解析几何（1）直线与圆解答（4）

2023-09-23

（2017 江苏）13．在平面直角坐标系 xOy中，$A(-12,0),B(0,6)$,点P在圆$O:x^2+y^2=50$上，若

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\le 20$，则点$P$ 的横坐标的取值范围是______．$[-5\sqrt{2},1]$

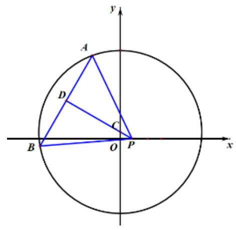
$key:$设$P(x,y)(x^2+y^2=50)$，则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(-12-x,-y)\cdot(-x,6-y)$

$=12x+x^2-6y+y^2=12x-6y+50\le 20$即$2x-y+5\le 0$

由$\begin{cases}y=2x+5\\x^2+y^2=50\end{cases}$得$x=-5,or,1,\therefore x\in[-5\sqrt{2},1]$

（2020江苏）在平面直角坐标系xOy中，已知$P(\frac{\sqrt{3}}{2},0)$, A,B是圆$C:x^2+(y-\frac{1}{2})^2=36$上的两个动点，满足$PA=PB$，则$\triangle PAB$面积的最大值是 _____ .

2020江苏$key:\because PA=PB,\therefore PD\perp AB,\because CD\perp AB,\therefore P,C,D$（$D$为$AB$的中点），设$|CD|=d$,则



$S_{\triangle PAB}\le\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{36-d^2}\cdot(d+1)=\sqrt{(36-d^2)(d+1)^2}$

设$f(d)=(36-d^2)(1+d)^2=\frac{1}{\lambda\mu^2(\lambda+2\mu)}(\lambda+2\mu)(6-d)\cdot\lambda(6+d)\cdot\mu(1+d)\cdot\mu(1+d)$

$\le\frac{1}{\lambda\mu^2(\lambda+2\mu)}\cdot(\frac{6\lambda+12\mu+6\lambda+2\mu}{4})^4=500$

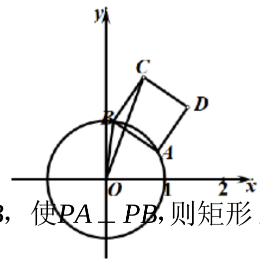
(当且仅当$(\lambda+2\mu)(6-d)=\lambda(6+d)=\mu(1+d)$即$\begin{cases}\frac{\lambda+2\mu}{\lambda}=\frac{6+d}{6-d}\text{即}\frac{2\lambda+2\mu}{2\mu}=\frac{12}{2d}\\\frac{\lambda}{\mu}=\frac{1+d}{6+d}\end{cases}$得$d=4,\mu=2\lambda),\therefore(S_{\triangle ABP})_{\max}=10\sqrt{5}$

（2021 乙）（多选题）11.已知点 P 在圆$(x-5)^2+(y-5)^2=16$上，点 $A(4,0)$， $B(0,2)$，则（ ACD）

A．点 P 到直线 AB 的距离小于 10　　　B．点 P 到直线 AB 的距离大于 2

C．当$\angle PBA$最小时，$|PB|=3\sqrt{2}$　　　D．当$\angle PBA$最大时，$|PB|=3\sqrt{2}$

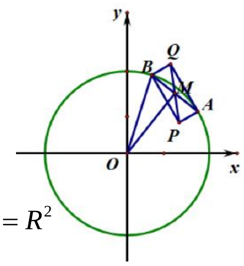
变式 2（1）已知圆$O:x^2+y^2=1$, O为坐标原点，若正方形$ABCD$的一边AB为圆O的一条弦，则线段OC长度的最大值是 ____; 最小值是 _____ .



$key:$如图，设$\angle OBA=\theta$,则$|OC|=\sqrt{1+(2\cos\theta)^2-2\cdot 1\cdot 2\cos\theta\cdot\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)}$

$=\sqrt{3+2\sqrt{2}\sin(2\theta+\frac{\pi}{4})}\in[\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1]$

（2）已知圆的方程为$x^2+y^2=r^2$，圆内有定点$P(a,b)$,圆周上有两个动点A、B，使$PA\perp PB$,则矩形 $PAQB$ 的顶点Q的轨迹方程为_______.

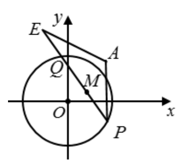


$key:$设$Q(x,y),M(x_0,y_0)$，则$\begin{cases}x_0=\frac{x+a}{2}\\y_0=\frac{y+b}{2}\end{cases}$

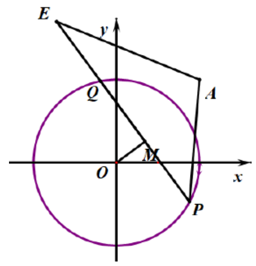
由$OM^2+MP^2=R^2$得$(\frac{x+a}{2})^2+(\frac{y+b}{2})^2+(\frac{x-a}{2})^2+(\frac{y-b}{2})^2=\frac{x^2+y^2+a^2+b^2}{2}=R^2$

即$x^2+y^2=2R^2-a^2-b^2$

（3）已知圆 $O:x^2+y^2=4$ 点 $A(2,2)$，直线 l 与圆 O 交于 P,Q 两点，点 E 在直线 l 上且满足 $\overrightarrow{PQ}=2\overrightarrow{QE}$.若 $AE^2+2AP^2=48$，则弦 PQ 中点 M 的横坐标的取值范围为____________.$(\frac{-1-\sqrt{7}}{2},\frac{-1+\sqrt{7}}{2})$



key:由已知的Q是EM的中点，则$E(\frac{3}{2}x_Q-\frac{1}{2}x_P,\frac{3}{2}y_Q-\frac{1}{2}y_P)$,

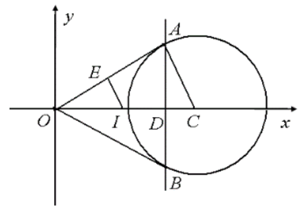


$$\therefore\begin{cases}x_Q^2+y_Q^2=4,\text{且}x_P^2+y_P^2=4\\ x_P+x_Q=2x_M,\text{且}y_P+y_Q=2y_M,\therefore x_Px_Q+y_Py_Q=2x_M^2+2y_M^2-4\\ AE^2+2AP^2=(\frac{3}{2}x_Q-\frac{1}{2}x_P-2)^2+(\frac{3}{2}y_Q-\frac{1}{2}y_P-2)^2+2[(x_P-2)^2+(y_P-2)^2]\\ =42-\frac{3}{2}(x_Px_Q+y_Py_Q)-6(x_P+x_Q)-6(y_P+y_Q)=48\text{即}x_M^2+y_M^2+4x_M+4y_M=0\end{cases}$$

且$x_M^2+y_M^2<4$得$x_M\in(\frac{-\sqrt{7}-1}{2},\frac{\sqrt{7}-1}{2})$

（2013 福建）14．过坐标原点 O 作圆 $C:(x-\frac{9}{2})^2+y^2=9$ 的两条切线，设切点为 A，B.

（1）求直线 AB 的方程以及线段 AB 的长；（2）求$\triangle OAB$ 内切圆的方程.



