立体几何（2）异面直线解答（1）

2023-05-07

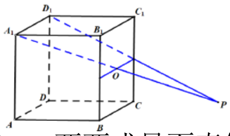
（2007）（6）若 P 两条异面直线 l,m 外的任意一点，则（　B　）

A.过点 P 有且仅有一条直线与 l,m 都平行　　B.过点 P 有且仅有一条直线与 l,m 都垂直

C. 过点 P 有且仅有一条直线与 l,m 都相交　　D.过点 P 有且仅有一条直线与 l,m 都异面

变式（1）过空间一点可作________条直线与两异面直线都相交.0，1，或无数条

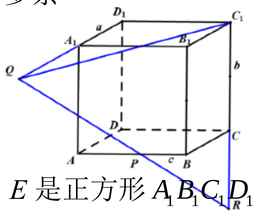
（2）在单位立方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，过正方形 BCC_1B_1 的中心 O 作直线 PQ 与 A_1D_1、CD 分别交于点 P、Q，则 $PQ=$________. $\sqrt{6}$

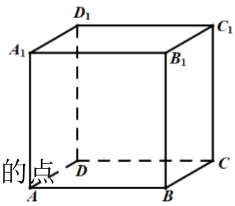


（1997 全国竞赛）如果空间三条直线 a，b，c 两两成异面直线，那么与 a，b，c 都相交的直线有（D　）

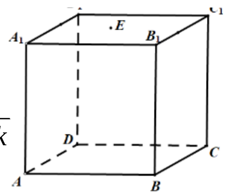
A.0 条　　B. 1 条　　C.多于 1 的有限条　　D.无穷多条

变式 1：如何作出一直线与两两异面的三条直线都相交？





变式 2：如图，在棱长为 k 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 内的点（不含边界），记 d_1,d_2 分别是其到平面 ADD_1A_1 和 CDD_1C_1 的距离.若空间中存在直线 l 与四条直线 AC_1,BE,CD,A_1D_1 均相交，则（　　）

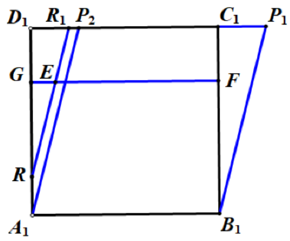


$A.d_1+d_2\geq\frac{\sqrt{2}}{2}k$　　$B.d_1+d_2\leq\frac{\sqrt{2}}{2}k$　　$C.\sqrt{d_1}+\sqrt{d_2}\geq\sqrt{k}$　　$D.\sqrt{d_1}+\sqrt{d_2}\leq\sqrt{k}$

key:如图，由已知得 $EG=d_1,D_1G=d_2$，直线 CD 上取点 P，设 $CP=x$，

作 $PH//BC$ 交直线 AB 于 H，设平面 $A_1D_1PH\cap AC_1=Q$，

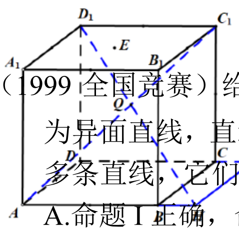
连 PQ 交 A_1D_1 于 R，则 $\frac{D_1Q}{QH}=\frac{D_1C_1}{AH}=\frac{k}{k+x}=\frac{D_1R}{PH}=\frac{D_1R}{k}$，

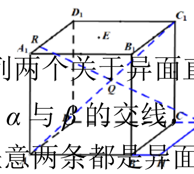


$\therefore D_1R=\frac{k^2}{k+x}$，$\because$ 直线 PQR 与 BE 相交，$\therefore ER//PB$

$\therefore\frac{EG}{GR}=\frac{d_1}{\frac{k^2}{k+x}-d_2}=\frac{x}{k}$ 即 $kd_1+xd_2=\frac{k^2x}{k+x}$ 即 $d_2x^2+(kd_2+kd_1-k^2)x+k^2d_1=0$

$\therefore\Delta=k^2(d_1+d_2-k)^2-4k^2d_1d_2\geq0,\therefore|d_1+d_2-k|=k-d_1-d_2\geq2\sqrt{d_1d_2},\therefore\sqrt{d_1}+\sqrt{d_2}\leq\sqrt{k}$

