2023-24（下）模拟（7）

2024-02-21

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．①植物根据植株的高度及分枝部位等可以分为乔木、灌木和草木三大类，某植物园需要对其园中的不同植物的干重（烘干后测定的质量）进行测量；②检测员拟对一批新生产的 1000 箱牛奶抽取 10 箱进行质量检测；上述两项调查应采用的抽样方法是（　）

A．①用简单随机抽样，②用分层随机抽样　　B．①用简单随机抽样，②用简单随机抽样

C．①用分层随机抽样，②用简单随机抽样　D．①用分层随机抽样，②用分层随机抽样

2．下列函数既是奇函数，又在 $(0,+\infty)$ 上单调递增的函数是（　）

A．$y=x+\dfrac{1}{x}$　B．$y=2^x+2^{-x}$　C．$y=\ln x$　D．$y=x^3$

3．已知 $\{a_n\}$ 是公比为 2 的等比数列，若 $a_1+a_3=25$，则 $a_5=$（　）A．100　B．80　C．50　D．40

4．若 $\sin(\dfrac{5\pi}{12}+\alpha)=\dfrac{5}{13}$，则 $\cos(2\alpha-\dfrac{\pi}{6})=$（　）A．$-\dfrac{119}{169}$　B．$-\dfrac{50}{169}$　C．$\dfrac{119}{169}$　D．$\dfrac{50}{169}$

5．已知圆 $C: x^2+2x+y^2-1=0$，直线 $mx+n(y-1)=0$ 与圆 C 交于 A,B 两点.若 $\triangle ABC$ 为直角三角形，则（　）

A．$mn=0$　B．$m-n=0$　C．$m+n=0$　D．$m^2-3n^2=0$

6．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=i$，$a_{n+1}=i+\dfrac{i}{a_n}$，若 $a_k=\dfrac{5}{8}+\dfrac{13}{10}i$，则正整数 k 的值是（　）

A．8　B．12　C．16　D．20

7．已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点 F_1，O 为坐标原点，点 P 在椭圆上，点 Q 在直线 $x=\dfrac{a^2}{c}$ 上，若 $\overrightarrow{PQ}=2\overrightarrow{F_1O}$，$\overrightarrow{F_1Q}=\lambda(\dfrac{\overrightarrow{F_1P}}{|\overrightarrow{F_1P}|}+\dfrac{\overrightarrow{F_1O}}{|\overrightarrow{F_1O}|})(\lambda>0)$，则椭圆的离心率为（　）A. $\dfrac{1}{2}$　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　C. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$　D. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

8．对于一个古典概型的样本空间 Ω 和事件 A，B，C，D，其中 $n(\Omega)=60$，$n(A)=30$，$n(B)=10$，$n(C)=20$，$n(D)=30$，$n(A\cup B)=40$，$n(A\cap C)=10$，$n(A\cup D)=60$，则（　）

A．A 与 B 不互斥　B．A 与 D 互斥但不对立　C．C 与 D 互斥　D．A 与 C 相互独立

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求的.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9．已知 $f(x)=\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{4})(\omega>0)$，若 $p:\omega\le 2$，且 p 是 q 的必要条件，则 q 可能为（　）

A．$f(x)$ 的最小正周期为 π　B．$x=\dfrac{\pi}{4}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴

C．$f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{4}]$ 上单调递增　D．$f(x)$ 在 $[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}]$ 上没有零点

10．设奇函数 $f(x)$ 与偶函数 $g(x)$ 的定义域均为 R，且在区间 I 上都是单调增函数，则（　）

A．$f(x)+g(x)$ 不具有奇偶性，且在区间 I 上是单调增函数

B．$f(x)-g(x)$ 不具有奇偶性，且在区间 I 上的单调性不能确定

C．$f(x)g(x)$ 是奇函数，且在区间 I 上是单调增函数　D．$f(g(x))$ 是偶函数，且在区间 I 上的单调性不能确定

11．对于任意两个正数 u，$v(u<v)$，记曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 与直线 $x=u$，$x=v$，x 轴围成的曲边梯形的面积为 $L(u,v)$，并约定 $L(u,u)=0$ 和 $L(u,v)=-L(v,u)$，德国数学家莱布尼茨（Leibniz）最早发现 $L(1,x)=\ln x$.关于 $L(u,v)$，下列说法正确的是（　）A．$L(\frac{1}{6},\frac{1}{3})=L(4,8)$ B．$L(4^{50},3^{100})=100L(2,3)$ C．$2L(u,v)<\dfrac{v}{u}-\dfrac{u}{v}$ D．$L(u^u,v^u)>v-u$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12．若命题 $\exists x\in R,-x^2-2mx+2m-3\geq 0$ 为真命题，则 m 的取值范围为____________.

