2023-24（下）模拟（16）

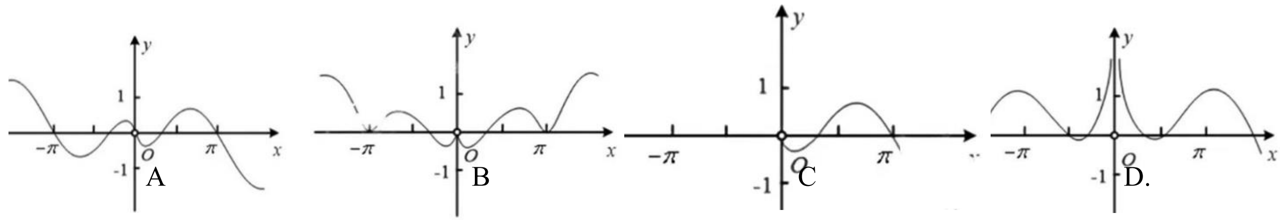
2024-02-27

1．已知集合 $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3\}$，则集合 $C=\{z\,|\,z=x+y,x\in A,y\in B\}$ 的真子集个数为（　　）

A．5　　　　B．6　　　　C．7　　　　D．8

2．等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$， $a_3\cdot a_5=4(a_4-1)$，则 a_7 等于（　　）A．2　B．4　C．$\frac{9}{2}$　　D．6

3．函数 $y=-\cos x\ln|x|$ 的图象大致是（　　）



4．设 $a,b\in R$，则 $1<b<a$ 是 $a-1>|b-1|$ 的（　　）

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件　C．充要条件　D．既不充分也不必要条件

5．已知 $a=0.75$， $b=2\log_5 2$， $c=\sin\frac{\pi}{5}$，则 a,b,c 的大小关系是（　　）

A． $c<b<a$　　　　B． $b<c<a$　　　　C． $a<c<b$　　　　D． $c<a<b$

6．在 $(x+1-\frac{2}{y})^6$ 的展开式中，$\frac{x^4}{y^2}$ 的系数为（　　）A．60　　B．-60　C．120　　D．-120

7．椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2,P 为椭圆上一点，且 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$，若 F_1 关于 $\angle F_1PF_2$ 平分线的对称点在椭圆 C 上，则该椭圆的离心率为（　　）A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　C．$\frac{1}{2}$　D．$\frac{1}{3}$

8．若 $\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})\cos(\alpha+\frac{5\pi}{12})=-\frac{\sqrt{3}}{4}$，则 $\cos(2\alpha+\frac{\pi}{6})=$（　　）

A．$1-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　B．$1+\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　C．$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　D．$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分，在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9．设 α,β,γ 为互不重合的平面，m,n 为互不重合的直线，则下列命题为真命题的是（　　）

A．若 $\alpha//\gamma$， $\beta//\gamma$，则 $\alpha//\beta$　　　　B．若 $\alpha\cap\beta=m$， $m\perp\gamma$，则 $\alpha\perp\gamma$， $\beta\perp\gamma$

C．若 $m//\alpha$， $n//\beta$， $m//n$，则 $\alpha//\beta$　　　　D．若 $\alpha\perp\gamma$， $\beta\perp\gamma$，则 $\alpha//\beta$

10．有一组互不相等的样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_6$，平均数为 $\bar{x}$．若随机剔除其中一个数据，得到一组新数据，记为 $y_1,y_2,\cdots,y_5$，平均数为 $\bar{y}$，则（　　）A．新数据的极差可能等于原数据的极差

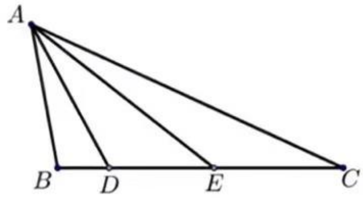
B．新数据的中位数不可能等于原数据的中位数　C．若 $\bar{x}=\bar{y}$，则新数据的方差一定大于原数据方差

D．若 $\bar{x}=\bar{y}$，则新数据的 40%分位数一定大于原数据的 40%分位数

11．记函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的最小正周期为 T，若 $f(T)=\sqrt{3}$，且 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$ 上的最大值与最小值的差为 3，则（　　）A． $f(0)=1$　　B． $f(-\frac{\pi}{3})=f(\frac{\pi}{9})$

