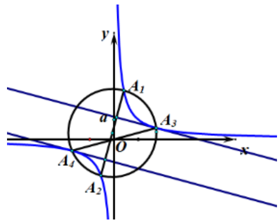
解析几何（3）双曲线解答（4）

2023-12-16

（2017 河南）设一圆和一等轴双曲线交于 A_1, A_2, A_3, A_4 四点，其中 A_1 和 A_2 是圆的直径的一对端点.

（1）求证:线段 A_3A_4 的中点是双曲线的中心;（2）求双曲线在点 A_3 和 A_4 处的切线和直线 A_1A_2 的夹角的大小.



⑴ 证明：设双曲线方程为 $xy=a(a>0)$,圆方程为 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$

设 $A_1(x_1,y_1), A_2(x_2,y_2), A_3(x_3,y_3), A_4(x_4,y_4)$,则 $x_1+x_2=-d$

由 $\begin{cases} xy=a \\ x^2+y^2+dx+ey+f=0 \end{cases}$ 得 $x^4+dx^3+fx^2+eax+a^2=0$

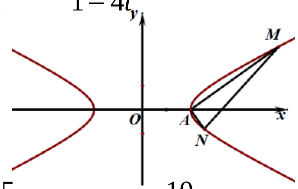
则 $x_1+x_2+x_3+x_4=-d+x_3+x_4=-d$ 得 $x_3+x_4=0$, $\therefore A_3A_4$ 的中点是双曲线的中心

(2) 解：由 ⑴ 得双曲线在 A_3 处的切线方程为:$\frac{1}{2}(x_3y+y_3x)=a$; A_4 处的切线方程为:$\frac{1}{2}(x_4y+y_4x)=a$

$$\therefore k_{l_{A_3}}\cdot k_{A_1A_2}=-\frac{y_3}{x_3}\cdot\frac{\frac{a}{x_1}-\frac{a}{x_2}}{x_1-x_2}=\frac{a}{x_3^2}\cdot\frac{a}{x_1x_2}=\frac{-a^2}{x_3x_4x_1x_2}=-1(\because x_1x_2x_3x_4=a^4),\text{同理}k_{l_{A_3}}\cdot k_{A_1A_2}=-1,\therefore\text{夹角都为}90^\circ$$

（2009 上海）如图，A 是双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的右顶点，过点 A 的两条互相垂直的直线分别与双曲线的右支交于点 M,N，问直线 MN 是否一定过 x 轴上一定点？如果不存在这样的定点，请说明理由；如果存在这样的定点 P 试求出这个定点 P 的坐标.

$key1$: 设 $l_{AM}: x=ty+2$，代入双曲线方程得:$M(-\frac{4t^2}{t^2-4}+2,-\frac{4t}{t^2-4})$,同理 $N(-\frac{4}{1-4t^2}+2,\frac{4t}{1-4t^2})$



$$\therefore k_{MN}=\frac{\frac{4t}{1-4t^2}+\frac{4t}{t^2-4}}{-\frac{4}{1-4t^2}+\frac{4t^2}{t^2-4}}=\frac{3t}{4(t^2-1)}$$

$$\therefore l_{MN}: y+\frac{4t}{t^2-4}=\frac{3t}{4(t^2-1)}(x+\frac{4t^2}{t^2-4}-2)\text{即}y=\frac{3t}{4(t^2-1)}x-\frac{5t}{2(t^2-1)}=\frac{t}{t^2-1}(\frac{3}{4}x-\frac{5}{2})\text{经过定点}P(\frac{10}{3},0)$$

$key2$: 设 $l_{MN}: x=ty+n$ 代入双曲线方程得:$(t^2-4)y^2+2tny+n^2-4=0$

$$\therefore\begin{cases} y_M+y_N=-\frac{2tn}{t^2-4} \\ y_My_N=\frac{n^2-4}{t^2-4} \end{cases},\text{且}t^2-4\neq0,\text{且}\Delta=16(t^2+n^2-4)>0$$

$$\because AM\perp AN,\therefore\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=(x_M-2)(x_N-2)+y_My_N=(t^2+1)y_My_N+t(n-2)(y_M+y_N)+(n-2)^2$$

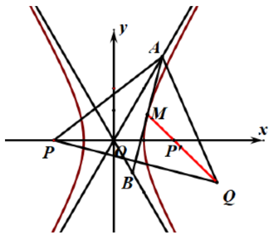
$$=\frac{(t^2+1)(n^2-4)}{t^2-4}+\frac{-2t^2(n^2-2n)}{t^2-4}+\frac{(n^2-4n+4)(t^2-4)}{t^2-4}=0$$

$$\Leftrightarrow -3n^2+16n-20=0\text{得}n=\frac{10}{3},or,n=2\text{（舍去）},\therefore MN\text{经过定点}P(\frac{10}{3},0)$$

（2017 天津）设直线 $l_1: y=\sqrt{3}x, l_2: y=-\sqrt{3}x$.点 A 和点 B 分别在 l_1 和 l_2 上运动，且 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-2$.

