\notin\{0,5\}$.若$s\in\{2,3\}$, or, $t\in\{2,3\}$, 不妨设$s=2$,

则由（2）得$H(A)\ge 5t+10-4t=10+t\ge 11$

而$f(A)=\dfrac{25-|r(1)+r(2)+\cdots+r(5)|}{2}\le 12(\because|r(1)+r(2)+\cdots+r(5)|\le|1+1-5-5-5|=13)$, $\therefore\dfrac{H(A)}{f(A)}\ge\dfrac{11}{12}$

③若$s,t\in\{1,4\}$, 若$s\ne t$, 则$\{s,t\}=\{1,4\}$, 由（2）得: $H(A)\ge 25-8=17$

而$f(A)\le 12$, $\therefore\dfrac{H(A)}{f(A)}\ge\dfrac{17}{12}$

若$s=t\in\{1,4\}$, 不妨设$s=t=1$, 不妨设$a_{11}=1$, 且第一行1比-1多，第1列1比-1多，

则$H(A)\ge 8$, $f(A)\le 9$,

取$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&-1&-1&-1&-1\\1&-1&-1&-1&-1\\1&-1&-1&-1&-1\\1&-1&-1&-1&-1\end{pmatrix}$ $H(A)=8$, $f(A)=\dfrac{25-|5-3\times 4|}{2}=9$, $\therefore\dfrac{H(A)}{f(A)}=\dfrac{8}{9}$.综上$\dfrac{H(A)}{f(A)}$的最小值为$\dfrac{8}{9}$.