期中练习（7）

2022-10-31

一. 单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

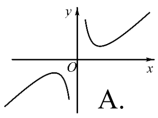
1．已知集合 $A=\{x|\frac{2-x}{x}\geq 0\}$，$B=\{0,1,2,3\}$，则 $A\cap B$子集个数(　　)　A．2B．3　　C．4　　D．7

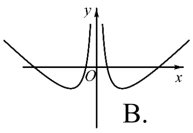
2. 设 $a,b\in R$，则 “$(a-b)a^2\geq 0$”是“$a\geq b$”的（ ）

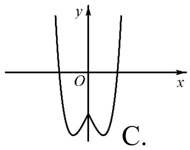
A. 充分而不必要条件　B. 必要而不充分条件　C. 充要条件　　　D. 既不充分也不必要条件

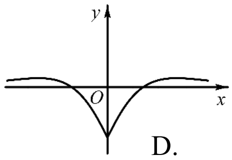
3．若不等式$ax^2+bx+4>0$的解集$\{x|-2<x<1\}$,则二次函数$y=bx^2+4x+a$在区间$[0,3]$ 上的最大值、最小值分别为 (　) A. 8，0　　　B. $0,-8$　　C. 4，0　D. $-2,-8$

4. 函数$f(x)=\frac{x^2-2}{e^{|x|}}$的图象大致是（　 ）


A.


B.


C.


D.

5．已知$a=\log_{0.9}0.8, b=0.8^{0.9}, c=0.9^{0.8}$, 则(　　)

A．$a<b<c$　　　B．$a<c<b$　　　C．$b<c<a$　　　D．$c<b<a$

6. 已知函数$f(x)=x^2+2x, g(x)=(\frac{1}{2})^x+m, \forall x_1\in[1,2], \exists x_2\in[-1,1]$, 使得$f(x_1)\geq g(x_2)$, 则实数$a$ 的取值范围是 (　) $A. (-\infty,2]$　　$B. (-\infty,\frac{5}{2}]$　　$C.\ [2,+\infty)$　　$D. [\frac{5}{2},+\infty)$

7．若函数$f(x)$是定义在R上的奇函数, $\forall x\in R$, 都有$f(1-x)=f(1+x)$, 且当$x\in[0,1]$ 时，$f(x)=2^x-1$,

若函数$g(x)=f(x)-\log_a(x+2)(a>0$且$a\neq 1)$在$(-1,7)$上恰有4个不同的零点, 则实数$a$的取值范围是( )

A．　$(0,\frac{1}{7})\cup(7,+\infty)$　　B．　$(0,\frac{1}{7})\cup(9,+\infty)$　C．　$(0,\frac{1}{9})\cup(7,+\infty)$　　D．　$(0,\frac{1}{9})\cup(9,+\infty)$

8.已知函数$f(x)$的定义域为R, $f(x+2)$为偶函数，$f(2x+1)$为奇函数，则（ ）

$A. f(-\frac{1}{2})=0$　$B. f(-1)=0$　$C. f(2)=0$　$D. f(4)=0$

二、多项选择题(本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多个选项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分)

9. 下列不等式成立的是（　）

A. 若 $a<b<0$,则$a^2>b^2$　　　　B. 若 $ab=4$,则$a+b\geq 4$

C. 若 $a>b$，则$ac^2>bc^2$　　　　D. 若 $a>b>0, m>0$，则 $\frac{b}{a}<\frac{b+m}{a+m}$

10. 已知函数$y=a^x-(b+1)(a>0$, 且$a\neq 1)$的图象过第一、三、四象限, 则必有(　　)

$A.\ 0<a<1$ $B.\ a>1$ $C.\ b>0$ $D.\ b<0$

11．下列判断不正确的是(　)