（1）　求 AB 的中点 M 的轨迹；（2）设点 $P(-2,0)$ 关于直线 AB 的对称点为 Q,证明直线 MQ 过定点.

解：⑴ 设 $A(a,\sqrt{3}a), B(b,-\sqrt{3}b), M(x,y)$,则 $\begin{cases} a+b=2x \\ \sqrt{3}(a-b)=2y\text{即}a-b=\frac{2y}{\sqrt{3}} \\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=ab-3ab=-2\text{即}ab=1 \end{cases}$,



$\therefore 4x^2-\dfrac{4y^2}{3}=4$即$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1,\therefore M$的轨迹为实轴长为2,焦点坐标为$(\pm2,0)$的双曲线

（2）设$M(s,t)(s^2-\dfrac{t^2}{3}=1)$,则$k_{AB}=\dfrac{\sqrt{3}(a+b)}{a-b}=\dfrac{3s}{t},l_{AB}:sx-\dfrac{ty}{3}=1,k_{PM}=\dfrac{t}{s+2}$,

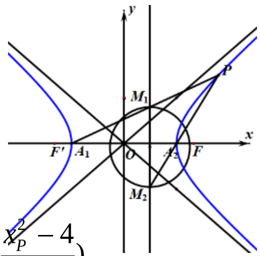
$key1:$设$Q(x,y)$，则$\begin{cases}\dfrac{y}{x+2}=-\dfrac{t}{3s}\\3s\cdot\dfrac{x-2}{2}-t\cdot\dfrac{y}{2}-3=0\end{cases}$得$\begin{cases}x=\dfrac{2s+2}{2s-1}\\y=\dfrac{-2t}{2s-1}\end{cases}$

$\therefore l_{QM}:y-t=\dfrac{\dfrac{-2t}{2s-1}-t}{\dfrac{2s+2}{2s-1}-s}(x-s)=\dfrac{t}{s-2}(x-s)$即$y=\dfrac{t}{s-2}x-\dfrac{st}{s-2}+t=\dfrac{t}{s-2}(x-2)$经过定点$(2,0)$

$key2:$则$\dfrac{k_{MQ}-\dfrac{3s}{t}}{1+k_{MQ}\cdot\dfrac{3s}{t}}=\dfrac{\dfrac{3s}{t}-k_{PM}}{1+\dfrac{3s}{t}\cdot k_{PM}}=\dfrac{\dfrac{3s}{t}-\dfrac{t}{s+2}}{1+\dfrac{3s}{t}\cdot\dfrac{t}{s+2}}=\dfrac{3s^2+6s-t^2}{t(4s+2)}=\dfrac{3+6s}{2t(2s+1)}=\dfrac{3}{2t}$得$k_{MQ}=\dfrac{3t(2s+1)}{2t^2-9s}=\dfrac{3t(2s+1)}{6(s^2-1)-9s}=\dfrac{t}{s-2}$

$\therefore l_{MQ}:y-t=\dfrac{t}{s-2}(x-s)$即$y=\dfrac{t}{s-2}(x-2)$经过定点$(2,0)$，得证

变式 1.已知双曲线$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$，设其实轴端点为$A_1,A_2$，点 P 是双曲线上异于A_1,A_2的一个动点，直线PA_1、PA_2分别与直线$x=1$交于M_1、M_2两点.则以线段M_1M_2为直径的圆必经过的定点的坐标为____.



$key:l_{PA_1}:y=\dfrac{y_P}{x_P+2}(x+2)$令$x=1$得$y_M=\dfrac{3y_P}{x_P+2}$

$l_{PA_2}:y=\dfrac{y_P}{x_P-2}(x-2)$令$x=1$得$y_N=\dfrac{-y_P}{x_P-2}$

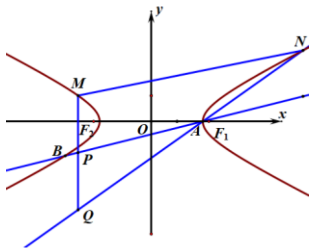
$\therefore$以M_1M_2为直径的圆方程为:$(x-1)^2+(y-\dfrac{3y_P}{x_P+2})(y+\dfrac{y_P}{x_P-2})=0(\dfrac{y_P^2}{3}=\dfrac{x_P^2}{4}-1=\dfrac{x_P^2-4}{4})$

即$(x-1)^2+y^2+\dfrac{-2x_Py_P+8y_P}{x_P^2-4}y-\dfrac{3y_P^2}{x_P^2-4}=(x-1)^2+y^2-\dfrac{3(x_P-4y_P)}{2y_P}y-\dfrac{9}{4}=0$过定点$(\dfrac{5}{2},0)$,及$(-\dfrac{1}{2},0)$

变式 2.已知点$A(2,0),B(-\dfrac{10}{3},-\dfrac{4}{3})$在双曲线$E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$上.（Ⅰ）求双曲线$E$的方程;

（Ⅱ）直线l与双曲线E交于M,N两个不同的点（异于A,B），过M作x轴的垂线分别交直线AB,AN于P,Q,当$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{PQ}$时，证明：直线$l$过定点.

