温州中学期中 2022-12-02

一、选择题：（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.请将你认为正确的答案填在答题卷的相应位置.）

1. 已知集合 $A=\{x|x^2-x-2\le 0\}$，$B=\{x|x\le 1\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $[-1,2]$　　B. $[-1,1]$　　C. $(-\infty,-1)\cup(1,2)$　　D. $[1,2]$

2. 命题 p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-1>0$ 的否定是（　　）

A. $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-1<0$　　B. $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-1\le 0$　　C. $\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-1\le 0$　　D. $\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-1>0$

3. 王昌龄《从军行》中两句诗为“黄沙百战穿金甲，不破楼兰终不还”，其中“攻破楼兰”是“返回家乡”的(　　)

A. 充要条件　　B. 充分不必要条件　　C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 若 $(2m+1)^{\frac{1}{6}}>(m^2-m-3)^{\frac{1}{6}}$,则实数 m 的取值范围是（　　）

A. $\left(-\frac{1-\sqrt{13}}{2},-\frac{1}{2}\right]$　　B. $\left[-\frac{1}{2},4\right)$　　C. $(-1,4)$　　D. $\left[\frac{1+\sqrt{13}}{2},4\right)$

5. 已知 $a=0.1^{0.2}$，$b=0.2^{0.1}$，$c=2^{0.02}$，则（　　）

A. $a<b<c$　　B. $c<a<b$　　C. $b<a<c$　　D. $c<b<a$

6. 已知函数 $f(x)$　定义域 $[-9,9]$ 上单调递增，则函数 $y=f(x)+f(x^2)$ 在区间（　　）单调递增.

A. $[-9,9]$　　B. $[0,9]$　　C. $[-3,3]$　　D. $[0,3]$

7. 函数 $f(x)=\dfrac{3\cdot 4^x+2^{x+4}+40}{4^x+5\cdot 2^x+13}\left(x\in[0,3]\right)$ 的值域是（　　）

A. $\left[\frac{40}{13},\frac{28}{9}\right]$　　B. $\left[\frac{40}{13},\frac{59}{19}\right]$　　C. $\left[\frac{40}{13},\frac{65}{21}\right]$　　D. $\left[\frac{40}{13},\frac{31}{10}\right]$

8. 已知 x，y 为正实数，则 $\dfrac{4+5x^2-2xy+2y^2}{x+y}$ 的最小值为（　　）

A. $2\sqrt{5}$　　B. 4　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{2}$

二、多选题：（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.）

9. 已知正实数 a，b 满足 $ab+a+3b=13$，则 $2a+3b$ 的可能取值是（　　）

A. 8　　B. 10　　C. 12　　D. 14

10. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2^x+1}+a(a\in\mathbf{R})$，则下列说法正确的是(　　)

A. $f(x)$ 可能是奇函数 B. $f(x)$ 可能是偶函数 C. $f(x)+f(-x)$ 是偶函数 D. $f(x)-f(-x)$ 是减函数

11. 设奇函数 $f(x)$ 的定义域为 R，且满足：（1）$f(x)=f(2-x)$；（2）当 $x\in[2,3]$ 时，$f(x)=2-x$，则下列说法正确的是（　　）A. $f(x)$ 的图像存在对称轴　　B. $f(7)=-1$

C. 当 $x\in[-5,-4]$ 时，$f(x)=x+4$　　D. 方程 $5f(x)=x+2$ 有 4 个实数根

12. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，满足对任意 $x,y\in(0,+\infty)$，都有

$f(xy)=f(x)\cdot f(y)-f(x)-f(y)+2$，且 $x>1$ 时，$f(x)>2$．则下列说法正确的是（　　）

A. $f(1)=1$ 或 2　　B. 当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)<2$　　C. $f(x)$ 在 $(0,1)$ 是减函数

D. 存在实数 k 使得函数 $y=\left|f(x)+k\right|$ 在 $(0,1)$ 是减函数

三、填空题：（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.请将答案填在答题卷的相应位置.）

13. $\left(\sqrt[6]{27}-4^{\frac{1}{4}}\right)\left(2\sqrt{\dfrac{1}{6}}+0.1^{0}\right)=$______.

14. 已知函数 $f(x)=ax+\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(3,+\infty)$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围是______.

15. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-6x+9, x\le 3\\ 3^{x-5}, x>3\end{cases}$.若 $f(m)=1$，则 $m=$______.

16. 若实数 x，y 满足 $x^2-y^2=2$，则 $\dfrac{8}{x^2}+\dfrac{3y}{x}$ 的最大值为______.

17. 已知函数 $f(x)=\left|x^2+a\right|$，$g(x)=ax^2+4x$，若 $f(x)\le g(x)$ 对于 $x\in[a,+\infty)$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是______.

四、解答题：（本大题共 5 小题，共 65 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

18. 已知集合 $A=\{x|a+2\le x\le 3a-4\}(a\in\mathbf{R})$，$B=\{x|8\le x\le 12\}$.

（1）若 $A\cup\complement_{\mathbf{R}}B=\mathbf{R}$，求 a 的取值范围；（2）若 $A\cap B=\varnothing$，求 a 的取值范围.

19. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+ax, & x\ge 0\\ x^2+2x, & x<0\end{cases}(a\in\mathbf{R})$.

（1）若 $f(x)$ 是偶函数，求 a 的值；（2）若 $f(x)$ 在 $x=-1$ 时取到最小值，求 a 的取值范围.

