高一期末选解（2）立体几何（解答）

2023-06-16

一、 球的接切问题

（2008江西）（多选题）连接球面上两点的线段称为球的弦，半径为4的球的两条弦AB、CD的长度分别等于$2\sqrt{7}$、$4\sqrt{3}$，M、N分别为AB、CD的中点，每条弦的两端都在球面上运动，有下列四个命题正确的是（　）

A.弦AB、CD可能相交于点M　　B.弦AB、CD可能相交于点N　C.MN的最大值为5　D.MN的最小值为1

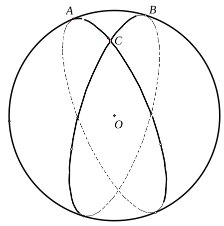
（2010 广东）分别以直角三角形的两条直角边 a,b 和斜边 c 为轴将直角三角形旋转一周，所得旋转体的体积依次为V_a,V_b,V_c，则$V_a^2+V_b^2$与$(2V_c)^2$的大小关系是______.

（2016 年江苏）设正四面体的棱长为$2\sqrt{6}$，以其中心 O 为球心作球，球面与正四面体四个面相交所成曲线的总长度为4π．则球 O 的半径为__________.

（2023 甲理）15. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为 CD，A_1B_1 的中点，则以 EF 为直径的球面与正方体每条棱的交点总数为____________.

（2023 甲文）16. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=4,O$ 为 AC_1 的中点，若该正方体的棱与球 O 的球面有公共点，则球 O 的半径的取值范围是________.

变式:（浙江四校）球面几何是几何学的一个重要分支，在航海、航空、卫星定位等方面都有广泛的应用．如图，A,B,C 是球面上不在同一大圆（大圆是过球心的平面与球面的交线）上的三点，经过这三点中任意两点的大圆的劣弧分别为 AB,BC,CA,由这三条劣弧围成的球面部分称为球面$\triangle ABC$．定义 d_{AB} 为经过 A,B 两点的大圆在这两点间的劣弧的长度．已知地球半径为 R，北极为点 N，点 P，Q 是地球表面上的两点，则（　）A. $d_{NP}+d_{NQ}<d_{PQ}$



B.若点 P,Q 在赤道上，且经度分别为东经 30°和东经 60°，则 $d_{PQ}=\dfrac{\pi R}{6}$

C.若点 P,Q 在赤道上，且经度分别为东经 40°和东经 80°，则球面$\triangle NPQ$ 的面积$\dfrac{\pi R^2}{9}$

D.若 $NP=NQ=PQ=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}R$，则球面$\triangle NPQ$ 的面积为πR^2

（球面三角形面积公式）球面$\triangle NPQ$的面积为$(\angle PO_1Q+\angle PO_2Q+\angle PO_2Q-\pi)R^2=\pi R^2$

由$2(S_\alpha+S_\beta+S_\gamma)=4\pi R^2+4S_{ABC}$得$2(2\alpha R^2+2\beta R^2+2\gamma R^2)=4\pi R^2+4S_{ABC}$

$\therefore$球面三角形面积：$S_{ABC}=(\alpha+\beta+\gamma-\pi)R^2$

（α,β,γ分别为三个大圆所成两两的二面角大小）

（2022 乙）9. 已知球 O 的半径为 1，四棱锥的顶点为 O，底面的四个顶点均在球 O 的球面上，则当该四棱锥的体积最大时，其高为（　　）A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

（2022II）7. 已知正三棱台的高为 1，上、下底面边长分别为$3\sqrt{3}$和$4\sqrt{3}$，其顶点都在同一球面上，则该球的表面积为（　）A. 100π　B. 128π　　C. 144π　　D. 192π

（2022I）8．已知正四棱锥的侧棱长为 l,其各顶点都在同一球面上.若该球的体积为36π，且$3\le l\le 3\sqrt{3}$，则该正四棱锥体积的取值范围是（　　）

A　$[18,\frac{81}{4}]$　　　　B. $[\frac{27}{4},\frac{81}{4}]$　　　　C. $[\frac{27}{4},\frac{64}{3}]$　　　　D. $[18,27]$

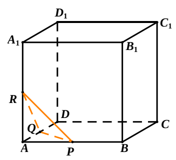
（1996 全国竞赛）6.高为 8 的圆台内有一个半径为 2 的球O_1，球心O_1在圆台的轴上. 球O_1与圆台上底面、侧面都相切. 圆台内可再放入一个半径为 3 的球O_2，使得球O_2与球O_1、圆台的下底面及侧面都只有一个公共点，除球O_2，圆台内最多还能放入半径为 3 的球的个数是（　）

A.1　　　B.2　　　C.3　　　D.4

（2003 年全国竞赛）将8个半径都为1的球分两层放置在一个圆柱内，并使得每个球和其相邻的四个球相切，且与圆柱的一个底面及侧面都相切，则此圆柱的高等于______.

（2018 年安徽）在边长为 1 的长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$内部有一小球，该小球与正方体的对角线段AC_1相切，则小球半径的最大值=__________.

（2017陕西）如图，在棱长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，P,Q,R分别是棱AB,AD,AA_1的中点，以$\triangle PQR$为底面作一个直三棱柱，使其另一个底面的三个顶点也在正方体的表面上，则这个直三棱柱的体积为（　　）$A.\frac{3}{8}$　$B.\frac{\sqrt{3}}{8}$　$C.\frac{3}{16}$　$D.\frac{\sqrt{3}}{16}$



（2023I）12．下列物体中，能够被整体放入棱长为 1（单位：m）的正方体容器（容器壁厚度忽略不计）内的有（　　）

A．直径为0.99m 的球体　B．所有棱长均为1.4m 的四面体

C．底面直径为0.01m，高为1.8m 的圆柱体　D．底面直径为1.2m，高为0.01m 的圆柱体

（2005全国Ⅱ）将半径为1的4个钢球完全装入形状为正四面体的容器里，这个四面体的高的最小值为（ ）

$A.\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{3}$ $B.2+\frac{2\sqrt{6}}{3}$ $C.4+\frac{2\sqrt{6}}{3}$ $D.\frac{4\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{3}$

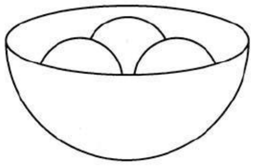
（2008A）一个半径为1的小球在一个内壁棱长为$4\sqrt{6}$的正四面体容器内可向各个方向自由运动，则该小球永远不可能接触到的容器内壁的面积是________.

（2015 年黑龙江）在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为正方形，边长为$a,PA=a,PA=PC=\sqrt{2}a$.

若在此四棱锥中放入一个球，则球的的最大半径为（　）A. $(\sqrt{2}-1)a$　B. $\sqrt{2}a$　　C. $(1-\frac{\sqrt{2}}{2})a$　D. a

（2015 年湖南）半径为 R 的球的内部装有四个半径均为 r 的小球.则 r 可能的最大值为（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}R$　　B．$\dfrac{\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}R$　　C．$\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}R$　　D．$\dfrac{\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}R$



（2017 年贵州）如图所示,三个半径为 r 的汤圆(球形)装人半径为 $6cm$ 的半球面碗中,三个汤圆的顶端恰与碗口共面,则汤圆半径 r=_____cm.

（09 陕西）9．一个含有底面的半球形容器内放置有三个两两外切的小球，若这三个小球的半径均为 1，且每个小球都与半球的底面和球面相切，则该半球的半径 R=______.

（20013 广东）将一只小球放入一个长方体容器内，且与共点的三个面相接触．若小球上一点 P 到这三个面的距离分别为 4、5、5，则这只小球的半径为_____.

（1997A）已知三棱锥 $S\text{-}ABC$ 的底面是以 AB 为斜边的等腰三角形，$SA=SB=SC=2, AB=2,$ 设 S、A、B、C 四点均在以 O 为球心的某个球面上，则点 O 到平面 ABC 的距离为 _____.

(11竞赛）在四面体$ABCD$中，已知$\angle ADB=\angle BDC=\angle CDA=60°, AD=BD=3, CD=2,$则四面体$ABCD$的外接球的半径为_______ .

（2020 江苏）已知棱长为a的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E为DC的中点，F为线段D_1C_1上运动，则$F-ADE$的 外接球表面积的最小值为_____.

(18全国III）设A, B, C, D是同一个半径为4的球面上的四点，$\triangle ABC$为等边三角形且其面积为$9\sqrt{3}$,

则三棱锥$D-ABC$体积的最大值为（　）$A.12\sqrt{3}$　　$B.18\sqrt{3}$　　$C.24\sqrt{3}$　　$D.54\sqrt{3}$

（2019 全国Ⅰ）已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面上，$PA=PB=PC$，$\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形，E，F 分别是 PA，AB 的中点，$\angle CEF=90°$，则球 O 的体积为(　　)

A．$8\sqrt{6}\pi$　　B．$4\sqrt{6}\pi$　　C．$2\sqrt{6}\pi$　　D．$\sqrt{6}\pi$

(2020全国Ⅰ）已知A, B, C为球O的球面上的三个点，$\odot O_1$为$\triangle ABC$的外接圆，若$\odot O_1$的面积为4π，

$AB=BC=AC=OO_1$，则球O的表面积为（　）$A.64\pi$　　$B.48\pi$　　$C.36\pi$　　$D.32\pi$

（2021 甲）11. 已如 A，B，C 是半径为 1 的球 O 的球面上的三个点，且 $AC\perp BC, AC=BC=1$，则三棱锥 $O-ABC$ 的体积为（　　）A. $\frac{\sqrt{2}}{12}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{12}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

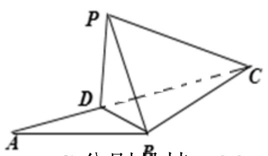
（2023 乙文）16. 已知点 S, A, B, C 均在半径为 2 的球面上，$\triangle ABC$ 是边长为 3 的等边三角形，$SA\perp$ 平面 ABC，则 $SA=$________.

二、距离与体积

（2022 甲）9. 甲、乙两个圆锥的母线长相等，侧面展开图的圆心角之和为 2π，侧面积分别为 $S_{甲}$ 和 $S_{乙}$，体积分别为 $V_{甲}$ 和 $V_{乙}$．若 $\frac{S_{甲}}{S_{乙}}=2$，则 $\frac{V_{甲}}{V_{乙}}=$（　）A. $\sqrt{5}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{10}$　D. $\frac{5\sqrt{10}}{4}$

（2023 乙理）8. 已知圆锥 PO 的底面半径为 $\sqrt{3}$，O 为底面圆心，PA，PB 为圆锥的母线，$\angle AOB=120°$，若 $\triangle PAB$ 的面积等于 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$，则该圆锥的体积为（　　）A. π B. $\sqrt{6}\pi$ C. 3π　D. $3\sqrt{6}\pi$

（2016 高考）（15）如图，$\triangle ABC$中，$AB=BC=2, \angle ABC=120°$.若平面ABC外的点P 和线段AC上的点D，满足$PD=DA, PB=BA$，则四面体$PBCD$的体积 的最大值是______.



（2005 江苏）10. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2, AA_1=AD=1$，点 E、F、G 分别是棱 AA_1、C_1D_1 与 BC 的中点，那么四面体 B_1-EFG 的体积是_______.

(07竞赛）以$1,1,1,\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2}$为六条棱的四面体个数为____;最大体积为_____.

（2008 河北）10 在三棱锥 $S-ABC$ 中，$SA=4$，$SB\geq 7$，$SC\geq 9$，$AB=5$，$BC\leq 6$，$AC\leq 8$．则三棱锥 $S-ABC$ 体积的最大值为_________________.

（09 湖北）5．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，O 为底面 $ABCD$ 的中心，M，N 分别是棱 A_1D_1 和 CC_1 的中点．则四面体 $O-MNB_1$ 的体积为_______.

（2010 江苏）4．已知 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是棱长为 3 的正方体，点 P、Q、R 分别是棱 AB、AD、AA_1 上的点，$AP=AQ=AR=1$，则四面体 C_1PQR 的体积为____________.

（2016 安徽）在单位正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，设O是正方形$ABCD$的中心，点M,N分别在棱A_1D_1,CC_1上，$A_1M=\dfrac{1}{2},CN=\dfrac{2}{3}$，则四面体$OMNB_1$的体积为______.

$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin<\vec{a},\vec{b}>$

$\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k},\vec{b}=(x_2,y_2,z_2),$

则$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=(y_1z_2-y_2z_1)\vec{i}-(x_1z_2-x_2z_1)\vec{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{k}$

$V=\dfrac{1}{6}|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$

（2019 江苏）6．在棱长为 1 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点 E 在A_1D_1上，点 F 在 CD 上,$A_1E=2ED_1$，$DF=2FC$,则三棱锥$B-FEC_1$的体积是________.

（2010 全国Ⅰ）（12）已知在半径为 2 的球面上有 A、B、C、D 四点，若 $AB=CD=2$,则四面体 $ABCD$ 的体积的最大值为（　）A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　B. $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$　C. $2\sqrt{3}$　D. $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

变式：四面体$ABCD$中，已知$AD\perp BC,AD=6,BC=2,$且$\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{AC}{CD}=2,$则$V_{ABCD}$的最大值为________.

（2019AB）设三棱锥 P-ABC 满足$PA=PB=3,AB=BC=CA=2,$则该三棱锥体积的最大值为______.

