解析几何（1）直线与圆解答（3）

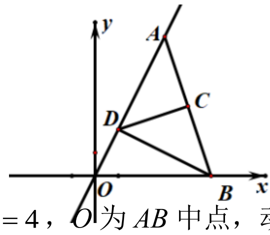
2023-09-16

（2014 四川）14．设 $m\in R$，过定点 A 的动直线 $x+my=0$ 和过定点 B 的动直线 $mx-y-m+3=0$ 交于点 $P(x,y)$，则 $|PA|\cdot|PB|$ 的最大值是______5

$key: A(0,0), B(1,3),$ 且$PA\perp Pb, \therefore |PA|\cdot|PB|\le\frac{|AB|^2}{2}=5$

（2018 江苏） 12. 在平面直角坐标系 xOy 中，A 为直线 $l: y=2x$ 上在第一象限内的点， $B(5,0)$，以 AB 为直径的圆 C 与直线 l 交于另一点 D．若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$，则点 A 的横坐标为________． 3

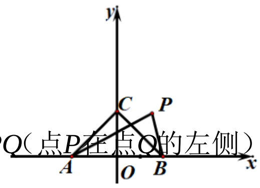
$key: AB\perp CD, AD\perp BD, \therefore \triangle ADB$是等腰直角三角形，



$|DB|=\frac{10}{\sqrt5}=2\sqrt5,$ 且$\begin{cases}y=2x\\ y=-\frac12(x-5)\end{cases}$得$x_D=1, \therefore \sqrt5(x_A-1)=2\sqrt5$得$x_A=3$

（2015 福建） 5．已知$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，$|CA|=|CB|$，$|AB|=4$，O 为 AB 中点，动点 P 满足条件: $|PO|^2=|PA|\cdot|PB|$，则线段 CP 长的最小值为（ B ）A．$\sqrt3$ B．2 C．$\sqrt5$ D．4

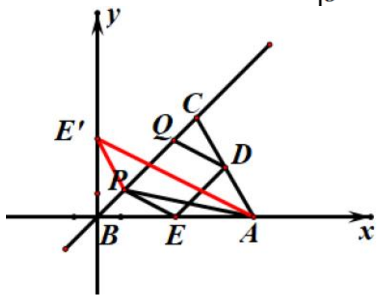
$key:$ 建系如图，则$A(-2,0), B(2,0), C(0,2)$, 设$P(x,y)$,



则$|PO|^2=x^2+y^2=\sqrt{[(x+2)^2+y^2][(x-2)^2+y^2]}\Leftrightarrow (x^2+y^2)^2=(x^2+y^2+4)^2-16x^2$

$\Leftrightarrow x^2-y^2=2, \therefore |CP|=\sqrt{x^2+(y-2)^2}=\sqrt{2y^2-4y+4}\ge2,$ 此时$P(\pm\sqrt3,1)$

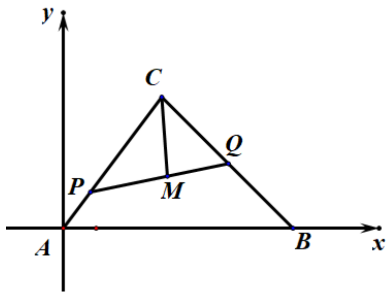
(2016浙江）在$\triangle ABC$中，$B=\frac{\pi}{4}, C=\frac{5\pi}{12}, AC=2\sqrt6$, AC的中点为D，若长度为3的线段PQ（点P在点Q的左侧）在直线BC上滑动，则$AP+DQ$的最小值为______. $\frac{\sqrt{30}+3\sqrt{10}}{2}$



$key: \frac{AB}{\sin\frac{5\pi}{12}}=\frac{2\sqrt6}{\frac{\sqrt2}{2}}$得$AB=3\sqrt2+\sqrt6, |BC|=6$

取AB的中点E，则$DE\underset{=}{/\!/}PQ, \therefore DQ+AP=PE+PA\ge\frac{\sqrt{30}+3\sqrt{10}}{2}$

(2021浙江竞赛)9.已知$\triangle ABC$三个顶点的坐标为$A(0,0), B(7,0), C(3,4)$, 过点$(6-2\sqrt2, 3-\sqrt2)$的直线分别与线段AC, BC交于P, Q.若$S_{\triangle PQC}=\frac{14}{3}$, 则$|CP|+|CQ|=$______.



