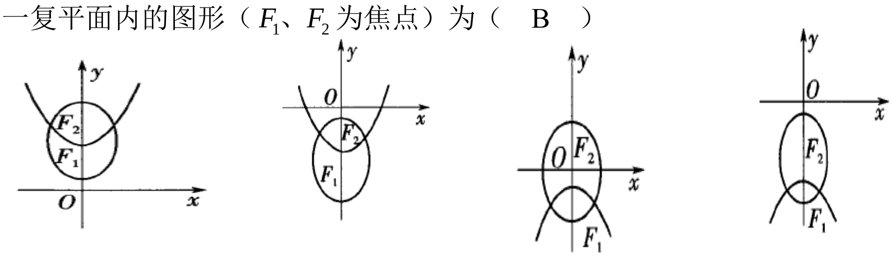
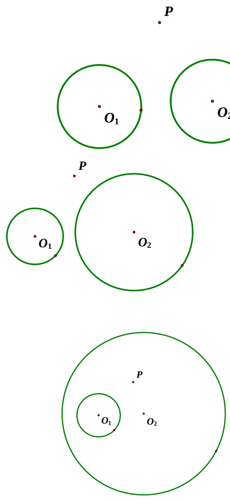
解析几何（3）双曲线解答（1）

2023-11-18

（1993A）设 m、n 为非零实数，i为虚数单位，$z\in C$.则方程 $|z+ni|+|z-mi|=n$ 与方程 $|z+ni|-|z-mi|=-m$ 在同一复平面内的图形（F_1、F_2 为焦点）为（　B　）



(2007全国竞赛）设圆O_1和圆O_2是两个定圆，动圆P与这两个定圆都相切，则圆P的圆心轨迹可能是（　）ACD



key:①两圆外离：

都外切$|PO_1|=r+r_1,|PO_2|=r+r_2,\therefore |PO_1|-|PO_2|=r_1-r_2$

$(r_1=r_2$, 选$B)$

都内切:$|PO_1|=r-r_1,|PO_2|=r-r_2,\therefore |PO_1|-|PO_2|=r_2-r_1$

一外切，一内切:$||PO_1|-|PO_2||=r_1+r_2$.选B,D

②两圆内含：

一内切，一外切:$|PO_1|=r+r_1,|PO_2|=r_2-r,\therefore |PO_1|+|PO_2|=r_1+r_2$

都内切:$|PO_1|=r-r_1,|PO_2|=r_2-r,\therefore |PO_1|+|PO_2|=r_2-r_1$, C可以

（2008 重庆）已知 $M(-2,0)$和$N(2,0)$ 是平面上的两点，动点 P 满足：$|PM|+|PN|=6$.

（Ⅰ）求点 P 的轨迹方程;（Ⅱ）若$|PM|\cdot|PN|=\dfrac{2}{1-\cos\angle MPN}$,求点 P 的坐标.

解：（1）由$2a=6,c=2$得$a=3,b=\sqrt{6},\therefore$ 点P的轨迹方程为$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$

(2) 由已知得$2=|PM|\cdot|PN|-|PM|\cdot|PN|\cos\angle MPN=|PM|\cdot|PN|-\dfrac{|PM|^2+|PN|^2-|MN|^2}{2}$

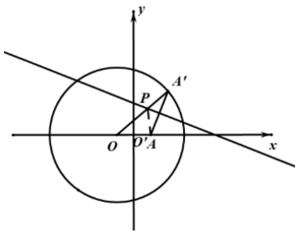
即$(|PM|-|PN|)^2=12,\therefore ||PM|-|PN||=2\sqrt{3},\therefore P$的轨迹方程为$\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$

由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1\\ \dfrac{x^2}{3}-y^2=1\end{cases}$得$x^2=\dfrac{27}{4},y^2=\dfrac{5}{4},\therefore P$的坐标为$(\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2})$

(2003A）一张纸上画有半径为R的圆O和圆内一定点A, 且$OA=a$, 折叠纸片，使圆周上某一点A'刚好与A点重合，这样的每一种折法，都 留下一条直线折痕，当A'取遍圆周上所有点时，求所有折痕所在直线上的点的集合.

(2003A）$key:OA'$交直线l于P，则$|OP|+|PA|=|OA'|=R$

$\therefore$ 折痕l的轨迹是椭圆$\dfrac{x^2}{\frac{R^2}{4}}+\dfrac{y^2}{\frac{R^2-a^2}{4}}=1$外的所有点的集合



2023-11-18

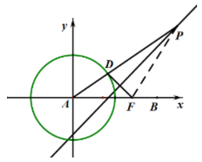
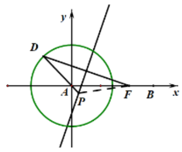
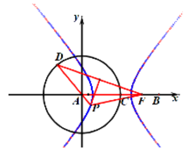
$key2:$ 设$A'(-\frac{a}{2}+R\cos\theta,R\sin\theta)$,则折痕方程为$(x+\frac{a}{2}-R\cos\theta)^2+(y-R\sin\theta)^2=(x-\frac{a}{2})^2+y^2$

即$R(2x+a)\cos\theta+2Ry\sin\theta=2ax+R^2$

$\Leftrightarrow(2ax+R^2)^2\le[(2x+a)^2+4y^2]\cdot R^2\Leftrightarrow 4(R^2-a^2)x^2+4R^2y^2+R^2(a^2-R^2)\ge0$即$\frac{x^2}{\frac{R^2}{4}}+\frac{y^2}{\frac{R^2-a^2}{4}}\ge1$

（2009新疆）已知C与F是线段AB上的两点，$AB=12,AC=6,D$是以A为圆心，AC为半径的圆上的任意点，线段FD的中垂线与直线AD交于点P.若P点的轨迹是双曲线，则此双曲线的离心率的取值范围是________.

2009新疆$key:6<AF\le12,$

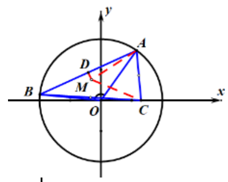
当D在左半圆上时,$|PF|-|PA|=|PD|-|PA|=|AD|=6$

当D在右半圆上时,$|PD|-|PA|=|PF|-|PA|=|AD|=6$

$\therefore||PF|-|PA||=6,\therefore P$点的轨迹为整条双曲线

$\therefore a=3,c=\frac{1}{2}AF\in(3,6],\therefore e\in(1,2]$

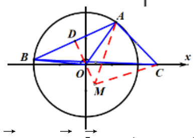
变式 1（1）A,B是圆$x^2+y^2=4$上两个动点，且满足$\angle AOB=120°,C(a,0)(a>0,a\ne2)$是定点，当点$A$在圆上运动时,求$\triangle ABC$的外接圆的圆心$M$的轨迹方程,并讨论方程表示的曲线的类型.