20. 已知奇函数 $f\left(x\right)$ 和偶函数 $g\left(x\right)$ 满足 $f\left(x\right)+g\left(x\right)=2^{x}$.（1）求 $f\left(x\right)$ 和 $g\left(x\right)$　解析式;

（2）若对于任意的 $x_1\in\left[1,3\right]$，存在 $x_2\in\left[1,3\right]$，使得 $g\left(x_1\right)=kf\left(x_2\right)$，求实数 k 的取值范围.

21. 某公司有两款产品 A,B，根据市场调研，最近 30 天 A 产品每日收入 y（单位：万元）与时间 x（单位：天）的函数为：$y=\sqrt{960-x^2-2x}\left(1\le x\le 30\right)$；$B$ 产品每日收入 y（单位：万元）与时间 x（单位：天）的函数为：$y=\sqrt{ax^2+2x+64}\left(1\le x\le 30\right)\left(a\in \mathrm{R}\right)$.数据显示，在第 30 天产品 A,B 的当日收入之和为 32 万元.（1）从第几天开始 B 产品的日收入超过 A 产品？

（2）在第几天产品 A,B 的总日收入最多？最多是多少万元？

22. 已知实数$a \geq 0$，函数$f(x)=\left||x-1|+\frac{4}{x}+a\right|+|x-a|$.

（1）当$a=0$时，求函数$f(x)$的最小值；

（2）若$f(x) \geq 4$在定义域内恒成立，求实数a的取值范围.

温州中学期中 2022-12-02

一、选择题：（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.请将你认为正确的答案填在答题卷的相应位置.）

1. 已知集合 $A=\left\{x\middle|x^2-x-2\le 0\right\}$，$B=\left\{x\middle|x\le 1\right\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\left[-1,2\right]$　　B. $\left[-1,1\right]$

C. $\left(-\infty,-1\right)\cup\left(1,2\right)$　　D. $\left[1,2\right]$

【答案】B

【解析】

【分析】先将集合化简，然后求交集即可.

【详解】先化简，$A=\left\{x\middle|x^2-x-2\le 0\right\}=\left[-1,2\right]$，因为 $B=\left\{x\middle|x\le 1\right\}$，所以 $A\cap B=\left[-1,1\right]$.

故选：B

2. 命题 p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-1>0$ 的否定是（　　）

A. $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-1<0$　　B. $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-1\le 0$

C. $\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-1\le 0$　　D. $\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-1>0$

【答案】C

【解析】

【分析】根据含有一个量词的命题的否定的方法即可求解.

【详解】命题 p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-1>0$ 的否定是：$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-1\le 0$.

故选：C.

3. 王昌龄《从军行》中两句诗为"黄沙百战穿金甲，不破楼兰终不还"，其中"攻破楼兰"是"返回家乡"的（　　）

A. 充要条件 B. 充分不必要条件 C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】C

【解析】

【分析】从诗句理解"攻破楼兰"不一定"返回家乡"，"返回家乡"则一定是"攻破楼兰"了，从而得到答案.

【详解】"不破楼兰终不还"的意思是"不攻破楼兰不返回家乡"，

"攻破楼兰"不一定"返回家乡"，"返回家乡"则一定是"攻破楼兰"了，

所以"攻破楼兰"是"返回家乡"的必要不充分条件.

故选：C

4. 若 $\left(2m+1\right)^{\frac{1}{6}}>\left(m^2-m-3\right)^{\frac{1}{6}}$,则实数 m 的取值范围是（　　）

A. $\left(-\dfrac{1-\sqrt{13}}{2},-\dfrac{1}{2}\right]$　　B. $\left[-\dfrac{1}{2},4\right)$

C. $(-1,4)$ D. $\left[\frac{1+\sqrt{13}}{2},4\right)$

【答案】D

【解析】

【分析】构造 $f(x)=x^{\frac{1}{6}},(x>0)$,通过函数单调性及定义域,列出不等式,求出取值范围.

【详解】解:由题知构造 $f(x)=x^{\frac{1}{6}},(x>0)$,

由幂函数性质可知 $f(x)$ 单调递增,

$\because (2m+1)^{\frac{1}{6}}>\left(m^2-m-3\right)^{\frac{1}{6}}$,

$\therefore \begin{cases}2m+1\geq 0\\ m^2-m-3\geq 0\\ 2m+1>m^2-m-3\end{cases}$,

$\therefore \begin{cases}m\geq -\frac{1}{2}\\ m\geq \frac{1+\sqrt{13}}{2},m\leq \frac{1-\sqrt{13}}{2}\\ -1<m<4\end{cases}$,

综上:$m\in\left[\frac{1+\sqrt{13}}{2},4\right)$.

故选:D

5. 已知$a=0.1^{0.2}$,$b=0.2^{0.1}$,$c=2^{0.02}$,则( )

A. $a<b<c$ B. $c<a<b$

C. $b<a<c$ D. $c<b<a$

【答案】A

【解析】

【分析】利用幂函数与指数函数的单调性比较大小.

【详解】$f(x)=2^x,g(x)=0.2^x,h(x)=x^{0.2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上分别为增函数,减函数,增函数,故

$c=2^{0.02}>2^0=1$,$a=0.1^{0.2}<0.2^{0.2}<0.2^{0.1}=b<0.2^0=1$.

故选:A

6. 已知函数 $f(x)$ 定义域$[-9,9]$上单调递增,则函数 $y=f(x)+f\left(x^2\right)$ 在区间( )单调递增.

A. $[-9,9]$ B. $[0,9]$ C. $[-3,3]$ D. $[0,3]$

【答案】D

【解析】

【分析】根据复合函数的单调性求解即可.

