2023-24（下）模拟（4）

2024-02-17

一、单项选择题:本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设复数 z 满足 $|z-2i|=\sqrt{3}$，z 在复平面内对应的点为 (x,y)，则（　　）

A. $(x-2)^2+y^2=\sqrt{3}$　B. $x^2+(y-2)^2=\sqrt{3}$　C. $x^2+(y-2)^2=3$　D. $x^2+(y+2)^2=3$

2. 已知非零向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{b}|=2\sqrt{3}|\vec{a}|$，且 $\vec{a}\perp(3\vec{a}+\vec{b})$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$　夹角为（ ）A. $\frac{\pi}{6}$　B. $\frac{\pi}{3}$　C. $\frac{2\pi}{3}$　D. $\frac{5\pi}{6}$

3.在平面直角坐标系中，角 α 与 β 的顶点均为坐标原点 O，始边均为 x 轴的非负半轴．若角 α 的终边与单位圆交于点 $P(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$，将 OP 绕原点 O 按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{3}$ 后与角 β 的终边重合，则 $\cos\beta=$（　　）

A. $\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$　　B. $\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$　　C. $\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$　　D. $\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$

4. 已知 $P(B)=0.4,P(B|A)=0.8,P(B|\overline{A})=0.3,则P(A)=$（　　）A. $\frac{3}{4}$　B. $\frac{3}{8}$　C. $\frac{1}{3}$　D. $\frac{1}{5}$

5. F_1,F_2 为椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右两个焦点，椭圆的焦距为 $2c(c>0)$，$A(0,-\sqrt{3}c)$，若线段 AF_1 的中点 M 在椭圆 C 上，则椭圆的离心率为（ ）A. $\frac{1}{2}$　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　D. $\sqrt{3}-1$

6. 在平面内，四边形 $ABCD$ 的 $\angle B$ 与 $\angle D$ 互补，$DC=1,BC=\sqrt{3},\angle DAC=30^\circ$，则四边形 $ABCD$ 面积的最大值为（　　）A. $\sqrt{3}$　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}+1$　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}+1$　D. 2

7. 已知直线 $y=a$ 与曲线 $y=\frac{x}{e^x}$ 相交于 A，B 两点，与曲线 $y=\frac{\ln x}{x}$ 相交于 B，C 两点，A，B，C 的横坐标分别为 x_1,x_2,x_3□则下列结论错误的是（　　）A. $x_2=ae^{x_2}$　B. $x_2=\ln x_1$　C. $x_3=e^{x_2}$　D. $x_1+x_3>2x_2$

8. 定义 $\max\{a,b\}=\begin{cases}a,a\ge b\\ b,a<b\end{cases}$．若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=\lambda n^2+(20+\lambda)n(\lambda\in R,n\in N^*)$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=2,2^{n+1}(b_{n+1}-b_n)=b_nb_{n+1}$，令 $c_n=\max\{a_n,b_n\}$，且 $c_n\ge c_3$ 恒成立，则实数 λ 的取值范围是（　　）

A. $[-4,-3]$　　B. $[-3,-2]$　　C. $[-\frac{2}{3},-\frac{1}{2}]$　　D. $[-3,-\frac{2}{3}]$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x$，则（　　）A. $f(x)$ 为奇函数　B. $x=1$ 不是函数 $f(x)$ 的极值点

C. $f(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 上单调递增　　D. $f(x)$ 存在两个零点

10. 已知偶函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)-\sqrt{3}\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的最小正周期为 π，将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,得到函数 $y=g(x)$ 的图象,则下列说法正确的是（　）A. $g(x)=2\cos(2x+\frac{\pi}{6})$ B.不等式 $g(x)\ge 1$ 的解

集为$[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi],k\in Z$　C. 若方程$g(x)=\frac{2}{3}$在区间$(0,\frac{2\pi}{3})$的解为x_1,x_2，则$\sin(x_1+x_2)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $y=f(x+\frac{\pi}{4})$的图象与直线$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$的交点个数为 3

