解析几何（1）直线与圆解答（1）

2023-09-02

解答

一.直线

$$1.直线方程\begin{cases}\left.\begin{array}{l}点斜式:y-y_0=k(x-x_0)\\ 斜截式:y=kx+b\\ 两点式:\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}\\ 截距式:\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1\end{array}\right\}特殊形式\\ 一般式：Ax+By+C=0(|A|+|B|\neq 0)\end{cases}$$

2.直线与直线的位置关系

⑴ $l_1:y=k_1x+b_1,l_2:y=k_2x+b_2$

①l_1与l_2相交 $\Leftrightarrow k_1\neq k_2$;②$l_1//l_2\Leftrightarrow k_1=k_2,b_1\neq b_2$;③$l_1=l_2\Leftrightarrow k_1=k_2,b_1=b_2$;

④$l_1\perp l_2\Leftrightarrow k_1k_2=-1$

(2) $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0,l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$

① $\dfrac{A_1}{A_2}\neq\dfrac{B_1}{B_2}\Rightarrow l_1$与$l_2$相交；② $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}\Rightarrow l_1//l_2$；③ $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\Rightarrow l_1$与$l_2$重合

④$l_1\perp l_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$

方向向量$\vec{a}=(x_2-x_1,y_2-y_1)=(1,k)=(-B,A)$

法向量$\vec{n}=(y_2-y_1,x_1-x_2)=(-k,1)=(A,B)$

3.直线系:⑴ 平行直线系：$y=kx+m$(k为常数)

(2) 共点直线系:$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$

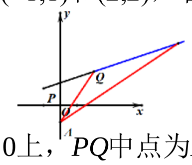
(3) 相交直线系:$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$

4.点线距离公式:$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

5.平行线间距离：$d=\dfrac{|b_1-b_2|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

一、直线

（1994A） 1．已知有向线段 PQ 的起点 P 和终点 Q 的坐标分别为$(-1,1)$和$(2,2)$，若直线$l:x+my+m=0$与 PQ 的延长线相交，则 m 的取值范围是____________________.



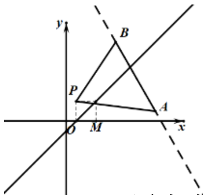
$key:k_{PQ}=\dfrac{1}{3},k_{AQ}=\dfrac{3}{2},\therefore-\dfrac{1}{m}\in(\dfrac{1}{3},\dfrac{3}{2})$得$m\in(-3,-\dfrac{2}{3})$

（2018吉林）已知点P在直线$x+2y-1=0$上，点Q在直线$x+2y+3=0$上，PQ中点为$M(x_0,y_0)$，且$y_0>x_0+2$，则$\dfrac{y_0}{x_0}$的取值范围为____.

$key:M$在直线$x+2y+1=0$上，由$\begin{cases}x+2y+1=0\\ y=x+2\end{cases}$得$\begin{cases}x=-\dfrac{5}{3}\\ y=\dfrac{1}{3}\end{cases},\therefore\dfrac{y_0}{x_0}\in(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{5})$, 2023-09-02

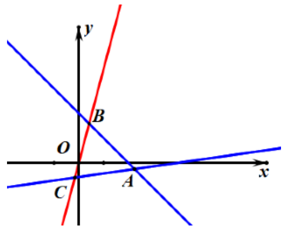
变式：已知点$M(3,0)$关于直线$x-y-1=0$的对称点为P，经过点P作直线l，若直线l与连接$A(9,1),B(5,8)$两点的线段总有公共点，则直线l的斜率k的取值范围为（ ）

$A.[\frac{1}{8},\frac{3}{2}]$ $B.(-\infty,-\frac{1}{8})$ $C.[-\frac{1}{8},\frac{3}{2}]$ $D.(-\infty,-\frac{1}{8}]\cup[\frac{3}{2},+\infty)$



$key:P(1,2),k_{PA}=-\frac{1}{8},k_{PB}=\frac{3}{2}$，如图，$\therefore$ 选C

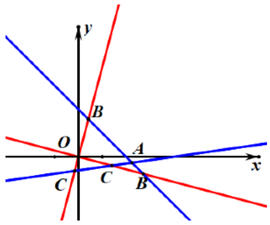
（2008II）11．等腰三角形两腰所在直线的方程分别为$x+y-2=0$与$x-7y-4=0$，原点在等腰三角形的底边上，则底边所在直线的斜率为（ A ）A．3 B．2 C．$-\frac{1}{3}$ D．$-\frac{1}{2}$



