平行与垂直解答（2）

2023-06-03

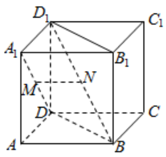
（2021 高考）6. 如图已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，M，N 分别是 A_1D，D_1B 的中点，则（A ）

A. 直线 A_1D 与直线 D_1B 垂直，直线 $MN//$ 平面 $ABCD$

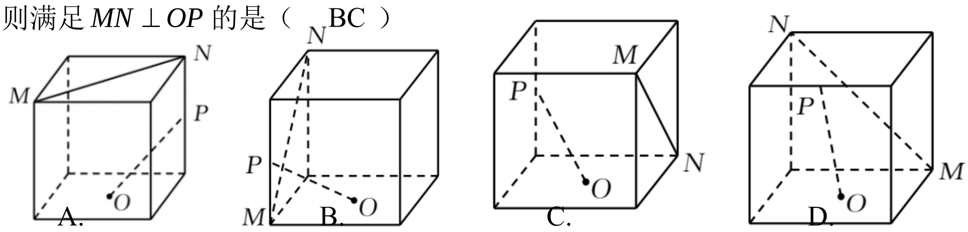
B. 直线 A_1D 与直线 D_1B 平行，直线 $MN\perp$ 平面 BDD_1B_1

C. 直线 A_1D 与直线 D_1B 相交，直线 $MN//$ 平面 $ABCD$

D. 直线 A_1D 与直线 D_1B 异面，直线 $MN\perp$ 平面 BDD_1B_1



（2021 新高考Ⅱ）10. 如图，在正方体中，O 为底面的中心，P 为所在棱的中点，M，N 为正方体的顶点．则满足 $MN\perp OP$ 的是（ BC ）



(2021新高考Ⅰ)12.在正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB=AA_1=1$，点P满足$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$，其中$\lambda\in[0,1],\mu\in[0,1]$,则（ ）

$A.$当$\lambda=1$时，$\triangle AB_1P$的周长为定值 $B.$当$\mu=1$时，三棱锥$P-A_1BC$的体积为定值

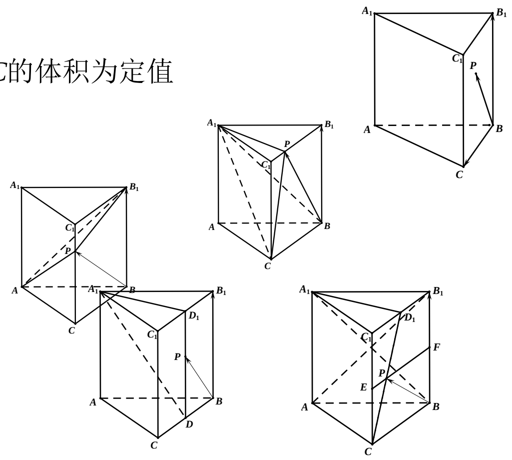
$C.$当$\lambda=\dfrac{1}{2}$时，有且仅有一个点P，使得$A_1P\perp BP$

$D.$当$\mu=\dfrac{1}{2}$时，有且仅有一个点P，使得$A_1B\perp$平面AB_1P

$key:B_1C_1//$平面$A_1BC,\therefore B$对

$A_1D_1\perp$平面$BCC_1B_1,\therefore A_1D_1\perp PB;BD\perp A_1D,P$在$D$时$PB\perp A_1P$

$A_1B\perp AB_1$,当P在E处，$A_1B\perp PB_1,\therefore D$对



（2022 乙）7. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为 AB,BC 的中点，则（ A ）