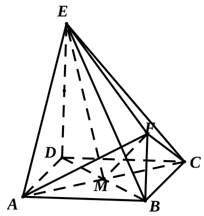
(201906学考）已知四面体$ABCD$中，棱BC,AD所在直线所成的角为$60°$,且$BC=2,AD=3,\angle ACD=120°$,则四面体$ABCD$的体积的最大值是（　）$A.\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　$B.\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　$C.\dfrac{9}{4}$　$D.\dfrac{3}{4}$

（2004 福建）四面体 $ABCD$ 中,$AB=CD=a,BC=AD=b,CA=BD=c$．如果异面直线 AB 与 CD 所成的角为θ，那么$\cos\theta=$__________________.

（2020 重庆）7. 四面体 $ABCD$ 中，$AB\perp BC,CD\perp BC,BC=2$，且异面直线 AB 与 CD 所成的角为$60^\circ$．若四面体 $ABCD$ 的外接球半径为$\sqrt{5}$，则四面体 $ABCD$ 的体积的最大值为__________.

（2022 甲）9. 甲、乙两个圆锥的母线长相等，侧面展开图的圆心角之和为2π，侧面积分别为$S_{甲}$和$S_{乙}$，体积分别为$V_{甲}$和$V_{乙}$． 若$\dfrac{S_{甲}}{S_{乙}}=2$，则$\dfrac{V_{甲}}{V_{乙}}=$（　　）A. $\sqrt{5}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{10}$　　D. $\dfrac{5\sqrt{10}}{4}$

(2005重庆）在体积为1的三棱柱$A-BCD$侧棱AB、AC、AD上分别取点E、F、G,使$AE:EB=AF:FC=AG:GD=2:1$,记O为三平面BCG、CDE、DBF的交点,则三棱锥$O-BCD$的体积为___.

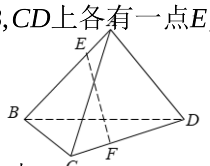


(2022新高考Ⅱ)11.如图，四边形$ABCD$为正方形，$ED\perp$平面$ABCD$, $FB//ED$, $AB=ED=2FB$, 记三棱锥$E-ACD$, $F-ABC$, $F-ACE$的体积分别为V_1,V_2,V_3,
则（）$A.V_3=2V_2$　　$B.V_3=V_1$　　$C.V_3=V_1+V_2$　　$D.2V_3=3V_1$

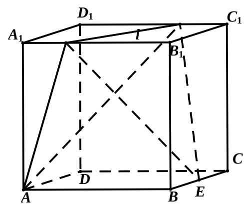
三、三棱柱模型及应用

异面直线上两点间的距离公式：$PQ=\sqrt{d^2+m^2+n^2\pm 2mn\cos\theta}$

(2005上海）如图，正四面体$ABCD$的棱长为$6cm$，在棱AB,CD上各有一点E,F,若$AE=1cm,CF=2cm$,
则线段EF的长为_____ cm.



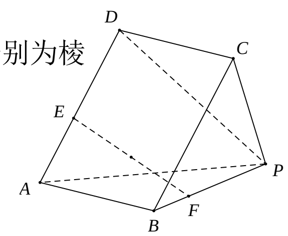
变式：已知在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点E为棱BC的中点，
直线l在平面$A_1B_1C_1D_1$内.若二面角$A-l-E$的平面角为θ,则$\cos\theta$
的最小值为（　）$A.\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　　$B.\dfrac{11}{21}$　　$C.\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　$D.\dfrac{3}{5}$



(1998A)$\triangle ABC$中，$\angle C=90°,\angle B=30°,AC=2,M$是$AB$的中点，将$\triangle ACM$沿$CM$折起，使得$A,B$两点间的距离为$2\sqrt{3}$，此时三棱锥$A-BCM$的体积等于______.

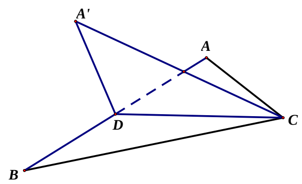
(2021浙江)8.在$\triangle ABC$中，$\angle B=\angle C=30°,BC=2\sqrt{3},P,Q$分别在线段$AB$和$AC$上，$AP=1,AQ=\sqrt{2}$,
直线$AD\perp BC$于D.现将$\triangle ABC$沿着AD对折，当平面ADB与平面ADC的二面角为60°时，
则线段PQ的长度为_______.

（201501 会考 25 题）如图，在底面为平行四边形的四棱锥$P-ABCD$中，E,F分别为棱AD,BP上的动点，且满足$AE=2BF$，则线段EF的中点的轨迹是（　）
$A.$一条线段$B.$一段圆弧$C.$椭圆的一部分$D.$一个平行四边形

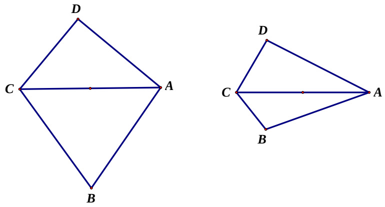


（15高考）如图，已知$\triangle ABC$，D是AB的中点，沿直线CD将$\triangle ACD$折成$\triangle A'CD$，所成二面角$A'-CD-B$的平面角为α，则（　　）

$A.\angle A'DB\le\alpha$　$B.\angle A'DB\ge\alpha$　$C.\angle A'CB\le\alpha$　$D.\angle A'CB\ge\alpha$

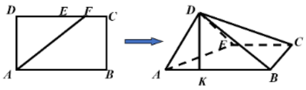


（16浙江文）如图，已知平面四边形$ABCD$, $AB=BC=3$, $CD=1$, $AD=\sqrt{5}$, $\angle ADC=90°$, 沿直线AC将$\triangle ACD$翻折成$\triangle ACD'$, 直线AC与BD'所成角的余弦值的最大值是______.



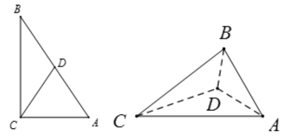
四、三垂线定理及应用

（09高考）如图，在长方形$ABCD$中，$AB=2$, $BC=1$, E为DC的中点，F为线段EC（端点除外）上一动点.现将$\triangle AFD$沿AF折起，使平面$ABD\perp$平面ABC.在平面ABD内过点D作$DK\perp AB$，K为垂足.设$AK=t$，则t的取值范围是_____.



（201507 会考 25 题）如图，在$Rt\triangle ABC$中，$AC=1$, $BC=x$, D是斜边AB的中点，将$\triangle BCD$沿直线CD翻折，若在翻折过程中存在某个位置，使得$CB\perp AD$，则x的取值范围是（　　）

A. $(0,\sqrt{3}]$　　B. $(\frac{\sqrt{2}}{2},2]$　　C. $(\sqrt{3},2\sqrt{3}]$　　D. $(2,4]$

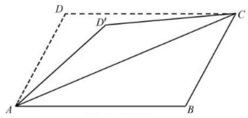


（201711 月学考）（18）等腰直角$\triangle ABC$斜边BC上的一点P满足$CP\le\frac{1}{4}CB$.将$\triangle CAP$沿AP翻折至$\triangle C'AP$，使二面角$C'-AP-B$为$60°$.记直线$C'A, C'B, C'P$与平面ABP所成角分别为α,β,γ.则（　　）

$A.\alpha<\beta<\gamma$　$B.\alpha<\gamma<\beta$　$C.\beta<\alpha<\gamma$　$D.\gamma<\alpha<\beta$

（201811 月学考）如图，四边形$ABCD$为矩形，沿AC将$\triangle ADC$翻折成$\triangle AD'C$.设二面角$D'-AB-C$的平面角为θ，直线AD'与直线BC所成角为θ_1，直线AD'与平面ABC所成角为θ_2.当θ为锐角时，有（　　）

$A.\theta_2\le\theta_1\le\theta$　$B.\theta_2\le\theta\le\theta_1$　$C.\theta_1\le\theta_2\le\theta$　$D.\theta\le\theta_2\le\theta_1$

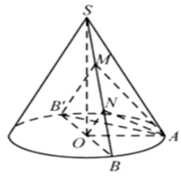


（2018高考）已知四棱锥$S-ABCD$的底面是正方形，侧棱长均相等，E是线段AB上的点（不含端点），设SE与BC所成角为θ_1, SE与平面$ABCD$所成的角为θ_2，二面角$S-AB-C$的平面角为θ_3，则（ ）

$A.\theta_1\le\theta_2\le\theta_3$　$B.\theta_3\le\theta_2\le\theta_1$　$C.\theta_1\le\theta_3\le\theta_2$　$D.\theta_2\le\theta_3\le\theta_1$

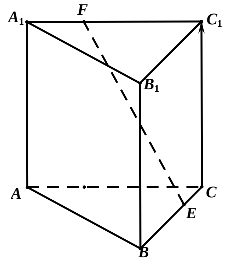
（19高考）（8）设三棱锥$V-ABC$的底面是正三角形，侧棱长均相等，P是棱VA上的点（不含端点）.记直线PB与直线AC所成角为α，直线PB与平面ABC所成角为β, 二面角$P-AC-B$的平面角为γ，则（　　）$A.\beta<\gamma,\alpha<\gamma$　$B.\beta<\alpha,\beta<\gamma$　$C.\beta<\alpha,\gamma<\alpha$　$D.\alpha<\beta,\gamma<\beta$

(202001学考)18.如图，在圆锥SO中，A,B是$\odot O$上动点，BB'是$\odot O$的直径，M,N是SB的两个三等分点，$\angle AOB=\theta(0<\theta<\pi)$，记二面角$N-OA-B,M-AB'-B$的平面角分别为$\alpha,\beta$,若$\alpha\le\beta$，则$\theta$的最大值是（　）$A.\dfrac{5\pi}{6}$　$B.\dfrac{2\pi}{3}$　$C.\dfrac{\pi}{2}$　$D.\dfrac{\pi}{4}$



（2022浙江高考）如图，已知正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1,AC=AA_1,E,F$分别棱$BC,A_1C$上的点，记$EF$与$AA_1$所成角为$\alpha,EF$与平面$ABC$所成的角为$\beta$,二面角$F-BC-A$的平面角为$\gamma$，则（　）

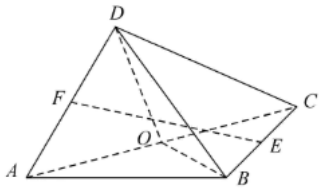
$A.\alpha\le\beta\le\gamma$　$B.\beta\le\alpha\le\gamma$　$C.\beta\le\gamma\le\alpha$　$D.\alpha\le\gamma\le\beta$



五、利用法向量、距离（体积）转化角

(202101）如图，在三棱锥$D-ABC$中，$AB=BC=CD=DA,\angle ABC=90°,E,F,O$分别为棱$BC,DA,AC$的中点，记直线$EF$与平面$BOD$所成角为$\theta$，则$\theta$的取值范围是（　）

$A.(0,\dfrac{\pi}{4})$　$B.(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3})$　$C.(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})$　$D.(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2})$

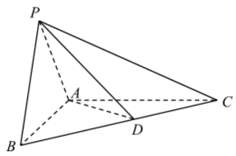


(2022甲)7.在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，已知B_1D与平面$ABCD$和平面AA_1B_1B所成的角均为$30°$,则（　）

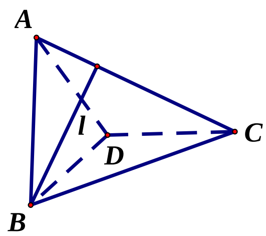
$A.AB=AD$　$B.AB$与平面AB_1C_1D所成的角为$30°$　$C.AC=CB_1$　$D.B_1D$与平面BB_1C_1C所成角为$45°$

变式1（1）如图，在三棱锥$P-ABC$中，$AB\perp AC,AB=AP,D$是棱BC上一点（不含端点），且$PD=BD$，记$\angle DAB$为α，直线AB与平面PAC所成角为β,直线PA与平面ABC所成角为γ，则（　）

$A.\gamma\le\beta,\gamma\le\alpha$　$B.\beta\le\alpha,\beta\le\gamma$　$C.\beta\le\alpha,\gamma\le\alpha$　$D.\alpha\le\beta,\gamma\le\beta$

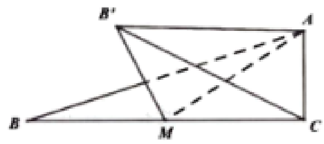


（2）空间四面体$ABCD$中，$\angle ACD=60°$，二面角$A-CD-B$的大小为$45°$，在平面ABC内过点B作AC的垂线l，则l与平面BCD所成的最大角的正弦值为______.



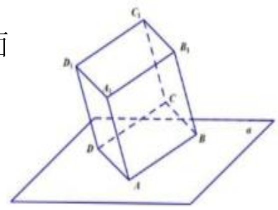
(2009重庆）已知二面角$\alpha-l-\beta$的大小为$50°$，P为空间中任意一点，则过点P且与平面α和平面β所成的角都是$25°$的直线的条数为（　）$A.2$　$B.3$　$C.4$　$D.5$

变式2（1）如图，在$\triangle ABC$中，点M是边BC的中点，将$\triangle ABM$沿着AM翻折成$\triangle AB'M$，且点B'不在平面AMC内，点P是线段$B'C$上一点.若二面角$P-AM-B'$与二面角$P-AM-C$的平面角相等，则直线AP经过$\triangle AB'C$的（　）A.重心 B.垂心 C.内心 D.外心



（2）如图，棱长为4的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，点A在平面α内，平面$ABCD$与平面α所成角为$30°$，则顶点C_1到平面α的距离的最大值是（　　）

$A.2(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ $B.2(2+\sqrt{2})$ $C.2(\sqrt{3}+1)$ $D.2(\sqrt{2}+1)$



六、截面

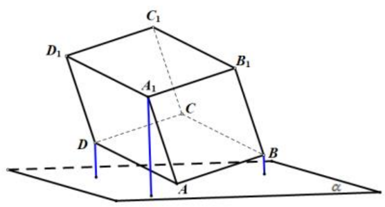
（1991 全国竞赛）设正三棱锥 P-ABC 的高为 PO，M 为 PO 的中点，过 AM 作与棱 BC 平行的平面，将三棱锥截为上、下两部分，则此两部分体积之比为_______.