【解答】（1）依题意，A，B 为以 OC 为直径的圆与圆 C 的交点，

∵　以 OC 为直径的圆的方程为 $(x-\frac{9}{4})^2+y^2=(\frac{9}{4})^2$，即 $x^2+y^2-\frac{9}{2}x=0$

又圆 C 方程化为 $x^2+y^2-9x+\frac{45}{4}=0$，

将两圆方程相减得，$\frac{9}{2}x-\frac{45}{4}=0$，即，∴　直线 AB 的方程为 $x=\frac{5}{2}$ ……………　4 分

易知，圆心 C 到直线 AB 的距离 $d=\frac{9}{2}-\frac{5}{2}=2$，∴　$|AB|=2\sqrt{3^2-2^2}=2\sqrt{5}$ …………………　8 分

（2）解：设内切圆半径为r，则$(\frac{5}{2}-r)\cdot\frac{3}{\frac{9}{2}}=r$得$r=1$,$\therefore\triangle OAB$的内切圆的方程为$(x-\frac{3}{2})^2+y^2=1$

（2004II）4.已知圆 C 与圆 $(x-1)^2+y^2=1$关于直线$y=-x$ 对称，则圆 C 的方程为（ C ）

$A.(x+1)^2+y^2=1$　$B.x^2+y^2=1$　$C.x^2+(y+1)^2=1$　$D.x^2+(y-1)^2=1$

（2015 江苏）10.在平面直角坐标系 xOy 中，以点 $(1,0)$ 为圆心且与直线 $mx-y-2m-1=0(m\in R)$ 相切的所有圆中，半径最大的圆的标准方程为________.

key:$m(x-2)-(y+1)=0$经过定点$(2,-1)$,$\therefore$半径最大的圆方程为$(x-1)^2+y^2=(1-2)^2+1^2=2$

（2015 福建） 13．在$\triangle ABC$ 中，已知点 $A(2,1)$，$B(2,-8)$，且它的内切圆的方程为 $x^2+y^2=4$，求点 C 的坐标.

【答案】易知直线 AB 于圆 O 相切，直线 AC、BC 的斜率存在，

设直线 AC 的方程为 $y-1=k_1(x-2)$，即 $k_1x-y+1-2k_1=0$

由直线 AC 与圆 O 相切，知 $\frac{|0-0+1-2k_1|}{\sqrt{k_1^2+1}}=2$，解得 $k_1=-\frac{3}{4}$。

∴　直线 AC 的方程为 $3x+4y-10=0$ ………………………　8 分

设直线 BC 的方程为 $y+8=k_2(x-2)$，即 $k_2x-y-2k_2-8=0$

由直线 BC 与圆 O 相切，知 $\frac{|0-0-2k_2-8|}{\sqrt{k_2^2+1}}=2$，解得 $k_2=-\frac{15}{8}$

∴　直线 BC 的方程为 $15x+8y+34=0$ …………………　12 分

由 $\begin{cases}3x+4y-10=0\\15x+8y+34=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=-6\\y=7\end{cases}$，∴　点 C 的坐标为 $(-6,7)$ ………………　16 分

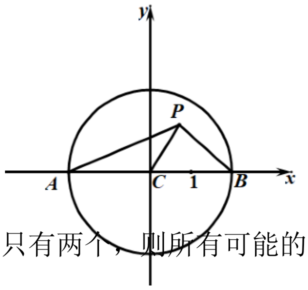
（2018 年福建）已知$\triangle DEF$ 三边所在的直线分别为 $l_1:x=-2,l_2:x+\sqrt{3}y-4=0,l_3:x-\sqrt{3}y-4=0,$

$\odot C$为$\triangle DEF$ 的内切圆.（1）求$\odot C$ 的方程；

解析几何（1）直线与圆解答（4）

2023-09-23

（2）设⊙C 与 x 轴交于 A、B 两点，点 P 在⊙C 内，且满足$|PC|^2=|PA|\cdot|PB|$.记直线 PA、PB 的斜率分别为 k_1、k_2，求k_1k_2 的取值范围.



⑴ 由内角平分线定理得$\odot C$方程为$x^2+y^2=4$

（2）设$P(x,y)(x^2+y^2<4)$，则$x^2+y^2=\sqrt{(x+2)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-2)^2+y^2}$

即$(x^2+y^2)^2=(x^2+y^2+4)^2-16x^2$即$x^2-y^2=2(2\le x^2<3)$

$\therefore k_1k_2=\dfrac{y^2}{x^2-4}=\dfrac{x^2-2}{x^2-4}=1+\dfrac{2}{x^2-4}\in(-1,0]$

（2019 年江苏）已知与三条直线 $x+y=1,x+ay=2,x+2y=3$ 都相切的圆有且只有两个，则所有可能的实数 a 的值的和为__________ .3

key:若三条直线围称一个三角形，则有一个内切圆，三个旁切圆，不合；

则有两条直线平行,$\therefore a=1,or,2,\therefore$ 和为3

（2019 年内蒙古）已知$(a,b),(c,d),(x,y)$是圆心在原点的单位圆上三个点的坐标,则

$(ax+by-c)^2+(bx-ay+d)^2+(cx+dy+a)^2+(dx-cy-b)^2=$______ . 4

key:$\because a^2+b^2=1,c^2+d^2=1,x^2+y^2=1$

$\therefore$ 原式$=a^2x^2+b^2y^2+c^2+2abxy-2acx-2bcy+b^2x^2+a^2y^2+d^2-2abxy+2bdx-2ady$

$+c^2x^2+d^2y^2+a^2+2cdxy+2acx+2ady+d^2x^2+c^2y^2+b^2-2cdxy-2bdx+2bcy=4$

（2019B）在平面直角坐标系中，若以$(r+1,0)$为圆心、r 为半径的圆上存在一点(a,b)满足$b^2\ge 4a$，则 r 的最小值为____________ .4

$key:\begin{cases}(a-r-1)^2+b^2=r^2\\ b^2\ge 4a\end{cases}$ 得$r^2\ge a^2-(2r+2)a+r^2+2r+1+4a$

即$a^2+(2-2r)a+2r+1\le 0,\therefore\Delta=4(1-2r+r^2)-4(2r+1)\ge 0$得$r\ge 4$

（2020B）在平面直角坐标系 xOy中，圆Ω经过点$(0,0),(2,4),(3,3)$,则圆 Ω 上的点到原点的距离的最大值为____________ . $2\sqrt{5}$

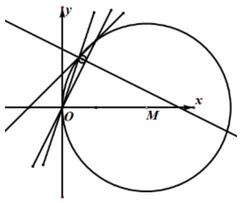
key:设圆Ω：$x^2+y^2+dx+ey=0$,则$\begin{cases}2d+4e+20=0\\ 3d+3e+18=0\end{cases}$得$d=-2,e=-4$

$\therefore\Omega:(x-1)^2+(y-2)^2=5,\therefore$ 最大值为直径$2\sqrt{5}$

变式 1（1）① 已知直线$l_1:x-y+1=0,l_2:y=2x,l_3:y=-3x$.则

l_1,l_2,l_3围成的三角形的外接圆的方程为______；

内切圆的方程为__________.



