③ 若$|f(x)|$在$[-1,2]$上单调，则m的取值范围为______；

$$key:\begin{cases}\dfrac{2m-1}{2}\le -1\\ f(-1)=m^2+2m\ge 0,or,f(2)=m^2-4m+6\le 0\end{cases},or,\begin{cases}\dfrac{2m-1}{2}\ge 2,\\ f(-1)=m^2+2m\le 0,or,f(2)=m^2-4m+6\ge 0\end{cases}$$

得$m\le -2,or,m\ge \dfrac{5}{2}$

若$|f(x)|$在$[-1,2]$上不单调，则m的取值范围为______.

（3）①若函数 $f(x)=x^2+|x-a|+b$在区间$(-\infty,0]$上为减函数，则实数 a 的取值范围是__$[0,+\infty)$________.

$key: f(x)=\max\{x^2+x-a+b,x^2-x+a+b\}$

② 设函数$f(x)=x^2-|x^2-2ax-8|(a\in R)$在区间$(-\infty,-4)$和$(3,+\infty)$上单调递增，则$a$的取值范围为____.

$key: f(x)=\min\{2ax+8,2x^2-2ax-8\},\therefore a>0,$

由$2ax=2x^2-2ax-8$即$x^2-2ax-4=0$得$\Delta=4a^2+16>0$

$$\therefore\begin{cases}\dfrac{a}{2}\le 3\\ 32+8a-8\ge -8a+8\end{cases}\quad 得0<a\le 6$$

③若函数 $f(x)=(x-2)|x-a|$ 在区间$[2,4]$上单调递增，则实数 a 的取值范围是______.

key:当$a\ge 4$时，$f(x)=(x-2)(a-x),\therefore \dfrac{2+a}{2}\ge 4$得$a\ge 6$；当$a\le 2$时，$f(x)=(x-2)(x-a),\therefore \dfrac{2+a}{2}\le 2$即$a\le 2$

当$2<a<4$时，有$4>a>\dfrac{a+2}{2}>2$，$f(x)=\begin{cases}(x-2)(x-a),a\le x\le 4\\(x-2)(a-x),2\le x\le a\end{cases}$在$[2,4]$上单调，所以$a\in(-\infty,2]\cup[6,+\infty)$

（4）①（I）已知函数$f(x)=\begin{cases}(1-2a)^x\ ,x<1,\\ \dfrac{a}{x}+4,x\ge 1\end{cases}$满足对任意$x_1\ne x_2$,都有$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$成立，则实数$a$的取值范围为_________. $[-1,0)$

（II）已知函数$f(x)=\sqrt{x+1}-ax+2$,若对任意$x_1,x_2\in[-1,1],x_1\ne x_2$,都有$-1<\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<2$

则实数a的取值范围为_________

key:（因式分解，同构，单调性）$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{\sqrt{x_2+1}-\sqrt{x_1+1}}{x_2-x_1}-a=\dfrac{1}{\sqrt{x_2+1}+\sqrt{x_1+1}}-a$

$\therefore x_1,x_2\in[-1,1]$,且$x_1\ne x_2,\therefore\sqrt{x_1+1}+\sqrt{x_2+1}\in(0,2\sqrt{2}),\therefore\begin{cases}-a\ge -1\\ 2\sqrt{2}-a\le 2\end{cases}$ 即$2\sqrt{2}-2\le a\le 1$

②已知函数$f(x)=x+\dfrac{a}{x}-4,g(x)=kx+3$. 当$a\in[1,2]$时，若不等式$|f(x_1)|-|f(x_2)|<g(x_1)-g(x_2)$

对任意$x_1,x_2\in[2,4](x_1<x_2)$恒成立，求实数k的取值范围.

