数列（2）数列概念及性质解答（1）

2024-03-16

一、数列概念及性质

1.数列的定义：按一定次序排成的一列数叫做数列，即$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，简记为数列$\{a_n\}$.
其中，a_1称为数列的首项，a_n称为数列的通项，数列也可以看成正整数集N^*或它的有限子集$\{1,2,\cdots,n\}$为定义域的函数,即$a_n=f(n)$.

2.数列的分类：①按项数分类$\begin{cases}\text{有穷数列：项数有限；}\\ \text{无穷数列：项数无限.}\end{cases}$

按项的增减性分类$\begin{cases}\text{递增数列：}\forall n\in N^*,a_{n+1}>a_n,\\ \text{递减数列：}\forall n\in N^*,a_{n+1}<a_n,\\ \text{摆动数列：相邻项大小关系不同；}\\ \text{常数列：项的值相同;}\\ \text{周期数列：}a_{n+k}=a_n(\exists k\in N^*,\forall n\in N^*)\end{cases}$

3.数列的表示法$\begin{cases}\text{列举法：}a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\\ \text{图象法：一系列孤立点组成}\\ \text{解析法：}\begin{cases}\text{通项公式：}a_n=f(n)\\ \text{递推关系：}a_n=f(a_{n-1}),a_1=a\end{cases}\end{cases}$

4.数列的前n之和叫做前n项和，常用S_n表示,a_n与S_n关系:$a_n=\begin{cases}S_1,n=1,\\ S_n-S_{n-1},n\geq 2.\end{cases}$

(1991A）将正奇数集合$\{1,3,5,\cdots\}$由小到大按第n组有$2n-1$个奇数进行分组:$\underset{\text{第一组}}{\{1\}},\underset{\text{第二组}}{\{3,5,7\}},\underset{\text{第三组}}{\{9,11,13,15,17\}},\cdots$,

则1991位于第______组.

$1991Akey$:$1+3+\cdots+(2n-1)=n^2<996\leq(n+1)^2,\therefore n=22$

（2010浙江）设数列$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{1},\frac{1}{3},\frac{2}{2},\frac{3}{1},\cdots,\frac{1}{k},\frac{2}{k-1},\cdots,\frac{k}{1},\cdots$.则这个数列的第2010项的值为____；
在这个数列中，第2010个值为1的项的序号为__________.

2010浙江key:(Ⅰ)$1+2+\cdots+k-1<2010\leq 1+2+\cdots+k-1+k$

即$\frac{k(k-1)}{2}<2010\leq\frac{k(k+1)}{2}$得$\frac{-1+\sqrt{16081}}{2}\leq k<\frac{1+\sqrt{16081}}{2}$得$k=63$

$\therefore$第2010项是第63组（前62组共由1953个数）第57个数，其值为$\frac{57}{7}$,

(Ⅱ)$\frac{1}{1},\frac{2}{2},\frac{3}{3},\frac{4}{4},\cdots,\frac{2010}{2010}$在第4019组的第2010项，故2010的序号为:$\frac{4018\cdot 4019}{2}+2010=8076181$

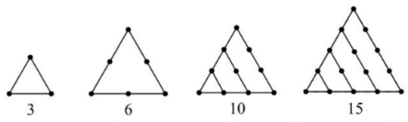
变式 1：$1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,5,\cdots$的一个通项公式为__________.

key:设$a_n=k$,则$\frac{k(k-1)}{2}<n\leq\frac{k(k+1)}{2}$即$\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\leq k<\frac{1+\sqrt{8n+1}}{2}$即$-\frac{1}{2}+\sqrt{2n+\frac{1}{4}}\leq k<\frac{1}{2}+\sqrt{2n+\frac{1}{4}}$,

$\therefore a_n=Roundup(\sqrt{2n+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2})=\left\lceil\sqrt{2n+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right\rceil$

2024-03-16

(2019吉林）我们把3, 6, 10, 15, ⋯ 这些数叫做三角形数，因为这些数目的点可以排除一个正三角形，如下图所示，则第19个三角形数是 ______.