(1995全国竞赛）设O是正三棱锥$P-ABC$底面$\triangle ABC$的中心，过O的动平面与PC交于S，与PA,PB的延长线分别交于Q,R，则和式$\frac{1}{PQ}+\frac{1}{PR}+\frac{1}{PS}$（　）

A.有最大值无最小值　　B.有最小值而无最大值

C.既有最大值又有最小值，两者不等　　D.是一个与面QPS无关的常数

(06安徽）多面体上，位于同一条棱两端的顶点称为相邻的，如图.正方体的一个顶点A在平面α内，其余顶点在α的同侧，正方体上与顶点A相邻的三个顶点到平面α的距离分别为$1,2$和4，P是正方体的其余四个顶点中的一个，则P到平面α的距离可能是：①3;②4;③5;④6;⑤7.以上结论正确的为________；此正方体的棱长为______.



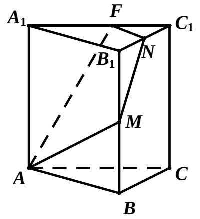
（2019 年全国）正方体 $ABCD-EFGH$ 的一个截面经过顶点 A，C 及棱 EF 上一点 K，且将正方体分成体积比为$3:1$的两部分，则$\frac{EK}{KF}$的值为_________ .

（2021 年重庆）设正三棱锥 $P-ABC$ 的底面边长为 1,高为$\sqrt{2}$ ，过底边 BC 作此三棱锥的截面，则截面面积的最小值为____________ .

（2023 甲）11. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，$AB=4, PC=PD=3, \angle PCA=45°$，则$\triangle PBC$的面积为（　）A. $2\sqrt{2}$　B. $3\sqrt{2}$　C. $4\sqrt{2}$　D. $5\sqrt{2}$

(2023浙江竞赛)3.已知四面体$S-ABC$，点A_1为$\triangle SBC$的重心，G在线段AA_1上，$\dfrac{|AG|}{|GA_1|}=3$，连接SG交$\triangle ABC$所在的平面与M，则$\dfrac{|A_1M|}{|AS|}=$________.

(2014湖南）在如图所示的三棱柱中，点A、BB_1的中点M以及B_1C_1的中点N所确定的平面把三棱柱割成体积不同的两个部分，则较小部分的体积和原三棱柱的体积之比为（ ） $A.\dfrac{23}{36}$ $B.\dfrac{13}{36}$ $C.\dfrac{13}{23}$ $D.\dfrac{12}{23}$



变式 1（1）已知 E,F 是四面体的棱 AB,CD 的中点，过 EF 的平面与棱 AD,BC 分别相交于 G,H,则（）

A．GH 平分 EF，$\dfrac{BH}{HC}=\dfrac{AG}{GD}$　　B．EF 平分 GH，$\dfrac{BH}{HC}=\dfrac{GD}{AG}$

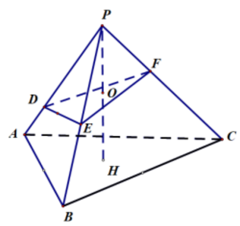
C．EF 平分 GH，$\dfrac{BH}{HC}=\dfrac{AG}{GD}$　　D．GH 平分 EF，$\dfrac{BH}{HC}=\dfrac{GD}{AG}$

（2）在三棱锥$A-BCD$中，M为底面$\triangle BCD$的重心，任作一截面与侧棱AB、AC、AD分别交于点B_1、C_1、D_1，与AM交于点M_1，则$\dfrac{AB}{AB_1}+\dfrac{AC}{AC_1}+\dfrac{AD}{AD_1}-\dfrac{3AM}{AM_1}=$_________. 0

（3）如图，过四面体$V-ABC$的底面上任意一点O，分别作$OA_1//VA,OB_1//VB,OC_1//VC$，$A_1$、$B_1$、$C_1$分别是直线与侧面的交点，则$\dfrac{OA_1}{VA}+\dfrac{OB_1}{VB}+\dfrac{OC_1}{VC}=$（ ） $A.\dfrac{1}{3}$　$B.1$　$C.2$　$D.3$　B

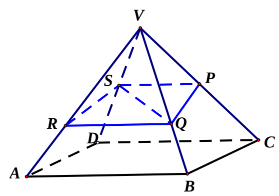
(4）如图，正四面体$P-ABC$的体积为V，底面积为S，O是高PH的中点，过O的平面α与棱PA,PB,PC分别交于D,E,F，设三棱锥$P-DEF$的体积为V_0，截面$\triangle DEF$的面积为S_0，则（ ）

$A.V\le 8V_0,S\le 4S_0$　$B.V\le 8V_0,S\ge 4S_0$　$C.V\ge 8V_0,S\le 4S_0$　$D.V\ge 8V_0,S\ge 4S_0$



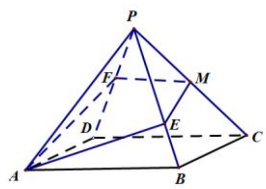
2（1）已知正四棱锥$V-ABCD$中，P是棱VC的中点，R、Q分别在VA、VB上.

若$\dfrac{VR}{VA}=\dfrac{VQ}{VB}=\dfrac{2}{3}$，则平面$PQR$将此四棱锥分成的两部分的体积之比为______.



若$\dfrac{VR}{VA}=\dfrac{1}{3},\dfrac{VQ}{VB}=\dfrac{2}{3}$，则平面$PQR$将此四棱锥分成的两部分的体积之比为______.

（2）设$P-ABCD$是一个高为3,底面边长为2的正四棱锥，M为PC中点，过AM作平面$AEMF$与线段PB,PD分别交于E,F（可以是线段端点），则三棱锥$P-AEMF$的体积的取值范围为（ ） $A.[\dfrac{4}{3},2]$　$B.[\dfrac{4}{3},\dfrac{3}{2}]$　$C.[1,\dfrac{3}{2}]$　$D.[1,2]$



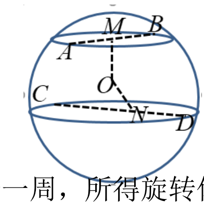
解答

一、球的接切问题

（2008江西）（多选题）连接球面上两点的线段称为球的弦，半径为4的球的两条弦AB、CD的长度分别等于$2\sqrt{7}$、$4\sqrt{3}$，M、N分别为AB、CD的中点，每条弦的两端都在球面上运动，有下列四个命题正确的是（　）

A.弦AB、CD可能相交于点M　B.弦AB、CD可能相交于点N　$C.MN$的最大值为5　$D.MN$的最小值为1

2008江西key：由垂径定理得A对，B错；



由$OM=\sqrt{4^2-7}=3, ON=\sqrt{4^2-12}=2$

$\therefore 1\le OM-ON=MN\le OM+ON=5$

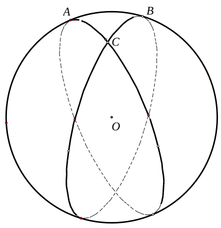
（2010 广东）分别以直角三角形的两条直角边 a,b 和斜边 c 为轴将直角三角形旋转一周，所得旋转体的体积依次为V_a,V_b,V_c，则$V_a^2+V_b^2$与$(2V_c)^2$的大小关系是_______. $V_a^2+V_b^2\ge 4V_c^2$

（2016 年江苏）设正四面体的棱长为$2\sqrt{6}$，以其中心 O 为球心作球，球面与正四面体四个面相交所成曲线的总长度为4π．则球 O 的半径为__________． $\dfrac{\sqrt{5}}{2},or,\sqrt{5}$

（2023 甲理）15. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为 CD，A_1B_1 的中点，则以 EF 为直径的球面与正方体每条棱的交点总数为____________． 12

（2023 甲文）16. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=4, O$ 为 AC_1 的中点，若该正方体的棱与球 O 的球面有公共点，则球 O 的半径的取值范围是________． $[2\sqrt{2},2\sqrt{3}]$

变式:（浙江四校）球面几何是几何学的一个重要分支，在航海、航空、卫星定位等方面都有广泛的应用．如图，A,B,C 是球面上不在同一大圆（大圆是过球心的平面与球面的交线）上的三点，经过这三点中任意两点的大圆的劣弧分别为 AB,BC,CA,由这三条劣弧围成的球面部分称为球面$\triangle ABC$．定义 d_{AB} 为经过 A,B 两点的大圆在这两点间的劣弧的长度．已知地球半径为 R，北极为点 N，点 P，Q 是地球表面上的两点，则（BD ）



A. $d_{NP}+d_{NQ}<d_{PQ}$

B.若点 P,Q 在赤道上，且经度分别为东经 30°和东经 60°，则 $d_{PQ}=\dfrac{\pi R}{6}$

C.若点 P,Q 在赤道上，且经度分别为东经 40°和东经 80°，则球面$\triangle NPQ$ 的面积$\dfrac{\pi R^2}{9}$

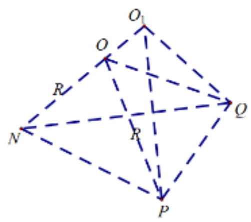
D.若 $NP=NQ=PQ=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}R$，则球面$\triangle NPQ$ 的面积为πR^2

$key: d_{NP}+d_{NQ}=\angle NOP\cdot R+\angle NOQ\cdot R=R(\angle NOP+\angle NOQ)$与$R\cdot\angle POQ$的大小关系不定，$A$错；

B:由$\angle POQ=\dfrac{\pi}{6}$得$d_{PQ}=\dfrac{\pi R}{6}$,$\therefore B$对；

C:球面$\triangle NPQ$的面积为$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{40}{360}\cdot 4\pi R^2=\dfrac{2\pi R^2}{9}$,$C$错

$D:\cos\angle PON=\dfrac{2R^2-\frac{8}{3}R^2}{2R^2}=-\dfrac{1}{3}$,作$PO_1\perp ON$于$O_1$，则$OO_1=\dfrac{1}{3}R, O_1P=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}R$



$\therefore\cos\angle PO_1Q=\dfrac{\frac{16}{9}R^2-\frac{8}{3}R^2}{2\cdot\frac{8R^2}{9}}=-\dfrac{1}{2}$,$\therefore\angle PO_1Q=\dfrac{2\pi}{3}$,

（球面三角形面积公式）球面$\triangle NPQ$的面积为$(\angle PO_1Q+\angle PO_2Q+\angle PO_2Q-\pi)R^2=\pi R^2$

由$2(S_\alpha+S_\beta+S_\gamma)=4\pi R^2+4S_{ABC}$得$2(2\alpha R^2+2\beta R^2+2\gamma R^2)=4\pi R^2+4S_{ABC}$

$\therefore$球面三角形面积：$S_{ABC}=(\alpha+\beta+\gamma-\pi)R^2$

（α,β,γ分别为三个大圆所成两两的二面角大小）

（2022 乙）9. 已知球 O 的半径为 1，四棱锥的顶点为 O，底面的四个顶点均在球 O 的球面上，则当该四棱锥的体积最大时，其高为（ C ）A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

（2022II）7. 已知正三棱台的高为 1，上、下底面边长分别为$3\sqrt{3}$和$4\sqrt{3}$，其顶点都在同一球面上，则该球的表面积为（ A ）A. 100π B. 128π C. 144π D. 192π

（2022I）8. 已知正四棱锥的侧棱长为 l,其各顶点都在同一球面上.若该球的体积为36π，且$3\le l\le 3\sqrt{3}$，则该正四棱锥体积的取值范围是（ C ）

A $[18,\frac{81}{4}]$　　B. $[\frac{27}{4},\frac{81}{4}]$　　C. $[\frac{27}{4},\frac{64}{3}]$　　D. $[18,27]$

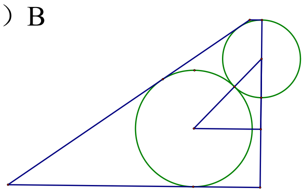
key:由$\frac{4\pi R^3}{3}=36\pi$得$R=3$,设正四棱锥的高为h,底面边长为a,则$\begin{cases}l^2=h^2+\frac{1}{2}a^2\\ h(6-h)=\frac{1}{2}a^2\end{cases}$,得$l^2=6h\in[9,27]$得$h\in[\frac{3}{2},\frac{9}{2}]$,

$\therefore V=\frac{1}{3}a^2h=\frac{2}{3}h^2(6-h)=\frac{1}{3}h\cdot h\cdot(12-2h)\le\frac{1}{3}\cdot(\frac{12}{3})^3=\frac{64}{3}$

$key2:\because V_h'=2h(4-h)>0\Leftrightarrow\frac{3}{2}\le h<4,\therefore V_{max}=\frac{64}{3},V_{min}=\min[\frac{27}{4},\frac{81}{4}]=\frac{27}{4},\therefore$选$C$

（1996 全国竞赛）6.高为 8 的圆台内有一个半径为 2 的球O_1，球心O_1在圆台的轴上. 球O_1与圆台上底面、侧面都相切. 圆台内可再放入一个半径为 3 的球O_2，使得球O_2与球O_1、圆台的下底面及侧面都只有一个公共点，除球O_2，圆台内最多还能放入半径为 3 的球的个数是（ ）B