$key:\begin{cases}x-y+1=0\\ y=2x\end{cases}$得$B(1,2)$;$\begin{cases}y=3x\\ y=x+1\end{cases}$得$A(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$,

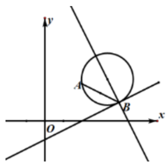
设外接圆方程为$x^2+y^2+dx+ey+f=0$，则$\begin{cases}f=0\\ d+2e+5=0\\ \frac{d}{2}+\frac{3e}{2}+\frac{5}{2}=0\end{cases}$ 得$d=-5,e=0$

$\therefore$外接圆方程为$x^2+y^2-5x=0$

设内心坐标为(a,b)，则$\dfrac{a-b+1}{\sqrt{2}}=\dfrac{3a-b}{\sqrt{10}}=\dfrac{-2a+b}{\sqrt{5}}$得$a=\dfrac{\sqrt{2}+1-\sqrt{10}}{3-\sqrt{5}},b=\dfrac{3+2\sqrt{2}-2\sqrt{5}-\sqrt{10}}{3-\sqrt{5}}$

内切圆半径$r=\dfrac{1+\sqrt{10}-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$,$\therefore$内切圆方程为$(x-\dfrac{\sqrt{2}+1-\sqrt{10}}{3-\sqrt{5}})^2+(y-\dfrac{3+2\sqrt{2}-2\sqrt{5}-\sqrt{10}}{3-\sqrt{5}})^2=(\dfrac{1+\sqrt{10}-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}})^2$

②过点$A(2,3)$,且与直线$l:x-2y-2=0$切于点$B(4,1)$的圆的方程为____.



解析几何（1）直线与圆解答（4）

2023-09-23

$key1:(x-4)^2+(y-1)^2+\lambda(x-2y-2)=0,\therefore 8+\lambda\cdot(-6)=0得\lambda=\dfrac{4}{3}$

$\therefore$圆方程为$:3x^2+3y^2-20x-14y+43=0$

③过直线$l:2x-y+4=0$与圆$C:(x+3)^2+y^2=4$的交点，且过点$(0,2)$的圆程为________.

$key:x^2+y^2+6x+5+\lambda(2x-y+4)=0,\therefore 9+\lambda\cdot 2=0,\therefore$圆方程为：$x^2+y^2-3x+\dfrac{9}{2}y-13=0$

（2004 湖南） 7.已知曲线$C:y=\sqrt{-x^2-2x}$与直线$l:x+y-m=0$有两个交点，则 m 的取值范围是（C　）

A．$(-\sqrt{2}-1,\sqrt{2})$　　B．$(-2,\sqrt{2}-1)$　　C．$[0,\sqrt{2}-1)$　　D．$(0,\sqrt{2}-1)$

（2004 福建）5．曲线$x^2+y^2-ay=0$与$ax^2+bxy+x=0$ 有且只有 3 个不同的公共点,那么必有（　B　）

A．$(a^4+4ab+4)(ab+1)=0$　　B．$(a^4-4ab-4)(ab+1)=0$

C．$(a^4+4ab+4)(ab-1)=0$　　D．$(a^4-4ab-4)(ab-1)=0$

（2009 福建）若点$P(a,b)$是直线$x+y=\dfrac{1}{m}$与圆$x^2+y^2=\dfrac{2}{m}-\dfrac{1}{m^2}$的一个公共点，则$ab$的取值范围是（ ）C

$A.[-\dfrac{1}{4},+\infty)$　$B.[-\dfrac{1}{4},2)$　$C.[-\dfrac{1}{4},\dfrac{4}{9}]$　　$D.[-\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}]$

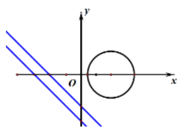
$$key:\begin{cases}a+b=\dfrac{1}{m}\\ a^2+b^2=\dfrac{2}{m}-\dfrac{1}{m^2}\end{cases},\therefore \dfrac{1}{m^2}=(a+b)^2\le 2(a^2+b^2)=\dfrac{4}{m}-\dfrac{2}{m^2}得\dfrac{1}{m}\in(0,\dfrac{4}{3}]$$

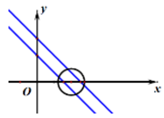
$$\therefore ab=\dfrac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{2}=\dfrac{1}{m^2}-\dfrac{1}{m}=(\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{2})^2-\dfrac{1}{4}\in[-\dfrac{1}{4},\dfrac{4}{9}]$$

（2011 江西）若曲线$C_1:x^2+y^2-2x=0$与曲线$C_2:y(y-mx-m)=0$有四个不同的交点,则实数 m 的取值范围是（ B)A. $(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3})$　B. $(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},0)\cup(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3})$　C. $[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}]$　D. $(-\infty,-\dfrac{\sqrt{3}}{3})\cup(\dfrac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$

（2011江苏）设集合$A=\{(x,y)|\dfrac{m}{2}\le(x-2)^2+y^2\le m^2,x,y\in R\},B=\{(x,y)|2m\le x+y\le 2m+1,,y\in R\}$,

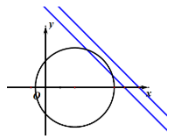
若$A\cap B\ne\Phi$，则实数m的取值范围为________.





$key:$由已知得$A\ne\Phi,B\ne\Phi,\therefore\dfrac{m}{2}\le m^2即m\le 0,or,m\ge\dfrac{1}{2},$

当$m\le 0$时，$A=\{(x,y)|(x-2)^2+y^2\le m^2\},且\dfrac{|2-2m-1|}{\sqrt{2}}=\dfrac{-2m+1}{\sqrt{2}}>-m,\therefore A\cap B=\Phi,$



当$m\ge\dfrac{1}{2}$时，$A=\{(x,y)|\dfrac{m}{2}\le(x-2)^2+y^2\le m^2\}.$

当$2m\le 2+0\le 2m+1$即$\dfrac{1}{2}\le m\le 1$时，$A\cap B\ne\Phi;$

当$m>1$时，$d=\dfrac{|2+0-2m|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}(m-1)\le m$即$m\le 2+\sqrt{2}$. 综上：$m\in[\dfrac{1}{2},2+\sqrt{2}]$

（2012 重庆）(10）设平面点集$A=\{(x,y)|(y-x)(y-\dfrac{1}{x})\ge 0\},B=\{(x,y)|(x-1)^2+(y-1)^2\le 1\}$，则$A\cap B$所表示的平面图形的面积为（D　）A. $\dfrac{3}{4}\pi$　　B. $\dfrac{3}{5}\pi$　　C. $\dfrac{4}{7}\pi$　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

（2015B） 设k为实数，在平面直角坐标系xOy中有两个点集$A=\{(x,y)|x^2+y^2=2(x+y)\}$和

$B=\{(x,y)|kx-y+k+3\ge 0\}$.若$A\cap B$是单元素集，则$k$的值是_______. $-2-\sqrt{3}$

（1991I）14.圆 $x^2+y^2+2x+4y-3=0$上到$x+y+1=0$的距离为$\sqrt{2}$ 的点共有（C　　）

A.1 个　　　　B.2 个　　　C.3 个　　D.4 个

2023-09-23

（2006 湖南）10. 若圆 $x^2+y^2-4x-4y-10=0$ 上至少有三个不同的点到直线 $l:ax+by=0$ 的距离为 $2\sqrt{2}$，则直线 l 的倾斜角的取值范围是 （ B）A. $[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}]$ B. $[\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}]$ C. $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ D. $[0,\frac{\pi}{2}]$

（2008 安徽）若过点 $A(4,0)$ 的直线 l 与曲线 $(x-2)^2+y^2=1$ 有公共点，则直线 l 的斜率的取值范围为（ C ） A．$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$ B．$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ C．$[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}]$ D．$(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$

（2008 湖北）9.过点 $A(11,2)$ 作圆 $x^2+y^2+2x-4y-164=0$ 的弦，其中弦长为整数的共有 （ C）

A. 16 条 B. 17 条 C. 32 条 D. 34 条

（2008 山东）11．已知圆的方程为 $x^2+y^2-6x-8y=0$．设该圆过点 $(3,5)$ 的最长弦和最短弦分别为 AC 和 BD，则四边形 $ABCD$ 的面积为（ B ）A．$10\sqrt{6}$ B．$20\sqrt{6}$ C．$30\sqrt{6}$ D．$40\sqrt{6}$

（2009II）16.已知 AC、BD 为圆 $O:x^2+y^2=4$ 的两条相互垂直的弦，垂足为 $M(1,\sqrt{2})$，则四边形 $ABCD$ 的面积的最大值为__________.5

（2009 湖南 A）已知圆 O 的方程为 $x^2+y^2=5$，其中 O 为坐标原点.

