2023-24（下）模拟（41）

2024-03-20

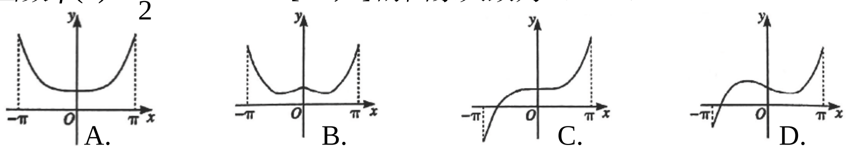
一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知集合 $A=\{x\mid x^2<4\}$， $B=\{x\mid -3<x\le 1\}$，则 $A\cap B=$（　　）

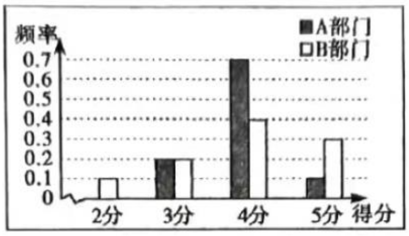
A. $\{x\mid x<2\}$　　B. $\{x\mid -2<x\le 1\}$　　C. $\{x\mid -3<x\le 1\}$　　D. $\{x\mid -3<x<2\}$

2.若复数 z 满足 $(1-i)z=2i$，则 $z\cdot\bar{z}=$（　　）A. -2　　B.0　　C. $\sqrt{2}$　　D.2

3.函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\cos x$在$[-\pi,\pi]$的图象大致为（　　）



4.某单位共有 A、B 两部门，1 月份进行服务满意度问卷调查，得到两部门服务满意度得分的频率分布条形图如下.



设 A、B 两部门的服务满意度得分的第 75 百分位数分别为 n_1， n_2，方差分别为 s_1^2， s_2^2，则（　　）A. $n_1>n_2$， $s_1^2>s_2^2$　　B. $n_1>n_2$， $s_1^2<s_2^2$

C. $n_1<n_2$， $s_1^2<s_2^2$　　D. $n_1<n_2$， $s_1^2>s_2^2$

5.已知直线 $y=kx+b$ 既是曲线 $y=\ln x$ 的切线，也是曲线 $y=-\ln(-x)$ 的切线，则（　　）

A. $k=\frac{1}{e}$， $b=0$　　B. $k=1$， $b=0$　　C. $k=\frac{1}{e}$， $b=-1$　　D. $k=1$， $b=-1$

6.已知 $a>0$， $b>0$，则使 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge 4$ 成立的一个充分不必要条件是（　　）

A. $a^2+b^2=1$　　B. $a+b\ge 4ab$　　C. $a+b=1$　　D. $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\ge 8$

7.已知 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，且 $|\overrightarrow{AB}|=2$， $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}=-1$， $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AC}=1$，则 $\angle ABC$ 的最大值为（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

8.已知 $\sqrt{6}\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})\cos(\alpha-\frac{\pi}{4})=1$，则 $\sin 2\alpha=$（　　）A. $-\frac{2}{3}$　　B. $-\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9.在平面直角坐标系 xOy 中，角 φ 的顶点与原点重合，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边过点 $P(1,-\sqrt{3})$，函数

$f(x)=\sin(2x+\varphi)$，则（　　）A. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{12}$ 对称　　B. $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{12},0)$ 对称

C. $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$ 内恰有一个极大值点　　D. $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6})$ 内单调递减

10.已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F,准线交 x 轴于点 D,过 F 的直线交 C 于 A，B 两点,AF 的中点 M 在 y 轴上的射影为点 N,$|MN|=|NF|$,则（）A. $|AF|=3|BF|$　B. $\angle ADB$ 是锐角 C. $\triangle BDN$ 是锐角三角形　D.四边形 $DFMN$ 是菱形

11.已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，棱 AB，BC 的中点分别为 E，F，点 G 在底面 $A_1B_1C_1D_1$ 上，且平面

