2023-24（下）模拟（23）

2024-03-05

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{-1,0,1,e^2\},B=\{x\mid \ln x<2\}$，则 $A\cap(\complement_R B)=$（　　）

A. $\{-1,0,1\}$　　B. $\{0,1,e^2\}$　　C. $\{1\}$　　D. $\{-1,0,e^2\}$

2. 已知 $z=\dfrac{2+i}{2-i}+i$，则 $\overline{z}$ 的虚部为（　　）A. $-\dfrac{9}{5}$　B. $-\dfrac{9}{5}i$　C. $\dfrac{9}{5}$　D. $\dfrac{9}{5}i$

3. 若 $(\sqrt{x}-\dfrac{a}{x})^6$ 的展开式中常数项的系数是 15，则 $a=$（　　）A. 2　B. 1　C. ±1　D. ±2

4. 已知在 $\triangle ABC$ 中，$AB=2,AC=1,\cos A=\dfrac{5}{6}$，则 $BC=$（ ）A. 1　B. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　C. $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　D. $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

5. 椭圆 $C_1: x^2+\dfrac{y^2}{3}=1$ 与双曲线 $C_2:\dfrac{y^2}{a^2}-x^2=1(a>0)$ 的离心率分别为 e_1,e_2，若 $e_1e_2=1$，则双曲线 C_2 的渐近线方程为（　　）A. $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$　B. $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$　C. $y=\pm\sqrt{2}x$　D. $y=\pm\sqrt{3}x$

6. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n=a+2^nb$，设甲：数列 $\{a_n\}$ 为等比数列；乙：$a+b=0$，则甲是乙的（ ）

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件　C. 充要条件　D. 既不充分又不必要条件

7. 圆 $C_1: x^2+y^2+8x-2y+9=0$ 和圆 $C_2: x^2+y^2+6x-4y+11=0$ 的公切线方程是（　　）

A. $y=-x+1$　B. $y=-x+1$ 或 $y=x+5$　C. $y=-x+5$　D. $y=x+1$ 或 $y=2x+5$

8. 若 $\tan\theta=3\tan\alpha,\sin(\theta+\alpha)=\dfrac{2}{3}$，则 $\cos2(\theta-\alpha)=$（　　）A. $\dfrac{2}{9}$　B. $-\dfrac{1}{9}$　C. $\dfrac{7}{9}$　D. $\dfrac{1}{9}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 已知一组样本数据 $x_i(i=1,2,3,\cdots,30)$ 满足 $0<x_1\le x_2\le x_3\le\cdots\le x_{30}$，下列说法正确的是（　　）

A. 样本数据的第 80 百分位数为 x_{24}　B. 样本数据的方差 $s^2=\dfrac{1}{30}\sum_{i=1}^{30}x_i^2-16$，则这组样本数据的总和等于 120

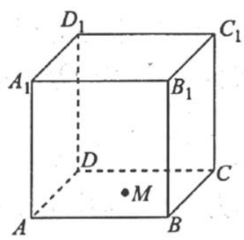
C. 若样本平均数恰是该组数据中的一个数，去掉这个数，则样本数据的方差不变

D. 若数据的频率分布直方图为单峰不对称，且在右边"拖尾"，则样本数据的平均数大于中位数

10. 函数 $f(x)$ 满足：对任意实数 x,y 都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)-2$，且当 $x>0$ 时，$f(x)>2$，则（　　）

A. $f(0)=2$　B. $f(x)$ 关于 $(0,2)$ 对称　C. $f(-2024)+f(2024)=4$　D. $f(x)$　减函数

11. 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M 为平面 $ABCD$ 所在平面内一动点，则（　　）



A. 若 M 在线段 AB 上，则 D_1M+MC 的最小值为 $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$

B. 过 M 点在平面 ABCD 内一定可以作无数条直线与 D_1M 垂直

C. 若平面 $\alpha\perp D_1M$，则平面 α 截正方体的截面的形状可能是正六边形

D. 若 C_1M 与 AB 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$，则点 M 的轨迹为双曲线

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知函数 $f(x)=\sin 4x+a\cos 4x$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{16}$ 对称，则实数 $a=$____________.

