④方程$x^4-3x^3+5x^2-4x+2=0$的解集为__________.

$key: x^4-3x^3+5x^2-4x+2=(x^2+ax+1)(x^2+bx+2)$

得$\begin{cases} b+a=-3 \\ 2+ab+1=5 \\ 2a+b=-4 \end{cases}$得$a=-1, b=-2, \therefore \Phi$

（2）①方程组$\begin{cases} 2x-y+1=0, \\ 3x^2-2xy-y^2-x-3y-2=0 \end{cases}$的解集为________.

$$\begin{array}{ccc} x & y & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ \hline 1 & -2 & -3 \end{array}$$

①

$\therefore$（消元）$3x^2-2xy-y^2-x-3y-2=(3x+y+2)(x-y+2), \therefore \{(-\frac{3}{5},\frac{1}{5}),(0,1)\}$

②方程组$\begin{cases} 2x^2-xy+y^2=1, \\ x^2-2xy+3y^2=1 \end{cases}$的解集为________.

②key:（消常数）$\begin{cases} 2x^2-xy+y^2=1 \\ x^2+xy-2y^2=(x-y)(x+2y)=0 \end{cases}, \therefore \{(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}),(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}),(-\frac{2}{\sqrt{11}},\frac{1}{\sqrt{11}}),(\frac{2}{\sqrt{11}},-\frac{1}{\sqrt{11}})\}$

③（2011全国竞赛）方程组$\begin{cases} y^2=4x, \\ (x-9)^2+(y-4)^2=100 \end{cases}$的解集为_____.

③key:（代入消元法）$(\frac{y^2}{4}-9)^2+(y-4)^2=100$即$y^4-56y^2-128y-48$

$=(y^2+ay-4)(y^2-ay+12)$（其中$\begin{cases} 12-a^2-4=-56 \\ 12a+4a=-128 \end{cases}$即$a=-8$）

$=(y^2-8y-4)(y^2+8y+12)=0, \therefore \{(1,-2),(9,-6)\}$

④方程组$\begin{cases} \frac{x^2}{2}+y^2=1, \\ (x+\frac{2}{11})^2+(y-\frac{3}{11})^2=\frac{200}{121} \end{cases}$的解集为_______.

④key:由$\begin{cases}x^2+2y^2=2\\ x^2+y^2+\dfrac{4}{11}x-\dfrac{6}{11}y-\dfrac{187}{121}=0\end{cases}$

（消平方一个项）得:$2-y^2+\dfrac{4}{11}x-\dfrac{6}{11}y-\dfrac{187}{121}=0$即$x=\dfrac{1}{4}(11y^2+6y-5)$

$\therefore\dfrac{1}{16}(11y^2+6y-5)^2+2y^2=2\Leftrightarrow 121y^4+132y^3-42y^2-60y-7=$

$=(11y+ay-1)(11y+by+7)$(其中$a=-6,b=18$)

$=(11y^2-6y-1)(11y^2+18y+7)=0,\therefore y=-1,-\dfrac{7}{11},\dfrac{3\pm2\sqrt{5}}{11}\ (x=\dfrac{1}{4}(6y+1+6y-5)=3y-1)$

$\therefore\{(0,-1),(-\dfrac{12}{11},-\dfrac{7}{11}),(\dfrac{-2+6\sqrt{5}}{11},\dfrac{3+2\sqrt{5}}{11}),(\dfrac{-2-6\sqrt{5}}{11},\dfrac{3-2\sqrt{5}}{11})\}$

（2015 浙江） 设A,B是有限集，定义$d(A,B)=card(A\cup B)-card(A\cap B)$，其中$card(A)$表示有限集$A$中

元素个数.判断下列命题的真假：①对任意有限集A,B，若$A\neq B$，则$d(A,B)>0$;

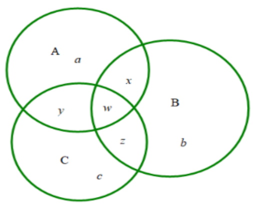
②对任意有限集A,B,C，都有$d(A,C)\le d(A,B)+d(B,C)$.　　　A

A.命题①和命题②都成立　　　B. 命题①和命题②都不成立

C.命题①成立，命题②不成立　　D. 命题①不成立，命题②成立

变式 1： 对于任何集合S，记$n(S)$为集合S的子集个数，如果A,B,C是三个集合，满足下列条件：

①$n(A)+n(B)+n(C)=n(A\cup B\cup C)$; ②$card(A)=card(B)=100$;



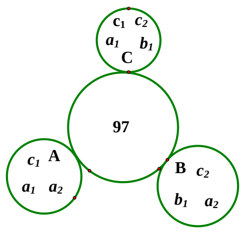
则$card(A\cap B\cap C)$的最大值为_______;最小值为_________.