（1）设点 $P(a,b)$ 是圆 O 内一点，点 Q 是直线 $ax+by=1$ 上一动点，试求 $|\overrightarrow{OQ}|$ 的取值范围；

（2）设 $\vec{a}=(1,2)$，直线 l 与圆 O 相交于两点 A、B，若圆 O 上存在一点 C，使得 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\lambda\vec{a}(\lambda>0)$，试求直线 l 的方程.

解：(1) $a^2+b^2<5, \left|\overrightarrow{OQ}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} > \frac{\sqrt{5}}{5}$.

(2) $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\lambda\vec{a}=\lambda(-1,2), \lambda>0, C$点在圆$O$上，且$(-1,2)$在圆$O$上，

$\therefore \lambda=1$，$C(-1,2)$，设$A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), \Rightarrow x_1+x_2=-1$,

又$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}, \left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right| \Rightarrow AB\perp OC$，$k_{AB}=-\frac{1}{k_{OC}}=\frac{1}{2}$,

$\therefore$ 设l的方程为$y=\frac{1}{2}x+b$代入圆的方程得$5x^2+4bx+4b^2-20=0$

$\therefore x_1+x_2=-\frac{4b}{5}=-1, \Rightarrow b=\frac{5}{4}, \therefore l$的方程为$y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$.

（2012 江苏,2018 吉林）12．在平面直角坐标系 xOy 中，圆 C 的方程为 $x^2+y^2-8x+15=0$，若直线 $y=kx-2$ 上至少存在一点，使得以该点为圆心，1 为半径的圆与圆 C 有公共点，则 k 的最大值是____． $\frac{4}{3}$

（2016III）（16）已知直线 $l:mx+y+3m-\sqrt{3}=0$ 与圆 $x^2+y^2=12$ 交于 A，B 两点，过 A，B 分别作 l 的垂线与 x 轴交于 C，D 两点，若 $|AB|=2\sqrt{3}$，则 $|CD|=$________________.4

（2019 年广西）已知点 $P(-2,5)$ 在圆 $C:x^2+y^2-2x-2y+F=0$ 上，直线 $l:3x+4y+8=0$ 与圆 C 相交于 A、B 两点，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$__________．$-32$

（2021 全国II）（多选题）11. 已知直线 $l:ax+by-r^2=0$ 与圆 $C:x^2+y^2=r^2$，点 $A(a,b)$，则下列说法正确的是（ ）ABD

A. 若点 A 在圆 C 上，则直线 l 与圆 C 相切

B. 若点 A 在圆 C 内，则直线 l 与圆 C 相离

C. 若点 A 在圆 C 外，则直线 l 与圆 C 相离

D. 若点 A 在直线 l 上，则直线 l 与圆 C 相切

（2022II）15. 设点 $A(-2,3), B(0,a)$，若直线 AB 关于 $y=a$ 对称的 直线与圆 $(x+3)^2+(y+2)^2=1$ 有公共点，则 a 的取值范围是________． $[\frac{1}{3},\frac{3}{2}]$

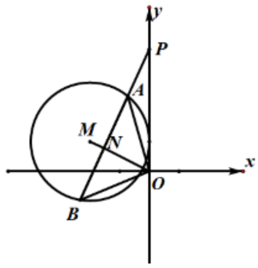
解析几何（1）直线与圆解答（4）

2023-09-23

（2023II）15. 已知直线 $l:x-my+1=0$ 与 $\odot C:(x-1)^2+y^2=4$ 交于 A,B 两点，写出满足“$\triangle ABC$ 面积为 $\frac{8}{5}$”的 m 的一个值______. 2（$\pm2,\pm\frac{1}{2}$ 均可）

变式 1（1）已知圆$M:(x+2)^2+(y-1)^2=4,$过点$P(0,t)$的直线交圆于不同的两点$A,B.$

若$OA=OB$(O为坐标原点).则t的取值范围为________；



key:设AB的中点为N，则M,N,O三点共线，且$AB\perp OM$,

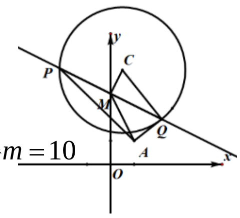
则AB方程为：$y=2x+t,\therefore\frac{|-4-1+t|}{\sqrt{5}}\le 2$得$t\in[5-2\sqrt{5},5+2\sqrt{5}]$

若$\angle AOB=90^\circ$,则直线OA的斜率的取值范围为_______.

$key:\frac{|2k-1|}{\sqrt{1+k^2}}\le 2$得$k\ge-\frac{3}{4},\therefore\frac{1}{-k}\ge-\frac{3}{4},\therefore k\in[-\frac{3}{4},0]\cup[\frac{4}{3},+\infty)$

（2）已知圆$x^2+y^2-x-8y+m=0$与直线$x+2y-6=0$交于P、Q两点,定点$A(1,1)$,若$AP\perp AQ$,

则m的值为_______.



key:圆$C:(x-\frac{1}{2})^2+(y-4)^2=\frac{65}{4}-m>0$

由$\begin{cases}x+2y-6=0\\2(x-\frac{1}{2})-(y-4)=0\end{cases}$得$PQ$的中点$M(0,3),\therefore|MC|^2+|MA|^2=\frac{65}{4}-m=\frac{5}{4}+5=\frac{25}{4}$得$m=10$

（2008 北京） 7．过直线 $y=x$ 上的一点作圆 $(x-5)^2+(y-1)^2=2$ 的两条切线 l_1,l_2，当直线 l_1,l_2 关于 $y=x$ 对称时，它们之间的夹角为（ C ）A． 30° B． 45° C． 60° D． 90°

key:直线$y=x$上的点P与圆心$C(5,1)$连续与直线$y=x$垂直，得$|CP|=\frac{|5-1|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

$\therefore l_1$与l_2的夹角为$2\cdot\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{\pi}{3}$

（2012 天津）（8）设 $m,n\in R$，若直线 $(m+1)x+(n+1)y-2=0$ 与圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 相切，则 $m+n$ 的取值范围是 （D ）

A.$[1-\sqrt{3},1+\sqrt{3}]$ B.$(-\infty,1-\sqrt{3}]\cup[1+\sqrt{3},+\infty)$ C.$[2-2\sqrt{2},2+2\sqrt{2}]$ D.$(-\infty,2-2\sqrt{2}]\cup[2+2\sqrt{2},+\infty)$

（2014 江西）在平面直角坐标系中，A,B 分别是 x 轴和 y 轴上的动点，若以 AB 为直径的圆 C 与直线 $2x+y-4=0$ 相切，则圆 C 面积的最小值为（ ）A. $\frac{4}{5}\pi$ B. $\frac{3}{4}\pi$ C. $(6-2\sqrt{5})\pi$ D. $\frac{5}{4}\pi$

key:设AB的中点为M，则$|OM|=\frac{1}{2}|AB|=d_{M\to l}$

$\therefore M$的轨迹是一O为焦点，直线$2x+y-4=0$为准线的抛物线，且$p=\frac{4}{\sqrt{5}},\therefore$圆$C$的面积的最小值为$\frac{4\pi}{5}$

