2023-24（下）模拟（17）

2024-02-27

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．已知集合 $A=\{1,3,5,7,9\}, B=\{3,6,9,12\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$\{3,9\}$　　B．$\{1,3,5,6,7,9,12\}$　　C．$\{1,5,7\}$　　D．$\{6,12\}$

2．已知平面向量 $\vec{a}=(1,m), \vec{a}=(-2,4)$，且 $\vec{a}//\vec{b}$，则 $m=$（　　）A．2　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$-\frac{1}{2}$　　D．-2

3．已知曲线 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{m}=1(m\neq 0)$，则“$m\in(0,4)$”是“曲线 C 的焦点在 x 轴上”的（　　）

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件　C．充要条件　D．既不充分也不必要条件

4．在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c 已知 $a=a\cos B+b\cos A=1, \sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则（　　）

A．$b=1$　　B．$b=\sqrt{2}$　　C．$c=\sqrt{2}$　　D．$c=\sqrt{3}$

5．记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 是等差数列，$S_2=-8, S_6=0$，则 $a_3+a_4=$（　　）

A．-8　　B．-4　　C．0　　D．4

6．$(1-x+x^2)^2\cdot(1+x)^3$ 的展开式中，x^4 的系数为（　　）A．1　　B．2　　C．4　　D．5

7．在一组样本数据中，1，2，3，4 出现的频率分别为 p_1,p_2,p_3,p_4，且 $\sum_{i=1}^{4}p_i=1$，则下面四种情形中，对应样本的标准差最小的一组是（　　）A．$p_1=0.1, p_2=0.2, p_3=0.3, p_4=0.4$　　B．$p_1=0.4, p_2=0.3, p_3=0.2, p_4=0.1$

C．$p_1=p_4=0.1, p_2=p_3=0.4$　　D．$p_1=p_4=0.4, p_2=p_3=0.1$

8．已知抛物线 $C:y^2=4x$，过其焦点 F 的直线交 C 于 A，B 两点，M 为 AB 中点，过 M 作准线的垂线，垂足为 N，若 $|AF|=4$，则 $|NF|=$（　　）A．$\frac{4}{3}$　　B．$\frac{4\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{8}{3}$　　D．$\frac{8\sqrt{3}}{3}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9．已知函数 $f(x)=\sin(\omega x-\frac{\pi}{6})(\omega>0)$ 在区间 $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$ 上单调递增，则 ω 的值可以是（　　）

A．$\frac{2}{3}$　　B．1　　C．$\frac{4}{3}$　　D．$\frac{3}{2}$

10．科学研究表明，物体在空气中冷却的温度变化是有规律的．如果物体的初始温度为 $\theta_1 ℃$，空气温度 $\theta_0 ℃$ 保持不变，则 t 分钟后物体的温度 θ（单位：℃）满足：$\theta=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)e^{-0.05t}$．若空气温度为 $10℃$，该物体温度从 $\theta_1 ℃$（$90\le\theta_1\le100$）下降到 30℃，大约所需的时间为 t_1，若该物体温度从 $70℃$，$50℃$ 下降到 $30℃$，大约所需的时间分别为 t_2,t_3，则（　　）（参考数据：$\ln 2\approx0.7, \ln 3\approx1.1$）

A．$t_2=20$　　B．$28\le t_1\le30$　　C．$t_1\ge 2t_3$　　D．$t_1-t_2\le6$

11．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 4，点 N 是底面正方形 $ABCD$ 内及边界上的动点，点 M 是棱 DD_1 上的动点（包括点 D，D_1），已知 $MN=4$，P 为 MN 中点，则下列结论正确的是（　　）

A．无论 M，N 在何位置，AP，CC_1 为异面直线

B．若 M 是棱 DD_1 中点，则点 P 的轨迹长度为 $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

C．M，N 存在唯一的位置，使 $A_1P//$ 平面 AB_1C

D．AP 与平面 A_1BCD_1 所成角的正弦最大值为 $\frac{1}{2}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12．函数 $f(x)=\frac{\sqrt{1-x}}{\lg x}$ 的定义域为__________.

