2023-24（下）模拟（6）

2024-02-17

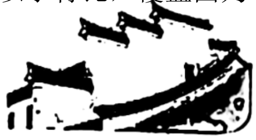
一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分,共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

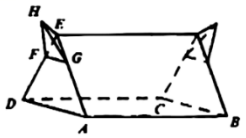
1. 设 i 为虚数单位，若复数 z 满足 $z=\dfrac{-3-3i}{1-i}$，则 $\overline{z}$ 的虚部为（　　）A. $-3i$　B. -3　C. $3i$　D. 3

2. 已知向量 $\vec{a}=(-2,3)$，$\vec{b}=(\lambda,2)$，若 $\vec{a}//\vec{b}$，则 $\lambda=$（　　）A. $-\dfrac{4}{3}$　B. -1　C. $\dfrac{4}{3}$　D. 3

3. 已知函数 $f(x)=3\sin(\omega x-\dfrac{\pi}{6})(0<\omega<6)$，若 $f(\dfrac{\pi}{3})=3$，则 $f(-\dfrac{\pi}{3})=$（　）A. 3　B. $\dfrac{3}{2}$　C. $-\dfrac{3}{2}$　D. -3

4. 图①中的“马头墙”是我国江南传统民居建筑的重要特色之一，它的顶部称之为垛．每只垛的结构如图②，可近似看成由一个正三棱柱和两个完全相同的正四面体构成的几何体．已知 $AD=1$，$AB=4$，$\overrightarrow{FG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DA}$，现计划覆以小青瓦，覆盖面为“前”“后”两面，“前面”如图③阴影部分，则小青瓦所要覆盖的面积为（　　）


图①



图②

图③

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{9}+8$　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}+8$　C. $\dfrac{11\sqrt{3}}{18}+12$　D. $\dfrac{2}{9}\sqrt{3}+12$

5. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，且 $f(x+y)f(x)f(y)=f(x+y)-f(x)-f(y)$，$f(1)=\sqrt{3}$，则 $\sum\limits_{k=1}^{2024}f(k)=$（　）

A. 2024　B. $1012\sqrt{3}$　C. $\sqrt{3}$　D. 0

6. 已知四边形 $ABCD$ 的四个顶点在抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上，则“A，B，C，D 四点共圆”是“直线 AC 与 BD 倾斜角互补”的（　）A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件　C. 充要条件　D. 既不充分也不必要条件

7. 已知函数 $f(x)=x^3-x^2\cdot\sin(\pi x)+\dfrac{x}{4}$ 的零点分别为 $x_1,x_2,\cdots,x_n(n\in N^*)$，则 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=$（　　）

A. $\dfrac{1}{2}$　B. $\dfrac{1}{4}$　C. 0　D. 2

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=0$，$a_2=a_3=1$，令 $b_n=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}(n\in N^*)$．若数列 $\{b_n\}$ 是公比为 2 的等比数列，则 $a_{2024}=$（　　）A. $\dfrac{2^{2024}-4}{7}$　B. $\dfrac{2^{2024}+3}{7}$　C. $\dfrac{2^{2024}+4}{7}$　D. $\dfrac{2^{2024}+6}{7}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 某电商平台为了对某一产品进行合理定价，采用不同的单价在平台试销，得到的数据如下表所示：

单价 x/元	8	8.5	9	9.5	10
销量 y/万件	89	85	80	78	68

根据以上数据得到 y 与 x 具有较强的线性关系，若用最小二乘估计得到经验回归方程为 $y=-19.8x+a$，则（　　）A. 相关系数 $r>0$　B. 点 $(9,80)$ 一定在经验回归直线上

C. $\hat{a}=258.2$　D. $x=9.5$ 时，对应销量的残差为 -7.9

10. 已知 M 为直线 $x-y+5=0$ 上的一点，动点 N 与两个定点 $O(0,0)$，$A(3,0)$ 的距离之比为 2，则（　　）

A. 动点 N 的轨迹方程为 $(x-4)^2+y^2=4$　B. $|MN|\geq 2+\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$

C. $|MN|+\dfrac{1}{2}|NO|$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$　D. $\angle AON$ 的最大角为 $\dfrac{\pi}{6}$

11. 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$, $\angle BAC=90°$, $AB=AC=AA_1=1$, $\overrightarrow{AE}=m\overrightarrow{AB}(m>0)$, $\overrightarrow{AF}=n\overrightarrow{AC}(n>0)$,