解：（Ⅰ）由已知得$\begin{cases}a=2\\\dfrac{25}{9}-\dfrac{16}{9b^2}=1\end{cases}$得$a=2,b=1,\therefore$双曲线E的方程为$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$



（Ⅱ）设$l:y=kx+m$代入双曲线方程得:$(1-4k^2)x^2-8kmx-4m^2-4=0$

$\therefore\begin{cases}x_M+x_N=\dfrac{8km}{1-4k^2}\\x_Mx_N=\dfrac{-4m^2-4}{1-4k^2}\end{cases}$,且$\Delta=16(1+m^2-4k^2)>0$,且$1-4k^2\neq0$

由$l_{AB}:\dfrac{x-2}{-\frac{10}{3}-2}=\dfrac{y}{-\frac{4}{3}}$即$y=\dfrac{1}{4}(x-2)$得$y_P=\dfrac{1}{4}(x_M-2)$

由$l_{AN}:y=\dfrac{y_N}{x_N-2}(x-2)$得$y_Q=\dfrac{y_N(x_M-2)}{x_N-2}$，$\therefore \overrightarrow{MP}=\overrightarrow{PQ}\Leftrightarrow P$是$MQ$的中点

$\Leftrightarrow y_M+y_Q=2y_P\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(x_M-2)=y_M+\dfrac{y_N(x_M-2)}{x_N-2}\Leftrightarrow (x_N-2)y_M+y_N(x_M-2)=\dfrac{1}{2}(x_M-2)(x_N-2)$

$\Leftrightarrow (x_N-2)(kx_M+m)+(x_M-2)(kx_N+m)-\dfrac{1}{2}(x_M-2)(x_N-2)=(2k-\dfrac{1}{2})x_Mx_N+(-2k+m+1)(x_M+x_N)-4m-2$

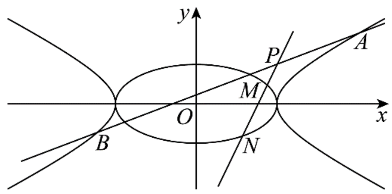
$=(2k-\dfrac{1}{2})\cdot\dfrac{-4m^2-4}{1-4k^2}+(-2k+m+1)\cdot\dfrac{8km}{1-4k^2}-4m-2=0\Leftrightarrow 4k^2+4(m-1)k+m(m-2)$

$=(2k+m)(2k+m-2)=0$，$\therefore m=-2k$此时l经过A，舍去

或$m=2-2k$，此时l经过定点$(2,2)$，得证

变式 3. 已知双曲线$C_1:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$的一条渐近线为$y=-\dfrac{1}{2}x$，椭圆$C_2:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的长轴长为 4，其中$a>b>0$．过点$P(2,1)$的动直线$l_1$交$C_1$于$A$，$B$两点，过点$P$的动直线$l_2$交$C_2$于$M$，$N$两点．

（1）求双曲线C_1和椭圆C_2的方程；（2）是否存在定点Q，使得四条直线QA，QB，QM，QN的斜率之和为定值?若存在，求出点Q坐标；若不存在，说明理由．



解：（1）由已知得$\begin{cases}a=2\\ \dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$得$a=2,b=1$，

$\therefore C_1$的方程为$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$，C_2的方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

（2）假设存在点$Q(m,n)$，由已知设$l_1:y-1=k_1(x-2)$即$y=k_1x-2k_1+1$代入C_1得：

$(1-4k_1^2)x^2+8k_1(2k_1-1)x-4(2k_1-1)^2-4=0$，$\therefore\begin{cases}x_A+x_B=-\dfrac{8k_1(2k_1-1)}{1-4k_1^2}\\ x_Ax_B=\dfrac{-16k_1^2+16k_1-8}{1-4k_1^2}\end{cases}$，且$\Delta_1=32(1-2k_1)>0$

$l_2:y-1=k_2(x-2)$即$y=k_2x-2k_2+1$代入C_2得:$(1+4k_2^2)x^2-8k_2(2k_2-1)x+4(2k_2-1)^2-4=0$

$\therefore\begin{cases}x_M+x_N=\dfrac{8k_2(2k_2-1)}{1+4k_2^2}\\ x_Mx_N=\dfrac{16k_2^2-16k_2}{1+4k_2^2}\end{cases}$，且$\Delta_2=64k_2>0$

$\therefore k_{QA}+k_{QB}=\dfrac{y_A-n}{x_A-m}+\dfrac{y_B-n}{x_B-m}=\dfrac{k_1x_A-2k_1+1-n}{x_A-m}+\dfrac{k_1x_B-2k_1+1-n}{x_B-m}$