13. 已知函数 $f(x)=\frac{x^2}{2}-x-12\ln x$ 与 $y=3x+a(a\in R)$ 相切，则 $a=$____________.

14. 抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 与椭圆 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{4}=1(m>0)$ 有相同的焦点，F_1,F_2 分别是椭圆的上、下焦点，P 是椭圆上的任一点，I 是 $\triangle PF_1F_2$ 的内心，PI 交 y 轴于 M，且 $\overrightarrow{PI}=2\overrightarrow{IM}$，点 $(x_n,y_n)(n\in N^*)$ 是抛物线上在第一象限的点，且在该点处的切线与 x 轴的交点为 $(x_{n+1},0)$，若 $x_2=8$，则 $x_{2024}=$____________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15. 某小区在 2024 年的元旦举办了联欢会，现场来了 1000 位居民．联欢会临近结束时，物业公司从现场随机抽取了 20 位幸运居民进入摸奖环节，这 20 位幸运居民的年龄用随机变量 X 表示，且 $X\sim N(45,225)$.

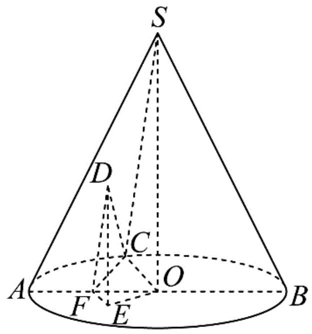
（1）请你估计现场年龄不低于 60 岁的人数（四舍五入取整数）;

（2）奖品分为一等奖和二等奖，已知每个人摸到一等奖的概率为 40%，摸到二等奖的概率为 60%，每个人摸奖相互独立，设恰好有 $n(0\le n\le 20)$ 个人摸到一等奖的概率为 $P(n)$，求当 $P(n)$ 取得最大值时 n 的值.

附：若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P\{|X-\mu|<\sigma\}=0.6827, P\{|X-\mu|<2\sigma\}=0.9545$.

16. 如图，在圆锥SO中，若轴截面SAB是正三角形，C为底面圆周上一点，F为线段OA上一点，D（不与S重合）为母线上一点，过D作DE垂直底面于E，连接OE,EF,DF,CF,CD，且$\angle COF=\angle EFO$.

（1）求证：平面SCO//平面DEF;（2）若$\triangle EFO$为正三角形，且F为AO的中点，求平面CDF与平面DEF夹角的余弦值.

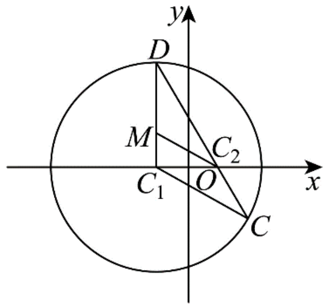


17. 已知$f(x)=\ln x+\frac{1}{2}x^2-ax(a\in R)$.（1）若$f(x)\le\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2x}$在$[1,+\infty)$恒成立，求$a$的范围;

（2）若$f(x)$有两个极值点s，t，求$f(t)+f(s)$的取值范围.

18. 已知圆 $C_1: x^2+y^2+2\sqrt{2}x-14=0$，与 x 轴不重合的直线 l 过点 $C_2(\sqrt{2},0)$，且与圆 C_1 交于 C、D 两点，过点 C_2 作 CC_1 的平行线交线段 C_1D 于点 M.（1）判断 $|MC_1|+|MC_2|$ 与圆 C_1 的半径的大小关系，求点 M 的轨迹 E 的方程；

（2）已知点 $P(\sqrt{2},1),Q(\sqrt{2},-1)$，直线 m 过点 $F(0,-1)$，与曲线 E 交于两点 N、R（点 N、R 位于直线 PQ 异侧），求四边形 $PRQN$ 的面积的取值范围.



19. 在无穷数列 $\{a_n\}$ 中，令 $T_n=a_1a_2\cdots a_n$，若 $\forall n\in N^*$，$T_n\in\{a_n\}$，则称 $\{a_n\}$ 对前 n 项之积是封闭的.