A.1　　B.2　　C.3　　D.4



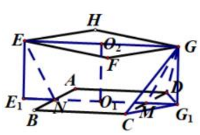
key:在半径为4的圆周上放置距离为6的点

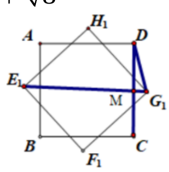
$\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 6=2\sqrt{3}<4,\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2}=3\sqrt{2}<4$

（2003 年全国竞赛）将8个半径都为1的球分两层放置在一个圆柱内，并使得每个球和其相邻的四个球相切，且与圆柱的一个底面及侧面都相切，则此圆柱的高等于______. $2+\sqrt[4]{8}$

key:如图，$MG_1=\frac{2\sqrt{2}-2}{2}=\sqrt{2}-1,GM=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$,

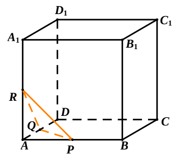
$\therefore GG_1=\sqrt{3-(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt[4]{8},\therefore$此圆柱的高为$2+\sqrt[4]{8}$





（2018 年安徽）在边长为 1 的长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$内部有一小球，该小球与正方体的对角线段AC_1相切，则小球半径的最大值=__________. $\frac{4-\sqrt{6}}{5}$

（2017陕西）如图，在棱长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，P,Q,R分别是棱AB,AD,AA_1的中点，以$\triangle PQR$为底面作一个直三棱柱，使其另一个底面的三个顶点也在正方体的表面上，则这个直三棱柱的体积为（　　）$A.\dfrac{3}{8}$　$B.\dfrac{\sqrt{3}}{8}$　$C.\dfrac{3}{16}$　$D.\dfrac{\sqrt{3}}{16}$



2017陕西$key:C$

（2023I）12．下列物体中，能够被整体放入棱长为 1（单位：m）的正方体容器（容器壁厚度忽略不计）内的有（　　）

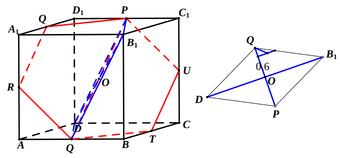
A．直径为0.99m 的球体　B．所有棱长均为1.4m 的四面体

C．底面直径为0.01m，高为1.8m 的圆柱体　D．底面直径为1.2m，高为0.01m 的圆柱体

2023I $key:A$对；由正方体的正四面体的棱长为$\sqrt{2}>1.4,\therefore B$对

由正方体的对角线长为$\sqrt{3}<1.8,\therefore C$错；

如图的正六边形的外接圆的直径为$\sqrt{2}$，



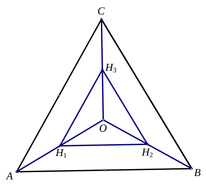
在菱形B_1PDQ中，$B_1P=\dfrac{\sqrt{5}}{2},PQ=\sqrt{2},B_1D=\sqrt{3}$,有$\dfrac{0.005}{\frac{\sqrt{2}}{2}-0.6}<\dfrac{0.005}{0.1}=0.05<\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},\therefore D$对

（2005全国 II ）将半径为1的4个钢球完全装入形状为正四面体的容器里，这个四面体的高的最小值为（　）

$A.\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{3}$ $B.2+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ $C.4+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ $D.\dfrac{4\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{3}$

$2005:1+\dfrac{\sqrt{6}}{3}\times 2+3\times 1=4+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$,选$C$

（2008A）一个半径为1的小球在一个内壁棱长为$4\sqrt{6}$的正四面体容器内可向各个方向自由运动，则该小球永远不可能接触到的容器内壁的面积是________.



key:小球与底面ABC切于$\triangle H_1H_2H_3$,且$AH_1=2\sqrt{2},OA=4\sqrt{2}$,

$\therefore$接触不到的面积为$4\times\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 16\cdot 6=72\sqrt{3}$

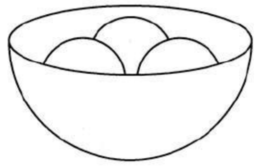
（2015 年黑龙江）在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为正方形，边长为$a,PA=a,PA=PC=\sqrt{2}a$.

若在此四棱锥中放入一个球，则球的的最大半径为（　C　）A．$(\sqrt{2}-1)a$　B．$\sqrt{2}a$　C．$(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2})a$　D．a

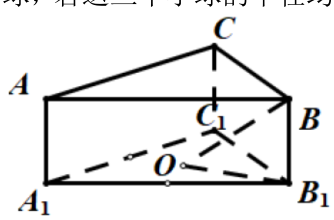
（2015 年湖南）半径为R的球的内部装有四个半径均为r的小球.则r可能的最大值为（B）

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}R$　B．$\dfrac{\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}R$　C．$\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}R$　D．$\dfrac{\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}R$

（2017 年贵州）如图所示,三个半径为r的汤圆(球形)装人半径为$6cm$的半球面碗中,三个汤圆的顶端恰与碗口共面,则汤圆半径r=_____cm. $\dfrac{\sqrt{189}-9}{2}$



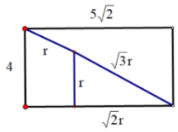
（09 陕西）9．一个含有底面的半球形容器内放置有三个两两外切的小球，若这三个小球的半径均为 1，且每个小球都与半球的底面和球面相切，则该半球的半径R=______.

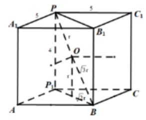


$key:OB_1=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2=\dfrac{2\sqrt{3}}{3},BB_1=1,OB=R-1$

$\therefore R-1=\sqrt{1+\dfrac{4}{3}}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$即$R=\dfrac{3+\sqrt{21}}{3}$

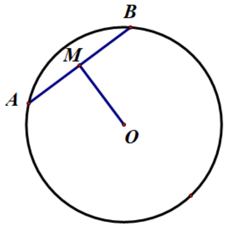
（20013 广东）将一只小球放入一个长方体容器内，且与共点的三个面相接触．若小球上一点 P 到这三个面的距离分别为 4、5、5，则这只小球的半径为_____.3 或 11.

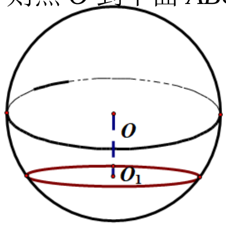




$key:$如图,$(4-r)^2+(5\sqrt{2}-\sqrt{2}r)^2=r^2$得$r=3,11$

（1997A）已知三棱锥 $S\text{-}ABC$ 的底面是以 AB 为斜边的等腰三角形， $SA=SB=SC=2, AB=2,$ 设 S、A、B、C 四点均在以 O 为球心的某个球面上，则点 O 到平面 ABC 的距离为 _____. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

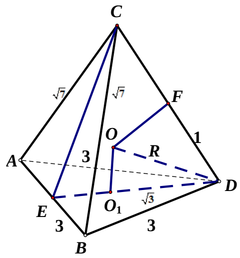




（11竞赛）在四面体$ABCD$中，已知$\angle ADB=\angle BDC=\angle CDA=60°, AD=BD=3, CD=2,$则四面体$ABCD$的外接球的半径为________. $\sqrt{3}$

$key:\cos\angle CDE\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}$得$\cos\angle CDE=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore O_1F=\sqrt{3+1-2\cdot\sqrt{3}\cdot 1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=\sqrt{2},\therefore R=OD=\dfrac{\sqrt{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}=\sqrt{3}$

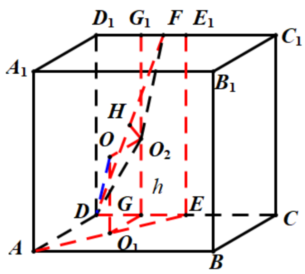


（2020 江苏）已知棱长为a的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E为DC的中点，F为线段D_1C_1上运动，则$F-ADE$的 外接球表面积的最小值为_____.

$key:$要使$R=\sqrt{\dfrac{5}{16}a^2+O_2G^2}$最小，只要$O_2G$最小，

而$\tan\angle DO_2G=\dfrac{\frac{1}{4}a}{O_2G}$,只要$\angle DO_2G=\angle DFE$最大，只要$D_1F=\dfrac{1}{4}a,$

$\therefore R_{\min}=\sqrt{\dfrac{5}{16}a^2+(\dfrac{\frac{a}{4}}{\tan(\angle DFE)_{\max}})^2}=\sqrt{\dfrac{5}{16}a^2+(\dfrac{a}{4\cdot\dfrac{2\cdot\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{16}}})^2}=\dfrac{\sqrt{545}}{32}a$

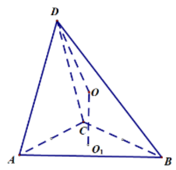


$\therefore S_{表}=4\pi R^2=4\pi(\dfrac{5a^2}{16}+h^2)\ge\dfrac{545\pi a^2}{256}$

（18全国III）设A,B,C,D是同一个半径为4的球面上的四点，$\triangle ABC$为等边三角形且其面积为$9\sqrt{3}$,则三棱锥$D-ABC$体积的最大值为（　）$A.12\sqrt{3}$　$B.18\sqrt{3}$　$C.24\sqrt{3}$　$D.54\sqrt{3}$　　B

18III$key:$由$\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2=9\sqrt{3}$得$a=6;\therefore OO_1=\sqrt{16-12}=2$

$\therefore V_{D-ABC}\le\dfrac{1}{3}\cdot 9\sqrt{3}\cdot(2+4)=18\sqrt{3},\therefore$选$B$



（2019 全国Ⅰ）已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面上， $PA=PB=PC$ ， $\triangle ABC$ 是边长

为 2 的正三角形，E，F 分别是 PA，AB 的中点，$\angle CEF = 90°$，则球 O 的体积为(　D　)

A．$8\sqrt{6}\pi$　　B．$4\sqrt{6}\pi$　　C．$2\sqrt{6}\pi$　　D．$\sqrt{6}\pi$

（2020全国Ⅰ）已知A,B,C为球O的球面上的三个点，$\odot O_1$为$\triangle ABC$的外接圆，若$\odot O_1$的面积为4π，$AB=BC=AC=OO_1$，则球O的表面积为（　）$A.64\pi$　$B.48\pi$　$C.36\pi$　$D.32\pi$　A

（2021 甲）11．已如 A，B，C 是半径为 1 的球 O 的球面上的三个点，且 $AC \perp BC, AC = BC = 1$，则三棱锥 $O-ABC$ 的体积为（　A　）A. $\frac{\sqrt{2}}{12}$　B. $\frac{\sqrt{3}}{12}$　C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

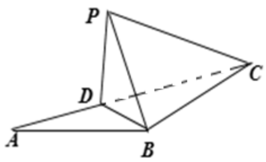
（2023 乙文）16．已知点 S,A,B,C 均在半径为 2 的球面上，$\triangle ABC$ 是边长为 3 的等边三角形，$SA \perp$ 平面 ABC，则 $SA=$________．2

二、距离与体积

（2022 甲）9．甲、乙两个圆锥的母线长相等，侧面展开图的圆心角之和为2π，侧面积分别为$S_{甲}$和$S_{乙}$，体积分别为$V_{甲}$和$V_{乙}$．若$\frac{S_{甲}}{S_{乙}}=2$，则$\frac{V_{甲}}{V_{乙}}=$（　C）A. $\sqrt{5}$　B. $2\sqrt{2}$　C. $\sqrt{10}$　D. $\frac{5\sqrt{10}}{4}$

（2023 乙理）8．已知圆锥 PO 的底面半径为$\sqrt{3}$，O 为底面圆心，PA，PB 为圆锥的母线，$\angle AOB = 120°$，若$\triangle PAB$ 的面积等于$\frac{9\sqrt{3}}{4}$，则该圆锥的体积为（　B　）A. π　B. $\sqrt{6}\pi$　C. 3π　D. $3\sqrt{6}\pi$

（2016 高考）（15）如图，$\triangle ABC$中，$AB=BC=2, \angle ABC=120°$.若平面ABC外的点P 和线段AC上的点D，满足$PD=DA, PB=BA$，则四面体$PBCD$的体积 的最大值是______．$\frac{1}{2}$



$2016key1$: 设$\angle BDC=\theta, AD=x$, 则$\frac{2}{\sin\theta}=\frac{2\sqrt{3}-x}{\sin(\theta+30°)}$

$$\therefore V_{P-BCD} \le \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{3}-x)\cdot 1\cdot x\sin\theta=\frac{1}{6}\cdot\frac{2\sin(\theta+30°)}{\sin\theta}\cdot[2\sqrt{3}\sin\theta-2\sin(\theta+30°)]$$

$$=\frac{2}{3}(\sin\theta-\frac{1}{4\sin\theta})\le\frac{1}{2}$$

$key2$: 设$\angle ABD=\theta\in(0°,120°), AD=x$, 则$\frac{x}{\sin\theta}=\frac{2}{\sin(\theta+30°)}$即$x=\frac{2\sin\theta}{\sin(\theta+30°)}$

$$\therefore V_{P-BCD}\le\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(2\sqrt{3}-x)\cdot 1\cdot 2\sin\theta=\frac{1}{3}(2\sqrt{3}-\frac{2\sin\theta}{\sin(\theta+30°)})\sin\theta$$

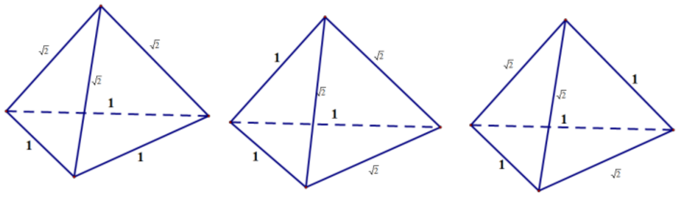
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin(\theta+60°)\sin\theta}{\sin(\theta+30°)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\cos(\theta+60°-\theta)-\cos(\theta+60°+\theta)}{\sin(\theta+30°)}=\frac{1}{3}(2\sin(\theta+30°)-\frac{1}{2\sin(\theta+30°)})\le\frac{1}{2}$$

$$key3: V_{P-BCD}=V_{B-PCD}\le\frac{1}{6}PD\cdot DC\le\frac{1}{6}(\frac{PD+DC}{2})^2=\frac{1}{2}$$

（2005 江苏）10．在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2, AA_1=AD=1$，点 E、F、G 分别是棱 AA_1、C_1D_1 与 BC 的中点，那么四面体 B_1-EFG 的体积是_______．$\frac{3}{8}$

（07竞赛）以$1,1,1,\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2}$为六条棱的四面体个数为____;最大体积为_____.