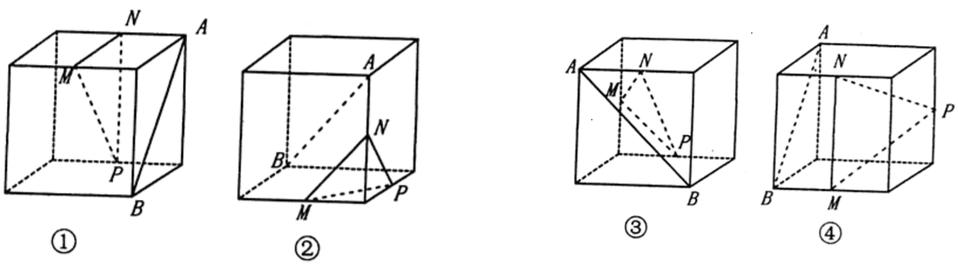
A. 平面 $B_1EF\perp$ 平面 BDD_1

B. 平面 $B_1EF\perp$ 平面 A_1BD

C. 平面 $B_1EF//$ 平面 A_1AC

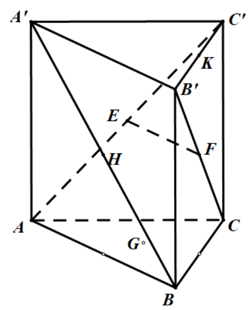
D. 平面 $B_1EF//$ 平面 A_1C_1D

变式1（1）①如图，下列正方体图形中，A、B为正方体的两个顶点，M、N、P分别为其所在棱的中点，能得出$AB//$平面PMN的图形序号是____.①③



②如图，在三棱柱$ABC-A'B'C'$中，点E、F、H、K分别为AC'、CB'、$A'B$、$B'C'$的中点，G为$\triangle ABC$的重心，从K、H、G、B'中取一点作为P，使得该三棱柱恰有2条棱与平面PEF平行，则P为（ ）

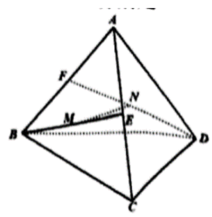
$A.K$　$B.H$　$C.G$　$D.B'$　　　C



平行与垂直解答（2）

2023-06-03

③如图，在正四面体 $A-BCD$ 中，E、F 分别是 AC、AB 的中点，M、N 分别是 BE、DF 的中点，则（ C ）



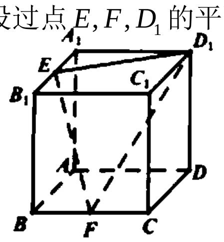
A 直线 BE 与 DF 垂直，直线 $MN//$ 平面 BCD

B. 直线 BE 与 DF 垂直，直线 MN 与平面 BCD 相交

C. 直线 BE 与 DF 异面且不垂直，直线 $MN//$ 平面 BCD

D. 直线 BE 与 DF 异面且不垂直，直线 MN 与平面 BCD 相交

④如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E,F 分别为 A_1B_1,BC 的中点, 设过点 E,F,D_1 的平面为 α, 则下列说法正确的是(D)



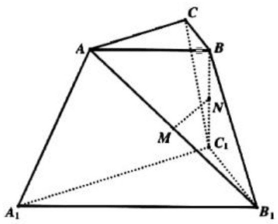
A. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 存在某条棱与平面 α 平行

B. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 存在某条面对角线与平面 α 平行

C. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 存在某条体对角线与平面 α 平行

D. 平面 α 截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得的截面为五边形

⑤如图，在正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=2$，$A_1B_1=4$，$AA_1=2\sqrt{5}$．M，N 分别是 AB_1，BC_1 的中点，则（ B ）



A．直线 $MN//$ 平面 ABC，直线 AB_1 与 BC_1 垂直

B．直线 $MN//$ 平面 ABC，直线 AB_1 与 BC_1 所成角的大小是 $\dfrac{\pi}{3}$

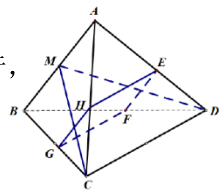
C．直线 MN 与平面 ABC 相交，直线 AB_1 与 BC_1 垂直

D．直线 MN 与平面 ABC 相交，直线 AB_1 与 BC_1 所成角的大小是 $\dfrac{\pi}{3}$

（3）①如图，在四面体$ABCD$中，$AB=CD=2, AD=BD=3, AC=BC=4,$

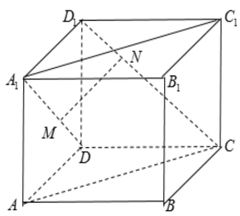
点E,F,G,H分别在棱AD,BD,BC,AC上，若直线AB,CD都与平面$EFGH$平行，