$=\dfrac{2k_1x_Ax_B+(-(m+2)k_1+1-n)(x_A+x_B)-2m(-2k_1+1-n)}{x_Ax_B-m(x_A+x_B)+m^2}$

$=\dfrac{2k_1(-16k_1^2+16k_1-8)+((m+2)k_1-1+n)(16k_1^2-8k_1)-2m(-2k_1+1-n)(1-4k_1^2)}{-16k_1^2+16k_1-8+m(16k_1^2-8k_1)+m^2(1-4k_1^2)}$

$=\dfrac{8n(2-m)k_1^2+(-8+4m-8n)k_1-2m(1-n)}{-4(m-2)^2k_1^2+(16-8m)k_1+m^2-8}$与$k_1$无关，得$m=2,n=0$，且$k_{QA}+k_{QB}=1$

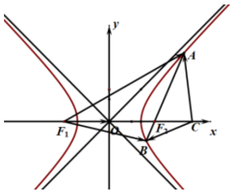
$$\therefore k_{QM}+k_{QN}=\frac{y_M-n}{x_M-m}+\frac{y_N-n}{x_N-m}=\frac{k_2x_M-2k_2+1}{x_M-2}+\frac{k_2x_N-2k_2+1}{x_N-2}=\frac{2k_2x_Mx_N+(-4k_2+1)(x_M+x_N)+4(2k_2-1)}{x_Mx_N-2(x_M+x_N)+4}$$

$$=\frac{2k_2(16k_2^2-16k_2)+(-4k_2+1)(16k_2^2-8k_2)+(8k_2-4)(1+4k_2^2)}{16k_2^2-16k_2-2(16k_2^2-8k_2)+4(1+4k_2^2)}=\frac{-4}{4}=-1,$$

$\therefore k_{QA}+k_{QB}+k_{QM}+k_{QN}=0$为定值，$\therefore$ 存在$Q(2,0)$，

（2007湖南）已知双曲线$x^2-y^2=2$的左、右焦点分别为F_1、F_2，过点F_2的动直线与双曲线相交于A,B两点.

(1) 若动点M满足$\overrightarrow{F_1M}=\overrightarrow{F_1A}+\overrightarrow{F_1B}+\overrightarrow{F_1O}$（其中$O$为坐标原点），求点$M$的轨迹方程；



(2) 在x轴上是否存在定点C，使$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$为常数？若存在，求出点$C$的坐标.

解： (1) 设$l_{AB}:x=ty+2$代入双曲线方程得：$(t^2-1)y^2+4ty+2=0$

$$\therefore\begin{cases}y_A+y_B=\dfrac{-4t}{t^2-1}\\ y_Ay_B=\dfrac{2}{t^2-1}\end{cases},\text{且}\Delta=8(t^2+1)>0,\text{且}t\neq\pm1$$

设$M(x,y)$，则$\overrightarrow{F_1M}=(x+2,y)=\overrightarrow{F_1A}+\overrightarrow{F_1B}+\overrightarrow{F_1O}=(x_A+2+x_B+2+2,y_A+y_B)$

$$\text{即}\begin{cases}x=x_A+x_B+4=t(y_A+y_B)+8=\dfrac{-4t^2}{t^2-1}+8\\ y=y_A+y_B=\dfrac{-4t}{t^2-1}\end{cases},\therefore t=\frac{x-8}{y},\therefore M\text{的轨迹方程为}(x-6)^2-y^2=4$$

(2) 假设存在点$C(m,0)$，则$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=(ty_A+2-m)(ty_B+2-m)+y_Ay_B$

$=(t^2+1)y_Ay_B+t(2-m)(y_A+y_B)+(2-m)^2$

$$=\frac{2t^2+2}{t^2-1}+\frac{-4(2-m)t^2}{t^2-1}+\frac{(4-4m+m^2)(t^2-1)}{t^2-1}=\frac{(m^2-2)t^2-m^2+4m-2}{t^2-1}\text{为常数}$$

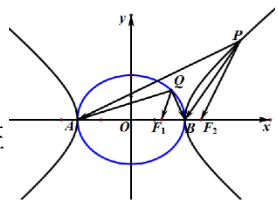
只需$m^2-2=m^2-4m+2$即$m=1$，$\therefore$ 存在点$C(1,0)$

（2015湖南）已知A,B为椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$和双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$的公共顶点，$P,Q$分别为双曲线和椭圆上不同于$A,B$的动点，且有$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}=\lambda(\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{BQ})(\lambda\in R,|\lambda|>1)$，设$AP$、$BP$、$AQ$、$BQ$的斜率分别为$k_1$、$k_2$、$k_3$、$k_4$.(1) 求证：$k_1+k_2+k_3+k_4=0$；

(2) 设F_1,F_2分别为椭圆和双曲线的右焦点，若$PF_2//QF_1$，求$k_1^2+k_2^2+k_3^2+k_4^2$的值.