$07key:3;\dfrac{\sqrt{5}}{12}$

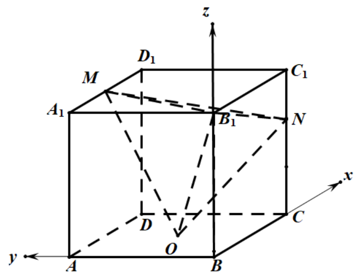


（2008 河北）10 在三棱锥 $S-ABC$ 中，$SA=4$，$SB\ge 7$，$SC\ge 9$，$AB=5$，$BC\le 6$，$AC\le 8$．则三棱锥 $S-ABC$ 体积的最大值为________________．$8\sqrt{6}$．

（09 湖北）5．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，O 为底面 $ABCD$ 的中心，M，N 分别是棱 A_1D_1 和 CC_1 的中点．则四面体 $O-MNB_1$ 的体积为_______ $\dfrac{7}{48}$．

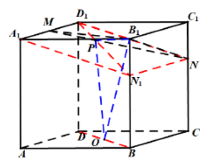
（2010 江苏）4．已知 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是棱长为 3 的正方体，点 P、Q、R 分别是棱 AB、AD、AA_1 上的点，$AP=AQ=AR=1$，则四面体 C_1PQR 的体积为____________．$\dfrac{4}{3}$

（2016 安徽）在单位正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，设O是正方形$ABCD$的中心，点M,N分别在棱A_1D_1,CC_1上，$A_1M=\dfrac{1}{2},CN=\dfrac{2}{3}$，则四面体$OMNB_1$的体积为_____．$\dfrac{11}{72}$



2016安徽key:建系如图，则$O(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0),B_1(0,0,1),M(\dfrac{1}{2},1,1),N(1,0,\dfrac{2}{3})$

$$\therefore V_{OMNB_1}=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&1\\0&0&1&1\\\frac{1}{2}&1&1&1\\1&0&\frac{2}{3}&1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\left|-\begin{vmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\\\frac{1}{2}&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&1&1\\1&0&\frac{2}{3}\end{vmatrix}\right|=\frac{11}{72}$$



$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin<\vec{a},\vec{b}>$

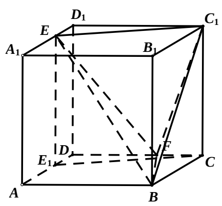
$\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k},\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$,

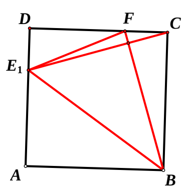
则$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=(y_1z_2-y_2z_1)\vec{i}-(x_1z_2-x_2z_1)\vec{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{k}$

$V=\dfrac{1}{6}|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$

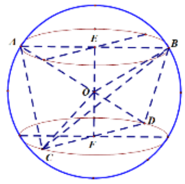
（2019 江苏）6．在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 在 A_1D_1 上，点 F 在 CD 上,$A_1E=2ED_1$，$DF=2FC$,则三棱锥$B-FEC_1$的体积是________．$\dfrac{5}{27}$

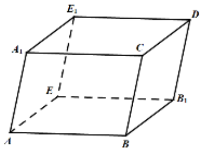
（补形）$V_{B-EFC_1}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}C_1E_1\cdot BF\cdot 1(\because C_1E_1\perp BF)=\dfrac{5}{27}$





（2010 全国Ⅰ）（12）已知在半径为 2 的球面上有 A、B、C、D 四点，若 $AB=CD=2$,则四面体 $ABCD$ 的体积的最大值为（B　）A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

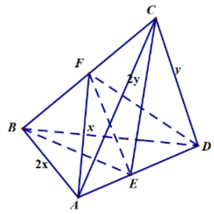




$2010key: V\le\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\cdot2\sqrt{3}(\text{或}\frac{1}{6}\cdot2\cdot2\cdot2\sqrt{3})=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

变式：四面体$ABCD$中，已知$AD\perp BC, AD=6, BC=2,$ 且 $\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CD}=2,$ 则V_{ABCD}的最大值为________.

$key1$: 作$BE\perp AD$于E，则$AD\perp$面BCE



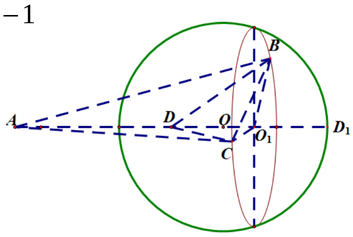
且$4x^2-AE^2=x^2-DE^2, 4y^2-AE^2=y^2-DE^2, \therefore 4x^2-4y^2=x^2-y^2$

$\therefore x=y,$ 取BC的中点F，则$AF\perp BC, DF\perp BC,$

$\therefore BC\perp$面$AED,$ 且$AF=\sqrt{4x^2-1}, BF=\sqrt{x^2-1}$

$\therefore V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{\triangle BCE}\cdot AD=\frac{1}{3}\cdot2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{4x^2-1}\cdot\sqrt{x^2-1}\cdot\sqrt{1-(\frac{4x^2-1+x^2-1-36}{2\sqrt{4x^2-1}\cdot\sqrt{x^2-1}})^2}$

$=\sqrt{-\frac{1}{4}x^4+10x^2-40}\le2\sqrt{15}$

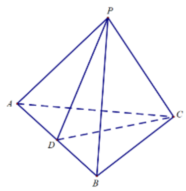


$key2: B, C$在阿波罗尼斯球面上，

$V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{\triangle O_1BC}\cdot AD\le\frac{1}{3}\cdot6\cdot\frac{1}{2}\cdot2\cdot\sqrt{16-1}=2\sqrt{15}$

（2019AB）设三棱锥 $P\text{-}ABC$ 满足 $PA=PB=3, AB=BC=CA=2,$ 则该三棱锥体积的最大值为______.$\frac{2\sqrt{6}}{3}$

key:（分割法）取AB的中点D，则$AB\perp$平面PDC,



$\therefore V_{P-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle PDC}\cdot AB=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

（201906学考）已知四面体$ABCD$中，棱BC, AD所在直线所成的角为$60°$, 且$BC=2, AD=3, \angle ACD=120°$,

则四面体$ABCD$的体积的最大值是（　）$A.\frac{\sqrt{3}}{2}$　　$B.\frac{\sqrt{3}}{4}$　　$C.\frac{9}{4}$　　$D.\frac{3}{4}$　　D

key:补成平行六面体

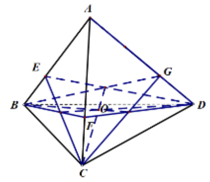
（2004 福建）四面体 $ABCD$ 中, $AB=CD=a, BC=AD=b, CA=BD=c$. 如果异面直线 AB 与 CD 所成的角为 θ，那么 $\cos\theta=$________________.

key:（等腰四面体，补成长方体）$\frac{|b^2-c^2|}{a^2}$

（2020 重庆）7. 四面体 $ABCD$ 中，$AB\perp BC, CD\perp BC, BC=2$，且异面直线 AB 与 CD 所成的角为 60°．若四面体 $ABCD$ 的外接球半径为 $\sqrt{5}$，则四面体 $ABCD$ 的体积的最大值为__________. $2\sqrt{3}$

（2022 甲）9. 甲、乙两个圆锥的母线长相等，侧面展开图的圆心角之和为 2π，侧面积分别为 $S_{甲}$ 和 $S_{乙}$，体积分别为 $V_{甲}$ 和 $V_{乙}$．若 $\frac{S_{甲}}{S_{乙}}=2$，则 $\frac{V_{甲}}{V_{乙}}=$（　C）A. $\sqrt{5}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{10}$　　D. $\frac{5\sqrt{10}}{4}$

（2005重庆）在体积为1的三棱柱$A-BCD$侧棱AB、AC、AD上分别取点E、F、G,使$AE:EB=AF:FC=AG:GD=2:1$,记O为三平面BCG、CDE、DBF的交点,则三棱锥$O-BCD$的体积为__.

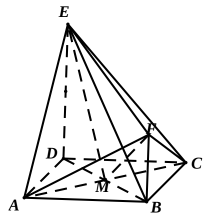


$05key: DO_1=\dfrac{3}{5}DE, CO=\dfrac{5}{7}CO_1$

$\therefore V_{O-BCD}=\dfrac{5}{7}V_{O_1-BCD}=\dfrac{5}{7}\cdot\dfrac{3}{5}V_{E-BCD}=\dfrac{5}{7}\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot V_{A-BCD}=\dfrac{1}{7}$

（2022新高考Ⅱ）11.如图，四边形$ABCD$为正方形，$ED\perp$平面$ABCD$, $FB//ED$, $AB=ED=2FB$,记三棱锥$E-ACD$, $F-ABC$, $F-ACE$的体积分别为V_1,V_2,V_3,

则（）$A.V_3=2V_2$　$B.V_3=V_1$　$C.V_3=V_1+V_2$　$D.2V_3=3V_1$

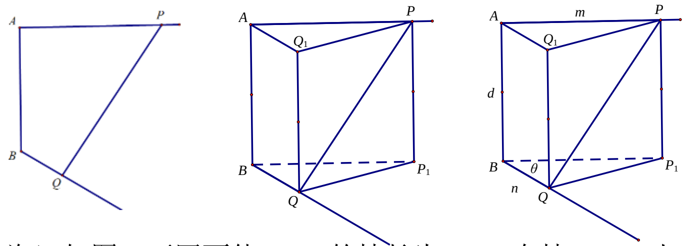


2022Ⅱ：$V_1=V_{E-ACD}=2V_{F-ACD}=2V_{F-ABC}=2V_2$

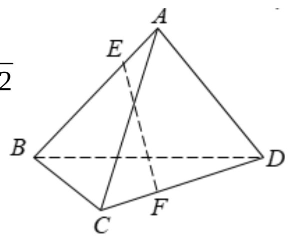
$V_3=V_{F-ACE}=2V_{F-AME}=2V_{A-MEF}=3V_{A-BMF}=3V_2$, ∴选$CD$

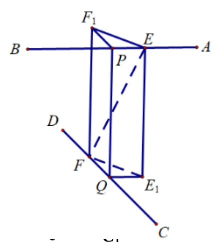
三、三棱柱模型及应用

异面直线上两点间的距离公式：$PQ=\sqrt{d^2+m^2+n^2\pm 2mn\cos\theta}$



（2005上海）如图，正四面体$ABCD$的棱长为$6cm$，在棱AB,CD上各有一点E,F,若$AE=1cm,CF=2cm$,则线段EF的长为_____cm.



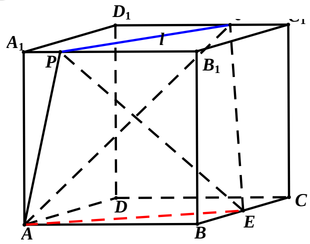


key:取AB、CD的中点P、Q，则$PQ\perp AB, PQ\perp CD$,且$PQ=3\sqrt{2}$

作$EE_1\underset{=}{//}PQ, FF_1\underset{=}{//}PQ$,得直三棱柱$PEF_1-QE_1F$,且$FQ\perp QE_1$

$\therefore EF=\sqrt{18+4+1}=\sqrt{23}$

变式：已知在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点E为棱BC的中点，直线l在平面$A_1B_1C_1D_1$内.若二面角$A-l-E$的平面角为θ,则$\cos\theta$的最小值为（　）$A.\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　$B.\dfrac{11}{21}$　$C.\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　$D.\dfrac{3}{5}$



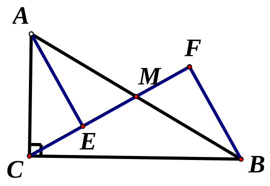
key:(异面直线上两点间的距离公式)$\dfrac{5}{4}=d^2+m^2+n^2-2mn\cos\theta$

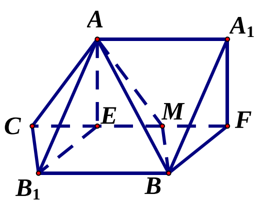
得$\cos\theta=\dfrac{m^2+n^2+d^2-\frac{5}{4}}{2mn}\ge\dfrac{m^2+n^2-\frac{5}{4}}{2mn}$（当且仅当$d=0$时，取$=$）

即当$l\perp AE$,即$l//B_1F$(F为C_1D_1的中点)

此时$\angle AME$为二面角的平面角，M为l与A_1E_1的交点,$\therefore\cos\theta_{\min}=\cos(2\arctan\dfrac{\sqrt{5}}{4})=\dfrac{11}{21}$

(1998A)$\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ,\angle B=30^\circ,AC=2,M$是$AB$的中点，将$\triangle ACM$沿$CM$折起，使得$A,B$两点间的距离为$2\sqrt{3}$，此时三棱锥$A-BCM$的体积等于_______.$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