（2014II）16.设点 $M(x_0,1)$,若在圆$O:x^2+y^2=1$上存在点 N，使得 $\angle OMN=45^\circ$,则x_0 的取值范围是_______.

key:由已知得$|OM|\le\sqrt{2}$即$x_0^2+1\le 2,\therefore x_0\in[-1,1]$

（2015 山东）一条光线从点 $(-2,-3)$ 射出，经 y 轴反射后与圆 $(x+3)^2+(y-2)^2=1$ 相切，则反射光线所在直线的斜率为（ D ）A. $-\frac{5}{3}$ 或 $-\frac{3}{5}$ B. $-\frac{3}{2}$ 或 $-\frac{2}{3}$ C. $-\frac{5}{4}$ 或 $-\frac{4}{5}$ D. $-\frac{4}{3}$ 或 $-\frac{3}{4}$

（2015 重庆）8．已知直线 $l:x+ay-1=0(a\in R)$ 是圆 $C:x^2+y^2-4x-2y+1=0$ 的对称轴.过点 $A(-4,a)$ 作圆 C 的一条切线，切点为 B，则|AB|=（ C ）A． 2 B. $4\sqrt{2}$ C.6 D. $2\sqrt{10}$

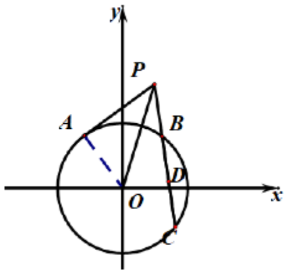
（2021 天津）12. 若斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线与 y 轴交于点 A，与圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 相切于点 B，则 $|AB|=$ ____________. $\sqrt{3}$

（2023 乙）12．已知$\odot O$ 的半径为 1，直线 PA 与$\odot O$ 相切于点 A，直线 PB 与$\odot O$ 交于 B，C 两点，D 为

2023-09-23

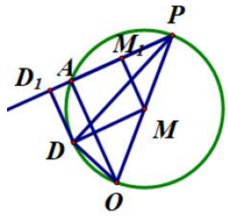
BC 的中点，若 $|PO|=\sqrt{2}$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$ 的最大值为(A)

A. $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ B. $\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}$ C. $1+\sqrt{2}$ D. $2+\sqrt{2}$



$key1:$由$OA\perp PA,OD\perp PD,\therefore D$的轨迹是以$OP$为直径的圆弧

$$\therefore \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}=\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}}{|\overrightarrow{PA}|}\cdot|\overrightarrow{PA}|=\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}}{|\overrightarrow{PA}|}\le\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos45^\circ=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

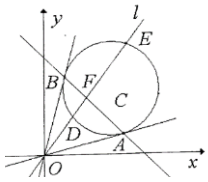


$key2:$设$\angle OPB=\theta\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$，则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}=1\cdot\sqrt{2}\cos\theta\cdot\cos(\frac{\pi}{4}+\theta)$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}[\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos(2\theta+\frac{\pi}{4})]\le\frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

$key3:P,A,O,D$四点共圆，圆的直径为$PO=\sqrt{2},\therefore\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}\le|M_1D_1|+|PM_1|=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}$

（2009福建）已知圆$C:(x-2)^2+(y-2)^2=2,$过原点O作圆C的两条切线OA、OB，切点依次为A、B，过原点O引直线l交圆C于D、E两点，交直线AB于点F.



则直线AB的方程为________；$\dfrac{1}{OD}+\dfrac{1}{OE}-\dfrac{2}{OF}=$________.$x+y-3=0,0$

$key:$圆$C:x^2+y^2-4x-4y+6=0$得切点弦AB方程为$-4\cdot\frac{x}{2}-4\cdot\frac{y}{2}+6=0$即$x+y-3=0$

设$l_{OEF}:y=kx$代入C得$(1+k^2)x^2-4(1+k)x+6=0,\therefore\begin{cases}x_E+x_D=\dfrac{4(1+k)}{1+k^2}\\ x_Ex_D=\dfrac{6}{1+k^2}\end{cases}$

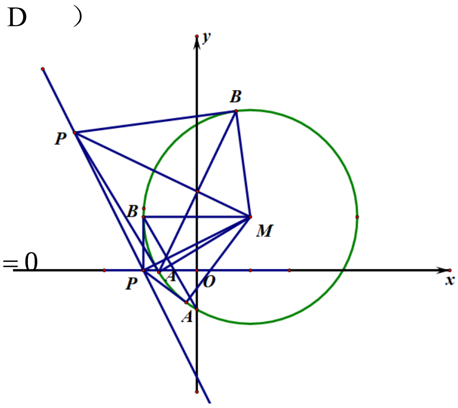
$$由\begin{cases}y=kx\\x+y-3=0\end{cases}得x_F=\frac{3}{1+k},\therefore\frac{1}{OD}+\frac{1}{OE}-\frac{2}{OF}=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}(\frac{1}{x_D}+\frac{1}{x_E}-\frac{2}{x_F})=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}(\frac{\frac{4(1+k)}{1+k^2}}{\frac{6}{1+k^2}}-\frac{2(1+k)}{3})=0$$

（2013 山东）过点$(3,1)$作圆$(x-1)^2+y^2=1$的两条切线，切点分别为A,B，则直线 AB 的方程为（A）

$A.2x+y-3=0$ $B.2x-y-3=0$ $C.4x-y-3=0$ $D.4x+y-3=0$

（2020 全国）已知$\odot M:x^2+y^2-2x-2y-2=0$，直线$l:2x+y+2=0$，$P$ 为 l 上的动点，过点 P 作$\odot M$ 的切线 PA,PB，切点为 A,B，当$|PM|\cdot|AB|$最小时，直线 AB 的方程为（ D ）

A. $2x-y-1=0$ B. $2x+y-1=0$ C. $2x-y+1=0$ D. $2x+y+1=0$



$key:$由已知得$|AB|\cdot|PM|=4S_{\triangle PAM}$最小时，$MP\perp l$,

由$\begin{cases}2x+y+2=0\\x-1-2(y-1)=0\end{cases}$得$P(-1,)$

$\therefore$此时切点弦AB的方程为:$(x^2+y^2-2x-2y-2)-[(x-1)(x+1)+(y-1)y]=0$

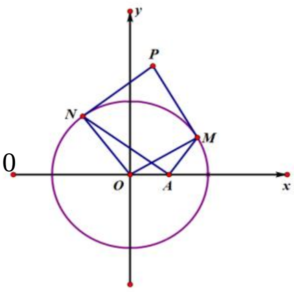
即$2x+y+1=0$

变式 1（1）过点P引圆$O:x^2+y^2=R^2$的切线$PA,PB,$线段AB的中点为M.

若$\angle APB=60^\circ,$则P点的轨迹方程为_____；$x^2+y^2=4R^3$

$key:$由已知得$|OP|=2R,\therefore x^2+y^2=4R^2$

设点$C(\frac{R}{2},0),$若$CA\perp CB$，则P点的轨迹方程为________；



设PA,PB的斜率为$k_1,k_2,$若$\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}=1,$则点$P$的轨迹方程为_____. $y^2-2xy-R^2=0$

2023-09-23

$key:$设$P(x_0,y_0)$,过PA得方程为$:y-y_0=k_1(x-x_0)$即$k_1x-y+y_0-k_1x_0=0$

则$\frac{|y_0-k_1x_0|}{\sqrt{1+k_1^2}}=R$即$(R^2-x_0^2)k_1^2+2x_0y_0k_1+R^2-y_0^2=0$

同理$(R^2-x_0^2)k_2^2+2x_0y_0k_2+R^2-y_0^2=0,$

$\therefore\begin{cases}k_1+k_2=-\frac{2x_0y_0}{R^2-x_0^2}\\ k_1k_2=\frac{R^2-y_0^2}{R^2-x_0^2}\end{cases},\therefore\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=\frac{k_1+k_2}{k_1k_2}=\frac{-2x_0y_0}{R^2-y_0^2}=1,\therefore P$的轨迹方程为$y^2-2xy-R^2=0$

（2）在平面直角坐标系xOy中，过点$P(-5,a)$作圆$x^2+y^2-2ax+2y-1=0$的两条切线，切点分别为$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，且$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}+\frac{x_1+x_2-2}{y_1+y_2}=0$，则实数$a$的值为______.

