2023-24（下）模拟（20）

2024-03-03

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合 $A=\{x\mid 2x^2+x-1<0\}$， $B=\{y\mid y=\lg(x^2+1)\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $(-1,0]$　　B. $[0,\frac{1}{2})$　　C. $(-\frac{1}{2},0]$　　D. $[0,1)$

2. 复数 z 满足 $2z+3\bar{z}=5-2i$，则 $|z|=$（　　）A. $\sqrt{3}$　B. 2　C. $\sqrt{5}$　D. $\sqrt{6}$

3. 已知 $ab\neq 1$， $\log_a m=2$， $\log_b m=3$，则 $\log_{ab} m=$（　　）A. $\frac{1}{6}$　B. $\frac{1}{5}$　C. $\frac{5}{6}$　D. $\frac{6}{5}$

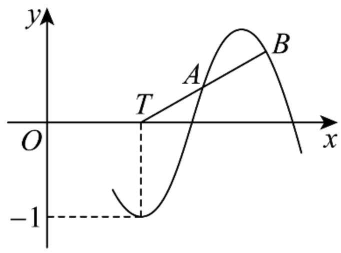
4. 将 3 个相同的红球和 3 个相同的黑球装入三个不同的袋中，每袋均装 2 个球，则不同的装法种数为（　　）

A. 7　　B. 8　　C. 9　　D. 10

5. 设抛物线 $y^2=2x$ 的焦点为 F，过抛物线上点 P 作其准线的垂线，设垂足为 Q，若 $\angle PQF=30^\circ$，则 $|PQ|=$（ ）

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. 法布里-贝罗研究多光束干涉在薄膜理论中的应用时，用光波依次透过 n 层薄膜，记光波的初始功率为 P_0，记 P_k 为光波经过第 k 层薄膜后的功率，假设在经过第 k 层薄膜时光波的透过率 $T_k=\frac{P_k}{P_{k-1}}=\frac{1}{2^k}$，其中 $k=1,2,3,\ldots,n$，为使得 $\frac{P_n}{P_0}\geq 2^{-2024}$，则 n 的最大值为（ ）A. 31　B. 32　C. 63　D. 64



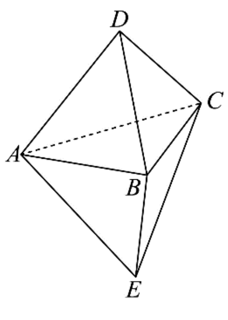
7. 如图，在函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 部分图象中，若 $\overrightarrow{TA}=\overrightarrow{AB}$，则点 A 的纵坐标为（　　）A. $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$　B. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　C. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$　D. $2-\sqrt{3}$

8. 在三棱锥 $P-ABC$ 中， $AB=2\sqrt{2}$， $PC=1$， $PA+PB=4$， $CA-CB=2$，且 $PC\perp AB$，则二面角 $P-AB-C$ 的余弦值的最小值为（　）A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　B. $\frac{3}{4}$　C. $\frac{1}{2}$　D. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分.

9. 已知向量 $\vec{a}=(\cos\theta,\sin\theta)$， $\vec{b}=(-3,4)$，则（　　）A. 若 $\vec{a}//\vec{b}$，则 $\tan\theta=-\frac{4}{3}$　B. 若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $\sin\theta=\frac{3}{5}$

C. $|\vec{a}-\vec{b}|$ 的最大值为 6　D. 若 $\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$，则 $|\vec{a}-\vec{b}|=2\sqrt{6}$



10. 将两个各棱长均为 1 的正三棱锥 $D-ABC$ 和 $E-ABC$ 的底面重合，得到如图所示的六面体，则（　）A. 该几何体的表面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　B. 该几何体的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$

C. 过该多面体任意三个顶点的截面中存在两个平面互相垂直　D. 直线 $AD//$ 平面 BCE

11. 已知函数 $f(x)=a(e^x+1)\ln(\frac{1+x}{1-x})-e^x+1$ 恰有三个零点，设其由小到大分别为 x_1,x_2,x_3，则（　　）

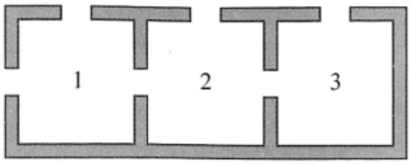
A. 实数a的取值范围是$(0,\frac{1}{e})$　B. $x_1+x_2+x_3=0$　C. 函数$g(x)=f(x)+kf(-x)$可能有四个零点　D. $\frac{f'(x_3)}{f'(x_1)}=e^{x_3}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 在$\triangle ABC$中，其内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，若$B=\frac{3\pi}{4}$，$b=6$，$a^2+c^2=2\sqrt{2}ac$，则$\triangle ABC$的面积为

__________.

13. 设椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$的左右焦点为$F_1$，$F_2$，过点$F_2$的直线与该椭圆交于$A,B$两点，若线段$AF_2$的中垂线过点$F_1$，则$|BF_2|=$__________.



