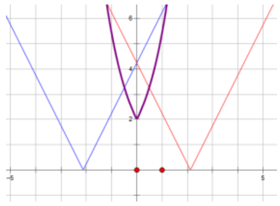
函数概念及性质解答（4）

2022-12-15

②已知$a\in R$,函数$f(x)=e^{|x|}+|x-a|+|e^{|x|}-|x-a||$，记$f(x)$的最小值为$m(a)$，则（　）D

A. $m(a)$在$(-\infty,0)$上是增函数，在$(0,+\infty)$上是减函数　B.　$m(a)$在$(-\infty,0)$上是减函数，在$(0,+\infty)$上是增函数

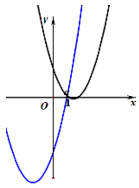
C. $m(a)$在R上是奇函数　　　　　　　　　　D.　$m(a)$在R上是偶函数



$key:f(x)=\max\{2e^{|x|},2|x-a|\}$，而$f_1(x)=2e^{|x|}$是偶函数，

$g_1(x)=2|x-a|$与$g_2(x)=2|x+a|$的图象关于y轴对称，如图,$\therefore m(a)$在R上是偶函数

③已知函数$f(x)=\begin{cases}x^2-2,x>0,\\-3|x+a|+a,x<0\end{cases}$的图象上恰有三对关于原点成中心对称的点，则$a$的取值范围为___



key:设点$(x,x^2-2)(x>0)$在函数$f(x)$图像上，则$(-x,-x^2+2)$也在函数$f(x)$图像上，

则$-x^2+2=-3|-x+a|+a$即$g(x)=x^2-3|x-a|+a-2=0$在$x>0$上有三个解,

$\Leftrightarrow g(x)=\min\{x^2-3x+4a-2,x^2+3x-2a-2\}=0(x>0)$

$\therefore 4a-\dfrac{17}{4}>0,\therefore\begin{cases}g(a)=a^2+a-2>0\\g(0)=a-2<0\end{cases},\therefore a\in(1,\dfrac{17}{16})$

④已知函数$f(x)=|x|+2^x-\dfrac{1}{2}(x<0)$与$g(x)=|x|+\log_2(x+a)$的图象上存在关于$y$轴的对称点，

则a的取值范围为_______.

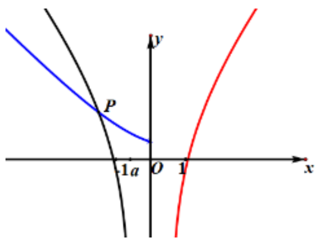
$key1$:设点$P(x,f(x))$在$f(x)$的图象上，则P关于y轴的对称点$P'(-x,f(x))$在$g(x)$图象上，

$\therefore -x+2^x-\dfrac{1}{2}=-x+\log_2(-x+a)$即$2^x-\log_2(-x+a)-\dfrac{1}{2}=0$在$x<0$上有解

而函数$h(x)=2^x-\log_2(-x+a)-\dfrac{1}{2}$在$x<0$上递增，且$\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=-\infty$,

$\therefore h(0)=1-\log_2 a-\dfrac{1}{2}>0$得$a\in(0,\sqrt{2})$

$key2$:如图,$\log_2 a<\dfrac{1}{2}=\log_2\sqrt{2},\therefore a\in(0,\sqrt{2})$



四、奇偶性与单调性关系

奇函数在对称区间上的单独性一致；偶函数在对称区间上的单调性相反

（2012 浙江）已知定义在R上的奇函数$f(x)$,当$x\geq0$时，$f(x)=x^2$.若对任意的$x\in[a,a+2]$，不等式

$f(x+a)\geq2f(x)$　恒成立，则实数a的取值范围为____.

$key:f(x)=x|x|,\therefore f(x+a)\geq2f(x)=f\sqrt{2}x)\Leftrightarrow x+a\geq\sqrt{2}x,\therefore a\geq\sqrt{2}$

（2021 吉林）已知函数$f(x)=\begin{cases}x^2,x<0,\\-x^2,x\geq0.\end{cases}$若$\forall x\in(t^2-4,t^2)$，不等式$f(x+t)<4f(x)$恒成立，则实数$t$的

取值范围为（　）$A.(\dfrac{1-\sqrt{17}}{2},\dfrac{1+\sqrt{17}}{2})$　$B.(0,1)$　$C.[\dfrac{1-\sqrt{17}}{2},\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}]$　$D.[0,1]$　　D

（2021 重庆）已知函数 $f(x)$为R上的奇函数，当$x\ge 0$时，$f(x)=x^2$,则不等式$f(f(x))+f(x-1)<0$的解集为____ . $(-\infty,\dfrac{\sqrt{5}-1}{2})$

$key: f(x)$在R上递增, $f(f(x))+f(x-1)<0 \Leftrightarrow f(f(x))<-f(x-1)=f(1-x)\Leftrightarrow f(x)<1-x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2<1-x \end{cases}, or \begin{cases} x<0 \\ -x^2<1-x \end{cases}$ 得$x<\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

变式 1（1）①已知函数 $f(x)=-x^3-x$, $a,b,c\in R$,且 $a+b>0,b+c>0,a+c>0$,则 $f(a)+f(b)+f(c)$ 的值（ ）

A.大于 0　　B.等于 0　　C.小于 0　　D.不确定　　C

②已知函数 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}-\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$，则对任意的实数 $a,b(a+b\ne 0)$，$\dfrac{f(a)+f(b)}{a+b}$ 的值(A)

A．恒大于 0　　B．恒等于 0　　C．恒小于 0　　D．符号不确定

③设 $f(x)=x^3+\log_2(x+\sqrt{x^2+1})$，则不等式 $f(m)+f(m^2-2)\ge 0(m\in R)$ 的解集为__.