【详解】因为函数 $f\left(x\right)$ 在定义域 $\left[-9,9\right]$，

所以函数 $y=f\left(x\right)+f\left(x^2\right)$ 的定义域为 $\begin{cases}-9\le x\le 9\\ -9\le x^2\le 9\end{cases}\Rightarrow -3\le x\le 3$.

令 $t=x^2$，所以 $x\in\left[0,3\right]$ 为增函数，$x\in\left[-3,0\right)$ 为减函数，

又 $y=f\left(x\right)$ 在 $x\in\left[-3,3\right]$ 为增函数，

所以函数 $y=f\left(x\right)+f\left(x^2\right)$ 在区间 $\left[0,3\right]$.

故选：D

7．函数 $f\left(x\right)=\dfrac{3\cdot 4^x+2^{x+4}+40}{4^x+5\cdot 2^x+13}\left(x\in\left[0,3\right]\right)$ 的值域是（　　）

A．$\left[\dfrac{40}{13},\dfrac{28}{9}\right]$　　B．$\left[\dfrac{40}{13},\dfrac{59}{19}\right]$　　C．$\left[\dfrac{40}{13},\dfrac{65}{21}\right]$　　D．$\left[\dfrac{40}{13},\dfrac{31}{10}\right]$

【答案】A

【解析】

【分析】设 $t=2^x,t\in[1,8]$，则函数 $f\left(x\right)=\dfrac{3t^2+16t+40}{t^2+5t+13}$，令 $g(t)=\dfrac{3t^2+16t+40}{t^2+5t+13}=3+\dfrac{t+1}{(t+1)^2+3(t+1)+9}$，

再令 $m=t+1$,则 $m\in[2,9]$，则有 $h(m)=3+\dfrac{m}{m^2+3m+9}=3+\dfrac{1}{m+\dfrac{9}{m}+3}$，由对勾函数的性质及反比例函数的性质求出 $h(m)$ 的值域即可.

【详解】解：因为 $x\in[0,3]$，所以 $2^x\in[1,8]$，

设 $t=2^x,t\in[1,8]$，

因为 $f\left(x\right)=\dfrac{3\cdot 4^x+2^{x+4}+40}{4^x+5\cdot 2^x+13}=\dfrac{3\cdot(2^x)^2+16\cdot 2^x+40}{(2^x)^2+5\cdot 2^x+13}=\dfrac{3t^2+16t+40}{t^2+5t+13}$,

令 $g(t)=\dfrac{3t^2+16t+40}{t^2+5t+13}=\dfrac{3(t^2+5t+13)+t+1}{t^2+5t+13}=3+\dfrac{t+1}{t^2+5t+13}=3+\dfrac{t+1}{(t+1)^2+3(t+1)+9}$,

令 $m=t+1$,则 $m\in[2,9]$,

所以 $h(m)=3+\dfrac{m}{m^2+3m+9}=3+\dfrac{1}{m+\dfrac{9}{m}+3}$，

因为 $m\in[2,9]$,

由对勾函数的性质可得 $m+\frac{9}{m}\in[6,10]$，

所以 $m+\frac{9}{m}+3\in[9,13]$，

所以 $\frac{1}{m+\frac{9}{m}+3}\in[\frac{1}{13},\frac{1}{9}]$，

所以以 $3+\frac{1}{m+\frac{9}{m}+3}\in[\frac{40}{13},\frac{28}{9}]$，

即函数的值域为 $\left[\frac{40}{13},\frac{28}{9}\right]$.

故选：A.

8. 已知 x， y 为正实数，则 $\frac{4+5x^2-2xy+2y^2}{x+y}$ 的最小值为（　　）

A. $2\sqrt{5}$　　　　B. 4　　　　C. $2\sqrt{3}$　　　　D. $2\sqrt{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】对原式进行配凑，使用两次不等式，即可求得结果.

【详解】因为 $\frac{4+5x^2-2xy+2y^2}{x+y}=\frac{(x+y)^2+(2x-y)^2+4}{x+y}=x+y+\frac{(2x-y)^2+4}{x+y}$

$\geq x+y+\frac{4}{x+y}\geq 2\sqrt{(x+y)\times\frac{4}{x+y}}=4$,

当且仅当 $2x=y$ 且 $x+y=\frac{4}{x+y}$， 即 $x=\frac{2}{3},y=\frac{4}{3}$ 时取得等号，

即 $\frac{4+5x^2-2xy+2y^2}{x+y}$ 　最小值为 4.

$key2:$ 令 $x+y=t>0$，则 $y=t-x>0$ 得 $0<t<x$

$\therefore\frac{4+5x^2-2xy+2y^2}{x+y}=\frac{4+5x^2-2x(t-x)+2(t-x)^2}{t}$（主元）

$=2t+\frac{9x^2+4}{t}-6x=\frac{9}{t}x^2-6x+2t+\frac{4}{t}\geq\frac{-36}{\frac{36}{t}}+2t+\frac{4}{t}=t+\frac{4}{t}\geq 4(\begin{cases}t=2\\ x=\frac{3}{\frac{9}{t}}=\frac{2}{3}\end{cases}$ 时，取 $=$）

二、多选题：（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.）

9. 已知正实数 a， b 满足 $ab+a+3b=13$，则 $2a+3b$ 的可能取值是（　　）

A. 8　　B. 10　　C. 12　　D. 14

【答案】CD

【解析】

【分析】将 a 用 b 表示，代入原式，构造基本不等式求最小值，再检验满足条件的选项值即可.

