## 2023-24（下）模拟（26）

2024-03-09

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设复数 $z=1+i$，则复数 $\frac{1}{z}+\bar{z}$（其中 $\bar{z}$ 表示 $z$ 的共轭复数）表示的点在（　　）上

A. $x$ 轴　　B. $y$ 轴　　C. $y=-x$　　D. $y=x$

2. 已知 $\alpha,\beta\in R$，则“$\alpha=\beta$”是“$\tan\alpha=\tan\beta$　”　（　）

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件　C. 充要条件　D. 既不充分也不必要条件

3. 已知圆锥的底面圆半径为 $\sqrt{3}$，侧面展开图是一个半圆面，则该圆锥的体积为（　　）

A　$12\pi$　　B. $9\pi$　　C. $3\pi$　　D. $\frac{4\sqrt{3}\pi}{3}$

4. 已知双曲线 $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的一条渐近线的倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$，则此双曲线的右焦点到一条渐近线的距离为（　　）A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $\sqrt{6}$　　D. $3\sqrt{2}$

5. 一对夫妻带着 3 个小孩和一个老人，手拉着手围成一圈跳舞，3 个小孩不相邻的站法种数是（　　）

A. 6　　B. 12　　C. 18　　D. 36

6. 已知递增的等比数列 $\{a_n\}$，$a_1>0$，公比为 $q$，且 $a_1,a_3,a_4$ 成等差数列，则 $q$ 的值为（　　）

A. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{5}\pm1}{2}$　　D. $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

7. 已知平面内的三个单位向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$，且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\vec{b}\cdot\vec{c}=$（　　）

A. 0　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 0

8. 设方程 $2^x\cdot|\log_2 x|=1$ 的两根为 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，则（　）A. $0<x_1<1,x_2>2$　B. $x_1>\frac{1}{x_2}$　C. $0<x_1x_2<1$　D. $x_1+x_2>3$

二、选择题（本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.）

9. 下列说法正确的是（　　）A. 若事件 $A$ 和事件 $B$ 互斥，$P(AB)=P(A)P(B)$

B. 数据 4，7，5，6，10，2，12，8 的第 70 百分位数为 8

C. 若随机变量 $\xi$ 服从 $N(17,\sigma^2)$，$P(17<\xi\le18)=0.4$，则 $P(\xi>18)=0.1$

D. 已知 $y$ 关于 $x$ 的回归直线方程为 $y=0.3-0.7x$，则样本点 $(2,-3)$ 的残差为 $-1.9$

10. 设函数 $f(x),g(x)$　定义域都为 $R$，且 $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数，则下列结论正确的是（　　）

A. $f(x)g(x)$ 是奇函数　B. $f(x)|g(x)|$ 是偶函数　C. 若 $g(x)-f(x)=x^3+x^2+1$，则 $f(1)+g(1)=1$

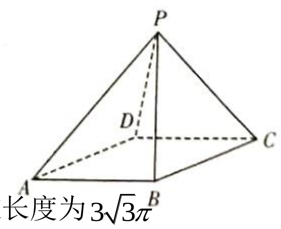
D. 若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减且 $f(1)=-1$，则满足 $-1\le f(x-2)\le1$ 的 $x$ 的取值范围是 $[1,3]$

11. 已知体积为 2 的四棱锥 $P-ABCD$，底面 $ABCD$ 是菱形，$AB=2,PA=3$，则下列说法正确的是（　　）

A. 若 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，则 $\angle BAD$ 为 $\frac{\pi}{6}$

B. 过点 $P$ 作 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，若 $AO\perp BD$，则 $BD\perp PC$

C. $PA$ 与底面 $ABCD$ 所成角的最小值为 $\frac{\pi}{6}$




D. 若点 $P$ 仅在平面 $ABCD$ 的一侧，且 $AB\perp AD$，则 $P$ 点轨迹长度为 $3\sqrt{3}\pi$

三、填空题（本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.）

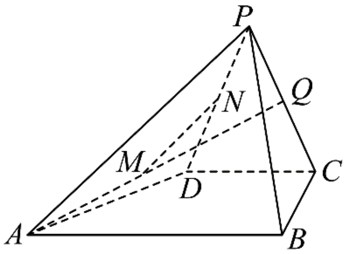
12. 已知关于 $x$ 的不等式 $ax-1>0$ 的解集为 $M$，$2\in M$ 且 $1\notin M$，则实数 $a$ 的取值范围是______.

13. 已知抛物线 $y^2=2x$ 的弦 $AB$ 的中点的横坐标为 2，则弦 $AB$ 的最大值为______.