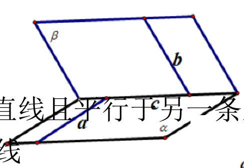


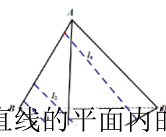


（1999 全国竞赛）给定下列两个关于异面直线的命题：命题 I：若平面 α 上的直线 a 与平面 β 上的直线 b 为异面直线，直线 c 是 α 与 β 的交线，那么，c 至多与 a,b 中的一条相交；命题 II：不存在这样的无穷多条直线，它们中的任意两条都是异面直线.那么，（D ）

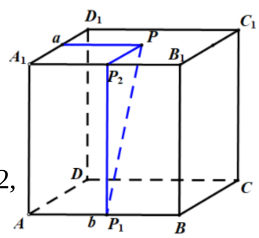
A.命题 I 正确，命题 II 不正确　B.命题 II 正确，命题 I 不正确

C.两个命题都正确　　　　D.两个命题都不正确





(2010 重庆) 到两互相垂直的异面的距离相等的点，在过其中一条直线且平行于另一条直线的平面内的轨迹是（ D ）A.直线　　B. 椭圆　　C. 抛物线　　C.双曲线

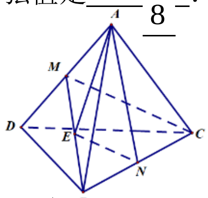


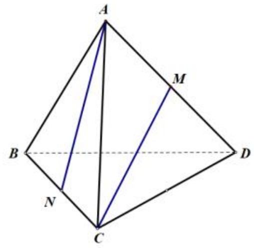
（2015 高考）（13）如图，三棱锥 $A-BCD$ 中，$AB=AC=BD=CD=3,AD=BC=2$,

立体几何（2）异面直线解答（1）

2023-05-07

点M,N分别是AD,BC的中点，则异面直线AN,CM所成的角的余弦值是___$\dfrac{7}{8}$_.





变式 1⑴ ①若a与b成$60°$角，则过P可作______条直线与a、b都成$70°$角;4

②若a,b,c两两互相垂直，则过P可作____条直线与a、b、c成等角;4

③设直线$l\subset$平面α,过平面α外一点A且与l、α都成$30°$角的直线有且只有________条;2

（2）①已知两异面直线a与b成$60°$角，则过空间一定点P可作与a、b所成角都是$30°$的平面的个数为_____.3

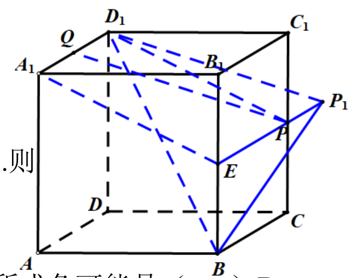
②（2009 重庆）已知二面角$\alpha-l-\beta$的大小为$50°$，P为空间中任意一点，则过点P且与平面α和平面β所成的角都是$25°$的直线的条数为（ B ）A．2　B．3　C．4　D．5

③过空间一点可作________个平面，与正四棱锥的四个侧面成等角. 3

变式 2（1）①已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中平面α过顶点A, $\alpha//$平面CB_1D_1, $\alpha\cap$平面$ABCD=m$, $\alpha\cap$平面$ABB_1A_1=n$，则m与n所成角为_______. 60°

② 在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中.若P、Q分别是CC_1、A_1D_1的中点. 则PQ与BD_1所成角的余弦值为______.

$$key:\cos\theta=\frac{3+\frac{5}{2}-\frac{3}{2}}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{10}}{2}}=\frac{2\sqrt{30}}{15}$$



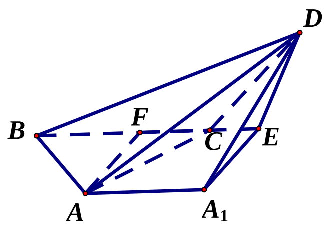
（2）①在正四面体$ABCD$中，E、F为AD、BC的中点，O为$\triangle BCD$的中心.则AO与CE所成角的余弦值为________.$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