【详解】由 $ab+a+3b=13$ 得 $a=\dfrac{13-3b}{b+1}$

则 $2a+3b=\dfrac{26-6b}{b+1}+3b=\dfrac{-6(b+1)+32}{b+1}+3(b+1)-3$

$=\dfrac{32}{b+1}+3(b+1)-9\geq 2\sqrt{32\times 3}-9=8\sqrt{6}-9$

满足条件的值有 12，14.

故选：CD.

10. 已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2^x+1}+a\left(a\in \mathbf{R}\right)$，则下列说法正确的是（　　）

A. $f\left(x\right)$ 可能是奇函数　　B. $f\left(x\right)$ 可能是偶函数

C. $f\left(x\right)+f\left(-x\right)$ 是偶函数　　D. $f\left(x\right)-f\left(-x\right)$ 是减函数

【答案】ACD

【解析】

【分析】判断是否存在 a 使得对于 $x\in\mathbf{R}$ 均有 $f(x)+f\left(-x\right)=0$ 可判断选项 A；判断是否存在 a 使得对于 $x\in\mathbf{R}$ 均有 $f(x)=f\left(-x\right)$ 可判断选项 B；求 $y=f\left(x\right)+f\left(-x\right)$ 解析式即可判断选项 C；求 $y=f\left(x\right)-f\left(-x\right)$ 解析式并分离常数化简为 $y=-1+\dfrac{2}{2^x+1}$，结合指数函数和单调性的性质即可判断选项 D.

【详解】$f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$ 关于原点对称，

$f\left(-x\right)=\dfrac{1}{2^{-x}+1}+a=\dfrac{2^x}{2^x+1}+a$，

对于选项 A：若 $f(x)$为奇函数，则 $f(x)+f\left(-x\right)=0$，解得 $a=-\dfrac{1}{2}$，故 A 正确；

对于选项 B：若 $f(x)$为偶函数，则 $f(x)=f\left(-x\right)$，但显然 $\dfrac{2^x}{2^x+1}+a\neq\dfrac{1}{2^x+1}+a$，故 B 错误；

对于选项 C：$y=f\left(x\right)+f\left(-x\right)=\dfrac{1}{2^x+1}+a+\dfrac{2^x}{2^x+1}+a=1+2a$，常数函数 $y=1+2a$ 为偶函数，故 C 正确；

对于选项 D：$y=f\left(x\right)-f\left(-x\right)=\dfrac{1}{2^x+1}+a-\dfrac{2^x}{2^x+1}-a=\dfrac{1-2^x}{2^x+1}=-1+\dfrac{2}{2^x+1}$，

$\because y=2^x+1>0$ 且在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，故 $y=-1+\dfrac{2}{2^x+1}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，故 D 正确.

故选：ACD．

11．设奇函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 R，且满足：（1）$f\left(x\right)=f\left(2-x\right)$；（2）当 $x\in\left[2,3\right]$ 时，$f\left(x\right)=2-x$，则下列说法正确的是（　　）

A．$f\left(x\right)$ 的图像存在对称轴　　B．$f\left(7\right)=-1$

C．当 $x\in\left[-5,-4\right]$ 时，$f\left(x\right)=x+4$　　D．方程 $5f\left(x\right)=x+2$ 有 4 个实数根

【答案】ABC

【解析】

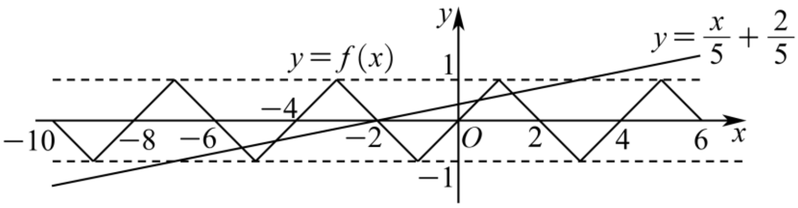
【分析】先利用题给的条件，得到函数 $y=f\left(x\right)$ 的对称轴和对称中心，然后计算相应的值，最后画出函数 $y=f\left(x\right)$ 的图像，进行解答即可．

【详解】选项 A：因为 $f\left(x\right)=f\left(2-x\right)$，所以函数 $f\left(x\right)$ 关于直线 $x=1$ 对称，故 A 正确；

选项 B：由题可知 $f\left(x\right)=-f\left(-x\right)$，$f\left(x\right)=f\left(2-x\right)$，得 $-f\left(-x\right)=f\left(2-x\right)\Rightarrow f\left(x+2\right)=-f\left(x\right)$ $\Rightarrow f\left(x+4\right)=f\left(x\right)$ 所以 $f\left(7\right)=f\left(3\right)=2-3=-1$，故 B 正确；

由选项 B，可知 $f\left(x+4\right)=f\left(x\right)$，又因为 $f\left(x\right)=-f\left(-x\right)$，所以 $f\left(x+4\right)=-f\left(-x-4\right)$，因为 $f\left(x\right)=f\left(2-x\right)$，所以 $f\left(-x-4\right)=f\left(6+x\right)$，由 B 可知，$f\left(x\right)=-f\left(-x\right)$，$f\left(x+4\right)=f\left(x\right)$，所以 $f\left(x+4\right)=-f\left(-x\right)$，所以 $f\left(6+x\right)=-f\left(-x-2\right)$，所以 $f\left(x\right)=f\left(-x-2\right)$，当 $x\in\left[-5,-4\right]$，则 $-x-2\in\left[2,3\right]$，因为当 $x\in\left[2,3\right]$ 时，$f\left(x\right)=2-x$，所以 $-x-2\in\left[2,3\right]$ 时，$f\left(x\right)=2-\left(-x-2\right)=x+4$，故 C 正确；

