立体几何（4）二面角解答

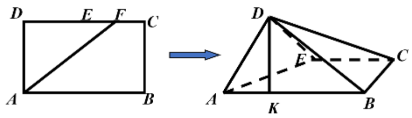
2023-06-03

二面角：
- 定义：空间一条直线出发的两个半平面组成的图形，范围:$[0,\pi]$
- 求法：
  - 作平面角：
    - 定义、三垂线定理、棱的垂面
    - 转化：
      - 体积
      - 法向量
      - 射影面积公式:$\cos\theta=\dfrac{S_{影}}{S}$
  - 向量法:$\cos\theta=\pm\dfrac{|\overrightarrow{n_\alpha}\cdot\overrightarrow{n_\beta}|}{|\overrightarrow{n_\alpha}|\cdot|\overrightarrow{n_\beta}|}$

（2007）（16）已知点 O 在二面角 $\alpha-AB-\beta$ 的棱上，点 P 在 α 内，且 $\angle POB=45^\circ$．若对于 β 内异于 O 的任意一点 Q，都有 $\angle POQ\geq 45^\circ$，则二面角 $\alpha-AB-\beta$ 的大小是___________．　90°

（09高考）如图，在长方形$ABCD$中，$AB=2, BC=1, E$为DC的中点，F为线段EC（端点除外）上一动点.现将$\triangle AFD$沿AF折起，使平面$ABD\perp$平面ABC.在平面ABD内过点D作$DK\perp AB$，K为垂足.

设$AK=t$，则t的取值范围是______. $(\frac{1}{2},1)$



变式：平面$ADF\perp$平面ABC? $(\frac{2}{5},\frac{1}{2})$

变式 1（1）已知四面体 $A-BCD, AB=\sqrt{2}, BC=BD=2, AB\perp$平面$BCD, BE\perp AC$于$E, BF\perp AD$于$F$，则（ ）

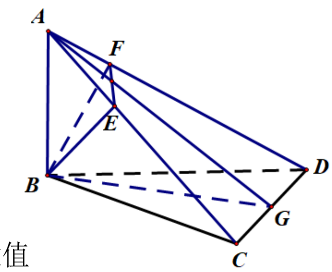
$A.AC$可能与EF垂直,$\triangle BEF$的面积有最大值　　$B.AC$不可能与EF垂直,$\triangle BEF$的面积有最大值

$C.AC$可能与EF垂直,$\triangle BEF$的面积没有最大值　$D.AC$不可能与EF垂直,$\triangle BEF$的面积没有最大值

key:取CD的中点$G, \because BC=BD, \therefore BG\perp CD, AD=AC$

$\because AB\perp$平面$BCD, \therefore AG\perp CD$

$\because BE\perp AC, BF\perp AD, \therefore BE=BF=\dfrac{2}{\sqrt{3}}, EF\underset{=}{//}\dfrac{1}{3}CD,$



$\therefore EF\perp AG, \therefore EF\not\perp AC,$设$CD=x(x\in(0,4))$

$\therefore S_{\triangle BEF}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x}{3}\sqrt{\dfrac{4}{3}-\dfrac{x^2}{36}}\leq\dfrac{2}{3}$（当且仅当$x=2\sqrt{6}>4$时取＝）, $\therefore\triangle BEF$面积无最大值

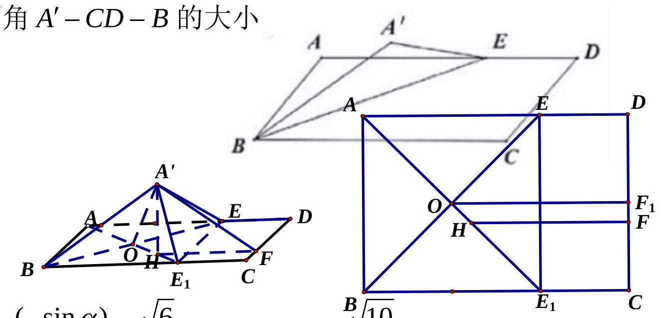
（2）已知矩形 $ABCD, AB=2, BC=3$，设 E 是边 AD 上的点，且 $AE=2ED$．现将 $\triangle ABE$ 沿着直线 BE 翻折至 $\triangle A'BE$，设二面角 $A'-CD-B$ 的大小为 $\theta(0<\theta<\pi)$,则$\sin\theta$ 的最大值是__________.

key:连BE,取其中点O,连AO交BC于E_1,

则$BE\perp$平面$A'OE_1$,设$\angle A'OE_1=\alpha\in[0,\pi]$

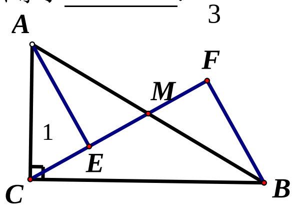
$\therefore OH=\sqrt{2}\cos\alpha, HF=2-\cos\alpha$

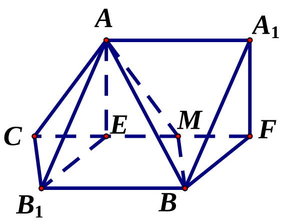
作$A'H\perp OE_1$于H,作$HF//AD$交CD于F,



则$\angle A'FH=\theta, \therefore\tan\theta=\dfrac{A'H}{HF}=\dfrac{\sqrt{2}\sin\alpha}{2-\cos\alpha}=\sqrt{2}\cdot\dfrac{0-(-\sin\alpha)}{2-\cos\alpha}\leq\dfrac{\sqrt{6}}{3}, \therefore(\sin\theta)_{\max}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

（1998 全国竞赛）$\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ, \angle B=30^\circ, AC=2, M$ 是 AB 的中点，将$\triangle ACM$ 沿 CM 折起，使 A,B 两点间的距离为 $2\sqrt{2}$，此时三棱锥 $A-BCM$ 的体积等于_________. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$





立体几何（4）二面角解答

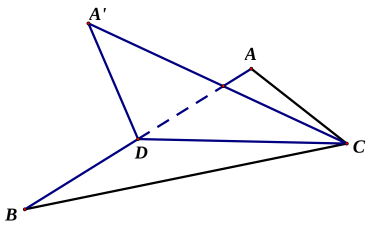
2023-06-03

变式 1（1）已知点P到二面角$\alpha-l-\beta$的面α、l、β的距离依次为$\sqrt{2}$、2、$\sqrt{3}$，则二面角$\alpha-l-\beta$的大小为_.