14. “布朗运动”是指微小颗粒永不停息的无规则随机运动，在如图所示的试验容器中，容器由三个仓组成，某粒子作布朗运动时每次会从所在仓的通道口中随机选择一个到达相邻仓或者容器外，一旦粒子到达容器外就会被外部捕获装置所捕获，此时试验结束．已知该粒子初始位置在 1 号仓，则试验结束时该粒子是从 1 号仓到达容器外的概率为__________.

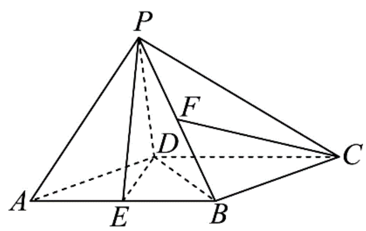
四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 各项均不为 0 的数列$\{a_n\}$对任意正整数n满足：$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\dots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=1-\frac{1}{2a_{n+1}}$.

（1）若$\{a_n\}$为等差数列，求a_1；（2）若$a_1=-\frac{2}{7}$，求$\{a_n\}$的前n项和S_n.

16. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形，$PA=PB$，$DA=DB=\sqrt{2}$，$AB=2$，$PD=1$，点 E,F 分别为 AB 和 PB 的中点．（1）证明：$CF\perp PE$；

（2）若 $PE=1$，求直线 CF 与平面 PBD 所成角的正弦值．



17. 随着科技发展的日新月异，人工智能融入了各个行业，促进了社会的快速发展．其中利用人工智能生成的虚拟角色因为拥有更低的人工成本，正逐步取代传统的真人直播带货．某公司使用虚拟角色直播带货销售金额得到逐步提升，以下为该公司自 2023 年 8 月使用虚拟角色直播带货后的销售金额情况统计．

年月	2023 年 8 月	2023 年 9 月	2023 年 10 月	2023 年 11 月	2023 年 12 月	2024 年 1 月
月份编号 x	1	2	3	4	5	6
销售金额 y / 万元	15.4	25.4	35.4	85.4	155.4	195.4

若 y 与 x 的相关关系拟用线性回归模型表示，回答如下问题：（1）试求变量 y 与 x 的样本相关系数 r（结果精确到 0.01）；（2）试求 y 关于 x 的经验回归方程，并据此预测 2024 年 2 月份该公司的销售金额．

附：经验回归方程 $y=\hat{b}x+a$，其中 $\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\bar{x}^2}$，$a=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$，样本相关系数

$r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\bar{y}^2}}$；参考数据：$\sum_{i=1}^{6}x_iy_i=2463.4$，$\sqrt{\sum_{i=1}^{6}(y_i-\bar{y})^2}=20\sqrt{70}$．

18. 已知双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左右焦点为 F_1， F_2，其右准线为 l，点 F_2 到直线 l 的距离为 $\frac{3}{2}$，过点 F_2 的动直线交双曲线 E 于 A,B 两点，当直线 AB 与 x 轴垂直时，$|AB|=6$.（1）求双曲线 E 的标准方程；

（2）设直线 AF_1 与直线 l 的交点为 P，证明：直线 PB 过定点.

19. 已知函数 $f(x)=\frac{e^x-1}{x}$.（1）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（2）证明： $f(x)$ 是其定义域上的增函数；（3）若 $f(x)>a^x$，其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$，求实数 a 的值.

解答

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合 $A=\{x|2x^2+x-1<0\}$， $B=\{y|y=\lg(x^2+1)\}$，则 $A\cap B=$（　B　）

A. $(-1,0]$　　B. $[0,\frac{1}{2})$　　C. $(-\frac{1}{2},0]$　　D. $[0,1)$

2. 复数 z 满足 $2z+3\bar{z}=5-2i$，则 $|z|=$（　C　）A. $\sqrt{3}$　B. 2　C. $\sqrt{5}$　D. $\sqrt{6}$

3. 已知 $ab\neq1$， $\log_a m=2$， $\log_b m=3$，则 $\log_{ab} m=$（　D　）A. $\frac{1}{6}$　B. $\frac{1}{5}$　C. $\frac{5}{6}$　D. $\frac{6}{5}$

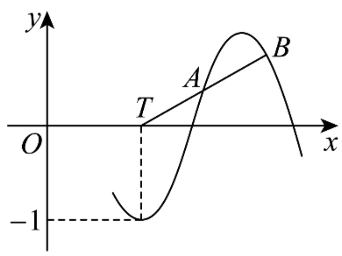
4. 将 3 个相同的红球和 3 个相同的黑球装入三个不同的袋中，每袋均装 2 个球，则不同的装法种数为（　A　）