2022-12-17

解：由已知得$|f(x_1)|-g(x_1)<|f(x_2)|-g(x_2)$对任意$x_1,x_2\in[2,4]$恒成立

则函数$h(x)=|f(x)|-g(x)=|x+\frac{a}{x}-4|-kx-3$在$x\in[2,4]$上递增

（必要条件）$h(2)=2-\frac{a}{2}-2k-3<h(3)=1-\frac{a}{3}-3k-3<h(4)=\frac{a}{4}-4k-3$得$\begin{cases}k<\frac{a}{6}-1\geq-\frac{5}{6}\\ k<\frac{7a}{12}-1\geq-\frac{5}{12}\end{cases}$，$\therefore k<-\frac{5}{6}$

$\because a\in[1,2],x\in[2,4],\therefore f(x)$在$[2,4]$上递增，且$f(x)\in[\frac{a}{2}-2,\frac{a}{4}]$，

$$\therefore h(x)=\begin{cases}(1-k)x+\frac{a}{x}-7,2+\sqrt{4-a}\leq x\leq 4,\\ -(1+k)x-\frac{a}{x}+1,2\leq x\leq 2+\sqrt{4-a},\end{cases}$$

$\because a\in[1,2]$，且$k<-\frac{5}{6},\therefore\sqrt{\frac{a}{1-k}}\leq 2,\therefore h(x)$在$[2+\sqrt{4-a},4]$上递增，

$\therefore k+1\leq 0$，或$\begin{cases}k+1>0\\ \sqrt{\frac{a}{k+1}}\geq 2+\sqrt{4-a}\end{cases}$即$\frac{1}{\sqrt{k+1}}\geq 2\sqrt{\frac{1}{a}}+\sqrt{\frac{4}{a}-1}\leq 2+\sqrt{3}$得$\frac{1}{\sqrt{k+1}}\geq 2+\sqrt{3}$即$k\leq 6-4\sqrt{3}$

$\therefore k$的取值范围为$(-\infty,6-4\sqrt{3}]$

3（1）设集合$M=\{x|f(x)=x\}$，集合$\{x|f(f(x))=x\}$，若已知函数$y=f(x)$是R上的增函数，记$|M|,|N|$是M,N中元素的个数，则下列判断一定正确的是（　A　）

A. $|M|=|N|$　　B. $|M|>|N|$　　C. $|M|\leq|N|$　　D. $||M|-|N||=1$

（2）已知定义在区间$[a,b]$上的增函数$f(x)$满足对任意的$x,y\in[a,b]$，都有$|f(x)-f(y)|<|x-y|$，则方程$f(x)=x$在$x\in[a,b]$上的解的个数为________________.1

（3）设函数$y=f(x)(x\neq 0)$对任意非零实数x,y都有$f(xy)=f(x)+f(y)$成立.

（I）求证：$f(1)=f(-1)$，且$f(\frac{1}{x})=-f(x)$；

（II）当$x>1$时，$f(x)<0$.解不等式$f(\frac{1}{x})-f(2x-1)\geq 0$.

（Ⅰ）证明：令$x=y=1$得$f(1)=0$; 令$x=y=-1$得$f(1)=2f(-1)=0, \therefore f(1)=f(-1)=0$

令$y=\frac{1}{x}$得$f(1)=f(x)+f(\frac{1}{x})=0, \therefore f(\frac{1}{x})=-f(x)$

（Ⅱ）解：令$x=-1$得$f(-x)=f(x)+f(-1)=f(x), \therefore f(x)$是偶函数，

$\forall x_1, x_2>0$, 且$x_1<x_2$

则$f(x_2)-f(x_1)=f(\frac{x_2}{x_1}\cdot x_1)-f(x_1)=f(\frac{x_2}{x_1})>0(\because x_2>x_1>0, \therefore \frac{x_2}{x_1}>1, \therefore f(\frac{x_2}{x_1})>0)$

$\therefore f(x_2)>f(x_1), \therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上递增

$\therefore f(\frac{1}{x})-f(2x-1)=-f(x)-f(2x-1)\ge 0 \Leftrightarrow f(1)=0\ge f(x)+f(2x-1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ne 0 \\ 2x-1\ne 0 \\ |x(2x-1)|\le 1 \end{cases}$ 得$x\in[-\frac{1}{2},0)\cup(0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1]$即为所求的

（4）①定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0, f(x)+f(1-x)=1, f(\frac{x}{3})=\frac{1}{2}f(x)$，且当$0\le x_1<x_2\le 1$时，

有 $f(x_1)\le f(x_2)$, 则$f(\frac{1}{2021})=$ （ ） A. $\frac{1}{256}$ B. $\frac{1}{128}$ C. $\frac{1}{64}$ D. $\frac{1}{32}$

key:由当$0\le x_1<x_2\le 1$时，有$f(x_1)\le f(x_2)$得函数$f(x)$在$x\in[0,1]$上不递减

由$f(0)+f(1)=1, f(\frac{1}{2})+f(1-\frac{1}{2})=2f(\frac{1}{2})=1\Rightarrow f(1)=1, f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$