$\overrightarrow{AG}=t\overrightarrow{AA_1}(t>0)$，平面 EFG 与直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 相交形成的截面为 Ω，则（　　）

A. 存在正实数 m,n,t ,使得截面 Ω 为等边三角形 B. 存在正实数 m,n,t，使得截面 Ω 为平行四边形

C. 当 $\frac{1}{m}+\frac{1}{t}=1$, $n\in(0,1)$ 时，截面 Ω 为五边形　　D. 当 $m>1$, $0<n<1$, $0<t<1$ 时，截面 Ω 为梯形

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 在 $(3x+\frac{1}{\sqrt[3]{x}})^8$ 的展开式中，常数项为______.（用数字作答）

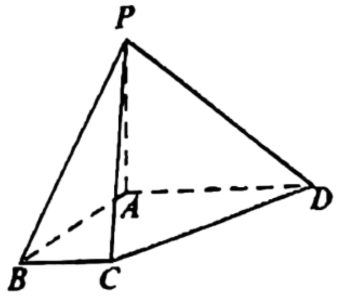
13. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且 $a=b\cos C+\frac{\sqrt{3}}{3}c\sin B$，则 $B=$__________；若 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$, $a+c=5$，则 $b=$__________.

14. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左顶点为 A，右焦点为 F，P 为双曲线右支上的点，若双曲线的离心率为 2，且 $\angle PAF=15°$，则 $\angle PFA=$_______.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AD//BC$，$AD=AB=2BC=4$，$\angle PAB=\angle PCB=90°$，$\angle BAD=120°$.

（1）求证：$PA\perp CD$；（2）若四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 12，求平面 PBC 与平面 PCD 的夹角的余弦值.



16. 已知 A，B 分别为椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右顶点，点 $P(2,\dfrac{\sqrt{5}}{3})$，$Q(-1,-\dfrac{2\sqrt{2}}{3})$ 在椭圆 E 上．

（1）求椭圆 E 的方程；（2）过点 $M(2,0)$ 且斜率不为零的直线 l 与椭圆 E 交于 C，D 两点，若直线 AC 与 BD 相交于点 P，求证：点 P 在定直线上．

17. 某城市的青少年网络协会为了调查该城市中学生的手机成瘾情况，对该城市中学生中随机抽出的 200 名学生进行调查，调查中使用了两个问题．问题 1：你的学号是不是奇数？问题 2：你是否沉迷手机？

调查者设计了一个随机化装置，这是一个装有大小、形状和质量完全一样的 50 个白球和 50 个红球的袋子，每个被调查者随机从袋中摸取一个球（摸出的球再放回袋中），摸到白球的学生如实回答第一个问题，摸到红球的学生如实回答第二个问题，回答“是”的人往一个盒子中放一个小石子，回答“否”的人什么都不要做．由于问题的答案只有“是”和“否”，而且回答的是哪个问题也是别人不知道的，因此被调查者可以毫无顾虑地给出符合实际情况的答案．（1）如果在 200 名学生中,共有 80 名回答了“是”,请你估计该城市沉迷手机的中学生所占的百分比．

（2）某学生进入高中后沉迷手机，学习成绩一落千丈，经过班主任老师和家长的劝说后，该学生开始不玩手机．已知该学生第一天没有玩手机，若该学生前一天没有玩手机，后面一天继续不玩手机的概率是 0.8；若该学生前一天玩手机，后面一天继续玩手机的概率是 0.5．

（i）求该学生第三天不玩手机　概率 P；（ii）设该学生第 n 天不玩手机的概率为 P_n，求 P_n．

18. 已知函数 $f(x)=ax+\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$， $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$．（1）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处的切线方程；

（2）若 $f(x)-\sin x<0$，求 a 的取值范围．

19.已知项数为 $k(k\in N^{*},\ k\geq 3)$ 的有穷数列 $\{a_n\}$ 满足如下两个性质，则称数列 $\{a_n\}$ 具有性质 P：

①$1\leq a_1<a_2<a_3<\cdots<a_k$；②对任意的 $i,\ j(1\leq i\leq j\leq k)$，$\dfrac{a_j}{a_i}$ 与 a_ja_i 至少有一个是数列 $\{a_n\}$ 中的项．