A. 7　　B. 8　　C. 9　　D. 10

5. 设抛物线 $y^2=2x$ 的焦点为 F，过抛物线上点 P 作其准线的垂线，设垂足为 Q，若 $\angle PQF=30°$，则 $|PQ|=$（ A）

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. 法布里-贝罗研究多光束干涉在薄膜理论中的应用时，用光波依次透过 n 层薄膜，记光波的初始功率为 P_0，记 P_k 为光波经过第 k 层薄膜后的功率，假设在经过第 k 层薄膜时光波的透过率 $T_k=\frac{P_k}{P_{k-1}}=\frac{1}{2^k}$，其中 $k=1,2,3,\ldots,n$，为使得 $\frac{P_n}{P_0}\geq2^{-2024}$，则 n 的最大值为（　C）A. 31　B. 32　C. 63　D. 64



7. 如图，在函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 部分图象中，若 $\overrightarrow{TA}=\overrightarrow{AB}$，则点 A 的纵坐标为（　B　）A. $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$　B. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　C. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$　D. $2-\sqrt{3}$

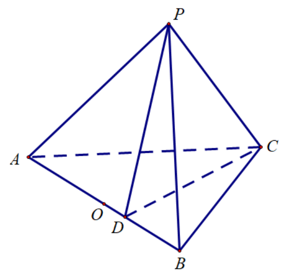
$$key:由\omega x+\varphi=\frac{3\pi}{2}得x_T=\frac{\frac{3\pi}{2}-\varphi}{\omega},\therefore f(x_A)=f(\frac{x_T+x_B}{2})=\sin(\frac{\omega}{2}(\frac{\frac{3\pi}{2}-\varphi}{\omega}+x_B)+\varphi)=\sin(\frac{3\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}+\frac{\omega}{2}x_B)$$

$$=\frac{1}{2}f(x_B)=\frac{1}{2}\sin(\omega x_B+\varphi)(记\frac{\varphi}{2}+\frac{\omega}{2}x_B=\theta)$$

$$则2\sin(\frac{3\pi}{4}+\theta)=2\cos(\frac{\pi}{4}+\theta)=\sin2\theta=-\cos(\frac{\pi}{2}+2\theta)=1-2\cos^2(\frac{\pi}{4}+\theta)$$

$$\therefore\cos(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{3}-1}{2},\therefore y_A=\frac{1}{2}\sin2\theta=-\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{2}+2\theta)=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

8. 在三棱锥 $P-ABC$ 中， $AB=2\sqrt{2}$， $PC=1$， $PA+PB=4$， $CA-CB=2$，且 $PC\perp AB$，则二面角 $P-AB-C$ 的余弦值的最小值为（　A　）A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　B. $\frac{3}{4}$　C. $\frac{1}{2}$　D. $\frac{\sqrt{10}}{5}$



$key:作PD\perp AB于D,\because PC\perp AB,\therefore AB\perp平面PDC,$

$\therefore\angle PDC是二面角P-AB-C的平面角,$

$\because CA-CB=2,PA+PB=4,\therefore C,P分别在以A,B为焦点的双曲线、椭圆上运动,$

$$设AB的中点为O，OD=x，则DP=\sqrt{2-\frac{x^2}{2}},DC=\sqrt{x^2-1}(1\le x\le 2)$$

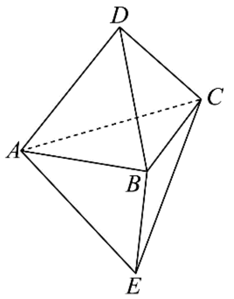
$$\therefore \cos\angle PDC=\frac{2-\frac{x^2}{2}+x^2-1-1}{2\sqrt{2-\frac{x^2}{2}}\cdot\sqrt{x^2-1}}=\frac{x^2}{4\sqrt{(2-\frac{x^2}{2})(x^2-1)}}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{x^4}{-\frac{1}{2}x^4+\frac{5}{2}x^2-2}}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{-2(\frac{1}{x^2})^2+\frac{5}{2}(\frac{1}{x^2})-\frac{1}{2}}}=\frac{1}{4\sqrt{-2(\frac{1}{x^2}-\frac{5}{8})^2+\frac{9}{32}}}\ge\frac{\sqrt{2}}{3}(x=\sqrt{\frac{8}{x}})$$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分.

9. 已知向量 $\vec{a}=(\cos\theta,\sin\theta)$，$\vec{b}=(-3,4)$，则（　ACD　）A. 若 $\vec{a}//\vec{b}$，则 $\tan\theta=-\frac{4}{3}$　B. 若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $\sin\theta=\frac{3}{5}$

C. $|\vec{a}-\vec{b}|$ 的最大值为 6D. 若 $\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$，则 $|\vec{a}-\vec{b}|=2\sqrt{6}$



10. 将两个各棱长均为 1 的正三棱锥 $D-ABC$ 和 $E-ABC$ 的底面重合，得到如图所示的六面体，则（AC ）A. 该几何体的表面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　B. 该几何体的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$

C. 过该多面体任意三个顶点的截面中存在两个平面互相垂直　D. 直线 $AD//$ 平面 BCE

11. 已知函数 $f(x)=a(e^x+1)\ln(\frac{1+x}{1-x})-e^x+1$ 恰有三个零点，设其由小到大分别为 x_1,x_2,x_3，则（BCD ）

