2023-24（下）模拟（11）

2024-02-20

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 命题“有些三角形是直角三角形”的否定为（　　）A. 所有三角形都是直角三角形

B. 所有三角形都不是直角三角形　　C. 有些三角形不是直角三角形　　D. 有些三角形不是锐角三角形

2. 若复数 z 满足 $z(i+1)=1$，则 $z\cdot\bar{z}=$（　　）A. i　　B. $-i$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

3. 已知正数 a,b 满足 $a+2b=1$，则（　　）A. $ab\geq\frac{1}{8}$　B. $ab>\frac{1}{8}$　　C. $0<ab\leq\frac{1}{8}$ D. $0<ab<\frac{1}{8}$

4. 已知 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x},0\leq x\leq 1,\\ 2f(x-1),x>1\end{cases}$，则 $f(\frac{5}{4})=$（　　）A. 2B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　C. $\frac{3}{2}$　　D. 1

5. 已知集合 $A=\{y\,|\,y=\ln x,x\in B\}$，若 $A\cup B=[0,e]$，则集合 B 可以为（　　）

A. $(0,e]$　　　　B. $(0,1]$　　　　C. $(1,e]$　　　　D. $[1,e]$

6. 为了解决化圆为方问题，古希腊数学家希皮亚斯发明了“割圆曲线”，若割圆曲线的方程为 $y=\dfrac{x}{\tan(\frac{\pi}{2}x)}$，

$0<x<1$，则（　　）A. y 有最大值 B. y 有最小值　C. y 随 x 的增大而增大　D. y 随 x 的增大而减小

7. 已知 $\triangle ABC$ 内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，面积为 S，满足 $S=\frac{1}{3}(a^2-b^2)\sin C$，则下列说法错误的是

（　）A. $2a-b\neq 0$　B. $a-2b=0$　C. 存在 $k=1$ 使得 $\tan A:2\tan C=1:2k$　D. 存在 $m=1$ 使得 $a=2mb$

8. 在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 和抛物线 $y^2=\frac{1}{4}ax$ 交于点 A，B，点 P 为椭圆的右顶点.若 O、A、P、B 四点共圆，则椭圆离心率为（　　）A. $\frac{\sqrt{7}}{7}$　　B. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$　　C. $\frac{3\sqrt{7}}{7}$　　D. $\frac{4\sqrt{7}}{7}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 对于随机变量 X，下列说法正确的有（　　）A. 若 $E(X)=1$，则 $E(2X-1)=1$

B. 若 $D(X)=1$，则 $D(2X-1)=4$　C. 若 $X\sim N(2,4)$，则 $E(X)=4$　D　若 $X\sim B(10,0.5)$，则 $E(X)=5$

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$\frac{1}{a_n-a_{n+1}}=1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$，则

（　　）A. $a_1b_1=a_2b_2=a_3b_3$　　B. $a_nb_n=a_{n+1}b_{n+1}$　　C. 存在 $k\in N^*$，使得 $a_k\leq a_{k+1}$

D. 数列 $\{b_n\}$ 单调递增，且对任意 $n\in N^*$，都有 $b_1+b_2+\cdots+b_n<2^{n+1}$

11. 已知 $P(x_P,y_P)$，$Q(x_Q,y_Q)$ 是曲线 $C:6x^2-6x+7y^2-21+|y^2+6x-3|=0$ 上不同的两点，O 为坐标原点，则

（　　）A. $x_Q^2+y_Q^2$ 的最小值为 1　　　B. $4\leq\sqrt{(x_P-1)^2+y_P^2}+\sqrt{(x_P+1)^2+y_P^2}\leq 6$

C. 若直线 $y=k(x-3)$ 与曲线 C 有公共点，则 $k\in[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}]$

D. 对任意位于 y 轴左侧且不在 x 轴上的点 P，都存在点 Q，使得曲线 C 在 P,Q 两点处的切线垂直

三、填空题；本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

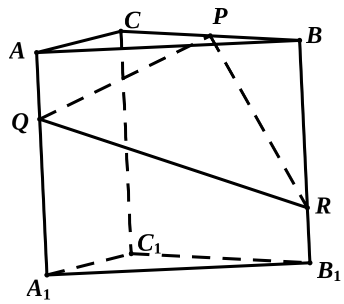
12. 设 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，满足 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，则 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AB}=$______.

