解析几何（4）抛物线解答（1）

2023-12-16

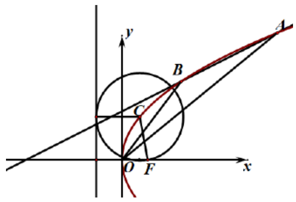
一、定义及应用

（2005 山东）已知动圆过定点$(\frac{p}{2},0)$,且与直线$x=-\frac{p}{2}$相切,其中$p>0$.（I）求动圆圆心 C 的轨迹的方程;（II）设 A,B 是轨迹 C 上异于原点 O 的两个不同点，直线 OA 和 OB 的倾斜角分别为α 和β，当α,β变化且$\alpha+\beta$为定值$\theta(0<\theta<\pi)$时，证明直线 AB 恒过定点，并求出该定点的坐标.

⑴ 解：由已知得C的轨迹是以定点$F(\frac{p}{2},0)$为焦点，直线$x=-\frac{p}{2}$为准线的抛物线

其方程为$y^2=2px$

(2) 证明：设$A(2pa^2,2pa),B(2pb^2,2pb)$，则$\tan\alpha=\frac{1}{a},\tan\beta=\frac{1}{b}$,且$a>0,b>0$,且$\alpha+\beta=\theta$



$\therefore \tan\theta=\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{1-\frac{1}{ab}}=\dfrac{a+b}{ab-1}$,即$a+b=(ab-1)\tan\theta$

而$l_{AB}:y-2pa=\dfrac{2pb-2pa}{2pb^2-2pa^2}(x-2pa^2)$即$(a+b)y-2pab=x$

即$(ab-1)\tan\theta\cdot y-2pab=ab(y\tan\theta-2p)-y\tan\theta=x$过定点$(-2p,\frac{2p}{\tan\theta})$, 证毕

(2006江苏）已知两点$M(-2,0)$、$N(2,0)$,点P为坐标平面内的动点，满足$|\overrightarrow{MN}|\cdot|\overrightarrow{MP}|+\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{NP}=0$,

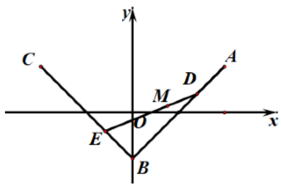
则动点$P(x,y)$的轨迹方程为（　）$A.y^2=8x$ $B.y^2=-8x$　$C.y^2=4x$　$D.y^2=-4x$

2006江苏key:$|\overrightarrow{MN}|\cdot|\overrightarrow{MP}|+\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{NP}=|\overrightarrow{MN}|\cdot|\overrightarrow{MP}|+|\overrightarrow{MN}|\cdot|\overrightarrow{NP}|\cos<\overrightarrow{MN},\overrightarrow{NP}>=0$

$\Leftrightarrow|\overrightarrow{PM}|=|PN|\cos\angle PNM=P$到直线$x=2$的距离,$\therefore P$的轨迹方程为$y^2=-8x$,选$B$

(2006陕西）如图，三定点$A(2,1),B(0,-1),C(-2,1)$,三动点D,E,M满足$\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BE}=t\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DM}=t\overrightarrow{DE}$,

$t\in[0,1]$.⑴ 求动直线DE斜率的变化范围；（2）求动点M的轨迹方程.



2006陕西解：由$\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{AB}=t(-2,-2)$得$D(2-2t,1-2t)$,

$\overrightarrow{BE}=t\overrightarrow{BC}=t(-2,2)$得$E(-2t,-1+2t)$

$\overrightarrow{DM}=t\overrightarrow{DE}=t(-2,-2+4t)$得$M(2-4t,1-4t+4t^2)$

⑴ $k_{DE}=\dfrac{2(1-2t)}{2}=1-2t\in[-1,1]$

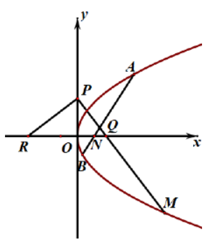
(2) 设$M(x,y)$，则$\begin{cases}x=2-4t\\y=1-4t+4t^2\end{cases}$消去$t$得$x^2=4y(x\in[-2,2])$即为所求的

(2008江苏）与圆$x^2+y^2-4x=0$外切，且与y轴相切的动圆圆心的轨迹方程为____.

2008江苏key:$y^2=8x(x>0)$及$y=0(x<0)$

（2013 广东）已知$R(-3,0)$，点 P 在 y 轴上，点 Q 在 x 轴的正半轴上，点 M 在直线 PQ 上，且满足

$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{PM}=0$，$2\overrightarrow{PM}+3\overrightarrow{MQ}=\vec{0}$.（1）当点 P 在 y 轴上移动时，求点 M 的轨迹 C 的方程;（2）设 A,B 为轨迹 C 上两点，$N(1,0),x_A>1,y_A>0$，若存在实数λ，使$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AN}$，且$|AB|=\frac{16}{3}$，求$\lambda$的值.