11. 已知圆锥 SO 的侧面积为3π，母线$SA=l$，底面圆的半径为 r，点 P 满足$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PS}$，则（　　）

A.当$r=1$时,圆锥 SO 的体积为$\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$ B.当$r=\frac{3}{2}$时,过顶点 S 和两母线的截面三角形的最大面积为$\frac{3\sqrt{7}}{4}$

C. 当$r=1$时,从点 A 绕圆锥一周到达点 P 的最短长度为$\sqrt{13}$

D. 当$l=3$时，棱长为$\sqrt{2}$的正四面体在圆锥 SO 内可以任意转动

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

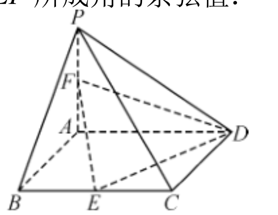
12. $(x^2-1)(x+2)^4$的展开式中x^2的系数为______（用数字作答）.

13. 已知圆 C 的圆心与抛物线$y^2=8x$的焦点关于直线$y=x$对称，直线$2x-y-3=0$与圆 C 相交于 A,B 两点，且$|AB|=2\sqrt{3}$，则圆 C 的方程为_________.

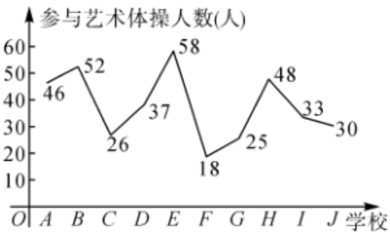
14. 在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD=3\sqrt{2},BC=CD=3,BC\perp CD$，将$\triangle ABD$沿 BD 折起，使点 A 到达点A'，且$A'C=3\sqrt{3}$，则四面体$A'-BCD$的外接球 O 的体积为_________；若点 E 在线段 BD 上，且$BD=4BE$，过点 E 作球 O 的截面，则所得的截面圆中面积最小的圆的半径为_________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面 $ABCD$ 为矩形，$PA\perp AB$，$PA=AB=1$，$AD=2$，E，F 分别是 BC，PA 的中点.（1）求证：$EF//$平面 PCD;（2）若平面$PAB\perp$平面 $ABCD$，求直线 PD 与平面 DEF 所成角的余弦值.



16. 杭州第 19 届亚运会后，多所高校掀起了体育运动的热潮．为了深入了解学生在“艺术体操”活动中的参与情况，随机选取了 10 所高校进行研究，得到数据绘制成如下的折线图：



（1）若“艺术体操”参与人数超过 35 人的学校可以作为“基地校”，现在从这 10 所学校中随机选出 3 所，记可作为“基地校”的学校个数为 ξ，求 ξ 的分布列和数学期望；

（2）现有一个“艺术体操”集训班，对“支撑、手倒立、手翻”这 3 个动作技巧进行集训，且在集训中进行了多轮测试．规定：在一轮测试中，这 3 个动作中至少有 2 个动作达到“优秀”，则该轮测试记为“优秀”．在集训测试中，某同学 3 个动作中每个动作达到“优秀”的概率均为 $\frac{2}{5}$，每个动作及每轮测试互不影响．如果该同学在集训测试中要想获得“优秀”的次数的平均值达到 8 次，那么理论上至少要进行多少轮测试？

17. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上的一点到两条渐近线的距离之积为 2 且双曲线 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

（1）求双曲线 C 的方程；（2）已知 M 是直线 $x=t(0<t<a)$ 上一点，直线 MF_2(F_2为双曲线的右焦点）交双曲线 C 于 A（A 在第一象限），B 两点，O 为坐标原点，过点 M 作直线 OA 的平行线 l，l 与直线 OB 交于点 P，与 x 轴交于点 Q，若 P 为线段 MQ 的中点，求实数 t.