$A.$ 定义在上的奇函数$f(x)$，$x>0$时，$f(x)=\lg(x+1)$，则$x<0$时，$f(x)=\lg\dfrac{1}{1-x}$

B. 若幂函数$y=f(x)$的图象经过函数$g(x)=\log_a(x+3)+\dfrac{1}{4}(a>0$且$a\neq1)$图象上的定点$A$，则$f(\dfrac{1}{2})=4$.

$C.$ 已知$x>0,y>0$，且$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1$，若$x+y\geq m^2+3m$恒成立，则实数$m$的取值范围是(-4,1)

$D.$ 已知函数$f(x)=\begin{cases}-x^2-2ax-5, & x\leq1\\ \dfrac{2a}{x}, & x>1\end{cases}$在$R$上是增函数，则$a$的取值范围是$[-\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2}]$

12. 已知$f(x)=x^2+bx+c$，方程$f(x)=x$的两个根为$x_1,x_2(x_1>x_2)$.则（　　）

A.方程$f(f(x))=x$至少有2个不同的实数根　B．方程$f(f(x))=x$有4个不同实数根

C. 若$x_1-x_2>2$，则$f(f(x))=x$有4个不同的实数根$x_1,x_2,x_3,x_4(x_3>x_4)$，且$x_4<x_2<x_3<x_1$

D. 若$x_1-x_2>2$，则$f(f(x))=x$有4个不同的实数根$x_1,x_2,x_3,x_4(x_3>x_4)$，且$x_4<x_2<x_1<x_3$

三、填空题(本题共4小题，每小题5分，共20分)

13. 已知函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{5-x}{x+1}, & x\geq1\\ |x+1|, & x<1\end{cases}$若$f(a)\geq1$，则实数$a$的取值范围是_____.

14.已知定义在R上的偶函数$f(x)$，$\forall x_1,x_2\in[0,+\infty)(x_1\neq x_2)$，均有$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，

若$f(a)\leq f(3a+1)$则实数的取值范围____.

15. 已知函数$f(x)=x^2-(2a+3)x+6a(a>0)$，若有实数b使得$\begin{cases}f(b)\leq0,\\ f(b^2+1)\leq0\end{cases}$成立，

则实数a的取值范围是_______.

16.已知函数$f(x)$为R上的奇函数，当$x\geq0$时，$f(x)=x^2$，则不等式$f(f(x))+f(x-1)<0$的

解集为____.

四、解答题(本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17.(10分)计算下列各式的值:（1）$(\dfrac{8}{125})^{-\frac{1}{3}}-(-\dfrac{5}{9})^0+[(-\dfrac{1}{2})^2]^{-\frac{3}{2}}+16^{-0.75}+0.125^{\frac{1}{3}}$

（2）$\log_2 3\log_3 4+4^{\log_2\frac{1}{3}}$

18． (12分)已知集合$A=\{x\mid y=\log_2(x^2-7x-8)\},B=\{y\mid y=\log_2 x,x\in[\frac{1}{8},32]\}$.

（1） 求$A\cup B$；

（2） 若$C=\{x\mid m+1\le x\le 2m-1\},C\subseteq(A\cap B)$,求实数$m$的取值范围.

19. （1）设$a>b>c$，且$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\ge\frac{m}{a-c}$恒成立，求$m$的取值范围；

（2）若$x>8,y>2$，且$2x+8y-xy=1$，求$x+y$的最小值.

20.(12 分) 某厂每年生产某种产品x万件，其成本包含固定成本和浮动成本两部分.已知每年固定成本为 20 万元，浮动成本$k(x)=\begin{cases}x^2+20x,0<x\le 25\\ 41x+\frac{1600}{x}-200,x>25\end{cases}$，若每万件该产品销售价格为 40 万元，且每年该产品产销平衡.（1）设年利润为$f(x)$（万元），试求$f(x)$与x的关系式；

（2）年产量x为多少万件时，该厂所获利润$f(x)$最大？并求出最大利润.

