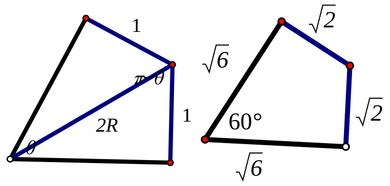
③一个半径为1的小球在一个内壁棱长为$4\sqrt{6}$的正四面体容器内可向各个方向自由运动，则该小球永远不可能接触到的容器内壁的面积是＿＿＿＿＿.

key：正四面体相邻两面所成角为$\theta=\arcsin\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$2R=\dfrac{\sqrt{1+1+2\cdot\frac{1}{3}}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\sqrt{3}$



$\therefore$达不到的面积为$12\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}+12\cdot2\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}=72\sqrt{3}$

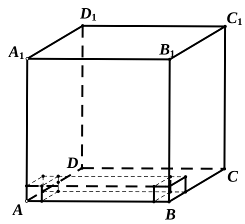
（2）①已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为a.内切球与一个顶点之间能放入的最大球的体积为＿＿＿＿＿＿＿＿.

key：$\dfrac{a}{2}+r+\sqrt{3}r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$得$r=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}a$

②一个棱长为1的正方体可以在一个正四面体内自由滚动，则此正四面体的棱长的最小值为＿＿＿.

key：正方体的外接球($r_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$)在正四面体的内切球($r_2=\dfrac{1}{12}\sqrt{6}a$)内，$\therefore\dfrac{1}{12}\sqrt{6}a\ge\dfrac{\sqrt{3}}{2}$即$a\ge3\sqrt{2}$

③若$a=2$，在正方体内有一个半径为$\dfrac{1}{4}$的小球，若小球在正方体内任意滚动.则小球与正方体接触不到的部分的面积为＿＿＿＿,体积为＿＿＿＿＿＿.

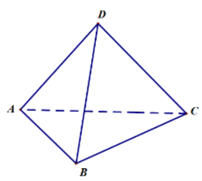


面积为$12\times2\times(\dfrac{1}{4}\times(2-2\times\dfrac{1}{4}))+8\times3\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{21}{2}$;

$3(4\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{2}\cdot\pi\cdot\dfrac{1}{16})+8\cdot(\dfrac{1}{4})^3-\dfrac{4}{3}\pi\cdot(\dfrac{1}{4})^3=\dfrac{5}{4}-\dfrac{29}{96}\pi$

（3）①半径为R的球内部装有4个半径相同的小球，则小球半径r的可能最大值为（　C　）

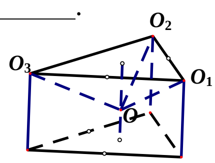
A．$\dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}R$　B．$\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}R$　C．$\dfrac{\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}R$　D．$\dfrac{\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}R$



key：$r+\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{3}\cdot2r\le R$，$\therefore r=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}R$

②桌面上放置两两相切三个半径为R的球.若在三球之上再放置一个半径为$2R$的球与这三个球都相切，则这个球的最高点到桌面的距离为＿＿＿＿; $(3+\sqrt{\dfrac{26}{3}})R$

若在桌面与三个球之间的空隙中放进一个小球，则这个小球的最大半径为＿＿＿＿＿.



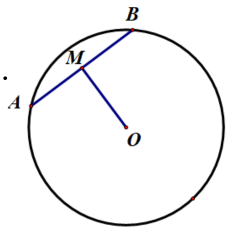
key：如图，$r+\sqrt{(R+r)^2-(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}R)^2}=R$得$r=\dfrac{1}{3}R$

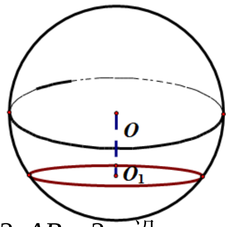
（4）高为32,底面半径为2的圆柱内最多可以放置＿＿＿＿＿＿个半径为1的球.

$key: n\cdot\sqrt{2}+2\le 32$得$n\le 21$,$\therefore$可放44个

（1993 全国竞赛）三棱锥 $S—ABC$ 中，侧棱 SA、SB、SC 两两互相垂直，M 为三角形 ABC 的重心，D 为 AB 的中点，作与 SC 平行的直线 DP．证明：（I）DP 与 SM 相交；