18. 已知函数 $f(x)=x\ln x-\frac{1}{2}ax^2-x(a\in R)$.（1）若函数 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{e},+\infty)$ 上为增函数，求实数 a 的最大值；

（2）若 $f(x)$ 有两个极值点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，且不等式 $\frac{x_2^m}{e}>\frac{e^m}{x_1}$ 恒成立，求正数 m 的取值范围.（其中 $e=2.71828\cdots$ 为自然对数的底数）

19.已知数列$\{a_n\}$的各项均为正数,给定正整数 k,若对任意的 $n\in N^*$ 且 $n>k$,都有 $a_{n-k}a_{n-k+1}\cdots a_{n-1}a_{n+1}\cdots a_{n+k-1}a_{n+k}=a_n^{2k}$ 成立，则称数列$\{a_n\}$具有性质$T(k)$.

（1）若数列$\{a_n\}$具有性质$T(1)$，且 $a_1=1$， $a_3=9$，求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若数列$\{a_n\}$既具有性质$T(2)$，又具有性质$T(3)$；证明：数列$\{a_n\}$是等比数列.

解答

一、单项选择题:本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设复数 z 满足 $|z-2i|=\sqrt{3}$，z 在复平面内对应的点为 (x,y)，则（ C ）

A. $(x-2)^2+y^2=\sqrt{3}$　B. $x^2+(y-2)^2=\sqrt{3}$　C. $x^2+(y-2)^2=3$　D. $x^2+(y+2)^2=3$

2. 已知非零向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{b}|=2\sqrt{3}|\vec{a}|$，且 $\vec{a}\perp(3\vec{a}+\vec{b})$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角为（ D）A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

3.在平面直角坐标系中，角 α 与 β 的顶点均为坐标原点 O，始边均为 x 轴的非负半轴．若角 α 的终边与单位圆交于点 $P(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$，将 OP 绕原点 O 按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{3}$ 后与角 β 的终边重合，则 $\cos\beta=$（ A ）

A. $\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$　B. $\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$　C. $\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$　D. $\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$

4. 已知 $P(B)=0.4, P(B|A)=0.8, P(B|\overline{A})=0.3,$ 则$P(A)=$（ D ）A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{5}$

5. F_1,F_2 为椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右两个焦点，椭圆的焦距为 $2c(c>0)$，$A(0,-\sqrt{3}c)$，若线段 AF_1 的中点 M 在椭圆 C 上，则椭圆的离心率为（ D ）A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ D. $\sqrt{3}-1$

6. 在平面内，四边形 $ABCD$ 的 $\angle B$ 与 $\angle D$ 互补，$DC=1, BC=\sqrt{3}, \angle DAC=30^\circ$，则四边形 $ABCD$ 面积的最大值为（ B ）A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}+1$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}+1$ D. 2

7. 已知直线 $y=a$ 与曲线 $y=\frac{x}{e^x}$ 相交于 A，B 两点，与曲线 $y=\frac{\ln x}{x}$ 相交于 B，C 两点，A，B，C 的横坐标分别为 x_1,x_2,x_3□则下列结论错误的是（ B ）A. $x_2=ae^{x_2}$ B. $x_2=\ln x_1$ C. $x_3=e^{x_2}$ D. $x_1+x_3>2x_2$

8. 定义 $\max\{a,b\}=\begin{cases}a,a\ge b\\b,a<b\end{cases}$．若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=\lambda n^2+(20+\lambda)n(\lambda\in R,n\in N^*)$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=2, 2^{n+1}(b_{n+1}-b_n)=b_nb_{n+1}$，令 $c_n=\max\{a_n,b_n\}$，且 $c_n\ge c_3$ 恒成立，则实数 λ 的取值范围是（ D ）