（1）试判断：任意一个无穷等差数列 $\{a_n\}$ 对前 n 项之积是否是封闭　？

（2）设 $\{a_n\}$ 是无穷等比数列，其首项 $a_1=2$，公比为 q. 若 $\{a_n\}$ 对前 n 项之积是封闭的，求出 q 的两个值；

（3）证明：对任意的无穷等比数列 $\{a_n\}$，总存在两个无穷数列 $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$，使得 $a_n=b_n\cdot c_n(n\in N^*)$，其中 $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 对前 n 项之积都是封闭的.

2023-24（下）模拟（23）

2024-03-05

解答

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合 $A=\{-1,0,1,e^2\},B=\{x\mid \ln x<2\}$，则 $A\cap(\complement_R B)=$（ D ）

A. $\{-1,0,1\}$　　B. $\{0,1,e^2\}$　　C. $\{1\}$　　D. $\{-1,0,e^2\}$

2. 已知 $z=\dfrac{2+i}{2-i}+i$，则 $\overline{x}$ 的虚部为（ A ）A. $-\dfrac{9}{5}$　B. $-\dfrac{9}{5}i$ C. $\dfrac{9}{5}$　D. $\dfrac{9}{5}i$

3. 若 $(\sqrt{x}-\dfrac{a}{x})^6$ 的展开式中常数项的系数是 15，则 $a=$（ C ）A. 2　B. 1　C. ±1　D. ±2

4. 已知在 $\triangle ABC$ 中，$AB=2,AC=1,\cos A=\dfrac{5}{6}$，则 $BC=$（ D）A. 1　B. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　C. $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　D. $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

5. 椭圆 $C_1:x^2+\dfrac{y^2}{3}=1$ 与双曲线 $C_2:\dfrac{y^2}{a^2}-x^2=1(a>0)$ 的离心率分别为 e_1,e_2，若 $e_1e_2=1$，则双曲线 C_2 的渐近线方程为（ C ）A. $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$　B. $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$　C. $y=\pm\sqrt{2}x$　D. $y=\pm\sqrt{3}x$

6. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n=a+2^nb$，设甲：数列 $\{a_n\}$ 为等比数列；乙：$a+b=0$，则甲是乙的（A ）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件　　C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

$$key:S_n=a+2^nb\Leftrightarrow a_n=\begin{cases}a+2b,n=1,\\ b\cdot2^{n-1},n\ge2,\end{cases}$$

$甲\Rightarrow a_1=a+2b=b\cdot2^{1-1}即a+b=0即乙$

$乙\Rightarrow 若a=b=0,则a_1=S_1=0,\therefore\{a_n\}不是等比数列$

7. 圆 $C_1:x^2+y^2+8x-2y+9=0$ 和圆 $C_2:x^2+y^2+6x-4y+11=0$ 的公切线方程是（ A ）

A. $y=-x+1$　B. $y=-x+1$ 或 $y=x+5$　C. $y=-x+5$　D. $y=x+1$ 或 $y=2x+5$

8. 若 $\tan\theta=3\tan\alpha,\sin(\theta+\alpha)=\dfrac{2}{3}$，则 $\cos2(\theta-\alpha)=$（ C ）A. $\dfrac{2}{9}$　B. $-\dfrac{1}{9}$　C. $\dfrac{7}{9}$　D. $\dfrac{1}{9}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 已知一组样本数据 $x_i(i=1,2,3,\cdots,30)$ 满足 $0<x_1\le x_2\le x_3\le\cdots\le x_{30}$，下列说法正确的是（ BD ）

A. 样本数据的第 80 百分位数为 x_{24}　B. 样本数据的方差 $s^2=\dfrac{1}{30}\sum\limits_{i=1}^{30}x_i^2-16$，则这组样本数据的总和等于 120

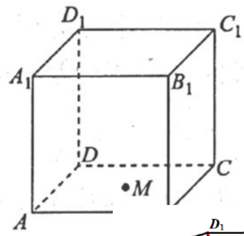
C. 若样本平均数恰是该组数据中的一个数，去掉这个数，则样本数据的方差不变

D. 若数据的频率分布直方图为单峰不对称，且在右边“拖尾”，则样本数据的平均数大于中位数

10. 函数 $f(x)$ 满足：对任意实数 x,y 都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)-2$，且当 $x>0$ 时，$f(x)>2$，则（ABC ）