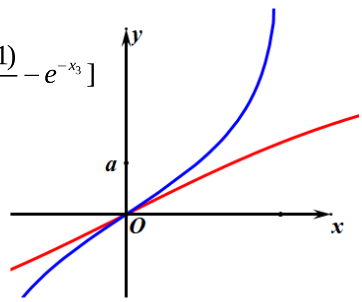
A. 实数 a 的取值范围是 $(0,\frac{1}{e})$　B. $x_1+x_2+x_3=0$　C. 函数 $g(x)=f(x)+kf(-x)$ 可能有四个零点 D. $\frac{f'(x_3)}{f'(x_1)}=e^{x_3}$

$$key: f(-x)=a(e^{-x}+1)\ln\frac{1-x}{1+x}-e^{-x}+1=-e^{-x}f(x)$$

$$\therefore g(x)=f(x)+k\cdot(-e^x)f(x)=f(x)\cdot(1-ke^x)=0\Leftrightarrow f(x)=0,or,k=e^{-x},可能由4个零点，C对；$$

$$而f(0)=0,\therefore x_1+x_3=0,x_2=0,\therefore x_1+x_2+x_3=0,B对$$

$$当x>0时，由\frac{1+x}{1-x}>0得0<x<1,且f'(x)=ae^x\ln\frac{1+x}{1-x}+a(e^x+1)\cdot\frac{-2x}{1-x^2}-e^x,$$



$$f'(x_3)-e^{x_3}f'(x_1)=ae^{x_3}\ln\frac{1+x_3}{1-x_3}+\frac{-2ax_3(e^{x_3}+1)}{1-x_3^2}-e^{x_3}-e^{x_3}[ae^{-x_3}\ln\frac{1-x_3}{1+x_3}+\frac{2ax_3(e^{-x_3}+1)}{1-x_3^2}-e^{-x_3}]$$

$$=ae^{x_3}\ln\frac{1+x_3}{1-x_3}+a\ln\frac{1+x_3}{1-x_3}-e^{x_3}+1=a(e^{x_3}+1)\ln\frac{1+x_3}{1-x_3}-e^{x_3}+1=0,\therefore D对；$$

$$且f(x)=0(0<x<1)\Leftrightarrow a\ln\frac{1+x}{1-x}=\frac{e^x-1}{e^x+1}=1-\frac{2}{e^x+1},如图，A错$$

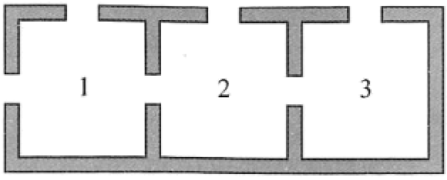
三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 在 $\triangle ABC$ 中，其内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，若 $B=\frac{3\pi}{4}$，$b=6$，$a^2+c^2=2\sqrt{2}ac$，则 $\triangle ABC$ 的面积为

__________．3

13. 设椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 的左右焦点为 F_1，F_2，过点 F_2 的直线与该椭圆交于 A,B 两点，若线段 AF_2 的中垂线过点 F_1，则 $|BF_2|=$__________． $\frac{10}{7}$

14. “布朗运动”是指微小颗粒永不停息的无规则随机运动，在如图所示的试验容器中，容器由三个仓组成，某粒子作布朗运动时每次会从所在仓的通道口中随机选择一个到达相邻仓或者容器外，一旦粒子到达容器外就会被外部捕获装置所捕获，此时试验结束．已知该粒子初始位置在 1 号仓，则试验结束时该粒子是从 1 号仓到达容器外的概率为________．$\frac{10}{13}$



key: 记第n次运动后在第1,2,3号仓的概率依次为a_n,b_n,c_n,

则由已知得$\begin{cases} a_n=\frac{1}{3}b_{n-1} \\ b_n=\frac{1}{3}a_{n-1}+\frac{1}{2}c_{n-1}, a_1=1, b_1=c_1=0, a_2=0, b_2=\frac{1}{3}, c_2=0, a_3=\frac{1}{9}, \\ c_n=\frac{1}{3}b_{n-1} \end{cases}$

$\therefore b_n=\frac{1}{3}a_{n-1}+\frac{1}{6}b_{n-2}, \therefore 3a_{n+1}=\frac{1}{3}a_{n-1}+\frac{1}{2}a_{n-1}$得$a_{n+1}=\frac{5}{18}a_{n-1}(n\ge 3)$

$\therefore a_{2k+1}=\frac{1}{9}(\frac{5}{18})^{k-1}(k\ge 1), a_{2k}=0, \therefore$ 所求概率为: $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}[(\frac{5}{18})^1\cdot\frac{1}{9}+(\frac{5}{18})^2\cdot\frac{1}{9}+\cdots]=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{5}{18}}=\frac{10}{13}$

【详解】设从 1 出发最终从 i 号口出的概率为 P_i，所以$\begin{cases} P_1=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}P_2 \\ P_2=\frac{1}{3}P_1+0+\frac{1}{3}P_3=\frac{1}{3}P_1+\frac{1}{6}P_2 \\ P_3=\frac{1}{2}P_2 \end{cases}$，解得 $P_1=\frac{10}{13}$.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15. 各项均不为 0 的数列$\{a_n\}$对任意正整数 n 满足：$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=1-\frac{1}{2a_{n+1}}$.