13. 楷书也叫正楷、真书、正书，是从隶书逐渐演变而来的一种汉字字体，其书写特点是笔画严整规范、线条平直自然、结构匀称方正、运笔流畅有度，《辞海》解释楷书“形体方正，笔画平直，可作楷模”，故名楷书.楷书中竖的写法有垂露竖、悬针竖和短竖三种，小君同学在练习用楷书书写“十”字时，竖的写法可能随机选用其中任意一种，现在小君一行写了 5 个“十”字，若只比较 5 处竖的写法，不比较其它笔画，且短竖不超过 3 处，则不同的写法共有______种.（用数字作答）

14. 棱长为 10cm 的密闭正四面体容器内装有体积为 $18\sqrt{2}cm^3$ 的水，翻转容器，使得水面至少与 2 条棱平行，且水面是三角形，不考虑容器厚度及其它因素影响，则水面面积的最小值为______ cm^2.

四、解答题：共 77 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$CC_1\perp$ 平面 ABC，$AC=CB=2$，$AA_1=3$，$\angle ACB=90^\circ$，P 为 BC 的中点，点 Q,R 分别在棱 AA_1，BB_1 上，$A_1Q=2AQ$，$BR=2RB_1$.



（1）求证；$AC\perp PR$；

（2）求平面 PQR 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成二面角的余弦值.

16. 数学运算是数学学科的核心素养之一，具备较好的数学运算素养一般体现为在运算中算法合理、计算准确、过程规范、细节到位，为了诊断学情、培养习惯、发展素养，某老师计划调研准确率与运算速度之间是否有关，他记录了一段时间的相关数据如下表：

项目	速度快	速度慢	合计
准确率高	10	22	32
准确率低	11	17	28
合计	21	39	60

（1）依据 $\alpha=0.010$ 的独立性检验，能否认为数学考试中准确率与运算速度相关？

（2）为鼓励学生全面发展，现随机将准确率高且速度快的 10 名同学分成人数分别为 3，3，4 的三个小组进行小组才艺展示，若甲、乙两人在这 10 人中，求甲在 3 人一组的前提下乙在 4 人一组的概率.

附：

α	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ 其中 $n=a+b+c+d$.

17. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，点 $F(4,0)$ 是 C 的右焦点，C 的一条渐近线方程为 $y=\sqrt{3}x$.

（1）求 C 的标准方程；（2）过点 F 的直线与 C 的右支交于 A,B 两点，以 AB 为直径的圆记为 M，是否存在定圆与圆 M 内切？若存在，求出定圆的方程；若不存在，说明理由.

18. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{e^x}+\ln(-x+m), m\in R$.（1）当 $m=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线方程；

（2）若 $f(x)$ 有且仅有 1 个零点，求 m 的取值范围.

19. 对于项数为 m 的数列 $\{a_n\}$，若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_k=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，$(k=1,2,\cdots,m)$，其中，$\max M$ 表示数集 M 中最大的数，则称数列 $\{b_n\}$ 是 $\{a_n\}$ 的 P 数列.

（1）若各项均为正整数的数列 $\{a_n\}$ 的 P 数列是 $3,4,4,5$，写出所有的数列 $\{a_n\}$；

（2）证明：若数列 $\{a_n\}$ 中存在 a_i 使得 $a_i>a_1$ $(2\le i\le m)$，则存在 $k\in\{1,2,\cdots,m-1\}$ 使得 $b_{k+1}>b_k$ 成立；

（3）数列 $\{b_n\}$ 是 $\{a_n\}$ 的 P 数列，数列 $\{c_n\}$ 是 $\{-a_n\}$ 的 P 数列，定义 $d_n=|\sum\limits_{i=1}^{n}\operatorname{sgn}(a_n-a_i)|$ 其中

$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$. 求证：$\{b_n+c_n\}$ 为单调递增数列的充要条件是 $\{d_n\}$ 为单调递增数列.