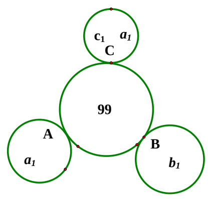
key:由已知得:$2^{101}+2^{card(C)}=2^{card(A\cup B\cup C)}$

key:由已知得:$2^{101}+2^{card(C)}=2^{card(A\cup B\cup C)},\therefore card(C)=101,card(A\cup B\cup C)=102,$

$\therefore\begin{cases}a+x+z+w=100\\ c+y+z+w=100\\ b+x+y+w=101\\ a+b+c+x+y+z+w=102\end{cases},\therefore x+y+z+2w=199\ge 2w,\therefore w\le 99$

$199=x+y+z+2w=w+102-a-b-c,\therefore w\ge 97+a+b+c\ge 97$





（2016 湖南）12．当一个非空数集 F 满足条件“如果 $a,b\in F$，则 $a+b,a-b,a\cdot b\in F$，且当 $b\neq0$ 时，$\dfrac{a}{b}\in F$”时，我们称 F 就是一个数域.以下四个关于数域的命题：①0 是任何数域的元素；

②若数域 F 有非零元素，则 $2016\in F$；③集合 $P=\{x\mid x=3k,k\in Z\}$ 是一个数域；

④有理数集是一个数域.其中真命题的代号是________（写出所有真命题的代号） ①②④

$key: 0=a-a\in F, \therefore$ ①对；若$a\neq 0$，$a\in F$，则$1=\frac{a}{a}\in F, \therefore 2=1+1\in F, \cdots, \therefore 2016\in F$，②对；

③$\frac{2\times 3}{1\times 3}=2\notin P$，③错；④若$a,b\in Q$，则$a+b,a-b,a\cdot b\in Q$.当$b\neq 0$时，$\frac{a}{b}\in Q$，对

变式 2（1）用 $C(A)$ 表示非空集合 A 中元素的个数，定义 $A*B=\begin{cases}C(A)-C(B), C(A)\geq C(B)\\ C(B)-C(A), C(A)<C(B)\end{cases}$，已知集合

$A=\{x\mid x^2+x=0\}$，$B=\{x\mid (x^2+ax)(x^2+ax+1)=0\}$，且 $A*B=1$，设实数 a 的所有可能取值构成集合

S，则 $C(S)=$（ D ）A．0　　B．1　　C．2　　D．3

$key: C(A)=2, (x^2+ax)(x^2+ax+1)\Leftrightarrow x=0,-a, or, x^2+ax+1=0$

当$a=0$时，$C(B)=1, \therefore A*B=1;$

当$a\neq 0$时，$C(B)=3, \because a^2+a\cdot(-a)+1\neq 0, \therefore \Delta=a^2-4=0$得$a=\pm 2, \therefore C(S)=3$

（2）①设集合$S=\{-20,21,5,-11,-15,30,a\}$，我们用$f(S)$表示集合$S$的所有元素之和，用$g(S)$表示集合$S$的所有元素之积.则下列说法正确的是（ ）C

A.若$a=0$，对S的所有非空子集A_1，$f(A_1)$的和为320 B.若$a=0$，对S的所有非空子集B_1，$f(B_1)$的和为-640
C.若$a=-1$，对S的所有非空子集C_1，$g(C_1)$的和为-1 D.若$a=-1$，对S的所有非空子集D_1，$g(D_1)$的和为0

$key:$若$a=0$，则$f(A_1)=(-20+21+5-11-15+30+0)\cdot 2^6=640$

若$a=-1$，设不含-1的子集的$g(C_1)$总和为M，则含-1的子集的$g(C_1)$总和为$-M-1, \therefore g(C_1)$的和为-1

②在整数集 Z 中，被 6 除所得余数为 k 的所有整数组成一个“类”，记$[k]=\{6n+k\mid n\in Z\}$，则“整数 a，b 属于同一‘类’”是“$a-b\in[0]$”的（ C ）

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件　C．充要条件　D．既不充分也不必要条件

$key:$由$a,b\in[k]$得，$a=6n_1+k, b=6n_2+k, \therefore a-b=6(n_1-n_2)\in[k]$

由$a-b\in[0]$得，$a-b=6n, \therefore a,b\in[k]$

③设A是非空数集，若对任意$x,y\in A$，都有$x+y\in A, xy\in A$，则称A具有性质P.则下列命题正确的是（ ）

A.若A具有性质P，则A可以是有限集
B.若A_1,A_2具有性质P，且$A_1\cap A_2\neq\Phi$，则$A_1\cap A_2$具有性质P
C.若A_1,A_2具有性质P，则$A_1\cup A_2$具有性质P
D.若A具有性质P，且$A\neq R$，则$\complement_R A$不具有性质P

$key: A$.取$A=\{0\}$，A具有性质P;
B.若$x,y\in A_1\cap A_2\subseteq A_1,A_2$，则$x+y\in A_1, xy\in A_1$，且$x+y\in A_2, xy\in A_2, \therefore x+y, xy\in A_1\cap A_2, \therefore B$对