A. $[-4,-3]$　B. $[-3,-2]$　C. $[-\frac{2}{3},-\frac{1}{2}]$　D. $[-3,-\frac{2}{3}]$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x$，则（ BC ）A. $f(x)$ 为奇函数　B. $x=1$ 不是函数 $f(x)$ 的极值点

C. $f(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 上单调递增　D. $f(x)$ 存在两个零点

10. 已知偶函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)-\sqrt{3}\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2})$ 的最小正周期为 π，将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度,得到函数 $y=g(x)$ 的图象,则下列说法正确的是（ BC）A. $g(x)=2\cos(2x+\dfrac{\pi}{6})$ B.不等式 $g(x)\ge 1$ 的解集为 $[k\pi-\dfrac{\pi}{3},k\pi],k\in Z$ C. 若方程 $g(x)=\dfrac{2}{3}$ 在区间 $(0,\dfrac{2\pi}{3})$ 的解为 x_1,x_2，则 $\sin(x_1+x_2)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

D. $y=f(x+\dfrac{\pi}{4})$ 的图象与直线 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$ 的交点个数为 3

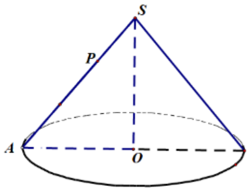
$key:T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\pi$得$\omega=2,\therefore f(x)=2\cos(2x+\varphi+\dfrac{\pi}{3}),\therefore \varphi+\dfrac{\pi}{3}=k\pi,k\in Z,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2},\therefore \varphi=-\dfrac{\pi}{3}$

$\therefore f(x)=2\cos 2x,\therefore g(x)=2\cos(2x+\dfrac{\pi}{3})$,且$f(x+\dfrac{\pi}{4})=-2\sin 2x,\therefore A,D$错；$B,C$对，

11. 已知圆锥 SO 的侧面积为3π，母线 $SA=l$，底面圆的半径为 r，点 P 满足 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PS}$，则（ AC）

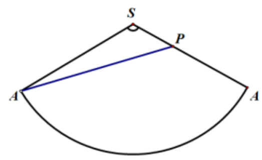
A.当 $r=1$时,圆锥 SO 的体积为 $\dfrac{2\sqrt{2}\pi}{3}$ B.当 $r=\dfrac{3}{2}$ 时,过顶点 S 和两母线的截面三角形的最大面积为 $\dfrac{3\sqrt{7}}{4}$

C. 当 $r=1$时,从点 A 绕圆锥一周到达点 P 的最短长度为 $\sqrt{13}$



D. 当 $l=3$时，棱长为 $\sqrt{2}$ 的正四面体在圆锥 SO 内可以任意转动

$key:A:S_{侧}=\pi\cdot 1\cdot l=3\pi$得$l=3,\therefore V=\dfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot 1^2\cdot\sqrt{9-1}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi,A$对；



圆锥侧面展开图中心角$\theta=\dfrac{2\pi}{3},\therefore AP=\sqrt{9+1-2\cdot 3\cdot 1\cdot(-\dfrac{1}{2})}=\sqrt{13},C$对；

$B:3\pi=\pi\cdot\dfrac{3}{2}\cdot l$得$l=2,\therefore$圆锥顶角$\theta=2\arcsin\dfrac{\frac{3}{2}}{2}=2\arcsin\dfrac{3}{4}>\dfrac{\pi}{2},\therefore (S_{截})_{\max}=\dfrac{1}{2}l^2=2,B$错；

$D:l=3,r=1,$圆锥的内切球半径$r,$则$\dfrac{1}{3}(3\pi+\pi)r=\dfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot 2\sqrt{2}$得$r=\dfrac{\sqrt{2}}{2},$

棱长为$\sqrt{2}$的正四面体的外接球半径$r_1=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{3}\cdot\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}>\dfrac{\sqrt{2}}{2},\therefore D$错.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. $(x^2-1)(x+2)^4$ 的展开式中 x^2 的系数为______（用数字作答）. -8