(2013广东）解：（1）设$P(0,t),M(x,y),\because\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{PM}=0$,且$2\overrightarrow{PM}+3\overrightarrow{MQ}=\vec{0}$,

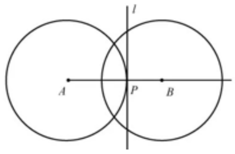
$\therefore\frac{t}{3}\cdot\frac{y-t}{x}=-1$,且$\begin{cases}2x+3(x_Q-x)=0\\2(y-t)+3(-y)=0\end{cases}$即$t=-\frac{1}{2}y$,

$\therefore-\frac{1}{2}y\cdot\frac{3}{2}y=-3x$即$y^2=4x(x>0)$,

(2) 由（1）得N是焦点，设$\angle ANx=\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$,则$|AN|=\dfrac{2}{1-\cos\theta},|NB|=\dfrac{2}{1+\cos\theta}$

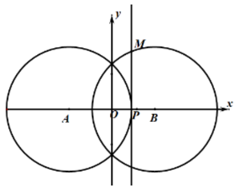
$\therefore |AB|=\dfrac{4}{\sin^2\theta}=\dfrac{16}{3}$即$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$即$\theta=\dfrac{\pi}{3}$, $\therefore \lambda=\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AN}|}=\dfrac{\frac{16}{3}}{4}=\dfrac{4}{3}$

(1811学考）如图，在同一平面内，A,B为两个不同的定点，圆A和圆B的半径都为r，射线AB交圆A于点P，过P作圆A的切线.当$r(r\geq \dfrac{1}{2}|AB|)$变化时, l与圆B的公共点的轨迹是（　）



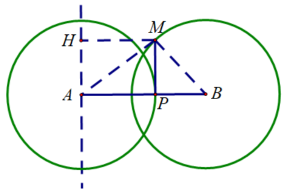
A.圆 B.椭圆 C.双曲线的一支 D.抛物线

1811学考$key1$:由$r\geq \dfrac{1}{2}|AB|$得圆A与圆B外切或相交，



设l与圆B交于点M，$A(-a,0),B(a,0),M(x,y)$

则$||MA|^2=r^2+|MP|^2=2r^2-|BP|^2=2|MB|^2-|BP|^2$

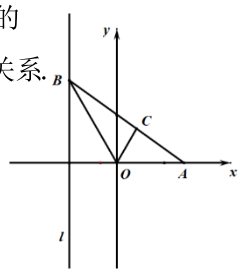


即$(x+a)^2+y^2=2((x-a)^2+y^2)-(a-x)^2$即$y^2=4ax$

$key2$:过A作AB的垂线AH，过l与圆B的交点M作AH的垂线垂足为H，

则$|MH|=|AP|=r=|MB|$, $\therefore M$的轨迹是抛物线

(1999Ⅰ）如图，给出定点$A(a,0)(a>0)$和直线$l:x=-1$，B是直线l上的动点，$\angle BOA$的角平分线交AB于点C，求点C的轨迹方程，并讨论方程表示的曲线的类型与a值的关系.



(1999全国）解：设$B(-1,t)(t\in R),C(x,y)(0\leq x<a)$,则$l_{AB}:\dfrac{x-a}{-1-a}=\dfrac{y}{t}$即$t=\dfrac{(a+1)y}{a-x}$

$key1:\dfrac{k_{OB}-k_{OC}}{1+k_{OB}k_{OC}}=k_{OC}$; $key2:\dfrac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}+\dfrac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}=(\dfrac{\sqrt{t^2+1}-1}{\sqrt{t^2+1}},\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}})//\overrightarrow{OC}$

$key3:\because l_{OC}:\dfrac{y+tx}{\sqrt{t^2+1}}=y, \therefore \dfrac{tx}{y}=\sqrt{t^2+1}-1=\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}+1}, \therefore \sqrt{t^2+1}+1=\dfrac{ty}{x}$

$\therefore 2=\dfrac{ty}{x}-\dfrac{tx}{y}=\dfrac{y^2-x^2}{xy}t=\dfrac{(a+1)(y^2-x^2)}{ax-x^2}$即$(1+a)y(x^2-y^2)=-2xy(a-x)$