A. $f(0)=2$　B. $f(x)$ 关于 $(0,2)$ 对称　C. $f(-2024)+f(2024)=4$　D. $f(x)$　减函数

11. 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M 为平面 $ABCD$ 所在平面内一动点，则（ ACD ）

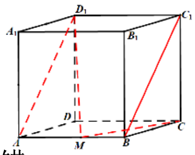


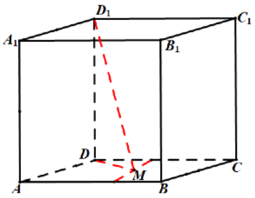
A. 若 M 在线段 AB 上，则 D_1M+MC 的最小值为 $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$

B. 过 M 点在平面 $ABCD$ 内一定可以作无数条直线与 D_1M 垂直

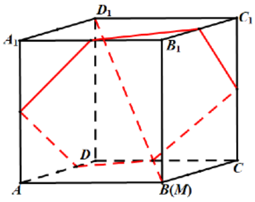
C. 若平面 $\alpha\perp D_1M$，则平面 α 截正方体的截面的形状可能是正六边形

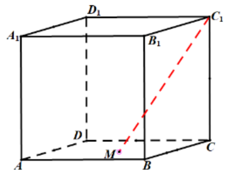
D. 若 C_1M 与 AB 所成的角为 $\dfrac{\pi}{4}$，则点 M 的轨迹为双曲线





$key:A:$如图，$DM_1+MC\geq\sqrt{(1+\sqrt{2})^2+1}, A$对；
$B:$当$M=D$时，有无数条；当$M\neq D$时，由三垂线定理只有1条，B错；
$C:$如图，C对；
$D:<\overrightarrow{C_1M},\overrightarrow{AB}>=<\overrightarrow{C_1M},\overrightarrow{C_1D_1}>=\dfrac{\pi}{4},\therefore C_1M$的轨迹为圆锥面，
而平面$ABCD$ / /圆锥面的轴$C_1D_1,\therefore D$对





三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知函数 $f(x)=\sin 4x+a\cos 4x$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{16}$ 对称，则实数 $a=$____________. 1

13. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-x-12\ln x$ 与 $y=3x+a(a\in R)$ 相切，则 $a=$____________. $-6-12\ln 6$

14. 抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 与椭圆 $\dfrac{x^2}{m}+\dfrac{y^2}{4}=1(m>0)$ 有相同的焦点，F_1,F_2 分别是椭圆的上、下焦点，P 是椭圆上的任一点，I 是 $\triangle PF_1F_2$ 的内心，PI 交 y 轴于 M，且 $\overrightarrow{PI}=2\overrightarrow{IM}$，点 $(x_n,y_n)(n\in N^*)$ 是抛物线上在第一象限的点，且在该点处的切线与 x 轴的交点为 $(x_{n+1},0)$，若 $x_2=8$，则 $x_{2024}=$____________. 2^{-2019}

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15. 某小区在 2024 年的元旦举办了联欢会，现场来了 1000 位居民. 联欢会临近结束时，物业公司从现场随机抽取了 20 位幸运居民进入摸奖环节，这 20 位幸运居民的年龄用随机变量 X 表示，且 $X\sim N(45,225)$.

（1）请你估计现场年龄不低于 60 岁的人数（四舍五入取整数）；

（2）奖品分为一等奖和二等奖，已知每个人摸到一等奖的概率为 40%，摸到二等奖的概率为 60%，每个人摸奖相互独立，设恰好有 $n(0\leq n\leq 20)$ 个人摸到一等奖的概率为 $P(n)$，求当 $P(n)$ 取得最大值时 n 的值.

附：若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P\{|X-\mu|<\sigma\}=0.6827, P\{|X-\mu|<2\sigma\}=0.9545$.