$(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$

（2）①设 $f(x)$ 是偶函数,且当 $x>0$ 时 $f(x)$ 是单调函数，则满足 $f(x)=f(\dfrac{x+3}{x+4})$ 的所有 x 之和为(　) C

A. -3　　B. 3　　C. -8　　D. 8

②函数 $y=f(x)$ 是 R 上的偶函数,且在 $(-\infty,0]$ 上是增函数,若 $f(a)\le f(2)$,则实数 a 的取值范围是(　 B)

A．$[-2,2]$　　B．$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$　　C．$[-2,+\infty)$　　D．$(-\infty,2]$

2（1）设 $f(x)$ 是定义在 $(-1,0)\cup(0,1)$ 上的偶函数在 $(0,1)$ 上递增，若 $f(a-2)-f(4-a^2)<0$，则 a 的取值范围为________________.　$key: 0<|a-2|<|4-a^2|<1$得$a\in(\sqrt{3},2)\cup(2,\sqrt{5})$

若是奇函数呢？

（2）函数 $f(x)$ 是偶函数，且在 $[0,+\infty)$ 上是增函数,不等式 $f(ax+1)\le f(x-2)$ 对 $x\in[\dfrac{1}{2},1]$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是_______$[-2，0]$

（3）①已知定义在 R 上的偶函数 $f(x)$，满足当$x>0$时，$f(x)=-x^3$.

若关于x的不等式$f(x+a)\ge 8f(x)$对$x\in[-1,1]$恒成立,则实数a的取值范围为_____;　$\{0\}$

若关于x的不等式$f(x+a)\ge 8f(x)$在$x\in[-1,1]$上能成立,则实数a的取值范围为_____.　$[-3,3]$

② 设$f(x)$是定义在R上的偶函数，且当$x\ge 0$时，$f(x)=2^x$.若$\forall x\in[a,a+2]$,不等式$f(x+a)\ge f^2(x)$恒成立，则实数a的取值范围为________ .

$key: f(x)=2^{|x|}, \therefore f^2(x)=f(2x)$

$\therefore f(x+a)\ge f^2(x)=f(2x)\Leftrightarrow |x+a|\ge|2x|\Leftrightarrow(3x+a)(x-a)\le 0, \therefore \begin{cases}4a\cdot 0\le 0\\ 2(4a+6)\le 0\end{cases}, \therefore a\le -\frac{3}{2}$

③已知函数$f(x)=\begin{cases}(\frac{1}{3})^x, x\ge 0,\\ (\frac{1}{e})^x, x<0,\end{cases}$ 若$\forall x\in[1-a,1+a]$，不等式$f(2x+a)\ge f^3(x)$恒成立，则实数a的取值范围为（　　）$A.(-\infty,\frac{1}{2}]$　$B.(-\infty,\frac{1}{2}]$　$C.(0,\frac{1}{2})$　　$D.(0,\frac{1}{2}]$

$key: f(2x+a)\ge f(3x)\Leftrightarrow 2x+a\le 3x$即$a\le x, \therefore \begin{cases}1-a,1+a\\ a\le 1-a\end{cases}$得$0<a\le\frac{1}{2}$

3. 定义在$(-1,0)\cup(0,1)$上的函数$f(x)$满足：（ i ）$f(0)=0$；（ ii ）当$x\in(-1,0)$时，都有$f(x)>0$；

（iii）$\forall x_1,x_2\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$，有$f(\frac{1}{x_1})+f(\frac{1}{x_2})=f(\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2})$.

（Ⅰ）判断$f(x)$的奇偶性；（Ⅱ）求证：$f(x)$在$(0,1)$上递减.

（Ⅰ）解：$\because x_1,x_2\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty), \therefore \frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2}\in(-1,0)\cup(0,1)$

令$\frac{1}{x_1}=t,\frac{1}{x_2}=-t$，则$f(t)+f(-t)=f(0)=0, \therefore f(x)$的是奇函数

（Ⅱ）$\forall x_1,x_2\in(0,1)$，且$x_1<x_2$，则$f(x_2)-f(x_1)=f(x_2)+f(-x_1)=f(\frac{1}{x_2})+f(\frac{1}{-x_1})=f(\frac{\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}}{1+\frac{1}{x_2}\cdot\frac{1}{-x_1}})$

$=f(\frac{x_1-x_2}{x_1x_2-1})=-f(\frac{x_2-x_1}{x_1x_2-1})<0(\because 0<x_1<x_2<1, \therefore 1-\frac{x_1-x_2}{x_1x_2-1}=\frac{(1+x_1)(1-x_2)}{x_1x_2-1}<0, \therefore \frac{x_2-x_1}{x_1x_2-1}\in(-1,0))$

$\therefore f(x)$在$(0,1)$上递减

五、周期性

周期性：$f(x+T)=f(x)$(T为非零常数)

周期性与对称性的关系：对定义在R上的函数$f(x)$, $b>a$,

若①$f(2a+x)=f(-x), f(2b+x)+f(-x)=0\Rightarrow f(x+4(b-a))=f(x)$

②$f(2a+x)=f(-x), f(2b+x)=f(-x)\Rightarrow f(x+2(b-a))=f(x)$

③$f(2a+x)+f(-x)=0, f(2b+x)+f(-x)=0\Rightarrow f(x+2(b-a))=f(x)$

（2017B）设 $f(x)$ 是定义在 R 上的函数，若 $f(x)+x^2$ 是奇函数，$f(x)+2^x$ 是偶函数，则 $f(1)$ 的值为____$-\frac{7}{4}$

（2017A）设 $f(x)$ 是定义在 R 上函数，对任意的实数 x 有 $f(x+3)\cdot f(x-4)=-1$，又当 $0\le x<7$ 时，

$f(x)=\log_2(9-x)$，则 $f(-100)$ 的值为__________.$-\frac{1}{2}$

(2018全国A)5. 设$f(x)$是定义在R上以2为周期的偶函数，且在区间$[0,1]$上单调递减，若$f(\pi)=1, f(2\pi)=2$，

则不等式组$\begin{cases}1\le x\le 2,\\ 1\le f(x)\le 2\end{cases}$的解集为______　$[\pi-2,8-2\pi]$

$key: f(\pi)=f(\pi-2), f(2\pi)=f(2\pi-8)=f(8-2\pi)(\pi-2,8-2\pi\in[1,2]),$

$\therefore$ 解集为$[\pi-2,8-2\pi]$

（2019）已知函数 $f(x)=(e^x-e^{-x})\cdot x^3$, 若满足$f(\log_2 m)+f(\log_{0.5} m)\le\dfrac{2(e^2-1)}{e}$, 则实数$m$的取值范围为_.