（1）若$\{a_n\}$为等差数列，求 a_1；（2）若 $a_1=-\frac{2}{7}$，求$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n.

【小问 1 详解】由题意$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=1-\frac{1}{2a_{n+1}}$,

当$n\ge 2, n\in N^*$时，$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=1-\frac{1}{2a_n}$,

两式相减得$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{2a_n}-\frac{1}{2a_{n+1}}\Rightarrow a_{n+1}-a_n=2, n\ge 2$,

因为$\{a_n\}$为等差数列，在式子：$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=1-\frac{1}{2a_n}$ 中令$n=1$,

得$\frac{1}{a_1a_2}=1-\frac{1}{2a_2}$，所以$a_2=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{2}$,

所以 $a_2-a_1=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{2}-a_1=2\Rightarrow a_1=-2$ 或 $a_1=\frac{1}{2}$，

若 $a_1=-2$，则 $a_2=0$，但这与 $a_n\neq 0$ 矛盾，舍去，所以 $a_1=\frac{1}{2}$.

【小问 2 详解】因为 $a_1=-\frac{2}{7}$，所以 $a_2=-\frac{7}{2}+\frac{1}{2}=-3$，

而当 $n\geq 2,n\in \mathrm{N}^*$ 时，$a_{n+1}-a_n=2$，所以此时 $a_n=-3+2(n-2)=2n-7$，

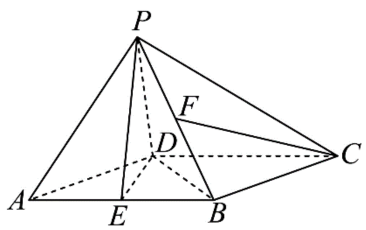
所以此时 $S_n=-\frac{2}{7}+\frac{(n-1)(-3+2n-7)}{2}=n^2-6n+\frac{33}{7}$，

而 $n=1$ 也满足上式，

综上所述，$\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2-6n+\frac{33}{7}$.

16. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形，$PA=PB$，$DA=DB=\sqrt{2}$，$AB=2$，$PD=1$，点 E,F 分别为 AB 和 PB 的中点.（1）证明：$CF\perp PE$；

（2）若 $PE=1$，求直线 CF 与平面 PBD 所成角的正弦值.



【小问 1 详解】取 PE 的中点 G，连接 DG,FG，

由 $DA=DB=\sqrt{2},AB=2$，易知 $\triangle DAB$ 为等腰直角三角形，

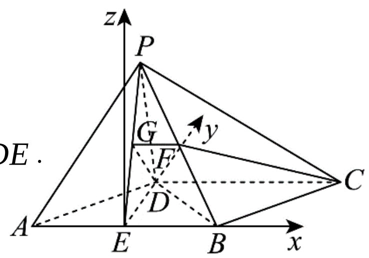
此时 $DE=1$，又 $PD=1$，所以 $PE\perp DG$.

因　$PA=PB$,所以 $PE\perp AB$，

由 $FG//EB$，即 $FG//AB$，所以 $PE\perp FG$，

此时，$CD//AB//FG$,有 C,D,G,F 四点共面，$FG\cap DG=G$，

所以 $PE\perp$ 平面 $CDGF$，又 $CF\subset$ 平面 $CDGF$，所以 $CF\perp PE$.



【小问 2 详解】由 $AB\perp PE,AB\perp DE,$ 且 $PE\cap DE=E$,所以 $AB\perp$ 平面 PDE.

由 $PE=DE=PD=1$，得 $\triangle PDE$　等边三角形，

以 E 为原点，EB,ED 所在直线分别为 x 轴，y 轴，过 E 且与平面 $ABCD$ 垂直的直线为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，

$P\left(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),D(0,1,0),B(1,0,0),C(2,1,0),F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$,

$\overrightarrow{DP}=\left(0,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\overrightarrow{DB}=(1,-1,0)$，设平面 PBD 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DP}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0\\ x-y=0\end{cases}$，取 $z=1$，$\vec{n}=(\sqrt{3},\sqrt{3},1)$，

又 $\overrightarrow{FC}=\left(\frac{3}{2},\frac{3}{4},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$，设直线 CF 与平面 PBD 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{FC}\right\rangle\right|=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{FC}\right|}{|\vec{n}|\cdot\left|\overrightarrow{FC}\right|}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，所以直线 CF 与平面 PBD 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

