2023-24（下）模拟（18）

2024-02-27

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 在一组样本数据 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)(n\geq 2,x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全相等）的散点图中，若所有的样本点 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 都在直线 $y=-2x+1$ 上，则这组样本数据的相关系数为（　　）A. 2 B. -2　C. -1　D. 1

2. 圆心在 y 轴上，半径为 1，且过点 $(1,2)$ 的圆的方程是（　　）

A. $x^2+(y-2)^2=1$　B. $x^2+(y+2)^2=1$　C. $(x-1)^2+(y-3)^2=1$　D. $x^2+(y-3)^2=1$

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\dfrac{1}{1-a_n}$，若 $a_1=\dfrac{1}{2}$，则 $a_{2023}=$（　　）A. 2　B. -2　C. -1　D. $\dfrac{1}{2}$

4. 设 m,n 是两条异面直线，下列命题中正确　是（　　）

A. 过 m 且与 n 平行的平面有且只有一个　　B. 过 m 且与 n 垂直的平面有且只有一个

C. 过空间一点 P 与 m,n 均相交的直线有且只有一条　　D. 过空间一点 P 与 m,n 均平行的平面有且只有一个

5. 将 12 名志愿者（含甲、乙、丙）安排到三个地区做环保宣传工作，每个地区至少需要安排 3 人，则甲、乙、丙 3 人恰好被安排到同一个地区的安排方法总数为（　　）A. 3129　B. 4284　C. 18774　D. 25704

6. 已知 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，O 是空间中的一点，满足 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=6$，$\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{OC}^2=6$，则 $|\overrightarrow{OG}|=$（ C ）A. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　B. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　C. $\sqrt{2}$　D. $2\sqrt{3}$

7. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c．若 $2c\cos B=a-c$，则 $\dfrac{\sin(A-C)}{\sin B}$ 的取值范围为（　）

A. $(1,\sqrt{3})$　　B. $(0,1)$　　C. $(0,\sqrt{2})$　　D. $(\sqrt{2},\sqrt{3})$

8. 已知复数 z_1,z_2 满足 $|z_1+1-i|+|z_1-1+i|=2\sqrt{6},z_2=p+\dfrac{8}{p}+(p+\dfrac{8}{p})i$，（其中 $p>0,i$ 是虚数单位），则 $|z_1-z_2|$ 的最小值为（ ）A. 2　B. 6　C. $4\sqrt{2}-2$　D. $4\sqrt{2}+2$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 用“五点法”作函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+B$（$A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$）在一个周期内的图象时，列表计算了部分数据，下列有关函数 $y=f(x)$ 描述正确的是（　　）

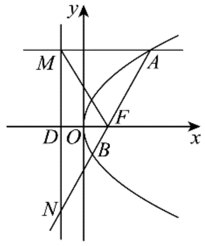
$\omega x+\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	a	$\frac{\pi}{3}$	b	$\frac{5\pi}{6}$	c
$f(x)$	1	3	1	d	1

A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期是 π B. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(\dfrac{5\pi}{6},0)$ 对称

C. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 对称 D. 函数 $f(x)$ 与 $g(x)=-2\cos(2x+\dfrac{\pi}{3})+1$ 表示同一函数

10. 如图，已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，抛物线 C 的准线与 x 轴交于点 D，过点 F 的直线 l（直线 l 的倾斜角为锐角）与抛物线 C 相交于 A,B 两点（A 在 x 轴的上方，B 在 x 轴的下方），过点 A 作抛物线 C

的准线的垂线，垂足为 M，直线 l 与抛物线 C 的准线相交于点 N，则（　　）

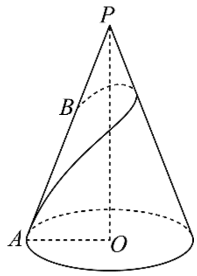


A. 当直线 l 的斜率为 1 时，$|AB|=4p$　B. 若 $|NF|=|FM|$，则直线 l 的斜率为 2

C. 存在直线 l 使得 $\angle AOB=90°$　D. 若 $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，则直线 l 的倾斜角为 $60°$

11. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 I，若存在 $x_0\in I$，使得 $f(f(x_0))=x_0$，则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的二阶不动点.下列各函数中，有且仅有一个二阶不动点的函数是（　　）

A. $f(x)=x^2-x+1$　B. $f(x)=\log_2(x+1)$　C. $f(x)=\dfrac{2^x}{2^x+1}$　D. $f(x)=|2\sin\dfrac{\pi}{6}x-1|$



三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 若命题“$\exists x\in R,mx^2+2mx+3\le 0$”为假命题，则实数 m 的取值范围是________.