9.$key: l_{AC}: 4x-3y=0; l_{BC}: x+y-7=0$

$\therefore d_{M\to l_{CA}}=\frac{|4(6-2\sqrt2)-3(3-\sqrt2)|}{5}=3-\sqrt2$

$d_{M\to l_{BC}}=\frac{|9-3\sqrt2-7|}{\sqrt2}=3-\sqrt2, \therefore CM$时$\angle PCQ$的平分线

设$|CP|=t_1, |CQ|=t_2, \angle PCQ=\frac{\pi}{4}+\arccos\frac45=2\alpha,$

$t_0=|\overrightarrow{CM}|=\sqrt{20-10\sqrt2}, \cos2\alpha=\frac{\sqrt2}{10}, \sin\alpha=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt2}{10}}{2}}=\sqrt{\frac{10-\sqrt2}{20}}$, 则$\frac12t_1t_0\sin\alpha+\frac12t_2t_0\sin\alpha=\frac12t_1t_1\sin2\alpha=\frac{14}{3}$

得$t_1+t_2=\frac{\frac{28}{3}}{t_0\sin\alpha}=\frac{28}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{(20-10\sqrt2)\cdot\frac{10-\sqrt2}{20}}}=\frac{4(3+\sqrt2)}{3}$

（13 浙江竞赛）设二次函数 $f(x)=ax^2+(2b+1)x-a-2(a,b\in R, a\ne0)$ 在$[3,4]$上至少有一个零点，

2023-09-16

则 a^2+b^2 的最小值为（　　）A. $\frac{1}{100}$　　B. $\frac{1}{10}$　　C. $\frac{4}{289}$　　D. $\frac{1}{(2\sqrt{5}+4)^2}$

$key: ax^2+(2b+1)x-a-2=0 \Leftrightarrow (x^2-1)a+2x\cdot b+x-2=0$表示直线

$\therefore a^2+b^2 \ge (\frac{|x-2|}{\sqrt{(x^2-1)^2+4x^2}})^2=(\frac{x-2}{x^2+1})^2$（令$t=x-2\in[1,2]$）

$=(\frac{t}{t^2+4t+5})^2=(\frac{1}{t+\frac{5}{t}+4})^2\ge\frac{1}{100}$（当且仅当$t=1$时取$=$）

（201901 学考）25.设 $a\in R$，已知函数 $f(x)=|x^2+\frac{1}{x}|+|x^2-\frac{1}{x}|+ax$. 设 $b\in R$，若关于 x 的方程 $f(x)=b-8$ 有实数解，则 a^2+b^2 的最小值为________.

$key1$:（变量转换）设方程$f(x)=b-8$的解为α，设$g(\alpha)=\max\{2\alpha^2+8,\frac{2}{|\alpha|}\}+8$

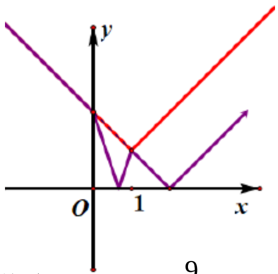
则$\alpha a-b+g(\alpha)=0,\therefore a^2+b^2\ge(\frac{g(\alpha)}{\sqrt{1+\alpha^2}})^2$

当$|\alpha|\ge1$时，$\frac{g(\alpha)}{\sqrt{\alpha^2+1}}=2\sqrt{\alpha^2+1}+\frac{6}{\sqrt{\alpha^2+1}}\ge4\sqrt{3}$（当且仅当$\alpha=\pm\sqrt{2}$时取$=$）

当$|\alpha|\le1$时，$\frac{g(\alpha)}{\sqrt{\alpha^2+1}}=(\frac{2}{|\alpha|}+8)\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+1}}\ge5\sqrt{2}$（当且仅当$\alpha=\pm1$时取$=$），$\therefore a^2+b^2$的最小值为48

（1906学考）已知函数$f(x)$是定义在R上的偶函数，且在$[0,+\infty)$上单调递增.若对任意$x\in R$，不等式$f(a+|x-b|)\ge f(|x|-2|x-1|)$恒成立，则$2a^2+b^2$的最小值是______.

key：原不等式$\Leftrightarrow|a+|x-b||\ge||x|-2|x-1||$，如图，



则有$b+a\ge2$，令$u=\sqrt{2}a, b=v$，

则有$\frac{u}{\sqrt{2}}+v\ge2,\therefore 2a^2+b^2=(\sqrt{u^2+v^2})^2\ge(\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{2}}})^2=\frac{8}{3}$