（Ⅰ）分别判断数列 $1, 2, 4, 16$ 和 $2, 4, 8, 16$ 是否具有性质 P，并说明理由；

（Ⅱ）若数列 $\{a_n\}$ 具有性质 P，求证：$a_k{}^k=(a_1a_2\cdots a_k)^2$；

（Ⅲ）若数列 $\{a_n\}$ 具有性质 P，且 $\{a_n\}$ 不是等比数列，求 k 的值．

解答

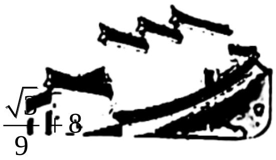
一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分,共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

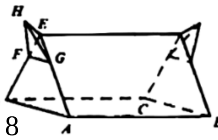
1. 设 i 为虚数单位，若复数 z 满足 $z=\frac{-3-3i}{1-i}$，则 $\bar{z}$ 的虚部为（　D　）A. $-3i$　　B. -3　　C. $3i$　　D. 3

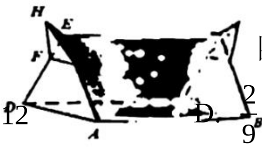
2. 已知向量 $\vec{a}=(-2,3)$，$\vec{b}=(\lambda,2)$，若 $\vec{a}//\vec{b}$，则 $\lambda=$（　A　）A. $-\frac{4}{3}$　　B. -1　　C. $\frac{4}{3}$　　D. 3

3. 已知函数 $f(x)=3\sin(\omega x-\frac{\pi}{6})(0<\omega<6)$，若 $f(\frac{\pi}{3})=3$，则 $f(-\frac{\pi}{3})=$（ C ）A. 3　B. $\frac{3}{2}$　C. $-\frac{3}{2}$　　D. -3

4. 图①中的“马头墙”是我国江南传统民居建筑的重要特色之一，它的顶部称之为垛．每只垛的结构如图②，可近似看成由一个正三棱柱和两个完全相同的正四面体构成的几何体．已知 $AD=1$，$AB=4$，$\overrightarrow{FG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$，现计划覆以小青瓦，覆盖面为“前”“后”两面，“前面”如图③阴影部分，则小青瓦所要覆盖的面积为（　A　）


图①


图②


图③

A. $\frac{\sqrt{3}}{9}+8$　B. $\frac{\sqrt{3}}{6}+8$　C. $\frac{11\sqrt{3}}{18}+12$　D. $\frac{2}{9}\sqrt{3}+12$

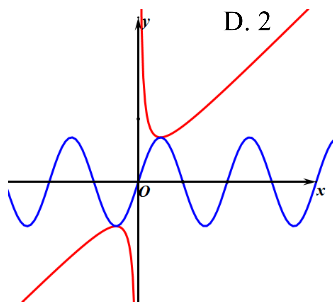
5. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，且 $f(x+y)f(x)f(y)=f(x+y)-f(x)-f(y)$，$f(1)=\sqrt{3}$，则 $\sum_{k=1}^{2024}f(k)=$

（　D　）A. 2024　　B. $1012\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 0

6. 已知四边形 $ABCD$ 的四个顶点在抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上，则“A，B，C，D 四点共圆”是“直线 AC 与 BD 倾斜角互补”的（C ）A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 已知函数 $f(x)=x^3-x^2\cdot\sin(\pi x)+\frac{x}{4}$ 的零点分别为 $x_1,x_2,\cdots,x_n(n\in N^*)$，则 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=$（　A　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. 0　　D. 2



$key:由f(-x)=-x^3-x^2(\sin-\pi x)-\frac{x}{4}=-f(x)得f(x)是奇函数,$

$而f(0)=0,f(x)=0\Leftrightarrow\sin(\pi x)=x+\frac{1}{4x}(x\neq0)$

$当x>0时,x+\frac{1}{4x}\geq1,\therefore x_1=-\frac{1}{2},x_2=0,x_3=\frac{1}{2},选A$

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=0$，$a_2=a_3=1$，令 $b_n=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}(n\in N^*)$．若数列 $\{b_n\}$ 是公比为 2 的等比数列，则 $a_{2024}=$（ B　）A. $\frac{2^{2024}-4}{7}$　　B. $\frac{2^{2024}+3}{7}$　　C. $\frac{2^{2024}+4}{7}$　　D. $\frac{2^{2024}+6}{7}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 某电商平台为了对某一产品进行合理定价，采用不同的单价在平台试销，得到的数据如下表所示：