2023-24（下）模拟（11）

2024-02-20

解答

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 命题“有些三角形是直角三角形”的否定为（B ）A. 所有三角形都是直角三角形

B. 所有三角形都不是直角三角形　　C. 有些三角形不是直角三角形　　D. 有些三角形不是锐角三角形

2. 若复数 z 满足 $z(i+1)=1$，则 $z\cdot\bar{z}=$（ C ）A. i　B. $-i$　C. $\frac{1}{2}$　D. $-\frac{1}{2}$

3. 已知正数 a,b 满足 $a+2b=1$，则（ C ）A. $ab\ge\frac{1}{8}$　B. $ab>\frac{1}{8}$　C. $0<ab\le\frac{1}{8}$ D. $0<ab<\frac{1}{8}$

4. 已知 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x},0\le x\le 1,\\ 2f(x-1),x>1\end{cases}$，则 $f(\frac{5}{4})=$（ D ）A. 2　B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　C. $\frac{3}{2}$　D. 1

5. 已知集合 $A=\{y\,|\,y=\ln x,x\in B\}$，若 $A\cup B=[0,e]$，则集合 B 可以为（ D ）

A. $(0,e]$　　B. $(0,1]$　　C. $(1,e]$　　D. $[1,e]$

6. 为了解决化圆为方问题，古希腊数学家希皮亚斯发明了“割圆曲线”，若割圆曲线的方程为 $y=\dfrac{x}{\tan(\frac{\pi}{2}x)}$，

$0<x<1$，则（ D ）A. y 有最大值　B. y 有最小值　C. y 随 x 的增大而增大　D. y 随 x 的增大而减小

7. 已知 $\triangle ABC$ 内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，面积为 S，满足 $S=\frac{1}{3}(a^2-b^2)\sin C$，则下列说法错误的是

（ C ）A. $2a-b\ne 0$　B. $a-2b=0$　C. 存在 $k=1$ 使得 $\tan A:2\tan C=1:2k$　D. 存在 $m=1$ 使得 $a=2mb$

$key: S=\frac{1}{3}(a^2-b^2)\sin C=\frac{1}{2}ab\sin C\Leftrightarrow 2(a^2-b^2)=3ab\Leftrightarrow 2a^2-3ab-2b^2=(2a+b)(a-2b)=0,\therefore a=2b$

8. 在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 和抛物线 $y^2=\frac{1}{4}ax$ 交于点 A，B，点 P 为椭圆的右顶点.若 O、A、P、B 四点共圆，则椭圆离心率为（ B ）A. $\frac{\sqrt{7}}{7}$　B. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$　C. $\frac{3\sqrt{7}}{7}$　D. $\frac{4\sqrt{7}}{7}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 对于随机变量 X，下列说法正确的有（ ABD ）A. 若 $E(X)=1$，则 $E(2X-1)=1$

B. 若 $D(X)=1$，则 $D(2X-1)=4$　C. 若 $X\sim N(2,4)$，则 $E(X)=4$　D 若 $X\sim B(10,0.5)$，则 $E(X)=5$

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$\frac{1}{a_n-a_{n+1}}=1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$，则

（ ABD ）A. $a_1b_1=a_2b_2=a_3b_3$　B. $a_nb_n=a_{n+1}b_{n+1}$　C. 存在 $k\in N^*$，使得 $a_k\le a_{k+1}$

D. 数列 $\{b_n\}$ 单调递增，且对任意 $n\in N^*$，都有 $b_1+b_2+\cdots+b_n<2^{n+1}$

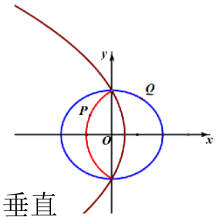
$key:\dfrac{1}{1-a_2}=1+\dfrac{1}{1}$得$a_2=\dfrac{1}{2}$;$\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}-a_3}=1+1+2$得$a_3=\dfrac{1}{4}$;

