# 数列（2）性质解答（3）

2024-04-05

(2013北京)20.已知$\{a_n\}$是由非负整数组成的无穷数列，该数列前$n$项的最大值记为$A_n$，第$n$项之后各项$a_{n+1}$，$a_{n+2},\cdots$的最小值记为$B_n, d_n=A_n-B_n$.

（Ⅰ）若$\{a_n\}$为$2,1,4,3,2,1,4,3,\cdots$,是一个周期为4的数列（即对任意$n\in N^*, a_{n+4}=a_n$），写出$d_1,d_2,d_3,d_4$的值；

（Ⅱ）设$d$为非负整数，证明:$d_n=-d(n=1,2,3,\cdots)$的充分必要条件为$\{a_n\}$为公差为$d$的等差数列;

(Ⅲ）证明：若$a_1=2, d_n=1(n=1,2,\cdots)$，则$\{a_n\}$的项只能是1或者2，且有无穷多项为1.

(2013北京）（Ⅰ）解：由已知得$d_1=2-1=1, d_2=2-1=1, d_3=4-1=3, d_4=4-1=3$

（Ⅱ）证明：①充分性:$\because\{a_n\}$为公差为$d(d\ge0)$的等差数列，

当$d=0$时，$d_n=A_n-B_n=0=-d$；当$d>0$时，$d_n=A_n-B_n=a_n-a_{n+1}=-d$

②必要性:$\because d_n=-d\le0, \therefore a_n\le A_n=B_n+d_n\le B_n\le a_{n+1}, \therefore a_n\le a_{n+1}, \therefore A_n=a_n, B_n=a_{n+1}$

$\therefore a_{n+1}-a_n=B_n-A_n=-d_n=d, \therefore\{a_n\}$是等差数列. 由①②可知，命题成立

(Ⅲ）证明:$\because a_1=2, d_1=2-B_1=1$得$B_1=\min\{a_2,a_3,\cdots\}=1, \therefore a_n\ge1$

设$N$为使$a_n>2$的最小正整数，则$N\ge2$,并且 $\underset{1\le k<N}{a_k}\le2$

$\therefore A_{N-1}=2$,且$A_N=a_N>2, \therefore B_N=A_N-d_N>2-1=1, B_{N-1}=\min\{a_N,B_N\}\ge2$,

$\therefore d_{N-1}=A_{N-1}-B_{N-1}\le2-2=0$与$d_{N-1}=1$矛盾，

$\therefore a_n\le2$,即非负整数数列$\{a_n\}$的各项只能为1或2.

$\therefore A_n=2, \therefore\min\{a_{n+1},a_{n+2},\cdots\}=B_n=A_n-d_n=2-1=1(n\in N^*). \therefore\{a_n\}$有无穷多项为1.

变式：（浙江名校协作体高三 20240226）置换是代数的基本模型，定义域和值域都是集合$A=\{1,2,\cdots,n\}, n\in N_+$的函数称为$n$次置换.满足对任意$i\in A, f(i)=i$的置换称作恒等置换.所有$n$次置换组成的集合记作$S_n$.对于$f(i)\in S_n$，我们可用列表法表示此置换：$f(i)=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\f(1)&f(2)&\cdots&f(n)\end{pmatrix}$，记$f(i)=f^1(i), f(f(i))=f^2(i), f(f^2(i))=f^3(i),\cdots$,

$f(f^{k-1}(i))=f^k(i), i\in A, k\in N_+$.（1）若$f(i)\in S_4, f(i)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}$，计算$f^3(i)$；

（2）证明：对任意$f(i)\in S_4$，存在$k\in N_+$，使得$f^k(i)$为恒等置换；

（3）对编号从 1 到 52 的扑克牌进行洗牌，分成上下各 26 张两部分，互相交错插入，即第 1 张不动，第 27 张变为第 2 张，第 2 张变为第 3 张，第 28 张变为第 4 张,……，依次类推.这样操作最少重复几次就能恢复原来的牌型？请说明理由.

(1) 解：由已知得$f^1(i)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}, f^2(i)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}, f^3(i)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$

(2) 证明：若$S_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$,则$f^1(i)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$,即存在$k=1$,

若$S_4$是一个错位排列，不妨设$f^1(i)=S_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$,

则$f^2(i)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}, f^3(i)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}, f^4(i)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}, \therefore$ 存在$k=4\in N_+$,

同理若$S_4$是一个3个元素的错位排列，则存在$k=3$;

若$S_4$是一个2个元素的错位排列，则存在$k=2$.证毕

2024-04-05

（3）解：由已知得$f^1(i)=\frac{1-(-1)^i}{2}\cdot\frac{i+1}{2}+\frac{1+(-1)^i}{2}\cdot(26+\frac{i}{2})$（$=\frac{53+2i}{4}+\frac{51}{4}\cdot(-1)^i$不要化到这个计算更快）