变式：若关于 x，y 的方程组$\begin{cases}mx+y=1\\x+y=n\end{cases}$在$x\in[1,2]$上有解，则$m^2+n^2$的最小值为________. $\frac{9}{5}$

$key: mx-x=1-n$即$xm+n-x-1=0(x\in[1,2]),\therefore m^2+n^2\ge(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}})\ge\frac{9}{5}$

一、直线与圆

1.圆的定义：到定点的距离为定长、

到两定点的距离之比为常数、

对边固定的定角顶点的轨迹

（15竞赛）已知向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，$|\vec{a}-\vec{b}|=5$，向量$\vec{c}-\vec{a},\vec{c}-\vec{b}$的夹角为$\frac{2\pi}{3}$，$|\vec{c}-\vec{a}|=2\sqrt{3}$，则$\vec{a}\cdot\vec{c}$的最大值为_.

24

（201906学考）已知四面体$ABCD$中，棱BC,AD所在直线所成的角为$60°$，且$BC=2,AD=3,\angle ACD=120°$，则四面体$ABCD$的体积的最大值是（　　）$A.\frac{\sqrt{3}}{2}$　　$B.\frac{\sqrt{3}}{4}$　　$C.\frac{9}{4}$　　$D.\frac{3}{4}$　　D

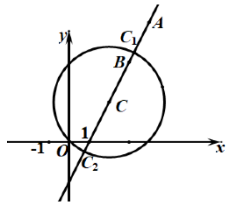
（21012福建）已知圆$C:(x-2)^2+(y-2)^2=m$，点$A(4,6),B(s,t)$.

(1) 若$3s-4t=-12$，且直线AB被圆C截得的弦长为4，求m的值；

(2) 若s,t为正整数，且圆C上任意一点到A的距离与到点B的距离之比为定值$\lambda(\lambda>1)$，求m的值.

2023-09-16

解：（1）由$l_{AB}:\dfrac{x-4}{s-4}=\dfrac{y-6}{t-6}=\dfrac{y-6}{\frac{3}{4}s-3}=\dfrac{4(y-6)}{3(s-4)}$即$3x-4y+12=0$



$\therefore AB$被圆C截得的弦长为$2\sqrt{m^2-(\dfrac{6-8+12}{5})^2}=4$得$m=8$

$key2$:由C,A,B三点共线得$\dfrac{t-2}{s-2}=\dfrac{6-2}{4-2}=2$即$t=2s-2$代入圆$C$得$s=2\pm\sqrt{\dfrac{m}{5}}$, 且$2<s<4, s\in N^*$

$\therefore s=3$, 且$\dfrac{4-(2+\sqrt{\frac{m}{5}})}{2+\sqrt{\frac{m}{5}}-3}=\dfrac{4-(2-\sqrt{\frac{m}{5}})}{3-(2-\sqrt{\frac{m}{5}})}$得$m=10$

(201407学考）在平面直角坐标系xOy中，点$A(-1,0), B(1,0)$，设曲线C上的任意一点P满足

$|PA|=\lambda|PB|(\lambda>0$, 且$\lambda\neq1)$.（Ⅰ）求曲线$C$的方程，并指出形状；

（Ⅱ）对λ的两个不同取值λ_1,λ_2，记对应的曲线为C_1,C_2.（ⅰ）若曲线C_1,C_2关于某直线对称，求$\lambda_1\cdot\lambda_2$；

（ⅱ）若$\lambda_2>\lambda_1>1$，判断两曲线的位置关系，并说明理由.

解:（Ⅰ）由$|PA|=\lambda|PB|(\lambda>0$, 且$\lambda\neq1)$得$(x+1)^2+y^2=\lambda^2((x-1)^2+y^2)$

即$(1-\lambda^2)x^2+(1-\lambda^2)y^2+2(1+\lambda^2)x+1-\lambda^2=0$,

$\therefore$曲线C得方程为:$(x+\dfrac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2})^2+y^2=(\dfrac{2\lambda}{1-\lambda^2})^2$, 曲线$C$是圆

（Ⅱ）（ⅰ）由（Ⅰ）得:$|\dfrac{\lambda_1}{1-\lambda_1^2}|=|\dfrac{\lambda_2}{1-\lambda_2^2}|, \therefore\lambda_1\lambda_2=1$