$key:|MC|^2=|MD|^2+|AD|^2=(|OD|-|OM|)^2+|AD|^2$

即$(x-a)^2+y^2=(1-\sqrt{x^2+y^2})^2+3$

即$4(1-a^2)x^2+4y^2-4a(4-a^2)x-(4-a^2)^2=0$即为所求的轨迹方程



当$0<a<1$时，方程表示的曲线是椭圆

当$a=1$时，方程表示的曲线是抛物线

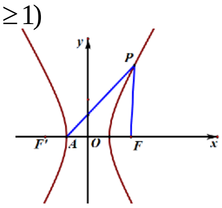
当$1<a<2$或$a>2$时，方程表示的曲线是双曲线

（2003湖北）设$\vec{i},\vec{j}$为平面直角坐标系中x,y轴正方向上的单位向量，若向量$\vec{a}=(x+2)\vec{i}+y\vec{j},\vec{b}=(x-2)\vec{i}+y\vec{j}$,且$|\vec{a}|-|\vec{b}|=2$.⑴ 求满足上述条件的点$P(x,y)$的轨迹方程；

（2）设$A(-1,0),F(2,0)$，问是否存在常数$\lambda(\lambda>0)$，使得$\angle PFA=\lambda\angle PAF$恒成立？证明你的结论.

①$|\vec{a}|-|\vec{b}|=|(x\vec{i}+y\vec{j})-(-2\vec{i})|-|(x\vec{i}+y\vec{j})-(2\vec{i})|=2$

$\therefore P$的轨迹是以$(-2,0),(2,0)$为焦点，实轴长为2的双曲线的右支，其方程为$x^2-\frac{y^2}{3}=1(x\ge1)$



②假设存在,设$P(x,y)(x\ge1,y>0)$,

则$\tan\angle PAF=\frac{y}{x+1},\tan\angle PFA=-\frac{y}{x+2}$

而$\tan2\angle PAF=\frac{\frac{2y}{x+1}}{1-\frac{y^2}{(x+1)^2}}=\frac{2(x+1)y}{(x+1)^2-y^2}=\frac{2(x+1)y}{(x+1)^2-3(x^2-1)}=-\frac{y}{x+2}=\tan\angle PFA,\therefore$存在$\lambda=2$

（2010 福建）已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为 2，过点$P(0,m)(m>0)$斜率为 1 的直线$l$交双曲线$C$于$A,B$两点，且$\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$.（1）求双曲线方程；

（2）设Q为双曲线C右支上动点，F为双曲线C的右焦点，在x轴负半轴上是否存在定点M使得$\angle QFM=2\angle QMF$？若存在，求出点M的坐标；若不存在，请说明理由.

解：⑴ 由$\frac{c}{a}=2$得$c=2a,b=\sqrt{3}a,$

由$\begin{cases}y=x+m\\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3a^2}=1\end{cases}$消去$y$得$2x^2-2mx-m^2-3a^2=0,\therefore\begin{cases}x_A+x_B=m\\ x_Ax_B=-\frac{m^2+3a^2}{2}\end{cases}$,且$\Delta=12(m^2+2a^2)>0$

2023-11-18

由$\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$得$-x_A=3x_B$，$\therefore\begin{cases}-2x_B=m\\-3x_B^2=-\dfrac{m^2+3a^2}{2}\end{cases}$，$\therefore m^2=6a^2$

而$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_Ax_B+(x_A+m)(x_B+m)=2x_Ax_B+m(x_A+x_B)+m^2=-m^2-3a^2+m^2+m^2=3a^2=3$

$\therefore a=1,m=\sqrt{6}$，$\therefore$双曲线方程为$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$

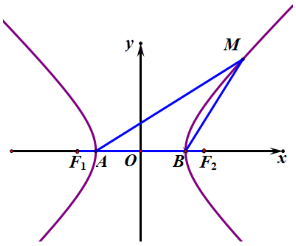
（2）假设存在，设$M(-n,0)(n>0),Q(s,t)(s>1,t>0,s^2-\dfrac{t^2}{3}=1)$

则$\tan\angle QFM=-\dfrac{t}{s-2}=\tan 2\angle QMF=\dfrac{2\cdot\dfrac{t}{s+n}}{1-\dfrac{t^2}{(s+n)^2}}=\dfrac{2t(s+n)}{(s+n)^2-t^2}$

$\Leftrightarrow t^2-(s+n)^2=2(s+n)(s-2)\Leftrightarrow n^2-4n+3+4s(n-1)=0$，$\therefore$存在点$M(-1,0)$.

变式 2（1）已知 $A(-1,0),B(1,0)$，点 M 是曲线 $x=\sqrt{1+y^2}$ 上异于 B 的任意一点，令 $\angle MAB=\alpha$，$\angle MBA=\beta$，则下列式子中最大的是（　C　）

A. $|\tan\alpha\cdot\tan\beta|$　B．$|\tan\alpha+\tan\beta|$　C．$|\tan\alpha-\tan\beta|$　D．$|\dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}|$



key：设$M(x,y)(x^2-y^2=1,x>1)$，则$\tan\alpha\tan\beta=\dfrac{y}{x+1}\cdot\dfrac{-y}{x-1}=-1$，且$\tan\alpha\in(0,1)$

$\therefore|\tan\alpha\tan\beta|=1,|\tan\alpha+\tan\beta|=|\tan\alpha-\dfrac{1}{\tan\alpha}|\in(0,+\infty)$

$|\tan\alpha-\tan\beta|=|\tan\alpha+\dfrac{1}{\tan\alpha}|\geq 2,|\dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}|=\tan^2\alpha\in(0,1)$

$|\tan\alpha-\tan\beta|^2-|\tan\alpha+\tan\beta|=(\tan\alpha+\dfrac{1}{\tan\alpha})^2-(\tan\alpha-\dfrac{1}{\tan\alpha})^2=4$

（2）双曲线 $x^2-y^2=2006$ 的左、右顶点分别为 A_1、A_2，P 为其右支上一点，且 $\angle A_1PA_2=4\angle PA_1A_2$，则 $\angle PA_1A_2$ 等于（ D ）A.无法确定　　B. $\dfrac{\pi}{36}$　　C. $\dfrac{\pi}{18}$　　D. $\dfrac{\pi}{12}$

$key1:\tan\angle PA_1A_2=\dfrac{y}{x+\sqrt{2016}}(x>0,\text{且}x^2-y^2=2016)$,

$$\tan 2\angle PA_1A_2=\dfrac{\dfrac{2y}{x+\sqrt{2016}}}{1-\dfrac{y^2}{(x+\sqrt{2016})^2}}=\dfrac{2y(x+\sqrt{2016})}{x^2+2\sqrt{2016}x+2016-y^2}=\dfrac{y}{\sqrt{2016}}$$

$$\text{而}\tan\angle A_1PA_2=\dfrac{\dfrac{y}{x-\sqrt{2016}}-\dfrac{y}{x+\sqrt{2016}}}{1+\dfrac{y}{x-\sqrt{2016}}\cdot\dfrac{y}{\sqrt{2016}}}=\dfrac{2\sqrt{2016}y}{x^2-2016+y^2}=\dfrac{\sqrt{2016}}{y}=\tan(\dfrac{\pi}{2}-2\angle PA_1A_2)$$