单价 x/元	8	8.5	9	9.5	10
销量 y/万件	89	85	80	78	68

根据以上数据得到 y 与 x 具有较强的线性关系，若用最小二乘估计得到经验回归方程为 $y=-19.8x+a$，则

（　BC　）A. 相关系数 $r>0$　　B. 点 $(9,80)$ 一定在经验回归直线上

C. $\hat{a}=258.2$　　D. $x=9.5$ 时，对应销量的残差为 -7.9

10. 已知 M 为直线 $x-y+5=0$ 上的一点，动点 N 与两个定点 $O(0,0)$，$A(3,0)$ 的距离之比为 2，则（　ACD　）A. 动点 N 的轨迹方程为 $(x-4)^2+y^2=4$　　B. $|MN|\ge 2+\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$

C. $|MN|+\dfrac{1}{2}|NO|$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$　　　　D. $\angle AON$ 的最大角为 $\dfrac{\pi}{6}$

11. 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=AC=AA_1=1$，$\overrightarrow{AE}=m\overrightarrow{AB}(m>0)$，$\overrightarrow{AF}=n\overrightarrow{AC}(n>0)$，

$\overrightarrow{AG}=t\overrightarrow{AA_1}(t>0)$，平面 EFG 与直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 相交形成的截面为 Ω，则（　AC　）

A. 存在正实数 m,n,t，使得截面 Ω 为等边三角形　B. 存在正实数 m,n,t，使得截面 Ω 为平行四边形

C. 当 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{t}=1$，$n\in(0,1)$ 时，截面 Ω 为梯形　　D. 当 $m>1,0<n<1,0<t<1$ 时，截面 Ω 为梯形

$key:A:$ 当 $m=n=t\in(0,1)$ 时，截面是正三角形；B 错；

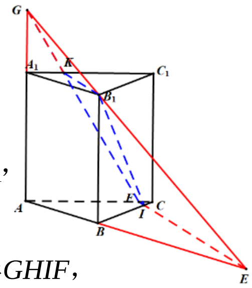
$C:$ 由 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{t}=1$ 得 $m,t>1$，$\therefore E$、G 分别在 AB 延长线、AA_1 的延长线上，

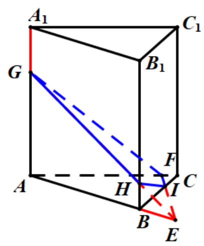
且 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}=\dfrac{1}{m}\overrightarrow{AE}+\dfrac{1}{t}\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB_1}$，$\therefore E,G,B_1$ 三点共线，即 EG 经过点 B_1，

$\because n\in(0,1)$，$\therefore F$ 在线段 AC 上，如图，Ω 是梯形 B_1IFE,C 对

$D:E$ 在 AB 的延长线上，F、G 在线段 AC、AA_1，截面是如图的四边形 $GHIF$，

一般一定不是梯形





三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12. 在 $(3x+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}})^8$ 的展开式中，常数项为______．（用数字作答）252

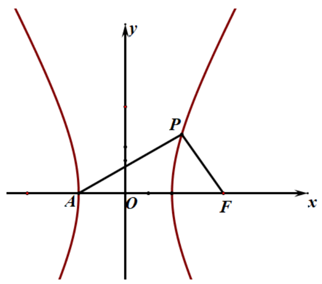
13. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且 $a=b\cos C+\dfrac{\sqrt{3}}{3}c\sin B$，则 $B=$__________；若 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=\sqrt{3},a+c=5$，则 $b=$__________．$\dfrac{\pi}{3},\sqrt{13}$

14. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左顶点为 A，右焦点为 F，P 为双曲线右支上的点，若双曲线的离心率为 2，且 $\angle PAF=15^\circ$，则 $\angle PFA=$_______．　30°

$key:$ 由 $e=\dfrac{c}{a}=2$ 的 $c=2a,b=\sqrt{3}a,\therefore C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{(\sqrt{3}a)^2}=1$