$key: f(x)$是偶函数，且在$(0,+\infty)$上递增

$\therefore f(\log_2 m)\le f(1)$得$m\in[\dfrac{1}{2},2]$

（2019）已知$f(x)$是定义域为$(-\infty,+\infty)$的奇函数，满足$f(1-x)=f(1+x)$，若$f(1)=2$, 则

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=$（　）$A.-50$　$B.0$　$C.2$　$D.50$

19：由$f(-x)=-f(x), f(-x)=f(2+x)$得$f(x+2)=-f(x),\therefore f(x+4)=f(x)$
而$f(1)=2, f(0)=0,-f(2)=f(-2)=f(2)$得$f(2)=0, f(3)=-f(1)=-2, f(4)=f(0)=0$
$\therefore f(1)+f(2)+\cdots+f(50)=f(1)+f(2)=2$, 选$C$

（2020）已知函数$f(x)$的定义域为R, $f(x+2)$为偶函数，$f(2x+1)$为奇函数，则（　）

$A.f(-\dfrac{1}{2})=0$　$B.f(-1)=0$　$C.f(2)=0$　$D.f(4)=0$

20：由$f(x+2)$是偶函数得$f(-x+2)=f(x+2)$,由$f(2x+1)$是奇函数得$f(x+1)$也是奇函数,且$f(1)=0$
$\therefore f(-x+1)=-f(x+1),\therefore f(-x)=f(x+4), f(-x)=-f(x+2),\therefore f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$
$\therefore f(-1)=f(3)=-f(1)=0$, 故选$B$

（2021 甲）12. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 R， $f(x+1)$ 为奇函数， $f(x+2)$ 为偶函数，当 $x\in[1,2]$ 时，

$f(x)=ax^2+b$． 若 $f(0)+f(3)=6$， 则 $f(\dfrac{9}{2})=$ （　　）D

A. $-\dfrac{9}{4}$　　B. $-\dfrac{3}{2}$　　C. $\dfrac{7}{4}$　　D. $\dfrac{5}{2}$

21: $f(-x+1)=-f(x+1), f(-x+2)=f(x+2),\therefore f(-x)=-f(2+x), f(-x)=f(4+x),$
$\therefore f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$, 且$f(1)=0$得$a+b=0$
而$f(0)+f(3)=-f(2)-f(1)=-(4a+b)=6$得$a=-2,b=2,\therefore f(\dfrac{9}{2})=f(\dfrac{1}{2})=-f(\dfrac{3}{2})=\dfrac{5}{2}$, 选$D$

*（2022 新高考I）12. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 R， 记 $g(x)=f'(x)$， 若 $f(\dfrac{3}{2}-2x)$，

$g(2+x)$ 均为偶函数，则（ BC　）

A. $f(0)=0$　　B. $g(-\dfrac{1}{2})=0$　　C. $f(-1)=f(4)$　　D. $g(-1)=g(2)$

注：$f'(2x+3)=2f'(x)$

$key: f(\frac{3}{2}-2x)=f(\frac{3}{2}+2x)\Leftrightarrow f(\frac{3}{2}-x)=f(\frac{3}{2}+x)\Leftrightarrow f(3+x)=f(-x),\therefore f(4)=f(-1),且f'(\frac{3}{2})=0,\therefore g(\frac{3}{2})=0$

$g(2+x)=g(2-x)\Leftrightarrow g(4+x)=g(-x)$

$f'(3+x)=-f'(-x)\Leftrightarrow g(x+3)=-g(-x),\therefore g(x+4)=-g(x+3),\therefore g(x+2)=g(x),\therefore g(-\frac{1}{2})=g(\frac{3}{2})=0$

变式 1（1）①已知函数 $f(x+2)=-\frac{1-f(x)}{1+f(x)}$,则$f(x)$的一个周期为____________；

$key: f(x+4)=\frac{1-f(x+2)}{1+f(x+2)}=\frac{1-\frac{1-f(x)}{1+f(x)}}{1+\frac{1-f(x)}{1+f(x)}}=-f(x),\therefore f(x+8)=f(x)$

② 函数 $y=f(x)(x\in R)$ 满足：对一切 $x\in R, f(x)>0, f(x+1)=\sqrt{7-f^2(x)}$，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=\begin{cases}x+2, 0\le x<\frac{1}{2},\\ 2, \frac{1}{2}\le x\le 1,\end{cases}$ 则 $f(2019-\sqrt{2})=$____________.

$key: f(x+2)=\sqrt{7-f^2(x+1)}=f(x)$

$\therefore f(2019-\sqrt{2})=f(1-\sqrt{2})=f(3-\sqrt{2})=\sqrt{7-f^2(2-\sqrt{2})}=\sqrt{3}$

③已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(-\frac{3}{4},0)$ 对称，且满足 $f(x)=-f(x+\frac{3}{2}), f(-1)=1, f(0)=-2$，则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2019)$ 的值为_________.