21．已知函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1-ax}{x-1}$ 的图象关于原点对称，其中 a 为常数．（1）求 a 的值；

（2）当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $f(x)+\log_{\frac{1}{2}}(x-1)<m$ 恒成立，求实数 m 的取值范围；

（3）若关于 x 的方程 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x+k)$ 在 $[2,3]$ 上有解，求 k 的取值范围．

22. 已知定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)=\ln x$.

（1）若方程 $|f(x)|=\dfrac{1}{e^x}$ 有两个不等的实数根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，比较 x_1x_2 与 1 的大小；

（2）设函数 $g(x)=af^2(x)-f(\dfrac{x^2}{e^3})(a>0)$，若 $\exists m,n\in R$，使得 $y=g(x)$ 在定义域 $[e^m,e^n]$ 上单调，且值域为 $[m,n]$，求 a 的取值范围．

解答

二. 单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．已知集合 $A=\{x|\frac{2-x}{x}\geq 0\}$， $B=\{0,1,2,3\}$，则 $A\cap B$子集个数(　　)　C

A．2　　　　B．3　　　　C．4　　　　D．7

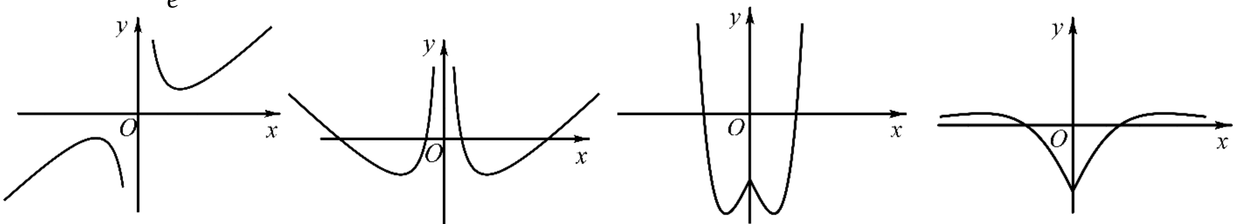
2. 设 $a,b\in R$，则 “$(a-b)a^2\geq 0$”是“$a\geq b$”的（ ）B

A. 充分而不必要条件　B. 必要而不充分条件　C. 充要条件　　　D. 既不充分也不必要条件

3．若不等式$ax^2+bx+4>0$的解集$\{x|-2<x<1\}$,则二次函数$y=bx^2+4x+a$在区间$[0,3]$ 上的最大值、最小值分别为 (　) B

A. 8，0　　　　B. $0,-8$　　　　C. 4，0　　　　D. $-2,-8$

4. 函数$f(x)=\frac{x^2-2}{e^{|x|}}$的图象大致是（　 ）D



A.　　　　B.　　　　C.　　　　D.

5．已知$a=\log_{0.9}0.8, b=0.8^{0.9}, c=0.9^{0.8}$, 则(　　)

A．$a<b<c$　　　B．$a<c<b$　　　C．$b<c<a$　　　D．$c<b<a$

6. 已知函数$f(x)=x^2+2x, g(x)=(\frac{1}{2})^x+m, \forall x_1\in[1,2], \exists x_2\in[-1,1]$, 使得$f(x_1)\geq g(x_2)$, 则实数$a$ 的取值范围是 (B 　) $A.(-\infty,2]$　　$B.(-\infty,\frac{5}{2}]$　　$C.\ [2,+\infty)$　　$D.[\frac{5}{2},+\infty)$

7．若函数$f(x)$是定义在R上的奇函数, $\forall x\in R$, 都有$f(1-x)=f(1+x)$, 且当$x\in[0,1]$ 时，$f(x)=2^x-1$,