设 $P(\dfrac{a(t^2+1)}{2t},\dfrac{\sqrt{3}a(t^2-1)}{2t})$，则 $k_{PA}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}a(t^2-1)}{2t}}{\dfrac{a(t^2+1)}{2t}+a}=\dfrac{\sqrt{3}(t-1)}{t+1}=2-\sqrt{3}$ 得 $t=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

$\therefore k_{PF}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}a(t^2-1)}{2t}}{\dfrac{a(t^2+1)}{2t}-2a}=\dfrac{\sqrt{3}(t^2-1)}{t^2+1-4t}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore KAPFA=30^\circ$



四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

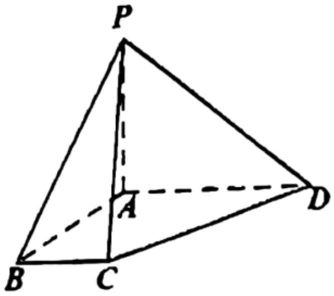
15. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AD//BC$，$AD=AB=2BC=4$，$\angle PAB=\angle PCB=90^\circ$，$\angle BAD=120^\circ$．

（1）求证：$PA\perp CD$；（2）若四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 12，求平面 PBC 与平面 PCD 的夹角的余弦值．

【小问 1 详解】　四棱锥 $P-ABCD$ 中，连接 AC，

因为 $AD//BC$， $\angle BAD=120°$，

所以 $\angle ABC=60°$，又因为 $AB=4$， $BC=2$，



所以 $AC^2=16+4-2\times4\times2\times\frac{1}{2}=12$，

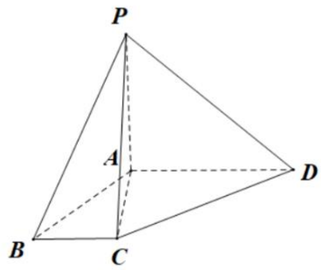
所以 $AB^2=AC^2+BC^2$，即 $BC\perp AC$．

因为 $\angle BCP=90°$， $AC\cap PC=C, AC,PC\subset$ 平面 PAC，

所以 $BC\perp$ 平面 PAC，所以 $BC\perp PA$，

由 $\angle PAB=90°$， $AB\cap BC=B, AB,BC\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PA\perp$ 平面 $ABCD$， $CD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp CD$．



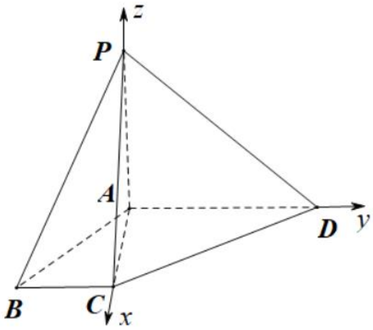
【小问 2 详解】由题意及（1）得，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，

因为 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(2+4)\times2\sqrt{3}\times PA=12$，所以 $PA=2\sqrt{3}$．

建立以 A 为原点， AC,AD,AP 所在直线分别为 x,y,z 轴的空间直角坐标系，

$P(0,0,2\sqrt{3})$， $C(2\sqrt{3},0,0)$， $B(2\sqrt{3},-2,0)$， $D(0,4,0)$，

设平面 PBC 的一个法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，则



$\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\\\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}2y_1=0\\2\sqrt{3}x_1-2\sqrt{3}z_1=0\end{cases}$，取 $\overrightarrow{n_1}=(1,0,1)$，

设平面 PCD 的一个法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，则

$\begin{cases}\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\\\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-2\sqrt{3}x_2+4y_2=0\\2\sqrt{3}x_2-2\sqrt{3}z_2=0\end{cases}$，取 $\overrightarrow{n_2}=(2,\sqrt{3},2)$，

所以 $\cos\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{4}{\sqrt{2}\sqrt{11}}=\frac{2\sqrt{22}}{11}$，

所以平面 PBC 与平面 PCD 的夹角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{22}}{11}$．

16. 已知 A，B 分别为椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右顶点，点 $P(2,\frac{\sqrt{5}}{3})$， $Q(-1,-\frac{2\sqrt{2}}{3})$ 在椭圆 E 上．

（1）求椭圆 E 的方程;（2）过点 $M(2,0)$ 且斜率不为零的直线 l 与椭圆 E 交于 C，D 两点，若直线 AC 与 BD 相交于点 P，求证：点 P 在定直线上．

【小问 1 详解】由题意知， $\begin{cases}\frac{4}{a^2}+\frac{5}{9b^2}=1\\\frac{1}{a^2}+\frac{8}{9b^2}=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a^2=9\\b^2=1\end{cases}$，

所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$；

【小问 2 详解】由椭圆对称性及点 $M(2,0)$ 在 x 轴上，故若点 P 在定直线上，则该定直线关于 x 轴对称.