$\therefore f(\frac{1}{3})=\frac{1}{2}\Rightarrow f(\frac{1}{3^n})=\frac{1}{2^n}; f(\frac{1}{3\cdot 2})=\frac{1}{2^2}\Rightarrow f(\frac{1}{2\cdot 3^{n-1}})=\frac{1}{2^n}$

$\because 2\cdot 3^6<2021<3^7$即$\frac{1}{3^7}<\frac{1}{2021}<\frac{1}{2\cdot 3^6}, \therefore f(\frac{1}{2021})=\frac{1}{2^7}=\frac{1}{128}$

②（多选题）若函数$f:N^*\to N^*$, $f(x)$在N^*上单调递增, 且满足$f(f(x))=2x+1$, 则下列结论正确的是（ ）

$A. f(1)=1$ $B. f(2)=3$ $C. f(1124)=1636$ $D. f(2022)=3021$

key:由$f(f(1))=3$, 若$f(1)=1$, 则$f(f(1))=f(1)=3$, 矛盾；

若$f(1)=2$，则$3=f(f(1))=f(2)$；若$f(1)=k\ge 3$，则$3=f(f(1))=f(k)\le f(1)$矛盾；

$\because f(f(n))=2n+1, \therefore f(2n+1)=f(f(f(n)))=2f(n)+1$,

由$f(1)=f(2^1-1)=3\cdot 2^{1-1}-1$, 若$f(2^k-1)=3\cdot 2^{k-1}-1$,

则$f(2^{k+1}-1)=f(2(2^k-1)+1)=2f(2^k-1)+1=2(3\cdot 2^{k-1}-1)+1=3\cdot 2^{k+1-1}-1. \therefore f(2^n-1)=3\cdot 2^{n-1}-1.$

$\therefore f(2^{10}-1)=3\cdot 2^9-1, f(3\cdot 2^9-1)=f(f(2^{10}-1))=2^{11}-1$

而$3\cdot 2^9-1-(2^{10}-1)=2^9, 2^{11}-1-(3\cdot 2^9-1)=2^9, \therefore f(2^{10}-1+r)=3\cdot 2^9-1+r(0\le r\le 2^9)$,

$\therefore f(3\cdot 2^9-1+r)=f(f(2^{10}-1+r))=2^{11}-1+2r, \therefore f(1124)=1636, f(2022)=3021$

（5）已知函数 $f(x)$ 是 R 上的单调函数，且对任意实数 x，都有 $f[f(x)+\frac{2}{2^x+1}]=\frac{1}{3}$ 成立，则 $f(2020)$ 的值

是（ D ） A. $2^{2020}-1$ B. $2^{2020}+1$ C. $\frac{2^{2020}+1}{2^{2020}-1}$ D. $\frac{2^{2020}-1}{2^{2020}+1}$

2022-12-17

$key:$ 设$f(2020)=a$，则$\frac{1}{3}=f(f(2020)+\frac{2}{2^{2020}+1})=f(a+\frac{2}{2^{2020}+1})$

令$x=a+\frac{2}{2^{2020}+1}$，则$\frac{1}{3}=f(f(a+\frac{2}{2^{2020}+1})+\frac{2}{2^{a+\frac{2}{2^{2020}+1}}+1})=f(\frac{1}{3}+\frac{2}{2^{a+\frac{2}{2^{2020}+1}}+1})=f(a+\frac{2}{2^{2020}+1})$

$\therefore\frac{1}{3}+\frac{2}{2^{a+\frac{2}{2^{2020}+1}}+1}=a+\frac{2}{2^{2020}+1}$（令$t=a+\frac{2}{2^{2020}+1}$），则$\frac{1}{3}+\frac{2}{2^t+1}=t$即$\frac{1}{3}=t-\frac{2}{2^t+1}$（递增）得$t=1$

$\therefore 1=a+\frac{2}{2^{2020}+1},\therefore f(2020)=1-\frac{2}{2^{2020}+1}=\frac{2^{2020}-1}{2^{2020}+1}$