则四边形$EFGH$面积的最大值为________.1



key:取AB的中点M，则$AB\perp$平面CMD,$\therefore EFGH$是矩形

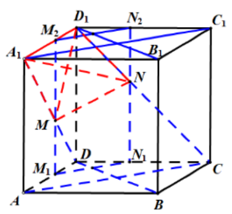
②如图，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为3，在面对角线A_1D上取点M，在面对角线CD_1上取点N,使得$MN//$平面AA_1C_1C，当线段MN长度取到最小值时，三棱锥A_1-MND_1的体积为_______.



key:过M作$M_1M_2//AA_1$交AD、A_1D_1于M_1、M_2,

作$M_2N_2//A_1C_1$交C_1D_1于N_2，作$N_2N_1//DD_1$交D_1C于N,交CD于N_1,

则平面$M_1N_1N_2M_2//$平面AA_1C_1C,$\therefore MN//$平面ACC_1A_1,

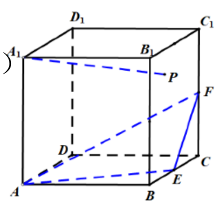


设$A_1M_2=x$,则$MN=\sqrt{(\sqrt{2}(3-x))^2+(2x-3)^2}=\sqrt{6x^2-24x+27}$

$=\sqrt{6(x-2)^2+3}\geq\sqrt{3}$(当且仅当$x=2$时取$=$)

$\therefore V_{A_1-MND_1}=V_{N-A_1D_1M}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot x\cdot 3\cdot(3-x)=1$

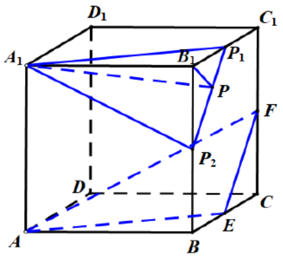
③在棱长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点E,F分别是棱BC,CC_1的中点，P是侧面BCC_1B_1内一点，若$A_1P//$平面AEF，则线段A_1P长度的取值范围为（ ）



$A.[1,\dfrac{\sqrt{5}}{2}]$ $B.[\dfrac{3\sqrt{2}}{4},\dfrac{\sqrt{5}}{2}]$ $C.[\dfrac{\sqrt{5}}{2},\sqrt{2}]$ $D.[\sqrt{2},\sqrt{3}]$

平行与垂直解答（2）

2023-06-03

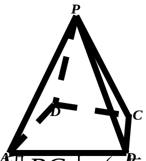


key:在面BCC_1B_1内，过P作$P_1P_1//EF$交BB_1、B_1C_1于P_2、P_1，

且P_1、P_2分别为B_1C_1、BB_1的中点，$\therefore A_1P\in[\dfrac{3\sqrt{2}}{4},\dfrac{\sqrt{5}}{2}]$

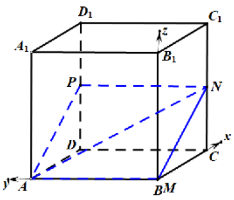
（2）一平面截四棱锥$P-ABCD$的侧面得到的截面可以是平行四边形吗？

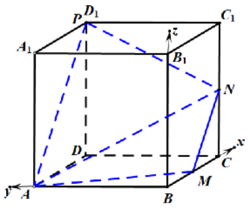
key:可以

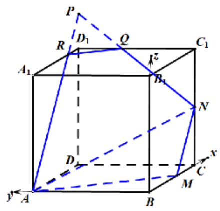


（3）①已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的体积为1,点M在线段BC上（点M异于点B,C),点N为线段CC_1的中点，若平面AMN截正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$所得的截面为四边形，则线段BM长的取值范围为_______.

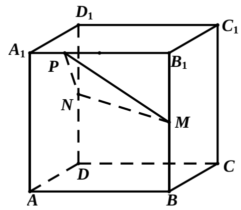
key:（临界位置）$BM\in(0,\dfrac{1}{2}]$







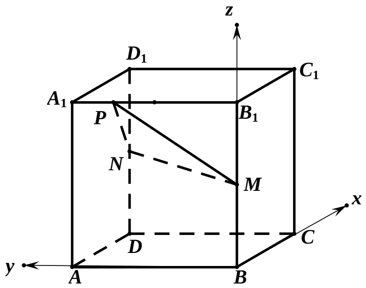
②如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，M,N分别是棱BB_1,DD_1的中点，P是棱A_1B_1上靠近A_1的四等分点,过M,N,P三点的平面α交棱BC于Q，记$\overrightarrow{BQ}=\lambda\overrightarrow{BC}$，则$\lambda=$__;若平面$\alpha$将正方体截成两部分体积分别为$V_1,V_2(V_1\geq V_2)$，则$\dfrac{V_1}{V_2}=$_____.1