13. 如图，圆锥底面半径为 $\dfrac{2}{3}$，母线 PA＝2，点 B 为 PA 的中点，一只蚂蚁从 A 点出发，沿圆锥侧面绕行一周，到达 B 点，其最短路线长度为________，其中下坡路段长为________.

14. 已知反比例函数图象上三点 A,B,P 的坐标分别 $(3,\dfrac{a}{3})$，$(\dfrac{1}{3},3a)(a>\dfrac{1}{3})$ 与 $(x,y)(\dfrac{1}{3}<x<3)$，过 B 作直线 AP 的垂线，垂足为 Q.若 $|AP|\cdot|PQ|\le\dfrac{5}{3}+a$ 恒成立，则 a 的取值范围为___________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15. 已知函数 $f(x)=\ln x-ax(a\in R)$.（1）若 $a=1$，求函数 $f(x)$　极值；（2）求函数 $f(x)$ 的单调区间.

16. 某闯关游戏共设置 4 道题，参加比赛的选手从第 1 题开始答题，一旦答错则停止答题，否则继续，直到答完所有题目．设选手甲答对第 1 题的概率为$\frac{2}{3}$，甲答对题序为i的题目的概率 $p_i=\frac{k}{i}$，$i\in\{1,2,3,4\}$，各题回答正确与否相互之间没有影响．（1）若甲已经答对了前 3 题，求甲答对第 4 题的概率；

（2）求甲停止答题时答对题目数量 X 的分布列与数学期望．

17. 在图 1 所示的平面多边形中，四边形 $ABCD$ 为菱形，$AB=2,\angle BAD=60°,\triangle P_2BC$ 与 $\triangle P_3CD$ 均为等边三角形．分别将 $\triangle P_1AB,\triangle P_2BC,\triangle P_3CD,\triangle P_4AD$ 沿着 AB,BC,CD，DA 翻折，使得 P_1,P_2,P_3,P_4 四点恰好重合于点 P，得到四棱锥 $P-ABCD,\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PA}(0<\lambda<1)$．（1）若 $\lambda=\frac{1}{2}$，证明：$PA\perp PC$；（2）若二面角 $M-CD-A$ 的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，求 λ 的值．

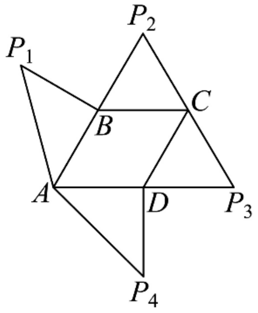


图1

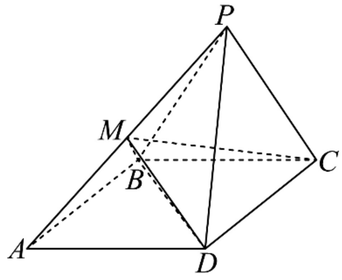


图2

18. 在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2,C 的离心率为 2，直线 l 过 F_2 与 C 交于 M,N 两点，当 $|OM|=|OF_2|$ 时，$\triangle MF_1F_2$ 的面积为 3.（1）求双曲线 C 的方程；

（2）已知 M,N 都在 C 的右支上，设 l 的斜率为 m.①求实数 m 的取值范围；

②是否存在实数 m，使得 $\angle MON$ 为锐角？若存在，请求出 m 的取值范围；若不存在，请说明理由.