$key: f(x+3)=f(x), f(-\frac{3}{2}+x)=f(-x)=f(x+\frac{3}{2})=-f(x),\therefore f(1)=-f(-1)=-1$

$f(2)=f(-1)=1,\therefore f(1)+f(2)+f(3)=0, f(2019)=f(1)=-1$

④设函数 $f(x)$ 的定义域为 R，且 $f(x+2)=f(x+1)-f(x)$, 若$f(2)<-1, f(2019)=\frac{a+3}{a-3}$,则$a$ 的取值范围是（ C ） A．$(-\infty,3)$　B．$(0,3)$　C．$(3,+\infty)$　D．$(-\infty,0)\cup(3+\infty)$

⑤已知奇函数$f(x)$的定义域为R，且满足：$\forall x\in R$,都有$f(x)=-f(x+1)$.设$g(x)=x+f(x)$,且当$0\le x\le 1$时，$g(x)$的值域为$[0,1]$，则下列说法正确的有（　）

$A.f(x)$的图像关于直线$x=-\frac{3}{2}$轴对称　$B.f(x)$在$[0,2]$内至少5个零点

$C.f(x)$的图像关于点$(1,0)$中心对称　　$D.g(x)$在$[0,3]$上的值域为$[0,3]$

$key: f(x)=-f(x+1),\therefore f(x+2)=-f(x+1)=f(x); f(-x)+f(x)=0,\therefore f(x+1)=-f(x)=f(-x),$

$\therefore f(-3+x)=f(1+x)=f(-x),\therefore A$对；$f(2+x)+f(-x)=f(x)+f(-x)=0,\therefore C$对

而$g(x)$是奇函数,$\therefore$当$x\in[1,2]$时,$g(x)=x+f(x)=x-2+f(x-2)+2=-[2-x+f(2-x)]+2\in[1,2]$

当$x\in[2,3]$时，$g(x)=x+f(x)=x-2+f(x-2)+2\in[2,3],\therefore D$对

⑥设 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 是定义域为 R 的三个函数，对于命题：①若 $f(x)+g(x)$、$f(x)+h(x)$、$g(x)+h(x)$ 均为增函数，则 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 中至少有一个增函数；②若 $f(x)+g(x)$、$f(x)+h(x)$、$g(x)+h(x)$ 均是以 T 为周期的函数，则 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 均是以 T 为周期的函数，下列判断正确的是（　D　）

A.①和②均为真命题　B.①和②均为假命题　C.①为真命题，②为假命题　D.①为假命题，②为真命题

key: 取 $f(x)+g(x)=x, f(x)+h(x)=x^3, g(x)+h(x)=x^5$, 则 $f(x)+g(x)+h(x)=\dfrac{x+x^3+x^5}{2}$,

$f(x)=\dfrac{-x+x^3+x^5}{2}, g(x)=\dfrac{x-x^3+x^5}{2}, h(x)=\dfrac{x+x^3-x^5}{2}$ 都不是增函数

（2）①（多选题）已知定义在 R 上的奇函数 $y=f(x)$ 满足 $y=f(x+\dfrac{\pi}{2})$ 为偶函数，对于函数 $y=f(x)$ 的下列判断正确的是（　AC）

A.它是周期函数　　　　　　B. $x=\pi$ 是它的图像的一条对称轴；

C. $(-\pi, 0)$ 是它的一个对称中心　D.当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时，它一定取得最大值.

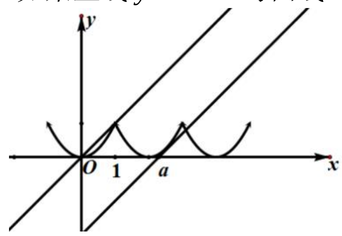
②函数 $f(x)$ 的定义域为 R，若 $f(x+1)$ 与 $f(x-1)$ 都是奇函数，则（　D ）

A. $f(x)$ 是偶函数　　B. $f(x)$ 是奇函数　C. $f(x)=f(x+2)$　D. $f(x+3)$ 是奇函数

③设 $g(x)$ 是定义在 R 上，以 2 为周期的函数，若函数 $f(x)=x+g(x)$ 在区间 $[3,5]$ 上的值域为 $[-2,5]$，则 $f(x)$ 在区间 $[-9,11]$ 上的值域为__________. $[-10,11]$

key: $\underset{x\in[5,7]}{f(x)}=x-2+g(x-2)+2\in[0,7]$, $\underset{x\in[7,9]}{f(x)}=x-2+g(x-2)+2\in[2,9]$, $\underset{x\in[9,11]}{f(x)}=x-2+g(x-2)+2\in[4,11]$,
$\underset{x\in[1,3]}{f(x)}=x+2+g(x+2)-2\in[-4,3]$, $\underset{x\in[-1,1]}{f(x)}=x+2+g(x+2)-2\in[-6,1]$, $\underset{x\in[-3,-1]}{f(x)}=x+2+g(x+2)-2\in[-4,-1]$,

④已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的且以 2 为周期的偶函数，当 $0\le x\le 1$ 时，$f(x)=x^2$，如果直线 $y=x+a$ 与曲线 $y=f(x)$ 恰有两个交点，则实数 a 的值是（　　　）



A.0　B. $a=2k(k\in Z)$　C. $a=2k$ 或 $a=2k-\dfrac{1}{4}(k\in Z)$　D.以上答案都不对

七、图象变换：

1.图象平移变换: 函数 $y=f(x)\xleftrightarrow[\text{左平移}a(a>0)\text{个单位}]{\text{右平移}a(a>0)\text{个单位}}y=f(x-a)$

$\xleftrightarrow[\text{右平移}a(a>0)\text{个单位}]{\text{左平移}a(a>0)\text{个单位}}y=f(x+a)$

$\xleftrightarrow[\text{下平移}b(b>0)\text{个单位}]{\text{上平移}b(b>0)\text{个单位}}y=f(x)+b$

$\xleftrightarrow[\text{上平移}b(b>0)\text{个单位}]{\text{下平移}b(b>0)\text{个单位}}y=f(x)-b$

$\xleftrightarrow[\text{左}a\text{、下}b]{\text{右}a\text{、上}b}y=f(x-a)+b$

2.对称变换: 函数 $y=f(x)\xleftrightarrow{\text{关于}x=a\text{对称}}y=f(2a-x)$

$\xleftrightarrow{\text{关于}y=b\text{对称}}y=2b-f(x)$

$\xleftrightarrow{\text{关于}(a,0)\text{对称}}y=-f(2a-x)$

$\xleftrightarrow{\text{关于}(a,b)\text{对称}}y=2b-f(2a-x)$

3.伸缩变换

函数$y=f(x)\xleftrightarrow[0<\omega<1,横坐标伸长]{\omega>1,横坐标缩短}y=f(\omega x)$

$\xleftrightarrow[0<A<1，纵坐标缩短]{A>1，纵坐标伸长}y=Af(x)$

变式1(1) ①函数$y=f(-\frac{1}{2}x)$的图象向____平移____个单位得函数$y=f(-\frac{1}{2}x-1)$的图象. 左,2

②若$f(-\frac{1}{2}x-1)=f(\frac{1}{2}x)$，则$f(x)$的图象关于______对称.