13．已知曲线 $C:x^2+(y-m)^2=2$ 和 $C_1:y=x+2, C_2:y=|x|+2$，若 C 与 C_1 恰有一个公共点，则实数 $m=$_________；若 C 与 C_2 恰有两个公共点，则实数 m 的取值范围是_________.

14．已知 $\triangle ABC$ 的角 A，B，C 满足 $\tan A\tan B\tan C\le[\tan A]+[\tan B]+[\tan C]$，其中符号 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数，若 $A\le B\le C$，则 $\tan C-\tan B=$_________.

四、解答题：本题共 5 个小题，共 77 分.解答应写出说明文字、证明过程或演算步骤.

15.（13 分）已知双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左顶点是 $A(-1,0)$，一条渐近线的方程为 $y=x$.

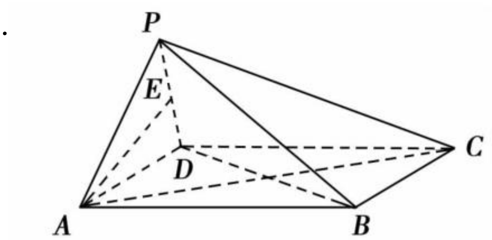
（1）求双曲线 E 的离心率；（2）设直线 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 与双曲线 E 交于点 P，Q，求线段 PQ 的长.

16．（15 分）寒假期间小明每天坚持在“跑步 3000 米”和“跳绳 2000 个”中选择一项进行锻炼，在不下雪的时候，他跑步的概率为60%，跳绳的概率为40%，在下雪天，他跑步的概率为20%，跳绳的概率为80%．若前一天不下雪，则第二天下雪的概率为50%，若前一天下雪，则第二天仍下雪的概率为40%．已知寒假第一天不下雪，跑步 3000 米大约消耗能量 330 卡路里，跳绳 2000 个大约消耗能量 220 卡路里．记寒假第 n 天不下雪的概率为 P_n．

（1）求 p_1,p_2,p_3 的值，并证明$\{p_n-\dfrac{6}{11}\}$是等比数列；（2）求小明寒假第 n 天通过运动锻炼消耗能量的期望．

17．（15 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形，侧面 PAD 是以 PD 为底的等腰三角形，$AB=PB=2PA=4,AC=2\sqrt{7}$，E 在 PD 上，$AE\perp BD$．

（1）证明：平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$;（2）求二面角 $P-BC-A$ 的余弦值．



18．（17 分）已知函数 $f(x)=\dfrac{a\sin x}{x},a\in R$．（1）当 $a=1,x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 时，证明： $\tan x>x>xf(x)$；

（2）若 $\forall x\in(-\dfrac{\pi}{2},0)\cup(0,\dfrac{\pi}{2}),\dfrac{x}{\tan x}<f(x)$，求实数 a 的取值范围．

19．（17 分）对于无穷数列 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，我们称 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{n!}x^n=a_0+a_1x+\dfrac{a_2}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{a_n}{n!}x^n+\cdots$（规定 $0!=1$）为无穷数列 $\{a_n\}$ 的指数型母函数．无穷数列 $1,1,\cdots,1,\cdots$ 的指数型母函数记为 $e(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}x^n=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots$，它具有性质 $e(x)e(y)=e(x+y)$．(1)证明：$e(-x)=\dfrac{1}{e(x)}$；(2)记 $c(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^k\dfrac{x^{2k}}{(2k)!}+\cdots$．证明：$c(x)=\dfrac{e(ix)+e(-ix)}{2}$（其中 i 为虚数单位）；（3）以函数 $\dfrac{x}{e(x)-1}$ 为指数型母函数生成数列 $\{B_n\}$，$\dfrac{x}{e(x)-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{B_n}{n!}x^n=B_0+B_1x+\dfrac{B_2}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{B_n}{n!}x^n+\cdots$．其中 B_n 称为伯努利数．证明：$B_1=-\dfrac{1}{2}$．且 $B_{2k+1}=0(k=1,2,3,\cdots)$．

2023-24（下）模拟（17）

2024-02-27

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．已知集合 $A=\{1,3,5,7,9\},B=\{3,6,9,12\}$，则 $A\cap B=$（　A　）