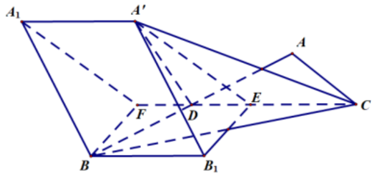
$key:15°,165°,75°,105°$

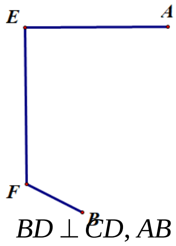
（2）已知二面角$\alpha-l-\beta$的大小为$60°$，若过空间一点P可作四个平面与α,β都成θ角，则θ的取值范围为_____. $(60°,90°)$

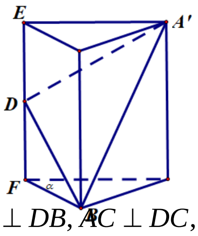
（15高考）如图，已知$\triangle ABC$，D是AB的中点，沿直线CD将$\triangle ACD$折成$\triangle A'CD$，所成二面角$A'-CD-B$的平面角为α，则（　）B



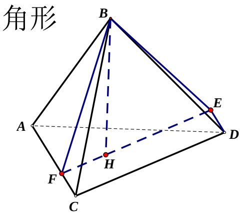
$A.\angle A'DB\le\alpha$　$B.\angle A'DB\ge\alpha$　$C.\angle A'CB\le\alpha$　$D.\angle A'CB\ge\alpha$

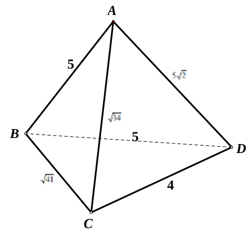






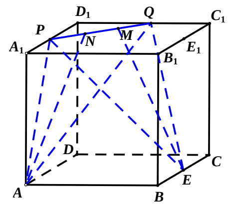
变式 1（1）在三棱锥$A-BCD$中，$BD\perp CD, AB\perp DB, AC\perp DC, AB=DB=5, CD=4$，将围成三棱锥的四个三角形的面积从小到大依次记为$S_1,S_2,S_3,S_4$，则面积为$S_4$的三角形在面积为$S_2$的三角形所在平面上的射影面积为（　）A





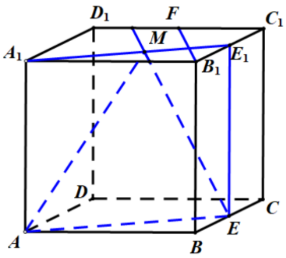
$A.2\sqrt{34}$　　$B.\dfrac{25}{2}$　　$C.10$　　$D.30$

（2）已知在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点E为棱BC的中点，直线l在平面$A_1B_1C_1D_1$内.若二面角$A-l-E$的平面角为θ，则$\cos\theta$的最小值为（　）



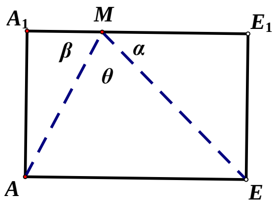
$A.\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　　$B.\dfrac{11}{21}$　　$C.\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　$D.\dfrac{3}{5}$

key:（异面直线上两点间的距离公式）$\dfrac{5}{4}=d^2+m^2+n^2-2mn\cos\theta$



得$\cos\theta=\dfrac{m^2+n^2+d^2-\dfrac{5}{4}}{2mn}\ge\dfrac{m^2+n^2-\dfrac{5}{4}}{2mn}\left(m=\sqrt{1+x^2}, n=\sqrt{1+(\dfrac{\sqrt{5}}{2}-x)^2}\right)$

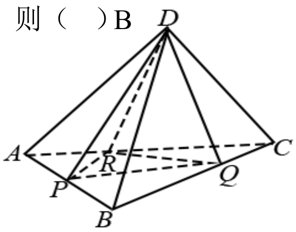
由$\tan\theta=-\tan(\alpha+\beta)=-\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{5}}{2}-x}}{1-\dfrac{1}{x(\dfrac{\sqrt{5}}{2}-x)}}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{5}}{2}}{-x(\dfrac{\sqrt{5}}{2}-x)+1}\in[\dfrac{\sqrt{5}}{2},\dfrac{8\sqrt{5}}{11}](\because x\in[0,\dfrac{\sqrt{5}}{2}])$



$\therefore\cos\theta_{\min}=\dfrac{11}{21}$

（17高考）如图，已知正四面体$D-ABC$，P,Q,R分别为AB,BC,CA上点，$AP=PB,\dfrac{BQ}{QC}=\dfrac{CR}{RA}=2$，分别记二面角$D-PR-Q, D-PQ-R, D-QR-P$的平面角为$\alpha,\beta,\gamma$，则（　）B

$A.\gamma<\alpha<\beta$　$B.\alpha<\gamma<\beta$　　$C.\alpha<\beta<\gamma$　　$D.\beta<\gamma<\alpha$

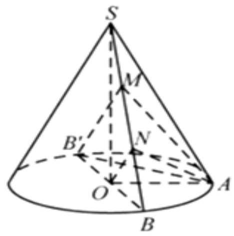


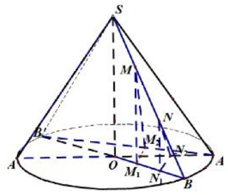
立体几何（4）二面角解答

2023-06-03

(202001学考)18.如图，在圆锥SO中，A,B是$\odot O$上动点，BB'是$\odot O$的直径，M,N是SB的两个三等分点，$\angle AOB=\theta(0<\theta<\pi)$，记二面角$N-OA-B,M-AB'-B$的平面角分别为$\alpha,\beta$,若$\alpha\le\beta$，则$\theta$的最大值是