（2015湖南）：(1) 证明：由$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}=-2\overrightarrow{PO},\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{BQ}=-2\overrightarrow{QO}$得$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OQ}$，$\therefore\dfrac{x_P}{x_Q}=\dfrac{y_P}{y_Q}=\lambda$，

$$\therefore k_1+k_2+k_3+k_4=\frac{y_P}{x_P+a}+\frac{y_P}{x_P-a}+\frac{y_Q}{x_Q+a}+\frac{y_Q}{x_Q-a}$$



$$=\frac{2x_Py_P}{x_P^2-a^2}+\frac{2x_Qy_Q}{x_Q^2-a^2}=\frac{2x_Py_P}{\dfrac{a^2y_P^2}{b^2}}+\frac{2x_Qy_Q}{-\dfrac{a^2y_Q^2}{b^2}}=\frac{2b^2}{a^2}\left(\frac{x_P}{y_P}-\frac{x_Q}{y_Q}\right)=\frac{2b^2}{a^2}\left(\frac{\lambda x_Q}{\lambda y_Q}-\frac{x_Q}{y_Q}\right)=0\text{得证}$$

(2) $\because PF_2//QF_1$，且$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OQ}$，$\therefore\lambda=\dfrac{x_P}{x_Q}=\dfrac{y_P}{y_Q}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2-b^2}}$

$$\text{而}\begin{cases}\dfrac{x_Q^2}{a^2}+\dfrac{y_Q^2}{b^2}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\left(\dfrac{x_P^2}{a^2}+\dfrac{y_P^2}{b^2}\right)=1\text{即}\dfrac{x_P^2}{a^2}+\dfrac{y_P^2}{b^2}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\\ \dfrac{x_P^2}{a^2}-\dfrac{y_P^2}{b^2}=1\end{cases},\therefore x_P^2=\frac{a^4}{a^2-b^2},y_P^2=\frac{b^4}{a^2-b^2}$$

2023-12-16

$key1:而k_1\cdot k_2=\frac{y_P^2}{x_P^2-a^2}=\frac{y_P^2}{\frac{a^2}{b^2}y_P^2}=\frac{b^2}{a^2},k_3\cdot k_4=\frac{y_Q^2}{x_Q^2-a^2}=\frac{y_Q^2}{-\frac{a^2y_Q^2}{b^2}}=-\frac{b^2}{a^2}$

$\therefore k_1^2+k_2^2+k_3^2+k_4^2=(k_1+k_2)^2+(k_3+k_4)^2-2k_1k_2-2k_3k_4=(k_1+k_2)^2+(k_3+k_4)^2$

$=2(k_1+k_2)^2=2(\frac{2b^2}{a^2}\cdot\frac{x_P}{y_P})^2=2(\frac{2b^2}{a^2})^2\cdot\frac{a^4}{b^4}=8$

$key2:k_1^2+k_2^2+k_3^2+k_4^2=(\frac{y_P}{x_P+a})^2+(\frac{y_P}{x_P-a})^2+(\frac{y_Q}{x_Q+a})^2+(\frac{y_Q}{x_Q-a})^2=\frac{y_P^2(2x_P^2+2a^2)}{(x_P^2-a^2)^2}+\frac{y_Q^2(2x_Q^2+2a^2)}{(x_Q^2-a^2)^2}$

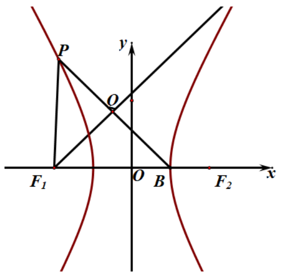
$=\frac{2y_P^2(x_P^2+a^2)}{(\frac{a^2y_P^2}{b^2})^2}+\frac{2y_Q^2(x_Q^2+a^2)}{(-\frac{a^2y_Q^2}{b^2})^2}=\frac{2b^4}{a^4}(\frac{x_P^2+a^2}{y_P^2}+\frac{x_Q^2+a^2}{y_Q^2})=\frac{2b^4}{a^4}(\frac{\lambda^2x_Q^2+a^2}{\lambda^2y_Q^2}+\frac{x_Q^2+a^2}{y_Q^2})=\frac{2b^4}{a^4}(\frac{2x_Q^2}{y_Q^2}+\frac{a^2}{y_Q^2}\cdot\frac{1+\lambda^2}{\lambda^2})$

$=\frac{2b^4}{a^4}(\frac{2x_P^2}{y_P^2}+\frac{a^2(1+\lambda^2)}{y_P^2})=\frac{2b^4}{a^4}(\frac{2a^4}{b^4}+\frac{a^2(1+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2})}{\frac{b^4}{a^2-b^2}})=8$

变式 1.已知 F_1 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点，点 $A(2,3)$ 在双曲线上且双曲线的离心率为 2.