2019吉林: $1+2+3+\cdots+20=210$

（2007 江西）设正整数数列$\{a_n\}$满足: $a_2=4, \forall n\in N^*$, 有$2+\dfrac{1}{a_{n+1}}<\dfrac{\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_{n+1}}}{\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}}<2+\dfrac{1}{a_n}$. 则$a_n=$ ______.

2007江西（1）由$2+\dfrac{1}{4}<\dfrac{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{4}}{1-\dfrac{1}{2}}<2+\dfrac{1}{a_1}$即$\dfrac{2}{3}<a_1<\dfrac{8}{6}$, 且$a_1\in N^*$得$a_1=1$

（2）由$2+\dfrac{1}{a_3}<\dfrac{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{a_3}}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}}<2+\dfrac{1}{4}$即$8<a_3<10$, 且$a_3\in N^*$得$a_3=9$, 由此猜想$a_n=n^2, n\in N^*$,

下面用数学归纳法证明：①当$n=1$时，$a_1=1=1^2$, 猜想成立; 当$n=2$时，$a_2=4=2^2$, 猜想也成立；

②假设当$n=k(k\ge 2)$时，猜想成立，即$a_k=k^2$, 那么

$$2+\frac{1}{a_{k+1}}<\frac{\dfrac{1}{k^2}+\dfrac{1}{a_{k+1}}}{\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}}<2+\frac{1}{k^2}\text{即}2+\frac{1}{a_{k+1}}<\frac{k+1}{k}+\frac{k(k+1)}{a_{k+1}}<2+\frac{1}{k^2}\text{即}\frac{k-1}{k(k^2+k-1)}<\frac{1}{a_{k+1}}<\frac{k^2-k+1}{k^3(k+1)}$$

即$k^2+2k+1-\dfrac{k-1}{k^2-k+1}=\dfrac{k^4+k^3}{k^2-k+1}<a_{k+1}<\dfrac{k^3+k^2-k}{k-1}=k^2+2k+1+\dfrac{1}{k-1}$（综合除法),

$\because k\ge 2, \therefore 0<\dfrac{k-1}{k^2-k+1}<\dfrac{1}{k}\le\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{k-1}\in(0,1]$,

而$a_{k+1}\in N^*, \therefore a_{k+1}=(k+1)^2$，即当$n=k+1$时，猜想也成立. 由①②可知，猜想都成立, $\therefore a_n=n^2, n\in N^*$

(2009北京)14.已知数列$\{a_n\}$满足: $a_{4n-3}=1, a_{4n-1}=0, a_{2n}=a_n, n\in N^*$，则$a_{2009}=$ ______；$a_{2014}=$ ______.

(2009北京）$key: a_{2009}=a_{4\times 503-3}=1, a_{2014}=a_{1007}=a_{1008-1}=0$

（202001）设数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{2n}=a_{2n-1}+2, a_{2n+1}=a_{2n}-1, n\in N^*$，则满足$|a_n-n|\le 4$ n的最大值

是（ C ）A. 7 B. 9 C. 12 D. 14

202101学考$key: a_{2n+1}=a_{2n-1}+1, a_1=1, \therefore a_{2n-1}=n, a_{2n}=n+2$

$key1$: 当$n=2k$时, $|a_n-n|=|a_{2k}-2k|=|2-k|\le 4$得$k\le 6, \therefore n\le 12$

当$n=2k-1$时, $|a_n-n|=|a_{2k-1}-(2k-1)|=k-1\le 4$得$k\le 5, \therefore n\le 9$

$$key2: \because a_n=\begin{cases}\dfrac{n+1}{2}, n\text{为奇数}\\ \dfrac{n}{2}+2, n\text{为偶数}\end{cases}=\frac{1-(-1)^n}{2}\cdot\frac{n+1}{2}+\frac{1+(-1)^n}{2}\cdot\left(\frac{n}{2}+2\right)=\frac{2n+5}{4}+\frac{3}{4}(-1)^n$$

2024-03-16

$\therefore |a_n-4|\le 4 \Leftrightarrow \left|\dfrac{2n-11}{4}+\dfrac{3}{4}(-1)^n\right|\le 4 \therefore n\le 12$

（2021浙江）设$a_0=0, a_1=a_2=1, a_{3n}=a_n, a_{3n+1}=a_{3n+2}=a_n+1(n\in N^*)$, 则$a_{2021}=$____.