（II）设 DP 与 SM 的交点为 D'，则 D' 为三棱锥 $S—ABC$ 的外接球球心．





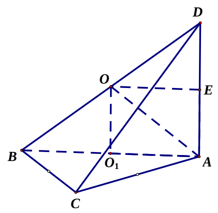
（垂径定理）$OM\perp AB$

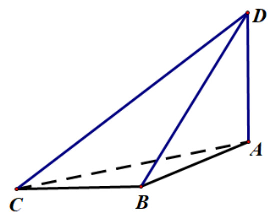
$OO_1\perp\odot O_1$

（1997 全国竞赛）已知三棱锥 S-ABC 的底面是以 AB 为斜边的等腰三角形，$SA=SB=SC=2, AB=2$，设 S、A、B、C 四点均在以 O 为球心的某个球面上，则点 O 到平面 ABC 的距离为 ______. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

（2008浙江高考）如图，已知球O的面上四点A,B,C,D，$DA\perp$平面ABC, $AB\perp BC$, $DA=AB=BC=\sqrt{3}$,

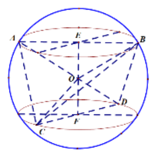
则球O的体积等于 ________. $\dfrac{9\pi}{2}$

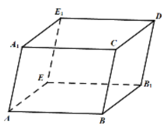




$key: R=\sqrt{\dfrac{6}{4}+\dfrac{3}{4}}=\dfrac{3}{2}, \therefore V=\dfrac{9\pi}{2}$

（2010 全国 I）（12）已知在半径为 2 的球面上有 A、B、C、D 四点，若 AB=CD=2,则四面体 $ABCD$ 的体积的最大值为（B　）A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　B. $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$



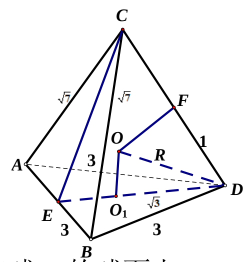


$2010key: V\le\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot 2\sqrt{3}$(或$\dfrac{1}{6}\cdot 2\cdot 2\cdot 2\sqrt{3}$)$=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

(11竞赛）在四面体$ABCD$中，已知$\angle ADB=\angle BDC=\angle CDA=60°, AD=BD=3, CD=2$,则四面体$ABCD$的外接球的半径为 _______ . $\sqrt{3}$

$key: \cos\angle CDE\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}$得$\cos\angle CDE=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore O_1F=\sqrt{3+1-2\cdot\sqrt{3}\cdot 1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=\sqrt{2}, \therefore R=OD=\dfrac{\sqrt{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}=\sqrt{3}$



（2012 全国 I）(11）已知三棱锥 $S-ABC$ 的所有顶点都在球 O 的球面上，$\triangle ABC$ 是边长为 1 的正三角形，SC 为球 O 的直径，且 $SC=2$.则此棱锥的体积为（　A　）

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

（2018 浙江竞赛）四面体$P-ABC, PA=BC=\sqrt{6}, PB=AC=\sqrt{8}, PC=AB=\sqrt{10}$，则该四面体的外接球的半径为___；内切球的半径为_______.

$$key:\begin{cases}a^2+b^2=6,\\ b^2+c^2=8,\ 得a^2+b^2+c^2=12, \therefore R_{外}=\sqrt{3}\\ c^2+a^2=10\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}a=2\\ b=\sqrt{2}\text{ 得}S_{\triangle ABP}=\sqrt{11},\therefore\frac{1}{3}\cdot4\sqrt{11}\cdot r=\frac{1}{3}\cdot2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}\text{即}r=\frac{\sqrt{33}}{11}\\ c=\sqrt{6}\end{cases}$$

(18全国III）设A,B,C,D是同一个半径为4的球面上的四点,$\triangle ABC$为等边三角形且其面积为$9\sqrt{3}$,
则三棱锥$D-ABC$体积的最大值为（ ）$A.12\sqrt{3}$ $B.18\sqrt{3}$ $C.24\sqrt{3}$ $D.54\sqrt{3}$ B

（2019 全国Ⅰ）已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面上，$PA=PB=PC$，$\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形，E，F 分别是 PA，AB 的中点，$\angle CEF=90^{\circ}$，则球 O 的体积为(D)

A．$8\sqrt{6}\pi$ B．$4\sqrt{6}\pi$ C．$2\sqrt{6}\pi$ D．$\sqrt{6}\pi$

(2020全国Ⅰ）已知A,B,C为球O的球面上的三个点，$\odot O_1$为$\triangle ABC$的外接圆，若$\odot O_1$的面积为4π，
$AB=BC=AC=OO_1$，则球O的表面积为（ ）$A.64\pi$ $B.48\pi$ $C.36\pi$ $D.32\pi$ A