【小问 1 详解】因为 $X\sim N(45,225)$，所以 $\sigma=15$，

则 $P(X\geq 60)=P(X\geq\mu+\sigma)=\dfrac{1-0.6827}{2}=0.15865$，

所以现场年龄不低于 60 岁的人数大约为 $1000\times 0.15865\approx 159$ (人).

【小问 2 详解】

依题意可得，$P(n)=C_{20}^{n}0.4^{n}\times 0.6^{20-n}$，

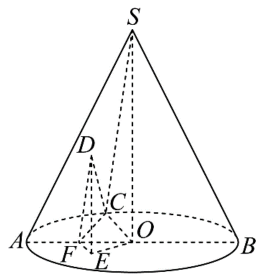
设$\begin{cases}P(n)\ge P(n+1)\\P(n)\ge P(n-1)\end{cases}$，所以$\begin{cases}C_{20}^{n}0.4^{n}\times0.6^{20-n}\ge C_{20}^{n+1}0.4^{n+1}\times0.6^{19-n}\\C_{20}^{n}0.4^{n}\times0.6^{20-n}\ge C_{20}^{n-1}0.4^{n-1}\times0.6^{21-n}\end{cases}$，

所以$\begin{cases}\dfrac{20-n}{n+1}\cdot\dfrac{0.4}{0.6}\le1,\\\dfrac{21-n}{n}\cdot\dfrac{0.4}{0.6}\ge1,\end{cases}$所以$\dfrac{37}{5}\le n\le\dfrac{42}{5}$，因$n$为整数，所以$n=8$，

所以当$P(n)$取得最大值时n的值为8.

16. 如图，在圆锥SO中，若轴截面SAB是正三角形，C为底面圆周上一点，F为线段OA上一点，D（不与S重合）为母线上一点，过D作DE垂直底面于E，连接OE,EF,DF,CF,CD，且$\angle COF=\angle EFO$.

（1）求证：平面SCO//平面DEF;（2）若$\triangle EFO$为正三角形，且F为AO的中点，求平面CDF与平面DEF夹角的余弦值.



【小问1详解】因为$\angle COF=\angle EFO$，所以$EF\ /\!/\ CO$，

因为$EF\not\subset$平面SCO，$CO\subset$平面SCO，所以EF//平面SCO，

因为DE垂直底面于E，SO垂直底面于O，所以$DE\ /\!/\ SO$，同理DE//平面SCO，

因为$DE\cap EF=E$，且EF//平面SCO，DE//平面SCO，所以平面SCO//平面DEF.

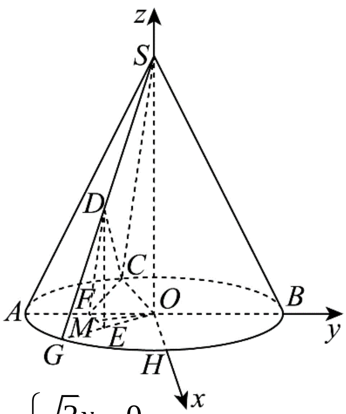
【小问2详解】不妨设圆锥的底面半径为2，因为轴截面SAB是正三角形，所以$SO=2\sqrt{3}$，

如图，设平面$SDEO$与底面圆周交于G，

因为$\triangle EFO$为正三角形，且F为AO的中点，所以$OF=FE=EO=1$，所以E为OG的中点，

所以DE为$\triangle SOG$的中位线，所以$DE=\dfrac{1}{2}SO=\sqrt{3}$，

如图，在底面圆周上取一点H，使得$OH\perp OB$，以直线OH,OB,OS为x，y，z轴建立空间坐标系，



由已知得，$C(-\sqrt{3},-1,0),D\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2},\sqrt{3}\right)$，$E\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2},0\right),F(0,-1,0)$，

设EF的中点为M，则平面DEF的法向量为$\vec{n}_1=\overrightarrow{OM}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4},-\dfrac{3}{4},0\right)$，

所以$\overrightarrow{CF}=\left(\sqrt{3},0,0\right)$，$\overrightarrow{CD}=\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},\sqrt{3}\right)$