13．在多面体 $PABCQ$ 中，$PA=PB=PC=AB=AC=BC=2$，$QA=QB=QC$ 且 QA，QB，QC 两两垂直，则该多面体的外接球半径为____________，内切球半径为____________.

14．已知 x_1,x_2 为方程 $x^2-[\dfrac{1}{\tan\beta}-\dfrac{1}{\tan(\alpha+\beta)}]x+\dfrac{2}{3}=0$ 的两个实数根，且 $\alpha,\beta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$x_1=3x_2$，则 $\tan\alpha$ 的最大值为____________.

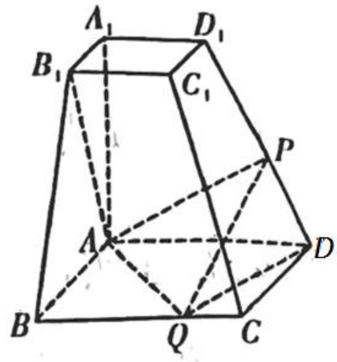
四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15．（13 分）已知在一个不透明的盒中装有一个白球和两个红球（小球除颜色不同，其余完全相同），某抽球试验的规则如下：试验者在每一轮需有放回地抽取两次，每次抽取一个小球，从第一轮开始，若试验者在某轮中的两次均抽到白球，则该试验成功，并停止试验.否则再将一个黄球（与盒中小球除颜色不同，其余完全相同）放入盒中，然后继续进行下一轮试验.（1）若规定试验者甲至多可进行三轮试验（若第三轮不成功，也停止试验），记甲进行的试验轮数为随机变量 X，求 X 的分布列和数学期望；

（2）若规定试验者乙至多可进行 $n(n\in N^*)$ 轮试验（若第 n 轮不成功，也停止试验），记乙在第 $k(k\in N^*,k\leq n)$ 轮使得试验成功的概率为 P_k，则乙能试验成功的概率为 $P(n)=\sum\limits_{k=1}^{n}P_k$，证明：$P(n)<\dfrac{1}{3}$.

16. 如图，已知四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 上、下底面分别是边长为 2 和 4 的正方形，$A_1A=4$，且 $A_1A\perp$ 底面 $ABCD$，点 P，Q 分别在棱 DD_1、BC 上.（1）若 P 是 DD_1 的中点，证明：$AB_1\perp PQ$；

（2）若 $PQ//$ 平面 ABB_1A_1，二面角 $P-QD-A$ 的余弦值为 $\frac{4}{9}$，求四面体 $ADPQ$ 的体积.



17. （15 分）设 $a\in R$，函数 $f(x)=\sin^2 x-\cos x-a$，$x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$.（1）讨论函数 $f(x)$ 的零点个数；

（2）若函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1,x_2，试证明：$\frac{1}{1-\tan x_1\tan x_2}\le\tan x_1\tan x_2-3$.

18．（17 分）已知抛物线：$y^2=2x$，直线$l:y=x-4$，且点 B,D 在抛物线上．（1）若点 A,C 在直线 l 上，且 A,B,C,D 四点构成菱形 $ABCD$，求直线 BD 的方程；（2）若点 A 为抛物线和直线 l 的交点（位于 x 轴下方），点 C 在直线 l 上，且 A,B,C,D 四点构成矩形 $ABCD$，求直线 BD 的斜率．

19．（17 分）固定项链的两端，在重力的作用下项链所形成的曲线是悬链线.1691 年，莱布尼茨等得出“悬链线”方程 $y=\dfrac{c(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}})}{2}$，其中 c 为参数.当 $c=1$ 时，就是双曲余弦函数 $\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，类似地我们可以定义双曲正弦函数 $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.它们与正、余弦函数有许多类似的性质.（1）类比正弦函数的二倍角公式，请写出双曲正弦函数的一个正确的结论: $\sinh 2x=$__________.（只写出即可，不要求证明）；

（2）$\forall x\in[-1,1]$，不等式 $\cosh 2x+m\cosh x\ge 0$ 恒成立，求实数 m 的取值范围；

（3）若 $x\in[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{2}]$，试比较 $\cosh(\sin x)$ 与 $\sinh(\cos x)$ 的大小关系，并证明你的结论.