$key:f(\frac{1}{2}(2a-x))=f(-\frac{1}{2}x+a)=f(-\frac{1}{2}x-1),\therefore a=-1,\therefore$ 直线$x=-1$

③函数$f(-2x+1)$与函数$f(2x-1)$的图象关于____对称；

$key:f(2(2a-x)-1)=f(-2x+4a-1),\therefore 4a-1=1$得$a=\frac{1}{2},\therefore$ 直线$x=\frac{1}{2}$

④函数$f(-2x+1)$与函数$-f(2x-1)$的图象关于____对称.

$key:-f(-2(2a-x)+1)=-f(2x-4a+1),\therefore -4a+1=-1$得$a=\frac{1}{2},\therefore$ 点$(\frac{1}{2},0)$对称

⑤如何将函数$y=f(x)$的图象变换成函数$y=\frac{1}{2}f(\frac{1}{2}x-1)+1$的图象？

$key:y=f(x)$的图象向右平移1个单位的图象C_1，将C_1上的每一点的横坐标伸长

到原来的2倍的图象C_2,将C_2上每一个点的纵坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍的图象C_3,

将C_3向上平移1个单位的函数$y=\frac{1}{2}f(\frac{1}{2}x-1)+1$的图象

(2) ①若函数$f(x)$满足$f(1-x)=f(1+x)$,则$f(1+x)$是偶函数;
②$f(2-x)$为奇函数,则$f(x)$的图象关于点$(2,0)$对称；
③函数$f(2-x)$与$f(2+x)$关于直线$x=2$对称；
④若函数$f(1+x)$与$f(x-1)$的图象关于y轴对称,则$f(x)$是偶函数；

⑤函数$y=\log_2(-x)-2$与$y=\log_{\frac{1}{2}}(4x)$的图象关于y对称；以上正确的是___________. ①④⑤

(2) ①对；②$f(2+x)=-f(2-x),\therefore f(x)$的图象关于点$(2,0)$对称，对；
③$f(2-x)$与$f(2+x)$的图象关于y轴对称，错；
④$f(x+1)\xrightarrow{y轴对称}f(-x+1)=f(x-1)\Leftrightarrow f(-x)=f(x)$，对
⑤$y=\log_{\frac{1}{2}}(4x)=-\log_2 x-2$,对

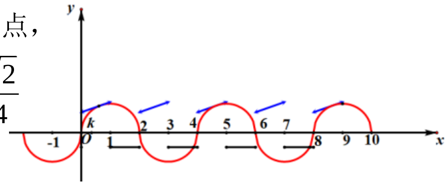
(2019江苏）设$f(x),g(x)$是定义在R上的两个周期函数，$f(x)$的周期为4，$g(x)$的周期为2,

且$f(x)$是奇函数，当$x\in(0,2]$时，$f(x)=\sqrt{1-(x-1)^2},g(x)=\begin{cases}k(x+2),0<x\le1,\\-\frac{1}{2},1<x\le2,\end{cases}$ 其中$k>0$.

若在区间$[0,9]$上,关于x的方程$f(x)=g(x)$有8个不同的实数根，则k的取值范围是______.

函数概念及性质解答（4）

2022-12-15



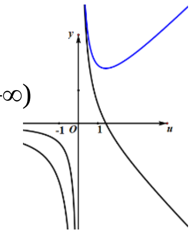
2019江苏：如图，$y=k(x+2)$与$y=\sqrt{-x^2+2x}$在$x\in(0,1]$内有2相异交点，

则$(k^2+1)x^2+(4k^2-2)x+4k^2=0(k>0),\therefore\Delta=4(-8k^2+1)>0$得$k<\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

且$3k\geq1,\therefore k\in[\dfrac{1}{3},\dfrac{\sqrt{2}}{4})$

（2020天津）已知函数$f(x)=\begin{cases}x^3,x\geq0,\\-x,x<0.\end{cases}$若函数$g(x)=f(x)-|kx^2-2x|(k\in R)$恒有4个零点，

则k的取值范围为（　）



$A.(-\infty,-\dfrac{1}{2})\cup(2\sqrt{2},+\infty)$　$B.(-\infty,-\dfrac{1}{2})\cup(0,2\sqrt{2})$　$C.(-\infty,0)\cup(0,2\sqrt{2})$　$D.(-\infty,0)\cup(2\sqrt{2},+\infty)$

$2020key:x=0,$或$\begin{cases}x>0\\x^2=|kx-2|\end{cases}$,或$\begin{cases}x<0\\1=|kx-2|\end{cases}$

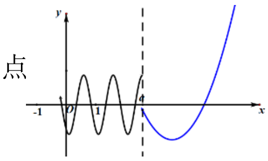
$\Leftrightarrow x=0,\begin{cases}x>0\\x^2=kx-2,or,x^2=2-kx\text{即}k=x+\dfrac{2}{x},or,k=\dfrac{2}{x}-x\end{cases}$,或$\begin{cases}x<0\\1=kx-2,or,1=2-kx\text{即}k=\dfrac{3}{x},or,k=\dfrac{1}{x}\end{cases}$

如图，得$k\in(-\infty,0)\cup(2\sqrt{2},+\infty)$,选$D$

（2021天津）设$a\in R$，函数$f(x)=\begin{cases}\cos(2\pi x-2\pi a),x<a,\\x^2-2(a+1)x+a^2+5,x\geq a,\end{cases}$若$f(x)$在区间$(0,+\infty)$内恰

有6个零点，则a的取值范围是（　）

$A.(2,\dfrac{9}{4}]\cup(\dfrac{5}{2},\dfrac{11}{4}]$　$B.(\dfrac{7}{4},2)\cup(\dfrac{5}{2},\dfrac{11}{4})$　$C.(2,\dfrac{9}{4}]\cup[\dfrac{11}{4},3)$　$D.(\dfrac{7}{4},2)\cup[\dfrac{11}{4},3)$