$key1$：如图，由$\begin{cases}x+y-2=0\\x-7y-4=0\end{cases}$得$A(\frac{9}{4},-\frac{1}{4})$

设$B(b,2-b),C(c,\frac{c-4}{7})$，则$\begin{cases}\frac{2-b}{b}=\frac{c-4}{7c}\text{即}b=\frac{7c}{4c-2}\\(\frac{9}{4}-b)^2+(-\frac{1}{4}-2+b)^2=(\frac{9}{4}-c)^2+(-\frac{1}{4}-\frac{c-4}{7})^2\end{cases}$得$c=\frac{9}{4}$（舍）$,\frac{6}{5},-\frac{1}{5}$

$\therefore k=\frac{c-4}{7c}=-\frac{1}{3},or,3$



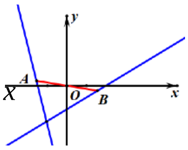
$key2:|\frac{k-(-1)}{1+k\cdot(-1)}|=|\frac{\frac{1}{7}-k}{1+\frac{1}{7}\cdot k}|$得$k=3,-\frac{1}{3}$

（2012福建）已知过点$A(3,-2)$的直线l交x轴正半轴于点B，交直线$l_1:x-2y=0$于点C，且$|AB|=2|BC|$，则直线l在y轴上的截距为_______.7

（2018福建）若直线l与两直线$l_1:x-y-1=0,l_2:13x-3y-11=0$分别交于$A$、$B$两点，且线段$AB$的中点为$P(1,2)$则直线$l$的斜率为（ B ）$A.-2$ $B.-3$ $C.2$ $D.3$

（2022江西）若一直线l被另两条直线$l_1:4x+y+6=0$与$l_2:3x-5y-6=0$所截得的线段的中点恰好是坐标原点，则直线l的方程为______.

$key1$：如图，$A(a,-4a-6),B(b,\frac{3b-6}{5}),\therefore\begin{cases}a+b=0\\-4a-6+\frac{3b-6}{5}=0\end{cases}$得$a=-\frac{36}{23},b=\frac{36}{23},\therefore l:y=-\frac{1}{6}x$



$key2:\begin{cases}y=kx\\(4x+y+6)(3x-5y-6)=0\end{cases}$得$[(4+k)x+6][(3-5k)x-6]=(4+k)(3-5k)x^2-6(1+6k)xx-35=0$

$\therefore -6(1+6k)=0$得$k=-\frac{1}{6}$

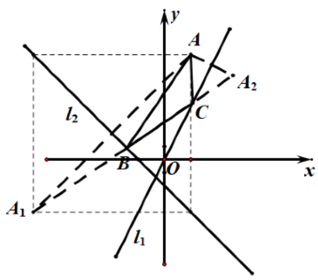
（2015江西）设直线l过点$M(1,2)$.若直线l被两平行直线$4x+3y+1=0$与$4x+3y+6=0$所截得的线段长为$\sqrt{2}$，则直线l的方程为_______.$x+7y-15=0,or,7x-y-5=0$

变式1（1）已知$\triangle ABC$的顶点$A(1,4)$，直线l_1：$y=2x$，l_2：$x+y+1=0$.

若l_1及l_2是三角形的两中线所在直线，则边BC所在直线方程为_____；$y=\frac{5}{4}x-\frac{7}{4}$

若l_1及l_2是三角形的两高线所在直线，则直线BC的方程为____.$y=-\frac{2}{7}x+\frac{48}{7}$

若l_1及l_2是三角形的两角平分线线所在直线，则直线BC的方程为____.