（　）$A.\dfrac{5\pi}{6}$　$B.\dfrac{2\pi}{3}$　$C.\dfrac{\pi}{2}$　$D.\dfrac{\pi}{4}$　B





$$key:\tan\alpha=\frac{\frac{1}{3}SO}{\frac{2}{3}R\sin\theta}=\frac{SO}{2R\sin\theta}\le\tan\beta=\frac{\frac{2}{3}SO}{\frac{4}{3}R\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{SO}{2R\sin\frac{\theta}{2}}$$

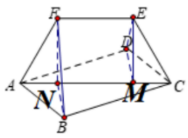
$$\therefore\cos\frac{\theta}{2}\ge\frac{1}{2},\therefore\frac{\theta}{2}\le\frac{\pi}{3}\text{即}\theta\le\frac{2\pi}{3}$$

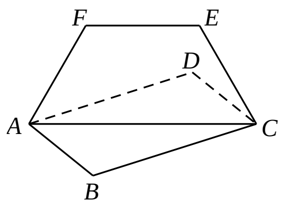
（201804学考）如图，设矩形$ABCD$所在平面与梯形$ACEF$所在平面相交于AC，若$AB=1,BC=\sqrt{3}$,
$AF=FE=EC=1$，则下列二面角的平面角大小为定值的是（　B　）

$A.\ F-AB-C$　　$B.\ B-EF-D$　　$C.\ A-BF-C$　　$D.\ B-AF-D$

$key:B-EF-D$的大小$=\angle NFB+\angle DEM$

$$=\frac{\pi-\angle FNB}{2}+\frac{\pi-\angle DME}{2}=\frac{\pi}{2}$$

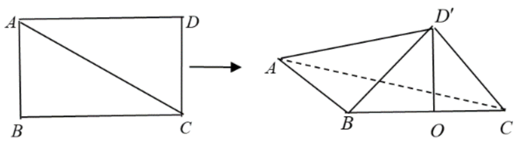




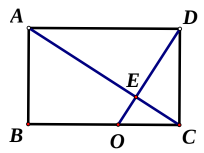
变式1（1）①如图，矩形$ABCD$中，$AB=1,BC=2$，将$\triangle ADC$沿对角线AC翻折至$\triangle AD'C$，使顶点D'在平面ABC的投影O恰好落在边BC上，连结BD'．设二面角$D'-AB-C$，$D'-AC-B$，$B-AD'-C$大小分别为α,β,γ，则（　　）A

A．$\alpha+\beta>\gamma$　　B．$\alpha+\beta=\gamma$

C．$\gamma+\alpha>\beta$　　D．$\gamma+\beta>\alpha$



$key:$作$DE\perp AC$于E,交BC于O,则



$$\tan\alpha=\frac{D'O}{OB}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3},\tan\beta=\frac{OD'}{OE}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2\sqrt{5}}}=\sqrt{15},$$

$AD'=2,AB=1,BD'=\sqrt{3},\therefore AB\perp BD',\therefore AB\perp$平面$BCD'$,

$\therefore$平面$ACD'\perp$平面$ABD',\therefore\gamma=90°,\therefore\alpha+\beta>\gamma$

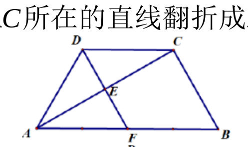
②在菱形$ABCD$中，$\angle BAD=60°$,现将$\triangle ABD$沿BD折起，形成三棱锥$A'-BCD$，当$0<A'C<BC$时，记二面角$A'-BD-C$的大小为α,二面角$A'-BC-D$的大小为β，二面角$A'-CD-B$的大小为γ,则（　）B

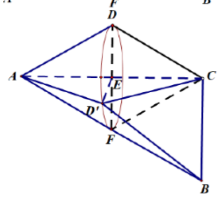
$A.\alpha>\beta=\gamma$　　$B.\alpha<\beta=\gamma$　　$C.\alpha>\beta>\gamma$　　$D.\gamma<\alpha<\beta$

（2）如图，在等腰梯形$ABCD$中，$AB=2AD=2CD=4$.现将$\triangle DAC$沿对角线AC所在的直线翻折成$\triangle D'AC$.记二面角$D'-AC-B$大小为$\alpha(0<\alpha<\pi)$，则（　）B

$A.$存在α,使得$D'A\perp$平面$D'BC$　　　$B.$存在α,使得$D'A\perp BC$

$C.$不存在α,使得平面$D'AC\perp$平面ABC　　$D.$存在α,使得平面$D'AB\perp$平面ABC





$key:DE\perp AC$于E,

在圆锥AE中,$DE//BC,AD'$在圆锥底面圆E内射影为$D'E$,

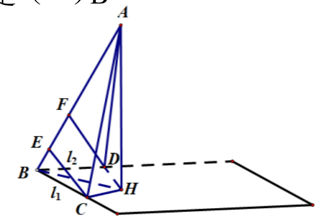
$\therefore$存在$\alpha,D'E\perp BC,\therefore D'A\perp BC$

（3）　已知O,A,B在平面α内,$\angle AOB=\dfrac{\pi}{6}$,过$OA,OB$分别作平面$\beta,\gamma$,且锐二面角$\alpha-OA-\beta$的 大小为$\dfrac{\pi}{4}$,

立体几何（4）二面角解答

2023-06-03

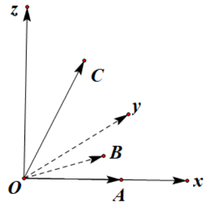
锐二面角$\alpha-OB-\gamma$的大小为$\dfrac{\pi}{3}$，则平面β,γ所成的锐二面角的平面角的余弦值是（　）B



$A.\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　　$B.\dfrac{\sqrt{2}}{8}$　　$C.\dfrac{1}{4}$　　$D.\dfrac{1}{3}$

$key2: A(1,0,0), B(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},0), C(a,b,1),$ 则$\overrightarrow{n_{AB}}=(0,0,1),$

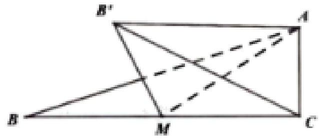
设$\overrightarrow{n_{AC}}=(x,y,z),$ 则$\begin{cases}x=0\\xa+yb+z=0\end{cases},\therefore \overrightarrow{n_{AC}}=(0,1,-b)$