C．$f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{9},\frac{2\pi}{3}]$ 上单调递减　　　D．直线 $y=\sqrt{3}-\frac{3}{2}x$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．



12．设函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 1, \\ \ln x, & x>1, \end{cases}$ 则 $f(1)=$__；若 $f(a)=1$，则实数 $a=$______．

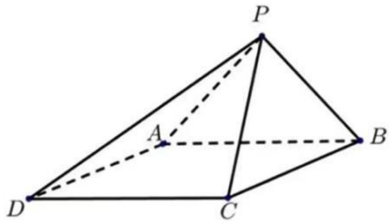
13．设 z_1,z_2 是复数，已知 $|z_1|=1$，$|z_2|=3$，$|z_1-z_2|=\sqrt{5}$，则 $|z_1+z_2|=$______．

14．如图，已知 $BC=3$，D,E 为 $\triangle ABC$ 边 BC 上的两点，且满足 $\angle BAD=\angle CAE$，$\frac{BD\cdot BE}{CD\cdot CE}=\frac{1}{4}$，则当 $\angle ACB$ 取最大值时，$\triangle ABC$ 的面积等于______．

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15．（13 分）如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，$\angle ABC=60°$，$PA\perp PB$，$PC=2$．（I）求证：平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$；

（II）若 $PA=PB$，求二面角 $A-PC-D$ 的余弦值．

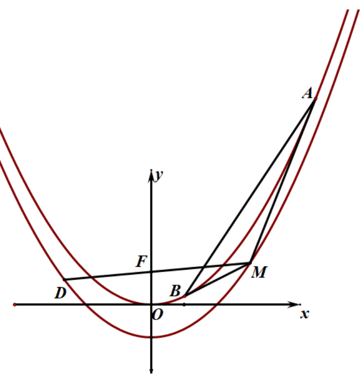


16．（15 分）设函数 $f(x)=x(x-1)(x-2)$ 的图象为曲线 C，过原点 O 且斜率为 t 的直线为 l．设 C 与 l 除点 O 外，还有另外两个交点 P，Q（可以重合），记 $g(t)=|\overrightarrow{OP}|\cdot|\overrightarrow{OQ}|$．（I）求 $g(t)$ 的解析式；（II）求 $g(t)$ 的单调区间．

17．（15 分）“英才计划”最早开始于 2013 年，由中国科协、教育部共同组织实施，到 2023 年已经培养了 6000 多名具有创新潜质的优秀中学生，为选拔培养对象，某高校在暑假期间从中学里挑选优秀学生参加数学、物理、化学学科夏令营活动．（I）若数学组的 7 名学员中恰有 3 人来自 A 中学，从这 7 名学员中选取 3 人，ξ 表示选取的人中来自 A 中学的人数，求 ξ 的分布列和数学期望；（II）在夏令营开幕式的晚会上，物理组举行了一次学科知识竞答活动，规则如下：两人一组，每一轮竞答中，每人分别答两题，若小组答对题数不小于 3，则取得本轮胜利．已知甲乙两位同学组成一组，甲、乙答对每道题的概率分别为 p_1， p_2．假设甲、乙两人每次答题相互独立，且互不影响．当 $p_1+p_2=\dfrac{4}{3}$ 时，求甲、乙两位同学在每轮答题中取胜的概率的最大值．

18．（本小题满分 17 分）已知抛物线 $C_1: x^2=4y$ 的焦点为 F．设 $M(x_0,y_0)$（其中 $x_0>0, y_0>0$）为抛物线 $C_2: x^2=4(y+1)$ 上一点．过 M 作抛物线 C_1 的两条切线 MA,MB,A,B 为切点．射线 MF 交抛物线 C_2 于另一点 D．

（I）若 $x_0=2$，求直线 AB 的方程；（II）求四边形 $MADB$ 面积的最小值．



19．（本小题满分 17 分）设整数 n,k 满足 $1\le k\le n$，集合 $A=\{2^m\,|\,0\le m\le n-1,m\in Z\}$．从 A 中选取 k 个不同的元素并取它们的乘积，这样的乘积有 C_n^k 个，设它们的和为 $a_{n,k}$．例如 $a_{3,2}=2^0\cdot 2^1+2^0\cdot 2^2+2^1\cdot 2^2=14$．

（I）若 $n\ge 2$，求 $a_{n,2}$；（II）记 $f_n(x)=1+a_{n,1}x+a_{n,2}x^2+\cdots+a_{n,n}x^n$．求 $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ 和 $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}$ 的整式表达式；