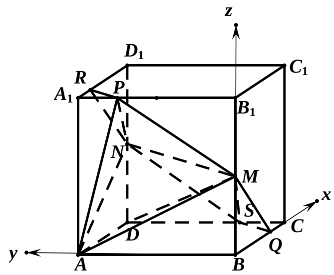


key:建立空间直角坐标系，如图，令$AB=4$,则$M(0,0,2),N(4,4,2),P(0,3,4)$

$Q(4\lambda,0,0)$，则$(4\lambda,0,0)=x(0,0,2)+y(4,4,2)+z(0,3,4)=(4y,4y+3z,2x+2y+4z)$

$$\therefore\begin{cases}4\lambda=4y\\4y+3z=0\\2x+2y+4z=0\\x+y+z=1\end{cases}\text{得}\begin{cases}x=\dfrac{11}{4}\\y=-\dfrac{3}{4},\\z=-1\\\lambda=\dfrac{3}{4}\end{cases}$$



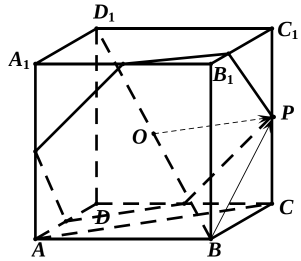


作$QS//MN$交CD于S，作$PR//MN$交A_1D_1于R,得截面为如图的六边形$MQSNRP$

$$V_1=V_{M-ABQSD}+V_{A-NPM}+V_{M-ADN}+V_{M-NSD}+V_{P-AA_1RN}=\frac{1}{3}\cdot\frac{31}{2}\cdot2+\frac{1}{3}\cdot7\cdot4+\frac{1}{3}\cdot4\cdot4+\frac{1}{3}\cdot3\cdot4+\frac{1}{3}\cdot9\cdot1=32,$$

$\therefore\dfrac{V_1}{V_2}=1$.或者由对称性得

③（海亮5月）9.已知点P在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$表面上运动,且$PB=PD_1$,则直线AC与BP所成角的余弦值取值范围是(　　)$A.[0,\dfrac{1}{2}]$　$B.[0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}]$　$C.[0,\dfrac{\sqrt{10}}{5}]$　$D.[0,\dfrac{\sqrt{15}}{5}]$　　C



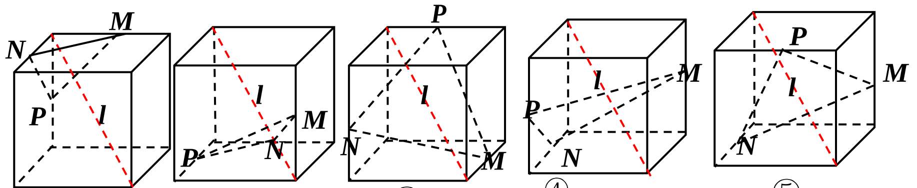
key:由已知得P的轨迹是BD_1的中垂面α,而$BD_1\perp AC,AC//\alpha$,

$$\therefore|\cos<\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BP}>|\leq\sin<\overrightarrow{BP},\overrightarrow{BD_1}>\leq\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

平行与垂直解答（2）

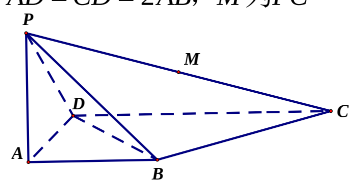
2023-06-03

变式 2（1）下列五个正方体图形中，l是正方体的一条对角线，点M、N、P分别为其所在棱的中点，能得出$l\perp$面MNP的图形序号是__________.①④⑤



① ② ③ ④ ⑤

（2）如图，四棱锥$P-ABCD$中，$AB\perp AD, CD\perp AD, PA\perp$底面$ABCD$，$PA=AD=CD=2AB$，$M$为$PC$的中点.试在平面$PAD$内找一点$N$，使$MN\perp$平面$PBD$.



（3）四面体$ABCD$中，A在平面BCD上的射影为O.