设$\overrightarrow{n_{BC}}=(x,y,z),$ 则$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{1}{2}y=0\\xa+yb+z=0\end{cases},\therefore \overrightarrow{n_{BC}}=(1,-\sqrt{3},-a+\sqrt{3}b)$

$$\therefore\begin{cases}\overrightarrow{n_{AB}}\cdot\overrightarrow{n_{AC}}=\sqrt{1+b^2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-b\\\overrightarrow{n_{AB}}\cdot\overrightarrow{n_{BC}}=\sqrt{4+(-a+\sqrt{3}b)^2}\cdot\dfrac{1}{2}=-a+\sqrt{3}b\end{cases}\text{得}\begin{cases}b=-1\\a=-\dfrac{5}{\sqrt{3}}\end{cases},\therefore\cos\theta=\dfrac{|(0,1,1)\cdot(1,-\sqrt{3},\dfrac{2}{\sqrt{3}})|}{\sqrt{2}\cdot\dfrac{4}{\sqrt{3}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$$

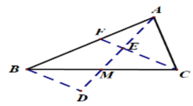
（4）如图，在$\triangle ABC$中，点M是边BC的中点，将$\triangle ABM$沿着AM翻折成$\triangle AB'M$，且点B'不在平面AMC内，点P是线段$B'C$上一点.若二面角$P-AM-B'$与二面角$P-AM-C$的平面角相等，则直线AP经过$\triangle AB'C$的（　A　）A. 重心　B. 垂心 C. 内心 D. 外心

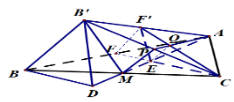


变式1key:由三垂线定理作二面角的平面角得$d_{P\to AB'M}=d_{P\to ACM}$

$\therefore V_{P-AB'M}=V_{P-ACM}$即$V_{A-PB'M}=V_{A-PCM},\therefore S_{\Delta PB'M}=S_{\Delta PCM},\therefore B'P=CP$

$key2:\angle F'EQ=\angle CEQ,\therefore\dfrac{F'Q}{QC}=\dfrac{F'E}{EC}=\dfrac{FE}{EC},\therefore QE//FF'//BB',$

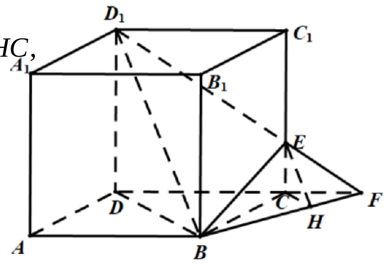




$\therefore QE//$平面$CBB',\therefore QE//PM,\therefore PM//BB',\therefore P$是$B'C$的中点，

（5）①在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=AA_1=2AD=2$，E为棱CC_1上一点，记平面BD_1E与底面$ABCD$所成的锐二面角为α，则当α取得最小值时CE的长度为______.$\dfrac{2}{5}$

key:延长D_1F交DC的延长线于F,连BF,作$CH\perp BF$于H，则$\alpha=\angle FHC$,

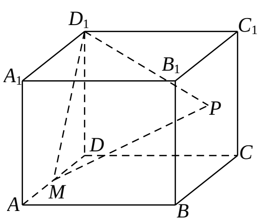


设$CE=x$，则$CF=\dfrac{2x}{2-x},CH=\dfrac{1\cdot\dfrac{2x}{2-x}}{\sqrt{1+\dfrac{4x^2}{(2-x)^2}}}=\dfrac{2x}{\sqrt{(2-x)^2+4x^2}}$

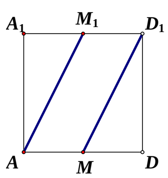
$$\therefore\tan\alpha=\dfrac{x}{\dfrac{2x}{\sqrt{(2-x)^2+4x^2}}}=\dfrac{\sqrt{5(x-\dfrac{2}{5})^2+\dfrac{16}{5}}}{2}\ge\dfrac{2}{\sqrt{5}}(\text{当且仅当}x=\dfrac{2}{5}\text{取}=)$$

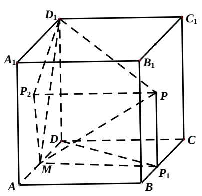
②设点M是长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱AD的中点，$AA_1=AD=4, AB=5$，点P在面BCC_1B_1上，若平面D_1PM分别与平面$ABCD$和平面BCC_1B_1所成的锐二面角相等，则P点的轨迹为（ C　）

A．椭圆的一部分 B．抛物线的一部分　C．一条线段 D．一段圆弧



key:利用射影面积公式得P在面AA_1D_1D上的射影为$\triangle DMP_2$，其面积为5





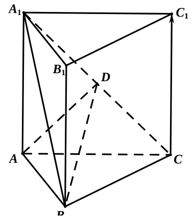
立体几何（4）二面角解答

2023-06-03

2.（2022 新高考Ⅰ）如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$的体积为4,$\triangle A_1BC$的面积为$2\sqrt{2}$.

⑴ 求A到平面A_1BC的距离；

⑵ 设D为A_1C的中点，$AA_1=AB$，平面$A_1BC\perp$平面ABB_1A_1，求二面角$A-BD-C$的正弦值.