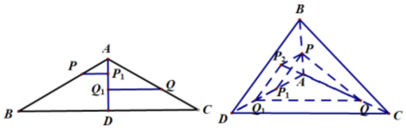




2023-06-16

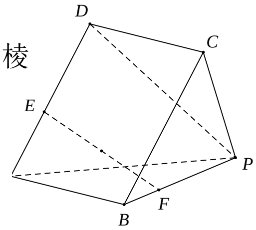
(2021浙江)8.在$\triangle ABC$中，$\angle B=\angle C=30°, BC=2\sqrt{3}, P,Q$分别在线段$AB$和$AC$上，$AP=1, AQ=\sqrt{2}$, 直线$AD\perp BC$于$D$.现将$\triangle ABC$沿着$AD$对折，当平面$ADB$与平面$ADC$的二面角为$60°$时，则线段$PQ$的长度为________.

key:（构造直三棱柱）$PP_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, AP_1=\dfrac{1}{2}, AQ_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, QQ_1=\dfrac{\sqrt{6}}{2}, P_1Q_1=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$,



$Q_1P_2 \underline{\underline{//}} P_1P, \angle P_2Q_1Q=60°, \therefore P_2Q=\sqrt{\dfrac{9-3\sqrt{2}}{4}}, \therefore PQ=\sqrt{\dfrac{9-3\sqrt{2}}{4}+\dfrac{3-2\sqrt{2}}{4}}=\dfrac{\sqrt{12-5\sqrt{2}}}{2}$

（201501 会考 25 题）如图，在底面为平行四边形的四棱锥$P-ABCD$中，E,F分别为棱AD,BP上的动点，且满足$AE=2BF$，则线段EF的中点的轨迹是（　）A

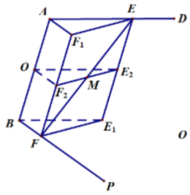


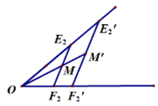
$A.$一条线段$B.$一段圆弧$C.$椭圆的一部分$D.$一个平行四边形

key:作$EE_1 \underline{//} AB, FF_1 \underline{//} AB$,连$F_1A, F_1D, E_1B, E_1F$,

则AF_1E-BFE_1是三棱柱，取AB, F_1F, EE_1的中点O, F_2, E_2

则M是E_2F_2的中点，M'是$E_2'F_2'$的中点，



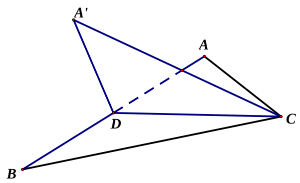


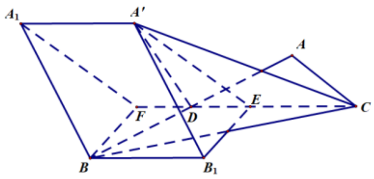
由已知得$\triangle OE_2F_2\sim\triangle OE_2'F_2', \therefore \triangle OE_2M\sim\triangle OE_2'M'$

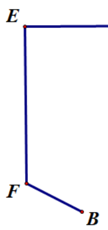
$\therefore O, M, M'$成一直线,$\therefore$ 选A

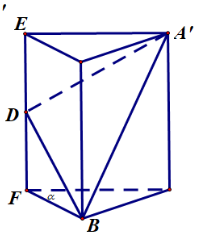
（15高考）如图，已知$\triangle ABC$，D是AB的中点，沿直线CD将$\triangle ACD$折成$\triangle A'CD$，所成二面角$A'-CD-B$的平面角为α,则（　）B

$A.\angle A'DB\le\alpha$　$B.\angle A'DB\ge\alpha$　$C.\angle A'CB\le\alpha$　$D.\angle A'CB\ge\alpha$

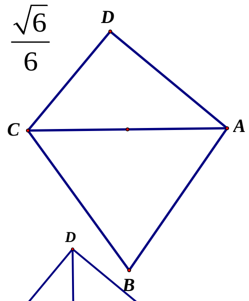


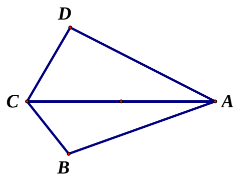






（16浙江文）如图，已知平面四边形$ABCD, AB=BC=3, CD=1, AD=\sqrt{5}, \angle ADC=90°$,沿直线$AC$将$\triangle ACD$翻折成$\triangle ACD'$,直线$AC$与$BD'$所成角的余弦值的最大值是_______. $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$



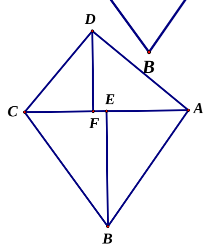


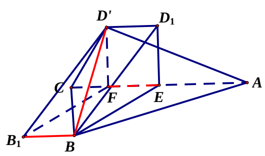
key:构造直三棱柱$D'FB_1-D_1EB$,设$\angle D_1EB=\theta$,

$D'F=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, EF=\dfrac{2}{\sqrt{6}}, BE=\dfrac{\sqrt{30}}{2}$

$\therefore \tan<\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD'}>=\dfrac{D'B_1}{BB_1}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{5}{6}+\dfrac{15}{2}-2\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\cdot\dfrac{\sqrt{30}}{2}\cos\theta}$

$=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{\dfrac{25}{3}-5\cos\theta}\ge\sqrt{5}, \therefore \cos<\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD'}>_{\max}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

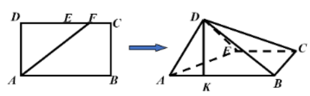




四、三垂线定理及应用

（09高考）如图，在长方形$ABCD$中，$AB=2, BC=1, E$为DC的中点，F为线段EC(端点除外）上一动点.现将$\triangle AFD$沿AF折起，使平面$ABD\perp$平面ABC.在平面ABD内过点D作$DK\perp AB$，K为垂足.

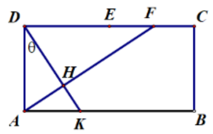
设$AK=t$，则t的取值范围是______. $(\dfrac{1}{2},1)$

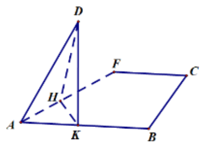


2023-06-16

2009key：$\because$ 平面$ABD\perp$平面ABC，$DK\perp AB,\therefore DK\perp$平面$ABCF$，

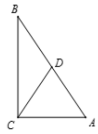
作$DH\perp AF$于H，连HK，$\therefore HK\perp AF,\therefore \tan\theta=\frac{t}{1}=\frac{1}{DF}\in(\frac{1}{2},1)$

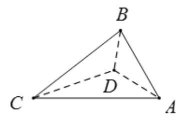




（201507 会考 25 题）如图，在$Rt\triangle ABC$中，$AC=1,BC=x,D$是斜边AB的中点，将$\triangle BCD$沿直线CD翻折，若在翻折过程中存在某个位置，使得$CB\perp AD$，则x的取值范围是（　　）A

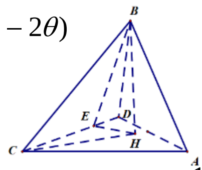
A. $(0,\sqrt{3}]$　　B. $(\frac{\sqrt{2}}{2},2]$　　C. $(\sqrt{3},2\sqrt{3}]$　　D. $(2,4]$

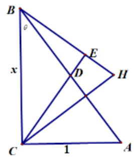




$key:BE=x\sin\theta\ge EH=CE\tan\angle ECH=x\cos\theta\cdot\tan(\frac{\pi}{2}-2\theta)$

$\therefore \tan\theta\ge\frac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta}$即$\frac{1}{x}=\tan\theta\ge\frac{1}{\sqrt{3}},\therefore x\in(0,\sqrt{3}]$



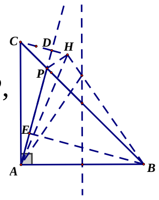


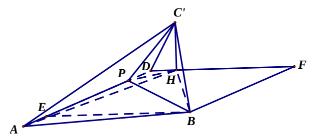
（201711 月学考）（18）等腰直角$\triangle ABC$斜边BC上的一点P满足$CP\le\frac{1}{4}CB$.将$\triangle CAP$沿AP翻折至$\triangle C'AP$，使二面角$C'-AP-B$为$60°$.记直线$C'A,C'B,C'P$与平面ABP所成角分别为α,β,γ.则（　　）C

$A.\alpha<\beta<\gamma$　　$B.\alpha<\gamma<\beta$　$C.\beta<\alpha<\gamma$　$D.\gamma<\alpha<\beta$

key：设$CP=t<\frac{\sqrt{2}}{4}(AB=AC=1)$，则$CH=\frac{3}{2}CD=\frac{3}{2}\sin\angle CAP$，

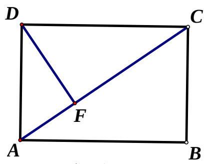
$\therefore \tan\alpha=\frac{C'H}{AH},\tan\beta=\frac{C'H}{BH},\tan\gamma=\frac{C'H}{PH},\therefore$ 选C

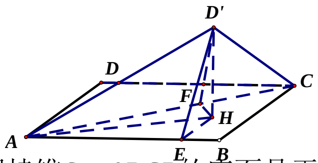


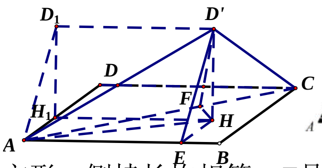


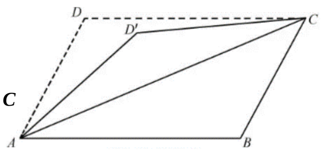
（201811 月学考）如图，四边形$ABCD$为矩形，沿AC将$\triangle ADC$翻折成$\triangle AD'C$.设二面角$D'-AB-C$的平面角为θ，直线AD'与直线BC所成角为θ_1，直线AD'与平面ABC所成角为θ_2.当θ为锐角时，有（　　）B

$A.\theta_2\le\theta_1\le\theta$　$B.\theta_2\le\theta\le\theta_1$　　$C.\theta_1\le\theta_2\le\theta$　　$D.\theta\le\theta_2\le\theta_1$









（2018高考）已知四棱锥$S-ABCD$的底面是正方形，侧棱长均相等，E是线段AB上的点（不含端点），设SE与BC所成角为θ_1，SE与平面$ABCD$所成的角为θ_2，二面角$S-AB-C$的平面角为θ_3，则（　）

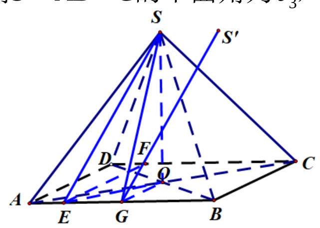
$A.\theta_1\le\theta_2\le\theta_3$　$B.\theta_3\le\theta_2\le\theta_1$　　$C.\theta_1\le\theta_3\le\theta_2$　　$D.\theta_2\le\theta_3\le\theta_1$

key：如图，作$EF//BC$交CD于F，

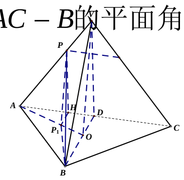
设O是底面中心，$OH\perp AB$于H，连SH

则$\theta_1\ge\theta_2,\theta_3\ge\theta_2$

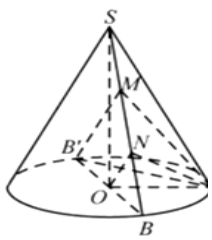
作$GS'//ES$，由最小角定理得$\theta_3\le\theta_1,\therefore$ 选D

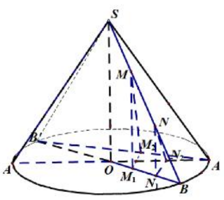


(19高考）（8）设三棱锥$V-ABC$的底面是正三角形，侧棱长均相等，P是棱VA上的点（不含端点）.记直线PB与直线AC所成角为α，直线PB与平面ABC所成角为β，二面角$P-AC-B$的平面角为γ，则（　　）$A.\beta<\gamma,\alpha<\gamma$　$B.\beta<\alpha,\beta<\gamma$　$C.\beta<\alpha,\gamma<\alpha$　　$D.\alpha<\beta,\gamma<\beta$　　B



(202001学考)18.如图，在圆锥SO中，A,B是$\odot O$上动点，BB'是$\odot O$的直径，M,N是SB的两个三等分点，$\angle AOB=\theta(0<\theta<\pi)$，记二面角$N-OA-B,M-AB'-B$的平面角分别为$\alpha,\beta$，若$\alpha\le\beta$，则$\theta$的最大值是（　）$A.\frac{5\pi}{6}$　$B.\frac{2\pi}{3}$　　$C.\frac{\pi}{2}$　　$D.\frac{\pi}{4}$　B

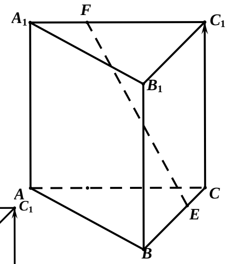




$202001: key:\tan\alpha=\dfrac{\frac{1}{3}SO}{\frac{2}{3}R\sin\theta}=\dfrac{SO}{2R\sin\theta}\le\tan\beta=\dfrac{\frac{2}{3}SO}{\frac{4}{3}R\sin\frac{\theta}{2}}=\dfrac{SO}{2R\sin\frac{\theta}{2}}$

$\therefore\cos\dfrac{\theta}{2}\ge\dfrac{1}{2},\therefore\dfrac{\theta}{2}\le\dfrac{\pi}{3}$即$\theta\le\dfrac{2\pi}{3}$，选$B$