解答

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．①植物根据植株的高度及分枝部位等可以分为乔木、灌木和草木三大类，某植物园需要对其园中的不同植物的干重（烘干后测定的质量）进行测量；②检测员拟对一批新生产的 1000 箱牛奶抽取 10 箱进行质量检测；上述

2024-02-21

两项调查应采用的抽样方法是（　C ）

A．①用简单随机抽样，②用分层随机抽样　　B．①用简单随机抽样，②用简单随机抽样

C．①用分层随机抽样，②用简单随机抽样　D．①用分层随机抽样，②用分层随机抽样

2．下列函数既是奇函数，又在$(0,+\infty)$上单调递增的函数是（ D ）

A．$y=x+\dfrac{1}{x}$　B．$y=2^x+2^{-x}$　C．$y=\ln x$　D．$y=x^3$

3．已知$\{a_n\}$是公比为 2 的等比数列，若$a_1+a_3=25$，则$a_5=$（ B　）A．100　B．80　C．50　D．40

4．若$\sin(\dfrac{5\pi}{12}+\alpha)=\dfrac{5}{13}$，则$\cos(2\alpha-\dfrac{\pi}{6})=$（　A）A．$-\dfrac{119}{169}$　B．$-\dfrac{50}{169}$　C．$\dfrac{119}{169}$　D．$\dfrac{50}{169}$

5．已知圆$C:x^2+2x+y^2-1=0$，直线$mx+n(y-1)=0$与圆C交于A,B两点.若$\triangle ABC$为直角三角形，则（ A　）

A．$mn=0$　B．$m-n=0$　C．$m+n=0$　D．$m^2-3n^2=0$

6．已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=i$，$a_{n+1}=i+\dfrac{i}{a_n}$，若$a_k=\dfrac{5}{8}+\dfrac{13}{10}i$，则正整数$k$的值是（ B ）

A．8　B．12　C．16　D．20

$key1:$由$a_{n+1}=i+\dfrac{i}{a_n}$得$a_n=\dfrac{i}{a_{n+1}-i}$

由$a_k=\dfrac{5}{8}+\dfrac{13}{10}i,\therefore a_{k-1}=\dfrac{i}{\frac{5}{8}+\frac{3}{10}i},a_{k-2}=\dfrac{i}{\frac{i}{\frac{5}{8}+\frac{3}{10}i}-i}=\dfrac{\frac{5}{4}+\frac{3}{5}i}{\frac{3}{4}-\frac{3}{5}i},a_{k-3}=\dfrac{i}{\frac{\frac{5}{4}+\frac{3}{5}i}{\frac{3}{4}-\frac{3}{5}i}-i}=\dfrac{\frac{3}{5}+\frac{3}{4}i}{\frac{13}{20}-\frac{3}{20}i}=\dfrac{12+15i}{13-3i},$

$a_{k-4}=\dfrac{i}{\frac{12+15i}{13-3i}-i}=\dfrac{3+13i}{9+2i},a_{k-5}=\dfrac{i}{\frac{3+13i}{9+2i}-i}=\dfrac{-2+9i}{5+4i},a_{k-6}=\dfrac{i}{\frac{-2+9i}{5+4i}-i}=\dfrac{-4+5i}{2+4i},$

$a_{k-7}=\dfrac{i}{\frac{-4+5i}{2+4i}-i}=\dfrac{-4+2i}{3i},a_{k-8}=\dfrac{i}{\frac{-4+2i}{3i}-i}=\dfrac{-3}{-1+2i},$

$a_{k-9}=\dfrac{i}{\frac{-3}{-1+2i}-i}=\dfrac{-2-i}{-1+i},a_{k-10}=\dfrac{i}{\frac{-2-i}{-1+i}-i}=1+i,a_{k-11}=\dfrac{i}{1+i-i}=i,\therefore k=12$

$key2:$不动点$:x=i+\dfrac{i}{x}\Leftrightarrow x^2-ix-i=0$的两根$\alpha,\beta,$且$\begin{cases}\alpha+\beta=i\\ \alpha\beta=-i\end{cases}$

$$\therefore\begin{cases}a_{n+1}-\alpha=i+\dfrac{i}{a_n}-\alpha=\dfrac{(i-\alpha)a_n+i}{a_n}=\dfrac{\beta a_n-\alpha\beta}{a_n}=\dfrac{\beta(a_n-\alpha)}{a_n}\\ a_{n+1}-\beta=\dfrac{\alpha(a_n-\beta)}{a_n}\end{cases}$$

$$\therefore\frac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta},\therefore\frac{a_k-\alpha}{a_k-\beta}=(\frac{\beta}{\alpha})^{k-1}\cdot\frac{a_1-\alpha}{a_1-\beta}=(\frac{\beta}{\alpha})^{k-1}\cdot\frac{i-\alpha}{i-\beta}=(\frac{\beta}{\alpha})^k$$