（ⅱ）$\because\lambda_2>\lambda_1>1, \therefore(\lambda_2-1)(\lambda_1-1)=\lambda_1\lambda_2-\lambda_2-\lambda_1+1>0$即$\lambda_2\lambda_1+1>\lambda_2+\lambda_1$,

$\therefore|C_1C_2|=|\dfrac{1+\lambda_2^2}{1-\lambda_2^2}-\dfrac{1+\lambda_1^2}{1-\lambda_1^2}|=\dfrac{2(\lambda_2^2-\lambda_1^2)}{(\lambda_2^2-1)(\lambda_1^2-1)}=\dfrac{2(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2+\lambda_1)}{(\lambda_2^2-1)(\lambda_1^2-1)}$

$|r_2-r_1|=|\dfrac{2\lambda_2}{\lambda_2^2-1}-\dfrac{2\lambda_1}{\lambda_1^2-1}|=\dfrac{2(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_1\lambda_2+1)}{(\lambda_2^2-1)(\lambda_1^2-1)}>|C_1C_2|, \therefore$两曲线内含

($\because\lambda_2>\lambda_1>1\therefore(\lambda_2+1)(\lambda_1-1)=\lambda_1\lambda_2-\lambda_2+\lambda_1-1>0$即$\lambda_2\lambda_1-1>\lambda_2-\lambda_1$，$r_1+r_2=\dfrac{2\lambda_2}{\lambda_2^2-1}+\dfrac{2\lambda_1}{\lambda_1^2-1}=\dfrac{2(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1\lambda_2-1)}{(\lambda_2^2-1)(\lambda_1^2-1)}>|C_1C_2|$)

(2015湖北）如图，圆C与x轴切于点$T(1,0)$，与y轴正半轴交于A、B（B在A的上方），且$|AB|=2$.

则圆C的标准方程为________；$(x-1)^2+(y-\sqrt{2})^2=2$

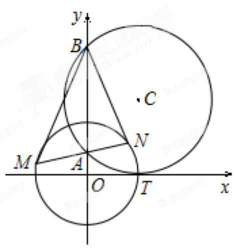
若过点A任作一条直线与圆$O:x^2+y^2=1$相交于M,N两点，下列三个结论：①$\dfrac{|NA|}{|NB|}=\dfrac{|MA|}{|MB|}$；

②$\dfrac{|NB|}{|NA|}-\dfrac{|MA|}{|MB|}=2$；③$\dfrac{|NB|}{|NA|}+\dfrac{|MA|}{|MB|}=2\sqrt{2}$.其中正确结论的序号是____. ①②③

$key:C:(x-1)^2+(y-\sqrt{2})^2=2$，且$A(0,\sqrt{2}-1), B(0,\sqrt{2}+1)$,

则$(\sqrt{2}+1)|QA|=|QB|\Leftrightarrow(\sqrt{2}+1)^2[x^2+(y-\sqrt{2}+1)^2]=x^2+(y-\sqrt{2}-1)^2$

即$x^2+y^2=1$



$\therefore\dfrac{|NA|}{|NB|}=\sqrt{2}-1=\dfrac{|MA|}{|MB|}, \dfrac{|NB|}{|NA|}-\dfrac{|MA|}{|MB|}=\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1)=2$,

$\dfrac{|NB|}{|NA|}+\dfrac{|MA|}{|MB|}=\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1=2\sqrt{2}, \therefore$①②③都对

$$2.\text{圆方程}:\begin{cases}\text{标准方程}:(x-a)^2+(y-b)^2=R^2\\ \text{一般方程：}x^2+y^2+Dx+Ey+F=0\end{cases}$$

二元二次方程$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$表示的曲线的必要条件：

解析几何（1）直线与圆解答（3）

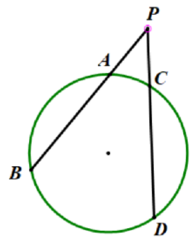
2023-09-16

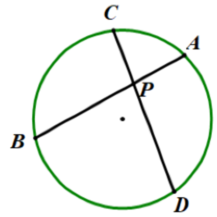
圆：$A=C\neq 0, B=0$

椭圆：$\Delta=B^2-4AC<0$

抛物线：$\Delta=0$

双曲线：$\Delta<0$

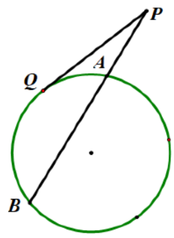




3.直线与圆的位置关系

$$\begin{cases} 相交 d<R(弦长 l=2\sqrt{R^2-d^2}) \\ 相切 d=R(圆 x^2+y^2=R^2 上点的切线: x_0x+y_0y=R^2) \\ 极线: x_0x+y_0y=R^2 \\ 相离: d>R \end{cases}$$