14. 已知$\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{1}{3}$，$\cos\alpha+\cos\beta=1$，则$\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}=$______，$\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta}=$______.

四、解答题（本大题共5小题，共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

15. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$AB//CD$, $AB=4, CD=2, BC=2, PC=PD=3,$ 平面$PCD\perp$平面$ABCD$, , , $PD\perp BC$.（1）证明：$BC\perp$平面$PCD$；（2）若点$Q$是线段$PC$的中点，$M$是直线$AQ$上的一点，$N$是直线$PD$上的一点，是否存在点$M$，$N$使得$MN=\dfrac{2\sqrt{5}}{9}$?请说明理由.




16. 已知椭圆$W:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右顶点为$A$，左焦点为$F$，椭圆$W$上的点到$F$的最大距离是短半轴长的$\sqrt{3}$倍，且椭圆$W$过点$(1,\dfrac{3}{2})$.记坐标原点为$O$，圆$E$过$O$、$A$两点且与直线$x=6$相交于两个不同的点$P$，$Q$（$P$，$Q$在第一象限，且$P$在$Q$的上方），$|PQ|=|OA|$，直线$QA$与椭圆$W$相交于另一个点$B$.

（1）求椭圆$W$　方程；（2）求$\triangle QOB$的面积.

17. 已知函数 $f(x)=x\ln x$ 的导数为 $f'(x)$.（1）若 $f(x)\geq kx-1$ 恒成立，求实数 $k$ 的取值范围；
（2）函数 $f(x)$ 的图象上是否存在三个不同的点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$（其中 $x_1<x_2<x_3$ 且 $x_1,x_2,x_3$ 成等比数列），使直线 $AC$ 的斜率等于 $f'(x_2)$?请说明理由.

18. 在$\triangle ABC$中，角$A,B,C$所对的边分别为$a,b,c$，$AB$边上的高设为$h$，且$a+b=c+h$.
⑴ 若$c=3h$, 求$\tan C$的值；（2）求$\cos C$的取值范围.

19. 2023 年 10 月 11 日，中国科学技术大学潘建伟团队成功构建 255 个光子的量子计算机原型机“九章三号”，求解高斯玻色取样数学问题比目前全球是快的超级计算机快一亿亿倍.相较传统计算机的经典比特只能处于 0 态或 1 态，量子计算机的量子比特（qubit）可同时处于 0 与 1 的叠加态，故每个量子比特处于 0 态或 1 态是基于概率进行计算的.现假设某台量子计算机以每个粒子的自旋状态作为是子比特，且自旋状态只有上旋与下旋两种状态，其中下旋表示“0”，上旋表示“1”，粒子间的自旋状态相互独立.现将两个初始状态均为叠加态的粒子输入第一道逻辑门后，粒子自旋状态等可能的变为上旋或下旋，再输入第二道逻辑门后，粒子的自旋状态有 $p$ 的概率发生改变，记通过第二道逻辑门后的两个粒子中上旋粒子的个数为 $X$.（1）若通过第二道逻辑门后的两个粒子中上旋粒子的个数为 2，且 $p=\dfrac{1}{3}$，求两个粒子通过第一道逻辑门后上旋粒子个数为 2 的概率；（2）若一条信息有 $n(n>1,n\in N^*)$ 种可能的情况且各种情况互斥，记这些情况发生的概率分别为 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，则称 $H=f(p_1)+f(p_2)+\cdots+f(p_n)$（其中 $f(x)=-x\log_2 x$）为这条信息的信息熵.试求两个粒子通过第二道逻辑门后上旋粒子个数为 $X$ 的信息熵 $H$；（3）将一个下旋粒子输入第二道逻辑门，当粒子输出后变为上旋粒子时则停止输入，否则重复输入第二道逻辑门直至其变为上旋粒子，设停止输入时该粒子通过第二道逻辑门的次数为 $Y(Y=1,2,3,\cdots,n,\cdots)$.证明：当 $n$ 无限增大时，$Y$ 的数学期望趋近于一个常数.参考公式：$0<q<1$ 时，$\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0$，$\lim\limits_{n\to+\infty}nq^n=0$.