（2021浙江）（归纳递推）$a_{2021}=a_{3\times673+2}=a_{673}+1=a_{3\times224+1}+2=a_{224}+2$
$=a_{3\times74+2}+2=a_{74}+3=a_{3\times24+2}+3=a_{24}+4=a_8+4=a_2+5=6$

（2010湖南）15.数列$\{a_n\}$满足：对任意的$n\in N^*$, 只有有限个正整数m使得$a_m<n$成立，记这样的m的个数为$(a_n)^*$，则得到一个行数列$\{(a_n)^*\}$.例如，若数列$\{a_n\}$是$1,2,3,\cdots,n,\cdots$, 则数列$\{(a_n)^*\}$是$0,1,2,\cdots,n-1,\cdots$.
已知对任意的$n\in N^*, a_n=n^2$, 则$(a_5)^*=$____, $((a_n)^*)^*=$______.

2010湖南key: 由$a_m=m^2<5$得$m<\sqrt{5}, \therefore (a_5)^*=2, \therefore \{(a_n)^*\}: 0, \underset{2^2-1^2个1}{1,1,1}, \underbrace{2,\cdots,2}_{3^2-2^2个2}, \underset{4^2-3^2个3}{3,\cdots3}, 4,\cdots, \therefore ((a_n)^*)^*=n^2$

（2012江西）观察下列各式: $a+b=1, a^2+b^2=3, a^3+b^3=4, a^4+b^4=7, a^5+b^5=11,\cdots$, 则$a^{10}+b^{10}=$（　）
$A.58$　$B.88$　$C.123$　$D.176$

2012江西key: $a_n=a^n+b^n=a(a^{n-1}+b^{n-1})-ab^{n-1}-ba^{n-1}+ba^{n-1}+b^n$
$=aa_{n-1}-ab\cdot a_{n-2}+ba_{n-1}=a_{n-1}-\dfrac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{2}a_{n-2}=a_{n-1}+a_{n-2}, \therefore a_{10}=123$, 选$C$

（2016III）12.定义“规范01数列”$\{a_n\}$如下: $\{a_n\}$共有$2m$项，其中m项为0, m项为1，且对任意$k\le 2m, a_1, a_2,\cdots a_k$中0的个数不少于1的个数.若$m=4$，则不同的“规范01数列”共有（ ）$A.18$个　$B.16$个　$C.14$个　$D.12$个

$$key1: 0\begin{cases} 0\begin{cases} 0\begin{cases} 0\to1\to1\to1\to1 \\ 1\begin{cases} 0\to1\to1\to1 \\ 1\begin{cases} 0\to1\to1 \\ 1\to0\to1 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \\ 1\begin{cases} 0\begin{cases} 0\to1\to1\to1 \\ 1\begin{cases} 0\to1\to1 \\ 1\to0\to1 \end{cases} \end{cases} \\ 1\to0\begin{cases} 0\to1\to1 \\ 1\to0\to1 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \\ 1\to0\begin{cases} 0\begin{cases} 0\to1\to1\to1 \\ 1\to0\to1\to1 \end{cases} \\ 1\to0\begin{cases} \begin{cases} 0\to1\to1 \\ 1\to0\to1 \end{cases} \\ 1\to0\to1 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

2016III$key2$: $a_4=\boxed{0}\boxed{1}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}a_3+\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}1+\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}3$
$+\boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}3+\boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}a_2=a_3+a_2+7=14$
$a_3=\boxed{0}\boxed{1}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}a_2+\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{}\boxed{}\boxed{}1+\boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{}\boxed{}\boxed{}2=a_2+3=5$
$a_2=\boxed{0}\boxed{1}\boxed{}\boxed{}1+\boxed{0}\boxed{0}\boxed{}\boxed{}1=2$