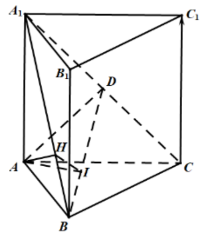


解：⑴ 由$V_{A-A_1BC}=\frac{1}{3}V_{ABC-A_1B_1C_1}=\frac{4}{3}=\frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{2}\cdot d$得$d=\sqrt{2}$即为所求的

⑵ 作$AH\perp A_1B$于H,$\because$平面$A_1BC\perp$平面ABB_1A_1,$\therefore AH\perp$平面A_1BC,且$AH=\sqrt{2}$,

作$AI\perp BD$于I，连AI，则$\angle AIH$是二面角$A-BD-C$的平面角的补角，

$\because AB=AA_1,\therefore AB=AA_1=2, A_1B=2\sqrt{2}$,



而$V_{ABC-A_1B_1C_1}=S_{\triangle ABC}\cdot 2=4$得$S_{\triangle ABC}=2=2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=S_{\triangle A_1BC}\cdot\cos 45°$,

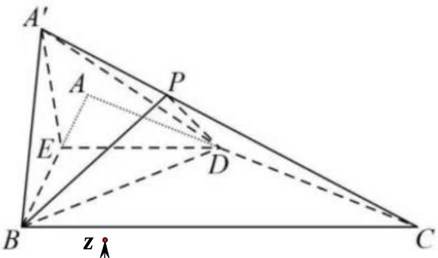
$\therefore AB\perp BC, A_1B\perp BC, BC=2$

（或者由平面$A_1ABB_1\perp$平面ABC,平面$A_1BC\perp$平面ABB_1A_1得$BC\perp$平面ABB_1A_1）

$\therefore HI=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$,$\therefore \tan\angle AIH=\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}=\sqrt{3}$,$\therefore$二面角$A-BD-C$的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. 如图，四棱锥$A'-BCDE$是由直角$\triangle ABC$沿其中位线DE翻折而成，且$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$,$PC=2PA'$,

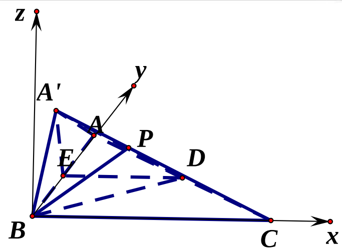
设$AB=1, AC=3$.（Ⅰ）若$\angle A'EB=\frac{\pi}{3}$，求二面角$A'-BD-P$的余弦值；



（Ⅱ）若二面角$C-A'D-E$的大小为$\frac{5\pi}{6}$，求三棱锥$P-A'ED$的体积.

解：（Ⅰ）建立空间直角坐标系，如图，则$B(0,0,0)$,

$C(2\sqrt{2},0,0), D(\sqrt{2},\frac{1}{2},0), E(0,\frac{1}{2},0), A'(0,\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}), P(\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{1}{6},\frac{\sqrt{3}}{6})$,



设平面$A'BD$的法向量$\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{BA'}=\frac{1}{4}y+\frac{\sqrt{3}}{4}z=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{BD}=\sqrt{2}x+\frac{1}{2}y=0\end{cases}$

令$y=\sqrt{3}$得$\overrightarrow{n_1}=(-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},\sqrt{3},-1)$

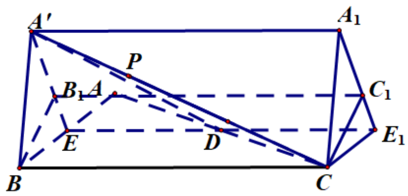
设平面PBD的法向量$\overrightarrow{n_2}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BD}=\sqrt{2}x+\frac{1}{2}y=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BP}=\frac{2\sqrt{2}}{3}x+\frac{1}{6}y+\frac{\sqrt{3}}{6}z=0\end{cases}$ 令$x=\sqrt{2}$得$\overrightarrow{n_2}=(\sqrt{2},-4,-\frac{4}{\sqrt{3}})$

$\therefore\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{19}{35}$即为所求的

（Ⅱ）设$\angle A'EB=\theta$,作$BB_1\perp A'E$于B_1,由（Ⅰ）得:$BB_1\perp$平面$A'ED$,且$BB_1=\frac{1}{2}\sin\theta$,

而$BC//$平面$A'DE$,$\therefore C$到平面$A'DE$的距离$CC_1=\frac{1}{2}\sin\theta$,

作$A'A_1\underset{=}{//}EE_1, CE_1\underset{=}{//}BE, CC_1\underset{=}{//}BB_1$,

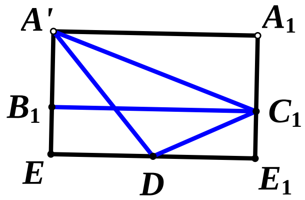


立体几何（4）二面角解答

2023-06-03

在矩形$A'EE_1A_1$中，$EB_1=E_1C_1=\frac{1}{2}\cos\theta$,

$\therefore \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot d_{C_1\to A'D}=\sqrt{2}-(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\cos\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\cos\theta))$



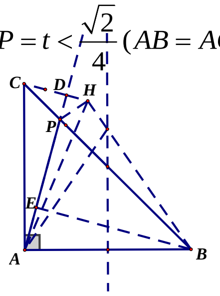
得$d_{C_1\to A'D}=\frac{\sqrt{2}(1+\cos\theta)}{3}$, $\therefore \tan\frac{\pi}{6}=\frac{CC_1}{d_{C_1\to A'D}}=\frac{3\sin\theta}{2\sqrt{2}(1+\cos\theta)}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 得 $\cos\theta=\frac{19}{35}$

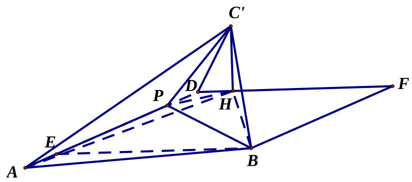
$\therefore V_{P-A'ED}=\frac{1}{3}V_{C-A'ED}=\frac{1}{6}V_{C-A'EE_1A_1}=\frac{1}{12}V_{A'BE-A_1CE_1}=\frac{1}{12}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{12\sqrt{6}}{35}=\frac{\sqrt{3}}{70}$

（201711 月学考）（18）等腰直角$\triangle ABC$斜边BC上的一点P满足$CP\le\frac{1}{4}CB$.将$\triangle CAP$沿AP翻折至$\triangle C'AP$，使二面角$C'-AP-B$为$60°$.记直线$C'A,C'B,C'P$与平面ABP所成角分别为α,β,γ.则（　　）C

$A.\alpha<\beta<\gamma$　　$B.\alpha<\gamma<\beta$　$C.\beta<\alpha<\gamma$　$D.\gamma<\alpha<\beta$