②三棱锥$D-ABC,\angle ACD=2\angle ACB=120°,CD=2BC$,则异面直线$AD$与$BC$所成角可能是（ ）B

$A.30°$　　$B.45°$　　$C.60°$　　$D.75°$

key:（构造直三棱柱）作$AF\perp BC$于F，$DE\perp BC$于E，

作$EA_1\underset{=}{//}AF$,连AA_1,作$AG\underset{=}{//}BC$,连BG,GD



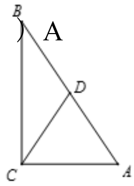
令$BC=1,\angle DEA_1=\theta$,则$CE=1,CF=\dfrac{1}{2},EF=\dfrac{3}{2},AF=\dfrac{\sqrt{3}}{2},DE=\sqrt{3}$,

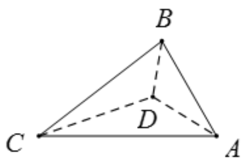
$$DA_1=\sqrt{\frac{15}{4}-3\cos\theta},\text{则}\tan\alpha=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{15}{4}-3\cos\theta}\in(\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3})$$

（2011 竞赛）14.直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，底面$\triangle ABC$是正三角形，P,E分别为BB_1,CC_1上的动点（含端点），D为BC上的点，且$PD\perp PE$,则直线AP,PE的夹角为_________. 90°

（201507 会考 25 题）如图，在$Rt\triangle ABC$中，$AC=1,BC=x,D$是斜边AB的中点，将$\triangle BCD$沿直线CD翻折，若在翻折过程中存在某个位置，使得$CB\perp AD$，则x的取值范围是（ ）A

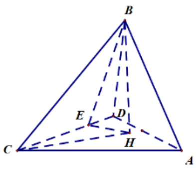
A. $(0,\sqrt{3}]$　　B. $(\dfrac{\sqrt{2}}{2},2]$　　C. $(\sqrt{3},2\sqrt{3}]$　　D. $(2,4]$

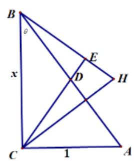




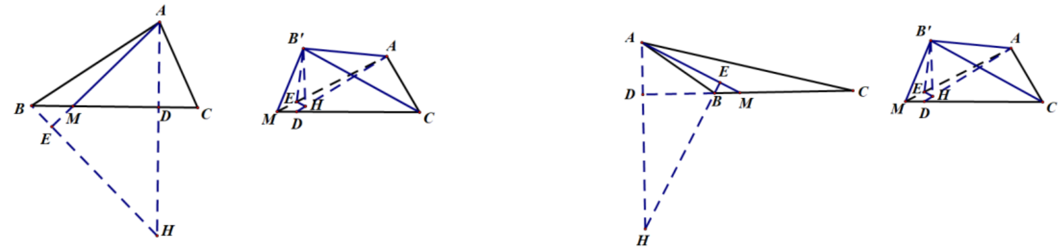
$$key:BE=x\sin\theta\ge EH=CE\tan\angle ECH=x\cos\theta\cdot\tan(\frac{\pi}{2}-2\theta)$$

$$\therefore\tan\theta\ge\frac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta}\text{即}\frac{1}{x}=\tan\theta\ge\frac{1}{\sqrt{3}},\therefore x\in(0,\sqrt{3}]$$



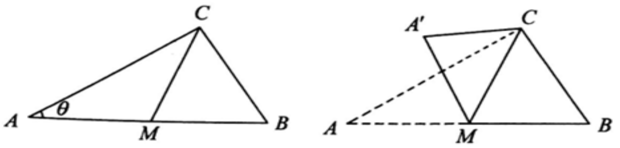


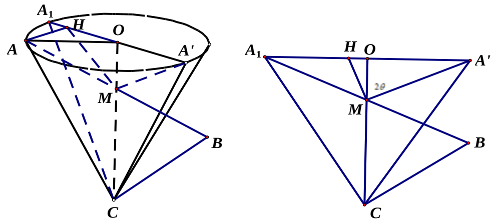
变式 1（1）若$\triangle ABC$的边BC上存在一点M（异于B,C），将$\triangle ABM$沿AM翻折后使得$AB\perp CM$，则内角A,B,C必满足（ B ）A．$B\ge 90^\circ$　B．$B<90^\circ$　C．$A\ge 90^\circ$　D．$A<90^\circ$