17. 随着科技发展的日新月异，人工智能融入了各个行业，促进了社会的快速发展．其中利用人工智能生成的虚拟角色因为拥有更低的人工成本，正逐步取代传统的真人直播带货．某公司使用虚拟角色直播带货销售金额得到逐步提升，以下为该公司自 2023 年 8 月使用虚拟角色直播带货后的销售金额情况统计．

年月	2023 年 8 月	2023 年 9 月	2023 年 10 月	2023 年 11 月	2023 年 12 月	2024 年 1 月
月份编号 x	1	2	3	4	5	6
销售金额 y / 万元	15.4	25.4	35.4	85.4	155.4	195.4

若 y 与 x 的相关关系拟用线性回归模型表示，回答如下问题：

（1）试求变量 y 与 x 的样本相关系数 r（结果精确到 0.01）；

（2）试求 y 关于 x 的经验回归方程，并据此预测 2024 年 2 月份该公司的销售金额．

附：经验回归方程 $y=\hat{b}x+a$，其中 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\bar{x}^2}$，$a=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$，

样本相关系数 $r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\bar{y}^2}}$；

参考数据：$\sum_{i=1}^{6}x_iy_i=2463.4$，$\sqrt{\sum_{i=1}^{6}(y_i-\bar{y})^2}=20\sqrt{70}$.

【小问 1 详解】$\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=\frac{7}{2},\bar{y}=\frac{15.4+25.4+35.4+85.4+155.4+195.4}{6}=85.4$，

$\sum_{i=1}^{6}x_i^2-6\bar{x}^2=1+4+9+16+25+36-6\times\frac{49}{4}=17.5$，

所以$r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{6}x_iy_i-6\overline{xy}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{6}x_i^2-6\overline{x}^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{6}y_i^2-6\overline{y}^2}}=\dfrac{2463.4-6\times\frac{7}{2}\times85.4}{\sqrt{17.5}\times20\sqrt{70}}=\dfrac{670}{20\times35}\approx0.96$.

【小问 2 详解】

由题意$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{6}x_iy_i-6\overline{xy}}{\sum\limits_{i=1}^{6}x_i^2-6\overline{x}^2}=\dfrac{2463.4-6\times\frac{7}{2}\times85.4}{17.5}\approx38.3$，所以$a=85.4-\dfrac{7}{2}\times38.3=-48.7$，

所以y关于x的经验回归方程为$y=38.3x-48.7$，

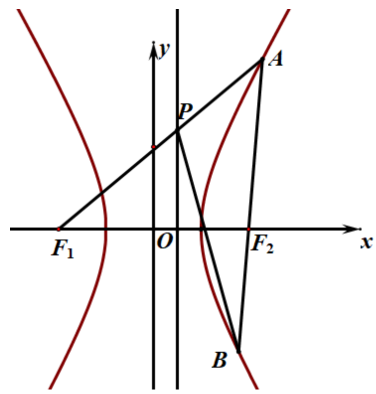
所以预测 2024 年 2 月份该公司的销售金额为$y=38.3\times7-48.7=219.4$万元.

18. 已知双曲线$E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左右焦点为$F_1$，$F_2$，其右准线为$l$，点$F_2$到直线$l$的距离为$\dfrac{3}{2}$，过点$F_2$的动直线交双曲线$E$于$A,B$两点，当直线$AB$与$x$轴垂直时，$|AB|=6$.（1）求双曲线$E$的标准方程;

（2）设直线AF_1与直线l的交点为P，证明：直线PB过定点.

（1）解：由已知得$\begin{cases}c-\dfrac{a^2}{c}=\dfrac{3}{2},\\ \dfrac{2b^2}{a}=6\end{cases}$得$c=2,a=1,b=\sqrt{3}$,$\therefore$双曲线$E$的方程为$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$

（2）证明：设$l_{AB}:x=ty+2$代入E方程得$:(3t^2-1)y^2+12ty+9=0$



$\therefore\begin{cases}y_A+y_B=-\dfrac{12t}{3t^2-1}\\ y_Ay_B=\dfrac{9}{3t^2-1}\end{cases}$,且$3t^2-1\neq0$,且$\dfrac{y_Ay_B}{y_A+y_B}=\dfrac{3}{-4t}$即$4ty_Ay_B=-3(y_A+y_B)$

由$l_{AF_1}:y=\dfrac{y_A}{x_A+2}(x+2)$令$x=\dfrac{1}{2}$得$y_P=\dfrac{5y_A}{2(x_A+2)}=\dfrac{5y_A}{2(ty_A+4)}$

$\therefore k_{PB}=\dfrac{y_B-\dfrac{5y_A}{2(ty_A+4)}}{x_B-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{2ty_Ay_B-5y_A+8y_B}{2(ty_A+4)(ty_B+2)-ty_A-4}=\dfrac{2ty_Ay_B-5y_A+8y_B}{2t^2y_Ay_B+3ty_A+8ty_B+12}$