EFG // 平面 ACD，则下列说法正确的是（　　）A.若存在 λ 使得 $\overrightarrow{A_1G}=\lambda\overrightarrow{GD_1}$，则 $\lambda=\frac{1}{2}$

B.若 $G\in C_1D_1$,则 EG // 平面 ADD_1A_1　C.三棱锥 $G-BC_1D$ 体积的最大值为 2　D.二面角 $D-EF-G$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12.某企业生产一种零部件，其质量指标介于 $(49.6,50.4)$ 的为优品.技术改造前，该企业生产的该种零部件质量指标服从正态分布 $N(50,0.16)$；技术改造后，该企业生产的同种零部件质量指标服从正态分布 $N(50,0.04)$.那么，该企业生产的这种零部件技术改造后的优品率与技术改造前的优品率之差为__________.（若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(|X-\mu|<\sigma)=0.6827$，$P(|X-\mu|<2\sigma)=0.9545$，$P(|X-\mu|<3\sigma)=0.9973$）

13.已知圆台 O_1O_2 的高为 6，AB，CD 分别为上、下底面的一条直径，且 $AB=4$，$CD=8$，则圆台 O_1O_2 的体积为__________；若 A，B，C，D 四点不共面，且它们都在同一个球面上，则该球的表面积为__________.

14.已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点为 F，过 F 的直线 l 交圆 $x^2+y^2=a^2$ 于 A，B 两点，交 C 的右支于点 P.若 $|AF|=|BP|$，$|PF|=2|AB|$，则 C 的离心率为__________.

四、解答题：共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（13 分）在△ABC 中，D 为 BC 的中点，且 $\angle DAC+\angle BAC=\pi$.（1）求 $\frac{AB}{AD}$；（2）若 $BC=2\sqrt{2}AC$，求 $\cos C$.

16.（15 分）已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}^2-a_n^2=8n$，且 $a_1=1$.

（1）写出 a_2，a_3，并求 $\{a_n\}$ 的通项公式；（2）记 $b_n=\begin{cases}a_n, n\text{为奇数},\\ 2^{\frac{a_n+1}{4}}, n\text{为偶数},\end{cases}$ 求 $b_1b_2+b_3b_4+b_5b_6+\cdots+b_{15}b_{16}$.

17.（15 分）11 分制乒乓球比赛规则如下：在一局比赛中，每两球交换发球权，每赢一球得 1 分，先得 11 分且至少领先 2 分者胜，该局比赛结束；当某局比分打成 10∶10 后，每球交换发球权，领先 2 分者胜，该局比赛结束.

现有甲、乙两人进行一场五局三胜、每局 11 分制的乒乓球比赛，比赛开始前通过抛掷一枚质地均匀的硬币来确定谁先发球.假设甲发球时甲得分的概率为$\frac{2}{3}$，乙发球时甲得分的概率为$\frac{1}{2}$，各球的比赛结果相互独立，且各局的比赛结果也相互独立.已知第一局目前比分为 10∶10.（1）求再打两个球甲新增的得分 X 的分布列和均值；

（2）求第一局比赛甲获胜的概率 p_0；（3）现用 p_0 估计每局比赛甲获胜的概率，求该场比赛甲获胜的概率.

18.（17 分）在$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90°$，$AB=6$，$\angle ACB$ 的平分线交 AB 于点 D，$AD=2DB$.平面 α 过直线 AB，且与$\triangle ABC$ 所在的平面垂直.（1）求直线 CD 与平面 α 所成角的大小；

（2）设点 $E\in\alpha$，且 $\angle ECD=30°$，记 E 的轨迹为曲线 Γ.（i）判断 Γ 是什么曲线，并说明理由；

（ii）不与直线 AB 重合的直线 l 过点 D 且交 Γ 于 P，Q 两点，试问：在平面 α 内是否存在定点 T，使得无论 l 绕点 D 如何转动，总有 $\angle PTC=\angle QTC$？若存在，指出点 T 的位置；若不存在，说明理由.