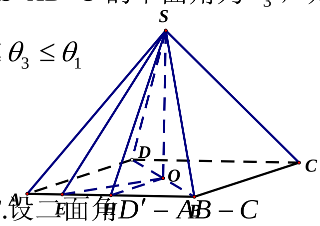
key: 设$CP=t<\frac{\sqrt{2}}{4}(AB=AC=1)$, 则$CH=\frac{3}{2}CD=\frac{3}{2}\sin\angle CAP$, $\therefore \tan\alpha=\frac{C'H}{AH}$, $\tan\beta=\frac{C'H}{BH}$, $\tan\gamma=\frac{C'H}{PH}$, $\therefore$ 选C





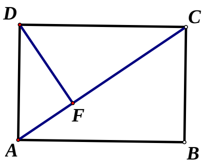
（2018 高考）8. 已知四棱锥 $S-ABCD$ 的底面是正方形，侧棱长均相等，E 是线段 AB 上的点（不含端点），设 SE 与 BC 所成的角为θ_1，SE 与平面 $ABCD$ 所成的角为θ_2，二面角 $S-AB-C$ 的平面角为θ_3，则

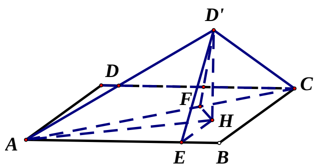
（D　）A. $\theta_1\le\theta_2\le\theta_3$　　B. $\theta_3\le\theta_2\le\theta_1$　　C. $\theta_1\le\theta_3\le\theta_2$　　D. $\theta_2\le\theta_3\le\theta_1$

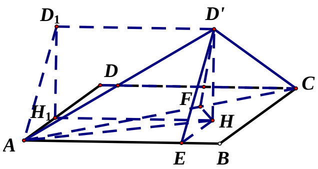


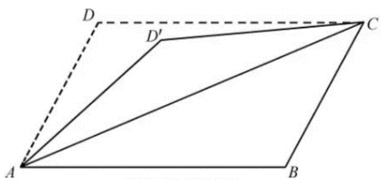
（201811 月学考）如图，四边形$ABCD$为矩形，沿AC将$\triangle ADC$翻折成$\triangle AD'C$.设二面角$D'-AB-C$的平面角为θ，直线AD'与直线BC所成角为θ_1，直线AD'与平面ABC所成角为θ_2.当θ为锐角时，有（　）B

$A.\theta_2\le\theta_1\le\theta$　$B.\theta_2\le\theta\le\theta_1$　　$C.\theta_1\le\theta_2\le\theta$　　$D.\theta\le\theta_2\le\theta_1$

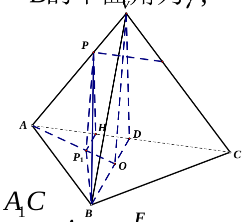






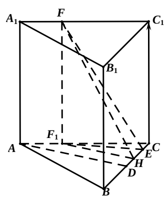


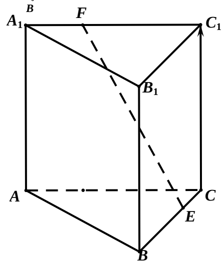
(19高考）（8）设三棱锥$V-ABC$的底面是正三角形，侧棱长均相等，P是棱VA上的点（不含端点）.记直线PB与直线AC所成角为α，直线PB与平面ABC所成角为β,二面角$P-AC-B$的平面角为γ，则（　　）$A.\beta<\gamma,\alpha<\gamma$　$B.\beta<\alpha,\beta<\gamma$　$C.\beta<\alpha,\gamma<\alpha$　$D.\alpha<\beta,\gamma<\beta$　　B



（2022浙江高考）如图，已知正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$, $AC=AA_1$, E,F分别棱BC,A_1C上的点，记EF与AA_1所成角为α, EF与平面ABC所成的角为β,二面角$F-BC-A$的平面角为γ，则（　　）

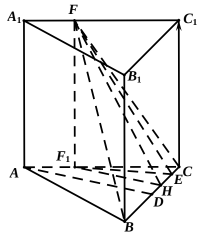
$A.\alpha\le\beta\le\gamma$　$B.\beta\le\alpha\le\gamma$　$C.\beta\le\gamma\le\alpha$　$D.\alpha\le\gamma\le\beta$





立体几何（4）二面角解答

2023-06-03



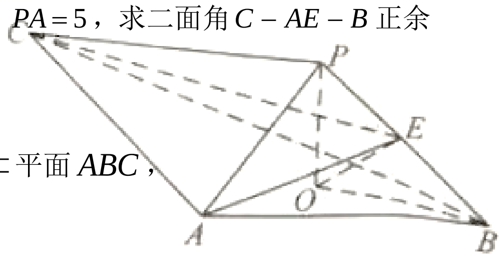
key: 作$FF_1//AA_1$交AC于F_1，作$F_1H\perp BC$于H，连FH

则$\alpha=\angle EFF_1\ge\dfrac{\pi}{4}\ge\beta=\dfrac{\pi}{2}-\angle EFF_1,\gamma=\angle FHF_1\ge\beta,$

连FB,FC，则平面$FF_1H\perp$平面$BCF,\therefore\alpha\ge\gamma,\therefore$选$C$

（2022Ⅱ）20.（12 分）如图，PO是三棱锥$P-ABC$的高，$PA=PB$，$AB\perp AC$，E为PB的中点.

（1）证明：$OE//$平面PAC；（2）若$\angle ABO=\angle CBO=30°$，$PO=3$，$PA=5$，求二面角$C-AE-B$正余弦值.