$b_1=2,b_2=1+1+2=4,b_3=1+1+2+4=8,\therefore A$对

若$a_k=\dfrac{1}{2^{k-1}},b_k=2^k$，则$\dfrac{1}{a_k-a_{k+1}}=b_k=\dfrac{2}{a_k}$得$a_{k+1}=\dfrac{1}{2}a_k=\dfrac{1}{2^k}$,

$b_{k+1}=1+2^0+2^1+\cdots+2^k=2^{k+1},\therefore a_n=\dfrac{1}{2^{n-1}},b_n=2^n,\therefore a_nb_n=2,B$对，$C$错，$D$对；

11. 已知$P(x_P,y_P)$，$Q(x_Q,y_Q)$是曲线$C:6x^2-6x+7y^2-21+|y^2+6x-3|=0$上不同的两点，$O$为坐标原点，则

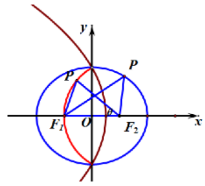


（ AD ）A. $x_Q^2+y_Q^2$的最小值为 1　　B. $4\le\sqrt{(x_P-1)^2+y_P^2}+\sqrt{(x_P+1)^2+y_P^2}\le 6$

C. 若直线$y=k(x-3)$与曲线C有公共点，则$k\in[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}]$

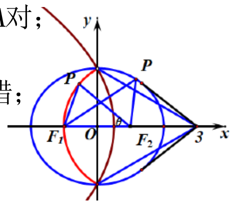
D. 对任意位于y轴左侧且不在x轴上的点P，都存在点Q，使得曲线C在P,Q两点处的切线垂直

C方程$\Leftrightarrow\begin{cases}y^2+6x-3\ge 0\\6x^2+8y^2-24=0\end{cases}$,或$\begin{cases}y^2+6x-3\le 0\\6x^2-12x+6y^2-18=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2\ge -6(x-\dfrac{1}{2})\\\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases},or,\begin{cases}y^2\le -6(x-\dfrac{1}{2}),\\(x-1)^2+y^2=4\end{cases}$

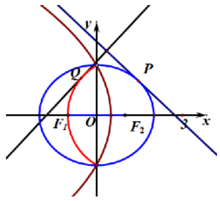


曲线C是椭圆弧$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1(x\ge 0)$及圆弧$(x-1)^2+y^2=4(-1\le x\le 0)$两部分组成，如图，$A$对；

当P在 圆弧上时,$|PF_1|+|PF_2|=2+4\sin\dfrac{\theta}{2}\in[2,4]$;当$P$在椭圆弧上时,$|PF_1|+|PF_2|=4,B$错；



由$\begin{cases}y=k(x-3)\\\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$得$\Delta=0,\therefore 4k^2+3-(-3k)^2=0$得$k=k=\pm\sqrt{\dfrac{3}{5}},C$错；



设$P(2\cos\alpha,\sqrt{3}\sin\alpha)(\alpha\in[0,\dfrac{\pi}{2}]),Q(1+2\cos\beta,2\sin\beta)(\beta\in[\dfrac{2\pi}{3},\pi])$

则$k_Pk_Q=-\dfrac{\sqrt{3}\cos\alpha}{2\sin\alpha}\cdot(-\dfrac{1}{\dfrac{2\sin\beta}{2\cos\beta}})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}=-1\Leftrightarrow\tan\beta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2\tan\alpha}\in(-\infty,0),\therefore D$对

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

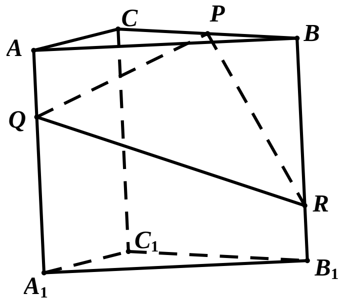
12. 设P为$\triangle ABC$所在平面内一点，满足$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，则$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AB}=$______.0