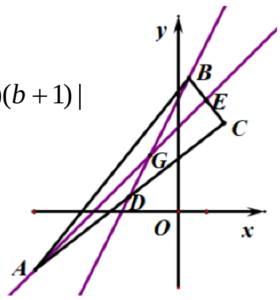


$key: A$关于l_2的对称点$A_1(-5,-2)$，由$\begin{cases}\dfrac{y-4}{x-1}=-\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{4+y}{2}=2\cdot\dfrac{x+1}{2}\end{cases}$得$A$关于$l_1$的对称点$A_2(\dfrac{13}{5},\dfrac{16}{5})$

$\therefore BC$方程为$\dfrac{x+5}{\dfrac{13}{5}+5}=\dfrac{y+2}{\dfrac{16}{5}+2}$即$13x-19y+27=0$

（2） 设$\triangle ABC$是以C为直角的直角三角形，斜边AB的长为60，BC与AC边上的中线所在直线方程分别为$y=x+3$和$y=2x+4$.则$\triangle ABC$的面积为________.

key:由$\begin{cases}y=x+3\\ y=2x+4\end{cases}$得$\triangle ABC$的重心$G(-1,2)$，设$A(a,a+3),B(b,2b+4)$，



$\therefore S_{\triangle ABC}=3S_{\triangle GAB}=\dfrac{3}{2}|GA|\cdot|GB|\sin\angle AGB=\dfrac{3}{2}\cdot\sqrt{2}|-1-a|\cdot\sqrt{5}|b+1|\cdot\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\dfrac{3}{2}|(a+1)(b+1)|$

（$S_{\triangle ABC}=3\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}a & a+3 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ b & 2b+4 & 1\end{vmatrix}=\dfrac{3}{2}|(a+1)(b+1)|$）

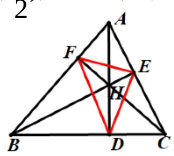
由$|AB|=60,|GF|=\dfrac{1}{3}|CF|=10$得$\begin{cases}(a-b)^2+(a-2b-1)^2=3600\\ (-1-\dfrac{a+b}{2})^2+(2-\dfrac{a+2b+7}{2})^2=100\text{即}(a+b+2)^2+(a+2b+3)^2=400\end{cases}$

令$s=a+1,t=b+1$，则$a=s-1,b=t-1$

且$\begin{cases}(s-t)^2+(s-2t)^2=2s^2-6st+5t^2=3600\\ (s+t)^2+(s+2t)^2=2s^2+6st+5t^2=400\end{cases}$得$3st=800,\therefore S_{\triangle ABC}=400$

（3）设AD,BE,CF是锐角$\triangle ABC$的三条高线，点D,E,F的坐标分别为$(4,0),(\dfrac{80}{17},\dfrac{20}{17}),(\dfrac{5}{2},\dfrac{5}{2})$，求点$A,B,C$的坐标.

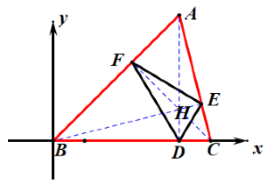
key:由$\angle EFH=\angle EAH=\angle EAD=\angle EBD=\angle DFH,\therefore\triangle ABC$的垂心$H$是$\triangle DEF$的内心，



由$k_{DE}=\dfrac{5}{3},k_{DF}=-\dfrac{5}{3},\therefore AD\perp x$轴$,\therefore l_{AD}:x=4,l_{BC}:y=0,$

而$l_{DE}:5x-3y-20=0;l_{DF}:5x+3y-20=0;l_{EF}:3x+5y-20=0,\therefore l_{BE}:\dfrac{-5x+3y+20}{\sqrt{25+9}}=\dfrac{-3x-5y+20}{\sqrt{9+25}}$即$x-4y=0$

由$\begin{cases}x=4,\\ x-4y=0\end{cases}$得$H(4,1)$,由$AF\perp HF$得$\dfrac{y_A-\dfrac{5}{2}}{4-\dfrac{5}{2}}\cdot\dfrac{1-\dfrac{5}{2}}{4-\dfrac{5}{2}}=-1$得$y_A=4;$



由$BH\perp AE$得$\dfrac{1-0}{4-x_B}=\dfrac{\dfrac{20}{17}-1}{\dfrac{80}{17}-4}$得$x_B=0;$由$CH\perp AF$得$\dfrac{1}{4-x_C}=\dfrac{\dfrac{5}{2}-1}{\dfrac{5}{2}-4}$得$x_C=5;\therefore A(4,4),B(0,0),C(5,0)$

（2020浙江竞赛）某竹竿长为24米，一端靠在墙上，另一端落在地面上.若竹竿上某一节点到墙的垂直距离和到地面的垂直距离都是7米，则此时竹竿靠在墙上的端点到地面的垂直距离为____米，或______米.

