# 集合、代数运算、不等式解答（1）

2022-09-25

一、集合与简易逻辑

1.集合概念与运算： 集合 $\begin{cases} 元素与集合关系: \in, \notin \\ 集合与集合的关系: \subseteq (\subsetneqq), \not\subset \\ 基本属性 \begin{cases} 确定性 \\ 无序性 \\ 互异性：若 1 \in \{2a-1, a^2+a-1\}, 则 a = \_\_\_\_ \end{cases} \\ 表示方法 \begin{cases} 列举法：若 A=\{0,1\}, 则 B=\{X \mid X \subseteq A\} = \_\_\_\_ \\ 描述法: ①U=\{1,2,3,4\}, 且 |\{x \in U \mid x^2-ax+3=0\}|=1, \\ \qquad 则 a 的取值集合为 \_\_\_\_\_\_ \\ ②\{x \mid y=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\} \cap \{y \mid y=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\} = \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \end{cases}$

$-2$， $\{\frac{7}{2}, \frac{19}{4}\}$， $[0,1]$

③集合 $A=\{(x,y) \mid y=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\}, B=\{(x,y) \mid y=a\sqrt{x+1}\}$, 若 $card(A \cap B)=1$, 则 $a$ 的取值范围为_____.

③由 $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=a\sqrt{x+1}$，当 $a=0$ 时，$x=1$;

当 $a>0$ 时, $\frac{1}{a}=\sqrt{\frac{(1+x)^2}{1-x}}=\sqrt{t+\frac{4}{t}-4} \in (0,+\infty)[(t=1-x \in (0,2)), \therefore a \in [0,+\infty)$

2.集合运算 $\begin{cases} 全集与补集: U, \complement_U A=\{x \mid x \notin A, 且 x \in U\} \\ 交集: A \cap B=\{x \mid x \in A, 且 x \in B\} \\ 并集: A \cup B=\{x \mid x \in A, 或 x \in B\} \end{cases}$

性质：①$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$

变式 1（1）设非空集合 $S=\{x \mid m \le x \le l\}$ 满足：当 $x \in S$ 时，有 $x^2 \in S$.给出如下三个命题：

①若 $m=1$，则 $S=\{1\}$；②若 $m=-\frac{1}{2}$, 则 $\frac{1}{4} \le l \le 1$；③若 $l=\frac{1}{2}$, 则 $-\frac{\sqrt{2}}{2} \le m \le 0$.其中正确命题的个数是____.

$key: ①\begin{cases} m \le 1 \le l \\ m \le l \le l^2 \\ m^2 \ge m \end{cases}, \therefore m=1=l, \therefore S=\{1\}; ②\begin{cases} -\frac{1}{2} \le l \\ \frac{1}{4} \le l \\ l^2 \le l \end{cases}, \therefore \frac{1}{4} \le l \le 1; ③\begin{cases} m^2 \ge m \\ m^2 \le \frac{1}{2} \end{cases}, \therefore -\frac{\sqrt{2}}{2} \le m \le 0$

（2）已知集合 $A=\{x \mid 2a-1<x \le a+2\}, B=\{x \mid \frac{x-1}{x+2} \le 0\}$. 若 $B \subseteq A$，则实数 $a$ 的取值范围为________.

$key: B=(-2,1]$, 则 $2a-1\le -2<1\le a+2$ 得 $a\in[-1,-\frac{1}{2}]$

若 $A\underset{\neq}{\subset}B$，则实数 $a$ 的取值范围为__________.

$key$: 当 $2a-1\ge a+2$ 即 $a\ge 3$ 时，$A=\Phi\underset{\neq}{\subset}B$;
当 $a<3$ 时，$-2\le 2a-1<a+2\le 1$ 无解，$\therefore a\in[3,+\infty)$

2（1） 若集合 $A=\{x\mid x^2-ax+a^2-19=0\}, B=\{x\mid x^2-5x+6=0\}, C=\{x\mid x^2+2x-8=0\}$, 且 $A\cap B\neq\Phi$, $A\cap C=\Phi$, 则实数 $a$ 的值为_____________;