13. 已知圆 C 的圆心与抛物线 $y^2=8x$ 的焦点关于直线 $y=x$ 对称，直线 $2x-y-3=0$ 与圆 C 相交于 A,B 两点，且 $|AB|=2\sqrt{3}$，则圆 C 的方程为_________. $x^2+(y-2)^2=8$

14. 在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD=3\sqrt{2},BC=CD=3,BC\perp CD$，将$\triangle ABD$ 沿 BD 折起，使点 A 到达点 A'，且 $A'C=3\sqrt{3}$，则四面体 $A'-BCD$ 的外接球 O 的体积为_________；若点 E 在线段 BD 上，且 $BD=4BE$，过点 E 作球 O 的截面，则所得的截面圆中面积最小的圆的半径为_________. $\dfrac{27\sqrt{3}}{2}\pi,\dfrac{3\sqrt{6}}{4}$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

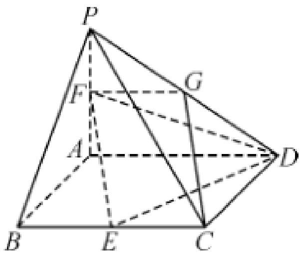
15. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$PA\perp AB$，$PA=AB=1$，$AD=2$，E，F 分别是 BC，PA 的

中点．（1）求证：$EF//$平面 PCD；（2）若平面 $PAB\perp$平面 $ABCD$，求直线 PD 与平面 DEF 所成角的余弦值．

【小问 1 详解】方法一：取 PD 的中点 G，连接 GF，CG，

因为 G，F 分别为 PD，PA 的中点，所以 $GF//AD$，且 $GF=\frac{1}{2}AD$，

又因为四边形 $ABCD$ 为矩形，且 E 为 BC 的中点，

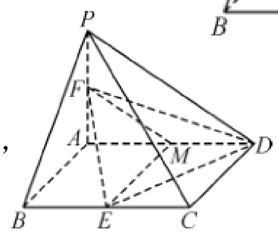


所以 $CE//AD$，且 $CE=\frac{1}{2}AD$，

可得 $GF//CE$，且 $GF=CE$，所以四边形 $CEFG$ 为平行四边形，

则 $EF//CG$，且 $EF\not\subset$平面 PCD，$CG\subset$平面 PCD，所以 $EF//$平面 PCD．

方法二：取 AD 的中点 M，连接 FM，ME，



则 $EM//CD, FM//PD$，

因为 $EM\not\subset$平面 PCD，$CD\subset$平面 PCD，所以 $EM//$平面 PCD，

同理 $FM//$平面 PCD，

又 $EM\cap FM=M$，$EM,FM\subset$面 FEM，

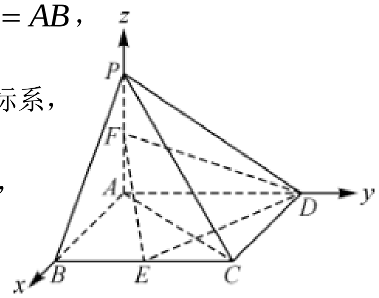
所以平面 $EFM//$平面 PCD，

又 $EF\subset$平面 EFM，所以 $EF//$平面 PCD．

【小问 2 详解】由已知平面 $PAB\perp$平面 $ABCD$，平面 $PAB\cap$平面 $ABCD=AB$，

又 $PA\perp AB$，$PA\subset$平面 PAB，所以 $PA\perp$平面 $ABCD$，

如图，以 A 为坐标原点，AB，AD，AP 分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，



则 $A(0,0,0),B(1,0,0),C(1,2,0),D(0,2,0),P(0,0,1),E(1,1,0),F\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$，

可得 $\overrightarrow{DE}=(1,-1,0),\overrightarrow{DF}=\left(0,-2,\frac{1}{2}\right),\overrightarrow{PD}=(0,2,-1)$．