$\therefore\angle A_1PA_2=\dfrac{\pi}{2}-2\angle PA_1A_2=4\angle PA_1A_2$，$\therefore\angle PA_1A_2=\dfrac{\pi}{12}$

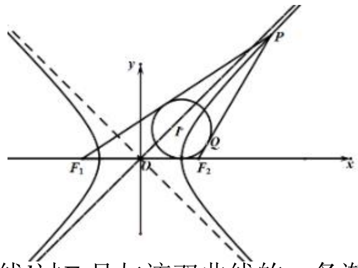
$key2:k_{PA_1}\cdot k_{PA_2}=\dfrac{y_P}{x_P+a}\cdot\dfrac{y_P}{x_P-a}=\dfrac{y_P^2}{x_P^2-a^2}=1$，设$\angle PA_1A_2=\alpha$，则$\angle PA_2A_1=5\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$，$\therefore\angle PA_1A_2=\dfrac{\pi}{12}$

$key3$：设P关于x轴的对称点为Q，则A_1P与A_2Q的交点M的轨迹为圆，易得$\angle PA_1A_2=\dfrac{\pi}{12}$

（2005浙江竞赛）设双曲线$x^2-y^2=1$的左、右焦点分别为F_1、F_2，若$\triangle PF_1F_2$的顶点P在第一象限

的双曲线上移动.则$\triangle PF_1F_2$的内切圆的圆心轨迹方程为______；

该内切圆在边PF_2上的切点轨迹形状为____.



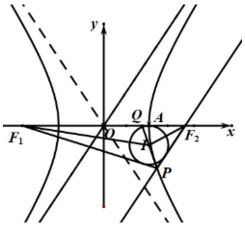
2005$key:2a=|PF_1|-|PF_2|=|F_1Q|-|F_2Q|$（$Q$为内切圆与$F_1F_2$的切点）

而$2c=|F_1Q|+|F_2Q|,\therefore |F_1Q|=a+c$，且$|F_2Q|=c-a$

$\therefore$内心的轨迹方程为$x=1(0<y<1)$，切点Q的轨迹形状为圆弧

变式 1（1）已知双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$的左右焦点记为$F_1,F_2$，直线$l$过$F_2$且与该双曲线的一条渐近线平行，记$l$与双曲线的交点为$P$，若所得$\triangle PF_1F_2$的内切圆半径恰为$\dfrac{b}{3}$，则此双曲线的离心率为（　）A

$A.2\quad B.\dfrac{5}{3}\quad C.\sqrt{3}\quad D.\dfrac{\sqrt{11}}{2}$



key:设$\triangle PF_1F_2$的内切圆切x轴于点A，则$|F_1A|-|F_2A|=|PF_1|-|PF_2|=2a,$

而$|F_1A|+|F_2A|=2c,\therefore |F_1A|=a+c,$

由$y=\dfrac{b}{a}(x-c)$代入双曲线方程得$y_P=\dfrac{-b^3}{2ac},x_P=\dfrac{c^2+a^2}{2c},$

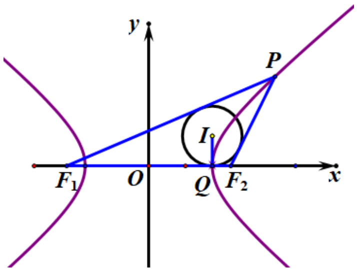
$\therefore |PF_1|=\sqrt{(x_P+c)^2+y_P^2}=\sqrt{x_P^2+2cx_P+c^2+b^2(\dfrac{x_P^2}{a^2}-1)}=a+\dfrac{c}{a}x_P,|PF_2|=\dfrac{c}{a}x_P-a$

$\therefore S_{\triangle PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}\cdot 2c\cdot\dfrac{b^3}{2ac}=\dfrac{1}{2}\cdot(\dfrac{2c}{a}\cdot\dfrac{c^2+a^2}{2c}+2c)\cdot\dfrac{b}{3}$得$e=2$

（2）（多选题）已知F_1、F_2分别为双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点，且$|F_1F_2|=\dfrac{2b^2}{a}$，点$P$为双曲线右支一点，$I$为$\triangle PF_1F_2$的内心，若$S_{\triangle IPF_1}=S_{\triangle IPF_2}+\lambda S_{\triangle IF_1F_2}$成立，则下列结论正确的有（BCD　　）

A. 当$PF_2\perp x$轴时，$\angle PF_1F_2=30°$　　B. 离心率$e=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

C. $\lambda=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　　D. 点I的横坐标为定值a



key:由$2c=\dfrac{2b^2}{a}$得$ac=c^2-a^2\Leftrightarrow e^2-e-1=0,\therefore e=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

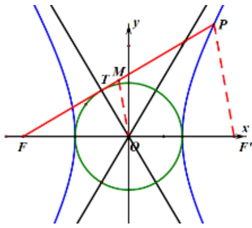
设$\triangle PF_1F_2$的内切圆且F_1F_2于点Q，则$2a=|PF_1|-|PF_2|=|F_1Q|-|F_2Q|$

$\therefore |F_1Q|=a+c,\therefore |OQ|=a,$，而$IQ\perp x$轴，$\therefore x_I=a$

由$S_{\triangle IPF_1}=\dfrac{1}{2}|PF_1|\cdot r=S_{\triangle IPF_2}+\lambda S_{\triangle IF_1F_2}=\dfrac{1}{2}|PF_2|\cdot r+\lambda\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 2c\cdot r$得$|PF_1|-|PF_2|=\lambda\cdot 2c=2a,\therefore\lambda=\dfrac{a}{c}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

（2006 陕西）在直角坐标系xOy中，过双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左焦点$F$作圆$x^2+y^2=a^2$的一条切线（切点为$T$）交双曲线右支于点$P$，若$M$为$FP$的中点.则$|OM|-|MT|$等于　（ A　 ）

A．$b-a$　　　B．$a-b$　　　C．$\dfrac{a+b}{2}$　　　D．$a+b$

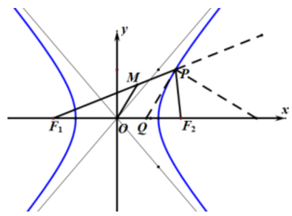


$key:|OM|-|MT|=\dfrac{1}{2}|PF'|-(|MF|-b)=\dfrac{1}{2}|PF'|-\dfrac{1}{2}|PF|+b=b-a$

变式 2.已知双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$.