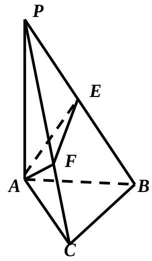
①若$AB=AC=AD$，则O是$\triangle BCD$的____心；外

②若A到BC、CD、DB的距离相等，则O是$\triangle BCD$的_____心；内心或旁心

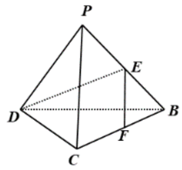
③若O是$\triangle BCD$的垂心，则D在平面ABC上的射影是$\triangle ABC$的________心. 垂

（4）①如图，在三棱锥$P-ABC$中，$PA\perp$底面ABC，$\angle ACB=90°$，$AE\perp PB$于E，$AF\perp PC$于F，若$PA=AB=1$，则当$\triangle AEF$的面积最大时，

$\tan\angle BPC=$_______. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



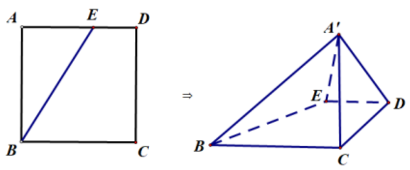
②在正三棱锥$P-BCD$中，E、F分别是PB、BC的中点，$EF\perp DE$，且$BC=\sqrt{2}$，则$P-BCD$的体积为________. $\dfrac{1}{6}$



③如图，已知点E是正方形$ABCD$的边AD上一动点（端点除外），现将$\triangle ABE$沿BE所在直线翻折成$\triangle A'BE$，并连接$A'C, A'D$.记二面角$A'-BE-C$的大小为$\alpha(0<\alpha<\pi)$.(　　)D

A.存在α,使得$BA'\perp$平面$A'DE$　B.存在α,使得$BA'\perp$平面$A'CD$

C.存在α,使得$EA'\perp$平面$A'CD$　D.存在α,使得$EA'\perp$平面$A'BC$



变式 3（1）已知经过圆柱O_1O_2旋转轴的给定平面α，A，B是圆柱O_1O_2侧面上且不在平面α上的两点，则下列判断正确的是（　　B　）

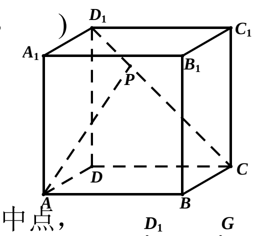
A．不一定存在直线l，$l\subset\alpha$且l与AB异面　　B．一定存在直线l，$l\subset\alpha$且$l\perp AB$

C．不一定存在平面β，$AB\subset\beta$且$\beta\perp\alpha$　　D．一定存在平面β，$AB\subset\beta$且$\beta//\alpha$

（2）①如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，P是线段CD_1上的动点，则(B　　)

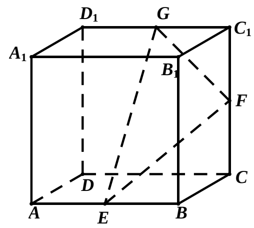
A. $AP//$平面BC_1D　B. $AP//$平面A_1BC_1

C. $AP\perp$平面A_1BD　D. $AP\perp$平面BB_1D_1



②如图，已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，E，F，G分别是AB, CC_1, C_1D_1的中点，则（ C　　）A. 直线A_1F与直线EG相交　　B. 直线$B_1D_1//$平面EFG

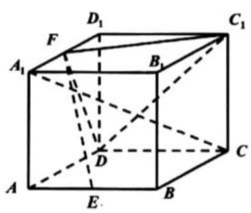
C. 直线BB_1与平面EFG相交　　D. 直线$A_1D\perp$平面EFG



③如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点 E,F 分别是 AB 和A_1D_1的中点，则下列说法正确的是(　B　　)

A. A_1C与EF共面, $A_1C//$平面FDC_1　　B. $A_1C\perp DC_1$, 且$A_1C//$平面FDC_1

C. A_1C与EF异面, $EF\perp$平面FDC_1　　D. $EF\perp DC_1$，且$EF\perp$平面FDC_1



2023-06-03

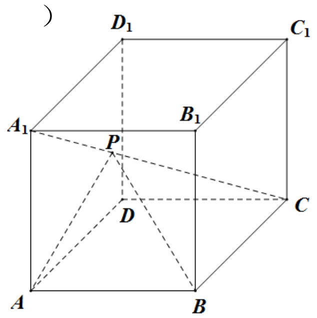
④已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, P 是直线 A_1C 上一点，（ A ）