A．$\{3,9\}$　　B．$\{1,3,5,6,7,9,12\}$　　C．$\{1,5,7\}$　　D．$\{6,12\}$

2．已知平面向量 $\vec{a}=(1,m),\vec{a}=(-2,4)$，且 $\vec{a}//\vec{b}$，则 $m=$（　D　）A．2　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$-\frac{1}{2}$　　D．-2

3．已知曲线 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{m}=1(m\neq 0)$，则“$m\in(0,4)$”是“曲线 C 的焦点在 x 轴上”的（　A　）

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件　C．充要条件　D．既不充分也不必要条件

4．在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c 已知 $a=a\cos B+b\cos A=1,\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则（　B　）

A．$b=1$　　B．$b=\sqrt{2}$　　C．$c=\sqrt{2}$　　D．$c=\sqrt{3}$

5．记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 是等差数列，$S_2=-8,S_6=0$，则 $a_3+a_4=$（　C　）

A．-8　　B．-4　　C．0　　D．4

6．$(1-x+x^2)^2\cdot(1+x)^3$ 的展开式中，x^4 的系数为（　B　）A．1　　B．2　　C．4　　D．5

7．在一组样本数据中，1，2，3，4 出现的频率分别为 p_1,p_2,p_3,p_4，且 $\sum_{i=1}^{4}p_i=1$，则下面四种情形中，对应样本的标准差最小的一组是（　C　）A．$p_1=0.1,p_2=0.2,p_3=0.3,p_4=0.4$　　B．$p_1=0.4,p_2=0.3,p_3=0.2,p_4=0.1$

C．$p_1=p_4=0.1,p_2=p_3=0.4$　　D．$p_1=p_4=0.4,p_2=p_3=0.1$

8．已知抛物线 $C:y^2=4x$，过其焦点 F 的直线交 C 于 A，B 两点，M 为 AB 中点，过 M 作准线的垂线，垂足为 N，若 $|AF|=4$，则 $|NF|=$（　B　）A．$\frac{4}{3}$　　B．$\frac{4\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{8}{3}$　　D．$\frac{8\sqrt{3}}{3}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9．已知函数 $f(x)=\sin(\omega x-\frac{\pi}{6})(\omega>0)$ 在区间 $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$ 上单调递增，则 ω 的值可以是（　ABC　）

A．$\frac{2}{3}$　　B．1　　C．$\frac{4}{3}$　　D．$\frac{3}{2}$

10．科学研究表明，物体在空气中冷却的温度变化是有规律的．如果物体的初始温度为 $\theta_1°C$，空气温度 $\theta_0°C$ 保持不变，则 t 分钟后物体的温度 θ（单位：$°C$）满足：$\theta=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)e^{-0.05t}$．若空气温度为 $10°C$，该物体温度从 $\theta_1°C$（$90\leq\theta_1\leq 100$）下降到 30℃，大约所需的时间为 t_1，若该物体温度从 $70°C$，$50°C$ 下降到 $30°C$，大约所需的时间分别为 t_2,t_3，则（　BC　）（参考数据：$\ln 2\approx 0.7,\ln 3\approx 1.1$）

A．$t_2=20$　　B．$28\leq t_1\leq 30$　　C．$t_1\geq 2t_3$　　D．$t_1-t_2\leq 6$

11．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 4，点 N 是底面正方形 $ABCD$ 内及边界上的动点，点 M 是棱 DD_1 上的动点（包括点 D，D_1），已知 $MN=4$，P 为 MN 中点，则下列结论正确的是（　ABD　）

A．无论 M，N 在何位置，AP，CC_1 为异面直线　　B．若 M 是棱 DD_1 中点，则点 P 的轨迹长度为 $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