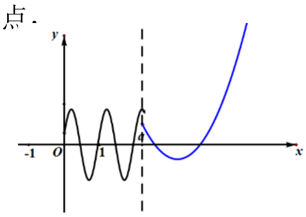


$2021key:$易得$a>2,\because$对称轴$x=a+1>a$，$\Delta=4(a+1)^2-4(a^2+5)=4(2a-4)>0$

当$f(a)=5-2a\geq0$即$2<a\leq\dfrac{5}{2}$时，$f(x)$在$[a,+\infty)$上有2个零点，$\therefore f(x)$在$(0,a)$上有4个零点

$\therefore a-2-\dfrac{1}{4}>0$得$2<a\leq\dfrac{9}{4}$

当$f(a)=5-2a<0$即$a>\dfrac{5}{2}$时，$f(x)$在$[a,+\infty)$上有1个零点，$\therefore f(x)$在$(0,a)$上有5个零点.



$\therefore\begin{cases}a-2-\dfrac{1}{4}>0\\a-2-\dfrac{3}{4}\leq0\end{cases}$得$\dfrac{5}{2}<a\leq\dfrac{11}{4}$,选$A$

（2019II）设函数$f(x)$的定义域为R，满足$f(x+1)=2f(x)$，且当$x\in(0,1]$时，$f(x)=x(x-1)$.

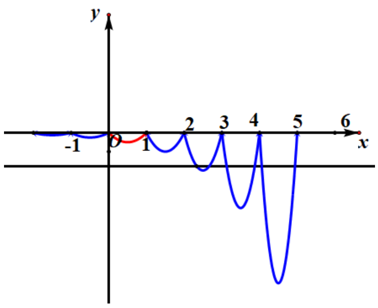
若对任意$x\in(-\infty,m]$，都有$f(x)\geq-\dfrac{8}{9}$，则m的取值范围是（）$A.(-\infty,\dfrac{9}{4}]$$B.(-\infty,\dfrac{7}{3}]$$C.(-\infty,\dfrac{5}{2}]$ $D.(-\infty,\dfrac{8}{3}]$

2019II：当$x\in(1,2]$时，$f(x)=f(x-1+1)=2f(x-1)$,

当$x\in(-1,0]$时，$f(x)=\dfrac{1}{2}f(x+1)$,则$f(x)$的图象如图，

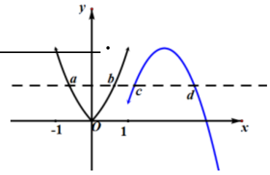
由$-\dfrac{8}{9}=4(x-2)(x-3)$得$x=\dfrac{7}{3},or,\dfrac{8}{3}$

$\therefore$选B



变式（1）①已知函数$f(x)=\begin{cases}3^{|x|}-1,-1\le x\le 1,\\ -\dfrac{3}{2}x^2+6x-4,x>1,\end{cases}$实数$a,b,c,d\in[-1,+\infty)$且$a<b<c<d$,满足$f(a)=f(b)$

$=f(c)=f(d)$，则$\lg(-a)-\lg b+4^c+2^{c-d}$的取值范围是______________.



(1) $key:$如图,得$-a=b,c+d=4$，且$c\in(1,2)$

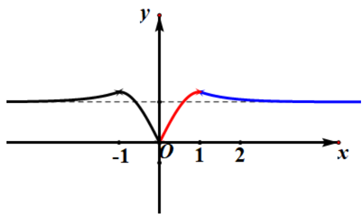
$\therefore\lg(-a)-\lg b+4^c+2^{c-d}=4^c+2^{2c-4}=\dfrac{17}{16}\cdot 4^c\in[\dfrac{17}{4},17]$

②已知函数$y=f(x)$是定义域为R的偶函数，当$x\ge 0$时，$f(x)=\begin{cases}\dfrac{5}{4}\sin(\dfrac{\pi}{2}x),0\le x\le 1,\\ (\dfrac{1}{4})^x+1,x>1,\end{cases}$若关于$x$的

方程$5f^2(x)-(5a+6)f(x)+6a=0(a\in R)$有且仅有6个不同的实数根，则实数$a$的取值范围是__________.

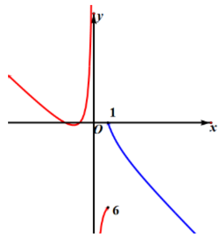
$key:$原方程$\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{6}{5},or,\ f(x)=a$

由$f(1)=\dfrac{5}{4}>\dfrac{6}{5},\therefore\ f(x)=\dfrac{6}{5}$有4个解,$\therefore a\in(0,1]\cup\{\dfrac{5}{4}\}$



（2）已知函数$f(x)=-x^2-x+a,g(x)=\begin{cases}f(x),x\le 2,\\ f(x-1)+2,x>2,\end{cases}$且函数$y=g(x)-ax$恰有三个不同的零点，

则实数a的取值范围为______.



$key:$由$g(x)-ax=\begin{cases}-x^2-x+a,x\le 2,\\ -(x-1)x+2+a,x>2\end{cases}-ax=0$

$\Leftrightarrow a=\dfrac{-x^2-x}{x-1}=-(x-1)-\dfrac{2}{x-1}-3(x\le 2)=-(t+\dfrac{2}{t})-3(t=x-1\le 1),$

或,$a=\dfrac{-x^2+x+2}{x-1}=-(x-1)+\dfrac{2}{x-1}-1(x>2)=-t+\dfrac{2}{t}-1(t=x-1>1)$

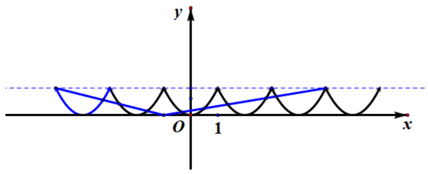
如图,$\therefore a\in(-3+2\sqrt{2},0)$

（3）①已知函数$f(x)=\begin{cases}(x+4)^2,-5\le x\le -3,\\ f(x-2),x\ge -3,\end{cases}$若函数$g(x)=f(x)-|k(x+1)|$有9个零点，则实数$k$的取值