$key:PC\perp MN,\therefore\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{-1-a}{a+5}=-1,\frac{y_0+1}{x_0-a}=\frac{-1-a}{a+5}(x_0=\frac{x_1+x_2}{2},y_0=\frac{y_1+y_2}{2})$

即$(a+1)(x_0-a)+(a+5)(y_0+1)=0\cdots$①

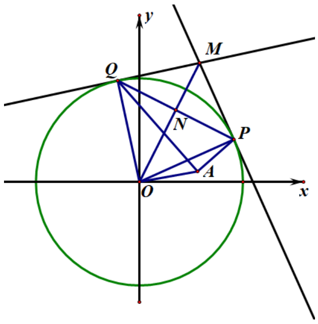
由$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}+\frac{x_1+x_2-2}{y_1+y_2}=0$得$\frac{a+5}{a+1}+\frac{2x_0-2}{2y_0}=0$即$(a+1)(-1)+(a+5)y_0=0\cdots$②

①-②得:$(a+1)(1-a)+(a+5)=0$即$a=-2,or,3$

（3）已知圆$C:x^2+y^2=R^2$内的一点$A(a,b),P,Q$在圆C上,且$\angle PAQ=90°$.

则PQ的中点M的轨迹方程为_______;

圆C在P、Q处的切线的交点M的轨迹方程为________.



$key:(1)OM\perp PQ,|MA|=|MP|,\therefore|OM|^2+|MA|^2=R^2$

$\therefore M$的轨迹方程为$2x^2+2y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0$

设$M(s,t)$，则PQ方程为$sx+ty=R^2$,由$\begin{cases}y=\frac{t}{s}x\\ sx+ty+R^2\end{cases}$得$N(\frac{R^2s}{s^2+t^2},\frac{R^2t}{s^2+t^2})$,

$\therefore|ON|^2+|NA|^2=2(x_N^2+y_N^2)-2ax_N-2by_N+a^2+b^2=\frac{2R^4}{s^2+t^2}-\frac{2aR^2s}{s^2+t^2}-\frac{2bR^2t}{s^2+t^2}+a^2+b^2=R^2$

即$(a^2+b^2-R^2)s^2+(a^2+b^2-R^2)t^2-2aR^2s-2bR^2t+2R^4=0$

$\therefore M$的轨迹方程为$x^2+y^2-\frac{2aR^2}{a^2+b^2-R^2}x-\frac{2bR^2}{a^2+b^2-R^2}+\frac{2R^4}{a^2+b^2-R^2}=0$

(2012福建）三个半径都是2的圆，其圆心分别为$A(1,1),B(3,6),C(7,12)$，直线l斜率为k,且过点(1,1).

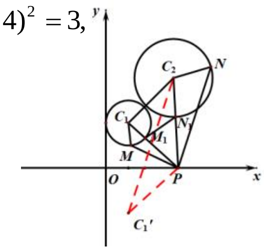
若$\odot A,\odot B,\odot C$位于直线l某一侧的不妨的面积和等于位于直线l另一侧的部分的面积和，则$k=$_. 2

（2013重庆）已知圆$C_1:(x-2)^2+(y-3)^2=1$,圆$C_2:(x-3)^2+(y-4)^2=9,M,N$分别是圆$C_1,C_2$上的动点，$P$为$x$轴上的动点，则$|PM|+|PN|$的最小值为（　　）$A.5\sqrt{2}-4$　$B.\sqrt{17}-1$　$C.6-2\sqrt{2}$　$D.\sqrt{17}$

$key:|PM|+|PN|\ge|PC_2|-3+|PC_1|-1\ge|C_1'C_2|-4=5\sqrt{2}-4$

（2017浙江）已知动点P在x轴上，M,N分别在圆$(x-1)^2+(y-2)^2=1$和圆$(x-3)^2+(y-4)^2=3$,

则$|PM|+|PN|$的最小值为________.$2\sqrt{10}-\sqrt{3}-1$



17浙江$key:|PM|+|PN|\ge|PC_1|-1+|PC_2|-\sqrt{3}$

$\ge|PC_1'|+|PC_2|-\sqrt{3}-1\ge2\sqrt{10}-\sqrt{3}-1$

解析几何（1）直线与圆解答（4）

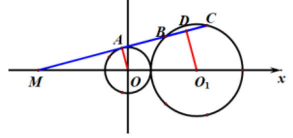
2023-09-23

（2022重庆）已知圆$O_1: x^2+y^2=2, O_2: (x-3)^2+y^2=5$在第一象限的公共点为$A$，过点$A$的直线交圆$O_1, O_2$于$C, D$两点（$C, D$异于点$A$），且$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$，则直线$CD$的斜率为_____. 5

（2015上海竞赛）在平面直角坐标系xOy上，$\odot O: x^2+y^2=1, \odot O_1: (x-3)^2+y^2=4$.过$x$轴的左半轴上一点$M$作$\odot O$的切线，与$\odot O$切于点$A$，与$\odot O_1$分别交于点$B, C$.若$AB=BC$，则点$M$的坐标为______.

15上海key：设$M(m,0)(m<0)$，则

$\therefore d=|O_1D|=\dfrac{3-m}{-m}$，且$3\sqrt{4-d^2}=3\cdot\dfrac{\sqrt{m^2-1}}{-m}$得$m=-4$



（2022I）14. 写出与圆$x^2+y^2=1$和$(x-3)^2+(y-4)^2=16$都相切的一条直线的方程________.

【答案】$y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}$或$y=\dfrac{7}{24}x-\dfrac{25}{24}$或$x=-1$

（2006 江西)）16.已知圆$M: (x+\cos\theta)^2+(y-\sin\theta)^2=1$，直线$l: y=kx$，下面四个命题：
A.对任意实数k与θ，直线l和圆M相切；B.对任意实数k与θ，直线l和圆M有公共点；
C.对任意实数θ，必存在实数k，使得直线l与和圆M相切；D.对任意实数k，必存在实数θ，使得直线l与和圆M相切.其中真命题的代号是_____.（写出所有真命题的代号）
解：圆心坐标为$(-\cos\theta, \sin\theta)$

$d=\dfrac{|-k\cos\theta-\sin\theta|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{\sqrt{1+k^2}\,|\sin(\theta+\varphi)|}{\sqrt{1+k^2}}=|\sin(\theta+\varphi)|\le 1$，故选 B,D

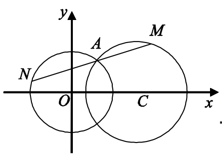
（2007 江西）16．设有一组圆$C_k: (x-k+1)^2+(y-3k)^2=2k^4 (k\in N^*)$．下列四个命题：
A．存在一条定直线与所有的圆均相切 ；B．存在一条定直线与所有的圆均相交
C．存在一条定直线与所有的圆均不相交；D．所有的圆均不经过原点
其中真命题的代号是______________.（写出所有真命题的代号）BD
（2009 江西,2015 湖南）设直线系$M: x\cos\theta+(y-2)\sin\theta=1 (0\le\theta\le 2\pi)$，对于下列四个命题：
①M中所有直线均经过一个定点；②存在定点P不在M中的任一条直线上；
②对于任意整数$n(n\ge 3)$，存在正n边形，其所有边均在M中的直线上；
④M中的直线所能围成的正三角形面积都相等.
其中真命题的代号是________.（写出所有真命题的代号）②③
变式 1（1）已知圆$C_1: x^2+y^2=4$，圆$C_2: x^2+y^2=16$，点$M(1,0)$，动点P、Q分别在圆C_1、C_2上.
则线段PQ长的取值范围为______；若$MP\perp MQ$，则线段PQ长的取值范围为______.