C．M，N 存在唯一的位置，使 $A_1P//$ 平面 AB_1C　　D．AP 与平面 A_1BCD_1 所成角的正弦最大值为 $\frac{1}{2}$

$key:$当$M=D_1,N=B$时，AP交CC_1于C_1,但此时$MN=4\sqrt{3}\neq 4$,，A对；

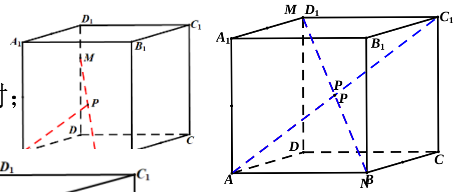
$DP=\frac{1}{2}MN=2,\therefore O_1P_1=\sqrt{3},\therefore P$的轨迹为以$O_1$为圆心，半径为$\sqrt{3}$的$\frac{1}{4}$圆周,$\therefore B$对；

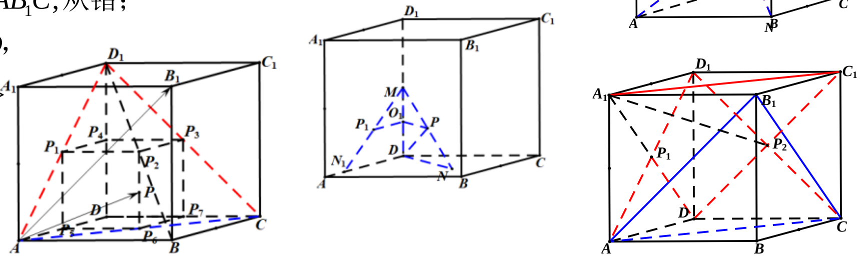
$\because$ 平面$A_1DC_1//$平面$AB_1C,\therefore A_1P_1,A_1P_2//$平面$AB_1C$,从错；

由P的轨迹为如图的正方体$P_1P_2P_3P_4-P_5P_6P_7D$,

$\sin<\overrightarrow{AP}$,平面$A_1BCD_1>=\cos<\overrightarrow{AP},n_{平面A_1BCD_1}>$

$=\cos<\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB_1}>\leq\frac{1}{2},D$对.



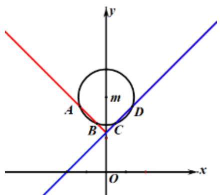


三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12．函数 $f(x)=\frac{\sqrt{1-x}}{\lg x}$ 的定义域为__________．　$(0,1)$

13．已知曲线 $C:x^2+(y-m)^2=2$ 和 $C_1:y=x+2,C_2:y=|x|+2$，若 C 与 C_1 恰有一个公共点，则实数 $m=$__________；若 C 与 C_2 恰有两个公共点，则实数 m 的取值范围是__________.

0 或 4；$(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})\cup\{4\}$（答对第一空给 2 分，答对第二空给 3 分）



14．已知$\triangle ABC$ 的角 A，B，C 满足 $\tan A\tan B\tan C\leq[\tan A]+[\tan B]+[\tan C]$，其中符号$[x]$表示不大于 x 的最大整数，若 $A\leq B\leq C$，则 $\tan C-\tan B=$__________．　1

$key:$由$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\tan(\pi-C)=-\tan C$得（公式）

$\tan A\tan B\tan C=\tan A+\tan B+\tan C\leq[\tan A]+[\tan B]+[\tan C]$

而$\tan A\geq[\tan A],\tan B\geq[\tan B],\tan C\geq[\tan C]$,

$\therefore\tan A=[\tan A],\tan B=[\tan B],\tan C=[\tan C]$,即$\tan A,\tan B,\tan C\in Z$

而$A\leq B\leq C,\therefore\tan A\leq\tan B$,且$\tan A,\tan B\in N^*$,且$\tan A$与$\tan B$不可能同时为1，即$\tan A\tan B\geq 2$

而$\tan C=\frac{\tan A+\tan B}{\tan A\tan B-1}\in Z$(而$\tan A\tan B-1-\tan A-\tan B=(\tan A-1)(\tan B-1)-2\geq-1$)

$\therefore$若$\tan A=1$,则$\tan C=\frac{1+\tan B}{\tan B-1}=1+\frac{2}{\tan B-1},\therefore\tan B=2,\tan C=3$,或,$\tan B=3,\tan C=2$舍去，

若$\tan A=2$,则$\tan C=\frac{\tan B+2}{2\tan B-1}=\frac{1}{2}+\frac{5}{2(2\tan B-1)}$,且$\tan B\geq 2,\therefore\tan B=3,\tan C=1$舍去

四、解答题：本题共 5 个小题，共 77 分。解答应写出说明文字、证明过程或演算步骤。

15．（13 分）已知双曲线$E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左顶点是$A(-1,0)$，一条渐近线的方程为$y=x$.