13. 楷书也叫正楷、真书、正书，是从隶书逐渐演变而来的一种汉字字体，其书写特点是笔画严整规范、线条平直自然、结构匀称方正、运笔流畅有度，《辞海》解释楷书“形体方正，笔画平直，可作楷模”，故名楷书.楷书中竖的写法有垂露竖、悬针竖和短竖三种，小君同学在练习用楷书书写“十”字时，竖的写法可能随机选用其中任意一种，现在小君一行写了 5 个“十”字，若只比较 5 处竖的写法，不比较其它笔画，且短竖不超过 3 处，则不同的写法共有______种.（用数字作答）232

14. 棱长为 10cm 的密闭正四面体容器内装有体积为$18\sqrt{2}cm^3$的水，翻转容器，使得水面至少与 2 条棱平行，且水面是三角形，不考虑容器厚度及其它因素影响，则水面面积的最小值为______cm^2.$9\sqrt{3}$

四、解答题：共 77 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$CC_1\perp$ 平面 ABC，$AC=CB=2$，$AA_1=3$，$\angle ACB=90°$，P 为 BC 的中点，点 Q,R 分别在棱 AA_1，BB_1 上，$A_1Q=2AQ$，$BR=2RB_1$.



（1）求证：$AC\perp PR$；

（2）求平面 PQR 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成二面角的余弦值.

【小问 1 详解】

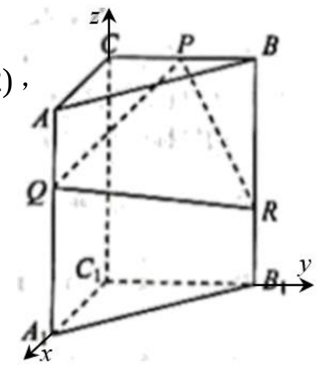
在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$CC_1\perp$ 平面 ABC，则 $CC_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，

而 $C_1A_1,C_1B_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，则 $CC_1\perp C_1A_1,CC_1\perp C_1B_1$，

显然 $\angle A_1C_1B_1=\angle ACB=90°$，则 $C_1A_1\perp C_1B_1$，即直线 C_1A_1,C_1B_1,CC_1 两两垂直，

以点 C_1 为原点，直线 C_1A_1,C_1B_1,CC_1 分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，

由 $AC=CB=2$，$AA_1=3$，$A_1Q=2AQ$，$BR=2RB_1$，



得 $A(2,0,3),C(0,0,3),P(0,1,3),R(0,2,1),Q(2,0,2)$，$\overrightarrow{CA}=(2,0,0),\overrightarrow{PR}=(0,1,-2)$，

显然 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{PR}=0$，因此 $\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{PR}$，

所以 $AC\perp PR$.

【小问 2 详解】

由（1）知，$\overrightarrow{PQ}=(2,-1,-1)$，$\overrightarrow{PR}=(0,1,-2)$，设平面 PQR 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}=2x-y-z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PR}=y-2z=0\end{cases}$，令 $z=2$，得 $\vec{n}=(3,4,2)$，显然平面 $A_1B_1C_1$ 的一个法向量 $\vec{m}=(0,0,1)$，

于是 $\cos\langle\vec{n},\vec{m}\rangle=\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}||\vec{m}|}=\dfrac{2}{\sqrt{29}\times 1}=\dfrac{2\sqrt{29}}{29}$，显然平面 PQR 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成二面角为锐角，

所以平面 PQR 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成二面角的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{29}}{29}$.

16. 数学运算是数学学科的核心素养之一，具备较好的数学运算素养一般体现为在运算中算法合理、计算准确、过程规范、细节到位，为了诊断学情、培养习惯、发展素养，某老师计划调研准确率与运算速度之间是否有关，

他记录了一段时间的相关数据如下表：

项目	速度快	速度慢	合计
准确率高	10	22	32
准确率低	11	17	28
合计	21	39	60

（1）依据 $\alpha = 0.010$ 的独立性检验，能否认为数学考试中准确率与运算速度相关？

（2）为鼓励学生全面发展，现随机将准确率高且速度快的 10 名同学分成人数分别为 3，3，4 的三个小组进行小组才艺展示，若甲、乙两人在这 10 人中，求甲在 3 人一组的前提下乙在 4 人一组的概率.