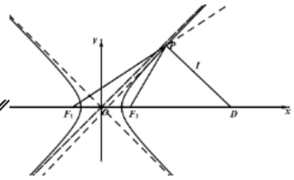
（1）过第一象限内双曲线上任意一点P作切线l，又过原点作l的平行线交PF_1于M，则$|MP|=$__________.

key:由$l:\dfrac{x_Px}{a^2}-\dfrac{y_Py}{b^2}=1$令$y=0$得$x_Q=\dfrac{a^2}{x_P}$，而$|PF_1|=\sqrt{(x_P+c)^2+b^2(\dfrac{x_P^2}{a^2}-1)}=a+\dfrac{c}{a}x_P$

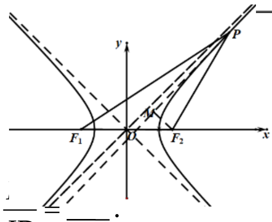


解析几何（3）双曲线解答（1）

2023-11-18



$\because OM//PQ,\therefore \dfrac{|MP|}{a+\frac{c}{a}x_P-|MP|}=\dfrac{\frac{a^2}{x_P}}{c}=\dfrac{a^2}{cx_P},\therefore \dfrac{|MP|}{a+\frac{c}{a}x_P}=\dfrac{a^2}{a^2+cx_P}$ 得 $|MP|=a$



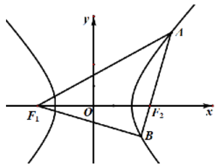
（2）F_1在$\angle F_1PF_2$的内角平分线上的射影M的轨迹方程为_____；

key: 双曲线方程为: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a,b>0).x^2+y^2=a^2$

（3）若$\angle F_1PF_2$的外角平分线PD交x轴于D，I为在PD上的旁心，则$\dfrac{PI}{ID}=$____.

$key:\dfrac{PI}{ID}=\dfrac{|PF_2|}{|F_2D|}=\dfrac{|PF_1|}{|DF_1|}=\dfrac{-|PF_2|}{-|DF_2|}=\dfrac{|PF_1|-|PF_2|}{|DF_1|-|DF_2|}=\dfrac{2a}{2c}=\dfrac{1}{e}(\dfrac{|DF_2|}{|DF_1|}=\dfrac{|PF_2|}{|PF_1|}\Leftrightarrow\dfrac{|PF_2|}{|DF_2|}=\dfrac{|PF_1|}{|DF_1|})$

（2007江西）设动点P到点$F_1(-1,0)$和$F_2(1,0)$的距离分别为d_1和d_2，$\angle F_1PF_2=2\theta$，且存在常数$\lambda(0<\lambda<1)$，使得$d_1d_2\sin^2\theta=\lambda$.（1）求动点$P$的轨迹$C$方程；



（2）如图，过点F_2的直线于双曲线C的右支交于A,B两点，问：是否存在λ，使$\triangle F_1AB$是以点B为直角顶点的等腰直角三角形？若存在，求出λ的值；若不存在，说明理由.

2007江西解： （1）由$d_1d_2\sin\theta=|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\dfrac{1-\cos2\theta}{2}=\dfrac{1}{2}(|PF_1|\cdot|PF_2|-\dfrac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-4}{2})=\lambda$

$\Leftrightarrow-(|PF_1|-|PF_2|)^2+4=4\lambda\Leftrightarrow||PF_1|-|PF_2||=2\sqrt{1-\lambda}(\because 0<\lambda<1),\therefore C$的方程为$\dfrac{x^2}{1-\lambda}-\dfrac{y^2}{\lambda}=1$

（2）假设存在,设$|BF_2|=m$,则$|BA|=|BF_1|=2\sqrt{1-\lambda}+m,\therefore|AF_2|=2\sqrt{1-\lambda}$,

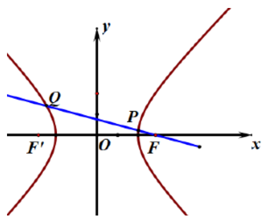
$|AF_1|=4\sqrt{1-\lambda}=\sqrt{2}(2\sqrt{1-\lambda}+m)$得$m=(2\sqrt{2}-2)\sqrt{1-\lambda}$

且$4=(2\sqrt{1-\lambda}+m)^2+m^2=8(1-\lambda)+(12-8\sqrt{2})(1-\lambda)=(20-8\sqrt{2})(1-\lambda)$

$\therefore\lambda=1-\dfrac{1}{5-2\sqrt{2}}=1-\dfrac{5+2\sqrt{2}}{17}=\dfrac{12-2\sqrt{2}}{17}$,$\therefore$存在，且$\lambda=\dfrac{12-2\sqrt{2}}{17}$

（2007 重庆）16．过双曲线$x^2-y^2=4$的右焦点F作倾斜角为$105°$的直线，交双曲线于P,Q两点，则$|FP|\cdot|FQ|$的值为______．$\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

$key1$: 设$l_{PQ}:x=-(2-\sqrt{3})y+2\sqrt{2}$

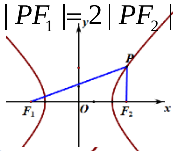


$key2$: 设$|PF|=r_P$，则$P(2\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}r_P,\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}r_P)$

$\therefore 8-2(\sqrt{3}-1)r_P+\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}r_P^2-\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}r_P^2=4$即$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}r_P^2-2(\sqrt{3}+1)r_P+4=0$,

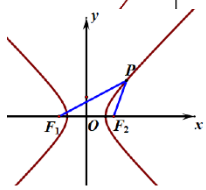
同理$r_Q^2-2(\sqrt{3}+1)r_Q+4=0,\therefore|PF|\cdot|QF|=|r_Pr_Q|=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

（2008 福建）双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的两个焦点为$F_1$、$F_2$,若$P$为其上一点，且$|PF_1|=2|PF_2|$,则双曲线离心率的取值范围为（ B）A.$(1,3)$ B.$(1,3]$ C.$(3,+\infty)$ D.$[3,+\infty)$



$key:|PF_1|-|PF_2|=|PF_2|=2a\ge c-a$得$e\in(1,3]$

（2011 甘肃）已知F_1,F_2为双曲线$C:x^2-y^2=1$的左、右焦点，点P在C上，若$\triangle PF_1F_2$的面积是$\sqrt{3}$，则$\angle F_1PF_2=$________. 60°



$$key:\begin{cases}||PF_1|-|PF_2||=2\\ \frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\sin\theta=\sqrt{3}\text{即}|PF_1|\cdot|PF_2|\sin\theta=2\sqrt{3}\\ 8=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cos\theta=4+2|PF_1|\cdot|PF_2|(1+\cos\theta)\text{即}|PF_1|\cdot|PF_2|(1-\cos\theta)=2\end{cases},$$

$$\therefore\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}=\sqrt{3},\therefore\angle F_1PF_2=60^\circ$$