若函数$g(x)=f(x)-\log_a(x+2)(a>0$且$a\neq 1)$在$(-1,7)$上恰有4个不同的零点, 则实数$a$的取值范围是( ) C

A．$(0,\frac{1}{7})\cup(7,+\infty)$　　B．$(0,\frac{1}{7})\cup(9,+\infty)$　C．$(0,\frac{1}{9})\cup(7,+\infty)$　　D．$(0,\frac{1}{9})\cup(9,+\infty)$

key:由$f(-x)=-f(x),f(1-x)=f(1+x)\Leftrightarrow f(2+x)=f(-x),\therefore f(2+x)=-f(x),\therefore f(x+4)=f(x),$

$g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=\log_a(x+2)$

当$a>1$时，如图（1）得:$\log_a 7>1$得$a>7$

当$0<a<1$时，如图（2）得:$\log_a 7>-1$即$a\in(0,\frac{1}{7})$

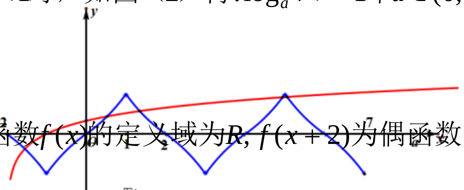
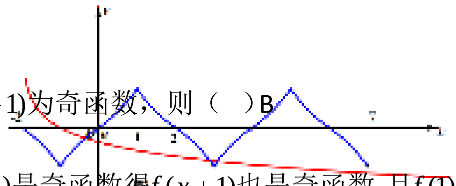


图1



8.已知函数$f(x)$的定义域为R, $f(x+2)$为偶函数，$f(2x+1)$为奇函数，则（　）B

20:由$f(x+2)$是偶函数得$f(-x+2)=f(x+2)$,由$f(2x+1)$是奇函数得$f(x+1)$也是奇函数,且$f(1)=0$

$\therefore f(-x+1)=-f(x+1),\therefore f(-x)=f(x+4),f(-x)=-f(x+2),\therefore f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$

$\therefore f(-1)=f(3)=-f(1)=0$,故选$B$

二、多项选择题(本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多个选项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分)

9. 下列不等式成立的是（ AD　）

A. 若 $a<b<0$,则$a^2>b^2$　　　　B. 若 $ab=4$,则$a+b\geq 4$

C. 若 $a>b$，则$ac^2>bc^2$　　　　D. 若 $a>b>0,m>0$，则 $\frac{b}{a}<\frac{b+m}{a+m}$

10. 已知函数$y=a^x-(b+1)(a>0$,且$a\neq 1)$的图象过第一、三、四象限,则必有(　　)BC

$A.$ $0<a<1$　　$B.$ $a>1$　　$C.$ $b>0$　　$D.$ $b<0$

11．下列判断不正确的是(　)CD

$A.$ 定义在上的奇函数$f(x)$, $x>0$时, $f(x)=\lg(x+1)$, 则$x<0$时, $f(x)=\lg\frac{1}{1-x}$

B. 若幂函数$y=f(x)$的图象经过函数$g(x)=\log_a(x+3)+\frac{1}{4}(a>0$且$a\neq 1)$图象上的定点$A$,则$f(\frac{1}{2})=4.$

$C.$ 已知$x>0,y>0$,且$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$,若$x+y\geq m^2+3m$ 恒成立,则实数m 的取值范围是(-4,1)

$D.$ 已知函数$f(x)=\begin{cases}-x^2-2ax-5, & x\leq 1\\ \frac{2a}{x}, & x>1\end{cases}$ 在R上是增函数,则a 的取值范围是$[-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}]$

12. 已知 $f(x)=x^2+bx+c$，方程 $f(x)=x$ 的两个根为 $x_1,x_2(x_1>x_2)$.则（　　）AC

A.方程 $f(f(x))=x$ 至少有 2 个不同的实数根　　B．方程 $f(f(x))=x$ 有 4 个不同实数根

C. 若 $x_1-x_2>2$，则 $f(f(x))=x$ 有 4 个不同的实数根 $x_1,x_2,x_3,x_4(x_3>x_4)$，且 $x_4<x_2<x_3<x_1$

D. 若 $x_1-x_2>2$，则 $f(f(x))=x$ 有 4 个不同的实数根 $x_1,x_2,x_3,x_4(x_3>x_4)$，且 $x_4<x_2<x_1<x_3$

$key1: \because f(x)=x, \therefore f(f(x))=f(x)=x, \therefore f(f(x))=x$至少有2个不同的实数根