$\therefore f^1(2)=27, f^2(2)=f^1(27)=14, f^3(2)=f^1(14)=33, f^4(2)=f^1(33)=17,$

$f^5(2)=f^1(17)=9, f^6(2)=f^1(9)=5, f^7(2)=f^1(5)=3, f^8(2)=f^1(3)=2,$

即$(2\to27\to14\to33\to17\to5\to3\to2)$，$\therefore 2,3,5,9,14,17,27,33$的恒等变换的周期为8

$f^1(4)=28, f^2(4)=f^1(28)=40, f^3(4)=46, f^4(4)=49, f^5(4)=25, f^6(4)=13, f^7(4)=7, f^8(4)=4,$

$\therefore 4,7,13,25,28,40,46,49$的恒等变换的周期也为8

$f^1(6)=29, f^2(6)=15, f^3(6)=8, f^4(6)=30, f^5(6)=41, f^6(6)=21, f^7(6)=11, f^8(6)=6$

$\therefore 6,8,11,15,21,29,30,41$的恒等变换的周期也为8,

$f^1(10)=31, f^2(10)=16, f^3(10)=34, f^4(10)=43, f^5(10)=22, f^6(10)=37, f^7(10)=19, f^8(10)=10$

$\therefore 10,16,19,22,31,34,37,43,$的恒等变换的周期也为8,

$f^1(12)=32, f^2(12)=42, f^3(12)=24, f^5(12)=38, f^6(12)=45, f^7(12)=23, f^8(12)=12,$

$\therefore 12,23,24,32,38,42,45$的恒等变换的周期也为8,

$f^1(18)=35, f^2(18)=18, \therefore 18,35$的恒等变换的周期也为8,

$f^1(20)=36, f^2(20)=44, f^3(20)=48, f^4(20)=50, f^5(46)=51, f^6(20)=26, f^7(20)=39, f^8(20)=20\ \therefore$

$20,26,36,39,44,48,50,51,$的恒等变换的周期也为8，$\therefore$最小操作8次就能恢复原来的牌型

（2015北京）20.已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1\in N^*, a_1\le 36$，且$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n, a_n\le 18,\\ 2a_n-36, a_n>18\end{cases}(n=1,2,\cdots)$.记集合$M=\{a_n\mid n\in N^*\}$.

（Ⅰ）若$a_1=6$，写出集合$M$的所有元素；

（Ⅱ）若集合$M$存在一个元素是3的倍数，证明：$M$的所有元素都是3的倍数；

（Ⅲ）求集合$M$的元素个数的最大值.

（2015北京）（1）解：$\because a_1=6<18, \therefore a_2=12<18, \therefore a_3=24>18, \therefore a_4=12<18, \therefore a_5=24, \therefore M=\{6,12,24\}$

（2）证明：①若$a_1=1$，则$a_2=2, a_3=4, a_4=8, a_5=16, a_6=32, a_7=28, a_8=20, a_9=4,$

$\therefore M=\{1,2,4,8,16,20,28,32\}$中没有3的倍数，$\therefore a_1\notin\{1,2,4,8,16,20,28,32\}$

②若$a_1=5$，则$a_2=10, a_3=20, \therefore a_1\notin\{5,10\}, M=\{5,10,20,4,8,16,32,28\}$;

③若$a_1=7$，则$a_2=14, a_3=28, \therefore a_1\notin\{7,14\}, M=\{7,14,28,20,4,8,16,32\}$

④若$a_1=11$，则$a_2=22, a_3=8, \therefore a_1\notin\{11,22\}, M=\{11,22,8,16,32,28,20,4\}$;

⑤若$a_1=13$，则$a_2=26, a_3=16, \therefore a_1\notin\{13,26\}, M=\{13,26,16,32,28,20,4,8\}$

⑥若$a_1=17$，则$a_2=34, a_3=32, \therefore a_1\notin\{17,34\}, M=\{17,34,32,28,20,4,8,16\}$;

⑦若$a_1=19$，则$a_2=2, \therefore a_1\ne 19, M=\{19,2,4,8,16,32,28,20\}$

⑧若$a_1=23$，则$a_2=10, \therefore a_1\ne 23, M=\{23,10,20,4,8,16,32,28\}$;

⑨若$a_1=25$，则$a_2=14, \therefore a_1\ne 25, M=\{25,14,28,20,4,8,16,32\}$

⑩若$a_1=29$，则$a_2=22, \therefore a_1\ne 29, M=\{29,22,8,16,32,28,20,4\}$;

⑾若$a_1=35$，则$a_2=34, \therefore a_1\ne 35, M=\{35,34,32,28,20,4,8,16\}$

综上：要使$M$中存在一个元素是3的倍数，则$a_1$是3的倍数，

若$a_k$是3的倍数，则$a_{k+1}=\begin{cases}2a_k\text{是3的倍数}, a_k\le 18,\\ 2a_k-36\text{是3的倍数}，\ a_k>18.\end{cases}$ $\therefore a_n(n\in N^*)$都是3的倍数，证毕