19.（17 分）对于函数 $f(x)$，若实数 x_0 满足 $f(x_0)=x_0$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的不动点.已知 $a\geq 0$，且 $f(x)=\frac{1}{2}\ln x+ax^2+1-a$ 的不动点的集合为 A.以 $\min M$ 和 $\max M$ 分别表示集合 M 中的最小元素和最大元素.

（1）若 $a=0$，求 A 的元素个数及 $\max A$；（2）当 A 恰有一个元素时，a 的取值集合记为 B.（i）求 B；

（ii）若 $a=\min B$，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{f(a_n)}{a_n}$，集合 $C_n=\{\sum_{k=1}^{n}|a_k-1|,\frac{4}{3}\}$，$n\in N^*$.求证：$\forall n\in N^*$，$\max C_n=\frac{4}{3}$.

2023-24（下）模拟（41）

2024-03-20

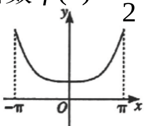
一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

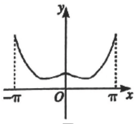
1.已知集合 $A=\{x|x^2<4\}$，$B=\{x|-3<x\le 1\}$，则 $A\cap B=$（ B ）

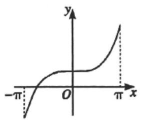
A. $\{x|x<2\}$　　B. $\{x|-2<x\le 1\}$　　C. $\{x|-3<x\le 1\}$　　D. $\{x|-3<x<2\}$

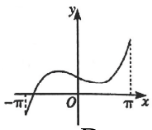
2.若复数 z 满足 $(1-i)z=2i$，则 $z\cdot\bar{z}=$（ D ）A. -2　　B. 0　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

3.函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\cos x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图象大致为（ A ）


A.

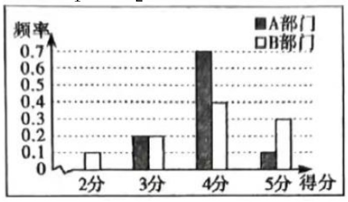

B.


C.


D.

4.某单位共有 A、B 两部门，1 月份进行服务满意度问卷调查，得到两部门服务满意度得分的频率分布条形图如下.

设 A、B 两部门的服务满意度得分的第 75 百分位数分别为 n_1，n_2，方差分别为 s_1^2，s_2^2，则（ C ）



A. $n_1>n_2$，$s_1^2>s_2^2$　　B. $n_1>n_2$，$s_1^2<s_2^2$

C. $n_1<n_2$，$s_1^2<s_2^2$　　D. $n_1<n_2$，$s_1^2>s_2^2$

5.已知直线 $y=kx+b$ 既是曲线 $y=\ln x$ 的切线，也是曲线 $y=-\ln(-x)$ 的切线，则（ A ）

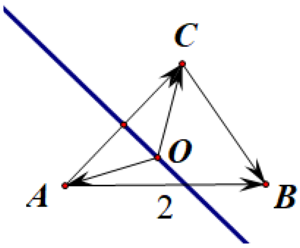
A. $k=\dfrac{1}{e}$，$b=0$　　B. $k=1$，$b=0$　　C. $k=\dfrac{1}{e}$，$b=-1$　　D. $k=1$，$b=-1$

6.已知 $a>0$，$b>0$，则使 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge 4$ 成立的一个充分不必要条件是（ C ）

A. $a^2+b^2=1$　　B. $a+b\ge 4ab$　　C. $a+b=1$　　D. $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\ge 8$

7.已知 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，且 $|\overrightarrow{AB}|=2$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}=-1$，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AC}=1$，则 $\angle ABC$ 的最大值为（B ）