（1）求双曲线的标准方程；（2）若 P 是双曲线在第二象限内的动点， $B(1,0)$，记 $\angle PF_1B$ 的内角平分线所在直线斜率为 k_3， 直线 BP 斜率为 k_1 ,求证： k_1+k_3 是定值.

（1）解：由已知得 $\begin{cases}\frac{c}{a}=2\\ \frac{4}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1\end{cases}$ 得$a=1,b=\sqrt3,c=2,\therefore$ 双曲线的标准方程为$x^2-\frac{y^2}{3}=1$



（2）证明：设$P(\frac12(t+\frac1t),\frac{\sqrt3}{2}(\frac1t-t))(t<-1)$,则$k_1=\frac{\frac{\sqrt3}{2}(\frac1t-t)}{\frac12(t+\frac1t)-1}=\frac{\sqrt3(1+t)}{1-t}$,

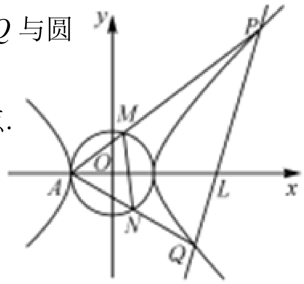
$k_{PF_1}=\frac{\frac{\sqrt3}{2}(\frac1t-t)}{\frac12(t+\frac1t)+2}=\frac{\sqrt3(1-t^2)}{t^2+4t+1}=\frac{2k_3}{1-k_3^2}$即$\sqrt3(t+1)(t-1)k_3^2-2(t^2+4t+1)k_3-\sqrt3(t+1)(t-1)$

$=[\sqrt3(t+1)k_3+t-1]\cdot[(t-1)k_3-\sqrt3(t+1)]=0(\because k_3>0)$,得$k_3=\frac{\sqrt3(t+1)}{t-1}$

$\therefore k_1+k_3=\frac{\sqrt3(1+t)}{1-t}+\frac{\sqrt3(t+1)}{t-1}=0$为定值

变式 2. 如图,已知点 $T_1(3,-\sqrt5)$ 和点 $T_2(-5,\sqrt{21})$ 在双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上,双曲线 C 的左顶点为 A，过点 $L(a^2,0)$ 且不与 x 轴重合的直线 l 与双曲线 C 交于 P，Q 两点，直线 AP,AQ 与圆 $O:x^2+y^2=a^2$ 分别交于 M，N 两点.（1）求双曲线 C 的标准方程；

（2）设直线 AP，AQ 的斜率分别为 k_1,k_2，求 k_1k_2 的值；（3）证明：直线 MN 过定点.



⑴ 解：由已知得 $\begin{cases}\frac{9}{a^2}-\frac{5}{b^2}=1\\ \frac{25}{a^2}-\frac{21}{b^2}=1\end{cases}$ 得$a=b=2,\therefore$ 双曲线C的标准方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$

（2）由 ⑴ 的$L(4,0),A(-2,0)$,圆$O:x^2+y^2=4$,

设$l_{PQ}: x=ty+4$代入C方程得$:(t^2-1)y^2+8ty+12=0, \therefore \begin{cases} y_P+y_Q=\dfrac{-8t}{t^2-1} \\ y_Py_Q=\dfrac{12}{t^2-1} \end{cases}$

$$\therefore k_1k_2=\frac{y_P}{x_P+2}\cdot\frac{y_Q}{x_Q+2}=\frac{y_Py_Q}{t^2y_Py_Q+6t(y_P+y_Q)+36}=\frac{\dfrac{12}{t^2-1}}{\dfrac{12t^2}{t^2-1}+\dfrac{-48t^2}{t^2-1}+\dfrac{36t^2-36}{t^2-1}}=-\frac{1}{3}$$

(3) 由（2）得$l_{AP}: y=k_1(x+2)$代入圆O方程得$: x_M=\dfrac{2-2k_1^2}{1+k_1^2}, y_M=\dfrac{4k_1}{1+k_1^2}$,同理$x_N=\dfrac{2-2k_2^2}{1+k_2^2}, y_N=\dfrac{4k_2}{1+k_2^2}$