附：

α	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

$\chi^2 = \dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ 其中 $n = a+b+c+d$.

【小问 1 详解】零假设 H_0 : 数学考试中准确率与运算速度无关，

$$\chi^2 = \frac{60\times(17\times10-11\times22)^2}{21\times39\times32\times28} = \frac{230}{637} \approx 0.424 < 6.635 = x_{0.010},$$

依据 $\alpha = 0.010$ 的独立性检验，没有充分证据推断 H_0 不成立，

因此可以认为 H_0 成立，即数学考试中准确率与运算速度无关

【小问 2 详解】记“甲在 3 人一组”为事件 A ，

则需从除甲以外的 9 人中任选 2 人与甲形成一组，

再从剩下 7 人中任选 3 人形成一组，最后 4 人形成一组，所以 $P(A) = \mathrm{C}_9^2\mathrm{C}_7^3\mathrm{C}_4^4 \div \dfrac{\mathrm{C}_{10}^3\mathrm{C}_7^3\mathrm{C}_4^4}{\mathrm{A}_2^2} = \dfrac{3}{5}$,

记“甲在 3 人一组，且乙在 4 人一组”为事件 AB ，则需从除甲、乙以外的 8 人中任选 2 人与甲形成一组，

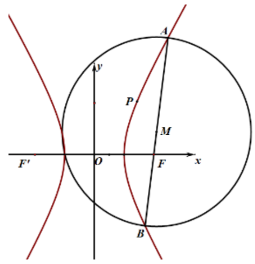
再从剩下 6 人中任选 3 人与乙形成一组，最后 3 人形成一组，所以 $P(AB) = \mathrm{C}_8^2\mathrm{C}_6^3\mathrm{C}_3^3 \div \dfrac{\mathrm{C}_{10}^3\mathrm{C}_7^3\mathrm{C}_4^4}{\mathrm{A}_2^2} = \dfrac{4}{15}$,

由条件概率公式，则 $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{4}{15} \div \dfrac{3}{5} = \dfrac{4}{9}$,

即甲在 3 人一组的前提下乙在 4 人一组的概率为 $\dfrac{4}{9}$

17. 已知双曲线 $C: \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1(a>0, b>0)$ ，点 $F(4,0)$ 是 C 的右焦点，C 的一条渐近线方程为 $y = \sqrt{3}x$.

（1）求 C 的标准方程；（2）过点 F 的直线与 C 的右支交于 A,B 两点，以 AB 为直径的圆记为 M，是否存在定圆与圆 M 内切？若存在，求出定圆的方程；若不存在，说明理由.



解：（1）由已知得 $\begin{cases} c=4 \\ \dfrac{b}{a}=\sqrt{3} \end{cases}, \therefore a=2, b=\sqrt{12}, \therefore C$的标准方程为$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$

（2）设$l_{AB}: x=ty+4(|t|<\dfrac{\sqrt{3}}{3})$代入$C$方程得$:(3t^2-1)y^2+24ty+36=0$

$\therefore \begin{cases} y_A+y_B=\dfrac{-24t}{3t^2-1} \\ y_Ay_B=\dfrac{36}{3t^2-1} \end{cases}$，且$\Delta=144(t^2+1)>0, \therefore M(\dfrac{-4}{3t^2-1}, \dfrac{-12t}{3t^2-1})$，且$M$在双曲线$C_1: 3x^2-y^2-4x=0$上，

且直径$|AB|=\sqrt{1+t^2}\cdot\dfrac{12\sqrt{1+t^2}}{1-3t^2}=\dfrac{12(t^2+1)}{1-3t^2}$，