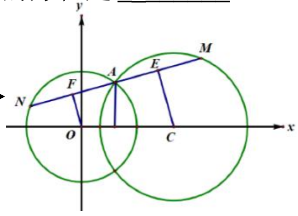
$[2,6];[19-1,\sqrt{19}+1]$，设PQ的中点的坐标为(x,y)，则$\begin{cases} x_P+x_Q=2x \\ y_P+y_Q=2y \\ (x_P-1)(x_Q-1)+y_Py_Q=x_Px_Q+y_Py_Q-2x+1=0, \\ x_P^2+y_P^2=4 \\ x_Q^2+y_Q^2=16 \end{cases}$

$\therefore 4x^2+4y^2=(x_P+x_Q)^2+(y_P+y_Q)^2=20+4x-2$即$x^2+y^2-x-\dfrac{9}{2}=0$

（2）如图，已知点A为圆$O: x^2+y^2=9$与圆$C: (x-5)^2+y^2=16$在第一象限内的交点，过A的直线l被圆O和圆C所截得的弦分别为NA, MA（M, N不重合），若$|NA|=|MA|$，则直线l的方程是_________.

$key:\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ (x-5)^2+y^2=16 \end{cases}$得$A(\dfrac{9}{5},\dfrac{12}{5})$，设$MN: y-\dfrac{12}{5}=k(x-\dfrac{9}{5})$，则



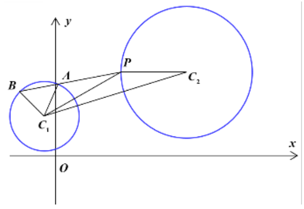


$9-(\dfrac{-\frac{9}{5}k+\frac{12}{5}}{\sqrt{1+k^2}})^2=16-(\dfrac{\frac{16}{5}k+\frac{12}{5}}{\sqrt{1+k^2}})^2$得$k=\dfrac{24}{7}$，$\therefore MN$方程为$120x-35y-132=0$

解析几何（1）直线与圆解答（4）

2023-09-23

（3）已知圆$C_1:(x+1)^2+(y-6)^2=25$,圆$C_2:(x-17)^2+(y-30)^2=r^2$,若圆$C_2$上存在一点$P$，使得过点$P$可作一条射线与圆$C_1$依次交于$A$、$B$，且$PA=2AB$，则半径$r$的取值范围为______.



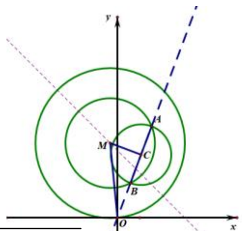
$key1:|C_1P|\le|C_1A|+|AP|\le 25(\because|AB|\le 10)$

$\because|C_1C_2|=30,\therefore\begin{cases}r=|C_2P|\le|C_1P|+|C_1C_2|\le 55\\ r=|C_2P|\ge|C_1C_2|-|C_1P|\ge 5\end{cases}$

$key2:r=|C_2P|\le|C_1C_2|+|C_1A|+|AP|\le 55$

$r+|AP|+5\ge 30$即$|AP|\ge 25-r$有解,$\therefore 20\ge 25-r$

（4）在平面直角坐标系xOy中，已知圆$M:(x-a)^2+(y+a-3)^2=4(a\in R)$．过原点的动直线$l$与圆$M$交于$A,B$两点．若以线段$AB$为直径的圆，与以$M$为圆心，$MO$为半径的圆始终无公共点，则实数$a$的取值范围是______.



$key:$设$l:y=kx$，则$|MC|=\dfrac{|ka-3+a|}{\sqrt{1+k^2}}<|MO|-|\sqrt{4-|MC|^2}$

而$|MC|+\sqrt{4-|MC|^2}\le 2\sqrt{\dfrac{MC^2+4-MC^2}{2}}=2\sqrt{2}<|MO|=\sqrt{a^2+(3-a)^2}$

得$a\in(-\infty,\dfrac{3-\sqrt{7}}{2})\cup(\dfrac{3+\sqrt{7}}{2},+\infty)$

（2005吉林）若$x^2+y^2=169$，则函数$f(x,y)=\sqrt{24y-10x+338}+\sqrt{24y+10x+338}$的最大值是（　）

$A.10\sqrt{26}$　　$B.13\sqrt{2}$　　$C.5\sqrt{26}$　　$D.26\sqrt{2}$

（2005吉林)$key:f(x,y)=\sqrt{(x-5)^2+(y+12)^2}+\sqrt{(x+5)^2+(y+12)^2}$

$=|PA|+|PB|$(其中$P(x,y)$,且$x^2+y^2=169,A(5,-12),B(-5,-12)$,且$\angle APB=\arctan\dfrac{5}{12}$)

由$100=|PA|^2+|PB|^2-2|PA|\cdot|PB|\cdot\dfrac{12}{13}=(|PA|+|PB|)^2-\dfrac{50}{13}|PA|\cdot|PB|$

$=(|PA|+|PB|)^2-20S_{\triangle ABP}$,得$|PA|+|PB|=\sqrt{100+20S_{\triangle ABP}}\le 10\sqrt{26}$

（2010 安徽）1.函数$f(x)=2x-\sqrt{4x-x^2}$的值域是______$[4-2\sqrt{5},8]$__________.

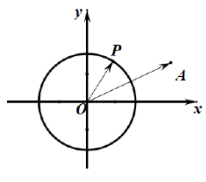
$key:f(x)=(2,-1)\cdot(x,\sqrt{4-(x-2)^2}$

（2011 四川）函数$f(x)=\sqrt{x-5}+\sqrt{24-3x}$的最大值为（　C　）

A.$\sqrt{3}$　　B.3　　C.$2\sqrt{3}$　　D.$3\sqrt{3}$

$key:f(x)=(1,\sqrt{3})\cdot(\sqrt{x-5},\sqrt{8-x})$

（2014 安徽）2. 函数$y=3\sqrt{x-1}+\sqrt{8-2x}$的最大值是__________.



$key:y=(3,\sqrt{2})\cdot(\sqrt{x-1},\sqrt{4-x})=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}\le\sqrt{3}\cdot\sqrt{11}=\sqrt{33}$

（2015 年天津）方程$|y|=1+\sqrt{2x-x^2}$表示的曲线为（　B　）

A．一个圆　　B．两个半圆　　C．一个椭圆　　D．以上结论均不对

（2009江西）若不等式$\sqrt{9-x^2}\le k(x+2)-\sqrt{2}$的解集为区间$[a,b]$,且$b-a=2$,则$k=$_____.