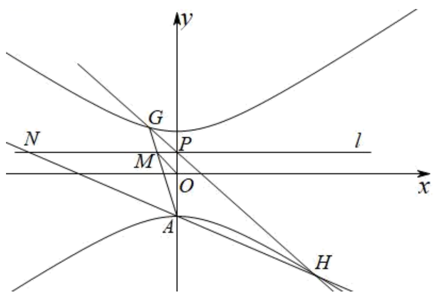
$$\therefore k_{MN}=\frac{\dfrac{4k_1}{1+k_1^2}-\dfrac{4k_2}{1+k_2^2}}{\dfrac{2-2k_1^2}{1+k_1^2}-\dfrac{2-2k_2^2}{1+k_2^2}}=-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{k_1+k_2}=-\frac{4}{3k_1-\dfrac{1}{k_1}}=\frac{-4k_1}{3k_1^2-1}$$

$$\therefore l_{MN}: y-\frac{4k_1}{1+k_1^2}=\frac{-4k_1}{3k_1^2-1}\left(x-\frac{2-2k_1^2}{1+k_1^2}\right)\text{即}y=\frac{-4k_1}{3k_1^2-1}x+\frac{8k_1(1-k_1^2)}{(3k_1^2-1)(1+k_1^2)}+\frac{4k_1}{1+k_1^2}$$

$$=\frac{-4k_1}{3k_1^2-1}x+\frac{4k_1}{3k_1^2-1}=\frac{-4k_1}{3k_1^2-1}(x-1)\text{经过定点}(1,0),\text{证毕}$$

变式 3. 在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线$C:\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为$\sqrt{2}$，实轴长为 4.

（1）求 C 的方程；（2）如图，点 A 为双曲线的下顶点，直线 l 过点 $P(0,t)$ 且垂直于 y 轴（P 位于原点与上顶点之间），过 P 的直线交 C 于 G，H 两点，直线 AG，AH 分别与 l 交于 M，N 两点，若 O，A，N，M 四点共圆，求点 P 的坐标.



解： (1) 由已知得$\begin{cases} \dfrac{c}{a}=\sqrt{2} \\ 2a=4 \end{cases}, \therefore a=2, c=2\sqrt{2}, b=2,$

$\therefore C$的方程为$\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{x^2}{4}=1$

(2) 设$l_{GH}: y=kx+t$代入C方程得$:(k^2-1)x^2+2ktx+t^2-4=0$

$$\therefore \begin{cases} x_G+x_H=-\dfrac{2kt}{k^2-1} \\ x_Gx_H=\dfrac{t^2-4}{k^2-1} \end{cases},\text{且}\Delta=4(t^2+4k^2-4)>0$$

而$l_{AG}: y=\dfrac{y_G+2}{x_G}x-2$令$y=t$得$M(\dfrac{(t+2)x_G}{y_G+2},t)$，同理$N(\dfrac{(t+2)x_H}{y_H+2},t)$,

由O,A,N,M四点共圆得$\pi=\angle ANM+\angle AOM=\pi-\alpha_{AN}+\dfrac{\pi}{2}+\pi-\alpha_{OM}$即$\alpha_{AN}=\dfrac{3\pi}{2}-\alpha_{OM}$

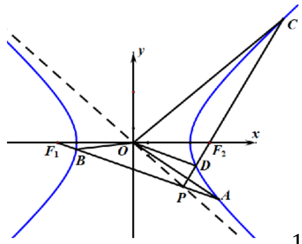
$$\therefore k_{AN}=\tan\alpha_{AN}=\tan(\frac{3\pi}{2}-\alpha_{OM})=\frac{1}{k_{OM}}, \therefore k_{AN}k_{OM}=\frac{t+2}{\dfrac{(t+2)x_H}{y_H+2}}\cdot\frac{t}{\dfrac{(t+2)x_G}{y_G+2}}=\frac{t(kx_G+t+2)(kx_H+t+2)}{(t+2)x_Hx_G}$$

$$=\frac{t[k^2\cdot\dfrac{t^2-4}{k^2-1}+k(t+2)\cdot\dfrac{-2kt}{k^2-1}+(t+2)^2]}{(t+2)\cdot\dfrac{t^2-4}{k^2-1}}=\frac{-(t+2)^2}{(t+2)^2(t-2)}=-\frac{1}{t-2}=1\text{得}t=1,\therefore\text{点}P\text{的坐标为}(0,1)$$

2023-12-16

变式 4.已知双曲线$\Gamma:\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$的左右焦点分别为$F_1,F_2,P$是直线$l:y=-\dfrac{8}{9}x$上不同于原点$O$的一个动点，斜率为$k_1$的直线$PF_1$与双曲线$\Gamma$交于$A,B$两点，斜率为$k_2$的直线$PF_2$与双曲线$\Gamma$交于$C,D$两点.

（1） 求$\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}$的值；（2）若直线$OA,OB,OC,OD$的斜率分别为$k_{OA},k_{OB},k_{OC},k_{OD}$，问是否存在点$P$，满足$k_{OA}+k_{OB}+k_{OC}+k_{OD}=0$ 若存在，求出点P的坐标；若不存在，说明理由.