$key2:$（交点式）由已知得：$f(x)-x=(x-x_1)(x-x_2)(x_1-x_2>2)$，则$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)+x$

则$f(f(x))-x=(f(x)-x_1)(f(x)-x_2)+f(x)-x$

$=[(x-x_1)(x-x_2)+x-x_1][(x-x_1)(x-x_2)+x-x_2]+(x-x_1)(x-x_2)$

$=(x-x_1)(x-x_2)[(x-x_2+1)(x-x_1+1)+1]=(x-x_1)(x-x_2)[x^2+(2-x_1+x_2)x+2-(x_1+x_2)+x_1x_2]$

设$g(x)=x^2+(1-x_1+1-x_2)x+1+(1-x_1)(1-x_2)$

则$\Delta_g=(1-x_1+1-x_2)^2-4[1+(1-x_1)(1-x_2)]=(x_1-x_2)^2-4>0$

且$\begin{cases} g(x_1)=2+x_1-x_2>0 \\ g(x_2)=2-x_1+x_2<0 \end{cases}, \therefore x_4<x_2<x_3<x_1$

三、填空题(本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分)

13. 已知函数$f(x)=\begin{cases} \dfrac{5-x}{x+1} &, x\ge 1 \\ |x+1| &, x<1 \end{cases}$ 若$f(a)\ge 1$,则实数a的取值范围是$\underline{\quad (-\infty,-2]\cup[0,2] \quad}$.

14.已知定义在R上的偶函数$f(x)$, $\forall x_1,x_2\in[0,+\infty)(x_1\ne x_2)$，均有$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$, $(-\infty,-\dfrac{1}{2}]\cup[-\dfrac{1}{4},+\infty)$

若$f(a)\le f(3a+1)$则实数的取值范围____.

16. 已知函数 $f(x)=x^2-(2a+3)x+6a(a>0)$，若有实数 b 使得$\begin{cases} f(b)\le 0, \\ f(b^2+1)\le 0 \end{cases}$成立，

则实数 a 的取值范围是_______. $(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}]\cup[5,+\infty)$

$key:$由$f(x)=(x-3)(x-2a)(a>0)$.当$a=\dfrac{3}{2}$时,$\begin{cases} b=3 \\ b^2+1=3 \end{cases}$无解;

当$a>\dfrac{3}{2}$时,$\begin{cases} 3\le b\le 2a \\ 3\le b^2+1\le 2a \end{cases}$得$3\le b\le\sqrt{2a-1}, \therefore a\ge 5$;

当$0<a<\dfrac{3}{2}$时,$\begin{cases} 2a\le b\le 3, \\ 2a\le b^2+1\le 3 \end{cases}$得$\begin{cases} 0<a\le\dfrac{1}{2} \\ 2a\le b\le\sqrt{2} \end{cases}$,或$\begin{cases} \dfrac{1}{2}<a<\dfrac{3}{2} \\ \max\{2a,\sqrt{2a-1}\}\le b\le\sqrt{2} \end{cases}$ 得$0<a\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

16.已知函数 $f(x)$为R上的奇函数，当$x\ge 0$时，$f(x)=x^2$,则不等式$f(f(x))+f(x-1)<0$的

解集为____. $(-\infty,\dfrac{\sqrt{5}-1}{2})$

$key: f(x)$在R上递增, $f(f(x))+f(x-1)<0\Leftrightarrow f(f(x))<-f(x-1)=f(1-x)\Leftrightarrow f(x)<1-x$