（III）用含 n,k 的式子来表示 $\dfrac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}$．

解答

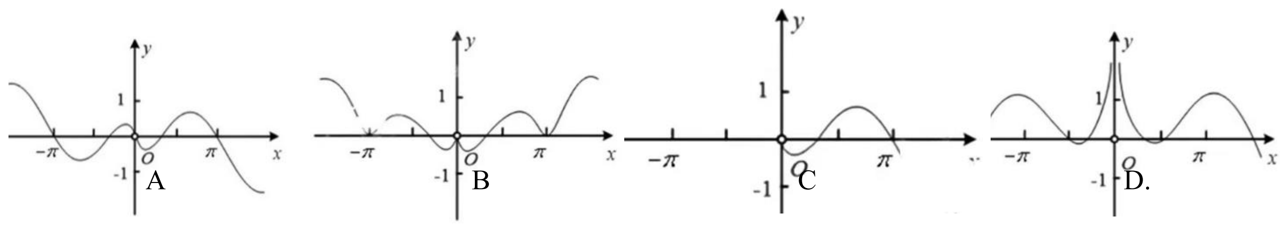
一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3\}$，则集合 $C=\{z\mid z=x+y,x\in A,y\in B\}$ 的真子集个数为（　C　）

A．5　　B．6　　C．7　　D．8

2．等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$， $a_3\cdot a_5=4(a_4-1)$，则 a_7 等于（　B　）A．2　B．4　C．$\frac{9}{2}$　D．6

3．函数 $y=-\cos x\ln|x|$ 的图象大致是（　D　）



4．设 $a,b\in R$，则 $1<b<a$ 是 $a-1>|b-1|$ 的（　A　）

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件　C．充要条件　D．既不充分也不必要条件

5．已知 $a=0.75$， $b=2\log_5 2$， $c=\sin\frac{\pi}{5}$，则 a,b,c 的大小关系是（　D　）

A． $c<b<a$　　B． $b<c<a$　　C． $a<c<b$　　D． $c<a<b$

6．在 $(x+1-\frac{2}{y})^6$ 的展开式中，$\frac{x^4}{y^2}$ 的系数为（　A　）A．60　B．-60　C．120　D．-120

7．椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2,P 为椭圆上一点，且 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$，若 F_1 关于 $\angle F_1PF_2$ 平分线的对称点在椭圆 C 上，则该椭圆的离心率为（　B）A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　C．$\frac{1}{2}$　D．$\frac{1}{3}$

8．若 $\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})\cos(\alpha+\frac{5\pi}{12})=-\frac{\sqrt{3}}{4}$，则 $\cos(2\alpha+\frac{\pi}{6})=$（　C　）

A．$1-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$1+\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$key:-\frac{\sqrt{3}}{4}=\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})\cos(\alpha+\frac{5\pi}{12})=\frac{1}{2}[\sin(2\alpha+\frac{2\pi}{3})-\sin\frac{\pi}{6}]$得$\sin(2\alpha+\frac{2\pi}{3})=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\cos(2\alpha+\frac{\pi}{6})=\sin(\frac{\pi}{2}-2\alpha-\frac{\pi}{6})=-\sin(2\alpha-\frac{\pi}{3})=\sin(2\alpha+\frac{2\pi}{3})=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分，在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9．设 α,β,γ 为互不重合的平面，m,n 为互不重合的直线，则下列命题为真命题的是（　AB　）

A．若 $\alpha//\gamma$， $\beta//\gamma$，则 $\alpha//\beta$　　B．若 $\alpha\cap\beta=m$， $m\perp\gamma$，则 $\alpha\perp\gamma$， $\beta\perp\gamma$

C．若 $m//\alpha$， $n//\beta$， $m//n$，则 $\alpha//\beta$　　D．若 $\alpha\perp\gamma$， $\beta\perp\gamma$，则 $\alpha//\beta$

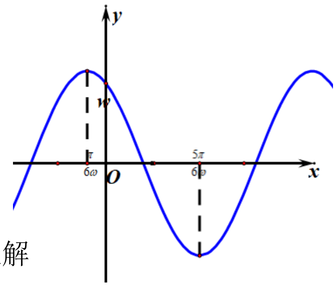
10．有一组互不相等的样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_6$，平均数为 $\overline{x}$．若随机剔除其中一个数据，得到一组新数据，记为 $y_1,y_2,\cdots,y_5$，平均数为 $\overline{y}$，则（　ABC　）A．新数据的极差可能等于原数据的极差