C.取$A_1=\{p+q\sqrt{3}\mid p,q\in N\}, A_2=\{p+q\sqrt{2}\mid p,q\in N\}$，则$A_1,A_2$具有性质$P$，
且$(p_1+q_1\sqrt{3})+(p_2+q_2\sqrt{2})=p_1+p_2+q_1\sqrt{3}+q_2\sqrt{2}\notin A_1\cup A_2 (q_1q_2\neq 0), \therefore C$错
D.若$\forall a,-a\in A(a\neq 0)$，则$0\in A, \therefore A=R$与$A\neq R$矛盾
$\therefore$存在$a\neq 0, a\in A, -a\notin A$即$-a\in\complement_R A$
假设$\complement_R A$具有性质P，则$a\cdot a=a^2\in A, (-a)\cdot(-a)=a^2\in\complement_R A$矛盾，$\therefore D$错

④已知S_1,S_2,S_3为非空集合，且对于1,2,3的任意一个排列i,j,k，若$x\in S_i,y\in S_j$，则$x-y\in S_k$，

则下列说法正确的是（　）
A.三个集合互不相等　B.三个集合中至少有两个相等 C.三个集合全相等　　D.以上说法均不对

key:若$S_1=S_2=S_3=\{0\}$,符合题设条件；
由$x\in S_i,y\in S_j$得$x-y\in S_k$；由$y\in S_j,x\in S_i$得$y-x\in S_k$,$\therefore S_1,S_2,S_3$都有非负数，
设$a=\min\limits_{x\geq 0}\{x\mid x\in S_1\cup S_2\cup S_3\}$
当$a=0$时，不妨设$0\in S_1$,则$\forall x\in S_2$,有$x-0=x\in S_3,0-x=-x\in S_3$;
$\forall x\in S_3$，有$x-0=x\in S_2,0-x=-x\in S_2,\therefore S_2=S_3$;
当$a>0$时，不妨设$a\in S_1$,设$b=\min\limits_{x\geq 0}\{x\mid x\in S_2\cup S_3\}$,不妨设$b\in S_2$，则$a-b,b-a\in S_3$,
$\therefore |a-b|\leq a,\therefore b=0$,则$S_1=S_3$,或$S_1=S_2$.

（2）（多选题）①已知正整数集合$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{50}\}$，记$S(A)$表示集合$A$中所有元素的和，$E(A)$表示集合$A$中偶数的个数.若$S(A)=2021$，则$E(A)$的可能值（　）$A$.43　B.42　C.7　D.6
$key:S(A)=\underbrace{(a_{i_1}+\cdots+a_{i_m})}_{E(A)\text{个偶数}}+\underbrace{(a_{i_{m+1}}+\cdots+a_{i_{50}})}_{50-E(A)\text{个奇数}}=2021$
若$E(A)=2k$,则$S(A)=$偶数，不合；若$E(A)=2k-1$,则$S(A)$是奇数.选AC
②若非空实数集 X 中存在最大元素 M 和最小元素 m，则记$\Delta(X)=M-m$.下列命题中正确的是（　）CD
A.已知 $X=\{-1,1\},Y=\{0,b\}$,且$\Delta(X)=\Delta(Y)$，则$b=2$
B．已知 $X=[a,a+2],Y=\{y\mid y=x^2,x\in X\}$，则存在实数 a，使得$\Delta(Y)<1$
C．已知 $X=\{x\mid f(x)\geq g(x),x\in[-1,1]\}$.若$\Delta(X)=2$，则对任意$x\in[-1,1]$，都有$f(x)\geq g(x)$
D.已知 $X=[a,a+2],Y=[b,b+3]$，则对<u>任意</u>的实数 a，总存在实数 b，使得$\Delta(X\cup Y)\leq 3$
③设 U 是一个非空集合，F 是 U 的子集构成的集合.如果 F 同时满足：
（ⅰ）$\Phi\in F$；（ⅱ）若$A,B\in F$，则 $A\cap(\complement_U B)\in F$且$A\cup B\in F$，那么称$F$是$U$的一个环.
下列说法正确的是（　）ABC
A.若$U=\{1,2,3,4,5,6\}$,则$F=\{\Phi,\{1,3,5\},\{2,4,6\},U\}$是$U$的一个环
B.若$U=\{a,b,c\}$,则存在U的一个环F，F含有8个元素
C.若$U=Z$，则存在U的一个环F,F含有4个元素且$\{2\},\{3,5\}\in F$
D.若$U=R$,则存在U的一个环F,F含有7个元素且$[0,3],[2,4]\in F$

$key:A:$对；$B:F=\{\Phi,U,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\}\}$是$U$的一个环，对；

$C:$令$F=\{\Phi,\{2\},\{3,5\},\{2,3,5\}\}$,满足$A\cup B\in F$,

$\{2\}\cap \complement_Z\Phi=\{2\}\in F,\{2\}\cap \complement_Z\{3,5\}=\{2\}\in F,\{2\}\cap \complement_Z\{2,3,5\}=\Phi\in F,$