（2022浙江高考）如图，已知正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1,AC=AA_1,E,F$分别棱$BC,A_1C$上的点，记$EF$与$AA_1$所成角为$\alpha$，$EF$与平面$ABC$所成的角为$\beta$，二面角$F-BC-A$的平面角为$\gamma$，则（　）

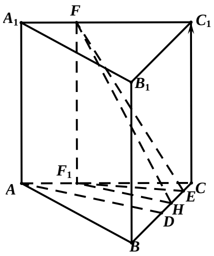


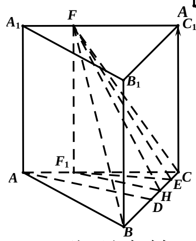
$A.\alpha\le\beta\le\gamma$　$B.\beta\le\alpha\le\gamma$　$C.\beta\le\gamma\le\alpha$　$D.\alpha\le\gamma\le\beta$

key:作$FF_1//AA_1$交AC于F_1，作$F_1H\perp BC$于H，连FH

则$\alpha=\angle EFF_1\ge\dfrac{\pi}{4}\ge\beta=\dfrac{\pi}{2}-\angle EFF_1,\gamma=\angle FHF_1\ge\beta$，

连FB,FC，则平面$FF_1H\perp$平面BCF，$\therefore\alpha\ge\gamma$，$\therefore$选$C$





五、利用法向量、距离（体积）转化角

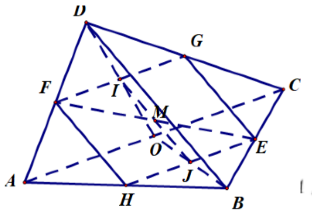
（202101）如图，在三棱锥$D-ABC$中，$AB=BC=CD=DA,\angle ABC=90°,E,F,O$分别为棱$BC,DA,AC$的中点，记直线$EF$与平面$BOD$所成角为$\theta$，则$\theta$的取值范围是（　）$A.(0,\dfrac{\pi}{4})$　$B.(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3})$　$C.(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})$　$D.(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2})$

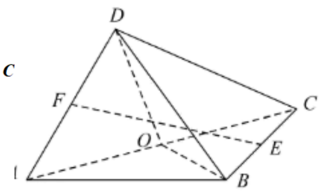
$202101key$:取CD,AB的中点G,H，则$DO\perp AC,BO\perp AC$，

$\therefore AC\perp$平面BOD，$FG//AC,FG\perp GE$，

令$AB=1$，则$OD=OB=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore GE=\dfrac{1}{2}DB\in(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}),FG=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\theta=\dfrac{\pi}{2}-<\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FG}>\in(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})$



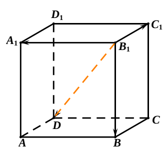


（2022甲）7.在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，已知B_1D与平面$ABCD$和平面AA_1B_1B所成的角均为$30°$，则（ D ）

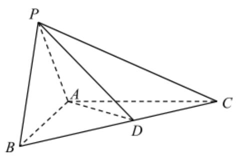
$A.AB=AD$　　$B.AB$与平面AB_1C_1D所成的角为$30°$　$C.AC=CB_1$　　$D.B_1D$与平面BB_1C_1C所成角为$45°$

$key:<\overrightarrow{B_1D}$，平面$ABCD>=90°-<\overrightarrow{B_1D},\overrightarrow{B_1B}>=30°$得$<\overrightarrow{B_1D},\overrightarrow{B_1B}>=60°$，

同理$<\overrightarrow{B_1D},\overrightarrow{B_1C_1}>=60°,\therefore\cos^2<\overrightarrow{B_1D},\overrightarrow{B_1A_1}>+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=1$得$<\overrightarrow{B_1D},\overrightarrow{B_1A_1}>=45°$



变式1（1）如图，在三棱锥$P-ABC$中，$AB\perp AC,AB=AP,D$是棱BC上一点（不含端点），且$PD=BD$，记$\angle DAB$为α，直线AB与平面PAC所成角为β，直线PA与平面ABC所成角为γ，则（　）



$A.\gamma\le\beta,\gamma\le\alpha$　$B.\beta\le\alpha,\beta\le\gamma$　$C.\beta\le\alpha,\gamma\le\alpha$　$D.\alpha\le\beta,\gamma\le\beta$

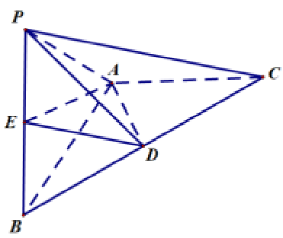
$key:E$为PB的中点，则$PB\perp$平面AED，

$\sin\beta=\dfrac{d_{B\to PAC}}{AB}=\dfrac{2d_{E\to PAC}}{AB}\ge\sin\gamma=\dfrac{d_{P\to ABC}}{PA}=\dfrac{d_{P\to ABC}}{AB}=\dfrac{2d_{E\to ABC}}{AB}$

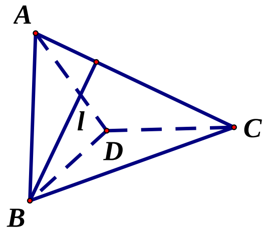
$(\because S_{\triangle ABC}\ge S_{\triangle PAC},V_{P-AEC}=V_{E-PAC}=V_{E-ABC}=V_{B-AEC}$，

$\therefore d_{E\to ABC}<d_{E\to PAC}),\therefore\beta\ge\gamma$，

$\because\triangle BAD\cong\triangle PAD,\therefore\gamma\le\alpha=\angle BAD$(最小角定理)



（2）空间四面体$ABCD$中，$\angle ACD=60°$，二面角$A-CD-B$的大小为$45°$，

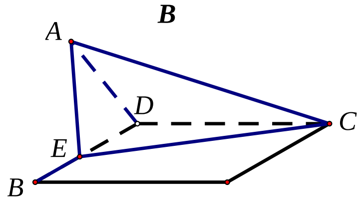


在平面ABC内过点B作AC的垂线l，则l与平面BCD所成的最大角的正弦值为______.

key:由题意得$l//$平面α,且$AC\perp\alpha$,

作$AE\perp$平面BCD于E，作AD于D,连ED，则$\angle ADE=45°$,

令$AC=2$,则$AD=\sqrt{3}, AE=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$,$\therefore\cos\angle EAC=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$,



$\therefore<l,$平面$BCD>=\dfrac{\pi}{2}-<\vec{l},\overrightarrow{n_{BCD}}>=\dfrac{\pi}{2}-<\vec{l},\overrightarrow{EA}>\le\dfrac{\pi}{2}-<\overrightarrow{EA},$平面$EFG>$

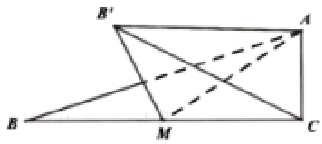
$=<\overrightarrow{EA},\overrightarrow{CA}>=\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{4}$,

$\therefore\sin<l,$平面$BCD>_{\max}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

(2009重庆）已知二面角$\alpha-l-\beta$的大小为$50°$，P为空间中任意一点，则过点P且与平面α和平面β所成的角都是$25°$的直线的条数为（　）$A.2$　$B.3$　$C.4$　$D.5$

$key:<\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{n_\beta}>=50°,<\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_\alpha}>=<\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_\beta}>=65°=\dfrac{180°-50°}{2}$,$\therefore$选$B$

变式2（1）如图，在$\triangle ABC$中，点M是边BC的中点，将$\triangle ABM$沿着AM翻折成$\triangle AB'M$，且点B'不在平面AMC内，点P是线段$B'C$上一点.若二面角$P-AM-B'$与二面角$P-AM-C$的平面角相等，则

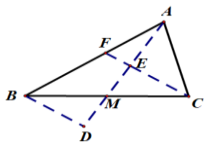


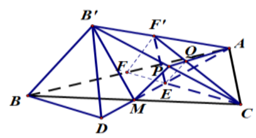
直线AP经过$\triangle AB'C$的（　）$A.$重心　$B.$垂心　$C.$内心　$D.$外心

key:由三垂线定理作二面角的平面角得$d_{P\to AB'M}=d_{P\to ACM}$

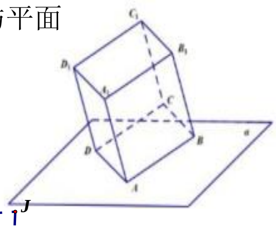
$\therefore V_{P-AB'M}=V_{P-ACM}$即$V_{A-PB'M}=V_{A-PCM}$

$\therefore S_{\Delta PB'M}=S_{\Delta PCM},\therefore B'P=CP$





(2)（镇海）如图，棱长为4的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$,点A在平面α内,平面$ABCD$与平面α所成角为$30°$,则顶点C_1到平面α的距离的最大值是（　　）



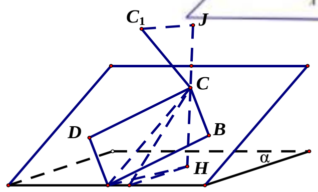
$A.2(\sqrt{3}+\sqrt{2})$　$B.2(2+\sqrt{2})$　$C.2(\sqrt{3}+1)$　$D.2(\sqrt{2}+1)$

key:设平面$ABCD\cap A=l$,作$CH\perp\alpha$于H,作$HI\perp l$于I,连CI,

作$C_1J\perp CH$于J,$\therefore<\overrightarrow{CC_1},\overrightarrow{CJ}>=<$平面$ABCD,\alpha>=30°$

且$30°=\angle CIH\ge\angle CAH, CI\le CA=4\sqrt{2}$,

$\therefore C_1$到平面α的距离的最大值为$4\cdot\cos 30°+4\sqrt{2}\cdot\sin 30°=2\sqrt{3}+2\sqrt{2}$

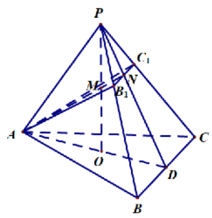


六、截面

（1991全国竞赛）设正三棱锥P-ABC的高为PO，M为PO的中点，过AM作与棱BC平行的平面，将三棱锥截为上、下两部分，则此两部分体积之比为_______.

key:设$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AN}$,

而$\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AP}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AP}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$,



$\therefore\overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{2\lambda}\overrightarrow{AP}+\dfrac{1}{3\lambda}\overrightarrow{AD},\therefore\dfrac{1}{2\lambda}+\dfrac{1}{3\lambda}=1$得$\lambda=\dfrac{5}{6},\therefore\overrightarrow{AN}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AP}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AD}$

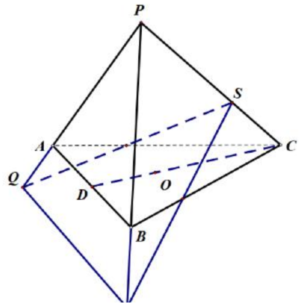
$\therefore\dfrac{PN}{PD}=\dfrac{2}{5},\therefore\dfrac{S_{\triangle PB_1C_1}}{S_{\triangle PBC}}=\dfrac{4}{25},\therefore\dfrac{V_{A-PB_1C_1}}{V_{A-BCC_1B_1}}=\dfrac{4}{21}$

2023-06-16

（1995全国竞赛）设O是正三棱锥$P-ABC$底面$\triangle ABC$的中心，过O的动平面与PC交于S，与PA,PB的延长线分别交于Q,R，则和式$\dfrac{1}{PQ}+\dfrac{1}{PR}+\dfrac{1}{PS}$（　）

A.有最大值无最小值　　　　　　　　B.有最小值而无最大值

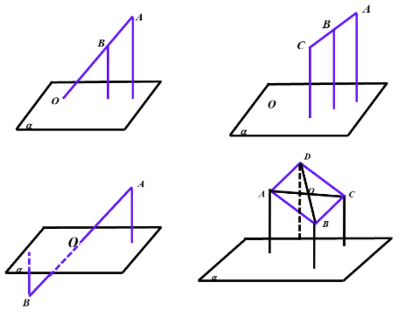
C.既有最大值又有最小值，两者不等　D.是一个与面QPS无关的常数



（1995）$key1:\dfrac{PA}{PQ}=\dfrac{PQ-AQ}{PQ}=1-\dfrac{d_A}{d_p},\dfrac{PB}{PR}=\dfrac{PR-AR}{PR}=1-\dfrac{d_B}{d_p},$

$\dfrac{PC}{PS}=\dfrac{PS+SC}{PS}=1+\dfrac{d_C}{d_p}$

$\therefore\dfrac{PA}{PQ}+\dfrac{PB}{PR}+\dfrac{PC}{PS}=3+\dfrac{d_C-d_A-d_B}{d_P}=3(\because d_A+d_B=2d_D=d_C)$



$key2:$设$\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PR}=\mu\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PS}=\nu\overrightarrow{PC}$

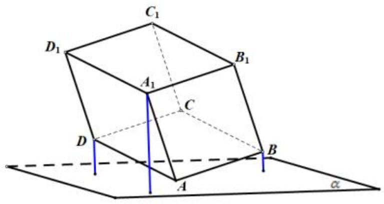
由Q,R,S,O共面得$\overrightarrow{PO}=x\overrightarrow{PQ}+y\overrightarrow{PR}+z\overrightarrow{PS}(x+y+z=1)$

$=x\lambda\overrightarrow{PA}+y\mu\overrightarrow{PB}+z\nu\overrightarrow{PC}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{PA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{PB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{PC}$

$\therefore 3x\lambda=1,3y\mu=1,3z\nu=1,\therefore\dfrac{1}{PQ}+\dfrac{1}{PR}+\dfrac{1}{PS}=\dfrac{1}{PA}(\dfrac{PA}{PQ}+\dfrac{PB}{PR}+\dfrac{PC}{PS})$

$=\dfrac{1}{PA}(\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}+\dfrac{1}{\nu})=\dfrac{1}{PA}(3x+3y+3z)=\dfrac{3}{PA}$为定值

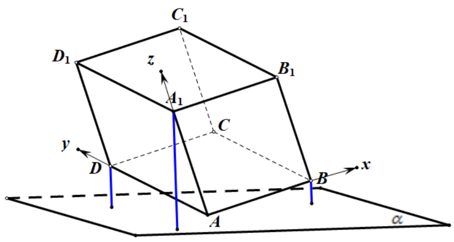
（06安徽）多面体上，位于同一条棱两端的顶点称为相邻的，如图.正方体的一个顶点A在平面α内，其余顶点在α的同侧，正方体上与顶点A相邻的三个顶点到平面α的距离分别为1, 2和4，P是正方体的其余四个顶点中的一个，则P到平面α的距离可能是：①3;②4;③5;④6;⑤7.以上结论正确的为________；此正方体的棱长为______.