（2014 重庆）设 F_1,F_2 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，双曲线上存在一点 P 使得 $|PF_1|+|PF_2|=3b,|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{9}{4}ab,$ 则该双曲线的离心率为（ B ）$\frac{4}{3}$ B. $\frac{5}{3}$ C. $\frac{9}{4}$ D.3

$$key:\begin{cases}||PF_1|-|PF_2||=2a\\ |PF_1|+|PF_2|=3b\\ |PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{9}{4}ab\end{cases},\therefore 9ab=4|PF_1|\cdot|PF_2|=(|PF_1|+|PF_2|)^2-(|PF_1|-|PF_2|)^2=9b^2-4a^2$$

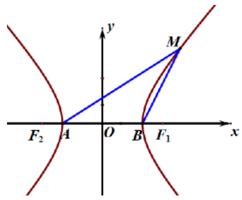
$$\Leftrightarrow 4a=3b,\therefore e=\frac{5}{3}$$

（2015 湖北）8．将离心率为 e_1 的双曲线 C_1 的实半轴长 a 和虚半轴长 $b(a\neq b)$ 同时增加 $m(m>0)$ 个单位长度，得到离心率为 e_2 的双曲线 C_2，则（ D ）

A．对任意的 $a,b,e_1>e_2$　　B．当 $a>b$ 时，$e_1>e_2$；当 $a<b$ 时，$e_1<e_2$

C．对任意的 $a,b,e_1<e_2$　　D．当 $a>b$ 时，$e_1<e_2$；当 $a<b$ 时，$e_1>e_2$

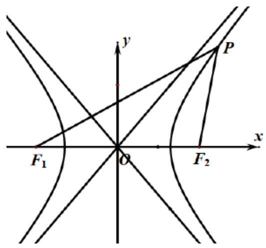
（2015II）11．已知 A，B 为双曲线 E 的左，右顶点，点 M 在 E 上，$\triangle ABM$ 为等腰三角形，且顶角为 120°，则 E 的离心率为（ D ）A．$\sqrt{5}$ B.2 C．$\sqrt{3}$ D．$\sqrt{2}$



key:设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$，则 $M(a+2a\cos60^\circ,2a\sin60^\circ)$ 即 $(2a,\sqrt{3}a)$，

$$\therefore 4-\frac{3a^2}{b^2}=1\text{得}e=\sqrt{2}$$

（2021福建）已知离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 的双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，P 为双曲线上一点，R,r 分别为 $\triangle PF_1F_2$ 的外接圆、内切圆半径.若 $\angle F_1PF_2=60^\circ$，则 $\frac{R}{r}=$ _____.



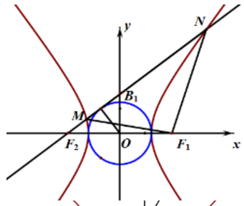
2021福建key:由 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ 得 $c=\frac{\sqrt{6}}{2}a,b=\frac{\sqrt{2}}{2}a,\therefore 2R=\frac{2c}{\sin60^\circ}=\frac{4}{\sqrt{3}}c=2\sqrt{2}$ 得 $R=\sqrt{2}a$，

$$\text{由}\begin{cases}||PF_1|-|PF_2||=2a\\ |PF_1|^2+|PF_2|^2-|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{(|PF_1|-|PF_2|)^2+(|PF_1|+|PF_2|)^2}{2}\\ -\frac{(|PF_1|+|PF_2|)^2-(|PF_1|-|PF_2|)^2}{4}=4c^2=6a^2\end{cases}\text{得}|PF_1|+|PF_2|=2\sqrt{3}a,$$

$$\therefore\frac{\sqrt{3}}{2}a^2=S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}(2\sqrt{3}a+\sqrt{6}a)\cdot r\text{得}r=\frac{1}{2+\sqrt{2}}a,\therefore\frac{R}{r}=2\sqrt{2}+2$$

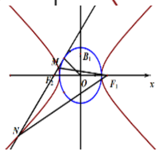
2023-11-18

（2022乙）双曲线C的两个焦点为F_1,F_2,以C的实轴为直径的圆记为D，过F_1作D的切线与C的两支交于M,N两点，且$\cos\angle F_1NF_2=\dfrac{3}{5}$，则$C$的离心率为（）



$A.\dfrac{\sqrt5}{2}\quad B.\dfrac{3}{2}\qquad C.\dfrac{\sqrt{13}}{2}\qquad D.\dfrac{\sqrt{17}}{2}$

2022乙$key:key:\dfrac{5c}{2}=\dfrac{2c}{\frac{4}{5}}=\dfrac{|NF_1|}{\sin(\angle NF_1F_2+\angle F_1NF_2)}=\dfrac{|NF_2|}{\frac{a}{c}}=\dfrac{2a}{\frac{a}{c}\cdot\frac{3}{5}+\frac{b}{c}\cdot\frac{4}{5}-\frac{a}{c}}=\dfrac{5ac}{2b-a}$

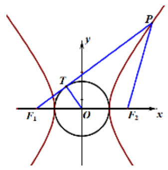


即$b=\dfrac{3}{2}a,\therefore e=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

（若交于一支，则$\dfrac{5c}{2}=\dfrac{2c}{\frac{4}{5}}=\dfrac{|NF_1|}{\frac{a}{c}}=\dfrac{|NF_2|}{\sin(\angle MF_2F_1-\angle NF_1F_2)}=\dfrac{|NF_2|}{\frac{a}{c}\cdot\frac{3}{5}-\frac{b}{c}\cdot\frac{4}{5}}=\dfrac{2a}{\frac{a}{c}-(\frac{a}{c}\cdot\frac{3}{5}-\frac{b}{c}\cdot\frac{4}{5})}=\dfrac{5ac}{a+2b}$

即$2b=a,\therefore e=\dfrac{\sqrt5}{2}$）

（2022 江苏）已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点为$F_1,F_2$，离心率为$\dfrac{5}{3}$，若过$F_1$的直线$l$与圆$x^2+y^2=a^2$相切于点$T$，且$l$与双曲线$C$的右支交于点$P$，则$\dfrac{|\overrightarrow{F_1P}|}{|\overrightarrow{F_1T}|}=$________.4

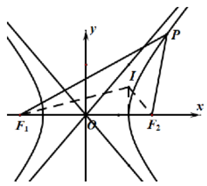


$key:$由$\dfrac{c}{a}=\dfrac{5}{3}$,得$c=\dfrac{5}{3}a,b=\dfrac{4}{3}a$,且$|\overrightarrow{F_1T}|=b=\dfrac{4}{3}a,$