# 2023-24（下）模拟（26）

2024-03-09

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设复数 $z=1+i$，则复数 $\frac{1}{z}+\bar{z}$（其中 $\bar{z}$ 表示 $z$ 的共轭复数）表示的点在（　C　）上

A. $x$ 轴　　B. $y$ 轴　　C. $y=-x$　　D. $y=x$

2. 已知 $\alpha,\beta\in R$，则"$\alpha=\beta$"是"$\tan\alpha=\tan\beta$　"　（D ）

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 已知圆锥的底面圆半径为 $\sqrt{3}$，侧面展开图是一个半圆面，则该圆锥的体积为（　C）

A　$12\pi$　　B. $9\pi$　　C. $3\pi$　　D. $\frac{4\sqrt{3}\pi}{3}$

4. 已知双曲线 $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的一条渐近线的倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$，则此双曲线的右焦点到一条渐近线的距离为（　A　）A. $\sqrt{2}$　B. 2　C. $\sqrt{6}$　D. $3\sqrt{2}$

5. 一对夫妻带着 3 个小孩和一个老人，手拉着手围成一圈跳舞，3 个小孩不相邻的站法种数是（ B　）

A. 6　　B. 12　　C. 18　　D. 36

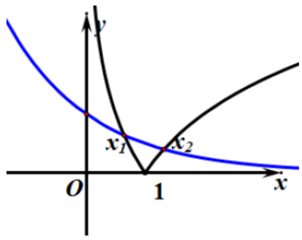
6. 已知递增的等比数列 $\{a_n\}$，$a_1>0$，公比为 $q$，且 $a_1,a_3,a_4$ 成等差数列，则 $q$ 的值为（　A　）

A. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{5}\pm1}{2}$　　D. $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

7. 已知平面内的三个单位向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, 且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2},\vec{a}\cdot\vec{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $\vec{b}\cdot\vec{c}=$（　D　）

A. 0　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 0

$key:$ 由已知得 $<\vec{a},\vec{b}>=\frac{\pi}{3},<\vec{a},\vec{c}>=\frac{\pi}{6},\therefore<\vec{b},\vec{c}>=\frac{\pi}{2},or,\frac{\pi}{6},\therefore$ 选 $D$




8. 设方程 $2^x\cdot|\log_2 x|=1$ 的两根为 $x_1,x_2(x_1<x_2)$, 则（C）

A. $0<x_1<1,x_2>2$　B. $x_1>\frac{1}{x_2}$　C. $0<x_1x_2<1$　D. $x_1+x_2>3$

$key: 2^x\cdot|\log_2 x|=1\Leftrightarrow|\log_{\frac{1}{2}}x|=(\frac{1}{2})^x,\therefore(\frac{1}{2})^{x_1}=\log_{\frac{1}{2}}x_1>(\frac{1}{2})^{x_2}=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x_2},\therefore0<x_1<\frac{1}{x_2},\therefore0<x_1x_2<1$

二、选择题（本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.）

9. 下列说法正确的是（ BCD　）A. 若事件 $A$ 和事件 $B$ 互斥，$P(AB)=P(A)P(B)$

B. 数据 4，7，5，6，10，2，12，8 的第 70 百分位数为 8

C. 若随机变量 $\xi$ 服从 $N(17,\sigma^2)$，$P(17<\xi\le18)=0.4$，则 $P(\xi>18)=0.1$

D. 已知 $y$ 关于 $x$ 的回归直线方程为 $y=0.3-0.7x$，则样本点 $(2,-3)$ 的残差为 $-1.9$

10. 设函数 $f(x),g(x)$　定义域都为 $R$，且 $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数，则下列结论正确的是（ACD ）

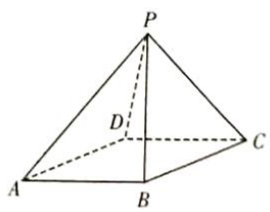
A. $f(x)g(x)$ 是奇函数　B. $f(x)|g(x)|$ 是偶函数　C. 若 $g(x)-f(x)=x^3+x^2+1$，则 $f(1)+g(1)=1$

D. 若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减且 $f(1)=-1$，则满足 $-1\le f(x-2)\le1$ 的 $x$ 的取值范围是 $[1,3]$

11. 已知体积为 2 的四棱锥 $P-ABCD$，底面 $ABCD$ 是菱形，$AB=2,PA=3$，则下列说法正确的是（ BCD ）

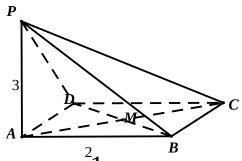
A. 若 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，则 $\angle BAD$ 为 $\frac{\pi}{6}$

B. 过点 $P$ 作 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，若 $AO\perp BD$，则 $BD\perp PC$



C. $PA$ 与底面 $ABCD$ 所成角的最小值为 $\frac{\pi}{6}$

D. 若点 $P$ 仅在平面 $ABCD$ 的一侧，且 $AB\perp AD$，则 $P$ 点轨迹长度为 $3\sqrt{3}\pi$

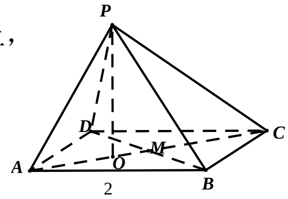



$key:A:V=\frac{1}{3}\cdot 2\cdot 2\sin\angle BAD\cdot 3=2$得$\angle BAD=\frac{\pi}{6},or,\frac{5\pi}{6}$, $A$错；