19. 已知无穷数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\max\{a_{n+1},a_{n+2}\}-\min\{a_{n+1},a_{n+2}\}(n=1,2,3,\cdots)$，其中 $\max\{x,y\}$ 表示 x，y 中最的数，$\min\{x,y\}$ 表示 x，y 中最小的数.（1）当 $a_1=1$，$a_2=2$ 时，写出 a_4 的所有可能值；（2）若数列 $\{a_n\}$ 中的项存在最大值，证明：0 为数列 $\{a_n\}$ 中的项；（3）若 $a_n>0(n=1,2,3,\cdots)$，是否存在正实数 M，使得对任意的正整数 n，都有 $a_n\le M$？如果存在，写出一个满足条件的 M；如果不存在，说明理由.

解答

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 在一组样本数据 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)(n\ge 2,x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全相等）的散点图中，若所有的样本点 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 都在直线 $y=-2x+1$ 上，则这组样本数据的相关系数为（　C　）A. 2 B. -2 C. -1 D. 1

2. 圆心在 y 轴上，半径为 1，且过点 $(1,2)$ 的圆的方程是（　A　）

A. $x^2+(y-2)^2=1$　B. $x^2+(y+2)^2=1$　C. $(x-1)^2+(y-3)^2=1$　D. $x^2+(y-3)^2=1$

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\dfrac{1}{1-a_n}$，若 $a_1=\dfrac{1}{2}$，则 $a_{2023}=$（D）A. 2　B. -2　C. -1　D. $\dfrac{1}{2}$

4. 设 m,n 是两条异面直线，下列命题中正确　是（ A　）

A. 过 m 且与 n 平行的平面有且只有一个　B. 过 m 且与 n 垂直的平面有且只有一个

C. 过空间一点 P 与 m,n 均相交的直线有且只有一条　D. 过空间一点 P 与 m,n 均平行的平面有且只有一个

5. 将 12 名志愿者（含甲、乙、丙）安排到三个地区做环保宣传工作，每个地区至少需要安排 3 人，则甲、乙、丙 3 人恰好被安排到同一个地区的安排方法总数为（　C　）A. 3129　B. 4284　C. 18774　D. 25704

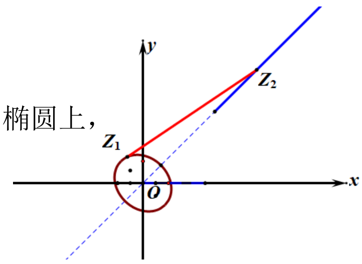
$$key:A_3^3[(633)(C_9^3\frac{C_6^3C_3^3}{2!}+C_9^6)+(543)(C_9^2C_7^4C_3^3+C_9^1C_8^5C_3^3+C_9^5C_4^4)+(444)\frac{C_9^1C_8^4C_4^4}{2!}]=18774$$

6. 已知 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，O 是空间中的一点，满足 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=6$，$\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{OC}^2=6$，则 $|\overrightarrow{OG}|=$（ C　）A. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　B. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　C. $\sqrt{2}$　D. $2\sqrt{3}$

7. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c．若 $2c\cos B=a-c$，则 $\dfrac{\sin(A-C)}{\sin B}$ 的取值范围为（　B　）

A. $(1,\sqrt{3})$　B. $(0,1)$　C. $(0,\sqrt{2})$　D. $(\sqrt{2},\sqrt{3})$

8. 已知复数 z_1,z_2 满足 $|z_1+1-i|+|z_1-1+i|=2\sqrt{6},z_2=p+\dfrac{8}{p}+(p+\dfrac{8}{p})i$，（其中 $p>0,i$ 是虚数单位），则 $|z_1-z_2|$ 的最小值为（　B ）A. 2　B. 6　C. $4\sqrt{2}-2$　D. $4\sqrt{2}+2$



$key:z_1$在复平面上的对于点Z_1在$-1+i,1-i$对应点F_1、F_2为焦点，长轴长为$2\sqrt{6}$的椭圆上，

$(2a=2\sqrt{6},2c=2\sqrt{2},b=2)$

z_2对应点Z_2在射线$y=x(x\ge 4\sqrt{2})$（与F_1F_2垂直）上，如图，

$\therefore|z_1-z_2|=|Z_1Z_2|\ge 8-2=6$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