设平面 DEF 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DE}=x-y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DF}=-2y+\frac{1}{2}z=0\end{cases}$

令 $x=1$，则 $y=1,z=4$，可得 $\vec{n}=(1,1,4)$，

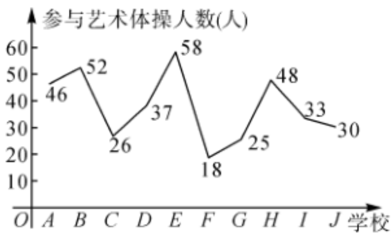
设直线 PD 与平面 DEF 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{PD}\rangle|=\left|\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{PD}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{PD}|}\right|=\frac{2}{3\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{15}$，

$\therefore\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{10}}{15}\right)^2}=\frac{\sqrt{215}}{15}$，即直线 PD 与平面 DEF 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{215}}{15}$．

16．杭州第 19 届亚运会后，多所高校掀起了体育运动的热潮．为了深入了解学生在“艺术体操”活动中的参与情况，随机选取了 10 所高校进行研究，得到数据绘制成如下的折线图：

（1）若“艺术体操”参与人数超过 35 人的学校可以作为“基地校”，现在从这 10 所学校中随机选出 3 所，记可作为“基地校”的学校



个数为ξ，求ξ的分布列和数学期望；
（2）现有一个“艺术体操”集训班，对“支撑、手倒立、手翻”这 3
个动作技巧进行集训，且在集训中进行了多轮测试．规定：在一轮
测试中，这 3 个动作中至少有 2 个动作达到“优秀”，则该轮测试记为“优秀”．在集训测试中，某同学 3 个动作中每个动作达到“优秀”的概率均为$\frac{2}{5}$，每个动作及每轮测试互不影响．如果该同学在集训测试中要想获得“优秀”的次数的平均值达到 8 次，那么理论上至少要进行多少轮测试？
【小问 1 详解】
参加“艺术体操”人数在 35 人以上的学校共 5 所，ξ所有可能取值为 0，1，2，3，

则 $P(\xi=0)=\frac{C_5^0C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}, P(\xi=1)=\frac{C_5^1C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{50}{120}=\frac{5}{12}$，

$P(\xi=2)=\frac{C_5^2C_5^1}{C_{10}^3}=\frac{50}{120}=\frac{5}{12}, P(\xi=3)=\frac{C_5^3C_5^0}{C_{10}^3}=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$，

所以ξ的分布列为：

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

所以 $E(\xi)=0\times\frac{1}{12}+1\times\frac{5}{12}+2\times\frac{5}{12}+3\times\frac{1}{12}=\frac{3}{2}$；
【小问 2 详解】
由已知该同学在一轮测试中为“优秀”的概率为 $p=C_3^2\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\frac{3}{5}+C_3^3\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{44}{125}$，

则该同学在 n 轮测试中获“优秀”次数 X 服从二项分布，即满足 $X\sim B(n,p), p=\frac{44}{125}$，

由 $E(X)=np=n\times\frac{44}{125}\geq 8\Rightarrow n\geq\frac{125\times 8}{44}\approx 22.7$，

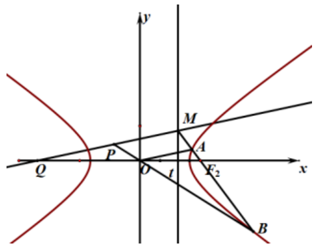
所以理论上至少要进行 23 轮测试．

17. 已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$上的一点到两条渐近线的距离之积为 2 且双曲线 C 的离心率为$\frac{\sqrt{6}}{2}$.

（1）求双曲线 C 的方程；（2）已知 M 是直线 $x=t(0<t<a)$ 上一点，直线 MF_2（F_2为双曲线的右焦点）交双曲线 C 于 A（A 在第一象限），B 两点，O 为坐标原点，过点 M 作直线 OA 的平行线 l，l 与直线OB交于点 P，与 x 轴交于点 Q，若 P 为线段 MQ 的中点，求实数 t.