$\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge 0 \\ x^2<1-x \end{cases}, or \begin{cases} x<0 \\ -x^2<1-x \end{cases}$ 得$x<\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

四、解答题(本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (10分)计算下列各式的值:

（1）$(\dfrac{8}{125})^{-\frac{1}{3}}-(-\dfrac{5}{9})^0+[(-\dfrac{1}{2})^2]^{-\frac{3}{2}}+16^{-0.75}+0.125^{\frac{1}{3}}$ $\dfrac{81}{8}$ $\dfrac{19}{9}$

（2）$\log_2 3\log_3 4+4^{\log_2\frac{1}{3}}$

18．(12分)已知集合$A=\{x\mid y=\log_2(x^2-7x-8)\},B=\{y\mid y=\log_2 x,x\in[\frac{1}{8},32]\}$.

（1）求$A\cup B$；

（3）　若$C=\{x\mid m+1\le x\le 2m-1\},C\subseteq(A\cap B)$,求实数$m$的取值范围．

解：⑴ $A=\{x\mid x^2-7x-8>0\}=(-\infty,-1)\cup(8,+\infty),B=[-3,5],\therefore A\cup B=(-\infty,5]\cup(8,+\infty)$

（2）由 ⑴ 得$A\cap B=[-3,-1)$.当$m+1>2m-1$即$m<2$时，$C=\Phi\subseteq A\cap B$;

当$m\ge 2$时,$\begin{cases}m+1\ge -3\\2m-1<-1\end{cases}$无解,综上：$m$的取值范围为$(-\infty,2)$.

19．（1）设$a>b>c$，且$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\ge\frac{m}{a-c}$恒成立，求 m 的取值范围；

（2）若$x>8,y>2$，且$2x+8y-xy=1$，求$x+y$的最小值．

【答案】（1）$m\le 4$；（2）$2\sqrt{15}+10$．

20.(12 分) 某厂每年生产某种产品 x 万件，其成本包含固定成本和浮动成本两部分.已知每年固定成本为 20 万元，浮动成本$k(x)=\begin{cases}x^2+20x,0<x\le 25\\41x+\frac{1600}{x}-200,x>25\end{cases}$，若每万件该产品销售价格为 40 万元，且每年该产品产销平衡.（1）设年利润为 $f(x)$（万元），试求 $f(x)$ 与 x 的关系式；

（2）年产量 x为多少万件时，该厂所获利润 $f(x)$ 最大？并求出最大利润.

【详解】（1）由题意 $f(x)=40x-k(x)-20=\begin{cases}-x^2+20x-20,0<x\le 25\\-x-\frac{1600}{x}+180,x>25\end{cases}$；

即 $f(x)=\begin{cases}-x^2+20x-20,0<x\le 25\\-x-\frac{1600}{x}+180,x>25\end{cases}$；

（2）$0<x\le 25$ 时，$f(x)=-x^2+20x-20=-(x-10)^2+80$，$x=10$ 时，$f(x)_{\max}=80$，

当 $x>25$ 时，$f(x)=-(x+\frac{1600}{x})+180$ 在 $(25,40]$ 是递增，在 $[40,+\infty)$ 上递减，

$x=40$ 时 $f(x)_{\max}=100$，

综上，产量 $x=40$（万件）时，该厂所获利润 $f(x)$ 最大为 100 万元.

21．已知函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1-ax}{x-1}$ 的图象关于原点对称，其中 a 为常数．（1）求 a 的值；

（2）当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)+\log_{\frac{1}{2}}(x-1)<m$ 恒成立，求实数 m 的取值范围；

（3）若关于 x 的方程 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x+k)$ 在 $[2,3]$ 上有解，求 k 的取值范围.