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{4}$　　C. $\dfrac{\pi}{3}$　　D. $\dfrac{\pi}{2}$



key：由 $\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}}{|AC|}=-\dfrac{1}{|AC|},\dfrac{\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AC}}{|AC|}=\dfrac{1}{|AC|}$ 得 O 在 AC 的中垂线上,

$\therefore \dfrac{2}{b}=b$ 得 $b=\sqrt{2}$, $\therefore \dfrac{\sqrt{2}}{\sin B}=\dfrac{2}{\sin C}$ 得 $\sin B=\dfrac{\sqrt{2}\sin C}{2}\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}(B<C),\therefore B_{\max}=\dfrac{\pi}{4}$

8.已知 $\sqrt{6}\tan(\alpha+\dfrac{\pi}{4})\cos(\alpha-\dfrac{\pi}{4})=1$，则 sin2α=（ B ）A. $-\dfrac{2}{3}$　　B. $-\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. $\dfrac{2}{3}$

$$key:1=\sqrt{6}\cdot\frac{\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})}{\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})}\cdot\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})\Leftrightarrow\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=\sqrt{6}(1-\cos^2(\alpha+\frac{\pi}{4}))$$

$$即\sqrt{6}\cos^2(\alpha+\frac{\pi}{4})+\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})-\sqrt{6}=(\sqrt{3}\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})-\sqrt{2})(\sqrt{2}\cos(\alpha+\frac{\alpha}{4})+\sqrt{3})=0$$

$$\therefore\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\therefore\sin 2\alpha=-\cos(\frac{\pi}{2}+2\alpha)=-(2\cos^2(\alpha+\frac{\pi}{4})-1)=-\frac{1}{3}$$

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9.在平面直角坐标系 xOy 中，角 φ 的顶点与原点重合，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边过点 $P(1,-\sqrt{3})$，函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$，则（　AD　）A. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{12}$ 对称　　B. $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{12},0)$ 对称

C. $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$ 内恰有一个极大值点　　D. $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6})$ 内单调递减

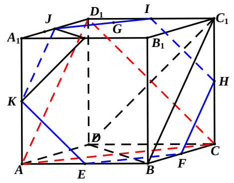
10.已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F,准线交 x 轴于点 D,过 F 的直线交 C 于 A，B 两点,AF 的中点 M 在 y 轴上的射影为点 N,$|MN|=|NF|$,则（ABD）

A.$|AF|=3|BF|$　B.$\angle ADB$ 是锐角　C.$\triangle BDN$ 是锐角三角形　D.四边形 $DFMN$ 是菱形

11.已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，棱 AB，BC 的中点分别为 E，F，点 G 在底面 $A_1B_1C_1D_1$ 上，且平面 EFG // 平面 ACD_1，则下列说法正确的是（　BCD　）A.若存在 λ 使得 $\overrightarrow{A_1G}=\lambda\overrightarrow{GD_1}$，则 $\lambda=\frac{1}{2}$

B.若 $G\in C_1D_1$,则 EG // 平面 ADD_1A_1　C.三棱锥 $G-BC_1D$ 体积的最大值为 2　D.二面角 $D-EF-G$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

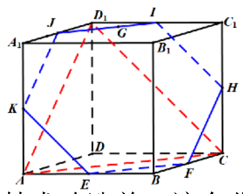
key: 由平面 $GEF//ACD_1$ 得平面截正方体的截面是正六边形 $EFHIJK$

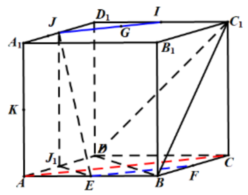


$\therefore$ 由 $\overrightarrow{A_1G}=\lambda\overrightarrow{GD_1}$,得 $G=J$, $\therefore \lambda=1$, A 错；G 在 C_1D_1 上，$G=I$，B 对；

$V_{G-BC_1D}\le V_{J-BC_1D}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 8\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}=2$，$C$ 对；

$\cos<D-EF-G>=\cos<D-EF-I>=\cos\angle JEJ_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$, D 对