（2021 甲）11. 已如 A，B，C 是半径为 1 的球 O 的球面上的三个点，且 $AC\perp BC, AC=BC=1$，则三棱锥 $O-ABC$ 的体积为（ A ）A. $\frac{\sqrt{2}}{12}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{12}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

变式 1（1）若正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的外接球的表面积为 4π，P 是棱 B_1C_1 的中点，则

（I）AP 被内切球截得的线段长为_____________；$\frac{2\sqrt{21}}{9}$

（II）被棱切球截得的线段长为___________.$\frac{8\sqrt{3}}{9}$

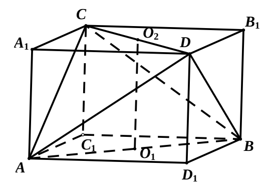
2(1)三棱锥 *A-BCD* 的两条棱 *AB=CD*=6,其余 各棱长均为 5,则三棱锥的内切球的体积为_______.$\frac{65\sqrt{65}\pi}{4}$

变式1. 在四面体$ABCD$中, $AB=CD=a, AC=BD=b, AD=BC=c$,以下判断错的是（ ）

$A.$该四面体的三组对棱的中点连线两两垂直$B.$该四面体的外接球球心和内切球的球心重合

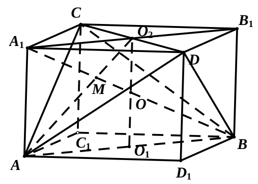
$C.$该四面体的各面是全等的锐角三角形

$D.$该四面体中任意三个面两两所成二面角的正弦值之和为1



key:补成长方体得A,C对；

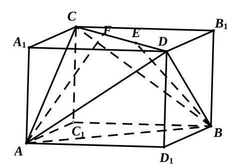
$$A_1M=\frac{1}{3}A_1B, A_1O=\frac{1}{2}A_1B,\therefore OM=\frac{1}{6}A_1B=\frac{1}{2}A_1M$$



$$\therefore d_{O\to ACD}=\frac{1}{2}d_{A\to ACD}=d_{O\to ABD}=d_{o\to BCD}=d_{O\to ABC},\therefore B\text{对}$$

设$\angle BDC=\alpha$,则$\cos\alpha=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

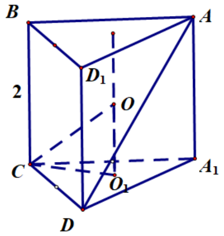
$$a^2=(a-2b\cos\alpha)^2+b^2\sin^2\alpha+b^2\sin^2\alpha-2b^2\sin^2\alpha\cos\theta_1$$



$$\text{得}\cos\theta_1=\frac{2b^2+2b^2\cos^2\alpha-4ab\cos\alpha}{2b^2\sin^2\alpha}=\frac{(a^2+b^2-c^2)^2+2a^2(c^2-a^2)}{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2},\therefore C\text{错}$$

（2）四面体 $ABCD$中，$AB\perp BC, CD\perp BC, BC=2$，且异面直线$AB$与$CD$所成角为$60^{\circ}$,若四面体$ABCD$的外接球半径为$\sqrt{5}$，则四面体$ABCD$的体积的最大值为（ ）A

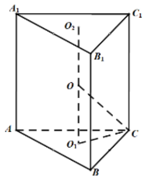
$A.2\sqrt{3}$　$B.4\sqrt{3}$　$C.\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　$D.\dfrac{\sqrt{3}}{6}$



key:（构造直三棱柱）$O_1C=2,\therefore \dfrac{A_1D}{\sin 60^\circ}=4$即$A_1D=2\sqrt{3}$

$\therefore C$的轨迹为半径为$2\sqrt{3}$的优弧,$\therefore V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}V_{ABD_1-A_1CD}\le\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 12\cdot 2=2\sqrt{3}$

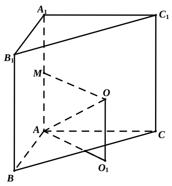
（3）①已知正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的底面边长为1,若此正三棱柱有内切球，则它的外接球的体积为_____.



key:内切球直$2r=$底面内切圆直径$=\dfrac{\sqrt{3}}{3}=$正三棱柱的高，

$\therefore$外接球半径$R=\sqrt{5}r=\dfrac{\sqrt{15}}{6},\therefore V=\dfrac{4\pi}{3}\cdot\dfrac{15}{36}\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{6}=\dfrac{5\sqrt{15}}{54}\pi$

②直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的各顶点都在同一个球面上，若$AB=AC=AA_1=2,\angle BAC=120^\circ$，则此球的表面积为_______.



key:$2r=\dfrac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4$得$AO_1=r=2,\therefore R=\sqrt{3}$