$B:PC$在平面$ABCD$上的射影为$AC,\because AC\perp BD,\therefore BD\perp PC$, $B$对；

$C:V=\frac{1}{3}\cdot 4\sin\angle BAD\cdot h=2$得$h\sin\angle BAD=\frac{3}{2},\sin<\overrightarrow{PA},平面ABCD>=\frac{h}{3}=\frac{1}{2\sin\angle BAD}\geq\frac{1}{2},\therefore C$对；

$D:PA=3$得$P$在以$A$为球心半径为3的球面上，且在距平面$BACD$为$h=\frac{3}{2}$的圆上，




$\therefore P$的轨迹长度为$2\pi\sqrt{9-\frac{9}{4}}=3\sqrt{3}\pi, D$对.

三、填空题（本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.）

12. 已知关于 $x$ 的不等式 $ax-1>0$ 的解集为 $M$， $2\in M$ 且 $1\notin M$ ，则实数 $a$ 的取值范围是______. $(\frac{1}{2},1]$

13. 已知抛物线 $y^2=2x$ 的弦 $AB$ 的中点的横坐标为 2，则弦 $AB$ 的最大值为______.5

$key1:|AF|+|BF|=x_A+\frac{1}{2}+x_B+\frac{1}{2}=5\geq|AB|$

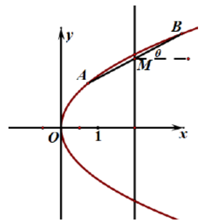
$key2:A(2a^2,2a),B(2b^2,2b)$，则$a^2+b^2=2$, 且$a+b\in(-2,2)$

$\therefore|AB|^2=(2a^2-2b^2)^2+(2a-2b)^2=4(a-b)^2[(a+b)^2+1]=4[2(a^2+b^2)-(a+b)^2][(a+b)^2+1]$（令$t=a+b\in(-2,2)$）

$=4(4-t^2)(t^2+1)\leq 4\cdot(\frac{4-t^2+t^2+1}{2})^2=25$（当且仅当$t^2=\frac{3}{2}$时，取＝）

$key3:$设$M(2,m)(-2<m<2),|AB|=2l,<\overrightarrow{AB},x轴>=\theta$, 如图, 则$A(2-l\cos\theta,m-l\sin\theta),B(2+l\cos\theta,m+l\sin\theta)$

$\therefore\begin{cases}(m-l\sin\theta)^2=2(2-l\cos\theta)\\(m+l\sin\theta)^2=2(2+l\cos\theta)\end{cases},\therefore\begin{cases}m^2+l^2\sin^2\theta=4\\m\sin\theta=\cos\theta即\tan\theta=\frac{1}{m}\end{cases}$



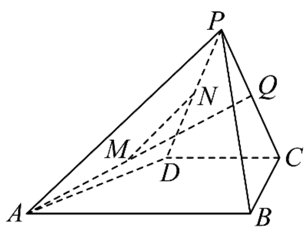

$\therefore l^2=(4-m^2)(m^2+1)\leq(\frac{4-m^2+m^2+1}{2})^2=\frac{25}{4}(m^2=\frac{3}{2}),\therefore|AB|_{\max}=5$

14. 已知 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{1}{3}$， $\cos\alpha+\cos\beta=1$， 则 $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=$______， $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta}=$______. $\frac{1}{2},\frac{2}{3}$

$key:\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{2}(\cos\alpha+\cos\beta)=\frac{1}{2};\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\frac{1+(-\frac{1}{3})}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$

四、解答题（本大题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

15. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $AB//CD, AB=4, CD=2, BC=2, PC=PD=3$, 平面$PCD\perp$平面$ABCD$, , , $PD\perp BC$ .（1）证明： $BC\perp$ 平面 $PCD$；（2）若点 $Q$ 是线段 $PC$ 的中点，$M$ 是直线 $AQ$ 上的一点，$N$ 是直线 $PD$ 上的一点，是否存在点 $M$，$N$ 使得 $MN=\frac{2\sqrt{5}}{9}$ ?请说明理由.