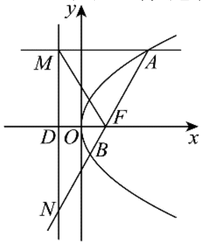
9. 用“五点法”作函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+B$（$A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$）在一个周期内的图象时，列表计算了部分数据，下列有关函数 $y=f(x)$

$\omega x+\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	a	$\frac{\pi}{3}$	b	$\frac{5\pi}{6}$	c
$f(x)$	1	3	1	d	1

描述正确的是（　ACD　）A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期是 π B. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{5\pi}{6},0)$ 对称

C. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称 D. 函数 $f(x)$ 与 $g(x)=-2\cos(2x+\frac{\pi}{3})+1$ 表示同一函数

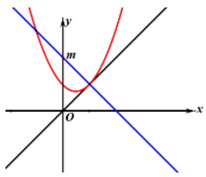
10. 如图，已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，抛物线 C 的准线与 x 轴交于点 D，过点 F 的直线 l（直线 l 的倾斜角为锐角）与抛物线 C 相交于 A,B 两点（A 在 x 轴的上方，B 在 x 轴的下方），过点 A 作抛物线 C 的准线的垂线，垂足为 M，直线 l 与抛物线 C 的准线相交于点 N，则（　AD　）

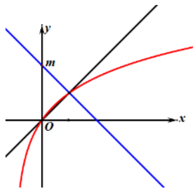


A. 当直线 l 的斜率为 1 时，$|AB|=4p$　B. 若 $|NF|=|FM|$，则直线 l 的斜率为 2

C. 存在直线 l 使得 $\angle AOB=90°$　D. 若 $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，则直线 l 的倾斜角为 $60°$

11. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 I，若存在 $x_0\in I$，使得 $f(f(x_0))=x_0$，则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的二阶不动点.下列各函数中，有且仅有一个二阶不动点的函数是（　ACD　）





A. $f(x)=x^2-x+1$　　B. $f(x)=\log_2(x+1)$

C. $f(x)=\frac{2^x}{2^x+1}$　　D. $f(x)=|2\sin\frac{\pi}{6}x-1|$

key: 设 $f(x_0)=y_0$，则 $x_0=f(f(x_0))=f(y_0)$，

$\therefore y=f(x)$ 的图象上存在一对关于直线 $y=x$ 对称的点 (x_0,y_0) 与 (y_0,x_0)，

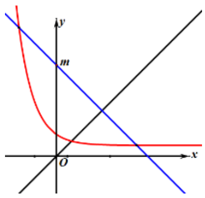
即直线 $y=-x+m$ 与 $y=f(x)$ 的仅有两个交点的中点在 $y=x$ 上

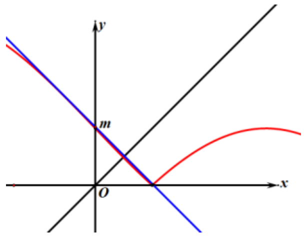
A: 由 $y=x^2-x+1$ 与 $y=x$ 相切，A 对；

B: $\log_2(x+1)=x\Leftrightarrow x=0,1$，如图，$B$ 错；

C: 如图，C 对；

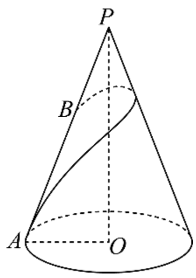
D: $y=f(x)$ 经过点 $(1,0)$ 与 $(0,1)$，D 对





三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

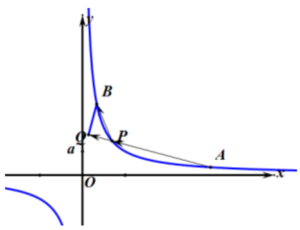
12. 若命题“$\exists x\in R,mx^2+2mx+3\le 0$”为假命题，则实数 m 的取值范围是_______.　$[0,3)$



13. 如图，圆锥底面半径为 $\frac{2}{3}$，母线 $PA=2$，点 B 为 PA 的中点，一只蚂蚁从 A 点出发，沿圆锥侧面绕行一周，到达 B 点，其最短路线长度为________，其中下坡路段长为________.　$\sqrt{7}$，$\frac{2\sqrt{7}}{7}$