（1）求双曲线E的离心率；（2）设直线$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$与双曲线$E$交于点$P$，$Q$，求线段$PQ$的长.

解：（1）由题意知$a=1$，且$\frac{b}{a}=1,\therefore b=1$， 2 分

$\therefore c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$，所以双曲线的离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$. 5 分

（2）由（1）知双曲线方程为$x^2-y^2=1$，

将$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$即$x-1=2y$代入$x^2-y^2=1$，得$3y^2+4y=0$， 9 分

因而$y_1=0,y_2=-\frac{4}{3}$，所以$|PQ|=\sqrt{1+2^2}\cdot|y_1-y_2|=\frac{4}{3}\sqrt{5}$. 13 分

16．（15 分）寒假期间小明每天坚持在“跑步 3000 米”和“跳绳 2000 个”中选择一项进行锻炼，在不下雪的时候，他跑步的概率为60%，跳绳的概率为40%，在下雪天，他跑步的概率为20%，跳绳的概率为80%．若前一天不下雪，则第二天下雪的概率为50%，若前一天下雪，则第二天仍下雪的概率为40%．已知寒假第一天不下雪，跑步 3000 米大约消耗能量 330 卡路里，跳绳 2000 个大约消耗能量 220 卡路里．记寒假第n天不下雪的概率为P_n.

（1）求p_1,p_2,p_3的值，并证明$\{p_n-\frac{6}{11}\}$是等比数列；（2）求小明寒假第n天通过运动锻炼消耗能量的期望.

16．（15 分）解：（1）依题意，$p_1=1,p_2=0.5$，$p_3=p_2\times0.5+(1-p_2)\times(1-0.4)=0.6-0.1p_2=0.55$. 6 分

依题意$p_n=p_{n-1}\times0.5+(1-p_{n-1})\times(1-0.4)=0.6-0.1p_{n-1}$

整理得$p_n-\frac{6}{11}=-\frac{1}{10}\left(p_{n-1}-\frac{6}{11}\right)$，又$p_1-\frac{6}{11}=\frac{5}{11}\neq0$，

所以$\left\{p_n-\frac{6}{11}\right\}$是首项为$\frac{5}{11}$，公比为$-\frac{1}{10}$的等比数列. 9 分

（2）由（1），寒假第n天不下雪的概率$p_n=\frac{5}{11}\left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1}+\frac{6}{11}$， 11 分

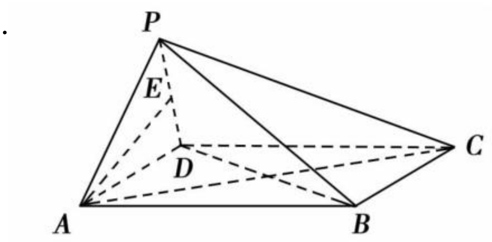
从而小明寒假第n天跑步的概率为$q_n=p_n\times0.6+(1-p_n)\times0.2=0.2+0.4p_n=\frac{23}{55}+\frac{2}{11}\left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1}$， 13 分

则他第n天通过运动锻炼消耗能量为$330q_n+220(1-q_n)=220+110q_n=266+20\left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1}$. 15 分

17.（15 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形，侧面 PAD 是以 PD 为底的等腰三角形，

$AB=PB=2PA=4, AC=2\sqrt{7}$，$E$ 在 PD 上，$AE\perp BD$.

（1）证明：平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$；（2）求二面角 $P-BC-A$ 的余弦值.