B．新数据的中位数不可能等于原数据的中位数　C．若 $\overline{x}=\overline{y}$，则新数据的方差一定大于原数据方差

D．若 $\overline{x}=\overline{y}$，则新数据的 40%分位数一定大于原数据的 40%分位数

11．记函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的最小正周期为 T，若 $f(T)=\sqrt{3}$，且 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$ 上的最大值与最小值的差为 3，则（　BD　）A． $f(0)=1$　　B． $f(-\frac{\pi}{3})=f(\frac{\pi}{9})$

C． $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{9},\frac{2\pi}{3}]$ 上单调递减　　D．直线 $y=\sqrt{3}-\frac{3}{2}x$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线



$key:由T=\frac{2\pi}{\omega}得f(T)=2\cos(2\pi+\varphi)=2\cos\varphi=\sqrt{3},\therefore \varphi=\frac{\pi}{6},A错;$

$由\omega x+\frac{\pi}{6}=0得x=-\frac{\pi}{6\omega},$

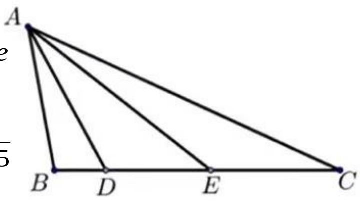
$\therefore \frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{6\omega}即0<\omega<\frac{5}{2},\therefore C错;$

$当-\frac{\pi}{6\omega}\le-\frac{\pi}{3}即0<\omega\le\frac{1}{2}时, f(x)_{\max}-f(x)_{\min}=f(-\frac{\pi}{3})-f(\frac{\pi}{3})=2\sin\frac{\pi}{3}\omega=3,无解$

$\therefore \frac{1}{2}<\omega<\frac{5}{2},且f(\frac{\pi}{3})=-1=2\cos(\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6})得\omega=\frac{3}{2},\therefore B,D对$

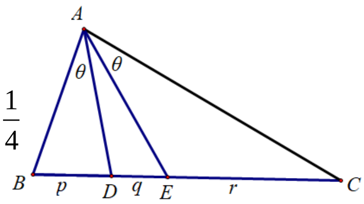
三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12．设函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\le 1,\\ \ln x, & x>1,\end{cases}$ 则 $f(1)=$__；若 $f(a)=1$，则实数 $a=$______．　$e;0或e$



13．设 z_1,z_2 是复数，已知 $|z_1|=1$， $|z_2|=3$， $|z_1-z_2|=\sqrt{5}$，则 $|z_1+z_2|=$______．　$\sqrt{15}$

14．如图，已知 $BC=3$，D,E 为 $\triangle ABC$ 边 BC 上的两点，且满足 $\angle BAD=\angle CAE$， $\frac{BD\cdot BE}{CD\cdot CE}=\frac{1}{4}$，则当 $\angle ACB$ 取最大值时， $\triangle ABC$ 的面积等于______．　$\frac{3\sqrt{3}}{2}$



$key:由已知设\angle BAD=\angle CAE=\theta,BD=p,DE=q,EC=r,则p+q+r=3,且\frac{p(p+q)}{(q+r)r}=\frac{1}{4}$

$$\frac{p}{\sin\theta}=\frac{c}{\sin\angle ADB},\frac{p+q}{\sin(\angle DAE+\theta)}=\frac{c}{\sin\angle AEB},\therefore \frac{p(p+q)}{\sin\theta\sin(\angle DAE+\theta)}=\frac{c^2}{\sin\angle ADB\sin\angle AEB}$$

$$\frac{b}{\sin\angle ADB}=\frac{q+r}{\sin(\angle DAE+\theta)},\frac{b}{\sin\angle AEB}=\frac{r}{\sin\theta},\therefore \frac{r(q+r)}{\sin\theta\sin(\angle DAE+\theta)}=\frac{b^2}{\sin\angle ADB\sin\angle AEB}$$

$\therefore \frac{c^2}{b^2}=\frac{p(p+q)}{r(q+r)}=\frac{1}{4}得b=2c,即AC=2AB,而BC=3$

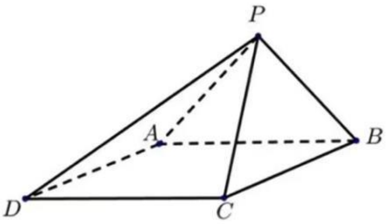
$\therefore A的轨迹是直径为4的圆,\therefore (\angle ACB)_{\max}=30°,此时S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15．（13 分）如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形， $\angle ABC=60°$， $PA\perp PB$， $PC=2$．（I）求证：平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$；

（II）若 $PA=PB$，求二面角 $A-PC-D$ 的余弦值．

（1）取 E,F 分别为 AB,PA 的中点，连接 EF,EC,AC，



因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $AB=BC$.