14. 已知反比例函数图象上三点 A,B,P 的坐标分别 $(3,\frac{a}{3})$，$(\frac{1}{3},3a)(a>\frac{1}{3})$ 与 $(x,y)(\frac{1}{3}<x<3)$，过 B 作直线 AP 的垂线，垂足为 Q.若 $|AP|\cdot|PQ|\le\frac{5}{3}+a$ 恒成立，则 a 的取值范围为___________.$(\frac{1}{3},1]$

key: 由已知得 A,B,P 在曲线 $f(x)=\frac{a}{x}(a>\frac{1}{3},\frac{1}{3}<x<3)$ 上，



则 $|AP|\cdot|PQ|=|\overrightarrow{AP}|\cdot\frac{|\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AP}|}=|\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{AP}|=$

$=|(\frac{1}{3}-x,3a-\frac{a}{x})\cdot(x-3,\frac{a}{x}-\frac{a}{3})|=(3-x)(x-\frac{1}{3})+a^2(3-\frac{1}{x})(\frac{1}{x}-\frac{1}{3})\le\frac{5}{3}+a$

令$x=1$得$:\frac{4}{3}+a^2\cdot\frac{4}{3}\le\frac{5}{3}+a$得$\frac{1}{3}<a\le 1$,

下面证明：$g(a)=(3-x)(x-\frac{1}{3})+a^2(3-\frac{1}{x})(\frac{1}{x}-\frac{1}{3})-\frac{5}{3}-a\le 0$

$\because (3-\frac{1}{x})(\frac{1}{x}-\frac{1}{3})\in(0,\frac{16}{3}],\therefore$只需$:\begin{cases} g(\frac{1}{3})=-x^2+\frac{10}{3}x-1+\frac{1}{9}(-\frac{1}{x^2}+\frac{10}{3x}-1)-2\le 0 \\ g(1)=-(x+\frac{1}{x})^2+\frac{10}{3}(x+\frac{1}{x})-\frac{8}{8}\le 0 \end{cases}$即可$,\therefore a\in(\frac{1}{3},1]$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15. 已知函数 $f(x)=\ln x-ax(a\in R)$.（1）若 $a=1$，求函数 $f(x)$ 极值；（2）求函数 $f(x)$ 的单调区间.

小问 1 详解】当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln x-x$，其定义域为 $(0,+\infty)$，$\therefore f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$.

令 $f'(x)=\frac{1-x}{x}=0$，则 $x=1$.

$\therefore$ 当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的极大值为 $f(1)=-1$，无极小值.

【小问 2 详解】$\because f(x)=\ln x-ax$，$\therefore f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$，

当 $a\le 0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{a}$，

若 $0<x<\frac{1}{a}$，则 $f'(x)>0$，若 $x>\frac{1}{a}$，则 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$，单调递减区间为 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$，

综上，当 $a\le 0$ 时，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$；

当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$，单调递减区间为 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$.

16. 某闯关游戏共设置 4 道题，参加比赛的选手从第 1 题开始答题，一旦答错则停止答题，否则继续，直到答完所有题目．设选手甲答对第 1 题的概率为 $\frac{2}{3}$，甲答对题序为 i 的题目的概率 $p_i=\frac{k}{i}$，$i\in\{1,2,3,4\}$，各题回答正确与否相互之间没有影响.（1）若甲已经答对了前 3 题，求甲答对第 4 题的概率；

（2）求甲停止答题时答对题目数量 X 的分布列与数学期望.

【小问 1 详解】解：因为选手甲答对第 1 题的概率为$\frac{2}{3}$，所以$k=\frac{2}{3}$，即 $p_i=\frac{2}{3i}$，

所以若甲已经答对了前 3 题，则甲答对第 4 题的概率为$\frac{1}{6}$.

【小问 2 详解】解：由题意得 $p_1=\frac{2}{3}$， $p_2=\frac{1}{3}$， $p_3=\frac{2}{9}$， $p_4=\frac{1}{6}$.