（2）如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^\circ,\angle CAB=\theta,M$为$AB$的中点，将$\triangle ACM$沿着$CM$翻折至$\triangle A'CM$，使得$A'M\perp MB$，则$\theta$的取值不可能为（ ）$A.\dfrac{\pi}{9}$　$B.\dfrac{\pi}{6}$　$C.\dfrac{\pi}{5}$　$D.\dfrac{\pi}{3}$

key:如图,$4\theta\ge\dfrac{\pi}{2}$即$\theta\ge\dfrac{\pi}{8}$





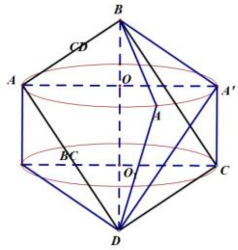
（2012）（10）已知矩形$ABCD$，$AB=1,BC=\sqrt{2}$．将$\triangle ABD$沿矩形的对角线BD所在的直线进行翻折，在翻折过程中，（ B ）A．存在某个位置，使得直线AC与直线BD垂直

B．存在某个位置，使得直线AB与直线CD垂直

C．存在某个位置，使得直线AD与直线BC垂直

D．对任意位置，三直线“AC与BD”，“AB与CD”，“AD与BC”均不垂直

$key:\angle ABA'>90^\circ,\angle ADA'<90^\circ,\therefore$选$B$

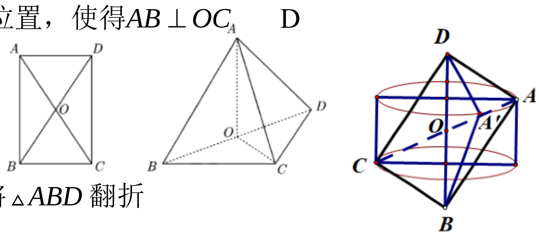


变式 1（1）如图，在矩形$ABCD$中，$BC=1,AB=x$，BD和AC交于点O，将$\triangle BAD$沿直线BD翻折，则下列判断错误的是（ ）$A.$存在x，在翻折过程中存在某个位置，使得$AB\perp OC$　D

$B.$存在x，在翻折过程中存在某个位置，使得$AC\perp BD$

$C.$存在x，在翻折过程中存在某个位置，使得$AB\perp$平面CD

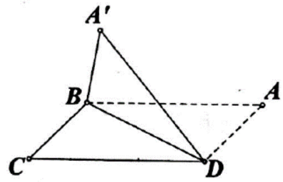
$D.$存在x，在翻折过程中存在某个位置，使得$AC\perp$平面ABD



（2）如图，四边形$ABCD$是矩形（非正方形），沿直线BD将$\triangle ABD$翻折成$\triangle A'BD$，异面直线CD与$A'B$所成的角为α，则（ B ）

A.$\alpha<\angle A'CA$　B.$\alpha>\angle A'CA$　C.$\alpha<\angle A'CD$　D.$\alpha>\angle A'CD$

key:如图，设$\angle AEA'=\theta,EB=a,ED=b$,则



$$C'A'=2\sqrt{ab}\cos\frac{\theta}{2},CA'=\sqrt{(b-a)^2+4ab\cos^2\frac{\theta}{2}}=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta}$$

$$BA'=BA=\sqrt{a^2+ab},AA'=2\sqrt{ab}\sin\frac{\theta}{2},$$

$$\therefore\cos\angle ACA'=\frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta}}{a+b}>\cos\angle ABA'=\frac{2a^2+2ab\cos\theta}{2(a^2+ab)}=\frac{a+b\cos\theta}{a+b}$$

$$\therefore\angle A'CA<\angle ABA'=\alpha$$