（6）（多选题）设S,T是R的两个非空子集，如果存在一个从S到T的函数$y=f(x)$满足：

（ⅰ）$T=\{f(x)|x\in S\}$；（ⅱ）$\forall x_1,x_2\in S$，当$x_1<x_2$时，恒有$f(x_1)<f(x_2)$，那么称这两个集合“保序同构”.以下集合对是“保序同构”的是（　）

$A.S=N^*$，$T=N$　$B.S=\{x|-1\le x\le 3\},T=\{x|x=-5$，或$0<x\le 10\}$

$C.S=Z,T=Q$　　$D.S=R,T=\{x|x>1\}$

（2）$key:$（ABD）$A: f(x)=x-1$，对；$B: f(x)=\begin{cases}-5, x=-1,\\ \frac{5}{2}(x+1), -1<x\le 3.\end{cases}$ 对；

$D: f(x)=x-1-\frac{1}{x-1}(x>1)$，对

$C:$ 假设存在Z上的$f(x)$，且$f(x)$是增函数，值域为Q，则$f(1)=p, f(2)=q(p<q, p,q\in Q)$

$\therefore \exists x_0\in Z, \ni f(x_0)=\frac{p+q}{2}(\frac{p+q}{2}\in(p,q),\frac{p+q}{2}\in Q),\therefore 1<x_0<2$，矛盾

4（1）　已知函数$f(x)=2022^x+\log_{2022}(\sqrt{x^2+1}+x)-2022^{-x}+2$，则关于$x$的不等式$f(3x+1)+f(x)>4$

的解集为________.

$f(x)=2022^x-2022^{-x}+\log_{2022}(\sqrt{x^2+1}+x)+2$得$f(-x)+f(x)=4$，且$f(x)$在$R$上递增

$\therefore f(3x+1)+f(x)>4\Leftrightarrow f(3x+1)>4-f(x)=f(-x)\Leftrightarrow 3x+1>-x,\therefore$ 解集为$(-\frac{1}{4},+\infty)$

（2）①已知$x,y\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}], a\in R$，且$\begin{cases}x^3+x-2a=0,\\ 4y^3+\frac{1}{2}y+a=0,\end{cases}$ 则$x+2y=$________.0

② 设实数x,y满足$\begin{cases}(x-1)^3+2021(x-1)=-1\\ (y-1)^3+2021(y-1)=1\end{cases}$，则$x+y=$________.

$key: f(x)=x^3+2021x$递增，且是奇函数，$\therefore x-1+y-1=0$即$x+y=2$

三、奇偶性

①奇函数 $\begin{cases}\text{定义：} f(-x)=-f(x)\\ \text{否定义（举反例）：存在}x_0,\text{使得}f(-x_0)\neq -f(x_0)\end{cases}$

偶函数 $\begin{cases}\text{定义：} f(-x)=f(x)\\ \text{否定义（举反例）：存在}x_0,\text{使得}f(-x_0)\neq f(x_0)\end{cases}$

②奇偶函数的必要条件1：定义域关于原点对称；定义在R上奇函数$f(x)$的必要条件2：$f(0)=0$.

③判断奇偶性：先求定义域，表达式化简，再判断$f(-x)$与$f(x)$的关系；不是奇、偶函数要举反例；

奇偶函数种类：奇函数，偶函数，既是奇函数又是偶函数，既不是奇函数又不是偶函数

④奇偶性实质：自变量互为相反数的函数值的关系

⑤奇偶性与单调性的关系：奇偶函数在对称区间上的单调性一致或相反

⑥奇偶函数的图象特征
$$\begin{cases}\text{互对称}\begin{cases}\text{中心对称}\begin{cases}y=f(x)\xleftrightarrow{(a,0)}-y=f(2a-x)\\ y=f(x)\xleftrightarrow[(0,b)]{}y=2b-f(-x)\\ y=f(x)\xleftrightarrow[(a,b)]{}y=2b-f(2a-x)\end{cases}\\ \text{轴对称}\begin{cases}y=f(x)\xleftrightarrow{x=a}y=f(2a-x)\\ y=f(x)\xleftrightarrow[y=b]{}y=2b-f(x)\end{cases}\end{cases}\\ \text{自对称}\begin{cases}f(x)\text{的图象关于}(a,b)\text{对称}\Leftrightarrow f(x)+f(2a-x)=2b\\ f(x)\text{的图象关于直线}x=a\text{对称}\Leftrightarrow f(a-x)=f(a+x)\end{cases}\end{cases}$$

（2002I）设a为实数，函数$f(x)=x^2+|x-a|+1, x\in R.$

（Ⅰ）讨论$f(x)$的奇偶性；（Ⅱ）求$f(x)$的最小值.