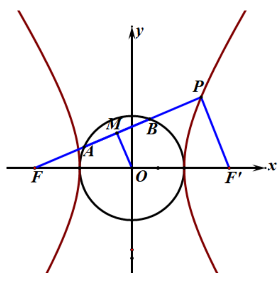


三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12.某企业生产一种零部件，其质量指标介于 $(49.6,50.4)$ 的为优品.技术改造前，该企业生产的该种零部件质量指标服从正态分布 $N(50,0.16)$；技术改造后，该企业生产的同种零部件质量指标服从正态分布 $N(50,0.04)$.那么，该企业生产的这种零部件技术改造后的优品率与技术改造前的优品率之差为____0.2718______.（若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(|X-\mu|<\sigma)=0.6827$， $P(|X-\mu|<2\sigma)=0.9545$， $P(|X-\mu|<3\sigma)=0.9973$）

13.已知圆台 O_1O_2 的高为 6,AB,CD 分别为上、下底面的一条直径,且 $AB=4$, $CD=8$,则圆台 O_1O_2 的体积为___；若 A，B，C，D 四点不共面，且它们都在同一个球面上，则该球的表面积为____.56π；80π（仅答对一空给 3 分）

14.已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点为 F，过 F 的直线 l 交圆 $x^2+y^2=a^2$ 于 A，B 两点，交 C 的右支于点 P.若 $|AF|=|BP|$，$|PF|=2|AB|$，则 C 的离心率为__________.$\frac{\sqrt{73}}{5}$



key: 设 M 为 AB 的中点,则 $OM\perp PF$, $\therefore PF\perp PF'$,

$\because |PB|=|AF|$, $\therefore |MF|=|MP|$, $\because |PF|=2|AB|$, $\therefore |AF|=|AM|=\frac{1}{2}|AB|=\frac{1}{4}|PF|$,

$\therefore\begin{cases}|PF|-|PF'|=2|AB|-2|OM|=2a\\ |AB|=2\sqrt{a^2-|OM|^2}\end{cases}$ 得 $|OM|=\frac{3}{5}a$, $|PF|=2|AB|=\frac{16}{5}a$, $|PF'|=\frac{6}{5}a$

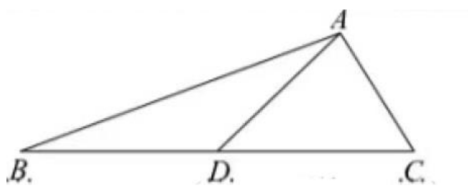
$\therefore |PF|^2+|PF'|^2=(\frac{16}{5}a)^2+(\frac{6}{5}a)^2=4c^2$得$e=\frac{\sqrt{73}}{5}$

四、解答题：共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（13 分）在$\triangle ABC$中，D为BC的中点，且$\angle DAC+\angle BAC=\pi$.（1）求$\frac{AB}{AD}$；（2）若$BC=2\sqrt{2}AC$，求$\cos C$.

解：（1）设$\angle DAC=\theta\in(0,\pi),\because \angle DAC+\angle BAC=\pi,\therefore \angle BAD=\pi-2\theta>0$得$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$

$\therefore \frac{AD}{\sin C}=\frac{CD}{\sin\theta}$,且$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin(\pi-\theta)},\therefore \frac{AB}{AD}=\frac{\frac{BC\sin C}{\sin\theta}}{\frac{CD\sin C}{\sin\theta}}=2$



(2)$\because BC=2\sqrt{2}AC,\therefore a=2\sqrt{2}b$,由（1）得$AD=\frac{1}{2}c$

$\because D$是BC的中点,$\therefore c^2+b^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2=2(\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{DB}^2)=2\cdot\frac{1}{4}c^2+2\cdot\frac{1}{4}a^2$的$c=\sqrt{6}b$

$\therefore \cos C=\frac{8b^2+b^2-6b^2}{2\cdot 2\sqrt{2}b\cdot b}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$

16.（15 分）已知各项均为正数的数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}^2-a_n^2=8n$，且$a_1=1$.