$key: B=\{2,3\}, C=\{-4,2\}, \therefore 3\in A, 2\notin A, -4\notin A$ 得 $a=-2$

（2） 已知集合 $A=\{x\mid x^2+4ax-4a+3=0\}, B=\{x\mid x^2-(2a+1)x+a=0\}, C=\{x\mid x^2+(2-a)x+a=0\}$,

若 $A\cup(B\cap C)\neq\Phi$, 则 $a$ 的取值集合为____________;

$key: \Delta_A=16a^2-4(-4a+3)=4(4a^2+4a-3)\ge 0\Leftrightarrow a\le -\frac{3}{2}, or, a\ge\frac{1}{2}$
$\Delta_B=4a^2+4a+1-4a>0, \Delta_C=4-4a+a^2-4a\ge 0\Leftrightarrow a\le 4-2\sqrt{3}, or, a\ge 4+2\sqrt{3}$
由 $\begin{cases}x^2-(2a+1)x+a=0\\x^2+(2-a)x+a=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=0\\x=0\end{cases}, \therefore a\in(-\infty,-\frac{3}{2}]\cup\{0\}\cup[\frac{1}{2},+\infty)$

若 $A\cup(B\cup C)\neq\Phi$, 则 $a$ 的取值集合为__________.
$a\in(-\infty,+\infty)$

（3）已知 $a,b,c\in R$, 二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$, 集合 $A=\{x\mid f(x)=ax+b\}, B=\{x\mid f(x)=cx+a\}$.

①若 $a=b=2c$，求集合 $B$；②若 $A\cup B=\{0,m,n\}(m<n)$，求实数 $m,n$ 的值

解：① $f(x)=2cx^2+2cx+c=cx+2c(c\neq 0), \therefore B=\{-1,\frac{1}{2}\}$

②当 $0\in A$ 时，$b=c, \therefore ax^2+cx+c=ax+c\Leftrightarrow ax^2+(c-a)x=0\Leftrightarrow x=0, or, x=\frac{a-c}{a}$

$ax^2+cx+c=cx+a\Leftrightarrow ax^2=a-c\Leftrightarrow x^2=\frac{a-c}{a}>0$

$\therefore \frac{a-c}{a}=(\frac{a-c}{a})^2, \therefore c=b=0, \therefore m=-1, n=1$

当 $0\notin A$ 时，$0\in B, \therefore c=a, \therefore ax^2+bx+a=ax+a\Leftrightarrow x=0, or, x=\frac{a-b}{a}$

且 $ax^2+bx+a=ax+b\Leftrightarrow ax^2+(b-a)x+a-b=0$

$\therefore a\cdot\frac{(a-b)^2}{a^2}+(b-a)\cdot\frac{a-b}{a}+a-b=0$ 即 $a=b$, 不合.
综上：$m=-1, n=1$

（4） 设 $f(x)=x^2+bx+c(b,c\in R)$，集合 $A=\{x\in R\mid f(x)=x\}, B=\{x\in R\mid f(f(x))=x\}$,

若 $card(A)=1$, 则 $card(B)=$_____.

# 集合、代数运算、不等式解答（1）

2022-09-25

$key1$:（利用结论：$A\subseteq B$）$f(x)=x\Leftrightarrow x^2+(b-1)x+c=0,\therefore\Delta=(b-1)^2-4c=0$

$f(f(x))-x=f^2(x)+bf(x)+c-x=f(x)\cdot(f(x)-x)+(x+b)(f(x)-x)+x^2+bx+c-x$

$=(f(x)-x)(x^2+(b+1)x+b+c+1)=0$只有1个解

由$\Delta_1=(b+1)^2-4(b+c+1)=(b-1)^2-4c-4=-4<0,\therefore card(B)=1$

$key2$:（交点式）设$A=\{\alpha\}$,则$f(x)=(x-\alpha)^2+x$

$\therefore f(f(x))-x=(f(x)-\alpha)^2+f(x)-x=((x-\alpha)^2+x-\alpha)^2+(x-\alpha)^2$

$=(x-\alpha)^2[(x-\alpha+1)^2+1),\therefore card(B)=1$

②摩根律：$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B),\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$

变式2⑴ 已知全集$U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$,若$A\cap\complement_U B=\{1,2\},B\cap\complement_U A=\{3,4\},(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{5\}$,

则$A=$__________,$B=$__________.