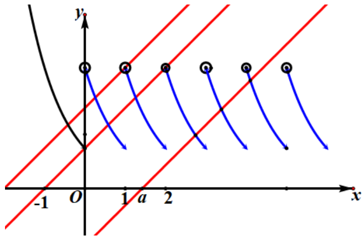
范围为（ ）$A.(-\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{6})\cup(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{4})$　　$B.(-\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{5})\cup(\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{3})$　　$C.(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{4})$　　$D.(\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{3})$

$key:$当$x\in[-3,-1]$时，$f(x)=f(x-2),$

$g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=|k|\cdot|x+1|$,如图,$\therefore\dfrac{1}{6}<|k|<\dfrac{1}{4}$，选$A$



② 设函数$f(x)=\begin{cases}(\frac{1}{3})^x+a, x\in(-\infty,0],\\ f(x-1), x\in(0,+\infty),\end{cases}$当实数$a$满足________时，方程$f(x)=x$有且只有三个实数根.



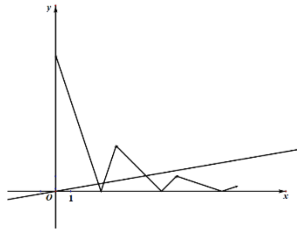
$key: f(x)=x \Leftrightarrow f(x)-a=x-a$

设$g(x)=f(x)-a=\begin{cases}(\frac{1}{3})^x, x\le 0,\\ g(x-1), x>0,\end{cases}$　$p(x)=x-a,$

如图，得$-a<2$即$a\in(-2,+\infty)$

（4）① 定义在R上的偶函数$f(x)$满足：当$x>0$时，有$f(x+4)=\frac{1}{3}f(x)$，且当$0\le x\le 4$时，$f(x)=3|x-3|$，

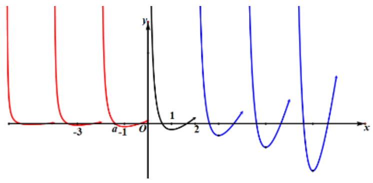
若方程$f(x)=mx$恰有三个实根，则m的取值范围为______.



①当$x\in[4,8]$时，$f(x)=f(x-4+4)=\frac{1}{3}f(x-4)$，如图

$\therefore m\in(-\frac{3}{4},-\frac{1}{8})\cup(\frac{1}{8},\frac{3}{4})$

② 设函数$f(x)$的定义域为R，满足$f(x+2)=2f(x)$，且当$x\in(0,2]$时，$f(x)=x+\frac{1}{x}-\frac{9}{4}$.若$\forall x\in(-\infty,m]$，都有$f(x)\ge-\frac{2}{3}$，则$m$的取值范围是（　）$A.(-\infty,\frac{21}{5}]$　$B.(-\infty,\frac{16}{3}]$　$C.(-\infty,\frac{9}{2}]$　$D.(-\infty,\frac{19}{4}]$



②当$x\in(2,4]$时，$f(x)=f(x-2+2)=2f(x-2)$，

当$x\in(-2,0]$时，$f(x)=\frac{1}{2}f(x+2)$，

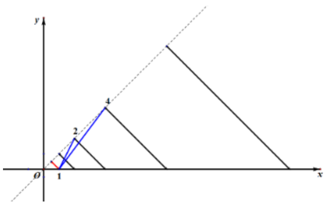
如图，$f(1)=-\frac{1}{4}$，$f(3)=-\frac{1}{2}$，$f(5)=-1$，

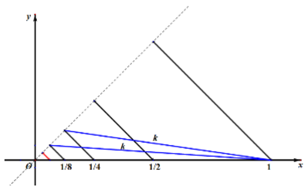
由$4f(x-4)=-\frac{2}{3}$得$f(x-4)=-\frac{1}{6}$，由$f(x)=-\frac{1}{6}(x\in(0,1])$得$x=\frac{3}{4}$

$\therefore 8f(4+\frac{3}{4}-4)=-\frac{2}{3}$，$\therefore m\le\frac{19}{4}$，$\therefore$ 选D

③ 定义在$(0,+\infty)$上的函数$f(x)$满足：（ⅰ）$f(2x)=2f(x)$；（ⅱ）当$x\in(1,2]$时，$f(x)=2-x$.

则关于x的方程$f(x)=k(x-1)$恰有三个不同的解，则实数k的取值范围是________.





③当$x\in(2,4]$时，$f(x)=f(2\cdot\frac{x}{2})=2f(\frac{x}{2})$

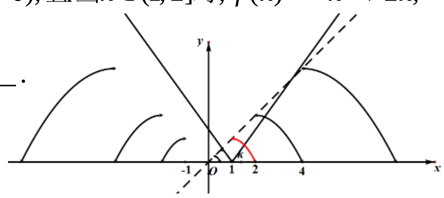
当$x\in(\frac{1}{2},1]$时，$f(x)=\frac{1}{2}f(2x)$.如图

当$k>0$时，$k\in[\frac{4}{3},2)$；当$k<0$时，$k\in(-\frac{1}{7},-\frac{1}{15}]$，

$\therefore k\in(-\frac{1}{7},-\frac{1}{15}]\cup[\frac{4}{3},2)$

④ 若定义在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上的偶函数$f(x)$满足$f(2x)=2f(x)(x>0)$，且当$x\in(1,2]$时，$f(x)=-x^2+2x$，

若函数$g(x)=f(x)-k|x-1|$有4个零点，则k的取值范围为______.