设$|\overrightarrow{F_1P}|=r$,则$P(-c+r\cdot\dfrac{b}{c},r\cdot\dfrac{a}{c}),\therefore\dfrac{(-c+\frac{b}{c}r)^2}{a^2}-\dfrac{(\frac{a}{c}r)^2}{b^2}=\dfrac{(-\frac{5}{3}a+\frac{4}{5}r)^2}{a^2}-\dfrac{81r^2}{400a^2}=1$

即$\dfrac{7}{16}r^2-\dfrac{8}{3}ar+\dfrac{16}{9}a^2=0$得$r=\dfrac{16}{3}a,\therefore\dfrac{|\overrightarrow{F_1P}|}{|\overrightarrow{F_1T}|}=4$

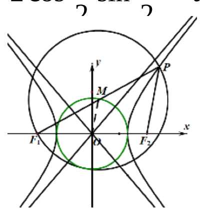
变式 1（1）①已知点P是双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$右上一动点，$F_1$、$F_2$是双曲线的左、右焦点，$O$为坐标原点. 设$\angle PF_1F_2=\alpha$，$\angle PF_2F_1=\beta$，则$\dfrac{\tan\frac{\alpha}{2}}{\tan\frac{\beta}{2}}=$________.

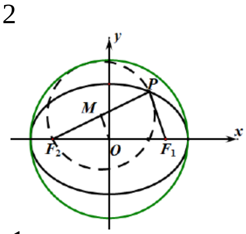


$key1:\dfrac{2c}{\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{|PF_1|}{\sin\beta}=\dfrac{|PF_2|}{\sin\alpha}=\dfrac{|PF_1|-|PF_2|}{\sin\beta-\sin\alpha}=\dfrac{2a}{\sin\beta-\sin\alpha}$,

$\therefore\dfrac{c}{a}=\dfrac{2\sin\frac{\beta+\alpha}{2}\cos\frac{\beta+\alpha}{2}}{2\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}=\dfrac{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}\Leftrightarrow\dfrac{c+a}{c-a}=\dfrac{2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{\tan\frac{\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha}{2}}$

$key2:\dfrac{\tan\frac{\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{\frac{r}{c-a}}{\frac{r}{c+a}}=\dfrac{c+a}{c-a}=\dfrac{e+1}{e-1}$





②以PF_1为直径的圆与圆$O:x^2+y^2=a^2$的位置关系是________.

当P在右支上时,$|OM|=\dfrac{1}{2}|PF_2|=\dfrac{1}{2}|PF_1|-a$,内切；当$P$在左支上时,$|OM|=\dfrac{1}{2}|PF_2|=\dfrac{1}{2}|PF_1|+a$,外切

椭圆:$|OM|=\dfrac{1}{2}|PF_1|=a-\dfrac{1}{2}|PF_2|$，内切

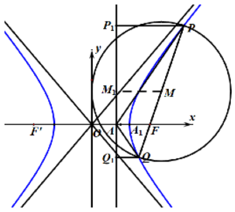
2023-11-18

③已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,若$PQ$过$F(c,0)$,$P_1,Q_1$是$P,Q$在直线$l:x=\frac{a^2}{c}$上的射影，$A$为$l$与$x$轴的交点.（Ⅰ）求证:$\angle PAQ$被$x$轴平分,且$\frac{1}{|PF|}+\frac{1}{|QF|}=\frac{2a}{b^2}$;（Ⅱ）判断以$PQ$为直径的圆与直线$l$的位置关系.

(1) 证明一：设$l_{PQ}:x=ty+c$代入C得:$(b^2t^2-a^2)y^2+2b^2cty+b^4=0$

$$\therefore\begin{cases}y_P+y_Q=-\dfrac{2b^2ct}{b^2t^2-a^2}\\ y_Py_Q=\dfrac{b^4}{b^2t^2-a^2}\end{cases},\text{且}\Delta=4a^2b^4(1+t^2)>0,\therefore k_{AP}+k_{AQ}=\frac{y_P}{ty_P+c-\frac{a^2}{c}}+\frac{y_Q}{ty_Q+c-\frac{a^2}{c}}=0$$

$$\Leftrightarrow y_P(ty_Q+\frac{b^2}{c})+y_Q(ty_P+\frac{b^2}{c})=2ty_Py_Q+\frac{b^2}{c}(y_P+y_Q)=\frac{2b^4t}{b^2t^2-a^2}+\frac{-2b^4t}{b^2t^2-a^2}=0$$



$$\text{且}\frac{1}{|PF|}+\frac{1}{|QF|}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\left|\frac{1}{y_P}-\frac{1}{y_Q}\right|=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\left|\frac{\frac{2ab^2\sqrt{1+t^2}}{b^2t^2-a^2}}{\frac{b^4}{b^2t^2-a^2}}\right|=\frac{2a}{b^2}$$

(2) 由 (1) $x_M=t\cdot\frac{-b^2ct}{b^2t^2-a^2}+c=\frac{-a^2c}{b^2t^2-a^2}$,$\therefore|MM_1|=\left|\frac{-a^2c}{b^2t^2-a^2}-\frac{a^2}{c}\right|=\frac{a^2b^2(1+t^2)}{c|b^2t^2-a^2|}$,

$\frac{1}{2}|PQ|=\sqrt{1+t^2}\cdot\frac{ab^2\sqrt{1+t^2}}{|b^2t^2-a^2|}=\frac{ab^2(1+t^2)}{|b^2t^2-a^2|}=\frac{c}{a}|MM_1|>|MM_1|$,$\therefore$相交

证明二：设$\angle PFx=\theta,|PF|=r_P$，则$P(c+r_P\cos\theta,r_P\sin\theta)$,$\therefore b^2(c+r_P\cos\theta)^2-a^2r_P^2\sin^2\theta=a^2b^2$

即$(c^2\cos^2\theta-a^2)r_P^2+2b^2c\cos\theta\cdot r_P-b^4=0$,$\therefore|PF|=r_P=\frac{b^2}{-c\cos\theta+a}$,同理$|QF|=\frac{b^2}{c\cos\theta+a}$

$$\therefore\frac{1}{|PF|}+\frac{1}{|QF|}=\frac{a-c\cos\theta}{b^2}+\frac{a+c\cos\theta}{b^2}=\frac{2a}{b^2}$$

$$|MM_1|=\frac{|PP_1|+|QQ_1|}{2}=\frac{1}{2}(\frac{b^2}{c}+\frac{b^2\cos\theta}{a-c\cos\theta}+\frac{b^2}{c}-\frac{b^2\cos\theta}{a+c\cos\theta})=\frac{a^2b^2}{c(a^2-c^2\cos^2\theta)}$$

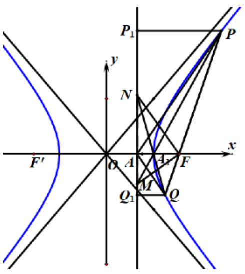
$$<\frac{1}{2}|PQ|=\frac{1}{2}(\frac{b^2}{a-c\cos\theta}+\frac{b^2}{a+c\cos\theta})=\frac{b^2c}{a^2-c^2\cos^2\theta},\text{相交}$$