【小问 1 详解】如图，取 CD 的中点 $O$，因为 $PC=PD=3$， 则 $PO\perp CD$，

因为平面 $PCD\perp$ 平面 ABCD，平面 $PCD\cap$ 平面 $ABCD=CD$， $PO\subset$ 平面 $PCD$,

所以 $PO\perp$ 平面 ABCD，

又 $BC\subset$ 平面 ABCD，所以 $PO\perp BC$，又 $BC\perp PD$，$PO\subset$ 平面 PCD，$PD\subset$ 平面 PCD，$PD\cap PO=P$，

所以 $BC\perp$ 平面 PCD.

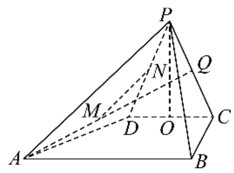
【小问 2 详解】因为 $PC=PD=3$，$O$ 为 $CD$ 的中点，$OC=1$，所以 $PO=\sqrt{PC^2-OC^2}=2\sqrt{2}$，

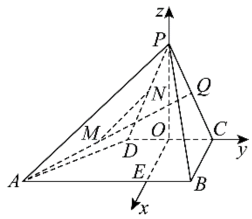
过点 $O$ 作 $OE//BC$ 交 AB 于点 $E$，则由 $BC\perp$ 平面 PCD, $CD\subset$ 平面 PCD,可得 $BC\perp CD$，

则以 $O$ 为原点，OE,OC,OP 分别为 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $O(0,0,0)$，$A(2,-3,0)$，$Q(0,\frac{1}{2},\sqrt{2})$，$D(0,-1,0)$，$P(0,0,2\sqrt{2})$，

所以 $\overrightarrow{AQ}=(-2,\frac{7}{2},\sqrt{2})$，$\overrightarrow{DP}=(0,1,2\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AD}=(-2,2,0)$，



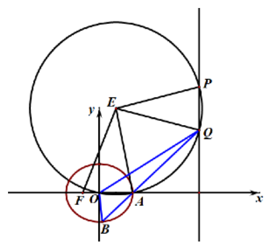

设与 $\overrightarrow{AQ}$，$\overrightarrow{DP}$ 都重直的向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AQ}=-2x+\frac{7}{2}y+\sqrt{2}z=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DP}=y+2\sqrt{2}z=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\frac{3}{2}y,\\ z=-\frac{\sqrt{2}}{4}y,\end{cases}$ 令 $y=4$，则 $\vec{n}=(6,4,-\sqrt{2})$，

设直线 AQ 与直线 DP 的距离为 $d$，则 $d=\left|\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\cos\langle\overrightarrow{AD},\vec{n}\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{AD}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}=\frac{|-12+8|}{\sqrt{36+16+2}}=\frac{2\sqrt{6}}{9}>\frac{2\sqrt{5}}{9}$，

则不存在点 $M$ 和 $N$ 使得 $MN=\frac{2\sqrt{5}}{9}$.

16. 已知椭圆 $W:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右顶点为 $A$，左焦点为 $F$，椭圆 $W$ 上的点到 $F$ 的最大距离是短半轴长的 $\sqrt{3}$ 倍，且椭圆 $W$ 过点 $(1,\frac{3}{2})$.记坐标原点为 $O$，圆 $E$ 过 $O$、$A$ 两点且与直线 $x=6$ 相交于两个不同的点 $P$，$Q$（$P$，$Q$ 在第一象限，且 $P$ 在 $Q$ 的上方），$|PQ|=|OA|$，直线 $QA$ 与椭圆 $W$ 相交于另一个点 $B$.




（1）求椭圆 $W$ 方程；（2）求 $\triangle QOB$ 的面积.

解：⑴ 由已知得：$\begin{cases}a+c=\sqrt{3}b\\ \frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1\end{cases}$ 得 $b=\sqrt{3},a=2,c=1,\therefore$ 椭圆 $W$ 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

（2）由已知设 $E(1,t)(t>0)$,则 $Q(6,t-1)$,且 $\sqrt{t^2+1}=\sqrt{5^2+1}$ 即 $t=5,\therefore E(1,5),Q(6,4)$

则 $l_{AQ}:y=x-2$ 代入 $W$ 方程得: $7x^2-16x+4=0,\therefore B(\frac{2}{7},-\frac{12}{7}),\therefore S_{\triangle QOB}=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 6 & 4 & 1\\ \frac{2}{7} & -\frac{12}{7} & 1\end{vmatrix}\right\|=\frac{40}{7}$

17. 已知函数 $f(x)=x\ln x$ 的导数为 $f'(x)$.（1）若 $f(x)\geq kx-1$ 恒成立，求实数 $k$ 的取值范围；

（2）函数 $f(x)$ 的图象上是否存在三个不同的点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$（其中 $x_1<x_2<x_3$ 且 $x_1,x_2,x_3$ 成等比数列），使直线 $AC$ 的斜率等于 $f'(x_2)$?请说明理由.