20浙江:$16\pm4\sqrt{2}$

（2007吉林）已知$P(2,1)$，过点P作直线l与x轴、y轴正半轴分别交于A、B两点，则使$\triangle AOB$（O为坐标原点）的周长最小的直线l的方程是______. $3x+4y-10=0$

解析几何（1）直线与圆解答（1）

2023-09-02

key：设$A(a,0),B(0,b)(a>0,b>0)$，则$\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}=1,\therefore\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{\lambda^2+1}\ge\lambda a+b$（当且仅当$\dfrac{a}{\lambda}=b$时，取$=$）

$$\therefore 周长=a+b+\sqrt{a^2+b^2}\ge a+b+\frac{\lambda a+b}{\sqrt{\lambda^2+1}}=\frac{\sqrt{\lambda^2+1}+\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}}a+\frac{\sqrt{\lambda^2+1}+1}{\sqrt{\lambda^2+1}}b$$

$$=\frac{\dfrac{2(\sqrt{\lambda^2+1}+\lambda)}{\sqrt{\lambda^2+1}}}{\dfrac{2}{a}}+\frac{\dfrac{\sqrt{\lambda^2+1}+1}{\sqrt{\lambda^2+1}}}{\dfrac{1}{b}}\ge\frac{\left(\sqrt{\dfrac{2(\sqrt{\lambda^2+1}+\lambda)}{\sqrt{\lambda^2+1}}}+\sqrt{\dfrac{\sqrt{\lambda^2+1}+1}{\sqrt{\lambda^2+1}}}\right)^2}{\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}}=\frac{49}{25}$$

（当且仅当$\dfrac{\sqrt{\lambda^2+1}+\lambda}{2\sqrt{\lambda^2+1}}a^2=\dfrac{\sqrt{\lambda^2+1}+1}{\sqrt{\lambda^2+1}}b^2$即$\begin{cases}\lambda=\dfrac{4}{3}\\ a=\dfrac{10}{3},b=\dfrac{5}{2}\end{cases}$取$=$）$,\therefore l:3x+4y=10$

变式 1：已知点$P(2,1)$，过点P作直线l与x轴、y轴正半轴分别交于A、B两点，则使$\triangle AOB$面积最小的直线l的方程为__________；

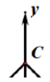
使$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$最大的直线$l$的方程为__________.

$key1:\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}=1(a,b>0)$,则$S=\dfrac{1}{2}ab\ge\sqrt{2},\therefore l$方程为$x+2y-4=0$

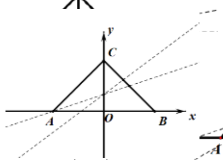
key：设$l_{AB}:y-1=k(x-2)(k<0)$得$x_A=-\dfrac{1}{k}+2,$

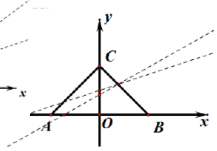
$$\therefore\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-\sqrt{1+k^2}\frac{1}{|k|}\cdot\sqrt{1+k^2}\cdot 2=-2(\frac{1}{-k}+(-k))\le-4,\therefore l_{AB}:y=3-x$$

（2013Ⅱ）已知点$A(-1,0),B(1,0),C(0,1)$，直线$y=ax+b(a>0)$将$\triangle ABC$分割为面积相等的两部分，则b的取值范围为（　　）$A.(0,1)$　　$B.(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2})$　$C.(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{3}]$　　$D.[\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2})$



$key1$:当直线经过点$(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$时，$a=b=\dfrac{1}{3}$;当直线$l//AB$时，$a=0,b=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;





当直线$l//AC$时，$b=\sqrt{2}-1,a=1,\therefore$选$B$;

$key2$:当$-\dfrac{b}{a}\ge-1,$且$b\in(0,1)$时，$S_{\triangle EFB}=\dfrac{1}{2}\cdot(1+\dfrac{b}{a})\cdot\dfrac{a+b}{a+1}=\dfrac{1}{2}$即$a=\dfrac{b^2}{1-2b}\ge b$得$b\in[\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2})$

当$-\dfrac{b}{a}\ge-1,$且$b\in(0,1)$时，$S_{\triangle E_1F_1B}=\dfrac{1}{2}\cdot(\dfrac{1-b}{1+a}-\dfrac{1-b}{a-1})\cdot(1-b)=\dfrac{1}{2}$即$a^2=-b^2+4b-1\ge b^2$得$b\in(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{3})$