④若PQ过$F_2(c,0)$,P_1,Q_1是P,Q在直线$l:x=\frac{a^2}{c}$上的射影，A为l与x轴的交点.设A_1为右顶点,PA_1、QA_1分别交直线l于M、N,求证:$FM\perp FN$.

key:设$l_{PQ}:x=ty+c$代入C得:$(b^2t^2-a^2)y^2+2b^2cty+b^4=0$

$$\therefore\begin{cases}y_P+y_Q=-\dfrac{2b^2ct}{b^2t^2-a^2}\\ y_Py_Q=\dfrac{b^4}{b^2t^2-a^2}\end{cases},\text{且}\Delta=4a^2b^4(1+t^2)>0,$$

由$l_{PA_1}:y=\frac{y_P}{ty_P+c-a}(x-a)$令$x=\frac{a^2}{c}$得$y_M=\frac{a(a-c)y_P}{c(ty_P+c-a)}$,同理$y_N=\frac{a(a-c)y_Q}{c(ty_Q+c-a)}$,



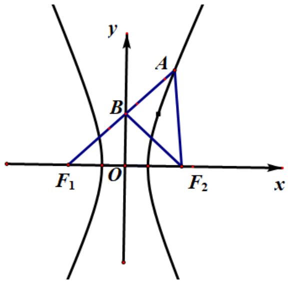
$$\therefore k_{FM}\cdot k_{FQ}=\frac{y_M}{\frac{a^2}{c}-c}\cdot\frac{y_N}{\frac{a^2}{c}-c}=\frac{a^2(a-c)^2}{b^4}\cdot\frac{y_Py_Q}{(ty_P+c-a)(ty_Q+c-a)}$$

$$=\frac{a^2(a-c)^2}{b^4}\cdot\frac{\frac{b^4}{b^2t^2-a^2}}{\frac{b^4t^2}{b^2t^2-a^2}+(c-a)t\cdot\frac{-2b^2ct}{b^2t^2-a^2}+(c-a)^2}=-1,\therefore FM\perp FN$$

2023-11-18

（2）①已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点$F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$，点$A$为双曲线$C$右支上一点，且$|AF_1|=2c,AF_1$与$y$轴交于点$B$,若$F_2B$是$\angle AF_2F_1$的角平分线，则双曲线$C$的离心率为（　　）

$A.\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$　$B.1+\sqrt{3}$　$C.\dfrac{3+\sqrt{5}}{3}$　$D.\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$



$key1$:由已知得$\triangle ABF_2\sim\triangle AF_2F_1,\therefore\dfrac{|AF_2|}{|AF_1|}=\dfrac{|AB|}{|AF_2|}=\dfrac{|BF_2|}{2c}=\dfrac{|AB|+|BF_2|}{|AF_2|+2c}=\dfrac{|AF_1|}{|AF_2|+2c}$,

由$2c=|AF_1|=2a+|AF_2|$得$|AF_2|=2c-2a,\therefore(2c-2a)(4c-2a)=4c^2$得$e=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

$key2$:$|AF_1|-|AF_2|=2a,|AF_1|=2c=|F_1F_2|$,

由$\triangle ABF_2\sim\triangle AF_2F_1$得$|BF_1|=|BF_2|=|AF_2|=2c-2a$,

又$\dfrac{BF_1}{BA}=\dfrac{2c}{AF_2}=\dfrac{c}{c-a}=\dfrac{BF_1}{2c-BF_1},\therefore BF_1=\dfrac{2c^2}{2c-a}=2c-2a$得$e=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

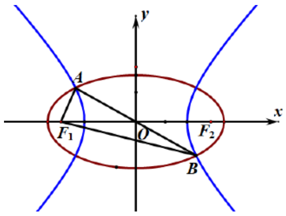
$key3$:设$\angle BF_1F_2=\angle BF_2F_1=\angle AF_2B=\theta$,

$\because|AF_1|=2c=|F_1F_2|,\therefore\angle F_1AF_2=2\theta,\therefore 5\theta=\pi$即$\theta=\dfrac{\pi}{5}$

$\therefore\cos\angle AF_2F_1=\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{c-a}{2c}=1-2\cdot\dfrac{6-2\sqrt{5}}{16}$得$e=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

②如图，F_1,F_2是椭圆C_1与双曲线C_2的公共焦点，A,B分别是C_1与C_2在第二、四象限的公共点，若$AF_1\perp BF_1$,设C_1与C_2的离心率分别为e_1,e_2.

则$8e_1+e_2$的最小值为（　　）A. $6+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　B. $4\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　C. $\dfrac{5\sqrt{10}}{2}$　D. $\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$



key:连AF_2,BF_2,则AF_1BF_2是矩形，

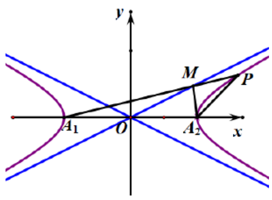
则$\begin{cases}|PF_1|+|PF_2|=2a_1\\|PF_2|-|PF_1|=2a_2\\|PF_1|^2+|PF_2|^2=4c^2\end{cases},\therefore 4a_1^2+4a_2^2=2(|PF_1|^2+|PF_2|^2)=8c^2$

$\therefore\dfrac{1}{e_1^2}+\dfrac{1}{e_2^2}=2,\therefore 1+\lambda^2=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{e_1^2}+\dfrac{1}{e_2^2})(1+\lambda^2)\geq\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{e_1}+\dfrac{\lambda}{e_2})^2$即$\dfrac{1}{e_1}+\dfrac{\lambda}{e_2}\leq\sqrt{2+2\lambda^2}$

而$8e_1+e_2=\dfrac{8}{\frac{1}{e_1}}+\dfrac{\lambda}{\frac{\lambda}{e_2}}\geq\dfrac{(2\sqrt{2}+\sqrt{\lambda})^2}{\frac{1}{e_1}+\frac{\lambda}{e_2}}\geq\dfrac{(2\sqrt{2}+\sqrt{\lambda})^2}{\sqrt{2+2\lambda^2}}=\dfrac{5\sqrt{10}}{2}$（当且仅当$\begin{cases}e_1^2=\lambda^2e_2^2\\\sqrt{8\lambda}e_1=e_2\end{cases}$即$\lambda=\dfrac{1}{2}$取$=$)

（3）①设双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的顶点为$A_1,A_2$，$P$为双曲线上一点，直线$PA_1$交双曲线$C$的一条渐近线于$M$点，直线$A_2M$和$A_2P$的斜率分别为$k_1,k_2$，若$A_2M\perp PA_1$且$k_1+4k_2=0$,则双曲线$C$的离心率为（　）