解：⑴ 由 $f(x)\geq kx-1\Leftrightarrow k\leq\ln x+\frac{1}{x}$ 记为 $g(x)$,则 $g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}>0\Leftrightarrow x>1$,

$\therefore g(x)$ 在 $(0,1)$ 上递减，在 $(1,+\infty)$ 上递增,$\therefore g(x)_{\min}=g(1)=1,\therefore k$ 的取值范围为 $(-\infty,1]$

（2）假设存在，设$x_2=x_1q,x_3=x_1q^2(q>1)$,则$y_1=x_1\ln x_1,y_2=x_1q\ln(x_1q),y_3=x_1q^2\ln(x_1q^2)$,

$\therefore k_{AC}=\dfrac{x_1q^2(\ln x_1+2\ln q)-x_1q(\ln x_1+\ln q)}{x_1q^2-x_1q}=\dfrac{q(\ln x_1+2\ln q)-\ln x_1-\ln q}{q-1}$

$=\ln x_1+\dfrac{(2q-1)\ln q}{q-1}=f'(x_2)=\ln x_2+1=\ln x_1+\ln q+1\Leftrightarrow(2q-1)\ln q=(q-1)\ln q+q-1\Leftrightarrow\ln q-1+\dfrac{1}{q}=0\cdots(*)$

设$p(q)=\ln q-1+\dfrac{1}{q}(q>1)$，则$p'(q)=\dfrac{1}{q}-\dfrac{1}{q^2}=\dfrac{q-1}{q^2}>0$,

$\therefore p(q)$在$q>1$上递增，$\therefore p(q)>p(1)=0$，$\therefore(*)$无解，$\therefore$不存在

18. 在$\triangle ABC$中，角$A,B,C$所对的边分别为$a,b,c$，$AB$边上的高设为$h$，且$a+b=c+h$.
（1）若$c=3h$, 求$\tan C$的值；（2）求$\cos C$的取值范围.

解：（1）由已知得：$a+b=\dfrac{4}{3}c\Leftrightarrow\sin A+\sin B=\dfrac{4}{3}\sin C=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}=2\cos\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$即$\cos\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{4}{3}\sin\dfrac{C}{2}$

$\therefore c=3h=3b\sin A\Leftrightarrow\sin C=3\sin A\sin B=\dfrac{3}{2}(\cos(A-B)-\cos(A+B))=\dfrac{3}{2}(2\cdot\dfrac{16}{9}\sin^2\dfrac{C}{2}-1+\cos C)$

$=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{7}{9}\cdot 2\sin^2\dfrac{C}{2}=\dfrac{7}{3}\sin^2\dfrac{C}{2}=2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}$, $\therefore\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{6}{7}$, $\therefore\tan C=\dfrac{2\tan\frac{C}{2}}{1-\tan^2\frac{C}{2}}=\dfrac{84}{13}$

（2）由$a+b=c+h$得$a+b=c+a\sin B$即$\sin A+\sin B=\sin C+\sin A\sin B$

$\Leftrightarrow 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}=\sin C+\dfrac{1}{2}(\cos(A-B)-\cos(A+B))=\sin(A+B)+\cos^2\dfrac{A-B}{2}-\cos^2\dfrac{A+B}{2}$

$\Leftrightarrow 2\sin\dfrac{A+B}{2}(\cos\dfrac{A-B}{2}-\cos\dfrac{A+B}{2})=(\cos\dfrac{A-B}{2}-\cos\dfrac{A+B}{2})(\cos\dfrac{A-B}{2}+\cos\dfrac{A+B}{2})$

$\Leftrightarrow 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cdot 2\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}=2\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\cdot(\cos\dfrac{A-B}{2}+\cos\dfrac{A+B}{2})\Leftrightarrow 2\cos\dfrac{C}{2}-\sin\dfrac{C}{2}=\cos\dfrac{A-B}{2}$

而$-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{A-B}{2}<\dfrac{A+B}{2}<\dfrac{\pi}{2}$, $\therefore\sin\dfrac{C}{2}<\cos\dfrac{A-B}{2}\le 1$,

$\therefore 0<\tan\dfrac{C}{2}<1$, 且$(1+\sin\dfrac{C}{2})^2\ge 4\cos^2\dfrac{C}{2}=4(1-\sin\dfrac{C}{2})(1+\sin\dfrac{C}{2})$即$\sin\dfrac{C}{2}\ge\dfrac{3}{5}$