因为 $\angle ABC=60°$，所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形，所以 $CE\perp AB$，且 $AB=BC=AC=2$.

因为 E,F 分别是 E,F 的中点，所以 $EF\,//\,PB$，由 $PA\perp PB$ 得 $PA\,//\,EF$.

因为 $PC=AC=2$，所以 $\triangle ACP$ 是等腰三角形，所以 $PA\perp CF$.

因为 $EF\cap CF=F$，$EP,CF\subset$ 平面 ECF，所以 $PA\perp$ 平面 ECF. 从而 $PA\perp CE$.

同理，$PB\perp CE$. 由于 $PA,PB\subset$ 平面 PAB，所以 $CE\perp$ 平面 PAB，

又因为 $CE\subset$ 平面 $ABCD$，所以平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$.

别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，则 $E(0,0,0)$，$C(\sqrt{3},0,0)$，$B(0,1,0)$，$P(0,0,1)$，$A(0,-1,0)$，

$D(\sqrt{3},-2,0)$. $\overrightarrow{CP}=(-\sqrt{3},0,1)$，$\overrightarrow{AP}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$.

设平面 APC 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CP}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-\sqrt{3}x+z=0,\\ y+z=0,\end{cases}$，可以取 $\vec{n}=(1,-\sqrt{3},\sqrt{3})$.

设平面 DPC 的法向量为 $\vec{m}=(p,q,r)$，由 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{CP}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-\sqrt{3}p+r=0,\\ 2q=0,\end{cases}$，可以取 $\vec{n}=(1,0,\sqrt{3})$.

$$\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{1\times1+(-\sqrt{3})\times0+\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{\sqrt{7}\times\sqrt{4}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$$

所以二面角 $A-PC-D$ 的余弦值是 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

16.（15 分）设函数 $f(x)=x(x-1)(x-2)$ 的图象为曲线 C，过原点 O 且斜率为 t 的直线为 l. 设 C 与 l 除点 O 外，还有另外两个交点 P，Q（可以重合），记 $g(t)=|\overrightarrow{OP}|\cdot|\overrightarrow{OQ}|$.（I）求 $g(t)$ 的解析式；（II）求 $g(t)$ 的单调区间.

解：（Ⅰ）由 $l:y=tx$ 得 $(x-1)(x-2)x=tx(x\neq0)$

$\Leftrightarrow x^2-3x+2-t=0$ 有两个不同根,

$\therefore\begin{cases}x_P+x_Q=3\\ x_Px_Q=2-t,\end{cases}$ 且 $\Delta=4t+1>0$, 且 $t\neq2$

$\therefore g(t)=|\overrightarrow{OP}|\cdot|\overrightarrow{OQ}|=(1+t^2)|x_Px_Q|=(1+t^2)|t-2|\,(t>-\frac{1}{4}$, 且 $t\neq2)$

（Ⅱ）由（Ⅰ）得：$g'(t)=\begin{cases}3t^2-4t+1=(3t-1)(t-1)>0,t>2\\ -(3t-1)(t-1)>0\text{即}\frac{1}{3}<t<1,t<2\end{cases}$

$\therefore g(t)$ 的递增区间为 $(\frac{1}{3},1)$ 及 $(2,+\infty)$，递减区间为 $(-\frac{1}{4},\frac{1}{3})$ 及 $(1,2)$