17.（15 分）解：（1）由题意知 $AD=BC=PA=2$，则在 $\triangle ABC$ 中，

$$\cos\angle ABC=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{4^2+2^2-(2\sqrt{7})^2}{2\times4\times2}=-\frac{1}{2},$$

$\because \angle ABC\in(0,\pi)\therefore \angle ABC=\frac{2\pi}{3}$，从而 $\angle DAB=\frac{\pi}{3}$，　　3 分

$\triangle ABD$ 中，$BD^2=AD^2+AB^2-2AD\cdot AB\cdot\cos\frac{\pi}{3}=2^2+4^2-2\times2\times4\times\frac{1}{2}=12$，

则 $BD^2+AD^2=12+4=16=AB^2$，$\therefore BD\perp AD$，　　5 分

又 $BD\perp AE, AD\cap AE=A$，所以 $BD\perp$ 平面 PAD，

而 $BD\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore$ 平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$.　　8 分

（2）由（1）知 $BD\perp$ 平面 PAD，$PD\subset$ 平面 PAD，

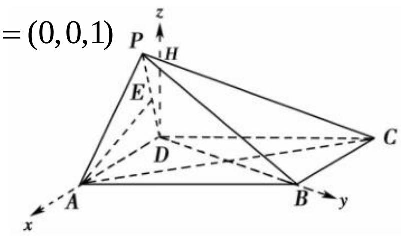
$\therefore BD\perp PD$，$\therefore PD=\sqrt{PB^2-BD^2}=2$，所以 $\triangle PAD$ 为等边三角形，　　10 分

如图，在平面 PAD 内作 $DH\perp AD$，则 $DH\perp$ 平面 $ABCD$，

以 DA，DB，DH 分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系（如图所示），

则 $D(0,0,0), B(0,2\sqrt{3},0), C(-2,2\sqrt{3},0), P(1,0,\sqrt{3})$，　　12 分

从而 $\overrightarrow{BP}=(1,-2\sqrt{3},\sqrt{3}), \overrightarrow{BC}=(-2,0,0)$，显然平面 ABC 的一个法向量为 $n=(0,0,1)$



设平面 PBC 的法向量为 $m=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\overrightarrow{BP}\cdot m=0,\\ \overrightarrow{BC}\cdot m=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}x-2\sqrt{3}y+\sqrt{3}z=0,\\ -2x=0,\end{cases}\text{取 } m=(0,1,2),$$

记二面角 $P-BC-A$ 的平面角为 α，则 $\cos\alpha=|\cos\langle m,n\rangle|=\frac{|m\cdot n|}{|m|\cdot|n|}=\frac{1\times2}{1\times\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

即二面角 $P-BC-A$ 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.　　15 分

18.（17 分）已知函数 $f(x)=\frac{a\sin x}{x}, a\in R$.（1）当 $a=1, x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，证明：$\tan x>x>xf(x)$；

（2）若 $\forall x\in(-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2}), \frac{x}{\tan x}<f(x)$，求实数 a 的取值范围.

⑴ 证明：$\because a=1, x\in(0,\frac{\pi}{2}), \therefore \tan x>x>xf(x)\Leftrightarrow \tan x>x>\sin x\cdots(*)$

设$p(x)=\tan x-x, q(x)=x-\sin x(x\in(0,\frac{\pi}{2}))$,

则$p'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-1=\tan^2 x>0, q'(x)=1-\cos x>0$,

$\therefore$ $p(x)$与$q(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$上都递增,$\therefore$ $p(x)>p(0)=0$, 且$q(x)>q(0)=0$

$\therefore \tan x-x>0$, 且$x-\sin x>0$,$\therefore$ (*)成立，证毕

（2）解:由$f(x)$是偶函数,$\frac{x}{\tan x}$也是偶函数，

$\therefore \forall x\in(-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2}), \frac{x}{\tan x}<f(x)\Leftrightarrow f(x)>\frac{x}{\tan x}$对$x\in(0,\frac{\pi}{2})$恒成立，

$\Leftrightarrow \frac{a\sin x}{x}>\frac{x\cos x}{\sin x}\Leftrightarrow 0<a\sin^2 x-x^2\cos x$记为$g(x)(0<x<\frac{\pi}{2})$

则$g'(x)=a\sin 2x-2x\cos x+x^2\sin x, g''(x)=2a\cos 2x-2\cos x+2x\sin x+2x\sin x+x^2\cos x$, 且$g(0)=0, g'(0)=0$