$$4.圆与圆的位置关系 (d=|C_1C_2|)\begin{cases} d>r_1+r_2: 外离 \\ d=r_1+r_2: 外切 \\ |r_1-r_2|<d<r_1+r_2: 相交 \\ (圆系: f_1(x,y)+\lambda f_2(x,y)=0) \\ d=|r_1-r_2|: 内切 \\ d<|r_1-r_2|: 内含 \end{cases}$$



相交弦定理：$PA\cdot PB=PC\cdot PD$

切割线定理：$PQ^2=PA\cdot PB$

（2010 浙江）13. 设 P 是圆 $x^2+y^2=36$ 上一动点，A 点坐标为 $(20,0)$.当 P 在圆上运动时，线段 PA 的中点 M 的轨迹方程为_________._$(x-10)^2+y^2=9$

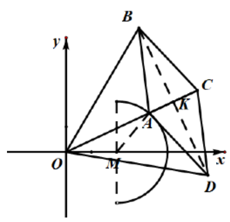
（2015 湖南））8. 已知点 A,B,C 在圆 $x^2+y^2=1$ 上运动，且 $AB\perp BC$，若点 P 的坐标为 $(2,0)$，则 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|$ 的最大值为（ B ）A.6 B.7 C.8 D.9

（2016 年上海）已知线段 AB、CD 的长分别为 a、$b(a,b>0)$.若线段 AB、CD 分别在 x 轴、y 轴上滑动，且使得 A、B、C、D 四点共圆，则这些圆的圆心轨迹方程为___ $4x^2-4y^2-a^2+b^2=0$ ____

（2012A）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，菱形 $ABCD$ 的边长为4，且 $|OB|=|OD|=6$.

(1) 求证：$|OA|\cdot|OC|$ 为定值；

(2) 当点 A 在半圆 $(x-2)^2+y^2=4(2\le x\le 4)$ 上运动，求点 C 的轨迹.



2012key: (1) $\because ABCD$ 为菱形, $\therefore \triangle OAB\cong\triangle OAD, \triangle ABC\cong\triangle ADC, \therefore O,A,C$ 三点共线,

$\therefore |OA|\cdot|OC|=(|OK|-|AK|)(|OK|+|KC|)$

$=|OK|^2-|AK|^2=(|OB|^2-|BK|^2)-(|AB|^2-|BK|^2)=6^2-4^2=20$ 为定值

$$(2)\ key: 设 C(x,y)，则 \begin{cases} \dfrac{y_A}{x_A}=\dfrac{y}{x}=k \\ x_A^2+y_A^2-4x_A=x_A^2+k^2x_A^2-4x_A=0 即 x_A=\dfrac{4}{1+k^2}, \\ (1+k^2)x_Ax=20 \end{cases}$$

$\therefore x=5(-5\le y\le 5), \therefore C$ 的轨迹是以 $M(5,-5), N(5,5)$ 为端点的线段

变式 1（1）① $Rt\triangle ABC$ 中，$AB=2, AC=1, C$ 为直角顶点，若 A、B 分别在 x、y 轴的正半轴上滑动，则 AB 的中点 P 的轨迹是______；以 O 为圆心，半径为1的圆在第一象限的圆弧；

顶点 C 的轨迹为____________.

$key: \angle COA=\angle CBA, \therefore C$ 的轨迹是线段 $y=\sqrt{3}x(\dfrac{\sqrt{3}}{2}<x\le\sqrt{3})$

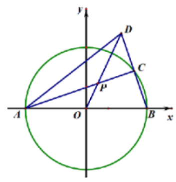
解析几何（1）直线与圆解答（3）

2023-09-16

②已知$\triangle ABC$中，AB边是长度为$2a$的定线段，且$\angle ACB=\dfrac{2\pi}{3}$，则$C$点的轨迹为________________.