$key:$当$x\in(2,4]$时，$f(x)=f(2\cdot\frac{x}{2})=2f(\frac{x}{2})$

当$x\in(\frac{1}{2},1]$时，$f(x)=\frac{1}{2}f(2x)$，则$f(x)$的图象如图，易得$k>0$,

由$k(1-x)=\frac{1}{2}(-4x^2+4x)=-2x^2+2x$得$2x^2-(k+2)x+k=0$得$\Delta=(k-2)^2\geq 0$

由$k(1-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$得$k=1; k(2-1)=2$得$k=2;$

$k(4-1)=4$得$k=\frac{4}{3}; k(8-1)=8$得$k=\frac{8}{7}$

由$k(1+1)=1$得$k=\frac{1}{2}; \therefore k\in[\frac{8}{7},\frac{4}{3})$

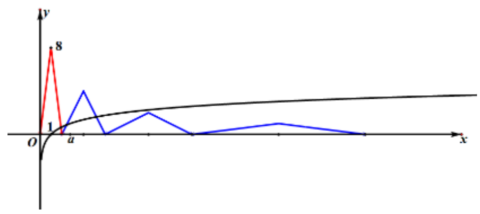
⑤已知定义在R上的函数$f(x)$，当$x\in[0,2]$时，$f(x)=8(1-|x-1|)$，且对于任意的实数$x\in[2^n-2，2^{n+1}-2]$

$(n\in N^*, n\geq 2)$，都有$f(x)=\frac{1}{2}f(\frac{x}{2}-1)$，若函数$g(x)=f(x)-\log_a x$有且只有三个零点，则$a$的取值范围为（ ）

$A.[2,10]$ $B.(\sqrt{2},\sqrt{10})$ $C.(2,10)$ $D.[\sqrt{2},\sqrt{10}]$

$key:$当$x\in[2^2-2,2^3-2]$时，$f(x)=f(2\cdot\frac{x}{2})=\frac{1}{2}f(\frac{x}{2}-1);$

$\therefore g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=\log_a x(x>0)$, 如图，



$$\therefore\begin{cases}a>1\\ \log_a 4<4\\ \log_a 10>2\end{cases}\text{得}\sqrt{2}<a<\sqrt{10}$$

④（Ⅰ）已知定义在R上的函数$f(x)$为奇函数,且$f(x-1)$为偶函数，且$f(\frac{1}{2})=0$,则函数$f(x)$在$[-2021,2022]$

内至少有________个零点.

$key: f(-x)=-f(x), f(-x-1)=f(x-1)\Leftrightarrow f(x-2)=f(-x)=-f(x), \therefore f(x+4)=f(x)$

$\therefore f(0)=0, f(2)=f(-2)=-f(2), \therefore f(2)=0,$

$\because f(\frac{1}{2})=0, \therefore f(-\frac{1}{2})=f(\frac{7}{2})=0, f(-\frac{3}{2})=f(\frac{1}{2})=0, \therefore f(\frac{3}{2})=f(\frac{5}{2})=0$

$\therefore f(x)$在$[0,4]$至少有$0,\frac{1}{2},\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},\frac{7}{2}$共六个零点$,\therefore 505\times 6+4+505\times 6+1=6065$

（Ⅱ）设函数$f(x)$在R上满足$f(2-x)=f(2+x), f(7-x)=f(7+x)$，且在闭区间$[0,7]$上，只有$f(1)=f(3)=0$,
则方程$f(x)=0$在闭区间$[-2021,2021]$上的根个数为_______.

$key: f(x+4)=f(-x), f(x+14)=f(-x), \therefore f(x+10)=f(x)$

若$x_0\in(7,10)$，使得$f(x_0)=0$，则$f(14-x_0)=0$, 且$14-x_0\in(4,7)$矛盾$,\therefore f(x)$在$[0,10]$内只有两个零点1,3

$\therefore$根根数为$202\times 2+1+202\times 2=809$

2.已知函数$f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,满足：（ⅰ）$f(a)=1(a>0)$,当$0<x<2a$时$, f(x)>0.$

（ⅱ）对于定义域内任意x,y有$f(x-y)=\frac{f(x)f(y)+1}{f(y)-f(x)}$成立;（Ⅰ）证明：$f(x)$是奇函数且是周期函数;

（Ⅱ）求$f(2a), f(3a)$的值;（Ⅲ）求$f(x)$在$[2a,3a]$上的最小值和最大值.

（Ⅰ）证明：$\because f(\frac{x}{2}-(-\frac{x}{2}))=\frac{f(\frac{x}{2})f(-\frac{x}{2})+1}{f(-\frac{x}{2})-f(\frac{x}{2})}, f(-x)=f(-\frac{x}{2}-\frac{x}{2})=\frac{f(-\frac{x}{2})f(\frac{x}{2})+1}{f(\frac{x}{2})-f(-\frac{x}{2})}=-f(x)$

或$f(y-x)=\frac{f(x)f(y)+1}{f(x)-f(y)}=-f(x-y), \therefore f(-x)=-f(x)$

$$f(x-a)=\frac{f(x)f(a)+1}{f(a)-f(x)}=\frac{f(x)+1}{1-f(x)}, f(x-2a)=\frac{f(x-a)+1}{1-f(x-a)}=\frac{\frac{1+f(x)}{1-f(x)}+1}{1-\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}=\frac{1}{-f(x)}, \therefore f(x-4a)=f(x)$$

（Ⅱ）$f(2a)=f(a-(-a))=\frac{f(a)f(-a)+1}{f(-a)-f(a)}=\frac{-f^2(a)+1}{-2f(a)}=0, f(3a)=f(2a-(-a))=\frac{1}{-f(a)}=-1$

（Ⅲ）$\because$ 当$0<x<2a$时，$f(x)>0.$

$\therefore$ 当$x\in(2a,3a)$时，$x-2a\in(0,a), \therefore f(x-2a)>0, \therefore f(x)=f(x-2a+2a)=\frac{1}{-f(x-2a)}<0$

$\forall x_1,x_2\in(2a,3a)$, 且$x_1<x_2$, 则$f(x_2)-f(x_1)=\frac{f(x_1)f(x_2)+1}{f(x_1-x_2)}=-\frac{f(x_1)f(x_2)+1}{f(x_2-x_1)}$,

$\because 2a<x_1<x_2<3a, \therefore x_2-x_1>0, f(x_1)<0, f(x_2)<, f(x_2-x_1)>0,$

$\therefore f(x_2)<f(x_1)$，则$f(x)$在$[2a,3a]$上是减函数.

$\therefore f(x)_{\min}=-1, f(x)_{\max}=0$