20.（1）证明：连接BO并延长交AC于点D，连接OA、PD，

因为PO是三棱锥$P-ABC$的高，所以$PO\perp$平面ABC，$AO,BO\subset$平面ABC，

所以$PO\perp AO$、$PO\perp BO$，

又$PA=PB$，所以$\triangle POA\cong\triangle POB$，即$OA=OB$，所以$\angle OAB=\angle OBA$，

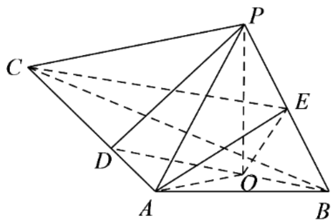
又$AB\perp AC$，即$\angle BAC=90°$，所以$\angle OAB+\angle OAD=90°$，$\angle OBA+\angle ODA=90°$，

所以$\angle ODA=\angle OAD$

所以$AO=DO$，即$AO=DO=OB$，所以O为BD的中点，又E为PB的中点，所以$OE//PD$，

又$OE\not\subset$平面PAC，$PD\subset$平面PAC，

所以$OE//$平面PAC



（2）$\dfrac{11}{13}$

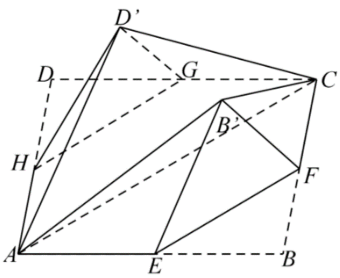
变式 1 （1）(海宁 5 月）如图，在矩形$ABCD$中，$AB=\sqrt{3}BC,E,F,G,H$分别为边AB,BC,CD,DA的中点，将$\triangle EBF,\triangle GDH$分别沿直线$EF,HG$翻折形成四棱锥$B'-AEFC,D'-ACGH$，下列说法正确的是（　）C

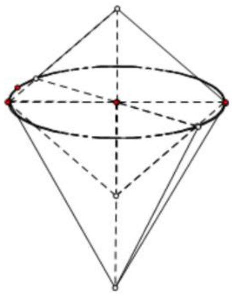
$A.$异面直线EB',GD'所成角的取值范围是$(0,\dfrac{\pi}{6}]$

$B.$异面直线EB',GD'所成角的取值范围是$(0,\dfrac{\pi}{2}]$

$C.$异面直线FB',HD'所成角的取值范围是$(0,\dfrac{\pi}{2}]$

$D.$异面直线FB',HD'所成角的取值范围是$(0,\dfrac{\pi}{3}]$





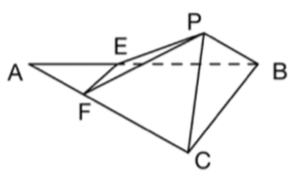
key: $EF//AC/HG,\angle DGH=FEB=\dfrac{\pi}{6},\angle DHG=\angle EFB=\dfrac{\pi}{3},$

HD',GD',EB',FB'的轨迹为圆锥

（2）如图，在正四棱锥 P-$ABCD$ 中，设直线 PB 与直线 DC，平面 $ABCD$ 所成的角分别为α,β，二面角$P-CD-B$的大小为γ，则（　）A

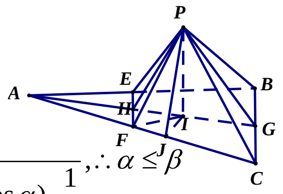
A. $\alpha>\beta,\gamma>\beta$　　B. $\alpha>\beta,\gamma<\beta$　　C. $\alpha<\beta,\gamma>\beta$　　D. $\alpha<\beta,\gamma<\beta$

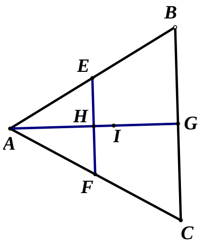
（3）已知等边$\triangle ABC$，点 E,F 分别是边 AB,AC 上的动点，且满足$EF//BC$，将$\triangle AEF$沿着 EF 翻折至 P 点处，如图所示，记二面角$P-EF-B$的平面角为α，二面角$P-FC-B$



的平面角为β，直线PF与平面$EFCB$所成角为γ，则（　A　）

A. $\alpha\ge\beta\ge\gamma$　　B. $\alpha\ge\gamma\ge\beta$　　C. $\beta\ge\alpha\ge\gamma$　　D. $\beta\ge\gamma\ge\alpha$



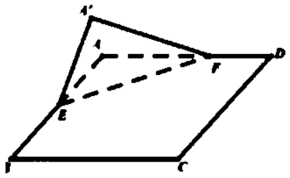


$key: H,G$为EF,BC的中点，则$\angle PHI=\alpha,\angle PJI=\beta,\angle PFI=\gamma$,

$\therefore \gamma\ge\alpha,\gamma\ge\beta$,而$PH=AH>HI$,

$\therefore \tan\alpha=\frac{PI}{PH}=\frac{PI}{AH}<\tan\beta=\frac{PI}{IJ}=\frac{PI}{(AH+HI)\sin30^\circ}=\frac{PI}{(AH+AH\cos\alpha)\cdot\frac{1}{2}},\therefore\alpha\le\beta$

（4）如图，将矩形$ABCD$折起一角落（$\triangle AEAF$），记二面角$A'-EF-D$的大小为$\theta(0<\theta<\frac{\pi}{4})$，直线$A'E,A'F$与平面$BCD$所成角分别为$\alpha,\beta$，则（　）$A.\alpha+\beta>\theta$　$B.\alpha+\beta<\theta$　$C.\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}$　$D.\alpha+\beta>2\theta$

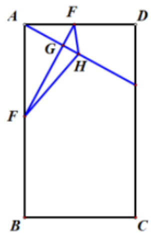


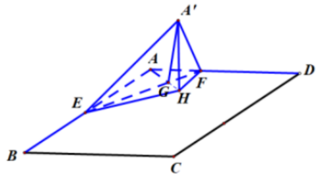
$key:\sin\alpha=\frac{A'H}{A'E},\sin\beta=\frac{A'H}{A'F},\sin\theta=\frac{AH'}{AG},\frac{1}{A'E^2}+\frac{1}{A'F^2}=\frac{1}{AG^2}$

$\therefore\sin(\alpha+\beta)=\frac{A'H}{A'E}\cdot\frac{HF}{A'F}+\frac{EH}{A'E}\cdot\frac{A'H}{A'F}>\frac{A'H\cdot EF}{A'E\cdot A'F}$

$=\frac{A'H\cdot EF}{AG\cdot EF}=\frac{A'H}{AG}=\sin\theta$

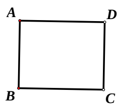
$\therefore\alpha+\beta>\theta$

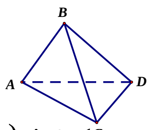


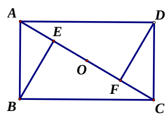


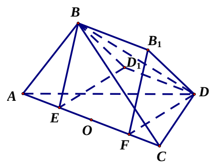
2（1）如图，矩形$ABCD$的边长$AB=1,BC=\sqrt{3}$,将矩形沿对角线AC翻折，形成空间四边形$ABCD$，连结DB，记DA与面BCD所成角为α，记DB与面ACD所成角为β，记DC与面ABD所成角为γ，则在翻折过程中一定正确的结论是（　）C