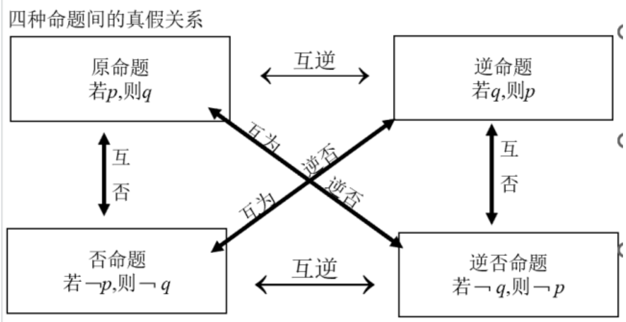
$\{3,5\}\cap \complement_Z\{2\}=\{3,5\}\in F,\{3,5\}\cap \complement_Z\{2,3,5\}=\Phi\in F,\{3,5\}\cap \complement_Z\Phi=\{3,5\}\in F,$

$\{2,3,5\}\cap \complement_Z\{2\}=\{3,5\}\in F,\{2,3,5\}\cap \complement_Z\{3,5\}=\{2\}\in F,\{2,3,5\}\cap \complement_Z\Phi=\{2,3,5\}\in F.C$对

$D.\Phi,[0,3]\cap \complement_R[2,4]=[0,2),[2,4]\cap \complement_R[0,3]=(3,4],[0,3]\cup[2,4]=[0,4],[0,2)\cup(3,4]\in F$

$\Phi\cap \complement_R[0,2)\cup(3,4]=[2,3],\Phi\cap \complement_R[0,4]=(-\infty,0)\cup(4,+\infty),\therefore$有9个元素，

2.简易逻辑



四种条件：（1）充分条件：①若$p\Rightarrow q$，则称p是q的充分条件；

②若$p\Rightarrow q,q\nRightarrow p$，则称$p$是$q$的充分不必要条件.

（2）必要条件：①若$p\Rightarrow q$，则称q是p的充分条件

②若$p\Rightarrow q,q\nRightarrow p$，则称$p$是$q$的必要不充分条件.

（3）充要条件：若$p\Rightarrow q,q\Rightarrow p(p\Leftrightarrow q)$，则称$p$是$q$的充分且必要条件，简称充要条件

（4）既不充分也不必要条件：若$p\nRightarrow q,q\nRightarrow p$,则称$p$既不是$q$的充分条件也不是必要条件.

全称命题$p:\forall x\in M,x\in N;\neg p:\exists x_0\in M,x_0\notin N$

特称命题$p:\exists x_0\in M,x_0\in N;\neg p:\forall x\in M,x_0\in N.$

（2012浙江）设$a>0,b>0$.(　　)A

$A.$若$2^a+2a=2^b+3b$,则$a>b$　$B.$若$2^a+2a=2^b+3b$,则$a<b$

$C.$若$2^a-2a=2^b-3b$，则$a>b$　$D.$若$2^a-2a=2^b-3b$,则$a<b$

（2015浙江）命题“$\forall n\in N^*,f(n)\in N^*$且$f(n)\le n$”的否定形式是（　）C

$A.\forall n\in N^*,f(n)\notin N^*$且$f(n)>n$　　$B.\forall n\in N^*,f(n)\notin N^*$或$f(n)>n$

$C.\exists n_0\in N^*,f(n_0)\notin N^*$且$f(n_0)>n_0$　　$D.\exists n_0\in N^*,f(n_0)\notin N^*$或$f(n_0)>n_0$

（2016浙江）命题“$\forall x\in R,\exists n\in N^*$,使得$n\ge x^2$”的否定形式是（　）B

$A.\forall x\in R,\exists n\in N^*$,使得$n<x^2$　　$B.\forall x\in R,\forall n\in N^*$,使得$n<x^2$

$C.\exists x\in R,\exists n\in N^*$,使得$n<x^2$　　$D.\exists x\in R,\forall n\in N^*$,使得$n<x^2$

(2018浙江竞赛)12.设$a\in R$,且对任意实数b均有$\max\limits_{x\in[0,1]}|x^2+ax+b|\ge 1$，求$a$的取值范围.

集合、代数运算、不等式解答（2）

2022-10-02

$2018: p:\forall b\in R,\exists x\in[0,1],|f(x)|\ge 1,$ 其中 $f(x)=x^2+ax+b$

$key1:\min\limits_{b\in R}\{\max\{\max\limits_{x\in[0,1]}f(x),-\min\limits_{x\in[0,1]}f(x)\}\}\ge 1$

$key2$:（上下自由滑动）$\dfrac{\max\limits_{x\in[0,1]}f(x)-\min\limits_{x\in[0,1]}f(x)}{2}\ge 1$

$key3$:（截距函数）$|-x^2-(ax+b)|\ge 1$

$key4$:（三点法）设 $M=\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|,$

由 $f(0)=b,\ f(1)=1+a+b$ 得 $f(1)-f(0)=1+a$

$\therefore 2M\ge|f(1)|+|f(0)|\ge|f(1)-f(0)|=|1+a|,\therefore\dfrac{|a+1|}{2}\ge 1$ 得 $a\le -3,or,a\ge 1$

$key5$（切线应用）: $p:\forall b\in R,\exists x\in[0,1],|x^2+ax+b|\ge 1$

$\neg p:\exists b\in R,\forall x\in[0,1],|x^2+ax+b|<1\Leftrightarrow -1-x^2<ax+b<1-x^2$

变式 1（1）已知p是r的充分而不必要条件，q是r的充分条件，s是r的必要条件，q是s的必要条件.