（1）写出a_2，a_3，并求$\{a_n\}$的通项公式；（2）记$b_n=\begin{cases}a_n, n为奇数,\\ 2^{\frac{a_n+1}{4}}, n为偶数,\end{cases}$求$b_1b_2+b_3b_4+b_5b_6+\cdots+b_{15}b_{16}$.

解：（1）由$a_n^2=(a_n^2-a_{n-1}^2)+(a_{n-1}^2-a_{n-2}^2)+\cdots+(a_2^2-a_1^2)+a_1^2$

$=8(n-1)+8(n-2)+\cdots+8\cdot 1+1=4n(n-1)+1(n\ge 2)$

而$a_1^2=1=4\cdot 1\cdot(1-1)+1,\therefore a_n^2=(2n-1)^2,n\in N^*$,

$\because a_n>0,\therefore a_n=2n-1,n\in N^*$

(2)由(1)得:$b_n=\begin{cases}2n-1, n为奇数,\\ 2^{\frac{n}{2}}, n为偶数,\end{cases}$ 即$b_{2k-1}=4k-3,b_{2k}=2^k,k\in N^*$

$\therefore b_{2k-1}b_{2k}=(4k-3)\cdot 2^k=(4k-7)\cdot 2^{k+1}-(4k-11)\cdot 2^k$

$\therefore b_1b_2+b_3b_4+b_5b_6+\cdots+b_{15}b_{16}=(4\cdot 1-7)\cdot 2^2-(4\cdot 1-11)\cdot 2^1+\cdots+(4\cdot 8-7)\cdot 2^9-(4\cdot 8-11)\cdot 2^8$

$=25\cdot 2^9+14=12814$

17.（15 分）11 分制乒乓球比赛规则如下：在一局比赛中，每两球交换发球权，每赢一球得 1 分，先得 11 分且至少领先 2 分者胜，该局比赛结束；当某局比分打成 10∶10 后，每球交换发球权，领先 2 分者胜，该局比赛结束.

现有甲、乙两人进行一场五局三胜、每局 11 分制的乒乓球比赛，比赛开始前通过抛掷一枚质地均匀的硬币来确定谁先发球.假设甲发球时甲得分的概率为$\frac{2}{3}$，乙发球时甲得分的概率为$\frac{1}{2}$，各球的比赛结果相互独立，且各局的比赛结果也相互独立.已知第一局目前比分为 10∶10.（1）求再打两个球甲新增的得分X的分布列和均值；

（2）求第一局比赛甲获胜的概率p_0；（3）现用p_0估计每局比赛甲获胜的概率，求该场比赛甲获胜的概率.

解：(1) 由已知得$P(X=0)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}, P(X=1)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}, P(X=2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

$\therefore X$的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

$, E(X)=\frac{7}{6}$

(2) 由已知得$p_0=\sum_{i=0}^{\infty}[(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2})^i\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}]=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$

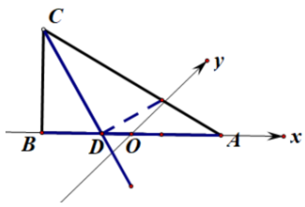
(3) 由(2)得甲一局净胜乙2分的概率为$p_0=\frac{2}{3}$,

$\therefore$该场比赛甲获胜的概率为$(\frac{2}{3})^3+C_3^2(\frac{2}{3})^3\cdot\frac{1}{3}+C_4^2(\frac{2}{3})^3\cdot(\frac{1}{3})^2=\frac{64}{81}$

变式:预测甲一局胜乙的比分?$key:\frac{\frac{5}{6}\times 11}{2}\approx 5,\therefore$是11:5

18.（17 分）在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=90°$，$AB=6$，$\angle ACB$的平分线交AB于点D，$AD=2DB$.平面α过直线AB，且与$\triangle ABC$所在的平面垂直.（1）求直线CD与平面α所成角的大小；
（2）设点$E\in\alpha$，且$\angle ECD=30°$，记E的轨迹为曲线Γ.（i）判断Γ是什么曲线，并说明理由；
（ii）不与直线AB重合的直线l过点D且交Γ于P，Q两点，试问：在平面α内是否存在定点T，使得无论l绕点D如何转动，总有$\angle PTC=\angle QTC$？若存在，指出点T的位置；若不存在，说明理由.