$=\dfrac{-\dfrac{3}{2}(y_A+y_B)-5y_A+8y_B}{-\dfrac{3t}{2}(y_A+y_B)+3ty_A+8ty_B+12}=\dfrac{13(y_B-y_A)}{3ty_A+13ty_B+24}$

$\therefore l_{PB}:y-y_B=\dfrac{13(y_B-y_A)}{3ty_A+13ty_B+24}(x-ty_B-2)$即$y=\dfrac{13(y_B-y_A)x}{3ty_A+13ty_B+24}-(ty_B+2)\dfrac{13(y_B-y_A)}{3ty_A+13ty_B+24}+y_B$

$=\dfrac{13(y_B-y_A)x}{3ty_A+13ty_B+24}+\dfrac{14(y_A-y_B)}{3ty_A+13ty_B+24}=\dfrac{y_A-y_B}{3ty_A+13ty_B+24}(-13x+14)$经过定点$(\dfrac{14}{13},0)$,证毕

$key2:$ 设$A(\frac{s^2+1}{2s},\frac{\sqrt{3}(s^2-1)}{2s}),B(\frac{t^2+1}{2t},\frac{\sqrt{3}(t^2-1)}{2t}),$

由A,F_2,B三点共线得$:\dfrac{\frac{\sqrt{3}(s^2-1)}{2s}-\frac{\sqrt{3}(t^2-1)}{2t}}{\frac{s^2+1}{2s}-\frac{t^2+1}{2t}}=\dfrac{\sqrt{3}(st+1)}{st-1}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}(s^2-1)}{2s}}{\frac{s^2+1}{2s}-2}$即$t=\dfrac{s-2}{2s-1}$

$\therefore B(\frac{5s^2-8s+5}{2(s-2)(2s-1)},\frac{-3\sqrt{3}(s^2-1)}{2(s-2)(2s-1)})$

由A,F_1,P三点共线得$:\dfrac{\frac{\sqrt{3}(s^2-1)}{2s}}{\frac{s^2+1}{2s}+2}=\dfrac{y_P}{\frac{5}{2}}$得$y_P=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{s^2-1}{s^2+4s+1}$

由$P,B,M(x,0)$三点共线得$\dfrac{\frac{-3\sqrt{3}(s^2-1)}{2(s-2)(2s-1)}}{\frac{5s^2-8s+5}{2(s-2)(2s-1)}-x}=\dfrac{\frac{5\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{s^2-1}{s^2+4s+1}}{\frac{1}{2}-x}$得$(26s^2-26s+26)x=28s^2-28s+28$

$\therefore x=\frac{14}{13},\therefore$ 直线PB经过定点$(\frac{14}{13},0)$

$key3:$（陈江淮）证明：设$l_{AB}:x=ty+2$代入E方程得$:(3t^2-1)y^2+12ty+9=0$

$\therefore\begin{cases}y_A+y_B=-\dfrac{12t}{3t^2-1}\\ y_Ay_B=\dfrac{9}{3t^2-1}\end{cases}$，且$3t^2-1\neq0$，且$\dfrac{y_Ay_B}{y_A+y_B}=\dfrac{3}{-4t}$即$4ty_Ay_B=-3(y_A+y_B)$

则$l_{AF_1}:y=\dfrac{y_A}{x_A+2}(x+2)$令$x=\dfrac{1}{2}$得$y_P=\dfrac{5y_A}{2(x_A+2)}$

设BP与x轴的交点为$N(n,0)$，则$l_{BP}:y=\dfrac{y_B}{x_B-n}(x-n)$令$x=\dfrac{1}{2}$得$y_P=\dfrac{(\frac{1}{2}-n)y_B}{x_B-n}$

$\therefore\dfrac{5y_A}{2(x_A+2)}=\dfrac{(\frac{1}{2}-n)y_B}{x_B-n}\Leftrightarrow5(ty_Ay_B+2y_A-ny_A)=(1-2n)(ty_Ay_B+4y_B)$

$\Leftrightarrow(-5y_A+2ty_Ay_B+8y_B)n=-4ty_Ay_B-10y_A+4y_B$

$\Leftrightarrow(-5y_A+8y_B-\frac{3}{2}(y_A+y_B))n=3y_A+3y_B-10y_A+4y_B$

$\Leftrightarrow\frac{13}{2}(-y_A+y_B)n=7(-y_A+y_B),\therefore n=\frac{14}{13}.\therefore PB$经过定点$(\frac{14}{13},0)$。

注：方法二与方法三的前提是感觉PB经过x轴上的定点

19. 已知函数 $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$．（1）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（2）证明：$f(x)$ 是其定义域上的增函数；（3）若 $f(x)>a^x$，其中 $a>0$ 且 $a\neq1$，求实数 a 的值．

(1) 解：由$f'(x)=\dfrac{(x-1)e^x+1}{x^2}$得曲线$y=f(x)$在$x=1$处的切线方程为$y-(e-1)=x-1$即$y=x+e-2$