7．已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点 F_1，O 为坐标原点，点 P 在椭圆上，点 Q 在直线 $x=\dfrac{a^2}{c}$ 上，若 $\overrightarrow{PQ}=2\overrightarrow{F_1O}$，$\overrightarrow{F_1Q}=\lambda(\dfrac{\overrightarrow{F_1P}}{|\overrightarrow{F_1P}|}+\dfrac{\overrightarrow{F_1O}}{|\overrightarrow{F_1O}|})(\lambda>0)$，则椭圆的离心率为（ D ）A. $\dfrac{1}{2}$　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　C. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$　D. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

8．对于一个古典概型的样本空间 Ω 和事件 A，B，C，D，其中 $n(\Omega)=60$，$n(A)=30$，$n(B)=10$，$n(C)=20$，$n(D)=30$，$n(A\cup B)=40$，$n(A\cap C)=10$，$n(A\cup D)=60$，则（ D ）

A．A 与 B 不互斥　B．A 与 D 互斥但不对立　C．C 与 D 互斥　D．A 与 C 相互独立

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求的.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9．已知 $f(x)=\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{4})(\omega>0)$，若 $p:\omega\le 2$，且 p 是 q 的必要条件，则 q 可能为（AC　）

A．$f(x)$ 的最小正周期为 π　B．$x=\dfrac{\pi}{4}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴

C．$f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{4}]$ 上单调递增　D．$f(x)$ 在 $[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}]$ 上没有零点

10．设奇函数 $f(x)$ 与偶函数 $g(x)$ 的定义域均为 R，且在区间 I 上都是单调增函数，则（　ABD）

A．$f(x)+g(x)$ 不具有奇偶性，且在区间 I 上是单调增函数

B．$f(x)-g(x)$ 不具有奇偶性，且在区间 I 上的单调性不能确定

C．$f(x)g(x)$ 是奇函数，且在区间 I 上是单调增函数 D．$f(g(x))$ 是偶函数，且在区间 I 上的单调性不能确定

$key:A$，B对；

取$f(x)=\begin{cases}x+1,x<0,\\x-1,x>0\end{cases}$是奇函数，$g(x)=x^2$是偶函数,则$f(x)g(x)$是奇函数，

$f(x)$与$g(x)$在$I=[0,+\infty)$都递增，但$F(x)=f(x)g(x)=x^3-x^2(x\ge0)$,

有$F'(x)=3x^2-2x>0\Leftrightarrow x>\dfrac{2}{3},\therefore F(x)$在$(0,\dfrac{2}{3})$上递减，$C$错；

$D:f(g(-x))=f(g(x))$是偶函数,

在$x\in I$上$g(x)$的取值范围D不一定是I的子集,$\therefore f(g(x))$的单调性不能确定

11．对于任意两个正数 $u,v(u<v)$，记曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 与直线 $x=u$，$x=v$，x 轴围成的曲边梯形的面积为 $L(u,v)$，并约定 $L(u,u)=0$ 和 $L(u,v)=-L(v,u)$，德国数学家莱布尼茨（Leibniz）最早发现 $L(1,x)=\ln x$.关于 $L(u,v)$，下列说法正确的是（ ABC　）A．$L(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{3})=L(4,8)$ B．$L(4^{50},3^{100})=100L(2,3)$ C．$2L(u,v)<\dfrac{v}{u}-\dfrac{u}{v}$　D．$L(u^u,v^u)>v-u$

$key:L(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{3})=L(\dfrac{1}{6},1)-L(\dfrac{1}{3},1)=-L(1,\dfrac{1}{6})+L(1,\dfrac{1}{3})=-\ln\dfrac{1}{6}+\ln\dfrac{1}{3}=\ln 2$

$L(4,8)=L(1,8)-L(1,4)=\ln 8-\ln 4=\ln 2,\therefore A$对；

$L(4^{50},3^{100})=L(1,3^{100})-L(1,4^{50})=\ln 3^{100}-\ln 4^{50}=100\ln 3-100\ln 2=100(\ln 3-\ln 2)=100L(2,3),B$对；