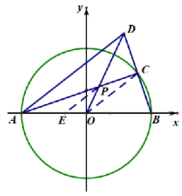
key:圆心AB的中垂线上，且AB的距离为$\dfrac{a}{\sqrt{3}}$，半径为$\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$的两段优弧

③如图，已知$A(-1,0)$与点$B(1,0)$，C是圆$x^2+y^2=1$上的动点，联结BC并延长之点D，使得$|CD|=|BC|$，则AC与OD的交点P的轨迹方程为________.



$key1$: P是$\triangle ABD$的重心，设$P(x,y)$，则$\begin{cases}\dfrac{2x_C}{3}+\dfrac{-1}{3}=x\\ \dfrac{2y_C}{3}=y\end{cases}$ 即$\begin{cases}x_C=\dfrac{1}{2}(3x+1)\\ y_C=\dfrac{3}{2}y\end{cases}$

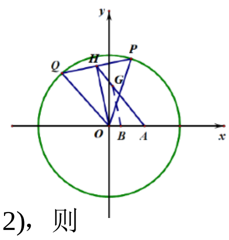
$\therefore \dfrac{1}{4}(3x+1)^2+(\dfrac{3}{2}y)^2=1$即$(x+\dfrac{1}{3})^2+y^2=\dfrac{4}{9}$



$key2$:作$PE//CO$，则$\overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AO}$，且$|\overrightarrow{PE}|=\dfrac{2}{3}$，则$E(-\dfrac{1}{3},0)$

$\therefore$点P的轨迹方程为$(x+\dfrac{1}{3})^2+y^2=\dfrac{4}{9}$

（2）①已知圆$O:x^2+y^2=4$上两动点P,Q满足$\angle POQ=60°$，点$A(1,0)$，则$\triangle APQ$的重心的轨迹方程为____.



key:$|GB|=\dfrac{2}{3}|OH|$（$G(x,y)$为重心），则$(x-\dfrac{1}{3})^2+y^2=\dfrac{4}{3}$

②已知圆$C:x^2+y^2=4$，点M在直线l：$y=2$上，过点M作圆C的切线切圆C于点A，点$B(0,2)$，则$\triangle MAB$的垂心的轨迹方程为________.

key:设垂心为H，则$OAHB$为菱形，$\therefore|HB|=2$，$\therefore x^2+(y-2)^2=4(x\neq 0)$

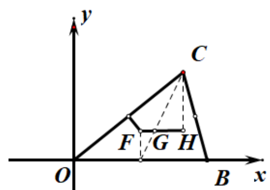
① 已知长为1的线段AB在直线$l:y=1$上滑动，则$\triangle OAB$的外心的轨迹方程为______

key:$\dfrac{1}{4}+(1-y)^2=x^2+y^2$即$x^2=\dfrac{5}{4}-2y$

（3）已知点$A(-1,0)$，$B(1,0)$，Q为$\triangle ABC$的外心，且$\overrightarrow{CG}+2\overrightarrow{OG}=\vec{0}$，$\overrightarrow{QG}//\overrightarrow{AB}$，则点$C$的轨迹方程为____.

key:设$C(x,y)$，则$G(\dfrac{x}{3},\dfrac{y}{3})$，$Q(0,\dfrac{y}{3})$，$\therefore 1+\dfrac{y^2}{9}=x^2+\dfrac{4}{9}y^2$即$x^2+\dfrac{1}{3}y^2=1(y\neq 0)$

（4）已知$\triangle OBC$的三个顶点为$O(0,0)$、$B(1,0)$、$C(b,c)$，F、H分别为$\triangle OBC$的外心与垂心，若$\overrightarrow{FH}//\overrightarrow{OB}$，则顶点$C$的轨迹方程为______.



$key1$:由已知得$F(\dfrac{1}{2},t)$，$H(b,t)$

则$\begin{cases}\dfrac{t-\dfrac{c}{2}}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{b}{2}}\cdot\dfrac{c}{b}=-1即2ct-c^2=b^2-b\\ \dfrac{t}{b}\cdot\dfrac{c}{b-1}=-1即ct=b-b^2\end{cases}$ 消去t得$3b^2-3b-c^2=0$，$\therefore C$的轨迹方程为$3x^2-y^2-3x=0(y\neq 0)$

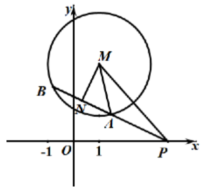
$key2$:由F,G,H共线（欧拉线），且$\overrightarrow{FG}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GH}$，