现有下列命题：①s是q的充要条件；②p是q的充分而不必要条件；③r是q的必要条件而不是充分条件；

④$\neg p$是$\neg s$的必要条件而不是充分条件；⑤r是s的充分条件而不是必要条件.则正确的命题序号是______.

$key: p\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} r\Leftarrow q$

$\Downarrow\nearrow$

s

①②④

（2）若$2x^2-4xy+4y^2-2x+1\ne 0$，则$x\ne 1,$且$y\ne\dfrac{1}{2}.$

逆否命题：若$x=1,$或$y=\dfrac{1}{2},$则$(x-2y)^2+(x-1)^2=0$　　假

（3）已知函数$f(x)=x^2+ax+b.\exists x_0\in[0,2],$使得$|f(x_0)|\ge 1,$则$a$的取值范围为________.

$key2:\neg p:\forall x\in[0,2],|f(x)|<1\Leftrightarrow -1-x^2<ax+b<1-x^2$得$-2\sqrt{2}<a<4-2\sqrt{2}$

$\therefore a$的取值范围为$(-\infty,-2\sqrt{2}]\cup[4-2\sqrt{2},+\infty)$

二、代数运算与不等式性质

1.⑴ 实数大小定义：$a>b\Leftrightarrow a-b>0,a<b\Leftrightarrow a-b<0,a=b\Leftrightarrow a-b=0$

(2) 实数符号运算法则:正$+$正$=$正，负$+$负$=$负，

正$\times$正$=$正，负$\times$负$=$负，正$\times$负$=$负

（3）加、减，乘、除、乘方、开方、指数、对数运算

（2021浙江）已知$x=u,y=v,z=\dfrac{2u+v-2}{\sqrt{5}},$则$(x^2+y^2+z^2)_{\min}=$______.

2022-10-02

2021浙江：（主元）$x^2+y^2+z^2=u^2+v^2+\frac{1}{5}(4u^2+4(v-2)u+v^2-4v+4)$

$$=\frac{9}{5}u^2+\frac{4(v-2)}{5}u+\frac{6}{5}v^2-\frac{4}{5}v+\frac{4}{5}\ge\frac{4\times\frac{9}{5}(\frac{6}{5}v^2-\frac{4}{5}v+\frac{4}{5})-\frac{16}{25}(v-2)^2}{\frac{36}{5}}=\frac{2}{9}(5v^2-2v+2)\ge\frac{2}{5}$$

变式1⑴ 已知实数a,b,c满足$a+b+c=0,a^2+b^2+c^2=\frac{1}{10}$,则$a^4+b^4+c^4=$___.

变式1⑴ $key1:a^2+b^2+(-a-b)^2=\frac{1}{10}$得$a^2+b^2+ab=\frac{1}{20},\therefore a^4+b^4+c^4=(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

$=\frac{1}{100}-2(a^2b^2+b^2(a+b)^2+a^2(a+b)^2)=\frac{1}{100}-2(a^2+b^2+ab)^2=\frac{1}{200}$

$key2:(a+b+c)^2=0$得$ab+bc+ca=-\frac{1}{20}$

$\therefore(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\frac{1}{400}$

$\therefore(a^2+b^2+c^2)^2=a^4+b^4+c^4+2\cdot\frac{1}{400}=\frac{1}{100}$

（2）已知a,b为$Rt\triangle ABC$的直角边，c为斜边，若$(a^n+b^n+c^n)^2=2(a^{2n}+b^{2n}+c^{2n})(n\in N^*,n\ge 2)$，则$n=$___.

key:（主元）$2(a^{2n}+b^{2n}+c^{2n})-(a^n+b^n+c^n)^2=(a^n-b^n+c^n)^2-4a^nc^n=0$

$\Leftrightarrow a^n-b^n+c^n=2\sqrt{a^nc^n}\Leftrightarrow(\sqrt{c^n}-\sqrt{a^n})^2=b^n$

$\therefore\sqrt{c^n}-\sqrt{a^n}=\sqrt{b^n}\Leftrightarrow\sqrt{(\frac{a}{c})^n}+\sqrt{(\frac{b}{c})^n}=(\frac{a}{c})^{\frac{n}{2}}+(\frac{b}{c})^{\frac{n}{2}}=1$

由$c>a>0,c>b>0,\therefore\frac{a}{c},\frac{b}{c}\in(0,1)$

当$n<4$时$,1=(\frac{a}{c})^{\frac{n}{2}}+(\frac{b}{c})^{\frac{n}{2}}>(\frac{a}{c})^2+(\frac{b}{c})^2=1$矛盾,

当$n>4$时$,1=(\frac{a}{c})^{\frac{n}{2}}+(\frac{b}{c})^{\frac{n}{2}}<(\frac{a}{c})^2+(\frac{b}{c})^2=1$矛盾,

当$n=4$时$,1=(\frac{a}{c})^{\frac{n}{2}}+(\frac{b}{c})^{\frac{n}{2}}=(\frac{a}{c})^2+(\frac{b}{c})^2=1,\therefore n=4$

（3）求证:$(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2\le 4(a^2+b^2+c^2+d^2)$.