设平面CDF的一个法向量为$\vec{n}_2=(x,y,z)$，所以$\begin{cases}\vec{n}_2\perp\overrightarrow{CF}\\\vec{n}_2\perp\overrightarrow{CD}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{n}_2\cdot\overrightarrow{CF}=0\\\vec{n}_2\cdot\overrightarrow{CD}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{3}x=0,\\\dfrac{3\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{1}{2}y+\sqrt{3}z=0\end{cases}$，

$x=0$，令 $y=2$，则 $z=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\vec{n}_2=\left(0,2,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，

所以平面 CDF 与平面 DEF 夹角的余弦值为 $\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$．

17. 已知 $f(x)=\ln x+\frac{1}{2}x^2-ax(a\in R)$．（1）若 $f(x)\le\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2x}$ 在 $[1,+\infty)$ 恒成立，求 a 的范围；

（2）若 $f(x)$ 有两个极值点 s，t，求 $f(t)+f(s)$ 的取值范围.

解：（1）由$f(x)\le\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2x}(x\ge1)\Leftrightarrow a\ge\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{2x^2}$记为$g(x)$,

则$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}-\frac{1}{x^3}>0\Leftrightarrow 0<1-\ln x-\frac{1}{x}$记为$h(x)$

则$h'(x)=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{1-x}{x^2}\le0,\therefore h(x)_{\max}=h(1)=0,\therefore g'(x)\le0,\therefore g(x)_{\max}=g(1)=\frac{1}{2},\therefore a\ge\frac{1}{2}$

（2）由$f'(x)=\frac{1}{x}+x-a=0$有两相异解$s,t(s,t>0)$，则$a>2$, 且$\begin{cases}s+t=a\\ st=1\end{cases}$

$\therefore f(t)+f(s)=\ln st+\frac{1}{2}(s^2+t^2)-a(s+t)=\frac{1}{2}a^2-1-a^2=-\frac{1}{2}a^2-1\in(-\infty,-3)$即为所求的

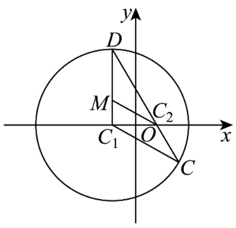
18. 已知圆 $C_1:x^2+y^2+2\sqrt{2}x-14=0$，与 x 轴不重合的直线 l 过点 $C_2(\sqrt{2},0)$，且与圆 C_1 交于 C、D 两点，过点 C_2 作 CC_1 的平行线交线段 C_1D 于点 M.（1）判断 $|MC_1|+|MC_2|$ 与圆 C_1 的半径的大小关系，求点 M 的轨迹 E 的方程；

（2）已知点 $P(\sqrt{2},1),Q(\sqrt{2},-1)$，直线 m 过点 $F(0,-1)$，与曲线 E 交于两点 N、R（点 N、R 位于直线 PQ 异侧），求四边形 $PRQN$ 的面积的取值范围.

解：（1）由圆$C_1:(x+\sqrt{2})^2+y^2=16$的圆心$C_1(-\sqrt{2},0)$, 半径$r_1=4$,

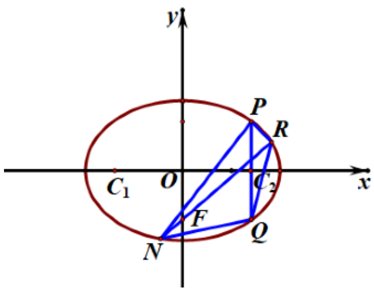
$\because|C_1C|=|C_1D|=4, MC_2//C_1C,\therefore|MC_2|=|MD|,\therefore|MC_2|+|MC_1|$与圆$C_1$的半径相等，

$\therefore M$的轨迹方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1(y\ne0)$



（2）由题意设$l_{NR}:y=kx-1(0<k<\sqrt{2}$，且$k\ne\frac{1}{2})$代入$E$方程得$:(1+2k^2)x^2-4kx-2=0$

$\therefore\begin{cases}x_R+x_N=\frac{4k}{1+2k^2}\\ x_Rx_N=\frac{-2}{1+2k^2}\end{cases}$, 且$\Delta=8(4k^2+1)$,



$\therefore S_{PRQN}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot\frac{2\sqrt{2}\sqrt{4k^2+1}}{2k^2+1}=\frac{4\sqrt{2}}{t+\frac{1}{t}}(t=\sqrt{4k^2+1}\in(1,\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},3))$

$\in(\frac{6\sqrt{2}}{5},\frac{8}{3})\cup(\frac{8}{3},2\sqrt{2})$即为所求的

19. 在无穷数列$\{a_n\}$中，令$T_n=a_1a_2\cdots a_n$，若$\forall n\in N^*$，$T_n\in\{a_n\}$，则称$\{a_n\}$对前 n 项之积是封闭的.