选项 D：方程 $5f\left(x\right)=x+2$ 的解的个数，为函数 $y=f\left(x\right),y=\dfrac{x}{5}+\dfrac{2}{5}$ 的交点个数，画出 $y=f\left(x\right),y=\dfrac{x}{5}+\dfrac{2}{5}$ 的函数图像：



得 $y=f\left(x\right),y=\dfrac{x}{5}+\dfrac{2}{5}$ 有 5 个交点，故方程 $5f\left(x\right)=x+2$ 有 5 个实数根，故 D 错误；

故选：ABC

12．已知函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left(0,+\infty\right)$，满足对任意 $x,y\in\left(0,+\infty\right)$，都有 $f\left(xy\right)=f\left(x\right)\cdot f\left(y\right)-f\left(x\right)-f\left(y\right)+2$，且 $x>1$ 时，$f\left(x\right)>2$．则下列说法正确的是（　　）

A．$f\left(1\right)=1$ 或 2

B. 当 $x\in(0,1)$ 时， $f(x)<2$

C. $f(x)$ 在 $(0,1)$ 是减函数

D. 存在实数 k 使得函数 $y=|f(x)+k|$ 在 $(0,1)$ 是减函数

【答案】BD

【解析】

【分析】利用赋值法，令 $x=y=1$，求出 $f(1)$，再令 $x=1,y=2$ 进行检验，即可判断 A；

当 $x\in(0,1)$ 时，则 $\frac{1}{x}>1$，故 $f\left(\frac{1}{x}\right)>2$，令 $y=\frac{1}{x}$，得出 $f(x)$ 与 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 关系，进而得出 $f(x)$ 的范围，即可判断 B；

利用函数单调性的定义，由 $f(x_1)-f(x_2)=f(x_1)-f\left(x_1\cdot\frac{x_2}{x_1}\right)$，结合已知条件可得 $f(x_1)<f(x_2)$，从而得出函数的单调性，即可判断 C；

因　函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上为增函数，若 $y=|f(x)+k|$ 在 $(0,1)$ 上递减，则 $x\in(0,1)$ 时，

$y=|f(x)+k|=-f(x)-k$，则 $f(x)+k<0$，由此可求得 $k\le-2$，即可判断 D.

【详解】令 $x=y=1$，则 $f(1)=f(1)\cdot f(1)-f(1)-f(1)+2$，即 $f^2(1)-3f(1)+2=0$，解得

$f(1)=1$ 或 $f(1)=2$，

当 $f(1)=1$ 时，令 $x=1,y=2$，则 $f(2)=f(1)\cdot f(2)-f(1)-f(2)+2$，解得 $f(2)=1$，与 $x>1$ 时，

$f(x)>2$ 矛盾，所以 $f(1)=2$，故 A 错误；

当 $x\in(0,1)$ 时，则 $\frac{1}{x}>1$，故 $f\left(\frac{1}{x}\right)>2$，

令 $y=\frac{1}{x}$，则 $f\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)=f(x)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)-f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)+2$，

整理得 $f(x)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)-f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=0$，则 $f(x)=\dfrac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{f\left(\frac{1}{x}\right)-1}=1+\dfrac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)-1}$，

$\because f\left(\frac{1}{x}\right)>2$，$\therefore f\left(\frac{1}{x}\right)-1>1$，$0<\dfrac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)-1}<1$，$\therefore 1<f(x)<2$，故 B 正确；

设 $0<x_1<x_2<1$，则 $\frac{x_2}{x_1}>1$，

$$f(x_1)-f(x_2)=f(x_1)-f\left(x_1\cdot\frac{x_2}{x_1}\right)=f(x_1)-\left[f(x_1)\cdot f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)-f(x_1)-f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)+2\right]$$

$=2f\left(x_1\right)-f\left(x_1\right)\cdot f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)+f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)-2=-f\left(x_1\right)\cdot\left[f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)-2\right]+\left[f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)-2\right]$

$=\left[1-f\left(x_1\right)\right]\cdot\left[f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)-2\right]$，

$\because 0<x_1<x_2<1$，$\frac{x_2}{x_1}>1$，$\therefore 1<f\left(x_1\right)<2, f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)>2$，

$\therefore\left[1-f\left(x_1\right)\right]\cdot\left[f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)-2\right]<0$，$\therefore f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，故 C 错误；

因为函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上为增函数，所以 $y=f(x)+k$ 在 $(0,1)$ 上也为增函数，

若 $y=|f(x)+k|$ 在 $(0,1)$ 上递减，则 $x\in(0,1)$ 时，$y=|f(x)+k|=-f(x)-k$，

则 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)+k<0$，即 $k<-f(x)$，

又因为当 $x\in(0,1)$ 时，$1<f(x)<2$，所以 $k\le -2$，故 D 正确.

故选：BD.

三、填空题：（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.请将答案填在答题卷的相应位置.）

13. $\left(\sqrt[6]{27}-4^{\frac{1}{4}}\right)\left(2\sqrt{\frac{1}{6}}+0.1^0\right)=$______.

【分析】根据幂运算的运算方法计算即可.