证明：（主元）$\because 4(a^2+b^2+c^2+d^2)-[(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2]$

$$=a^2+2(b+c+d)a+b^2+c^2+d^2+2bc+bd+2cd\ge\frac{4(b^2+c^2+d^2+2bc+2bd+2cd)-4(b+c+d)^2}{4}=0$$

（或$:=(a+b+c+d)^2\ge 0)\therefore$得证

2⑴ 已知$x+\frac{1}{x}=1$，则$x^3+\frac{1}{x^3}=$______$,x^4+\frac{1}{x^4}=$_____$,x^7+\frac{1}{x^7}=$_______.

2022-10-02

(1) $x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})(x^2-1+\frac{1}{x^2})=-2$

$x^4+\frac{1}{x^4}=(x+\frac{1}{x})(x^3+\frac{1}{x^3})-(x^2+\frac{1}{x^2})=-3$

$x^7+\frac{1}{x^7}=(x^3+\frac{1}{x^3})(x^4+\frac{1}{x^4})-(x+\frac{1}{x})=5$

（2）①已知$a+b=\sqrt{2},ab=1$，则$a^2+b^2=$______$,a^3+b^3=$______.

①$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=0,a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)=\sqrt{2}(0-1)=-\sqrt{2}$

②已知实数a,b满足$a^3+b^3+3ab=1$，则$a+b=$_____.

②$key:1=a^3+b^3+3ab=(a+b)^3-3ab(a+b)+3ab$

$\therefore (a+b-1)[(a+b)^2+(a+b)+1-3ab]=(a+b-1)(a^2-ab+b^2+a+b+1)$

$=(a+b-1)[(a-\frac{b-1}{2})^2+\frac{3}{4}(b+1)^2]=0$(或$(a+b-1)(\frac{3}{4}(a-b)^2+(\frac{a+b}{2}+1)^2)=0$)

$\therefore a+b=1,or,-2$

③已知 $a>0,b>0,a^3+b^3=2$，则$a+b$ 的取值范围为____________.

$key:2=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)[\frac{1}{4}(a+b)^2+\frac{3}{4}(a-b)^2]\ge\frac{1}{4}(a+b)^3,\therefore a+b\le 2$

$2=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)[(a+b)^2-3ab]<(a+b)^3,\therefore\sqrt[3]{2}<a+b\le 2$

极化恒等式：$ab=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}=\frac{a^2+b^2-(a-b)^2}{2}=\frac{(a+b)^2-a^2-b^2}{2}$

$a^2+b^2=\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{2}=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$

配方：$a^2+ab+b^2=\frac{3}{4}(a+b)^2+\frac{1}{4}(a-b)^2$

$a^2-ab+b^2=\frac{3}{4}(a-b)^2+\frac{1}{4}(a+b)^2$

根式：$a^m\cdot a^n=a^{m+n},a^m\div a^n=a^{m-n}.(a^m)^n=a^{mn},(ab)^n=a^n\cdot b^n,a^{-1}=\frac{1}{a},\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}(m,n\in N^*)$

形如$\sqrt[n]{a}(n\in N^*,n>1)$的式子叫做根式.（$\sqrt{2}=$______$,\sqrt{3}=$______$,\sqrt{5}=$________）

*（2021 乙卷）12.设$a=2\ln 1.01,b=\ln 1.02,c=\sqrt{1.04}-1$．则（　　）B

A. $a<b<c$　　B. $b<c<a$　　C. $b<a<c$　　D. $c<a<b$

$key:a=\ln 1.01^2=\ln(1+0.02+0.01^2)>\ln 1.02=b;$

$f(x)=2\ln(1+x)-\sqrt{1+4x}+1(x=0.01\in(0,1))]g(x)=\sqrt{1+2x}-1-\ln(1+x)(x=0.02\in(0,1))$

泰勒展开：$f(x)=\frac{f(x_0)}{0!}+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$得

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots,$

$\therefore a>2(0.01-0.00005)=0.0199,b=\ln 1.02<0.02-0.0002+0.0000027=0.0198027,c\approx 0.0198039$

1.019803

$1|\overline{1.04}$

201 | 400

201

2029 | 19900

18261

20388 | 163900

163104

2029603 | 7960000

6088809

2022-10-02

$\ln 2=\ln(\frac{11}{10}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{14}{13}\cdot\frac{15}{14}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{18}{17}\cdot\frac{19}{18}\cdot\frac{20}{19})\approx 0.693$