$\therefore\arcsin\dfrac{3}{5}\le\dfrac{C}{2}<\dfrac{\pi}{4}$即$2\arcsin\dfrac{3}{5}\le C<\dfrac{\pi}{2}$, $\therefore 2\arcsin\dfrac{3}{5}\le C<\dfrac{\pi}{2}$, $\therefore\cos C\in(0,\dfrac{7}{25}]$

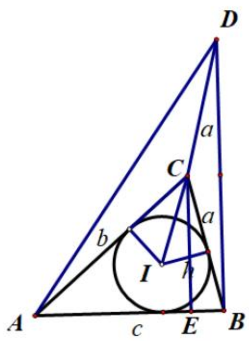
（另外：$\because a+b=c+h$, $\therefore r_{内}=\dfrac{1}{2}(a+b-c)\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{2}h\tan\dfrac{C}{2}$得$\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{2r}{h}=\dfrac{\frac{4S_{\triangle ABC}}{a+b+c}}{\frac{2S_{\triangle ABC}}{c}}=\dfrac{2c}{a+b+c}\in(0,1)$,

$\therefore\dfrac{C}{2}\in(0,\dfrac{\pi}{4})$, 也可得到$C\in(0,\dfrac{\pi}{2})$）

解法二：（陈奕帆，应恺桓，赵信博，梁一鸣，金奕帆，郭凯阳，王楚博, 李悠然，陈子乐，施源，毛坚豪，朱峻毅，王晟懿，房宏霖）（1）由$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}ch$得$ab\sin C=ch$

而$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{(a+b)^2-c^2}{2ab}-1$, $\therefore 1+\cos C=\dfrac{2ch+h^2}{2\cdot\frac{ch}{\sin C}}=\dfrac{(2c+h)\sin C}{2c}$

$\therefore\dfrac{\sin C}{1+\cos C}=\dfrac{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\cos^2\frac{C}{2}}=\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{2c}{2c+h}=\dfrac{6}{7}(\because c=3h)$, $\therefore\tan C=\dfrac{2\tan\frac{C}{2}}{1-\tan^2\frac{C}{2}}=\dfrac{84}{13}$



（2）由（1）得：$\tan\frac{C}{2}=\frac{2c}{2c+h}\in(0,1),\therefore C\in(0,\frac{\pi}{2}),$

如图，作$BD\perp AB$，且$BD=2h,$连$AD,CD$，则$CD=a,AD\le AC+CD=b+a$

$\therefore AD=\sqrt{c^2+4h^2}\le b+a=c+h,\therefore 3h\le 2c,\therefore \tan\frac{C}{2}\in[\frac{3}{4},1),\therefore \cos C=\dfrac{1-\tan^2\frac{C}{2}}{1+\tan^2\frac{C}{2}}=\dfrac{2}{1+\tan^2\frac{C}{2}}-1\in(0,\frac{7}{25}]$

解法三：（邵卿）（1）由已知得$a=\frac{h}{\sin A},b=\frac{h}{\sin B},c=\frac{h}{\tan A}+\frac{h}{\tan B}$

$\therefore a+b=\frac{h}{\sin A}+\frac{h}{\sin B}=\frac{h}{\tan A}+\frac{h}{\tan B}+h\Leftrightarrow 1=\frac{1-\cos A}{\sin A}+\frac{1-\cos B}{\sin B}=\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2},$

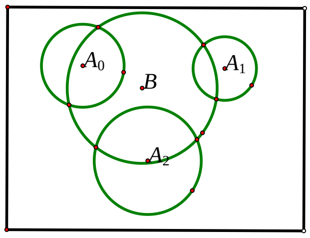
令$\tan\frac{A}{2}=u,\tan\frac{B}{2}=v(u,v>0)$，则$u+v=1,$

$\because c=3h,\therefore 3=\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan B}=\frac{1-u^2}{2u}+\frac{1-v^2}{2v}=\frac{1-uv}{2uv}=\frac{1}{2uv}-\frac{1}{2},\therefore uv=\frac{1}{7}$

$\therefore \tan\frac{C}{2}=\dfrac{1}{\tan(\frac{A}{2}+\frac{B}{2})}=\frac{1-uv}{u+v}=\frac{6}{7},\therefore \tan C=\dfrac{2\cdot\frac{6}{7}}{1-\frac{36}{49}}=\frac{84}{13}$