$2L(u,v)=2(L(1,v)-L(1,u))=2(\ln v-\ln u)=2\ln\dfrac{v}{u}<\dfrac{v}{u}-\dfrac{u}{v}(\because \ln x\underset{x>1}{<}\dfrac{1}{2}(x-\dfrac{1}{x}),x=\dfrac{v}{u}>1),C$对；

$L(u^u,v^v)=\ln u^u-\ln v^v=u\ln u-v\ln v>v-u\Leftrightarrow u+u\ln u>v\ln v$

设$p(x)=x+x\ln x$,则$p'(x)=2+\ln x>0\Leftrightarrow x>\frac{1}{e^2}$,$\therefore p(x)$在$x>0$上不单调,$\therefore D$错

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12．若命题$\exists x\in R,-x^2-2mx+2m-3\geq 0$为真命题，则 m 的取值范围为____________．$(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$

13．在多面体 $PABCQ$ 中，$PA=PB=PC=AB=AC=BC=2$，$QA=QB=QC$ 且 QA，QB，QC 两两垂直，则该多面体的外接球半径为____________，内切球半径为____________．$\frac{\sqrt{6}}{2}$　$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

14．已知 x_1,x_2 为方程 $x^2-[\frac{1}{\tan\beta}-\frac{1}{\tan(\alpha+\beta)}]x+\frac{2}{3}=0$ 的两个实数根，且 $\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，$x_1=3x_2$，则 $\tan\alpha$ 的最大值为__________．$12\sqrt{2}$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15．（13 分）已知在一个不透明的盒中装有一个白球和两个红球（小球除颜色不同，其余完全相同），某抽球试验的规则如下：试验者在每一轮需有放回地抽取两次，每次抽取一个小球，从第一轮开始，若试验者在某轮中的两次均抽到白球，则该试验成功，并停止试验.否则再将一个黄球（与盒中小球除颜色不同，其余完全相同）放入盒中，然后继续进行下一轮试验.（1）若规定试验者甲至多可进行三轮试验（若第三轮不成功，也停止试验），记甲进行的试验轮数为随机变量 X，求 X 的分布列和数学期望；

(2)若规定试验者乙至多可进行 $n(n\in N^*)$ 轮试验（若第 n 轮不成功，也停止试验），记乙在第 $k(k\in N^*,k\leq n)$ 轮使得试验成功的概率为 P_k，则乙能试验成功的概率为 $P(n)=\sum_{k=1}^{n}P_k$，证明：$P(n)<\frac{1}{3}$.

15．（1）由题意得，X 的可能取值为$1,2,3$，在第一轮中，试验者每次抽到白球的概率为$\frac{1}{3}$，

$\therefore P(X=1)=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$，依题意，在第二轮中，盒中有一个白球，两个红球和一个黄球，每次摸到白球的概率为

$\frac{1}{4}$，$P(X=2)=\left(1-\frac{1}{9}\right)\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{18}$，易知$P(X=3)=1-\left[P(X=1)+P(X=2)\right]=\frac{5}{6}$，$\therefore X$ 的分布列为：

X	1	2	3
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{6}$

$\therefore X$ 的数学期望$E(X)=1\times\frac{1}{9}+2\times\frac{1}{18}+3\times\frac{5}{6}=\frac{49}{18}$.

（2）证明：当$k\geq 2$时，不难知道$P_k=\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left[1-\frac{1}{(k+1)^2}\right]\cdot\frac{1}{(k+2)^2}$，

$\because\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left[1-\frac{1}{(k+1)^2}\right]\cdot\frac{1}{(k+2)^2}$

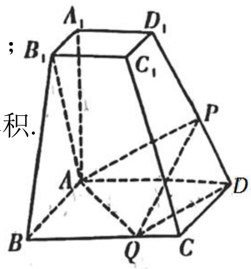
$=\frac{2\times 4}{3^2}\cdot\frac{3\times 5}{4^2}\cdots\frac{k\times(k+2)}{(k+1)^2}\cdot\frac{1}{(k+2)^2}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{(k+1)(k+2)}$，$\therefore P_k=\frac{2}{3}\times\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)(k\geq 2)$，

由（1）可知 $P_1=\frac{1}{9}$，又 $P_1=\frac{1}{9}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{1+1}-\frac{1}{1+2}\right)$，$\therefore P_k=\frac{2}{3}\times\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)(k\in\mathbf{N}^*)$，

$\therefore P(n)=\sum_{k=1}^{n}P_k=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{3}-\frac{2}{3(n+2)}<\frac{1}{3}$.即 $P(n)<\frac{1}{3}$.