解：(1) 由已知得$AD=4, DB=2,$且$CB=2CA,\therefore AC=4\sqrt{3}, BC=2\sqrt{3},$

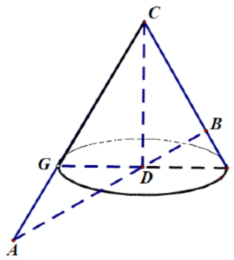


$\because \alpha\perp$平面$ABC,\therefore\angle CDB$就是CD与平面α所成角，其大小为$\frac{\pi}{3}$

(2)（i）由$\angle ECD=30°$得E的轨迹为以CD为轴，顶角为60°的圆锥面

而CD与平面α成60°角，$\therefore\Gamma$是椭圆

（ii）由（i）得：$CD=4,$椭圆Γ的长轴的长$AB=6,$且$a-c=3-\sqrt{3}$



建系如图，则椭圆Γ的方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$

当$T=B$时，$CB\perp$平面$\alpha,$符合；

当$T\neq B$时，假设存在定点$T,\because BC\perp$平面$\alpha,\therefore CT$在平面α内的射影为$BT,$

要使$\angle PTC=\angle QTC,$只要TB是$\angle BPQ$的平分线，

当$PQ\perp x$轴时，T在x轴上;当PQ在x轴上时,由$\frac{|TQ|}{|TP|}=\frac{|DQ|}{|DP|}$得$T(-9,0),$

设$l_{PQ}:x=ty-1$代入Γ方程得$(2t^2+3)y^2-4ty-16=0,\therefore\begin{cases}y_P+y_Q=\frac{4t}{2t^2+3}\\ y_Py_Q=\frac{-16}{2t^2+3}\end{cases}$

$\therefore k_{TP}+k_{TQ}=\frac{y_P}{x_P+9}+\frac{y_Q}{x_Q+9}=\frac{y_P(ty_Q+8)+y_Q(ty_P+8)}{(ty_P+8)(ty_Q+8)}=0$

$\Leftrightarrow 2ty_Py_Q+8(y_P+y_Q)=\frac{-32t}{2t^2+3}+\frac{32t}{2t^2+3}=0$

$\therefore$存在，且T在线段AB的延长线上，且距$TB=6,$或T与B重合

19.（17 分）对于函数$f(x)$，若实数x_0满足$f(x_0)=x_0$，则称x_0为$f(x)$的不动点.已知$a\geq 0$，且

$f(x)=\frac{1}{2}\ln x+ax^2+1-a$ 的不动点的集合为 A .以 $\min M$ 和 $\max M$ 分别表示集合 M 中的最小元素和最大元素.

（1）若 $a=0$，求 A 的元素个数及 $\max A$；（2）当 A 恰有一个元素时，a 的取值集合记为 B.（i）求 B;

（ii）若 $a=\min B$,数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$, $a_{n+1}=\frac{f(a_n)}{a_n}$,集合 $C_n=\{\sum_{k=1}^{n}|a_k-1|,\frac{4}{3}\}$， $n\in N^*$.求证: $\forall n\in N^*$, $\max C_n=\frac{4}{3}$.