解二:设$C(x,y),\angle COA=\theta$,则$B(-1,-\tan 2\theta)$,

则$l_{OC}:y=x\tan\theta, l_{AB}:\dfrac{x-a}{-1-a}=\dfrac{y}{-\tan 2\theta}$

$\therefore \dfrac{(a+1)y}{x-a}=\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{\frac{2y}{x}}{1-\frac{y^2}{x^2}}==\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$即$(1+a)(x^2-y^2)=2x^2-2ax$

$\therefore (a-1)x^2-(1+a)y^2+2ax=0$即为点$C$的轨迹方程

当$a>1$时，方程表示的曲线类型是双曲线；

当$a=1$时，方程表示的曲线类型是抛物线；

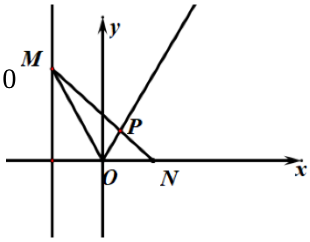
当$0<a<1$时，方程表示的曲线类型时椭圆.

（2018 年湖北）已知 O 为坐标原点，$N(1,0)$，点 M 为直线 $x=-1$ 上的动点，$\angle MON$ 的平分线与直线 MN 交于点 P，记点 P 的轨迹为曲线 E.（1）求曲线 E 的方程；

（2）过点 $Q(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2})$ 作斜率为 k 的直线 l，若直线 l 与曲线 E 恰好有一个公共点，求 k 的取值范围.

2023-12-16

解：（1）$y^2 = x(0 \le x < 1)$

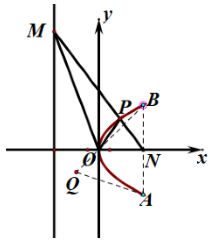


（2）由已知得l的方程为$y+\frac{1}{2}=k(x+\frac{1}{2})$代入$y^2=x$得：$ky^2-y+\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}=0$

$\therefore k=0$, 或$\begin{cases} k \ne 0 \\ \Delta = 1-2k(k-1)=0 \end{cases}$ 即$k=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$,

当$k=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$时，切点纵坐标为$y=\frac{1}{1+\sqrt{3}} \in (-1,1)$;

当$k=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$时，切点纵坐标$y=\frac{1}{1-\sqrt{3}} \notin (-1,1)$,

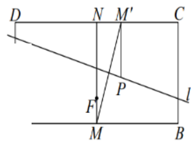


而$k_{QA}=\dfrac{-1+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=-\frac{1}{3}, k_{QB}=\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=1$, 其中$A(1,-1), B(1,1)$

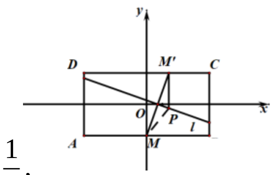
$\therefore k$的取值范围为$(-\frac{1}{3},1] \cup \{\frac{1+\sqrt{3}}{2}\}$

（2022四川）如图所示，$ABCD$是一个矩形，$AB=8, BC=4, M, N$分别是AB, CD的中点，以某动直线l为折痕将矩形在其下方的部分翻折，使得每次翻折后点M都落在边CD上，记为M'，过M'作$M'P$垂直于CD交直线l于点P，设点P的轨迹是曲线E.⑴ 建立恰当的直角坐标系，求曲线E的方程；

（2）F是MN上一点，$\overrightarrow{FN}=-3\overrightarrow{FM}$，过点$F$的直线交曲线$E$于$S, T$两点，且$\overrightarrow{SF}=\lambda\overrightarrow{FT}$, 求实数$\lambda$的取值范围.



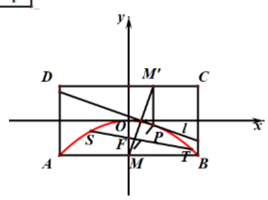
2022四川解：（1）以矩形$ABCD$的中心O为坐标原点，直线MN为y轴，建立平面直角坐标系如图，连接PM，由已知得$|PM|=|PM'|$



$\therefore P$的轨迹曲线E的方程为$x^2=-8y(-4 \le x \le 4)$

（2）由已知得$F(0,-1)$, 设$S(4s,-2s^2), T(4t,-2t^2)(s,t \in [-1,1])$

由$\overrightarrow{SF}=\lambda\overrightarrow{FT}$得$S, F, T$三点共线得$\frac{-2s^2+2t^2}{4s-4t}=-\frac{s+t}{2}=\frac{-2s^2+1}{4s}$即$st=-\frac{1}{2}$,



$\therefore t=-\frac{1}{2s} \in [-1,1]$得$-\frac{1}{2} \le s < 0$

由$\overrightarrow{SF}=\lambda\overrightarrow{FT}$得$\lambda=\frac{-4s}{4t}=2s^2 \in (0,\frac{1}{2}]$