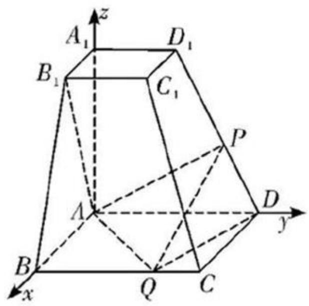
16. 如图，已知四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 上、下底面分别是边长为 2 和 4 的正方形，$A_1A=4$，且 $A_1A\perp$ 底面 $ABCD$，点 P，Q 分别在棱 DD_1、BC 上.（1）若 P 是 DD_1 的中点，证明：$AB_1\perp PQ$；

（2）若 $PQ//$ 平面 ABB_1A_1，二面角 $P-QD-A$ 的余弦值为 $\frac{4}{9}$，求四面体 $ADPQ$ 的体积.



【小问 1 详解】

以 A 为坐标原点，AB，AD，AA_1 所在直线分别为 x，y，x 轴建立空间直角坐标系，



则 $A(0,0,0)$，$B_1(2,0,4)$，$D(0,4,0)$，$D_1(0,2,4)$，

设 $Q(4,m,0)$，其中 $m=BQ$，$0\leq m\leq 4$，

若 P 是 DD_1 的中点，则 $P(0,3,2)$，$\overrightarrow{AB_1}=(2,0,4)$，$\overrightarrow{PQ}=(4,m-3,-2)$，

于是 $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{PQ}=8-8=0$，$\therefore\overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{PQ}$，即 $AB_1\perp PQ$.

【小问 2 详解】由题设知，$\overrightarrow{DQ}=(4,m-4,0)$，$\overrightarrow{DD_1}=(0,-2,4)$ 是平面 PDQ 内的两个不共线向量.

设 $\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$ 是平面 PDQ 的一个法向量，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{DQ}=4x+(m-4)y=0,\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{DD_1}=-2y+4z=0,\end{cases}$ 取 $y=4$，得 $\overrightarrow{n_1}=(4-m,4,2)$.

又平面 AQD 的一个法向量是 $\overrightarrow{n_2}=(0,0,1)$，$\therefore\cos\left\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right\rangle=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{2}{\sqrt{(4-m)^2+4^2+2^2}}=\frac{2}{\sqrt{(4-m)^2+20}}$，

而二面角 $P-QD-A$ 的余弦值为 $\frac{4}{9}$，因此 $\frac{2}{\sqrt{(4-m)^2+20}}=\frac{4}{9}$，

解得 $m=\frac{7}{2}$ 或 $m=\frac{9}{2}$（舍去），此时 $Q\left(4,\frac{7}{2},0\right)$.

设 $\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DD_1}$（$0<\lambda\leq 1$），而 $\overrightarrow{DD_1}=(0,-2,4)$，由此得点 $P(0,4-2\lambda,4\lambda)$，$\overrightarrow{PQ}=\left(4,2\lambda-\frac{1}{2},-4\lambda\right)$，

$\because PQ//$ 平面 ABB_1A_1，且平面 ABB_1A_1 的一个法向量是 $\overrightarrow{n_3}=(0,1,0)$，

$\therefore \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{n_3}=0$，即 $2\lambda-\dfrac{1}{2}=0$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{4}$，从而 $P\left(0,\dfrac{7}{2},1\right)$.

将四面体 $ADPQ$ 视为以 $\triangle ADQ$ 为底面的三棱锥 $P-ADQ$，则其高 $h=1$，

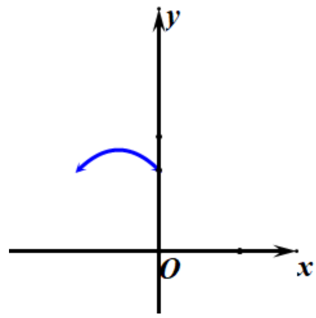
故四面体 $ADPQ$ 的体积 $V=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ADQ}\cdot h=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times4\times4\times1=\dfrac{8}{3}$.

17. （15 分）设 $a\in R$，函数 $f(x)=\sin^2 x-\cos x-a$，$x\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$.（1）讨论函数 $f(x)$ 的零点个数；

（2）若函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1,x_2，试证明：$\dfrac{1}{1-\tan x_1\tan x_2}\le\tan x_1\tan x_2-3$.