A. 若 $\overrightarrow{A_1P}=\frac{1}{3}\overrightarrow{A_1C}$，则直线 $AP//$ 平面 BC_1D

B. 若 $\overrightarrow{A_1P}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1C}$，则直线 $AP//$ 平面 BC_1D

C. 若 $\overrightarrow{A_1P}=\frac{1}{3}\overrightarrow{A_1C}$，则直线 $BP\perp$ 平面 ACD_1

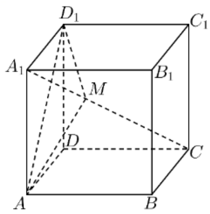
D. 若 $\overrightarrow{A_1P}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1C}$，则直线 $BP\perp$ 平面 ACD_1



⑤如图正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$\overrightarrow{A_1M}=\lambda\overrightarrow{A_1C}$，$\lambda\in[0,1]$，则下列说法不正确的是（ D ）

A. $\lambda=\frac{1}{3}$ 时，平面 $AMD_1//$ 平面 BC_1D　B. $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，平面 $AMD_1\perp$ 平面 B_1CD_1

C　$\triangle AMD_1$ 面积最大时，$\lambda=1$　　D. $\triangle AMD_1$ 面积最小时，$\lambda=\frac{1}{4}$



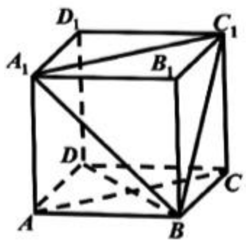
⑥（多选题）如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，则下列结论中正确的是(ABD)

A.若 E 是直线 AC 上的动点，则 $D_1E//$平面A_1BC_1；

B.若 E 是直线 AC 上的动点，则三棱锥 $E-A_1BC_1$ 的体积为定值 $\frac{1}{6}$；

C.平面 A_1BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的锐二面角的大小为 $\frac{\pi}{4}$

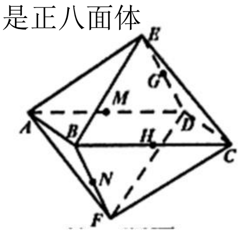
D.若 F 是直线 BD 上的动点，则 $D_1F\perp AC$.



（3）每个面均为正三角形的八面体称为正八面体，如图.若点 G、H、M、N 分别是正八面体 $ABCDEF$ 的棱 DE、BC、AD、BF 的中点，则下列结论正确的是（ C ）

A. $GH\perp$平面 FBC　B. GH 与 MN 是异面直线

C. $GH//$平面 EAB　D. MN 与 GH 是相交直线

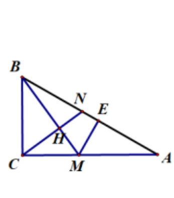


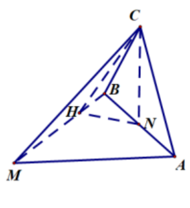
（4） 在$\triangle ABC$ 中，已知 $AB=2BC=4, AC=2\sqrt{3}$,点M在线段AC 上(不与端点重合)，将$\triangle ABM$ 沿直线 BM 翻折，使线段 AB 上存在一点 N，满足 $CN\perp$ 平面ABM.若$NB>\lambda$恒成立，则实数λ的最大值为( )A

A. 1　B. $\sqrt{3}$　C. 2　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

key:作$CH\perp BM$于H，连HN，

$\because CN\perp$平面$ABM,\therefore NH\perp MB,\therefore CH>HN,$

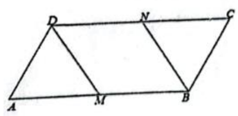


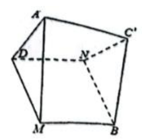


当$CH=HN$时，$NB=2$；当M接近A时，$NB\to 2\cos\frac{\pi}{3}=1,\therefore NB>1,\therefore \lambda\le 1$