（2017Ⅰ）12.几位大学生响应国家的创业号召，开发了一款应用软件.为激发大家学习数学的兴趣，他们推出了“解数学题获取软件激活码”的活动.这款软件的激活码为下面数学问题的答案：已知数列$1,1,2,1,2,4,1,2,4,8,1,2,4,8,16,\cdots$, 其中第一项是$2^0$, 接下来的两项是$2^0, 2^1$, 再接下来的三项是$2^0, 2^1, 2^2$, 依此类推求满足如下条件的最小整数$N$: $N>100$且该数列的前N项和为2的整数幂.那么该款软件的激活码是（ ）
$A.440$　$B.330$　$C.220$　$D.110$

2017Ⅰ key: $2^0,(2^0,2^1),(2^0,2^1,2^2),(2^0,2^1,2^2,2^3),(2^0,2^1,2^2,2^3,2^4),\cdots$

由$2^0+(2^0+2^1)+\cdots+(2^0+2^1+\cdots+2^{k-1})=\dfrac{1-2^1}{1-2}+\dfrac{1-2^2}{1-2}+\cdots+\dfrac{1-2^k}{1-2}=2^{k+1}-k-2$

数列（2）数列概念及性质解答（1）

2024-03-16

$2^0+2^1+\cdots+2^{m-1}=2^m-1=k+2$即$k=2^m-3$，$N=\dfrac{(2^m-3)(2^m-2)}{2}+m$

当$m=4$时，$N=91+4=95<100$，不合；当$m=5$时，$N=\dfrac{30\times 29}{2}+5=440$, 选$A$

（2020吉林）数学家斐波那契在研究兔子繁殖时发现有这样一列数:$1,1,2,3,5,8,13,\cdots$.该数列的特点是:前两个数均为1，从第三个数起，每一个数均等于它前两个数的和.把这样的一列数组成的数列$\{a_n\}$称为“斐波那契数列”.则$(a_1a_3+a_2a_4+a_3a_5+\cdots+a_{2019}a_{2020})-(a_2^2+a_3^2+a_4^2+\cdots+a_{2020}^2)=$__________.

2020吉林：$a_1=a_2=1, a_{n+2}=a_{n+1}+a_n, a_na_{n+2}-a_{n+1}^2=a_n(a_{n+1}+a_n)-a_{n+1}^2=a_n^2+a_na_{n+1}-a_{n+1}^2=a_n^2-a_{n+1}a_{n-1}$

而$a_1a_3-a_2^2=1, \therefore a_2a_4-a_3^2=-1, \therefore$ 原式$=1$

变式1（1）key:由$a_{m+1}=2p-1(p\in N^*)$得$a_{m+2}=3a_{m+1}+5=6p+2$为偶数

$\therefore a_{m+3}=\dfrac{6p+2}{2^k}=p$即$2^k=3+\dfrac{5}{p}=4, or, 8, \therefore p=1$或5

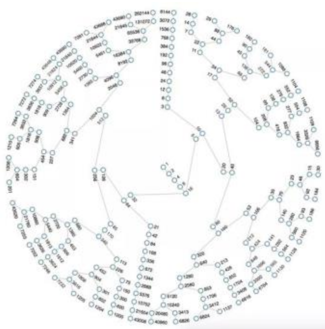
变式 1（1）已知数列$\{a_n\}$满足$a_n=1+\dfrac{1}{a_{n-1}}$.若$a_1=1$,则$a_7=$______;若$a_7=\dfrac{34}{21}$，则$a_1=$_______

$key: a_2=2, a_3=\dfrac{3}{2}, a_4=\dfrac{5}{3}, a_5=\dfrac{8}{5}, a_6=\dfrac{13}{8}, a_7=\dfrac{21}{13}$