⑴ 解 $\because a=0,\therefore f(x)=\frac{1}{2}\ln x+1=x\Leftrightarrow 0=x-\frac{1}{2}\ln x-1$ 记为 $g(x)$

则 $g'(x)=1-\frac{1}{2x}>0\Leftrightarrow x>\frac{1}{2},\therefore g(x)_{\min}=g(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}<0$

而 $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=+\infty,\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=+\infty,g(1)=0,$ 且 $1>\frac{1}{2},\therefore A$ 的元素个数为2，且 $\max A=1$

(2) （ⅰ）由 $f(x)=x\Leftrightarrow\frac{1}{2}\ln x+ax^2+1-a=x\Leftrightarrow x=1,or,a=\dfrac{x-\frac{1}{2}\ln x-1}{x^2-1}(x>0,x\neq 1)$

设 $p(x)=\dfrac{x-\frac{1}{2}\ln x-1}{x^2-1}$,则 $p'(x)=\dfrac{-x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2x}-1+x\ln x}{(x^2-1)^2}>0\Leftrightarrow 0<-x+\frac{3}{2}+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}+\ln x$ 记为 $q(x)$,

则 $q'(x)=-1-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{-(x+1)(x-1)^2}{x^3}<0,$

而 $q(1)=0,\therefore p'(x)>0\Leftrightarrow q(x)>0\Leftrightarrow 0<x<1,\therefore p(x)$ 在 $(0,1)$ 上递增, $(1,+\infty)$ 上递减,

而 $\lim\limits_{x\to 1}p(x)=\frac{1}{4},\lim\limits_{x\to 0^+}p(x)=-\infty,\lim\limits_{x\to\infty}p(x)=0,\therefore a\geq\frac{1}{4},\therefore B=\{a\mid a\geq\frac{1}{4}\}$

（ⅱ）由（ⅰ）得 $a=\min B=\frac{1}{4},\therefore a_{n+1}=\dfrac{\frac{1}{2}\ln a_n+\frac{1}{4}a_n^2+\frac{3}{4}}{a_n},$

$$a_{n+1}-1=\frac{\frac{1}{2}\ln a_n+\frac{1}{4}a_n^2-a_n+\frac{3}{4}}{a_n}>0\Leftrightarrow 0<\ln a_n+\frac{1}{2}a_n^2-2a_n+\frac{3}{2}$$

设 $p(x)=\ln x+\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{3}{2}(x>2)$，则 $p'(x)=\frac{1}{x}+x-2>0,\therefore p(x)>p(2)=\ln 2-\frac{1}{2}>0$

$\because a_1=2>1,\therefore a_n>1(n\in N^*),\therefore a_{n+1}-1=\dfrac{2\ln a_n+a_n^2-4a_n+3}{4a_n}$

$$\therefore\frac{a_{n+1}-1}{a_n-1}=\frac{\frac{2\ln a_n}{a_n-1}+a_n-3}{4a_n}\leq\frac{1}{4}\Leftrightarrow\ln a_n\leq\frac{3}{2}(a_n-1)\cdots(*)$$

设 $q(x)=\frac{3}{2}(x-1)-\ln x(x>1)$，则 $q'(x)=\frac{3}{2}-\frac{1}{x}>0,\therefore q(x)>q(1)=0,\therefore(*)$ 成立 $,\therefore\frac{a_{n+1}-1}{a_n-1}\leq\frac{1}{4}$

$$\therefore a_n-1=\frac{a_n-1}{a_{n-1}-1}\cdot\frac{a_{n-1}-1}{a_{n-2}-1}\cdots\frac{a_2-1}{a_1-1}\cdot(a_1-1)\leq(\frac{1}{4})^{n-1}(n\geq 2)$$

而 $a_1-1=1,\therefore 0<a_n-1\leq\frac{1}{4^{n-1}},n\in N^*,\therefore\sum_{k=1}^{n}|a_k-1|\leq\dfrac{1-(\frac{1}{4})^n}{1-\frac{1}{4}}<\frac{4}{3},\therefore\max C_n=\frac{4}{3},$ 证毕