（5）①如图，四边形$ABCD$为平行四边形，$AB=2AD=2,\angle DAB=60°,M,N$ 分别为AB,CD的中点，分别将$\triangle ADM$和$\triangle BCN$ 沿DM和BN折起，点A和点C折起后分别记为A',C'，得到如图几何体 $A'C'-BNDM$，则 A',C' 两点间的距离最小值为(A)

A. $\frac{1}{2}$　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　D.1





2023-06-03

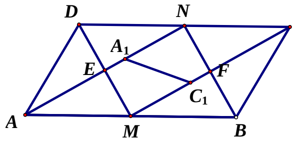
key:由已知得$\triangle ADM$与$\triangle CBN$都是正三角形,

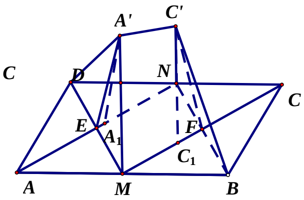
且$AN\perp DM, CM\perp BN$,令$AB=2$,如图,

作$A'A_1\perp EN$于A_1,则$A'A_1\perp$平面$ABCD$,

作$C'C_1\perp CM$于C_1,则$C'C_1\perp$平面$ABCD$,

设$\angle A'FA_1=\alpha, \angle C'FC_1=\beta$,





则$A'C'=\sqrt{\frac{3}{4}(\sin\alpha-\sin\beta)^2+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}(\cos\alpha-\cos\beta)^2}=\sqrt{\frac{7}{4}-\frac{3}{2}\cos(\alpha-\beta)}\ge\frac{1}{2}$

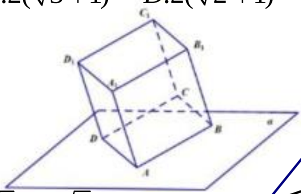
②如图，棱长为 4 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$,点A在平面α内,平面$ABCD$与平面α所成角为$30°$,则顶点C_1到平面α的距离的最大值是(　)$A.2(\sqrt{3}+\sqrt{2})$　$B.2(2+\sqrt{2})$　$C.2(\sqrt{3}+1)$　$D.2(\sqrt{2}+1)$

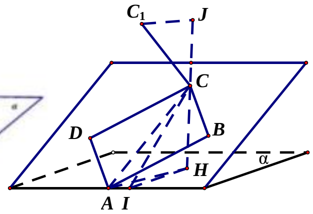
key:设平面$ABCD\cap A=l$,作$CH\perp\alpha$于H,作$HI\perp l$于I,连CI,

作$C_1J\perp CH$于J,$\therefore<\overrightarrow{CC_1},\overrightarrow{CJ}>=<$平面$ABCD,\alpha>=30°$

且$30°=\angle CIH\ge\angle CAH, CI\le CA=4\sqrt{2}$,

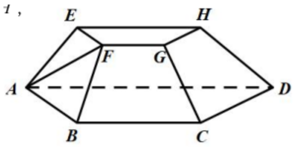
$\therefore C_1$到平面α的距离的最大值为$4\cdot\cos30°+4\sqrt{2}\cdot\sin30°=2\sqrt{3}+2\sqrt{2}$





4. 如图，在四棱台$ABCD-EFGH$中，$AF=BF$，$CD=2GH$，$EF\perp EH$．(1) 证明：$AB\perp DH$；

(2) 若$AB=AE=EH=HD$，求直线AF与平面$ADHE$所成角的正弦值.



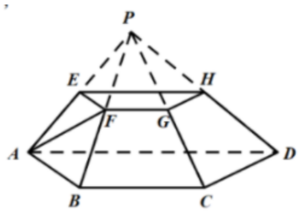
(I) 在四棱台$ABCD-EFGH$中，延长AE，BF，CG，DH交于点P，

由$CD=2GH$知，$PF=FB=FA$，则$PA\perp AB$.

由$AB\,//\,EF$，由$EF\perp EH$，得$AB\perp EH$，

则$AB\perp$平面PAD，故$AB\perp DH$，得证!

(II) 设$AB=AE=2$.则$EF=\frac{1}{2}AB=1$.



由于$AB\perp$平面PAD，则$FE\perp$平面PAD，

于是直线AF与平面$ADHE$所成角即$\angle FAE$.

又$EF\perp AE$，则$\sin\angle FAE=\frac{EF}{AF}=\frac{EF}{\sqrt{AE^2+EF^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.