解：(Ⅰ)当$a=0$时，函数$f(-x)=(-x)^2+|-x|+1=f(x)$，

此时$f(x)$为偶函数. ------2分

当$a\neq 0$时，$f(a)=a^2+1$，$f(-a)=a^2+2|a|+1$，

$f(-a)\neq f(a)$，$f(-a)\neq -f(a)$.

此时函数$f(x)$既不是奇函数，也不是偶函数. ------4分

(Ⅱ)(ⅰ)当$x\leq a$时，函数$f(x)=x^2-x+a+1=(x-\frac{1}{2})^2+a+\frac{3}{4}$.

若$a\leq\frac{1}{2}$，则函数$f(x)$在$(-\infty,a]$上单调递减，从而，函数$f(x)$在$(-\infty,a]$上的最小值为$f(a)=a^2+1$.

若$a>\frac{1}{2}$，则函数$f(x)$在$(-\infty,a]$上的最小值为$f(\frac{1}{2})=\frac{3}{4}+a$，且$f(\frac{1}{2})\leq f(a)$.

------7分

(ⅱ)当$x\geq a$时，函数$f(x)=x^2+x-a+1=(x+\frac{1}{2})^2-a+\frac{3}{4}$.

若$a\leq-\frac{1}{2}$，则函数$f(x)$在$[a,+\infty)$上的最小值为$f(-\frac{1}{2})=\frac{3}{4}-a$，且$f(-\frac{1}{2})\leq f(a)$.

若$a>-\frac{1}{2}$，则函数$f(x)$在$[a,+\infty)$上单调递增，从而，函数$f(x)$在$[a,+\infty)$上的最小值为$f(a)=a^2+1$. ------10分

综上：$f(x)_{\min}=\begin{cases}\frac{3}{4}-a, a\leq-\frac{1}{2},\\ a^2+1, -\frac{1}{2}<a\leq\frac{1}{2},\\ a+\frac{3}{4}, a>\frac{1}{2}.\end{cases}$

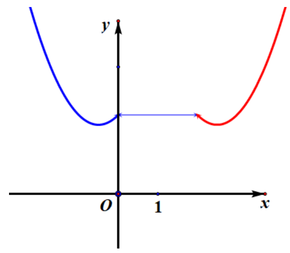
2022-12-17

（2016B）已知 $f(x),g(x)$ 均为定义在 R 上的函数，$f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称，$g(x)$ 的图像关于点 $(1,-2)$ 中心对称，且 $f(x)+g(x)=9^x+x^3+1$，则 $f(2)g(2)$ 的值为______.2016

（2018）已知 $f(x)=\dfrac{(2^x+1)^2}{2^x\cdot x}+1$ 在 $[-2018,0)\cup(0,2018]$ 上的最大值为 M，最小值为 N，则 $M+N$=（ B）

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

（2016Ⅰ）已知函数$f(x)=\begin{cases}2-|x|, x\le 2,\\(x-2)^2, x>2,\end{cases}$ 函数$g(x)=b-f(2-x)$,其中$b\in R$,若函数$y=f(x)-g(x)$恰有4个零点,则b的取值范围为（　）$A.(\frac{7}{4},+\infty)$ $B.(-\infty,\frac{7}{4})$ $C.(0,\frac{7}{4})$ $D.(\frac{7}{4},2)$



$key: f(x)-g(x)=0\Leftrightarrow b=f(x)+f(2-x)$记为$F(x)$，其图象关于$x=1$对称

$F(x)=\begin{cases}2-x+2-|2-x|=2, 1\le x\le 2\\(x-2)^2+2-|2-x|=x^2-5+8, x>2\end{cases}$ 如图:

$\therefore b\in(\frac{7}{4},2)$

（19B）已知 $f(x)=x^3+ax^2+bx+2$的图象关于点$(2,0)$对称，则$f(1)=$______.4

变式1（1）$f(x)$是R上的奇函数，$g(x)$是R上的偶函数，试判断$f(x)\pm g(x), f(x)g(x), f(g(x))$, $g(f(x))$的奇偶性.