解：（1）由已知得$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\\ \dfrac{|bx-ay|\cdot|bx+ay|}{a^2+b^2}=\dfrac{a^2b^2}{c^2}=2\end{cases}$得$c=3,a=\sqrt{6},b=\sqrt{3},\therefore$双曲线$C$的方程为$\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{3}=1$

（2）设$l_{AB}:x=sy+3(s\neq 0)$，代入C方程得$:(s^2-2)y^2+6sy+3=0$



$\therefore\begin{cases}y_A+y_B=-\dfrac{6s}{s^2-2}\\ y_Ay_B=\dfrac{3}{s^2-2}<0\end{cases}$,且$y_A>0>y_B$,且$\Delta=24(s^2+1)$,且$M(t,\dfrac{t-3}{s})(0<t<a)$

$\therefore$联立$l_{MP}:y-\dfrac{t-3}{s}=\dfrac{y_A}{x_A}(x-t)$,与$l_{OB}:y=\dfrac{y_B}{x_B}x$得$y_P=\dfrac{y_B(-sy_A+t-3)}{s(y_B-y_A)}$

$=\dfrac{1}{2}y_M=\dfrac{t-3}{2s}$（$\because P$是$QM$的中点）

$\Leftrightarrow\dfrac{-sy_Ay_B+(t-3)y_B}{y_B-y_A}=\dfrac{t-3}{2}\Leftrightarrow 0=-2sy_Ay_B+(t-3)(y_A+y_B)$

$=\dfrac{-6s}{s^2-2}+\dfrac{-6s(t-3)}{s^2-2}=\dfrac{-6s}{s^2-2}(t-2)=0,\therefore t=2$

18. 已知函数$f(x)=x\ln x-\dfrac{1}{2}ax^2-x(a\in R)$.（1）若函数$f(x)$在$(\dfrac{1}{e},+\infty)$上为增函数，求实数$a$的最大值；

（2）若$f(x)$有两个极值点$x_1,x_2(x_1<x_2)$，且不等式$\dfrac{x_2^m}{e}>\dfrac{e^m}{x_1}$恒成立，求正数$m$的取值范围.（其中

$e=2.71828\cdots$为自然对数的底数）

解：（1）由已知得$f'(x)=\ln x+1-ax-1=\ln x-ax\geq 0$对$x>\dfrac{1}{e}$恒成立

$\Leftrightarrow a\leq\dfrac{\ln x}{x}$记为$g(x)$，则$g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}>0\Leftrightarrow\dfrac{1}{e}<x<e$

而$g(\dfrac{1}{e})=-e,\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0,\therefore a\leq -e,\therefore a$的最大值为$-e$

（2）由（1）得$f'(x)=\ln x-ax=0\Leftrightarrow a=\dfrac{\ln x}{x}=g(x)$,

且$g(x)$在$(0,e)$上递增，在$(e,+\infty)$上递减，

而g(1)=0, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$

$\therefore 1<x_1<e<x_2$, 且$a=\dfrac{\ln x_1}{x_1}=\dfrac{\ln x_2}{x_2}$, 且$0<a<\dfrac{1}{e}$,

令$t=\dfrac{x_2}{x_1}>1$,则$\ln x_1=\dfrac{\ln t}{t-1}$,$\ln x_2=\ln t+\dfrac{\ln t}{t-1}$

而$\dfrac{x_2^m}{e}>\dfrac{e^m}{x_1}\Leftrightarrow m\ln x_2+\ln x_1>m+1\Leftrightarrow m(\ln t+\dfrac{\ln t}{t-1})+\dfrac{\ln t}{t-1}>m+1$