（1）$A=\{1,2,6,7\},b=\{3,4,6,7\}$

(2) $\complement_R(\{x\,|\,x\neq1,且x\neq2\})=$_______,$\complement_R(\{x\,|\,x\neq1,或,x\neq2\})=$__________;

若$U=(x,y)\,|\,x\in R,y\in R\}$,则$\complement_U(\{(x,y)\,|\,x\neq1,且y\neq2\})=$_________,

$\complement_U(\{(x,y)\,|\,x\neq1,或y\neq2\})=$______.

(2)$\{1,2\},\Phi;\{(x,y)\,|\,x=1,或y=2\};\{(1,2)\}$

（2018A）1.设集合$A=\{1,2,3,\cdots,99\}$，集合$B=\{2x\,|\,x\in A\}$，集合$C=\{x\,|\,2x\in A\}$，则集合$B\cap C$的元素个数为______.24

$key:B=\{2,4,\cdots,198\},C=\{1,2,\cdots,49\},\therefore B\cap C=\{2,4,\cdots,46,48\}$

(2021江苏河南)1.设$A=\{1,2,3\},B=\{2x+y\,|\,x,y\in A\},C=\{2x+y\,|\,x,y\in A,x>y\}$,

则$B\cap C$的所有元素之和为____. $key:B=\{3,4,5,6,7,8,9\},B=\{5,7,8\},\therefore$ 和为20

（2021 湖南）已知$a\geq-2$,且$A=\{x\,|\,-2\leq x\leq a\},B=\{y\,|\,y=2x+3,x\in A\},C=\{t\,|\,t=x^2,x\in A\}$,

若$C\subseteq B$，则$a$的取值范围为_________. $[\frac{1}{2},3]$

$key:B=\{y\,|\,-1\leq y\leq 2a+3\},\therefore 4\leq 2a+3$即$a\geq\frac{1}{2},\therefore a^2\leq4,or,a^2\leq2a+3,\therefore a\in[\frac{1}{2},3]$

(2021浙江竞赛）给定实数集合$A,B$，定义运算$A\otimes B=\{x\,|\,x=ab+a+b,a\in A,b\in B\}$,设$A=\{0,2,4,\cdots,18\}$,

$B=\{98,99,100\}$,则$A\otimes B$中的所有元素之和为______.

2021竞赛：（主元思想）$key1:x=a(b+1)+b$

$\therefore A\otimes B$中的所有元素的和:$\sum_{b=98}^{100}[(0+2+4+\cdots+18)(b+1)+b]=\sum_{b=98}^{100}(91b+90)=29970$

$key2:x=(a+1)b+a$

$\therefore A\otimes B$中的所有元素的和：$\sum_{a=2k,k=0}^{9}[(a+1)(98+99+100)+3a]=\sum_{a=2k,k=0}^{9}(300a+297)=29970$

（2011）设$a,b,c\in R,\ f(x)=(x+a)(x^2+bx+c),g(x)=(ax+1)(cx^2+bx+1)$，记集合$S=\{x\,|\,f(x)=0,x\in R\}$，

$T=\{x\,|\,g(x)=0,x\in R\}$，若$|S|,|T|$分别为集合$S,T$的元素个数，则下列结论不可能的是（　　）D

$A.|S|=1,|T|=0$　　$B.|S|=|T|=1$　　$C.|S|=|T|=2$　　$D.|S|=2,|T|=3$

变式 1（1）①$\{(x,y)\,|\,2xy-x+y=501,x,y\in N^*\}=$_______________.