【详解】$\left(\sqrt[6]{27}-4^{\frac{1}{4}}\right)\left(2\sqrt{\frac{1}{6}}+0.1^0\right)=\left(3^{3\times\frac{1}{6}}-2^{2\times\frac{1}{4}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{6}}+1\right)=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\frac{\sqrt{6}}{3}+1\right)$

$=\sqrt{2}+\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}-\sqrt{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

14. 已知函数 $f\left(x\right)=ax+\frac{1}{x}$ 在区间 $(3,+\infty)$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围是______.

【答案】$\left[\frac{1}{9},+\infty\right)$

【解析】

【分析】分 a=0、a<0、和 a>0 三种情况进行讨论．当 a>0 时，结合对勾函数性质即可求出 a 的范围.

【详解】(i)若 $a=0$，$f\left(x\right)=\frac{1}{x}$ 在 $(3,+\infty)$ 上单调递减，不符题意；

(ii)若 $a<0$，$y=ax$ 在 $(3,+\infty)$ 单调递减，$y=\frac{1}{x}$ 在 $(3,+\infty)$ 上单调递减，

故 $f\left(x\right)=ax+\dfrac{1}{x}$ 在 $\left(3,+\infty\right)$ 上单调递减，不符题意；

(iii)若 a>0，则 $f\left(x\right)=ax+\dfrac{1}{x}$ 为对勾函数，由 $ax=\dfrac{1}{x}$ 得 $x=\pm\sqrt{\dfrac{1}{a}}$，

则 $f(x)$ $\left[\sqrt{\dfrac{1}{a}},+\infty\right)$ 上单调递增，

∴若 $f\left(x\right)=ax+\dfrac{1}{x}$ 在区间 $\left(3,+\infty\right)$ 上单调递增，则 $\sqrt{\dfrac{1}{a}}$ ≤3，解得 $a\geqslant\dfrac{1}{9}$.

综上，$a\geqslant\dfrac{1}{9}$.

故答案为：$\left[\dfrac{1}{9},+\infty\right)$.

15. 已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2-6x+9,x\le 3\\ 3^{x-5},x>3\end{cases}$.若 $f\left(m\right)=1$，则 $m=$______.

【答案】2 或 5

【解析】

【分析】分 $m\leqslant 3$ 和 $m>3$ 两种情况求解即可.

【详解】(i)当 $m\leqslant 3$ 时，$f(m)=m^2-6m+9=1$，解得 $m=4$(舍)或 $m=2$；

(ii)当 $m>3$ 时，$f(m)=3^{m-5}=1$，解得 $m=5$.

综上，$m=2$ 或 5.

故答案为：2 或 5.

16. 若实数 x，y 满足 $x^2-y^2=2$，则 $\dfrac{8}{x^2}+\dfrac{3y}{x}$ 的最大值为______. $\dfrac{73}{16}$

$$key1:\frac{8}{x^2}+\frac{3y}{x}=\frac{4(x^2-y^2)}{x^2}+\frac{3y}{x}=-4(\frac{y}{x})^2+3(\frac{y}{x})+4\geq\frac{-64-9}{-16}=\frac{73}{16}$$

$$key2:\text{（双曲线代数换元）由}2=(x+y)(x-y)\text{令}\begin{cases}x+y=t\\ x-y=\dfrac{2}{t}\end{cases}\text{得}\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}(t+\dfrac{2}{t})\\ y=\dfrac{1}{2}(t-\dfrac{2}{t})\end{cases}$$

$$\therefore\frac{8}{x^2}+\frac{3y}{x}=\frac{32}{t^2+4+\dfrac{4}{t^2}}+\frac{\dfrac{3}{2}(t-\dfrac{2}{t})}{\dfrac{1}{2}(t+\dfrac{2}{t})}=\frac{32t^2}{(t^2+2)^2}+\frac{3(t^2-2)}{t^2+2}\text{（令}u=t^2+2>2)$$

$$=\frac{32(u-2)}{u^2}+\frac{3(u-4)}{u}=-\frac{64}{u^2}+\frac{20}{u}+3=-(\frac{8}{u}-\frac{5}{4})^2+\frac{25}{16}+3\leq\frac{73}{16}$$

17. 已知函数 $f\left(x\right)=\left|x^2+a\right|$，$g\left(x\right)=ax^2+4x$，若 $f\left(x\right)\le g\left(x\right)$ 对于 $x\in\left[a,+\infty\right)$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是______.

key:（必要条件）$|a^2+a|\le a^3+4a$得$a\ge 0$

$f(x)\le g(x)\Leftrightarrow x^2+a\le ax^2+4x$即$(a-1)x^2+4x-a\ge 0$对$x\ge a$恒成立

当$0\le a<1$时，不合；

当$a=1$时,$4x-1\ge 0$对$x\ge 1$恒成立；

当$a>1$时,$(a-1)a^2+4a-a=a(a^2-a+3)\ge 0$恒成立.$\therefore a$的取值范围为$[1,+\infty)$

四、解答题：（本大题共 5 小题，共 65 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

18. 已知集合 $A=\{x|a+2\le x\le 3a-4\}(a\in\mathbf{R})$，$B=\{x|8\le x\le 12\}$.

（1）若 $A\cup \complement_{\mathbf{R}}B=\mathbf{R}$，求 a 的取值范围；

（2）若 $A\cap B=\varnothing$，求 a 的取值范围.

【答案】（1）$\left[\dfrac{16}{3},6\right]$；

（2）$a<4$ 或 $a>10$.

【解析】

【分析】(1)根据 $A\cup \complement_{\mathbf{R}}B=\mathbf{R}$ 可知 $B\subseteq A$，列出不等式组即可求解.

(2)分 $A=\varnothing$ 和 $A\ne\varnothing$ 两种情况讨论即可.