（2）由（1），令$t=1-uv\in[\frac{3}{4},1),\therefore \tan\frac{C}{2}=t,\tan C=\frac{2t}{1-t^2}=\dfrac{2}{\frac{1}{t}-t}$在$[\frac{3}{4},1)$上递增，$\therefore \tan C\in[\frac{24}{7},+\infty),\therefore \cos C\in(0,\frac{7}{25}]$

19. 2023 年 10 月 11 日，中国科学技术大学潘建伟团队成功构建 255 个光子的量子计算机原型机“九章三号”，求解高斯玻色取样数学问题比目前全球是快的超级计算机快一亿亿倍.相较传统计算机的经典比特只能处于 0 态或 1 态，量子计算机的量子比特（qubit）可同时处于 0 与 1 的叠加态，故每个量子比特处于 0 态或 1 态是基于概率进行计算的.现假设某台量子计算机以每个粒子的自旋状态作为是子比特，且自旋状态只有上旋与下旋两种状态，其中下旋表示“0”，上旋表示“1”，粒子间的自旋状态相互独立.现将两个初始状态均为叠加态的粒子输入第一道逻辑门后，粒子自旋状态等可能的变为上旋或下旋，再输入第二道逻辑门后，粒子的自旋状态有 $p$ 的概率发生改变，记通过第二道逻辑门后的两个粒子中上旋粒子的个数为 $X$.（1）若通过第二道逻辑门后的两个粒子中上旋粒子的个数为 2，且 $p=\frac{1}{3}$，求两个粒子通过第一道逻辑门后上旋粒子个数为 2 的概率；（2）若一条信息有 $n(n>1,n\in N^*)$ 种可能的情况且各种情况互斥，记这些情况发生的概率分别为 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，则称 $H=f(p_1)+f(p_2)+\cdots+f(p_n)$（其中 $f(x)=-x\log_2 x$）为这条信息的信息熵.试求两个粒子通过第二道逻辑门后上旋粒子个数为 $X$ 的信息熵 $H$;（3）将一个下旋粒子输入第二道逻辑门，当粒子输出后变为上旋粒子时则停止输入，否则重复输入第二道逻辑门直至其变为上旋粒子，设停止输入时该粒子通过第二道逻辑门的次数为 $Y(Y=1,2,3,\cdots,n,\cdots)$.证明：当 $n$ 无限增大时，$Y$ 的数学期望趋近于一个常数.参考公式：$0<q<1$ 时，$\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0$，$\lim\limits_{n\to+\infty}nq^n=0$.




（1）解：设$A_i$=“两个粒子通过第一道逻辑门后上旋粒子个数为$i$个”，$i=0,1,2,$
$B$=“两个例子通过第二道逻辑门后上旋粒子个数为2个”

则$P(A_0)=(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}=P(A_2),P(A_1)=C_2^1(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2},$

$P(B|A_0)=\frac{1}{9},P(B|A_1)=\frac{2}{9},P(B|A_2)=\frac{4}{9},$

由全概率公式得$P(B)=\sum_{i=0}^{2}P(A_i)\cdot P(B|A_i)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9}+C_2^1(\frac{1}{2})^2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\cdot(\frac{2}{3})^2=\frac{1}{4}$

$$\therefore P(A_2|B)=\frac{P(A_2B)}{P(B)}=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{4}{9}}{\frac{1}{4}}=\frac{4}{9}$$

（2）由已知及（1）得$P(X=2)=\frac{1}{4}p^2+\frac{1}{2}p(1-p)+\frac{1}{4}(1-p)^2=\frac{1}{4},$

$P(X=1)=\frac{1}{4}\cdot C_2^1p(1-p)+\frac{1}{2}(p^2+(1-p)^2)+\frac{1}{4}C_2^1p(1-p)=\frac{1}{2},P(X=0)=1-P(X=2)-P(X=1)=\frac{1}{4},$

$\therefore H=-\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

（3）证明：由已知得$P(Y=i)=(1-p)^{i-1}p(i=1,2,\cdots)$

$\therefore E(Y)=\sum_{i=1}^{\infty}iP(Y=i)=p(1-p)^0+2p(1-p)^1+3p(1-p)^2+\cdots+np(1-p)^{n-1}+\cdots$

$\therefore (1-p)E(Y)=\qquad p(1-p)^1+2p(1-p)^2+\cdots+(n-1)p(1-p)^{n-1}+\cdots$

$\therefore pE(Y)=p+p(1-p)+p(1-p)^2+\cdots+p(1-p)^{n-1}+\cdots=\lim_{n\to\infty}\frac{p(1-(1-p)^n)}{1-(1-p)}=1,$

$\therefore$当$n$无限增大时，$Y$的数学期望趋近于一个常数$\frac{1}{p}$