设直线 l 的方程为 $x=my+2$，$C\left(x_1,y_1\right)$，$D\left(x_2,y_2\right)$，

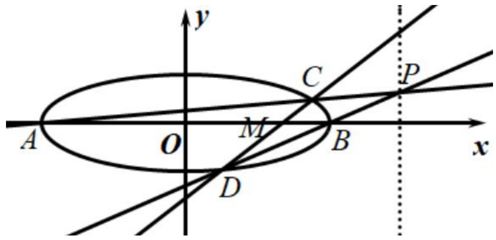
由 $\begin{cases}x=my+2\\x^2+9y^2=9\end{cases}$ 得，$\left(m^2+9\right)y^2+4my-5=0$，

所以 $y_1+y_2=-\dfrac{4m}{m^2+9}$，$y_1y_2=-\dfrac{5}{m^2+9}$．则有 $my_1y_2=\dfrac{5}{4}(y_1+y_2)$ *，

又 $A(-3,0),B(3,0)$，

则直线 AC 方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1+3}(x+3)$，直线 BD 方程为 $y=\dfrac{y_2}{x_2-3}(x-3)$，

由 $\begin{cases}y=\dfrac{y_1}{x_1+3}(x+3)\\y=\dfrac{y_2}{x_2-3}(x-3)\end{cases}$ 得，$x=\dfrac{3x_1y_2+3x_2y_1+9y_2-9y_1}{x_1y_2-x_2y_1+3y_1+3y_2}$．



又因为 $x_1=my_1+2$，$x_2=my_2+2$，

所以 $x=\dfrac{3\left(my_1+2\right)y_2+3\left(my_2+2\right)y_1+9y_2-9y_1}{\left(my_1+2\right)y_2-\left(my_2+2\right)y_1+3y_1+3y_2}=\dfrac{6my_1y_2+15y_2-3y_1}{5y_2+y_1}$

$=\dfrac{6\times\dfrac{5}{4}(y_1+y_2)+15y_2-3y_1}{5y_2+y_1}=\dfrac{\dfrac{45}{2}y_2+\dfrac{9}{2}y_1}{5y_2+y_1}=\dfrac{9}{2}$，所以点 P 　定直线 $x=\dfrac{9}{2}$ 上.

17. 某城市的青少年网络协会为了调查该城市中学生的手机成瘾情况，对该城市中学生中随机抽出的 200 名学生进行调查，调查中使用了两个问题．问题 1：你的学号是不是奇数？问题 2：你是否沉迷手机？
调查者设计了一个随机化装置，这是一个装有大小、形状和质量完全一样的 50 个白球和 50 个红球的袋子，每个被调查者随机从袋中摸取一个球（摸出的球再放回袋中），摸到白球的学生如实回答第一个问题，摸到红球的学生如实回答第二个问题，回答“是”的人往一个盒子中放一个小石子，回答“否”的人什么都不要做．由于问题的答案只有“是”和“否”，而且回答的是哪个问题也是别人不知道的，因此被调查者可以毫无顾虑地给出符合实际情况的答案．（1）如果在 200 名学生中,共有 80 名回答了“是”,请你估计该城市沉迷手机的中学生所占的百分比．
（2）某学生进入高中后沉迷手机，学习成绩一落千丈，经过班主任老师和家长的劝说后，该学生开始不玩手机．已知该学生第一天没有玩手机，若该学生前一天没有玩手机，后面一天继续不玩手机的概率是 0.8；若该学生前一天玩手机，后面一天继续玩手机的概率是 0.5．

（i）求该学生第三天不玩手机　概率 P；（ii）设该学生第 n 天不玩手机的概率为 P_n，求 P_n．

【小问 1 详解】“回答问题 1”记为事件 A_1，“回答问题 2”记为事件 A_2，回答“是”记为事件 B，

则 $P\left(A_1\right)=P\left(A_2\right)=\dfrac{1}{2}$，$P\left(B\mid A_1\right)=\dfrac{1}{2}$，$P(B)=\dfrac{2}{5}$，