(1) 解：令 $t=\cos x\in(-1,0)(\because x\in(\dfrac{\pi}{2},\pi))$,

则 $f(x)=0\Leftrightarrow a=-t^2-t+1=-(t+\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{5}{4}$，如图，



$$\therefore f(x)\text{的零点个数}=\begin{cases}2, 1<a<\dfrac{5}{4},\\ 1, a=\dfrac{5}{4},\\ 0, a\in(-\infty,1]\cup(\dfrac{5}{4},+\infty)\end{cases}$$

(2) 证明：由 (1) 得：$a\in(1,\dfrac{5}{4})$，且 $a=-\cos^2 x_1-\cos x_1+1=-\cos^2 x_2-\cos x_2+1$，$x_1,x_2\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，$x_1\ne x_2$

$\therefore \cos x_1+\cos x_2=-1$

$\therefore \cos x_1\cos x_2-\sin x_1\sin x_2=\cos x_1\cdot\cos x_2-\sqrt{(1-\cos^2 x_1)(1-\cos^2 x_2)}<0$

$\Leftrightarrow 0<1-\cos^2 x_1-\cos^2 x_2=1-\cos^2 x_1-(-1-\cos x_1)^2=-2\cos x_1(1+\cos x_1)$

而 $\dfrac{1}{1-\tan x_1\tan x_2}=\dfrac{\cos x_1\cos x_2}{\cos(x_1+x_2)}$，$\tan x_1\tan x_2-3=\dfrac{\sin x_1\sin x_2-3\cos x_1\cos x_2}{\cos x_1\cos x_2}$

要证：$\dfrac{1}{1-\tan x_1\tan x_2}\le\tan x_1\tan x_2-3$，只要证明：$\dfrac{\cos x_1\cos x_2}{\cos x_1\cos x_2-\sin x_1\sin x_2}\le\dfrac{\sin x_1\sin x_2-3\cos x_1\cos x_2}{\cos x_1\cos x_2}$

$\Leftrightarrow \cos^2 x_1\cos^2 x_2\ge(\sin x_1\sin x_2-3\cos x_1\cos x_2)(\cos x_1\cos x_2-\sin x_1\sin x_2)$

$\Leftrightarrow 4\cos^2 x_1\cos^2 x_2+\sin^2 x_1\sin^2 x_2\ge4\cos x_1\cos x_2\sin x_1\sin x_2$

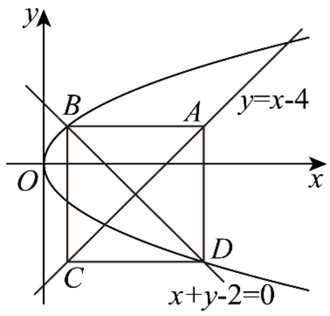
$\Leftrightarrow (2\cos x_1\cos x_2-\sin x_1\sin x_2)^2\ge0$ 成立，证毕

18. （17 分）已知抛物线：$y^2=2x$，直线 $l:y=x-4$，且点 B,D 在抛物线上.

（1）若点 A,C 在直线 l 上，且 A,B,C,D 四点构成菱形 $ABCD$，求直线 BD 的方程；

（2）若点 A 为抛物线和直线 l 的交点（位于 x 轴下方），点 C 在直线 l 上，且 A,B,C,D 四点构成矩形 $ABCD$，求直线 BD 的斜率.

(1) 解：设$B(2b^2,2b),D(2d^2,2d)$,则BD的中点坐标为$(b^2+d^2,b+d)$



$\therefore ABCD$是菱形,$\therefore k_{BD}=\dfrac{2b-2d}{2b^2-2d^2}=\dfrac{1}{b+d}=-1$即$b+d=-1$

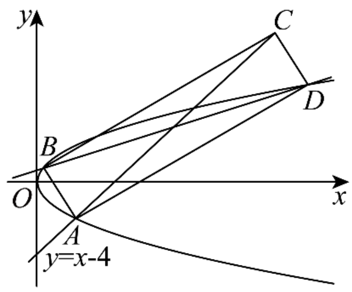
且$b+d=b^2+d^2-4,\therefore b^2+d^2=3,bd=\dfrac{(b+d)^2-(b^2+d^2)}{2}=-1$

$\therefore l_{BD}:y-2b=\dfrac{1}{b+d}(x-2b^2)$即$(b+d)y-2bd=x,\therefore BD$的方程为$:x+y-2=0$