17.（15 分）“英才计划”最早开始于 2013 年，由中国科协、教育部共同组织实施，到 2023 年已经培养了 6000 多名具有创新潜质的优秀中学生，为选拔培养对象，某高校在暑假期间从中学里挑选优秀学生参加数学、物理、化学学科夏令营活动.（I）若数学组的 7 名学员中恰有 3 人来自 A 中学，从这 7 名学员中选取 3 人，ξ 表示选取的人中来自 A 中学的人数，求 ξ 的分布列和数学期望；（II）在夏令营开幕式的晚会上，物理组举行了一次学科知识竞答活动，规则如下：两人一组，每一轮竞答中，每人分别答两题，若小组答对题数不小于 3，则取得本轮胜利. 已知甲乙两位同学组成一组，甲、乙答对每道题的概率分别为 p_1，p_2. 假设甲、乙两人每次答题相互独立，

且互不影响．当 $p_1+p_2=\dfrac{4}{3}$ 时，求甲、乙两位同学在每轮答题中取胜的概率的最大值．

解：（Ⅰ）由题意得ξ的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

,且$E(\xi)=3\cdot\dfrac{3}{7}=\dfrac{9}{7}$

（Ⅱ）由题意得甲、乙两位同学在每轮答题中取胜的概率p

$=p_1^2p_2^2+p_1^2\cdot C_2^1p_2(1-p_2)+C_2^1p_1(1-p_1)p_2^2=(\dfrac{4}{3}p_1-p_1^2)(\dfrac{8}{3}-3(\dfrac{4}{3}p_1-p_1^2))$

记为$f(p_1)(0<p_1<1)$

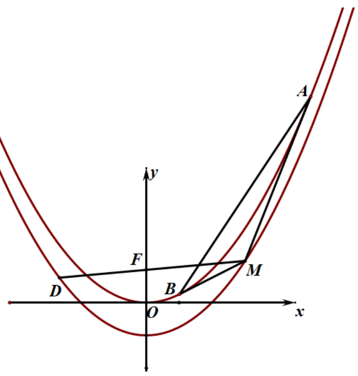
则$f'(p_1)=(\dfrac{4}{3}-2p_1)(\dfrac{8}{3}-3(\dfrac{4}{3}p_1-p_1^2))+(\dfrac{4}{3}p_1-p_1^2)\cdot(-3)(\dfrac{4}{3}-2p_1)$

$=(\dfrac{4}{3}-2p_1)(6p_1^2-8p_1+\dfrac{8}{3})>0\Leftrightarrow 0<p_1<\dfrac{2}{3}$

$\therefore f(p_1)_{\max}=f(\dfrac{2}{3})=\dfrac{16}{27},\therefore$ 所求概率的最大值为$\dfrac{16}{27}$

18．（本小题满分 17 分）已知抛物线 $C_1:x^2=4y$ 的焦点为 F．设 $M(x_0,y_0)$（其中 $x_0>0,y_0>0$）为抛物线 $C_2:x^2=4(y+1)$ 上一点．过 M 作抛物线 C_1 的两条切线 MA,MB,A,B 为切点．射线 MF 交抛物线 C_2 于另一点 D．

（I）若 $x_0=2$，求直线 AB 的方程；（II）求四边形 $MADB$ 面积的最小值．



解：（Ⅰ）$\because x_0=2,\therefore M(2,0)$

而$l_{MA}:x_Ax=2(y+y_A),\therefore x_A=y_A$,同理$x_B=y_B$

$\therefore$直线AB的方程为$:y=x$

（2）设$M(2t,t^2-1)(t>1),A(2a,a^2),B(2b,b^2),D(2d,d^2-1)$

则$l_{MA}:2ax=2(y+a^2)$即$ax=y+a^2,\therefore 2ta=t^2-1+a^2$即$a^2-2ta+t^2-1=0$

同理$b^2-2tb+t^2-1=0,\therefore\begin{cases}a+b=2t\\ab=t^2-1\end{cases}$,且$\Delta=4>0$

$\therefore l_{AB}:y-a^2=\dfrac{a^2-b^2}{2a-2b}(x-2a)$即$2y=(a+b)x-2ab=2tx-2(t^2-1)$即$tx-y-t^2+1=0$

由M,F,D三点共线得$\dfrac{t^2-1-(d^2-1)}{2t-2d}=\dfrac{t+d}{2}=\dfrac{t^2-1-1}{2t}$得$d=-\dfrac{2}{t}$

$\therefore S_{MADB}=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+t^2}\cdot|2a-2b|\cdot\dfrac{|t\cdot 2t-(t^2-1)-t^2+1-(t\cdot\frac{-4}{t}-(\frac{4}{t^2}-1)-t^2+1)|}{\sqrt{1+t^2}}$