因为 $P(B)=P\left(A_1\right)P\left(B\mid A_1\right)+P\left(A_2\right)P\left(B\mid A_2\right)$，

所以 $P\left(B|A_2\right)=\dfrac{3}{10}$，即该城市沉迷手机的中学生所占30%；

【小问 2 详解】（i）$P=0.8\times0.8+(1-0.8)\times0.5=0.74$；

（ii）由题意知 $P_1=1$，第 $\mathrm{n}-1$ 天不玩手机的概率是 P_{n-1}，

第 $\mathrm{n}-1$ 天玩手机的概率是 $1-P_{n-1}$，

所以 $P_n=\dfrac{4}{5}P_{n-1}+\dfrac{1}{2}(1-P_{n-1})(n\ge 2)$，

即 $P_n=\dfrac{3}{10}P_{n-1}+\dfrac{1}{2}(n\ge 2)$，所以 $P_n-\dfrac{5}{7}=\dfrac{3}{10}\left(P_{n-1}-\dfrac{5}{7}\right)(n\ge 2)$，

又 $P_1-\dfrac{5}{7}=\dfrac{2}{7}$，所以数列 $\left\{P_n-\dfrac{5}{7}\right\}$ 是以 $\dfrac{2}{7}$ 为首项，$\dfrac{3}{10}$ 为公比的等比数列，

所以 $P_n-\dfrac{5}{7}=\dfrac{2}{7}\left(\dfrac{3}{10}\right)^{n-1}$，所以 $P_n=\dfrac{2}{7}\left(\dfrac{3}{10}\right)^{n-1}+\dfrac{5}{7}$.

18. 已知函数 $f(x)=ax+\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$，$x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$.（1）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处的切线方程；

（2）若 $f(x)-\sin x<0$，求 a 的取值范围.

解：(1) $\because a=1,\therefore f'(x)=1+\dfrac{\cos x(1+\cos x)-\sin x\cdot(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}=1+\dfrac{1}{\cos x+1}$ 得 $f(\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{\pi+\sqrt{3}}{3},f'(\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{5}{3}$

$\therefore$ 所求切线方程为 $y-\dfrac{\pi+\sqrt{3}}{3}=\dfrac{5}{3}(x-\dfrac{\pi}{3})$ 即 $y=\dfrac{5}{3}x+\dfrac{3\sqrt{3}-2\pi}{9}$…5分

(2) 由 $f(x)-\sin x=ax+\dfrac{\sin x}{1+\cos x}-\sin x$ 记为 $g(x)(0<x<\dfrac{\pi}{2})$，有 $g(0)=0,g(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{\pi}{2}a\le 0$

且 $g'(x)=a+\dfrac{1}{1+\cos x}-\cos x$

$\therefore x\in(0,\dfrac{\pi}{2}),\therefore \cos x\in(0,1),\therefore \dfrac{1}{1+\cos x}-\cos x=\dfrac{1}{1+\cos x}-(1+\cos x)+1\in(-\dfrac{1}{2},1)$

当 $a\le -1$ 时，$g'(x)\le 0,\therefore g(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上递减，$\therefore g(x)<0$ 恒成立，

当 $-1<a\le 0$ 时，$g'(x)>0\Leftrightarrow 0<\cos x<\dfrac{a-1+\sqrt{(a+1)^2+4}}{2}\Leftrightarrow \arccos\dfrac{a-1+\sqrt{(a+1)^2}}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore g(x)$ 在 $(0,\arccos\dfrac{a-1+\sqrt{(a+1)^2}}{2})$ 上递减，在 $(\arccos\dfrac{a-1+\sqrt{(a+1)^2}}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 上递增

而 $g(0)=0,g(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{\pi}{2}a\le 0,\therefore g(x)<0$ 恒成立.综上：a 的取值范围为 $(-\infty,0]$

$key2$：当 $a\le 0$ 时，$\because x\in(0,\dfrac{\pi}{2}),\therefore f(x)\le\dfrac{\sin x}{1+\cos x}<\sin x,\therefore f(x)-\sin x<0$ 恒成立

$\therefore a$ 的取值范围为 $(-\infty,0]$

19.已知项数为$k(k\in N^*,\ k\geq 3)$的有穷数列$\{a_n\}$满足如下两个性质，则称数列$\{a_n\}$具有性质P：

①$1\leq a_1<a_2<a_3<\cdots<a_k$；②对任意的$i,\ j(1\leq i\leq j\leq k)$，$\dfrac{a_j}{a_i}$与$a_ja_i$至少有一个是数列$\{a_n\}$中的项.