随机变量 X 可取$0,1,2,3,4$，

则 $P(X=0)=\frac{1}{3}$， $P(X=1)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$， $P(X=2)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{7}{9}=\frac{14}{81}$，

$P(X=3)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{9}\times\frac{5}{6}=\frac{10}{243}$， $P(X=4)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{6}=\frac{2}{243}$.

所以随机变量 X 分布列如下：

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{14}{81}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{2}{243}$

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{14}{81}+3\times\frac{10}{243}+4\times\frac{2}{243}=\frac{230}{243}$.

17. 在图 1 所示的平面多边形中，四边形 $ABCD$ 为菱形， $AB=2,\angle BAD=60°,\triangle P_2BC$ 与 $\triangle P_3CD$ 均为等边三角形．分别将 $\triangle P_1AB,\triangle P_2BC,\triangle P_3CD,\triangle P_4AD$ 沿着 AB,BC,CD， DA 翻折，使得 P_1,P_2,P_3,P_4 四点恰好重合于点 P，得到四棱锥 $P-ABCD,\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PA}(0<\lambda<1)$.

（1）若 $\lambda=\frac{1}{2}$，证明：$PA\perp PC$；（2）若二面角 $M-CD-A$ 的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，求λ的值.

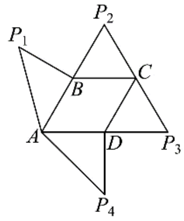


图1

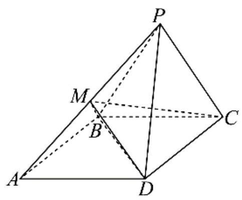


图2

【小问 1 详解】证明：因为$\lambda=\frac{1}{2}$，所以 M 为 PA 的中点.

由题可知， $AB=AD=PB=PD$，所以 $PA\perp BM,PA\perp DM$.

又 $BM\cap DM=M$， $BM,DM\subset$平面 BDM，所以 $PA\perp$平面 BDM .

取 $BD\cap AC=N$，如图，则 $MN//PC$． 由 $PA\perp$平面 BDM，可得 $PA\perp MN$，则 $PA\perp PC$.

【小问 2 详解】

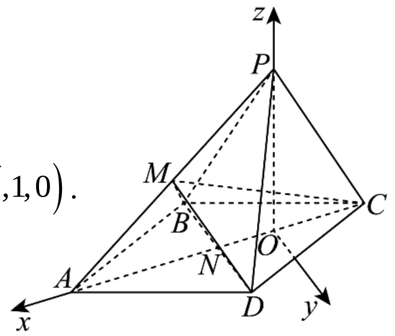
连接 AC，易证得 $BD\perp$平面 PAC，过点 P 作 $PO\perp AC$，垂足为 O，则 $PO\perp$平面 $ABCD$.

以 O 为坐标原点，OA,OP 所在直线分别为 x 轴、z 轴，建立如上图所示的空间直角坐标系.

由 $AB=2$，得 $CP=2, AC=2\sqrt{3}, AP=2\sqrt{2}$，

从而 $OC=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, OP=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，则 $P\left(0,0,\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right), A\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3},0,0\right), D\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},1,0\right), C\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},0,0\right)$，

则 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PA}=\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\lambda,0,-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\lambda\right)$，



$\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{PD}-\overrightarrow{PM}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\lambda,1,\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\lambda-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$，$\overrightarrow{CD}=\left(\sqrt{3},1,0\right)$.

设平面 MCD 的一个法向量为 $\vec{m}=\left(x,y,z\right)$，

则由 $\begin{cases}\overrightarrow{MD}\cdot\vec{m}=0,\\ \overrightarrow{CD}\cdot\vec{m}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\lambda\right)x+y+\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\lambda-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)z=0,\\ \sqrt{3}x+y=0,\end{cases}$

令 $x=1$，得 $\vec{m}=\left(1,-\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{2}+2\sqrt{2}\lambda}{2\lambda-2}\right)$.

由图可知，平面 ACD 的一个法向量为 $\vec{n}=\left(0,0,1\right)$，

因为二面角 $M-CD-A$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 $\left|\cos\left\langle\vec{m},\vec{n}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\vec{m}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\left|\dfrac{\sqrt{2}+2\sqrt{2}\lambda}{2\lambda-2}\right|}{\sqrt{4+\left(\dfrac{\sqrt{2}+2\sqrt{2}\lambda}{2\lambda-2}\right)^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{4}$. 故 λ 的值为 $\dfrac{1}{4}$.