变式 1（1）①$\sqrt{5-2\sqrt{6}}=$________,$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=$__________,　$\sqrt{3}-\sqrt{2},2+\sqrt{3}$

②$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}=$______,$0.\dot{2}\dot{3}=$_______;2，$\frac{23}{99}$

（2）①已知 $x=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$，则 $(x+\frac{1}{x})^2+2(x+\frac{1}{x})+2$ 的值为_____.

key:（构造二次方程）$x=\sqrt{3}+\sqrt{2},\therefore x^2-2\sqrt{3}x+1=0$即$\frac{x^2+1}{x}=2\sqrt{3}$

$\therefore$原式$=(\frac{x^2+1}{x})^2+2\cdot\frac{x^2+1}{x}+2=12+4\sqrt{3}+2=14+4\sqrt{3}$

②已知 $a=\sqrt{5}-1$，则$2a^3+7a^2-2a-11$的值等于___________.

key:（构造二次方程）$\because a=\sqrt{5}-1,\therefore a^2-2a-4=0$

$\therefore$原式$=2a(2a+4)+7a^2-2a-11=11a^2+6a-11=11(2a+4)+6a-11$

$=28(\sqrt{5}-1)+33=28\sqrt{5}+5$

③已知 $x^2-2x-1=0$,则$x^4-4x^3-2x^2-2x+1=$_______.

key:原式$=(2x+1)^2-4x(2x+1)-2x^2-2x+1$

$=-6x^2-2x+2=-6(2x+1)-2x+2=-14x-4=-18\pm 28\sqrt{2}$

二、不等式性质：对称性：$a>b\Leftrightarrow b<a$

传递性：$a>b,b>c\Rightarrow a>c$

不等式两边同加一个实数不等号方向不变：$a>b\Leftrightarrow a+c>b+c$

移项法则：$a>b+c\Leftrightarrow a-c>b$

加法法则：$a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$

不等式两边同乘一个正数不等号不变向：$a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$

（同乘一个负数不等号反向）:$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$

乘法法则：$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$

倒数法则：$a>b>0\Rightarrow\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$

乘方法则：$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n(n\in N^*)$

开方法则：$a>b>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n\in N^*)$

若$a>b>0,m>0$,则（糖水不等式）$\frac{b}{a}<\frac{b+m}{a+m}$;（假分数性质）$\frac{a}{b}>\frac{a+m}{b+m}$.

变式1（1）若$x,y>0$,求证:$\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}>\frac{2(x+y)}{1+x+y}$;

（2）若$a,b,c>0$,求证:$\frac{a+b+c}{1+a+b+c}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}$.

（1）证明:$\because x,y>0,\therefore\frac{x}{1+x}>\frac{x+y}{1+x+y},\frac{y}{1+y}>\frac{y+x}{1+y+x}$

$\therefore\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}>\frac{2(x+y)}{1+x+y}$得证

（2）证明:$\because a,b,c>0,\therefore\frac{a+b+c}{1+a+b+c}=\frac{a}{1+a+b+c}+\frac{b}{1+a+b+c}+\frac{c}{1+a+b+c}$

$<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}$得证

(1610)17.设实数a,b,c满足$a>b>1,c>1$,则下列不等式中不成立的是（ ）

$A.\frac{b}{a}<\frac{a+bc}{b+ac}<a\quad B.\frac{1}{a}<\frac{a+bc}{b+ac}<b\ C.\frac{1}{c}<\frac{a+bc}{b+ac}<c D.\frac{1}{\sqrt{ab}}<\frac{a+bc}{b+ac}<\sqrt{ab}$　　D

作差

(1806)18.已知x,y是正实数，则下列式子中能使$x>y$恒成立的是（　　　）

$A.x+\frac{2}{y}>y+\frac{1}{x}\ B.x+\frac{1}{2y}>y+\frac{1}{x}\ C.x-\frac{2}{y}>y-\frac{1}{x}\ D.x-\frac{1}{2y}>y-\frac{1}{x}$　　B

1806$key:B:0<x+\frac{1}{2y}-y-\frac{1}{x}=x-y+\frac{x-2y}{2xy}<x-y+\frac{2x-2y}{2xy}=(x-y)(1+\frac{1}{xy}),\therefore x>y$

(1904)17.已知a,b,c,d是四个互不相等的正实数，满足$a+b>c+d$,且$|a-b|<|c-d|$，则下列选项正确的是（　）$A.a^2+b^2>c^2+d^2\ B.|a^2-b^2|<|c^2-d^2|\quad C.\sqrt{a}+\sqrt{b}<\sqrt{c}+\sqrt{d}\ D.|\sqrt{a}-\sqrt{b}|<|\sqrt{c}-\sqrt{d}|$

$key:a+b>c+d\Rightarrow a^2+b^2-c^2-d^2>2(cd-ab),|a-b|<|c-d|\Rightarrow a^2+b^2-c^2-d^2<2(ab-cd),$