由$a_n=1+\dfrac{1}{a_{n-1}}$得$a_{n-1}=\dfrac{1}{a_n-1}, \therefore a_6=\dfrac{21}{13}, a_5=\dfrac{13}{8}, a_4=\dfrac{8}{5}, a_3=\dfrac{5}{3}, a_2=\dfrac{3}{2}, a_1=2$

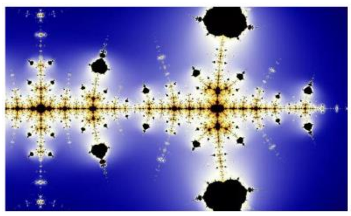
（2）已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=m, m\in N^*, a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{2}, a_n\text{为偶数,}\\ 3a_n+1, a_n\text{为奇数.}\end{cases}$ 若$a_7=1$,则$m=$______;

若$a_1+a_2+a_3=29$,则$m=$______.



key:（$3n+1$考拉茨猜想）$a_7=1\to a_6=2\to a_5=4\to\begin{cases}a_3=1\to a_2=2\to a_1=4\\ a_3=8\to a_2=16\to\begin{cases}a_1=32,\\ a_1=5\end{cases}\end{cases}$

$\therefore m\in\{4,5,32\}$



若$a_1=2^k\cdot m(k\ge 2)$，则$a_1+a_2+a_3=2^{k-2}\cdot 7\cdot m=29$无解

若$a_1=2(2m-1)$，则$a_1+a_2+a_3=2(2m-1)+(2m-1)+3(2m-1)+1$

$=12m-5=29$无解

若$a_1=2m-1$，则$a_2=6m-2, a_3=3m-1$,则$m=3, a_1=5$

（3）已知一列实数$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2024}$满足$a_{n+1}=|a_n|-|a_n-1|$,其中$1\le n\le 2024$, 若$a_{2024}=\dfrac{1}{2}$,则$a_1=$____.

key:设$f(x)=|x|-|x-1|=\begin{cases}1, x\ge 1,\\ 2x-1, 0\le x\le 1,\\ -1, x\le 0\end{cases}$

2024-03-16

$a_{2024}=\frac{1}{2}=|a_{2023}|-|a_{2023}-1|$ 得 $a_{2023}=\frac{3}{4}=1-\frac{1}{2^2}=|a_{2022}|-|a_{2022}-1|$

得 $a_{2022}=\frac{7}{8}=1-\frac{1}{2^3}$，得 $a_{n-1}=\frac{1}{2}(1+a_n)$ 即 $a_{n-1}-1=\frac{1}{2}(a_n-1)$，$\therefore a_1=1-\frac{1}{2^{2024}}$

（3）已知数列 $\{a_n\}$ 是一个递增数列，满足 $a_n\in N^*$， $a_{a_n}=2n+1, n\in N^*$，则 $a_4=$（ B ）

A　4　　B. 6　　C. 7　　D. 8

key: 设 $a_1=p\in N^*$，则 $a_{a_1}=a_p=3$. 若 $p=1$，则 $a_1=3$ 矛盾；若 $p=2$，则 $a_2=a_2=3$；

若 $p=3$，则 $a_3=3$ 矛盾；若 $p>3$，则 $a_p=3<a_1$ 矛盾. $\therefore a_1=2, a_2=3$

$\therefore a_{a_2}=a_3=5, a_{a_3}=a_5=7$，而 $5=a_3<a_4<a_5=7, a_4\in N^*$，$\therefore a_4=6$

变式：$a_{2023}=$__________.

key: 设 $a_n=f(n)$，则 $a_{a_n}=f(a_n)=f(f(n))=2n+1$，$\therefore f(2n+1)=f(f(f(n)))=2f(n)+1$

$\therefore f(2^n-1)=f(2(2^{n-1}-1)+1)=2f(2^{n-1}-1)+1$ 即 $f(2^n-1)+1=2(f(2^{n-1}-1)+1)$

$\therefore f(2^n-1)+1=2^{n-1}(f(2^1-1)+1)=3\cdot 2^{n-1}$ 即 $f(2^n-1)=3\cdot 2^{n-1}-1$