【小问 1 详解】

$\because A\cup \complement_{\mathbf{R}}B=\mathbf{R}$，$\therefore B\subseteq A$，

$$\therefore \begin{cases}a+2\le 8\\3a-4\geqslant 12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\le 6\\a\geqslant\dfrac{16}{3}\end{cases}\Rightarrow a\in\left[\dfrac{16}{3},6\right],$$

$\therefore a$ 的范围是$\left[\dfrac{16}{3},6\right]$.

【小问 2 详解】

(i)若 $A=\varnothing$，则 $a+2>3a-4$，即 $a<3$，此时满足 $A\cap B=\varnothing$；

(ii)若 $A\ne\varnothing$，则 $a\ge 3$，

若 $A\cap B=\varnothing$，则 $3a-4<8$ 或 $a+2>12$，解得 $a<4$ 或 $a>10$，

$\therefore 3\le a<4$ 或 $a>10$；

综上，$a<4$ 或 $a>10$.

19. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+ax, & x\ge 0\\x^2+2x, & x<0\end{cases}(a\in\mathbf{R})$.

（1）若 $f(x)$ 是偶函数，求 a 的值；

（2）若 $f(x)$ 在 $x=-1$ 时取到最小值，求 a 的取值范围.

【答案】（1）-2；

（2）$a \geq -2$.

【解析】

【分析】(1)根据偶函数 $f(x)=f(-x)$ 即可求解 a；

(2)作出分段函数图象即可讨论求值.

【小问 1 详解】

当 $x>0$ 时， $f(x)=x^2+ax$，

此时 $-x<0$，$f(-x)=x^2-2x$，

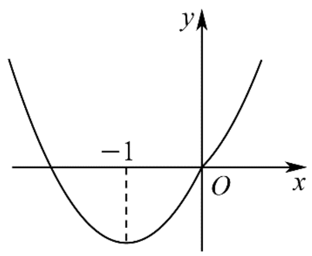
∵$f(x)$是偶函数，∴ $f(x)=f(-x)$，则 $a=-2$；

同理可得 $x<0$ 时， $a=-2$，

综上， $a=-2$.

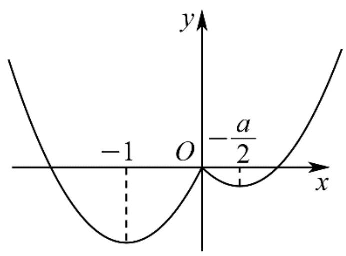
【小问 2 详解】

(i)当 $a \geq 0$ 时，$f(x)$如图：



$f(x)$在 $x=-1$ 处取到最小值，故 $a \geq 0$ 符合题意；

(ii)当 $a<0$ 时，$f(x)$如图：



要使 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取到最小值，则 $f\left(-\frac{a}{2}\right) \geq f(-1)$，解得 $-2 \leq a<0$.

综上， $a \geq -2$.

20. 已知奇函数 $f(x)$ 和偶函数 $g(x)$ 满足 $f(x)+g(x)=2^x$.

（1）求 $f(x)$ 和 $g(x)$ 解析式；

（2）若对于任意的 $x_1 \in [1,3]$，存在 $x_2 \in [1,3]$，使得 $g(x_1)=kf(x_2)$，求实数 k 的取值范围.

【答案】（1） $f(x)=\frac{2^x-2^{-x}}{2}$， $g(x)=\frac{2^x+2^{-x}}{2}$；

（2）$\left[\frac{65}{63},\frac{5}{3}\right]$.

【解析】

【分析】(1)根据已知条件再用$-x$替换x再构造一个关于$f(x)$、$g(x)$的方程，与已知方程联立即可求得答案；

(2)设$A=\{g(x)|1\le x\le 3\}$，$B=\{kf(x)|1\le x\le 3\}$，由题可知$A\subseteq B$，列出不等式组即可求出k的范围.

【小问 1 详解】

由题可知，$f(-x)=-f(x)$，$g(-x)=g(x)$，$f(x)+g(x)=2^x$，①

故$f(-x)+g(-x)=2^{-x}$，即$-f(x)+g(x)=2^{-x}$，②

①和②联立解得，$f(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}$，$g(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}$；

【小问 2 详解】

设$A=\{g(x)|1\le x\le 3\}$，

令$2^x=t\in[2,8]$，则$g(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}$化为$y=\dfrac{t+\frac{1}{t}}{2}$，

易知$y=\dfrac{t+\frac{1}{t}}{2}$在$t\in[2,8]$上单调递增，故$g(x)_{\min}=\dfrac{2+\frac{1}{2}}{2}=\dfrac{5}{4}$，$g(x)_{\max}=\dfrac{8+\frac{1}{8}}{2}=\dfrac{65}{16}$，

故$A=\left[\frac{5}{4},\frac{65}{16}\right]$；

设$B=\{kf(x)|1\le x\le 3\}$，

令$2^x=t\in[2,8]$，则$f(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}$化为$y=\dfrac{t-\frac{1}{t}}{2}$，

易知$y=\dfrac{t-\frac{1}{t}}{2}$在$t\in[2,8]$单调递增，故$f(x)_{\min}=\dfrac{2-\frac{1}{2}}{2}=\dfrac{3}{4}$，$f(x)_{\max}=\dfrac{8-\frac{1}{8}}{2}=\dfrac{63}{16}$

则$x\in[1,3]$时，$f(x)\in\left[\frac{3}{4},\frac{63}{16}\right]$.