$\therefore ab-cd>cd-ab,\therefore ab>cd,\therefore\sqrt{ab}>\sqrt{cd},\therefore a+b+2\sqrt{ab}>c+d+2\sqrt{cd},\therefore\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}$

$\therefore|a-b|=(\sqrt{a}+\sqrt{b})|\sqrt{a}-\sqrt{b}|<(\sqrt{c}+\sqrt{d})|\sqrt{c}-\sqrt{d}|,\therefore|\sqrt{a}-\sqrt{b}|<|\sqrt{c}-\sqrt{d}|$

(2015II）设a,b,c,d均为正数，且$a+b=c+d$，证明：（Ⅰ）若$ab>cd$,则$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}$;
(Ⅱ)$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}$是$|a-b|<|c-d|$的充要条件.

证明：（Ⅰ）$\because a,b,c,d>0,ab>cd,\therefore \sqrt{ab}>\sqrt{cd},\therefore 2\sqrt{ab}>2\sqrt{cd}>0$

$\because a+b=c+d>0,\therefore a+b+2\sqrt{ab}>c+d+2\sqrt{cd}$即$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{c}+\sqrt{d})^2,\therefore \sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}$

（Ⅱ）①充分性:$\because \sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d},a,b,c,d>0,a+b=c+d,$

$\therefore (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{c}+\sqrt{d})^2$即$a+b+2\sqrt{ab}>c+d+2\sqrt{cd},\therefore \sqrt{ab}>\sqrt{cd}>0$

$\therefore ab>cd>0,\therefore -4ab<-4cd$

$\therefore (a+b)^2-4ab=(a-b)^2<(c+d)^2-4cd=(c-d)^2,\therefore |a-b|<|c-d|$

②必要性:$\because |a-b|<|c-d|,\therefore |a-b|^2<|c-d|^2$ 即$a^2+b^2-2ab<c^2+d^2-2cd$

$\because a+b=c+d,a,b,c,d>0,\therefore (a+b)^2=(c+d)^2,\therefore -a^2-b^2-2ab=-c^2-d^2-2cd$

$\therefore -4ab<-4cd,\therefore ab>cd>0,\therefore \sqrt{ab}>\sqrt{cd},\therefore a+b+2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>c+d+2\sqrt{cd}=(\sqrt{c}+\sqrt{d})^2$

$\therefore \sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}$.由①②可知：命题成立

变式 1（1）实数a,b,c,d满足下列三个条件：①$d>c$；②$a+b=c+d$；③$a+d<b+c$.

则a,b,c,d从小到大的顺序为____________.

$key:\because d>c,\therefore a+c<a+d<b+c,\therefore a<b,\therefore 2b>a+b=c+d>2c$得$b>c$

$2a<a+b=c+d<2d$得$d>a$

$\begin{cases}a+b=c+d\\a+d<b+c\end{cases}\Rightarrow 2a+b+d<2c+b+d$得$a<c$

$\begin{cases}a+b=c+d\\c<a\end{cases}\Rightarrow a+b+c<a+c+d$得$b<d,\therefore a<c<b<d$

（2）设$a,b,c,d>0,$求证：下列三个不等式：（ⅰ）$a+b<c+d$；（ⅱ）$(a+b)(c+d)<ab+cd$；

（ⅲ）$(a+b)cd<ab(c+d)$中至少有一个不正确.

证明：（反证法）假设$\begin{cases}a+b<c+d\\(a+b)(c+d)<ab+cd\\(a+b)cd<ab(c+d)\end{cases}$

$\because a,b,c,d>0,\therefore (a+b)^2(c+d)<(a+b)(ab+cd)=(a+b)ab+(a+b)cd$

$<(c+d)ab+ab(c+d)=2ab(c+d)$

$\therefore (a+b)^2<2ab$即$a^2+b^2<0$与$a^2+b^2>0$矛盾$,\therefore$假设错误$,\therefore$原命题正确

（3）已知$a,b,c\in R,$且$a^2+b^2+c^2=1,$求证$:|a-b|,|b-c|,|c-a|$中必有一个不超过$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

证明：不妨设$a\ge b\ge c,$设$m=\min\{|a-b|,|b-c|,|c-a|\},$则$|a-c|\ge 2m$

$\because (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\ge 0,$

$\therefore -2(ab+bc+ca)\le a^2+b^2+c^2=1$

$\therefore 6m^2\le |a-b|^2+|b-c|^2+|a-c|^2=2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)\le 3,\therefore m\le \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，得证

（4）（多选题）设 a，b，c 是互不相等的正数，则下列等式中恒成立的是（　ABD　）

A.$|a-b|\le|a-c|+|b-c|$　　B.$a^2+\dfrac{1}{a^2}\ge a+\dfrac{1}{a}$

C.$|a-b|+\dfrac{1}{a-b}\ge 2$　　D.$\sqrt{a+3}-\sqrt{a+1}\le\sqrt{a+2}-\sqrt{a}$