$A.2$　$B.\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　$C.\sqrt{5}$　$D.4$



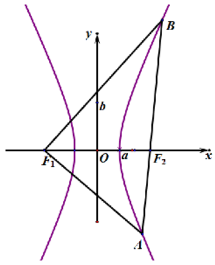
key:设$l_{A_1P}:x=ty-a$代入C得$P(\dfrac{a(b^2t^2+a^2)}{b^2t^2-a^2},\dfrac{2ab^2t}{b^2t^2-a^2})$,

2023-11-18

由$\begin{cases}x=ty-a\\ y=\dfrac{b}{a}x\end{cases}$得$M(\dfrac{a^2}{bt-a},\dfrac{ab}{bt-a}),\therefore k_{A_2M}\cdot k_{PA_1}=\dfrac{\dfrac{ab}{bt-a}}{\dfrac{a^2}{bt-a}-a}\cdot\dfrac{1}{t}=\dfrac{b}{2a-bt}\cdot\dfrac{1}{t}=-1$即$bt^2-2at-b=0$

$\therefore k_1+4k_2=\dfrac{b}{2a-bt}+4\cdot\dfrac{\dfrac{2ab^2t}{b^2t^2-a^2}}{\dfrac{a(b^2t^2+a^2)}{b^2t^2-a^2}-a}=\dfrac{b}{2a-bt}+\dfrac{4b^2t}{a^2}=0$即$a^2+4b(2at-bt^2)=a^2-4b^2=0,\therefore e=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

②（多选题）已知F_1,F_2是双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$的左、右焦点，过$F_2$的直线交双曲线的右支于$A,B$两点，且$|AF_1|=2|AF_2|,\angle AF_1F_2=\angle F_1BF_2$，则下列结论正确的是（　　）BD



A.双曲线C的离心率$e=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　B.双曲线C的一条渐近线斜率是$\sqrt{3}$

C.线段$|AB|=6a$　　D.$\triangle AF_1F_2$的面积是$\sqrt{15}a^2$.

key:由已知得:$\triangle AF_1F_2\sim\triangle ABF_1$,设$|AF_2|=m$,则$|AF_1|=2m,|AF_1|-|AF_2|=2a=m,$

且$|AB|=2|AF_1|=8a,|BF_2|=6a,|BF_1|=8a,\therefore\cos\angle F_1BA=\dfrac{7}{8},2c=4a,\therefore e=2,S_{\triangle AF_1F_2}=\sqrt{15}a^2$

（4）①已知点P在离心率为$\sqrt{2}$的双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$上，$F_1,F_2$为双曲线的两个焦点，且$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，则$\triangle PF_1F_2$的内切圆半径$r$与外接圆半径$R$之比为______.

key:由$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{2}$得$c=\sqrt{2}a$,且$8a^2=4c^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2=4a^2+2|PF_1|\cdot|PF_2|$

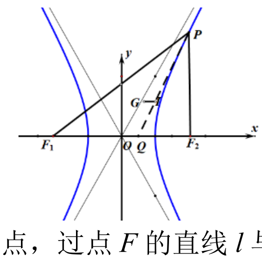
得$|PF_1|\cdot|PF_2|=2a^2,\therefore|PF_1|+|PF_2|=\sqrt{(|PF_1|-|PF_2|)^2+4|PF_1|\cdot|PF_2|}=2\sqrt{3}a$

$\therefore\dfrac{r}{R}=\dfrac{\dfrac{1}{2}(|PF_1|+|PF_2|-2c)}{c}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}-1$

②已知F_1、F_2分别为双曲线$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$的左、右焦点，点$P$在双曲线$C$上，$G$、$I$分别为$\triangle PF_1F_2$的重心、内心.若$GI//x$轴，则$\triangle PF_1F_2$的外接圆半径$R=$______.5

key:不妨设P在右支上，由$|PF_1|=\sqrt{(x_P+c)^2+b^2(\dfrac{x_P^2}{a^2}-1)}=\dfrac{c}{a}x_P+a=2x_P+2,|PF_2|=2x_P-2,$

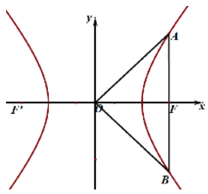
$\therefore\dfrac{1}{2}\cdot(|PF_1|+|PF_2|+2c)\cdot y_I=\dfrac{1}{2}\cdot 2c\cdot y_P$得$y_I=\dfrac{2y_P}{x_P+2}=\dfrac{y_P}{3}$得$x_P=4,y_P=6$



$\therefore l_{PF_1}:(x+4)^2+y^2=(x-4)^2+(y-6)^2$即$4x+3y-9=0$令$x=0$得$y=3$

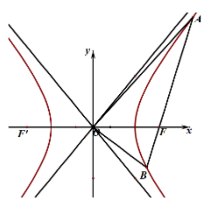
$\therefore R=\sqrt{3^2+4^2}=5$

变式2.设双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点为$F$，点$O$为坐标原点，过点$F$的直线$l$与$C$的右支相交于$A,B$两点.（1）当直线$l$与$x$轴垂直时，$OA\perp OB$，求$C$的离心率；（2）当$C$的焦距为2时，$\angle AOB$恒为锐角，求$C$的实轴长的取值范围.



解：（1）由已知得:$\angle AOx=45°,\therefore c=\dfrac{b^2}{a}$即$e=\dfrac{b^2}{a^2}=e^2-1,\therefore e=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

（2）设$l_{AB}:x=ty+c$代入C方程得:$(b^2t^2-a^2)y^2+2b^2cty+b^4=0$



$$\therefore\begin{cases} y_A+y_B=\dfrac{-2b^2ct}{b^2t^2-a^2} \\ y_Ay_B=\dfrac{b^4}{b^2t^2-a^2}\end{cases}, \text{且} b^2t^2-a^2<0, \text{且} a^2+b^2=c^2=1$$

$$\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(ty_A+c)(ty_B+c)+y_Ay_B=(t^2+1)\cdot\frac{b^4}{b^2t^2-a^2}+\frac{-2b^2c^2t^2}{b^2t^2-a^2}+c^2=\frac{-a^2b^2t^2-a^2c^2+b^4}{b^2t^2-a^2}>0$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2t^2+a^2c^2-b^4>0\Leftrightarrow t^2>\frac{(1-a^2)^2-a^2}{a^2(1-a^2)}=\frac{a^4-3a^2+1}{a^2(1-a^2)} \text{对} 0\le t^2<\frac{a^2}{b^2}=\frac{a^2}{1-a^2} \text{恒成立},$$

$$\therefore\begin{cases} a^4-3a^2+1<0 \text{即} \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\le a^2\le\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ 0<a<1\end{cases} \text{得} \frac{\sqrt{5}-1}{2}<a<1,$$

$\therefore C$的实轴长的取值范围为$(\sqrt{5}-1,2)$