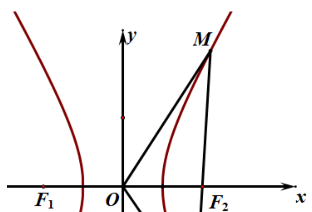
18. 在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2,C 的离心率为 2，直线 l 过 F_2 与 C 交于 M,N 两点，当 $\left|OM\right|=\left|OF_2\right|$ 时，$\triangle MF_1F_2$ 的面积为 3.（1）求双曲线 C 的方程；

（2）已知 M,N 都在 C 的右支上，设 l 的斜率为 m.①求实数 m 的取值范围；

②是否存在实数 m，使得 $\angle MON$ 为锐角？若存在，请求出 m 的取值范围；若不存在，请说明理由.

解：（1）由已知得 $\dfrac{c}{a}=2$, 且 $\triangle MF_1F_2$ 是直角三角形, 且有 $\begin{cases}|MF_1|\cdot|MF_2|=6\\ ||MF_1|-|MF_2||=2a\\ |MF_1|^2+|MF_2|^2=4c^2\end{cases}$

得 $a=1,c=2,b=\sqrt{3}$, $\therefore$ 双曲线 C 的方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$



（2）①由（1）得$\dfrac{b}{a}=\sqrt{3}, \because M,N$都在右支上$,\therefore m$的取值范围为$(\sqrt{3},+\infty)\cup(-\infty,-\sqrt{3})$

②假设存在，设$M(\dfrac{s^2+1}{2s},\dfrac{\sqrt{3}(s^2-1)}{2s}),N(\dfrac{n^2+1}{2n},\dfrac{\sqrt{3}(n^2-1)}{2n})(s,n>0)$

由M,F_2,N三点共线得$:\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}(s^2-1)}{2s}-\dfrac{\sqrt{3}(n^2-1)}{2n}}{\dfrac{s^2+1}{2s}-\dfrac{n^2+1}{2n}}=\dfrac{\sqrt{3}(sn+1)}{sn-1}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}(s^2-1)}{2s}}{\dfrac{s^2+1}{2s}-2}=\dfrac{\sqrt{3}(s^2-1)}{s^2-4s+1}$

即$2sn=s+n-2,\therefore s^2+n^2=(s+n)^2-2sn=(2sn+2)^2-2sn=4s^2n^2+6sn+4$

$\therefore \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\dfrac{(s^2+1)(n^2+1)}{4sn}+\dfrac{3(s^2-1)(n^2-1)}{4sn}=\dfrac{4s^2n^2-2(s^2+n^2)+4}{4sn}$

$=-sn-\dfrac{1}{sn}-3\le -5,\therefore$不存在实数$m$,使得$\angle MON$为锐角.

19. 已知无穷数列$\{a_n\}$满足$a_n=\max\{a_{n+1},a_{n+2}\}-\min\{a_{n+1},a_{n+2}\}(n=1,2,3,\cdots)$，其中$\max\{x,y\}$表示$x$，$y$中最的数，$\min\{x,y\}$表示$x$，$y$中最小的数.（1）当$a_1=1$，$a_2=2$时，写出$a_4$的所有可能值；

（2）若数列$\{a_n\}$中的项存在最大值，证明：0 为数列$\{a_n\}$中的项；

（3）若$a_n>0(n=1,2,3,\cdots)$，是否存在正实数M，使得对任意的正整数n，都有$a_n\le M$？如果存在，写出一个满足条件的M；如果不存在，说明理由.