$A.\alpha<\beta$　$B.\beta<\alpha$　$C.\alpha<\gamma$　$D.\gamma<\alpha$









$key:\sin\alpha=\frac{4d_{F\to BCD}}{\sqrt{3}}<\sin\gamma=\frac{4d_{E\to ABD}}{1}(d_{F\to BCD}=d_{E\to ABD}),\therefore\alpha<\gamma$

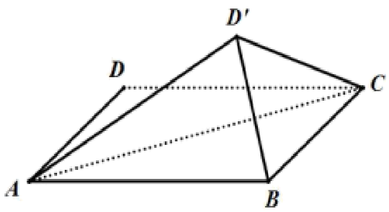
（2）如图，在矩形$ABCD$中，$AD<CD$，现将$\triangle ACD$折至$\triangle ACD'$，使得二面角$A-CD'-B$为锐角，设直线AD'与直线BC所成角的大小为α,直线BD'与平面ABC所成角的大小为β，二面角$A-CD'-B$的大小为γ，则α,β,γ的大小关系是（　）$A.\alpha>\beta>\gamma$　$B.\alpha>\gamma>\beta$　$C.\gamma>\alpha>\beta$　$D.$不能确定

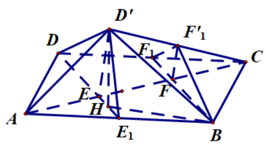
$key:\alpha=\angle D'AD>\angle D'AH,\beta=\angle D'BH$

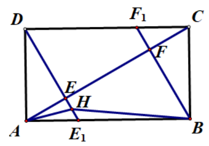
$\because AH<BH,\therefore\alpha>\beta$

而$A-D'EE_1$与$C-FF_1'B$全等，

$\therefore\gamma=B-CF_1'-F=D'-AE_1-E\in(\beta,\alpha)$







（3）如图,$\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ,AC=1,BC=\sqrt{3},D$为$AB$边上的中点，点$M$在线段$BD$(不含端点）上，将$\triangle BCM$沿$CM$向上折起至$\triangle B'CM$，设平面$B'CM$与平面$ACM$所成锐二面角为$\alpha$，直线$MB'$与平面$AMC$所成角为$\beta$，直线$MC$与平面$B'CA$所成角为$\gamma$，则在翻折过程中，下列三个命题正确的是（　）

①$\tan\beta\le\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\alpha$;②$\gamma\le\beta$；③$\gamma>\alpha$.　$A.$①　$B.$①②　$C.$②③　$D.$①③

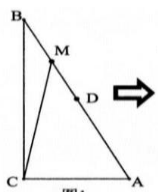


图1

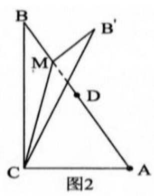
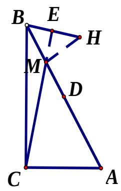
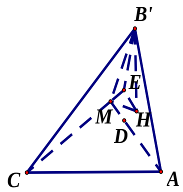


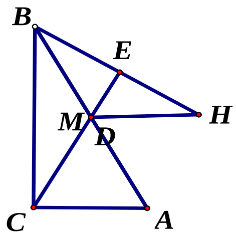
图2

key:（线面角的转化方法一：体积）

$\because MH > EH, \therefore \tan\beta = \dfrac{B'H}{MH}, \tan\alpha = \dfrac{B'H}{EH}$，而 $\dfrac{EH}{MH} \le \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.







$\therefore \dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \dfrac{MH}{EH} \ge \dfrac{2}{\sqrt{3}}$，①对，且 $\alpha > \beta$,

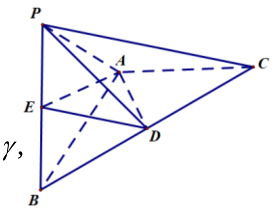
$\sin\beta = \dfrac{d_{B'\to AMC}}{MB'}, \sin\gamma = \dfrac{d_{M\to B'CA}}{MC}, \sin\alpha = \dfrac{d_{B'\to AMC}}{B'E}$

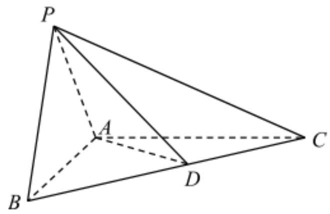
$\because BD < \dfrac{1}{2}BA, \therefore MB' < MC, S_{\triangle AMC} < S_{\triangle B'CA}, \therefore d_{B'\to AMC} > d_{M\to B'CA}, \therefore \beta \ge \gamma$

（4）（诸暨）如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB \perp AC$，$AB = AP$，D 是棱 BC 上一点（不含端点）且 $PD = BD$，记 $\angle DAB$ 为 α，直线 AB 与平面 PAC 所成角为 β，直线 PA 与平面 ABC 所成角为 γ，则（　A　）

A. $\gamma \le \beta, \gamma \le \alpha$　　B. $\beta \le \alpha, \beta \le \gamma$　　C. $\beta \le \alpha, \gamma \le \alpha$　　D. $\alpha \le \beta, \gamma \le \beta$

key: E 为 PB 的中点，则 $PB \perp$ 平面 AED,





$\sin\beta = \dfrac{d_{B\to PAC}}{AB} > \sin\gamma = \dfrac{d_{P\to ABC}}{PA} = \dfrac{d_{P\to ABC}}{AB} (\because AP = AB)$

$(\because S_{\triangle ABC} \ge S_{\triangle PAC}, V_{B-PAC} = V_{P-ABC} \therefore d_{P\to ABC} \le d_{B\to PAC}), \therefore \beta \ge \gamma$,

$\because \triangle BAD \cong \triangle PAD, \therefore \gamma \le \alpha = \angle BAD$（最小角定理）