若对于任意的$x_1\in[1,3]$，存在$x_2\in[1,3]$，使得$g(x_1)=kf(x_2)$，

则$A\subseteq B$，则显然$k>0$，则$B=\left[\frac{3}{4}k,\frac{63}{16}k\right]$，

则$\left[\frac{5}{4},\frac{65}{16}\right]\subseteq\left[\frac{3}{4}k,\frac{63}{16}k\right]$，

则$\begin{cases}\dfrac{3}{4}k\le\dfrac{5}{4}\\ \dfrac{65}{16}\le\dfrac{63}{16}k\end{cases}$，解得$k\in\left[\dfrac{65}{63},\dfrac{5}{3}\right]$.

21. 某公司有两款产品A,B，根据市场调研，最近 30 天 A 产品每日收入y（单位：万元）与时间x（单位：天）的函数为：$y=\sqrt{960-x^2-2x}\left(1\le x\le 30\right)$；$B$产品每日收入$y$（单位：万元）与时间$x$（单位：天）的函数为：$y=\sqrt{ax^2+2x+64}\left(1\le x\le 30\right)\left(a\in\mathrm{R}\right)$.数据显示，在第 30 天产品$A,B$的当日收入之和为 32 万元.

（1）从第几天开始B产品的日收入超过 A 产品？

（2）在第几天产品A,B的总日收入最多？最多是多少万元？

【答案】（1）从第 21 天起B的每日收入会超过 A 产品

（2）第 20 天产品A,B的总日收入最多,最多是$6\sqrt{14}+10\sqrt{5}$万元

【解析】

【分析】（1）根据题意求a的值，并列不等式$\sqrt{x^2+2x+64}\ge\sqrt{960-x^2-2x}$，运算求解；（2）根据题意结合二次函数分析运算.

【小问 1 详解】

$\because\sqrt{960-30^2-2\times 30}+\sqrt{a\cdot 30^2+2\times 30+64}=32$，$\therefore a=1$，

令$\sqrt{x^2+2x+64}\ge\sqrt{960-x^2-2x}$，则$x^2+2x-448\ge 0$，解得$x\ge\sqrt{449}-1\approx 20.2$或$x\le-\sqrt{449}-1$（负根舍去），

所以从第 21 天起B的每日收入会超过 A 产品.

【小问 2 详解】

A,B的总日收入$\omega=\sqrt{960-x^2-2x}+\sqrt{x^2+2x+64}$，

记$t=x^2+2x$，则$3\le t\le 960$，

故$\omega=\sqrt{960-t}+\sqrt{t+64}$，则$\omega^2=1024+2\sqrt{\left(960-t\right)\left(t+64\right)}$，

$\because y=\left(t+64\right)\left(960-t\right)$的对称轴为$t=448$，

当$x=20$时，$t=440$，当$x=21$时，$t=483$，

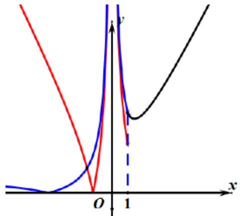
$\therefore$当$x=20$时，ω取到最大值为$\omega_{\max}=6\sqrt{14}+10\sqrt{5}$.

22. 已知实数$a\ge 0$，函数$f\left(x\right)=\left||x-1|+\dfrac{4}{x}+a\right|+|x-a|$.

（1）当$a=0$时，求函数$f\left(x\right)$的最小值；

（2）若$f\left(x\right)\ge 4$在定义域内恒成立，求实数a的取值范围.

解： (1) 由$f(x)=||x-1|+\frac{4}{x}|+|x|=\begin{cases}|x-1+\frac{4}{x}|+x=2x+\frac{4}{x}-1, x\ge 1,\\ |1-x+\frac{4}{x}|+|x|=\max\{|1+\frac{4}{x}|,|1-2x+\frac{4}{x}|\}, x\le 1,\end{cases}$

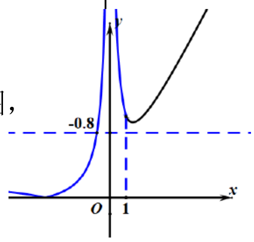


如图，由$-1-\frac{4}{x}=1-2x+\frac{4}{x}$得$x=\frac{1-\sqrt{17}}{2}$

$\therefore f(x)_{\min}=\min\{f(\frac{1-\sqrt{17}}{2}), f(\sqrt{2})\}=\min\{\frac{\sqrt{17}-1}{2},4\sqrt{2}-1\}=\frac{\sqrt{17}-1}{2}$

(2) 由$f(x)=\max\{|x-1|+\frac{4}{x}+x|,||x-1|+\frac{4}{x}-x+2a|\}$,

设$p(x)=||x-1|+\frac{4}{x}+x|=\begin{cases}|x-1+\frac{4}{x}+x|=2x+\frac{4}{x}-1\ge 4\sqrt{2}-1>4, x\ge 1,\\ |1+\frac{4}{x}|, x\le 1\end{cases}$ 如图，



由$-1-\frac{4}{x}=4$得$x=-\frac{4}{5}$, $\therefore ||x-1|+\frac{4}{x}-x+2a|\ge 4$对$x\le -\frac{4}{5}$恒成立，

设$q(x)=|x-1|+\frac{4}{x}-x+2a=-2x+\frac{4}{x}+1+2a$在$x\le -\frac{4}{5}$上递减,

$\therefore q(-\frac{4}{5})=\frac{8}{5}-5+1+2a\ge 2$得$a\ge\frac{16}{5}$, $\therefore a$的取值范围为$[\frac{16}{5},+\infty)$.