假设存在定圆$P:(x-u)^2+(y-v)^2=r^2(r>0)$与圆$M$相内切，

$\therefore |MP|=\sqrt{(u+\dfrac{4}{3t^2-1})^2+(v+\dfrac{12t}{3t^2-1})^2}=|r-\dfrac{6(t^2+1)}{1-3t^2}|$

$\Leftrightarrow u^2+v^2+\dfrac{8u+24vt}{3t^2-1}+\dfrac{16(1+9t^2)}{(1-3t^2)^2}=r^2-\dfrac{12r(t^2+1)}{1-3t^2}+\dfrac{36(t^4+2t^2+1)}{(1-3t^2)^2}$

$\Leftrightarrow (u^2+v^2)(1-3t^2)^2-(8u+24vt)(1-3t^2)+16(1+9t^2)=r^2(1-3t^2)^2-12r(t^2+1)(1-3t^2)+36(t^4+2t^2+1)$

$\therefore v=0, \therefore u^2(1-3t^2)^2-8u(1-3t^2)+16(1+9t^2)=r^2(1-3t^2)^2-12r(t^2+1)(1-3t^2)+36(t^4+2t^2+1)\cdots(*)$

$\begin{cases} 9u^2=9r^2+36r+36\text{即}u^2=r^2+4r+4 \\ u^2-8u+16=r^2-12r+36 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} u=6 \\ r=4 \end{cases}$，经检验$(*)$恒成立

$\therefore$ 存在定圆$(x-6)^2+y^2=16$

18. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{e^x}+\ln(-x+m), m\in R$．（1）当 $m=1$时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线方程；

（2）若 $f(x)$ 有且仅有 1 个零点，求 m 的取值范围.

解：（1）$\because m=1, \therefore f(x)=xe^{-x}+\ln(1-x)(x<1)$，则$f'(x)=(1-x)e^{-x}+\dfrac{1}{x-1}$

$\therefore$曲线$y=f(x)$在$x=0$处的切线方程为$y=0$

（2）由$f(x)=\dfrac{x}{e^x}+\ln(-x+m)=0\Leftrightarrow m=x+e^{-xe^{-x}}$

令$t=-x$，则$m=-t+e^{te^t}$记为$p(t)$

则$p'(t)=-1+e^{te^t}\cdot(t+1)e^t=-1+(t+1)e^{te^t+t}$

当$t\le -1$时，$p'(t)<0$，

当$t>-1$时，$p'(t)>0\Leftrightarrow (t+1)e^{te^t+t}>1\Leftrightarrow 0<\ln(t+1)+te^t+t$记为$q(t)$，

则$q'(t)=\dfrac{1}{t+1}+(t+1)e^t+1>0$，

而$q(0)=0, \therefore p'(t)>0\Leftrightarrow q(t)>0\Leftrightarrow t>0$，

$\therefore p(t)$在$(-\infty,0)$上递减，在$(0,+\infty)$上递增，$\therefore p(t)_{\min}=p(0)=1$，

而$\lim\limits_{t\to-\infty}p(t)=+\infty, \lim\limits_{t\to+\infty}p(t)=+\infty, \therefore m$的取值范围为$\{1\}$

19. 对于项数为 m 的数列$\{a_n\}$，若数列$\{b_n\}$满足 $b_k=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$ $(k=1,2,\cdots,m)$，其中，$\max M$ 表示数集 M 中最大的数，则称数列$\{b_n\}$是$\{a_n\}$的 P 数列.

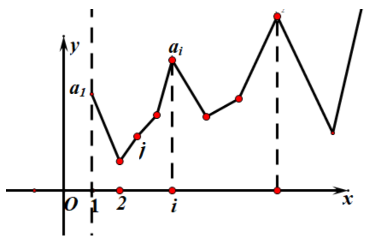
（1）若各项均为正整数的数列$\{a_n\}$的 P 数列是$3,4,4,5$，写出所有的数列$\{a_n\}$；

（2）证明：若数列$\{a_n\}$中存在a_i使得$a_i > a_1 \quad (2 \le i \le m)$，则存在$k \in \{1, 2, \cdots, m-1\}$使得$b_{k+1} > b_k$成立；

（3）数列$\{b_n\}$是$\{a_n\}$的P数列，数列$\{c_n\}$是$\{-a_n\}$的P数列，定义$d_n = |\sum_{i=1}^{n} \operatorname{sgn}(a_n - a_i)|$其中$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

求证：$\{b_n + c_n\}$为单调递增数列的充要条件是$\{d_n\}$为单调递增数列.