$\therefore 2^{n+1}-1=2(2^n-1)+1=f(f(2^n-1))=f(3\cdot 2^{n-1}-1)=2^{n+1}-1$

而 $3\cdot 2^{n-1}-1-(2^n-1)=2^{n-1}, 2^{n+1}-1-(3\cdot 2^{n-1}-1)=2^{n-1}$，$\therefore f(2^n-1+k)=3\cdot 2^{n-1}-1+k(0\le k\le 2^{n-1})$

$\therefore f(3\cdot 2^{n-1}-1+k)=f(f(2^n-1+k))=2^{n+1}-1+2k$，$\therefore f(2023)=f(3\cdot 2^{10-1}-1+488)=2^{11}-1+976=3023$

(2021北京)21.设 p 为实数，若无穷数列 $\{a_n\}$ 满足如下三个性质，则称 $\{a_n\}$ 为 $\mathfrak{R}_p$ 数列：

①$a_1+p\ge 0$，且 $a_2+p=0$；②$a_{4n-1}<a_{4n}(n=1,2,\cdots)$；③$a_{m+n}\in\{a_m+a_n+p, a_m+a_n+p+1\}(m,n=1,2,\cdots)$.

(1) 如果数列 $\{a_n\}$ 的前4项为 $2,-2,-2,-1$，那么 $\{a_n\}$ 是否可能为 $\mathfrak{R}_2$ 数列？说明理由；

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 是 $\mathfrak{R}_0$ 数列，求 a_5；

(3) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，是否存在 $\mathfrak{R}_p$ 数列 $\{a_n\}$，使得 $S_n\ge S_{10}$ 恒成立？如果存在，求出所有的 p；如果不存在，说明理由.

(2021北京）解： (1) $\because a_1+p=4\ge 0, a_2+p=0, a_3=-2\notin\{a_1+a_2+2, a_1+a_2+3\}=\{2,3\}$，$\therefore\{a_n\}$ 不是 $\mathfrak{R}_2$ 数列

(2) $\because p=0, a_1\ge 0, a_2=0, a_3\in\{a_1, a_1+1\}, a_4\in\{a_3, a_3+1\}$

$\because a_3<a_4$，$\therefore$ 若 $a_3=a_1$，则 $a_1<a_4\in\{a_1, a_1+1\}$，$\therefore a_4=a_1+1, a_5\in\{2a_1+1, 2a_1+2\}$，且 $a_5\in\{a_1, a_1+1\}(\because a_1\ge 0)$,

$\therefore 2a_1=a_1+1$ 即 $a_1=0$，$\therefore a_5=1$,

若 $a_3=a_1+1$，则 $a_1+1<a_4\in\{a_1+1, a_1+2\}$，$\therefore a_4=a_1+2$，$\therefore a_5\in\{2a_1+2, 2a_1+3\}$，且 $a_5\in\{a_1+1, a_1+2\}$，无解,

综上：$a_5=1$.

(3) 令 $b_n=a_n+p$，则 $b_1\ge 0$，且 $b_2=0, b_{4n-1}<b_{4n}, b_{m+n}=a_{m+n}+p\in\{b_m+b_n, b_m+b_n+1\}$，$\therefore\{b_n\}$ 是 $\mathfrak{R}_0$ 数列，

由（2）得：$b_1=0, b_2=0, b_3=0, b_4=1, b_5=1$,

$b_6\in\{0,1\}$，且 $b_6\in\{1,2\}$，$\therefore b_6=1, b_7\in\{1,2\}, b_8\in\{2,3\}$，且 $b_8\in\{1,2\}$，$\therefore b_7=1, b_8=2$,

用数学归纳法证明：$b_{4n-3}=b_{4n-2}=b_{4n-1}=n-1, b_{4n}=n$，$\therefore a_{4n-3}=a_{4n-2}=a_{4n-1}=n-1-p, a_{4n}=n-p$,

$\therefore S_{11}-S_{10}=a_{11}=2-p\ge 0$，且 $S_{10}-S_9=a_{10}=2-p\le 0$，$\therefore p=2$