设$C(x,y)$，则$G(\dfrac{1+x}{3},\dfrac{y}{3})$，$H(x,\dfrac{y}{3})$，$F(\dfrac{1}{2},\dfrac{y}{3})$，$\therefore \dfrac{\dfrac{y}{3}-\dfrac{y}{2}}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{2}}\cdot\dfrac{y}{x}=-1$即$3x^2-y^2-3x=0(y\neq 0)$

解析几何（1）直线与圆解答（3）

2023-09-16

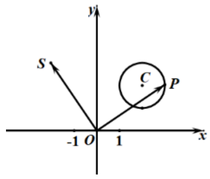
（2007 上海）已知圆 $M:(x-1)^2+(y-3)^2=4$，过 x 轴上的点 $P(a,0)$ 存在圆 M 的割线 PBA，使得 $PA=BA$，则点 P 的横坐标 a 的取值范围是______________．$1-3\sqrt{3}\le a\le 1+3\sqrt{3}$



$key:|PM|^2-|PN|^2=|PM|^2-9|AN|^2=4-|AN|^2$

得$(a-1)^2+9=|PM|^2=4+2|AB|^2\le 36$得$1-3\sqrt{3}<a<1+3\sqrt{3}$

（2009 新疆）13.已知 P 是圆 $(x-2)^2+(y-2)^2=1$ 上一动点，向量 $\overrightarrow{OP}$ 依逆时针方向旋转 90°得到向量 $\overrightarrow{OS}$，又点 P 关于 $A(3,0)$ 的对称点为 T，求 $|\overrightarrow{TS}|$ 的取值范围.

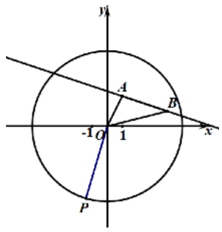


解：设$P(2+\cos\theta,2+\sin\theta)$,则$S(-2-\sin\theta,2+\cos\theta)$，且$T(4-\cos\theta,-2-\sin\theta)$

则 $|\overrightarrow{TS}|=\sqrt{(6+\sin\theta-\cos\theta)^2+(4+\sin\theta+\cos\theta)^2}=\sqrt{54+20\sin\theta-4\cos\theta}$

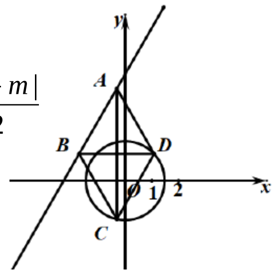
$\in[\sqrt{54-2\sqrt{4\times 26}},\sqrt{54+2\sqrt{4\times 26}}]=[2\sqrt{13}-\sqrt{2},2\sqrt{13}+\sqrt{2}]$

（2011甘肃）4. 在平面直角坐标系中，已知点 $A(1,2)$ 和 $B(4,1)$．圆 $x^2+y^2=25$ 上的动点 $P(x,y)$ 与 A,B 形成三角形，则三角形 ABP 的面积的最大值为______. $\dfrac{7+5\sqrt{10}}{2}$



$key:$由$AB:y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{7}{3},\therefore(S_{\triangle ABP})_{\max}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot(5+\dfrac{\frac{7}{3}}{\sqrt{1+\frac{1}{9}}})=\dfrac{5\sqrt{10}+7}{2}$

（2016 年陕西）已知直线 $l:y=\sqrt{3}x+4$, 动圆 $\odot O:x^2+y^2=r^2(1<r<2)$，菱形 $ABCD$ 的一个内角为 60°，顶点 A、B 在直线 l 上，顶点 C、D 在⊙O 上.当 r 变化时，求菱形 $ABCD$ 的面积 S 的取值范围.



$key:$由直线l的倾斜角为$60°,\therefore AC\perp x$轴，

设$l_{CD}:y=\sqrt{3}x+m$，则有$|CD|=2\sqrt{r^2-\dfrac{m^2}{4}}$，且$|CD|\sin 60°=\sqrt{3r^2-\dfrac{3m^2}{4}}=\dfrac{|4-m|}{2}$

$\therefore 3r^2=4-2m+m^2\in(3,12)$得$m\in(0,1)\cup(1,4)$

$\therefore S=\dfrac{\sqrt{3}}{2}|CD|^2=2\sqrt{3}(r^2-\dfrac{m^2}{4})=\dfrac{\sqrt{3}}{6}(m-4)^2\in(0,\dfrac{3\sqrt{3}}{2})\cup(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},6\sqrt{3})$