（2）①若定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足：对任意 $x_1,x_2\in R$，有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)+1$,则下列说法一定正确的是（C ）A. $f(x)$ 为奇函数 B. $f(x)$ 为偶函数 C. $f(x)+1$ 为奇函数 D. $f(x)+1$为偶函数

②已知对任意$x,y\in R$，都有$f(x)+f(y)=2f(\frac{x+y}{2})\cdot f(\frac{x-y}{2})$,且$f(0)\ne 0$,则$f(x)$(　)

$A.$是奇函数 $B.$是偶函数 $C.$既是奇函数又是偶函数 $D.$无法确定$f(x)$的奇偶性

$key1$:类比$f(x)=\cos x$是偶函数

$key2$:（赋值法）令$x=y=0$得$f(1)=1$,

令$y=-x$得$f(x)+f(-2)=2f(x)f(0)=2f(x),\therefore f(x)=f(-x)$

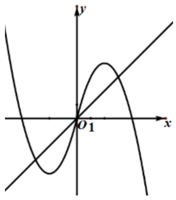
2（1）若定义域均为R的奇函数$f(x)$与偶函数$g(x)$满足$f(x)+g(x)=a^x$，则$f(x)=$______, $g(x)=$______.

$key: f(x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}, g(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$

（2）①已知定义在R上的奇函数$f(x)$,当$x>0$时，$f(x)=x^2-x$,则$f(x)=$______. $\begin{cases}x^2-x, x\ge 0,\\-x^2-x, x<0.\end{cases}$

②已知函数$f(x)=ax^3+\dfrac{b}{x}+5$在$(0,+\infty)$上的最小值为10,则函数$f(x)$在$(-\infty,0)$上有最___值为___.大，0

③已知 $f(x)$是定义在$[-4,4]$上的奇函数，当$x>0$时，$f(x)=-x^2+4x$，则不等式$f(f(x))<f(x)$ 的解集为______.



key : 令$t=f(x)$，则$f(t)<t\Leftrightarrow -3<t<0, or, t>3$

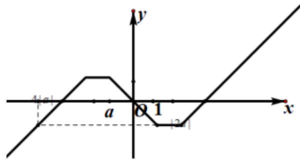
$\therefore -3<f(x)<0, or, f(x)>3$得$x\in(-4,-3)\cup(-1,0)\cup(1,3)$

④定义域为 R 的奇函数 $f(x)=x|x-2a|$,若对任意的 $x_1,x_2\in[1,1+m]$，总有$|f(x_1)-f(x_2)|\le 3$ ，则实数 m 的取值范围是________.

key : $a=0, \therefore f(x)=x|x|$在$R$上递增

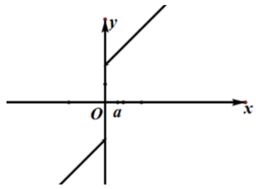
$\therefore |(m+1)|m+1|-1|\le 3\Leftrightarrow -2\le(m+1)|m+1|\le 4$得$-\sqrt{2}-1\le m\le 1, or, -1\le m\le 1, \therefore m\in[-\sqrt{2}-1,1]$

⑤已知函数 $f(x)$为R上的奇函数，当$x>0$时，$f(x)=\frac{1}{2}(|x+a|+|x+2a|+3a)$,若对任意实数$x\in R$，都有 $f(x-3)\le f(x)$，则实数a 的取值范围是________



key : 如图，当a<0时，由图知:$6|a|\le 3$即$a\in[-\frac{1}{2},0)$

当$a\ge 0$时，如图，得$a\ge 0$,综上:a的取值范围为$[-\frac{1}{2},+\infty)$



（2）①已知函数 $f(x)=\frac{3^x}{9^x+a}$是偶函数，则$a=$____________. 1

②若函数 $f(x)=ax^2+(a^2-1)x-3a$ 为偶函数，其定义域为$[4a+2,a^2+1]$，则 $f(x)$ 的最小值为___

$$key:\begin{cases}a^2-1=0\\4a+2+a^2+1=0\end{cases}得a=-1,\therefore f(x)_{\min}=-1$$

③已知偶函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称， $f(3)=3$，则 $f(-1)=$ _______.3