（1）解：由已知得$:\{a_n\}: 3, 4, 1, 5;$或$3, 4, 2, 5;$或$3, 4, 3, 5;$或$3, 4, 4, 5.$



（2）证明$:\because a_i > a_1 (2 \le i \le m),$

若$a_j < a_1 (j = 2, 3, \cdots, i-1)$，则$b_1 = a_1 < a_i = b_2, \therefore \exists k = 1,$使得$b_k < b_{k+1}$

若$a_j \ge a_1 (j = 2, 3, \cdots, i-1),$则$b_1 = a_1, b_2 = a_2, \therefore$存在$k = 1,$使得$b_k < b_{k+1},$证毕

（3）证明：由已知得:$b_k=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\},c_k=\max\{-a_1,-a_2,\cdots,-a_k\}=-\min\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$,

①必要性:$\because\{b_n+c_n\}$是单调递增数列,$\therefore b_1+c_1=a_1-a_1=0,\therefore d_1=0$,

$b_2+c_2=\max\{a_1,a_2\}-\min\{a_1,a_2\}=|a_2-a_1|>0,\therefore d_2=|0+(\pm1)|=1>d_1$,

$b_k+c_k=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}-\min\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$

若$a_{k+1}\le\min\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$,则$b_{k+1}+c_{k+1}=\max\{a_1,\cdots,a_k,a_{k+1}\}-\min\{a_1,\cdots,a_k,a_{k+1}\}$

$=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}-a_{k+1}>b_k+c_k=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}-\min\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$

$\therefore a_{k+1}<\min\{a_1,a_2,\cdots,a_k\},\therefore\operatorname{sgn}(a_{k+1}-a_i)=-1(i\le k)$,

$\therefore d_{k+1}=|\sum_{i=1}^{k+1}\operatorname{sgn}(a_{k+1}-a_i)|=k$

若$a_{k+1}>\min\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$,则$b_{k+1}+c_{k+1}=\max\{a_1,\cdots,a_k,a_{k+1}\}-\min\{a_1,\cdots,a_k,a_{k+1}\}$

$=\max\{a_1,\cdots,a_k,a_{k+1}\}-\min\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}>b_k+c_k=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}-\min\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$

$\therefore a_{k+1}>\min\{a_1,a_2,\cdots,a_k\},\therefore\operatorname{sgn}(a_{k+1}-a_i)=1(i\le k),\therefore d_{k+1}=|\sum_{i=1}^{k+1}\operatorname{sgn}(a_{k+1}-a_i)|=k.$

$\therefore d_{k+1}=k$是单调递增数列,

②充分性:$\because\{d_n\}$是单调递增数列,$\therefore\operatorname{sgn}(a_n-a_i)=1(i<n)$,即$a_i<a_n(i=1,2,\cdots,n-1)$

或$\operatorname{sgn}(a_n-a_i)=-1(i<n)$,即$a_i>a_n(i=1,2,\cdots,n-1)$,

$\therefore$若$a_1<a_2$,则$\{a_n\}$递增

$\therefore b_k+c_k=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}-\min\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}=a_k-a_1$

$b_{k+1}-c_{k+1}=a_{k+1}-a_1>b_k+c_k,\therefore\{b_n+c_n\}$递增,

若$a_1>a_2$,则$\{a_n\}$递减,

$\therefore b_k+c_k=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}-\min\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}=a_1-a_k$

$b_{k+1}-c_{k+1}=a_1-a_{k+1}>b_k+c_k,\therefore\{b_n+c_n\}$递增,

由①②可知：命题成立