（Ⅰ）分别判断数列$1,2,4,16$和$2,4,8,16$是否具有性质P，并说明理由；

（Ⅱ）若数列$\{a_n\}$具有性质P，求证：$a_k{}^k=(a_1a_2\cdots a_k)^2$；

（Ⅲ）若数列$\{a_n\}$具有性质P，且$\{a_n\}$不是等比数列，求k的值.

（Ⅰ）解：数列$1,2,4,16$满足①，$\dfrac{a_4}{a_2}=8$与$a_4\cdot a_2=32$都不在数列中，$\therefore$数列$1,2,4,16$不具有性质P;

数列$2,4,8,16$满足①，$\dfrac{16}{16}=1$，$16\cdot 16=256$都不在数列中，$\therefore$数列$2,4,8,16$不具有性质$P\cdots 4$分

（Ⅱ）证明：$\because \{a_n\}$具有性质P，

$\therefore$由①得$1\leq a_1<a_2<\cdots<a_k$得$a_2a_k,a_3a_k,\cdots,a_{k-1}a_k,a_ka_k>a_k$

$\therefore$由②得$\dfrac{a_k}{a_k}=1,\dfrac{a_k}{a_{k-1}},\dfrac{a_k}{a_{k-2}},\cdots,\dfrac{a_k}{a_2}$这$k$个数都在$\{a_n\}$中，

而$1=\dfrac{a_k}{a_k}<\dfrac{a_k}{a_{k-1}}<\cdots<\dfrac{a_k}{a_3}<\dfrac{a_k}{a_2}<a_k$

$\therefore a_1=1,\dfrac{a_k}{a_{k-1}}=a_2,\cdots,\dfrac{a_k}{a_3}=a_{k-2},\dfrac{a_k}{a_2}=a_{k-1}$即$a_1=1,a_k=a_{k-1}a_2,\cdots,a_k=a_3a_{k-2},a_k=a_2a_{k-1},a_k=a_k$

$\therefore (a_2a_{k-1})(a_3a_{k-2})\cdots(a_2a_{k-1})=a_2^2a_3^2\cdots a_{k-1}^2=a_k^{k-2}$

$\therefore (a_1a_2\cdots a_k)^2=a_2^2a_3^2\cdots a_{k-1}^2a_k^2=a_k^k$，证毕$\cdots 10$分

（Ⅲ）解：当$k=3$时，由（Ⅱ）得：$a_1=1,a_3^3=(a_1a_2a_3)^2$即$a_2^2=a_3a_1$，$\therefore\{a_n\}$是等比数列

当$k=4$时，数列$1,2,6,12$具有性质P，但不是等比数列

当$k\geq 5$时，由（Ⅱ）得$1=\dfrac{a_k}{a_k}=a_1,\dfrac{a_k}{a_{k-1}}=a_2,\cdots,\dfrac{a_k}{a_2}=a_{k-1},\dfrac{a_k}{a_1}=a_k$，即$\dfrac{a_k}{a_{k-i}}=a_{i+1}(1\leq i\leq k-1)$

由$a_{k-1}a_i>a_{k-1}a_2=a_k(3\leq i\leq k-2)$，得$\dfrac{a_{k-1}}{a_i}$是数列$\{a_n\}$中的项，

而$1=\dfrac{a_{k-1}}{a_{k-1}}<\dfrac{a_{k-1}}{a_{k-2}}<\cdots<\dfrac{a_{k-1}}{a_3}<\dfrac{a_k}{a_3}=a_{k-2}<\dfrac{a_k}{a_2}=a_{k-1}<\dfrac{a_k}{a_1}=a_k$

$\therefore \dfrac{a_{k-1}}{a_{k-i}}=a_i(1\leq i\leq k-3)\cdots$②

①÷②得：$\dfrac{a_k}{a_{k-1}}=\dfrac{a_{i+1}}{a_i}$，$\therefore$当$k\geq 5$时，数列$\{a_n\}$是等比数列.

综上：$k=4\cdots 17$分