$=2(t^2+\dfrac{4}{t^2}+4)\geq 16$(当且仅当$t=\sqrt{2}$时，取=)

$\therefore$四边形$MADB$面积的最小值为16

19．（本小题满分 17 分）设整数 n,k 满足$1\leq k\leq n$，集合 $A=\{2^m\,|\,0\leq m\leq n-1,m\in Z\}$．从 A 中选取 k 个不同的元素并取它们的乘积，这样的乘积有 C_n^k 个，设它们的和为 $a_{n,k}$．例如 $a_{3,2}=2^0\cdot2^1+2^0\cdot2^2+2^1\cdot2^2=14$．

（I）若 $n\geq 2$，求 $a_{n,2}$；（II）记 $f_n(x)=1+a_{n,1}x+a_{n,2}x^2+\cdots+a_{n,n}x^n$．求 $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ 和 $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}$ 的整式表达式；

（III）用含 n,k 的式子来表示 $\dfrac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}$.

解：（Ⅰ）由已知得 $a_{n,2}=\dfrac{(2^0+2^1+\cdots+2^{n-1})^2-(2^0+2^2+\cdots+2^{2(n-1)})}{2}$

$=\dfrac{1}{2}((\dfrac{1-2^n}{1-2})^2-\dfrac{1-2^{2n}}{1-2^2})=\dfrac{1}{3}(2^{2n}-3\cdot 2^n+2)$

（Ⅱ）由已知得 $a_{n+1,k}=$（不含 2^n 的和）$a_{n,k}+$（含 2^n 的和）$a_{n,k-1}\cdot 2^n$

$\therefore f_{n+1}(x)=1+a_{n+1,1}x+a_{n+1,2}x^2+\cdots+a_{n+1,n}x^n+a_{n+1,n+1}x^{n+1}$

$=1+(a_{n,1}+2^n)x+(a_{n,2}+2^n\cdot a_{n,1})x^2+\cdots+(a_{n,n}+2^n\cdot a_{n,n-1})x^n+2^{\frac{n(n+1)}{2}}x^{n+1}$

$=f_n(x)+2^n(x+a_{n,1}x^2+\cdots+a_{n,n-1}x^n+a_{n,n}x^{n+1}-a_{n,n}x^{n+1})+2^{\frac{n(n+1)}{2}}x^{n+1}$

$=f_n(x)+2^n\cdot xf_n(x)-2^n\cdot 2^{\frac{n(n-1)}{2}}x^{n+1}+2^{\frac{n(n+1)}{2}}x^{n+1}=(1+2^nx)f_n(x),\therefore \dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}=1+2^nx,$

$\dfrac{f_{n+1}(2x)}{f_n(2x)}=1+2^n\cdot(2x)=1+2^{n+1}x=\dfrac{f_{n+2}(x)}{f_{n+1}(x)},\therefore \dfrac{f_{n+1}(2x)}{f_{n+2}(x)}=\dfrac{f_n(2x)}{f_{n+1}(x)}=\cdots=\dfrac{f_1(2x)}{f_2(x)}=\dfrac{1+2x}{1+3x+2x^2}=\dfrac{1}{1+x}$

$\therefore f_n(2x)=\dfrac{f_{n+1}(x)}{1+x},\therefore \dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}=1+x$

（III）由（2）得：$a_{n+1,k+1}=a_{n,k+1}+2^na_{n,k}$，

且 $f_{n+1}(x)=1+a_{n+1,1}x+a_{n+1,2}x^2+\cdots+a_{n+1,n}x^n+a_{n+1,n+1}x^{n+1}$

$=(1+x)f_n(2x)=(1+x)(1+2a_{n,1}x+2^2a_{n,2}x^2+\cdots+2^na_{n,n}x^n)$

得 $a_{n+1,k}=2^ka_{n,k}+2^{k+1}a_{n,k+1}$，且 $a_{n+1,k+1}=2^ka_{n,k}+2^{k+1}a_{n,k+1}=a_{n,k+1}+2^na_{n,k}$

$\therefore a_{n,k+1}=\dfrac{2^n-2^k}{2^{k+1}-1}a_{n,k},\therefore \dfrac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}=\dfrac{a_{n,k+1}}{a_{n,k}}+2^n=\dfrac{2^n-2^k}{2^{k+1}-1}+2^n=\dfrac{2^{n+k+1}-2^k}{2^{k+1}-1}$