$\Leftrightarrow m(\ln t+\dfrac{\ln t}{t-1}-1)>1-\dfrac{\ln t}{t-1}\Leftrightarrow m(t\ln t-t+1)>t-1-\ln t\cdots(*)$恒成立

设$p(t)=t\ln t-t+1(t>1)$，则$p'(t)=\ln t>0,\therefore p(t)>p(1)=0$

$\therefore (*)\Leftrightarrow m>\dfrac{t-1-\ln t}{t\ln t-t+1}$记为$q(t)$

则$q'(t)=\dfrac{\ln^2 t-\dfrac{(t-1)^2}{t}}{(t\ln t-t+1)^2}=\dfrac{(\ln t+\dfrac{t-1}{\sqrt{t}})(\ln t-\dfrac{t-1}{\sqrt{t}})}{(t\ln t-t+1)^2}>0$

$\Leftrightarrow 0<\ln t-\sqrt{t}+\dfrac{1}{\sqrt{t}}$记为$r(t)$

则$r'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{2\sqrt{t}}-\dfrac{1}{2t\sqrt{t}}=\dfrac{-(\sqrt{t}-1)^2}{2t\sqrt{t}}<0,\therefore r(t)<r(1)=0,\therefore q'(t)<0$

而$\lim\limits_{t\to1^+}q(t)=1,\therefore m\geq1$即为所求的

19.已知数列$\{a_n\}$的各项均为正数,给定正整数 k,若对任意的$n\in N^*$且$n>k$,都有

$a_{n-k}a_{n-k+1}\cdots a_{n-1}a_{n+1}\cdots a_{n+k-1}a_{n+k}=a_n^{2k}$成立，则称数列$\{a_n\}$具有性质$T(k)$.

（1）若数列$\{a_n\}$具有性质$T(1)$，且$a_1=1$，$a_3=9$，求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若数列$\{a_n\}$既具有性质$T(2)$，又具有性质$T(3)$；证明：数列$\{a_n\}$是等比数列.

(1) 解:$\because$ 数列$\{a_n\}$具有性质$T(1)$,且$a_1=1,a_3=9,a_n>0$

$\therefore a_{n-1}a_{n+1}=a_n^2,\therefore\{a_n\}$是等比数列，

$\therefore a_3=9=a_1q^2=q^2$得$q=3,\therefore a_n=3^{n-1}$

（2）证明：由数列$\{a_n\}$具有性质$T(2)$得$a_{n-2}a_{n-1}a_{n+1}a_{n+2}=a_n^4$

$\therefore a_{n-1}a_na_{n+2}a_{n+3}=a_{n+1}^4$, 且$a_{n-3}a_{n-2}a_na_{n+1}=a_{n-1}^4$

$\therefore a_{n-1}^4a_{n+1}^4=a_{n-3}a_{n-2}a_{n-1}a_n^2a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}(n\geq 4)$

由数列$\{a_n\}$具有性质$T(3)$得$a_{n-3}a_{n-2}a_{n-1}a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}=a_n^6$

$\therefore a_{n-1}^4a_{n+1}^4=a_n^8(\because a_n>0),\therefore a_{n-1}a_{n+1}=a_n^2(n\geq 4)$

$\therefore \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\cdots=\dfrac{a_6}{a_5}=\dfrac{a_5}{a_4}=\dfrac{a_4}{a_3}$记为$q(q>0)$

$\therefore a_1a_2a_4a_5=a_3^4 \Leftrightarrow a_1a_2\cdot a_3q\cdot a_3q^2=a_3^4 \Leftrightarrow a_1a_2q^3=a_3^2$

且$a_4^4=a_2a_3a_5a_6=a_2a_3\cdot a_3q^2\cdot a_3q^3=a_3^4q^4 \Leftrightarrow a_2q=a_3$

$\therefore aq^2=a_3,\therefore \dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{a_2}{a_1}=q,\therefore \{a_n\}$是等比数列，证毕