$\therefore g''(0)=2a-2\geq 0$即$a\geq 1$

下面证明:$a\sin^2 x-x^2\cos x>0$对$a\geq 1, x\in(0,\frac{\pi}{2})$恒成立$\cdots$(*)

只需:$\sin^2 x-x^2\cos x>0$即$\tan x\sin x-x^2>0$对$x\in(0,\frac{\pi}{2})$恒成立

设$r(x)=\tan x\sin x-x^2$,则$r'(x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\sin x-2x, r''(x)=\frac{1}{\cos x}+\cos x-2+\frac{2\sin x}{\cos^2 x}>0$

$\therefore r'(x)>r'(0)=0, \therefore r(x)>r(0)=0, \therefore$ (*)成立.$\therefore$ a的取值范围为$[1,+\infty)$

19.（17 分）对于无穷数列$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，我们称 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n=a_0+a_1x+\frac{a_2}{2!}x^2+\cdots+\frac{a_n}{n!}x^n+\cdots$（规定$0!=1$）

为无穷数列$\{a_n\}$的指数型母函数．无穷数列$1,1,\cdots,1,\cdots$的指数型母函数记为$e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$，

它具有性质 $e(x)e(y)=e(x+y)$．(1)证明：$e(-x)=\frac{1}{e(x)}$；(2)记$c(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\cdots$．

证明：$c(x)=\frac{e(ix)+e(-ix)}{2}$（其中 i 为虚数单位）；

（3）以函数$\frac{x}{e(x)-1}$为指数型母函数生成数列$\{B_n\}$，$\frac{x}{e(x)-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n=B_0+B_1x+\frac{B_2}{2!}x^2+\cdots+\frac{B_n}{n!}x^n+\cdots$．其中$B_n$

称为伯努利数．证明：$B_1=-\frac{1}{2}$．且$B_{2k+1}=0(k=1,2,3,\cdots)$．

证明：（1）$\because e(x)e(y)=e(x+y), \therefore e(-x)e(x)=e(-x+x)=e(0)=1+0+\frac{0^2}{2!}+\cdots+\frac{0^n}{n!}+\cdots=1, \therefore e(-x)=\frac{1}{e}$(2)

（2）由$e(ix)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ix)^n}{n!}=1+\frac{ix}{1!}-\frac{x^2}{2!}+\frac{-ix^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{i^n\cdot x^n}{n!}+\cdots$

$e(-ix)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-ix)^n}{n!}=1-\frac{ix}{1!}-\frac{x^2}{2!}+\frac{ix^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{(-i)^n\cdot x^n}{n!}+\cdots$

$\therefore \frac{e(ix)+e(-ix)}{2}=\frac{1}{2}(2-\frac{2x^2}{2!}+\frac{2x^4}{4!}-\frac{2x^6}{6!}+\cdots)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{(-1)^k\cdot x^{2k}}{(2k)!}+\cdots=c(x)$, 证毕

（3）由已知得：$\dfrac{x}{e(x)-1}=B_0+B_1x+\dfrac{B_2}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{B_n}{n!}x^n+\cdots$

$\therefore \dfrac{-x}{e(-x)-1}=B_0-B_1x+\dfrac{B_2}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{B_n}{n!}(-1)^n x^n=\dfrac{-x}{\dfrac{1}{e(x)}-1}=\dfrac{-x\cdot e(x)}{1-e(x)}=\dfrac{x\cdot e(x)}{e(x)-1}$

$\therefore x=\dfrac{x\cdot e(x)}{e(x)-1}-\dfrac{x}{e(x)-1}=-2B_1x-\dfrac{2B_3}{3!}x^3-\dfrac{2B_{2k+1}}{(2k+1)!}x^{2k+1}-\cdots(k\geq 1)$

$\therefore -2B_1=1$, 且 $-\dfrac{2B_{2k+1}}{(2k+1)!}=0(k\geq 1)$, $\therefore B_1=-\dfrac{1}{2}$, 且 $B_{2k+1}=0(k=1,2,3,\cdots)$，证毕