⑴ 解：由已知得$a_n=\max\{a_{n+1},a_{n+2}\}-\min\{a_{n+1},a_{n+2}\}\ge 0,$

且$a_1=\max\{a_2,a_3\}-\min\{a_2,a_3\}=\max\{2,a_3\}-\min\{2,a_3\}=1$

$\therefore a_3-2=1$即$a_3=3,or,2-a_3=1$得$a_3=1$

若$a_3=3,$则$a_2=\max\{3,a_4\}-\min\{3,a_4\}=2$得$a_4-3=2$即$a_4=5,or,3-a_4=2$即$a_4=1,$

若$a_3=1$，则$a_2=\max\{1,a_4\}-\min\{1,a_4\}=2$得$a_4-1=2$即$a_4=3,or,1-a_4=2$（舍去）

$\therefore a_4$的所有可能值为$:1,3,5$

（2）证明：由已知得$0\le a_n\le a_{N_0}=M(n\in N^*,N_0\in N^*),$则$a_{N_0}\ge a_{N_0+1},a_{N_0}\ge a_{N_0+2},$

当$N_0\ge 3$时，$a_{N_0}=\max\{a_{N_0+1},a_{N_0+2}\}-\min\{a_{N_0+1},a_{N_0+2}\}\ge a_{N_0+1}-\min\{a_{N_0+1},a_{N_0+2}\}$

$\therefore \min\{a_{N_0+1},a_{N_0+2}\}\le 0,$

$\because a_{N_0+1}\ge 0,a_{N_0+2}\ge 0,\therefore \min\{a_{N_0+1},a_{n_0+2}\}=0,\therefore 0$是数列$\{a_n\}$中的项

（3）解：$\because a_n=\max\{a_{n+1},a_{n+2}\}-\min\{a_{n+1},a_{n+2}\}>0,\therefore a_{n+1}\ne a_{n+2}(n=1,2,\cdots)$

由（2）得$\{a_n\}$中的项不存在最大值，

设$S=\{n\mid a_n>a_{n+1},n\in N^*\}$，

①若$S=\Phi$,则$a_i\le a_{i+1}(i=1,2,\cdots)$

对任意$M>0,a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_3-a_2)+a_2$

$=a_{n-2}+a_{n-3}+\cdots+a_1+a_2\ge(n-1)a_1+a_2>(n-1)a_1>M$,只需$n>\dfrac{M}{a_1}+1$

②若$S\ne\Phi$，设$N_0=\max\{n\mid a_n>a_{n+1},n\in N^*\}$，

$\therefore a_{N_0}=\max\{a_{N_0+1},a_{N_0+2}\}-\min\{a_{N_0+1},a_{N_0+2}\}=a_{N_0+2}-a_{N_0+1}>0$,

$\therefore a_i<a_{i+1}(i=N_0+1,N_0+2,\cdots)$,

$\therefore a_m-a_{N_0}=(a_m-a_{m-1})+\cdots+(a_{N_0+1}-a_{N_0})=a_{m-2}+\cdots+a_{N_0-1}\ge(m-N_0)a_{N_0-1}>M$

只要$m>\dfrac{M}{a_{N_0-1}}+N_0$.综上：不存在.

解二：由$a_n=\max\{a_{n+1},a_{n+2}\}-\min\{a_{n+1},a_{n+2}\}$

$=\dfrac{a_{n+1}+a_{n+2}+|a_{n+1}-a_{n+2}|}{2}-\dfrac{a_{n+1}+a_{n+2}-|a_{n+1}-a_{n+2}|}{2}=|a_{n+1}-a_{n+2}|>0$,

假设存在实数$M(M>0)$，使得$\forall n\in N^*,0<a_n\le M$,

$\therefore$存在$k\in N^*$,使得$a_{N+2}=a,a_{N+1}=b$（a,b为正常数）,

$\therefore\dfrac{a_n}{\max\{a_{n+1},a_{n+2}\}}=\dfrac{|a_{n+2}-a_{n+1}|}{\max\{a,b\}}=\left|\dfrac{b}{\max\{a,b\}}-\dfrac{a}{\max\{a,b\}}\right|\in(0,1)$,

记为q_n，且q_n为$(0,1)$内的常数，设$q=\max\{q_k\}\in(0,1)(k=N,N-1,\cdots,2,1)$

$\therefore a_1\le\max\{a,b\}\cdot q^{N-1}\to0$,而$a_1$是给定的常数，矛盾

$\therefore$不存在实数a，使得$\forall n\in N^*,a_n\le M$.