(2) 解：由已知设$A(2a^2,2a),B(2b^2,2b),D(2d^2,2d)$,

$\because ABCD$是矩形,$\therefore AB\perp AD$,且$b+d=b^2+d^2-4$

$\therefore k_{AB}k_{AD}=\dfrac{1}{(a+b)(a+d)}=-1$即$a^2+(b+d)a+bd=-1$



且$k_{AC}=\dfrac{b+d-2a}{b^2+d^2-2a^2}=1$

$\therefore 2a^2-2a-4=0$得$\begin{cases}a=2\\2(b+d)+bd+5=0\\b^2+d^2-4=b+d\end{cases}$无解,或$\begin{cases}a=-1\\-(b+d)+bd+2=0\\b^2+d^2-4=b+d\end{cases}$即$\begin{cases}a=-1\\b+d=3\\bd=1\end{cases}$

$\therefore BD$的斜率为$\dfrac{1}{3}$

19. （17 分）固定项链的两端，在重力的作用下项链所形成的曲线是悬链线.1691 年，莱布尼茨等得出“悬链线”方程 $y=\dfrac{c(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}})}{2}$，其中 c 为参数.当 $c=1$时，就是双曲余弦函数 $\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，类似地我们可以定义双曲正弦函数 $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.它们与正、余弦函数有许多类似的性质.

（1）类比正弦函数的二倍角公式，请写出双曲正弦函数的一个正确的结论: $\sinh 2x=$______________.（只写出即可，不要求证明）；

（2）$\forall x\in[-1,1]$，不等式 $\cosh 2x+m\cosh x\ge 0$ 恒成立，求实数 m 的取值范围；

（3）若 $x\in[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{2}]$，试比较 $\cosh(\sin x)$ 与 $\sinh(\cos x)$ 的大小关系，并证明你的结论.

19．解：（1）$\sinh(2x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x}}{2}=\dfrac{(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})}{2}=2\sinh(x)\cosh(x)$.

（2）依题意，$\forall x\in[-1,1]$，不等式 $\cosh 2x+m\cosh x\ge 0\Leftrightarrow\dfrac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}}{2}+m\cdot\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\ge 0$，

函数 $u=\mathrm{e}^x$ 在 $[-1,1]$ 上单调递增，$u\in[\mathrm{e}^{-1},\mathrm{e}]$，令 $t=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}=u+\dfrac{1}{u}$，

显然函数 $t=u+\dfrac{1}{u}$ 在 $[\mathrm{e}^{-1},1]$ 上单调递减，在 $[1,\mathrm{e}]$ 上单调递增，$t\in[2,\mathrm{e}^{-1}+\mathrm{e}]$，

又 $\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}=(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2-2=t^2-2$，于是 $\forall x\in[-1,1]$，$\cosh 2x+m\cosh x\ge 0\Leftrightarrow\dfrac{t^2-2}{2}+\dfrac{mt}{2}\ge 0$，

因此 $\forall t\in[2,\mathrm{e}^{-1}+\mathrm{e}]$，$m\ge\dfrac{2}{t}-t$，显然函数 $y=\dfrac{2}{t}-t$ 在 $[2,\mathrm{e}^{-1}+\mathrm{e}]$ 上单调递减，

当 $t=2$ 时，$y_{\max}=-1$，从而 $m\ge -1$，

所以实数m的取值范围是$m\ge -1$.

（3）$\forall x\in[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{2}]$，$\cosh(\sin x)>\sinh(\cos x)$.

依题意，$x\in[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{2}]$，$\cosh(\sin x)-\sinh(\cos x)=\frac{e^{\sin x}+e^{-\sin x}}{2}-\frac{e^{\cos x}-e^{-\cos x}}{2}$

$=\frac{1}{2}(e^{\sin x}-e^{\cos x}+e^{-\sin x}+e^{-\cos x})$，

当$x\in[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$时，$x-\frac{\pi}{4}\in[0,\pi]$，$\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})\ge 0$，即$\sin x\ge\cos x$，

于是$e^{\sin x}-e^{\cos x}\ge 0$，而$e^{-\sin x}+e^{-\cos x}>0$，因此$\cosh(\sin x)-\sinh(\cos x)>0$，

当$x\in(\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}]$时，$\cos x\le 0$，则$-\cos x\ge\cos x$，$e^{\cos x}\le e^{-\cos x}$，

即$e^{\cos x}-e^{-\cos x}\le 0$，而$e^{\sin x}+e^{-\sin x}>0$，因此$\cosh(\sin x)-\sinh(\cos x)>0$，

于是$\forall x\in[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{2}]$，$\cosh(\sin x)-\sinh(\cos x)>0$，所以$\cosh(\sin x)>\sinh(\cos x)$.