3（1）①若函数$f(x)$满足$f(a-x)=f(a+x)$，则$f(x)$的图象关于_________对称. 直线$x=a$

②若函数$f(x)$满足$f(a-x)+f(a+x)=2b$，则$f(x)$的图象关于_________对称. 点(a,b)

③已知$f(3x-2)$是奇函数，则$f(\frac{1}{2}x+1)$的图象关于_________对称.

$$key:\underset{(0,0)}{f(3x-2)}\xrightarrow{伸长到原来的6倍}\underset{（0,0）}{f(\frac{1}{2}x-2)}\xrightarrow{左，平移6}\underset{(-,6,0)}{f(\frac{1}{2}(x+6)-2)}$$

（2）①设函数 $f(x)=|x+1|+2|x-a|+|x-1|$的图象关于直线 $x=0$ 对称，则 a=_____________.0

②若函数$f(x)=(1-x^2)(x^2+ax+b)$的图象关于直线$x=-2$对称，则$f(x)$的最大值为________.16

（3）①函数 $y=\dfrac{2}{4^x-1}$ 的图象的对称中心的坐标为________________. $(0,-1)$

②若 $f(x)=(x+a)(|x-a|+|x-4|)$ 的图象是中心对称图形，则 $a=$________.

$key1$: 易得$a<4$，则$f(x)=\begin{cases}(x+a)(2x-4-a)=2(x+a)(x-\dfrac{4+a}{2}),x\ge 4\\(4-a)(x+a),a\le x\le 4\\(x+a)(-2x+4+a)=-2(x+a)(x-\dfrac{4+a}{2}),x\le a\end{cases}$ 的图象如图，

$\therefore \dfrac{-a+\dfrac{4+a}{2}}{2}=\dfrac{4+a}{2}$得$a=-\dfrac{4}{3}$

$key2$:（中心对称定义）$f(m-x)+f(x)=$

$(m-x+a)(|m-x-a|+|m-x-4|)+(x+a)(|x-a|+|x-4|)=b$为常数

则$|m-x-a|+|m-x-4|=|x-a|+|x-4|$,且$f(m-x)+f(x)=(m+2a)(|x-a|+|x-4|)=b$为常数,

$\therefore -m+a=-4,m+2a=0$得$a=-\dfrac{4}{3}$

③已知函数 $f(x+\dfrac{1}{2})$ 为奇函数，设 $g(x)=f(x)+1$，则 $g(\dfrac{1}{2021})+g(\dfrac{2}{2021})+g(\dfrac{3}{2021})+\cdots+g(\dfrac{2020}{2021})=$

____

key: $f(-x+\dfrac{1}{2})=-f(x+\dfrac{1}{2})\Leftrightarrow f(1-x)+f(x)=0$

$\therefore g(1-x)+g(x)=f(1-x)+1+f(x)+1=2,\therefore$ 原式$=1010$

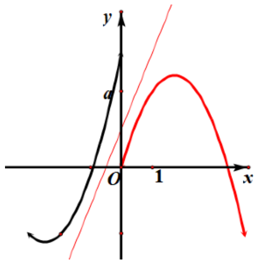
④（多选题）若定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(-x)+f(x)=0$，当 $x<0$ 时，$f(x)=x^2+2ax+\dfrac{3}{2}a$ （$a\in R$），则下列说法正确的是（　AC　）

A. 若方程 $f(x)=ax+\dfrac{a}{2}$ 有两个不同的实数根，则 $a<0$ 或 $4<a<8$

B. 若方程 $f(x)=ax+\dfrac{a}{2}$ 有两个不同的实数根，则 $4<a<8$

C. 若方程 $f(x)=ax+\dfrac{a}{2}$ 有 4 个不同的实数根，则 $a>8$

D. 若方程 $f(x)=ax+\dfrac{a}{2}$ 有 4 个不同的实数根，则 $a>4$



key: 当$x>0$时, $f(x)=-f(-x)=-x^2+2ax-\dfrac{3}{2}a$

由$x^2+2ax+\dfrac{3}{2}a=ax+\dfrac{a}{2}$即$x^2+ax+a0$得$\Delta_1=a^2-4a>0\Leftrightarrow a<0,or,a>4$

由$-x^2+2ax-\dfrac{3}{2}a=ax+\dfrac{a}{2}$即$x^2-ax+2a=0$得$\Delta_2=a^2-8a>0$即$a<0,or,a>8$