解：（1）由 $f(x)+f(-x)=\log_{\frac{1}{2}}(\frac{1-ax}{x-1}\cdot\frac{1+ax}{-x-1})=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1-a^2x^2}{1-x^2}=1,\therefore a=\pm 1$

当 $a=1$ 时，不合，$\therefore a=-1$

（2）由 $f(x)+\log_{\frac{1}{2}}(x-1)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1+x}{x-1}+\log_{\frac{1}{2}}(x-1)=\log_{\frac{1}{2}}(1+x)<-1(x>1)$

$\therefore m\geq -1$ 即为所求的

（3）$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1+x}{x-1}=\log_{\frac{1}{2}}(x+k)\Leftrightarrow\frac{x+1}{x-1}=x+k>0$ 对 $x\in[2,3]$ 恒成立

$\therefore k=\frac{x+1}{x-1}-x=\frac{2}{x-1}-(x-1)\in[-1,1]$ 即为所求的

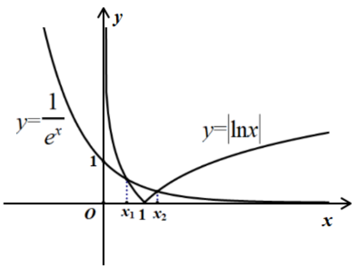
22. 已知定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)=\ln x$.

（1）若方程 $|f(x)|=\frac{1}{e^x}$ 有两个不等的实数根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，比较 x_1x_2 与 1 的大小；

（2）设函数 $g(x)=af^2(x)-f(\frac{x^2}{e^3})(a>0)$，若 $\exists m,n\in R$，使得 $y=g(x)$ 在定义域 $[e^m,e^n]$ 上单调，

且值域为 $[m,n]$，求 a 的取值范围.

解：（1）设 $g(x)=\frac{1}{e^x}=e^{-x}$ 是减函数，如图



$\therefore -\ln x_1=f(x_1)=g(x_1)>g(x_2)=f(x_2)=\ln x_2,\therefore\ln(x_1x_2),0,\therefore x_1x_2<1\cdots 4$ 分

（2）由 $g(x)=a\ln^2x-\ln(\frac{x^2}{e^3})=a\ln^2x-2\ln x+3(a>0)$

令 $t=\ln x\in[m,n]$，则 $p(t)=at^2-2t+3$ 在 $t\in[m,n]$ 上单调，且值域为 $[m,n]\cdots 1$ 分

当 $m<n\leq\frac{1}{a}$ 时，$p(t)$ 递减，$\therefore\begin{cases}am^2-2m+3=n\\an^2-2n+3=m\end{cases}$，$\therefore a(m+n)=1\cdots 1$ 分

$\therefore\begin{cases}am^2-m+3-\frac{1}{a}=0\\an^2-n+3-\frac{1}{a}=0\end{cases}$，$\therefore m,n(m<n\leq\frac{1}{a})$ 是方程 $ax^2-x+3-\frac{1}{a}=0$ 的两根 $\cdots 1$ 分

$\therefore\begin{cases}\frac{1}{a}-\frac{1}{a}+3-\frac{1}{a}\geq 0\\\frac{1}{2a}<\frac{1}{a}\\\Delta=1-4a(3-\frac{1}{a})>0\end{cases}$ 得 $\frac{1}{3}\leq a<\frac{5}{12}\cdots 1$ 分

当$n>m\geq\frac{1}{a}$时，$p(t)$递增，$\therefore\begin{cases}am^2-2m+3=m\\an^2-2n+3=n\end{cases}$，$\therefore m,n(n>m\geq\frac{1}{a})$是方程$ax^2-3x+3=0$的两根$\cdots$2分

$\therefore\begin{cases}\frac{1}{a}-\frac{3}{a}+3\geq 0\\\frac{3}{2a}>\frac{1}{a}\\\Delta=9-12a>0\end{cases}$ 得$\frac{2}{3}\leq a<\frac{3}{4}\cdots$1分.综上：$a$的取值范围为$[\frac{1}{3},\frac{5}{12})\cup[\frac{2}{3},\frac{3}{4})\cdots$1分