（1）试判断：任意一个无穷等差数列$\{a_n\}$对前 n 项之积是否是封闭 ？

（2）设$\{a_n\}$是无穷等比数列，其首项$a_1=2$，公比为 q．若$\{a_n\}$对前 n 项之积是封闭的，求出 q 的两个值；

（3）证明：对任意的无穷等比数列$\{a_n\}$，总存在两个无穷数列$\{b_n\}$和$\{c_n\}$，使得$a_n=b_n\cdot c_n(n\in N^*)$，其中$\{b_n\}$和$\{c_n\}$对前 n 项之积都是封闭的.

(1) 解：$\because\{a_n\}$是等差数列，则$a_n=pn+q$(p,q为常数)，取$p=q=\sqrt{2}$，则$a_n=(n+1)\sqrt{2}$，
$\therefore T_2=a_1a_2=(\sqrt{2}+\sqrt{2})(2\sqrt{2}+\sqrt{2})=12\notin\{a_n\}$，$\therefore$ 任意一个无穷等差数列$\{a_n\}$对前n项之积不封闭.

(2) 解：由已知得$a_n=2q^{n-1}$，
则$T_n=2^n\cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}=2q^m\Leftrightarrow 2^{n-1}\cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}-m}=1$对任意$n\in N^*$，存在$m\in N^*$成立
$\therefore q=2^r(r\in Z,r\neq 0)$，$\therefore q$的两个值为2与$\frac{1}{2}$

(3) 证明：设$a_n=p\cdot q^n(pq\neq 0)$，$b_n=p_b\cdot {q_b}^n$，$c_n=p_c\cdot {q_c}^n$(其中$p_bp_c=p$，且$q_bq_c=q$)
由$\{b_n\}$对前n项之积是封闭的得：存在$m\in N^*$，使得$p_b^n\cdot q_b^{\frac{n(n-1)}{2}}=p_b\cdot q_b^m$即$p_b^{n-1}\cdot q_b^{\frac{n(n-1)}{2}-m}=1$对$n\in N^*$恒成立
$\therefore q_b=p_b^{r_1}(r_1\in Z,r_1\neq 0)$，同理$q_c=p_c^{r_2}(r_2\in Z,r_2\neq 0)$
$\therefore\begin{cases}p=p_bp_c\\ q=q_bq_c=p_b^{r_1}\cdot p_c^{r_2}\end{cases}$，只要$r_1,r_2$取适当的整数，$p_b,p_c$有解，证毕

【小问 3 详解】解：对任意的无穷等比数列$\{a_n\}$，$a_n=a_1q^{n-1}=a_1^n\cdot\left(\frac{q}{a_1}\right)^{n-1}$，

令$b_n=a_1^n$，$c_n=\left(\frac{q}{a_1}\right)^{n-1}$，则$a_n=b_n\cdot c_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，

下面证明：$\{b_n\}$是对前n项之积是封闭的.

因为$b_n=a_1^n$，所以$T_n=a_1^{1+2+\cdots+n}=a_1^{\frac{n(n+1)}{2}}$，

取正整数$m=\frac{n(n+1)}{2}$得，$T_n=b_m$，

所以$\{b_n\}$对前n项之积是封闭的，

同理证明：$\{c_n\}$也对前n项之积是封闭　，

所以对任意的无穷等比数列$\{a_n\}$，总存在两个无穷数列$\{b_n\}$和$\{c_n\}$，

使得$a_n=b_n\cdot c_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，其中$\{b_n\}$和$\{c_n\}$对前$n$项之积都是封闭的.