（2）证明：由（1）得：$f'(x)=\dfrac{(x-1)e^x+1}{x}$

当$x>0$时，$f'(x)\ge 0\Leftrightarrow 0\le (x-1)e^x+1$记为$p(x)$，则$p'(x)=xe^x>0,$

$\therefore p(x)>p(0)=0,\therefore f'(x)>0,\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上递增

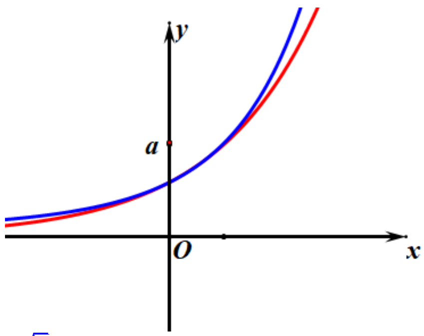
当$x<0$时，$f'(x)\ge 0\Leftrightarrow 0\ge (x-1)e^x+1$记为$p(x)$，则$p'(x)=xe^x<0$

$\therefore p(x)<p(0)=0,\therefore f'(x)>0,\therefore f(x)$在$(-\infty,0)$上递增，

而$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{1}=1,\therefore f(x)$在其定义域$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上递增

（3）解：由（2）得：$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0,$且$f(x)$在$x\in(-\infty,0)$上递增，且$f(x)\in(0,1),$

$f(x)$在$(0,+\infty)$上递增，且$f(x)\in(1,+\infty)$



当$0<a<1$，且$x<0$时，$a^x>1>\underset{x\in(0,1)}{f(x)}$，不合，$\therefore a>1,$

当$x>0$时，$f(x)>a^x\Leftrightarrow e^x-1>xa^x\Leftrightarrow 0<e^x-1-xa^x$记为$p(x),$

则$p'(x)=e^x-a^x-xa^x\ln a,\ p''(x)=e^x-2a^x\ln a-xa^x\ln^2 a$

而$p(0)=0,\ p'(0)=0,\therefore p''(0)=1-2\ln a\ge 0$得$1<a\le\sqrt{e},$

当$x<0$时，$f(x)>a^x\Leftrightarrow e^x-1<xa^x\Leftrightarrow 0>e^x-1-xa^x$记为$p(x),$

则$p'(x)=e^x-a^x-xa^x\ln a,\ p''(x)=e^x-2a^x\ln a-xa^x\ln^2 a$

而$p(0)=0,\ p'(0)=0,\therefore p''(0)=1-2\ln a\le 0$得$a\ge\sqrt{e}.\therefore a=\sqrt{e}$，经检验：$a=\sqrt{e}.$

解法二：由（2）可知，$x<0$时，$f(x)<1$，所以$a^x<1$，故$a>1$，

令$a=\mathrm{e}^k,k>0$，$F(x)=\mathrm{e}^{(1-k)x}-\mathrm{e}^{-kx}-x$，

由题意$x<0$时，$F(x)<0$，$x>0$时，$F(x)>0$，

若$k\ge 1$，则当$x>1$时，$F(x)=\mathrm{e}^{(1-k)x}-\mathrm{e}^{-kx}-x\le 1-\mathrm{e}^{-kx}-x<0$，不满足条件，所以$0<k<1$，

而$F'(x)=(1-k)\mathrm{e}^{(1-k)x}+k\mathrm{e}^{-kx}-1$，

令$G(x)=F'(x)$，则$G'(x)=(1-k)^2\mathrm{e}^{(1-k)x}-k^2\mathrm{e}^{-kx}=\mathrm{e}^{-kx}\left[(1-k)^2\mathrm{e}^x-k^2\right]$ ，

令$G'(x)=0$，得$x=2\ln\dfrac{k}{1-k}$，

$F'(x)$在$\left(-\infty,2\ln\dfrac{k}{1-k}\right)$单调递减，在$\left(2\ln\dfrac{k}{1-k},+\infty\right)$单调递增，

若$2\ln\dfrac{k}{1-k}<0$，则当$2\ln\dfrac{k}{1-k}<x<0$时，$F'(x)<F'(0)=0$，$F(x)$单调递减，此时$F(x)>F(0)=0$，不满足题意；

若$2\ln\dfrac{k}{1-k}>0$，则当$0<x<2\ln\dfrac{k}{1-k}$时，$F'(x)<F'(0)=0$，$F(x)$单调递减，此时$F(x)<F(0)=0$，不

满足题意；

若$2\ln\dfrac{k}{1-k}=0$，则当$x<0$时，$F'(x)>F'(0)=0$，$F(x)$单调递增，此时$F(x)<F(0)=0$，

且当$x>0$时，$F'(x)>F'(0)=0$，$F(x)$单调递增，此时$F(x)>F(0)=0$，满足题意，

所以$2\ln\dfrac{k}{1-k}=0$，解得$k=\dfrac{1}{2}$，综上所述，$a=\sqrt{\mathrm{e}}$．