（3）解：由（2）得$a_1$不是3的倍数时，$M$的元素个数的最大值为8,

①当$a_1=3$时，$a_2=6, a_3=12, a_4=24, a_5=12, \therefore M=\{3,6,12,24\}$;

②当$a_1=6$时，$a_2=12, \therefore M=\{6,12,24\}$,

③当$a_1=9$时，$a_2=18,a_3=36,a_4=36,\therefore M=\{9,18,36\}$;

④当$a_1=12$时，$a_2=24,\therefore M=\{12,24\}$

⑤当$a_1=15$时，$a_2=30,a_3=24,\therefore M=\{15,30,24,12\}$;

⑥当$a_1=18$时，$a_2=36,\therefore M=\{18,36\}$

⑦当$a_1=21$时，$a_2=6,\therefore M=\{21,6,12,24\}$;

⑧当$a_1=24$时，$a_2=12,\therefore M=\{12,24\}$

⑨当$a_1=27$时，$a_2=18,a_3=36,a_4=36\therefore M=\{27,18,36\}$;

⑩当$a_1=30$时，$a_2=24,a_3=12,a_4=24,a_5=12,\therefore M=\{30,24,12\}$

(11)当$a_1=33$时，$a_2=30,a_3=24,a_5=12,\therefore M=\{33,30,12,24\}$;(12)当$a_1=36$时，$a_2=36,a_3=36,\therefore M=\{36,36\}$,

综上:集合$m$的元素个数的最大值为8

(2023北京)21.已知数列$\{a_n\},\{b_n\}$的项数均为$m(m>2)$,且$a_n,b_n\in\{1,2,\cdots,m\},\{a_n\},\{b_n\}$的前$n$项和分别为$A_n,B_n$，且令$A_0=B_0=0$.对于$k\in\{0,1,2,\cdots,m\}$,定义$r_k=\max\{i\mid B_i\le A_k,0\le i\le k\}$，其中,$\max M$表示数集$M$中最大的数.

(1) 若$a_1=2,a_2=1,a_3=3,b_1=1,b_2=3,b_3=3$,求$r_0,r_1,r_2,r_3$的值；

(2) 若$a_1\ge b_1$，且$2r_j\le r_{j+1}+r_{j-1},j=1,2,\cdots,m-1$,求$r_n$;

(3) 证明：存在$0\le p<q\le m$,$0\le r<s\le m$使得$A_p+B_s=A_q+B_r$.

2023北京 (1) 解：由已知得:$r_0=\max\{i\mid B_i\le A_0=0\}=0$,

$r_1=\max\{i\mid B_i\le A_1=2\}=1,r_2=\max\{i\mid B_i<A_2=3\}=1,r_3=\max\{i\mid B_i<A_3=6\}=2$.

(2) 解:由 (1) 得$r_0=0,r_1=\max\{i\mid B_i\le A_1=a_1\}=1$,

$\because 2r_j\le r_{j+1}+r_{j-1},\therefore r_j-r_{j-1}\le r_{j+1}-r_j,\therefore r_{j+1}-r_j\ge r_1-r_0=1$,

$\therefore r_j-r_0=(r_j-r_{j-1})+(r_{j-1}-r_{j-2})+\cdots+(r_1-r_0)\ge j$即$r_j\ge j$,

而$r_j=\max\{i\mid B_i\le A_j=a_1+a_2+\cdots+a_j\}\le j,\therefore r_j=j,\therefore r_n=n(n=0,1,2,\cdots,m)$.

(3) 设$A_m\ge B_m$,记$S_k=A_k-B_{r_k}(1\le k\le m)$,则$S_k\ge0$，且$A_k-B_{r_k+1}<0$,

假设$S_k\ge m$,则$b_{r_k+1}=B_{r_k+1}-B_{r_k}=B_{r_k+1}-(A_k-S_k)=B_{r_k+1}-A_k+S_k>m$与$b_{r_k+1}\le m$矛盾.$\therefore 0\le S_k\le m-1$,

若存在$k$，使得$S_k=0$，则$A_k=B_{r_k}$,取$t=q=0,p=k,s=r_k$，有$S_p+B_t=A_q+A_s$,

若不存在$k$,使得$S_k=0$,则$S_k\in\{1,2,\cdots,m-1\}$,

$\therefore$由抽屉原理得：存在$1\le k_1<k_2\le m$使得$S_{k_1}=S_{k_2}$,且$r_{k_1}<r_{k_2}$,

$\therefore A_{k_1}-B_{r_{k_1}}=A_{k_2}-B_{r_{k_2}}$即$A_{k_1}+B_{r_{k_2}}=A_{k_2}+B_{r_{k_1}}$,得证；

若$A_m\le B_m$,定义$t_k=\max\{i\mid A_k\le B_k,k\in\{0,1,\cdots,m\}\}$,并记$T_k=B_k-A_{t_k}(1\le k\le m)$

同上述过程，同理可得结论. 证毕