$key:$①③④⑤

设棱长为a，建系如图，设平面α的法向量$\vec{n}=(x,y,z)$，且$|\vec{n}|=n$

则$\begin{cases}n=\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=ax\\2n=\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=ay\\4n=\vec{n}\cdot\overrightarrow{AA_1}=az\\n^2=x^2+y^2+z^2\end{cases},\therefore n^2=\dfrac{n^2}{a^2}+\dfrac{4n^2}{a^2}+\dfrac{16n^2}{a^2}$得$a=\sqrt{21}$

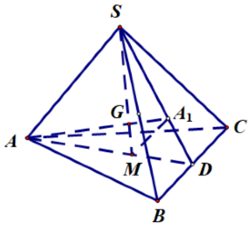


（2019 年全国）正方体 $ABCD-EFGH$ 的一个截面经过顶点 A，C 及棱 EF 上一点 K，且将正方体分成体积比为$3:1$的两部分，则 $\dfrac{EK}{KF}$ 的值为_________ . $\sqrt{3}$

（2021 年重庆）设正三棱锥 $P-ABC$ 的底面边长为 1,高为$\sqrt{2}$ ，过底边 BC 作此三棱锥的截面，则截面面积的最小值为____________ . $\dfrac{3\sqrt{14}}{28}$

（2023 甲）11. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，$AB=4,PC=PD=3,\angle PCA=45°$，则$\triangle PBC$的面积为（　C　）A. $2\sqrt{2}$　　B. $3\sqrt{2}$　　C. $4\sqrt{2}$　D. $5\sqrt{2}$

(2023浙江竞赛)3.已知四面体$S-ABC$，点A_1为$\triangle SBC$的重心，G在线段AA_1上，$\frac{|AG|}{|GA_1|}=3$，连接SG交$\triangle ABC$所在的平面与M，则$\frac{|A_1M|}{|AS|}=$________.

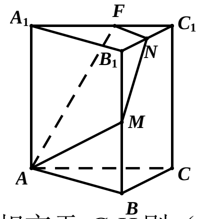


(2023浙江竞赛)3.key：设$\overrightarrow{SG}=\lambda\overrightarrow{SM}$

则$\overrightarrow{SG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{SA_1}+\frac{1}{4}\overrightarrow{SA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{SA}=\lambda\overrightarrow{SM}$, $\therefore\overrightarrow{SM}=\frac{1}{2\lambda}\overrightarrow{SD}+\frac{1}{4\lambda}\overrightarrow{SA}$

$\therefore\frac{1}{2\lambda}+\frac{1}{4\lambda}=1$得$\lambda=\frac{3}{4}$，且$\overrightarrow{SM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{SD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$, $\therefore\overrightarrow{DM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$, $\therefore A_1M//SA$, $\therefore\frac{|A_1M|}{|SA|}=\frac{1}{3}$

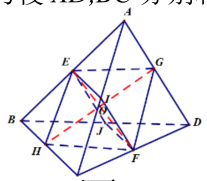
(2014湖南）在如图所示的三棱柱中，点A、BB_1的中点M以及B_1C_1的中点N所确定的平面把三棱柱割成体积不同的两个部分，则较小部分的体积和原三棱柱的体积之比为（　）$A.\frac{23}{36}$　$B.\frac{13}{36}$　$C.\frac{13}{23}$　$D.\frac{12}{23}$

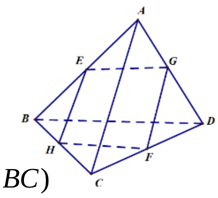


变式 1（1）已知 E,F 是四面体的棱 AB,CD 的中点，过 EF 的平面与棱 AD,BC 分别相交于 G,H,则（ C）

A．GH 平分 EF，$\frac{BH}{HC}=\frac{AG}{GD}$　　B．EF 平分 GH，$\frac{BH}{HC}=\frac{GD}{AG}$

C．EF 平分 GH，$\frac{BH}{HC}=\frac{AG}{GD}$　　D．GH 平分 EF，$\frac{BH}{HC}=\frac{GD}{AG}$

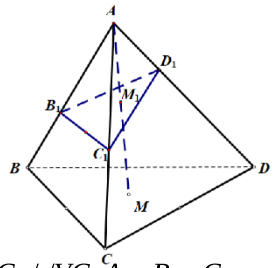




$key:\frac{OG}{OH}=\frac{d_{g\to IEJF}}{d_{H\to IEJF}}=\frac{d_{A\to IEJF}}{d_{B\to IEJF}}=1$(其中$I,J$分别为$AC,BD$的中点，有$AD//$平面$IEJF//BC$)

$\frac{BH}{HC}=\frac{d_{B\to EHFG}}{d_{C\to EHFG}}=\frac{d_{A\to EHFG}}{d_{D\to EHFG}}=\frac{AG}{GD}$

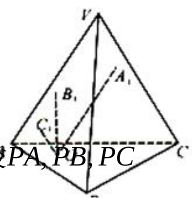
（2）在三棱锥$A-BCD$中,M为底面$\triangle BCD$的重心,任作一截面与侧棱AB、AC、AD分别交于点B_1、C_1、D_1,与AM交于点M_1,则$\frac{AB}{AB_1}+\frac{AC}{AC_1}+\frac{AD}{AD_1}-\frac{3AM}{AM_1}=$__________. 0



$key:\frac{AB}{AB_1}=\frac{AB_1+BB_1}{AB_1}=1+\frac{BB_1}{AB_1}=1+\frac{d_B}{d_A}$,同理$\frac{AC}{AC_1}=1+\frac{d_C}{d_A}$, $\frac{AD}{AD_1}=1+\frac{d_D}{d_A}$

$\therefore\frac{AB}{AB_1}+\frac{AC}{AC_1}+\frac{AD}{AD_1}=3+\frac{d_B+d_C+d_D}{d_A}=3+\frac{3d_M}{d_A}$, $\frac{3AM}{AM_1}=3(1+\frac{MM_1}{AM_1})=3+\frac{3d_M}{d_A}$

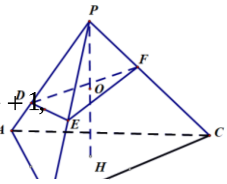
（3）如图，过四面体$V-ABC$的底面上任意一点O，分别作$OA_1//VA, OB_1//VB, OC_1//VC$, A_1、B_1、C_1分别是直线与侧面的交点，则$\frac{OA_1}{VA}+\frac{OB_1}{VB}+\frac{OC_1}{VC}=$（　）$A.\frac{1}{3}$　$B.1$　$C.2$　$D.3$　B



$key:\frac{OA_1}{OA}=\frac{d_{O\to VBC}}{d_{A\to VBC}}=\frac{V_{O-VBC}}{V_{A-VBC}}=\frac{V_{O-VBC}}{V_{VABC}}$

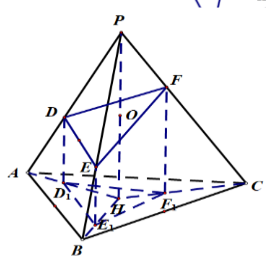
（4）如图，正四面体$P-ABC$的体积为V，底面积为S，O是高PH的中点，过O的平面α与棱PA,PB,PC分别交于D,E,F，设三棱锥$P-DEF$的体积为V_0，截面$\triangle DEF$的面积为S_0，则（　）

$A.V\le 8V_0, S\le 4S_0$　$B.V\le 8V_0, S\ge 4S_0$　$C.V\ge 8V_0, S\le 4S_0$　$D.V\ge 8V_0, S\ge 4S_0$



key：设$\overrightarrow{PD}=x\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PE}=y\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PF}=z\overrightarrow{PC}$,则$\frac{1}{x}=\frac{PA}{PD}=\frac{d_A}{d_P}+1, \frac{1}{y}=\frac{PB}{PE}=\frac{d_B}{d_P}+1, \frac{1}{z}=\frac{PC}{PF}=\frac{d_C}{d_P}+1,$

$\therefore\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{d_A+d_B+d_C}{d_P}+3=\frac{3d_H}{d_P}+3=6$即$xy+yz+zx=6xyz$,

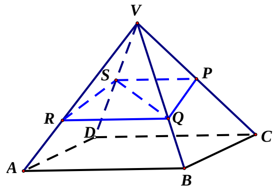


$key2$:(共面充要条件应用)$\overrightarrow{PD}=x\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PE}=y\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PF}=z\overrightarrow{PC}$

则$\overrightarrow{PO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PH}=\frac{1}{2}(\frac{1}{3x}\overrightarrow{PD}+\frac{1}{3y}\overrightarrow{PE}+\frac{1}{3z}\overrightarrow{PF}),\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=6,\therefore xyz\ge\frac{1}{8}$

$\therefore V_0=V_{P-DEF}=xyzV_{P-ABC}\ge\frac{1}{8}V,S_0\ge S_{\triangle D_1E_1F_1}=(xy+yz+zx)\cdot\frac{S}{3}\ge\frac{1}{4}S$

2（1）已知正四棱锥$V-ABCD$中，P是棱VC的中点，R、Q分别在VA、VB上.



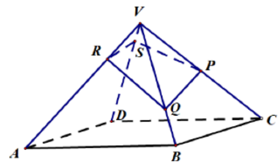
若$\frac{VR}{VA}=\frac{VQ}{VB}=\frac{2}{3}$，则平面$PQR$将此四棱锥分成的两部分的体积之比为______.

$key:\because RQ//AB,\therefore$ 平面PQR与VD的交点S为VD的中点，

则$V_{V-PQRS}=V_{V-PQS}+V_{V-QRS}=V_{Q-VRS}+V_{Q-VPS}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}V_{B-VAD}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}V_{B-VCD}$

$=\frac{7}{36}V_{V-ABCD},\therefore$ 体积比为$\frac{7}{29}$，或$\frac{29}{7}$

若$\frac{VR}{VA}=\frac{1}{3},\frac{VQ}{VB}=\frac{2}{3}$，则平面$PQR$将此四棱锥分成的两部分的体积之比为______. $\frac{5}{58},or,\frac{58}{5}$

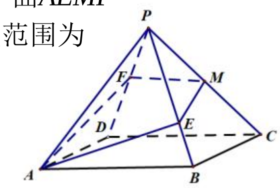


key:设VD与平面PQR交于S，且$x=\frac{VS}{SD}=\frac{d_V}{d_D}=\frac{d_C}{d_D}=\frac{\frac{1}{2}d_A}{d_D}=\frac{2d_B}{d_D}$

$\therefore d_A=2d_C,d_B=\frac{1}{2}d_C$，而$3d_C=d_A+d_C=d_B+d_D=\frac{1}{2}d_C+d_D,\therefore\frac{d_C}{d_D}=\frac{2}{5}=x$

$\therefore V_{V-PQRS}=V_{Q-VRS}+V_{Q-VPS}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{3}V_{B-VAD}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{2}V_{B-VCD}=\frac{2}{63}V_{V-ABCD}+\frac{1}{21}V_{V-BCD}=\frac{5}{63}V_{V-ABCD}$

（2）设$P-ABCD$是一个高为3,底面边长为2的正四棱锥，M为PC中点，过AM作平面$AEMF$与线段PB,PD分别交于E,F(可以是线段端点)，则三棱锥$P-AEMF$的体积的取值范围为



(　) $A.[\frac{4}{3},2]$　$B.[\frac{4}{3},\frac{3}{2}]$　$C.[1,\frac{3}{2}]$　$D.[1,2]$

key:设$\overrightarrow{PE}=\lambda\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PF}=\mu\overrightarrow{PD}(\lambda,\mu\in[0,1])$,

则$\mu\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PF}=x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PE}+z\overrightarrow{PM}(x+y+z=1)=x\overrightarrow{PA}+y\lambda\overrightarrow{PB}+\frac{1}{2}z\overrightarrow{PC}=\mu(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB})$

$$\therefore\begin{cases}x=\mu\\ y=\frac{-\mu}{\lambda}\\ z=2\mu\end{cases},\therefore\mu=\frac{\lambda}{3\lambda-1}\in[0,1]\text{得}\lambda\in[\frac{1}{2},1],\therefore V_{P-AEMF}=V_{A-PEM}+V_{A-PFM}=\frac{1}{2}\cdot\lambda\cdot\frac{1}{2}V_{P-ABCD}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda}{3\lambda-1}\cdot\frac{1}{2}V_{P-ABCD}$$

$$=\lambda+\frac{\lambda}{3\lambda-1}=\lambda-\frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{9}}{\lambda-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}\in[\frac{4}{3},\frac{3}{2}]$$