不定方程的解法、整数的整除性特点

$key1$(函数法)$:y=\dfrac{501-x}{2x-1}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1001}{2(2x-1)}$即$2y=-1+\dfrac{7\times 11\times 13}{2x-1}$

$key2$:（分解因数法）$x(2y+1)-\dfrac{1}{2}(2y+1)+\dfrac{1}{2}-501=0$即$(2x-1)(2y-1)=1001$

$$\therefore\begin{cases}2x-1=1\\2y+1=1001\end{cases},or,\begin{cases}2x-1=7\\2y+1=143\end{cases},or,\begin{cases}2x-1=11\\2y+1=91\end{cases},or,\begin{cases}2x-1=13\\2y+1=77\end{cases},or,\begin{cases}2x-1=77\\2y+1=13\end{cases},or,\begin{cases}2x-1=91\\2y+1=11\end{cases},or,\begin{cases}2x-1=143\\2y+1=7\end{cases}$$

$\therefore$解集为$\{(1,500),(4,72),(6,45),(7,38),(29,6),(46,5),(72,3)\}$

②已知$a,b,c,d$都是偶数，满足$0<a<b<c<d$，且$2b=a+c,\dfrac{c}{b}=\dfrac{d}{c},d-a=90$，则$a+b+c+d=$_____.

$key$:由$2b=a+c$得$b-a=c-b=2x(x>0,x\in N^*)$，则$b=a+2x,c=a+4x,a=2p$

$\therefore d-a=\dfrac{(2p+4)^2}{2p+2x}-2p=\dfrac{2(p+2x)^2}{p+x}-2p=90$得$3p=\dfrac{45x-4x^2}{x-15}=-4x-15-\dfrac{225}{x-15}>0$

$\therefore x=12,p=4,\therefore a+b+c+d=8+32+56+98=194$

（分解因数法:$(3p+4x+15)(15-x)=225$)

（2016文科）设函数$f(x)=x^3+3x^2+1$.已知$a\neq 0$，且$f(x)-f(a)=(x-b)(x-a)^2$，则实数$a=$___，$b=$___.

2016文$key$: $f(x)-f(a)=(x-a)(x^2+(a+3)x+a^2+3a),\therefore\begin{cases}a+b=-a-3\\ab=a^2+3a(a\neq 0)\end{cases}$得$a=-2,b=1$

有理根存在定理：整系数方程$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0(a_0\in N^*,a_1,a_2,\cdots,a_n\in Z)$的有理根为$\dfrac{q}{p}$

$(p\in N,q\in Z,(p,q)=1$即$\dfrac{q}{p}$为既约分数$)$，则$p\,|\,a_0,q\,|\,a_n$（$p$整除$a_0$，$q$整除$a_n$））

变式 1（1）①方程$2x^4-x^3-x^2+x-1=0$的解集为________；

$key:x^2(2x^2-x-1)+x-1=(x-1)(x^2(2x+1)+1)$

$=(x-1)(2x^3+2x^2-x^2+1)=(x-1)(x+1)(2x^2-x+1),\therefore\{1,-1\}$

②已知集合$A=\{x\,|\,x^2-2x-2=0\},B=\{x\,|\,x^4+x^3-12x^2+2x+8=0\}$，若$A\subseteq B$，则$B=$_______；

$key1$:（综合除法）$x^4+x^3-12x^2+2x+8=(x^2-2x-2)(x^2+3x-4)$

$key2$:（待定系数法）$x^4+x^3-12x^2+2x+8=(x^2-2x-2)(x^2+ax-4)$

得$8-2a=2$即$a=3,\therefore B=\{1-\sqrt{3},1+\sqrt{3},-4,1\}$

$$\begin{array}{r}
x^2+3x-4\\
x^2-2x-2\,|\,\overline{x^4+x^3-12x^2+2x+8}\\
x^4-2x^3-2x^2\qquad\quad\\
\overline{3x^3-10x^2+2x+8}\\
3x^3-6x^2-6x\quad\\
\overline{-4x^2+4x+8}\\
-4x^2+4x+8\\
\overline{0}
\end{array}$$

③方程$x^4-4x^2+2x+3=0$的解集为_________；

$key$:（待定系数法）$x^4-4x^2+2x+3=(x^2+ax+1)(x^2-ax+3)$得$a=1$,$\therefore\Phi$

④方程$x^4-3x^3+5x^2-4x+2=0$的解集为__________.

$key$:$x^4-3x^3+5x^2-4x+2=(x^2+ax+1)(x^2+bx+2)$

得$\begin{cases}b+a=-3\\2+ab+1=5\\2a+b=-4\end{cases}$得$a=-1,b=-2$,$\therefore\Phi$