解： (1)$\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}=\dfrac{x_P-3}{y_P}+\dfrac{x_P+3}{y_P}=\dfrac{x_P-3}{-\frac{8}{9}x_P}+\dfrac{x_P+3}{-\frac{8}{9}x_P}=-\dfrac{9}{8}\cdot 2=-\dfrac{9}{4}$

(2) 由$\begin{cases}y=k_1(x-3)\\4x^2-5y^2=20\end{cases}$消去$x$得$(4t_1^2-5)y^2+24t_1y+16=0,\therefore\begin{cases}y_A+y_B=\dfrac{-24t_1}{4t_1^2-5}\\y_Ay_B=\dfrac{16}{4t_1^2-5}\end{cases}$,且$\Delta_1=320(t_1^2+1)>0$(其中$t_1=\dfrac{1}{k_1}$),

由$\begin{cases}y=k_2(x+3)\\4x^2-5y^2=20\end{cases}$消去$x$得$(4t_2^2-5)y^2-24t_2y+16=0,\therefore\begin{cases}y_C+y_D=\dfrac{24t_2}{4t_2^2-5}\\y_Cy_D=\dfrac{16}{4t_2^2-5}\end{cases}$,且$\Delta_2=320(t_2^2+1)>0$(其中$t_2=\dfrac{1}{k_2}$),

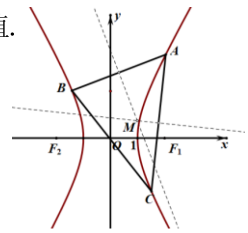
$$\therefore k_{OA}+k_{OB}+k_{OC}+k_{OD}=\frac{y_A}{x_A}+\frac{y_B}{x_B}+\frac{y_C}{x_C}+\frac{y_D}{x_D}=\frac{y_A(t_1y_B+3)+y_B(t_1y_A+3)}{(t_1y_A+3)(t_1y_B+3)}+\frac{y_C(t_2y_D-3)+y_D(t_2y_C-3)}{(t_2y_C-3)(t_2y_D-3)}$$

$$=\frac{2t_1\cdot\frac{16}{4t_1^2-5}+3\cdot\frac{-24t_1}{4t_1^2-5}}{t_1^2\cdot\frac{16}{4t_1^2-5}+3t_1\cdot\frac{-24t_1}{4t_1^2-5}+9}+\frac{2t_2\cdot\frac{16}{4t_2^2-5}-3\cdot\frac{24t_2}{4t_2^2-5}}{t_2^2\cdot\frac{16}{4t_2^2-5}-3t_2\cdot\frac{24t_2}{4t_2^2-5}+9}=\frac{8t_1}{4t_1^2+9}+\frac{8t_2}{4t_2^2+9}$$

$$=8\cdot\frac{t_1(4t_2^2+9)+t_2(4t_1^2+9)}{(4t_1^2+9)(4t_2^2+9)}=8\cdot\frac{4t_1t_2\cdot(-\frac{9}{4})-\frac{81}{4}}{(4t_1+9)(4t_2+9)}=0\text{得}t_1t_2=-\frac{9}{4},$$

$\therefore t_1=-3=\dfrac{x_P-3}{-\frac{8}{9}x_p}$,或$t_1=\dfrac{3}{4}=\dfrac{x_P-3}{-\frac{8}{9}x_p}$得$x_P=\pm\dfrac{9}{5}$,$\therefore$存在，且点$P$的坐标为$(\dfrac{9}{5},-\dfrac{8}{5})$,或$(-\dfrac{9}{5},\dfrac{8}{5})$

变式 5. 已知$\triangle ABC$是双曲线$\Gamma:x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$的内接三角形，$M$是$\triangle ABC$的外接圆圆心，$O$为坐标原点，$k_{AB}$、$k_{BC}$、$k_{CA}$、$k_{OM}$依次为$AB$、$BC$、$CA$、$OM$的斜率，求证:$k_{AB}k_{BC}k_{CA}k_{OM}$为定值.



证明:而AB的中垂线方程为$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=(x-x_B)^2+(y-y_B)^2$

即$(x_A-x_B)x+(y_A-y_B)y=\dfrac{2}{3}(y_A^2-y_B^2)\cdots$①

AC的中垂线方程为:$(x_A-x_C)x+(y_A-y_C)y=\dfrac{2}{3}(y_A^2-y_C^2)\cdots$②

①$\cdot(y_A-y_C)-$②$\cdot(y_A-y_B)$得$x_M=\dfrac{2(y_A-y_B)(y_A-y_C)(y_B-y_C)}{3[(x_A-x_B)(y_A-y_C)-(x_A-x_C)(y_A-y_B)]}$,

②$\cdot(x_A-x_B)-$①$\cdot(x_A-x_C)$得$y_M=\dfrac{2(x_A-x_B)(x_A-x_C)(x_B-x_c)}{(x_A-x_B)(y_A-y_C)-(x_A-x_C)(y_A-y_B)}$

$$\therefore k_{AB}k_{BC}k_{CA}k_{OM}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}\cdot\frac{y_B-y_C}{x_B-x_C}\cdot\frac{y_A-y_C}{x_A-x_C}\cdot\frac{3(x_A-x_B)(x_A-x_C)(x_B-x_C)}{(y_A-y_B)(y_A-y_C)(y_B-y_C)}=3$$