$key:$当$k>0$时，$a=-3,b=-1,\therefore k=\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{2}}{-1+2}=3\sqrt{2}$;当$k<0$时，如图，不合

（2013重庆）函数$y=\dfrac{1-\sin x}{\sqrt{3-2\cos x-2\sin x}}(0\le x\le 2\pi)$的值域为________

$key1:y=\dfrac{(\cos x-1,\sin x-1)\cdot(0,-1)}{\sqrt{(\cos x-1)^2+(\sin x-1)^2}\cdot 1}\in[0,1]$，

2023-09-23

$$key2: y=\begin{cases}0, x=\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{1}{\sqrt{(\dfrac{1-\cos x}{1-\sin x})^2+1}}\in(0,1], x\in[0,\dfrac{\pi}{2})\cup(\dfrac{\pi}{2},2\pi]\end{cases}$$

（2015 安徽）设 a 为实数，且关于 x 的方程 $(a+\cos x)(a-\sin x)=1$ 有实根，则 a 的取值范围是________________.

key: 令 $\begin{cases}u=a+\cos x\\ v=a-\sin x\end{cases}$，则 $\begin{cases}uv=1\\ (u-a)^2+(v-a)^2=1\end{cases}$，$\therefore a\in[1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}]\cup[-1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}]$

变式 2（1）已知$x\in[0,\pi]$，则函数$y=\dfrac{2\sin x}{\cos x-2}$的值域为__________.

$key: \dfrac{1}{2}y=\dfrac{\sin x}{\cos x-2}=k\in[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},0],\therefore$ 值域为$[-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},0]$

（2）当实数θ,m变化时，$\dfrac{|\cos\theta-m\sin\theta-3-4m|}{\sqrt{1+m^2}}$的最大值是（　）$A.3$　$B.4$　$C.5$　$D.6$

$key: \dfrac{|x-my|}{\sqrt{1+m^2}}\le 5+1=6(x=\cos\theta-3, y=\sin\theta+4$即$(x+3)^2+(y-4)^2=1)$

（3）已知函数$f(\alpha)=2\sqrt{(\cos\alpha+\dfrac{1}{2})^2+\sin^2\alpha}-\sqrt{\cos^2\alpha+(\sin\alpha-\dfrac{1}{2})^2}$，若集合$\{\alpha\in R\,|\,f(\alpha)\ge m\}\ne\Phi$，则实数$m$的取值范围为__________.

key:由已知得：$m\le f(\alpha)_{\max}, f(\alpha)=2|\overrightarrow{PA}|-|\overrightarrow{PB}|$

$=|\overrightarrow{PC}|-|\overrightarrow{PB}|\ge|CB|=\dfrac{\sqrt{17}}{2}$（其中$P(\cos\alpha,\sin\alpha), A(-\dfrac{1}{2},0), B(0,\dfrac{1}{2})$）

(1999全国）给定正整数n和正数M，对于满足条件$a_1^2+a_{n+1}^2\le M$的所有等差数列$a_1,a_2,a_3,\cdots$，则$S=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n+1}$的最大值为_______.

$1999Akey: S=\dfrac{(n+1)(a_{n+1}+a_{2n+1})}{2}=\dfrac{n+1}{2}(3a_{n+1}-a_1)(\because a_1+a_{2n+1}=2a_{n+1})$

$\le\dfrac{n+1}{2}\sqrt{(3^2+(-1)^2)(a_{n+1}^2+a_1^2)}\le\dfrac{(n+1)\sqrt{10M}}{2}$

（2004 福建）9 如果实数 x,y 满足 $3x-y\ge 1$，那么$u=x^2+y^2+6x-2y$ 的最小值是__________.

$key: u=(x+3)^2+(y-1)^2-10\ge(\dfrac{-9-1-1}{\sqrt{10}})^2-10=\dfrac{21}{10}$

（2005 吉林）代数式$a\sqrt{2-b^2}+b\sqrt{2-a^2}$的最大值为________.2

key: 令$a=\sqrt{2}\cos\alpha, b=\sqrt{2}\cos\beta, \alpha,\beta\in[0,\pi]$，则

$a\sqrt{2-b^2}+b\sqrt{2-a^2}=2\cos\alpha\sin\beta+2\cos\beta\sin\alpha=2\sin(\alpha+\beta)\le 2$

（2006 浙江）设a,b是非零实数，$x\in R$，若$\dfrac{\sin^4 x}{a^2}+\dfrac{\cos^4 x}{b^2}=\dfrac{1}{a^2+b^2}$，则$\dfrac{\sin^{2008}x}{a^{2006}}+\dfrac{\cos^{2008}x}{b^{2006}}=$_______.

$key: \dfrac{a^2+b^2}{a^2}\sin^4 x+\dfrac{a^2}{a^2+b^2}\ge 2\sin^2 x, \dfrac{a^2+b^2}{b^2}\cos^4 x+\dfrac{b^2}{a^2+b^2}\ge 2\cos^2 x$

$\therefore\dfrac{a^2+b^2}{a^2}\sin^4 x+\dfrac{a^2}{a^2+b^2}+\dfrac{a^2+b^2}{b^2}\cos^4 x+\dfrac{b^2}{a^2+b^2}\ge 2$得$\dfrac{1}{a^2}\sin^4 x+\dfrac{1}{b^2}\cos^4 x\ge\dfrac{1}{a^2+b^2}$,

$\therefore\sin^2 x=\dfrac{a^2}{a^2+b^2},\cos^2 x=\dfrac{b^2}{a^2+b^2}$

$\therefore\dfrac{\sin^{2008}x}{a^{2006}}+\dfrac{\cos^{2008}x}{b^{2006}}=\dfrac{a^{2008}}{a^{2006}(a^2+b^2)^{1004}}+\dfrac{b^{2008}}{b^{2006}(a^2+b^2)^{1004}}=\dfrac{1}{(a^2+b^2)^{1003}}$

（柯西，三角换元）

解析几何（1）直线与圆解答（4）

2023-09-23

（2006 江西） x,y 为实数，满足 $x^2+y^2\le 1$，则 $|x^2+2xy-y^2|$ 的最大值为________．$\sqrt{2}$

（2012湖北）已知正实数a,b满足$a^2+b^2=1$，且$a^3+b^3+1=m(a+b+1)^3$，则m的最小值为__________.

2012湖北key：设$a=\cos\theta, b=\sin\theta, \theta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，则$m=\dfrac{\cos^3\theta+\sin^3\theta+1}{(\cos\theta+\sin\theta+1)^3}$

$=\dfrac{(\cos\theta+\sin\theta)(1-\cos\theta\sin\theta)+1}{(\cos\theta+\sin\theta+1)^3}$（令$t=\cos\theta+\sin\theta+1=\sqrt{2}\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})+1\in(2,\sqrt{2}+1]$，则$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{t^2-2t}{2}$）

$=\dfrac{(t-1)(1-\dfrac{t^2-2t}{2})+1}{t^3}=\dfrac{1}{2}(-t+3)\ge\dfrac{3\sqrt{2}-4}{2}$

变式 3.已知$x+y\le 1(x\ge 0, y\ge 0)$，则$4x^2+4y^2+(1-x-y)^2\in$_________.

2.key：令$x=r\cos^2\theta, y=r\sin^2\theta, r\in[0,1]$

$\therefore 4x^2+4y^2+(1-x-y)^2=4r^2(\cos^4\theta+\sin^4\theta)+(1-r)^2=4r^2(1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2\theta)+1-2r+r^2\le 5r^2-2r+1\le 4$

$4x^2+4y^2+(1-x-y)^2=4r^2(1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2\theta)+1-2r+r^2\ge 3r^2-2r+1\ge\dfrac{2}{3}$