解析几何（2）椭圆解答（6）

2023-11-04

（2018辽宁）如图所示，在平面直角坐标系xOy，设点$M(x_0,y_0)$是椭圆$C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$上一点，左、右焦点分别是F_1、F_2，从原点O向圆$M:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2(0<r<1)$作两条切线分别与椭圆$C$交于点$P$、$Q$，直线$OP$、$OQ$的斜率分别记为$k_1$、$k_2$.

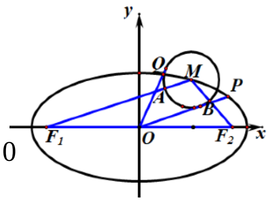
⑴ 设直线MF_1、MF_2分别与圆交于A、B两点，当$|AF_1|-|BF_2|=2r$，求点A的轨迹方程；

（2）当$k_1\cdot k_2$为定值时，求$|OP|\cdot|OQ|$的最大值.

解：⑴ 由已知得$4=|MF_1|+|MF_2|=|AF_1|+r+r+|BF_2|=|AF_1|+2r+|BF_2|=2|AF_1|$即$|AF_1|=2$,

由$|AF_1|-|BF_2|=2r>0$得$|AF_1|>|BF_2|$,$\therefore A$在y轴右侧，

$\therefore A$的轨迹方程为$(x+\sqrt{3})^2+y^2=4(x>0)$;



（2）由$l_{OP}:y=k_1x$与圆M相切得$:\dfrac{|k_1x_0-y_0|}{\sqrt{1+k_1^2}}=r$即$(x_0^2-r^2)k_1^2-2x_0y_0k_1+y_0^2-r^2=0$

同理$:(x_0^2-r^2)k_2^2-2x_0y_0k_2+y_0^2-r^2=0$,

$$\therefore k_1k_2=\frac{y_0^2-r^2}{x_0^2-r^2}=\frac{1-r^2-\frac{x_0^2}{4}}{x_0^2-r^2}\text{为定值,得}\frac{1-r^2}{-r^2}=-\frac{1}{4}\text{得}r=\frac{2}{\sqrt{5}},\therefore k_1+k_2=\frac{2x_0y_0}{x_0^2-\frac{4}{5}},k_1k_2=-\frac{1}{4}$$

$$\text{由}\begin{cases}y=k_1x\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}\text{得}x_P^2=\frac{4}{1+4k_1^2},\therefore|OP|=\sqrt{1+k_1^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{1+4k_1^2}},$$

$$\therefore|OQ|=\sqrt{1+\frac{1}{16k_1^2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{4k_1^2}}}=\sqrt{1+16k_1^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+4k_1^2}}$$

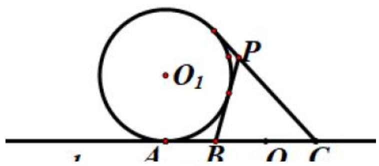
$$\therefore|OP|\cdot|OQ|=\frac{2\sqrt{(1+k_1^2)(1+16k_1^2)}}{1+4k_1^2}=\frac{\frac{2}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{(\lambda+\lambda k_1^2)(1+16k_1^2)}}{1+4k_1^2}\le\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\cdot\frac{\lambda+1+(\lambda+16)k_1^2}{1+4k_1^2}\text{（其中}\lambda=4)$$

$=\dfrac{5}{2}$当且仅当$k_1^2=\dfrac{1}{4}$时，取＝），$\therefore|OP|\cdot|OQ|$的最大值为$\dfrac{5}{2}$

变式 1.如图，已知 A、B、C 是直线 l 上的三点，且$|AB|=1,|BC|=2,O$是BC的中点，$\odot O_1$ 切直线 l 于点 A，又过 B、C 作$\odot O_1$ 异于 l 的两切线，设这两切线交于点 P.（1）求点 P 的轨迹 E 方程；（2）设 M、N 是 P 的轨迹 E 上的不同两点且不关于原点 O 对称，若 OM，ON 的斜率分别为k_1，k_2，问：是否存在实数λ，使得当$k_1k_2=\lambda$时，$\triangle OMN$ 的面积是定值？如果存在，求出λ的值；如果不存在，说明理由.

解：⑴ 以O为坐标原点，直线l为x轴建立平面直角坐标系，如图，

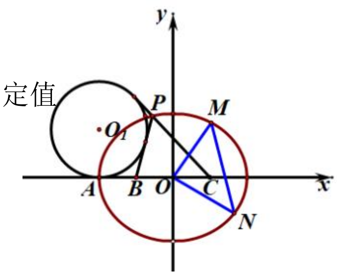
则$A(-1,0),B(0,0),C(2,0)$，且$|PC|=3-(|PB|-1)=4-|PB|$即$|PC|+|PB|=4$



$\therefore$轨迹E的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1(y\neq0)$

（2）设$M(2\cos\alpha,\sqrt{3}\sin\alpha),N(2\cos\beta,\sqrt{3}\sin\beta)(0<\alpha<\beta<2\pi$,且$\beta-\alpha\neq\pi)$

$$\text{则}k_1k_2=\frac{3\sin\alpha\sin\beta}{4\cos\alpha\cos\beta}=\lambda,\text{且}S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}0&0&1\\2\cos\alpha&\sqrt{3}\sin\alpha&1\\2\cos\beta&\sqrt{3}\sin\beta&1\end{matrix}\right\|=\sqrt{3}|\sin(\alpha-\beta)|\text{为定值}$$



当$\beta-\alpha=\frac{\pi}{2},or,\frac{3\pi}{2}$时，$S_{\triangle OMN}=\sqrt{3}$，且$\lambda=-\frac{3}{4}$;

当$\beta-\alpha=\theta(\theta\ne\frac{\pi}{2}$，且$\theta\ne\frac{3\pi}{2})$时，$\lambda=\frac{3\sin\alpha\sin(\alpha+\theta)}{4\cos\alpha\cos(\alpha+\theta)}=\frac{3(\cos\theta-\cos(2\alpha-\theta))}{4(\cos\theta+\cos(2\alpha-\theta))}$

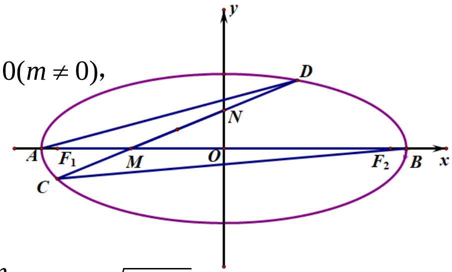
$=\frac{3}{4}[\frac{2\cos\theta}{\cos\theta+\cos(2\alpha-\theta)}-1]$与$\alpha$有关，

综上:存在$\lambda=-\frac{3}{4}$，$\triangle OMN$的面积为定值$\sqrt{3}$

变式 2.如图，椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$左、右顶点$A,B$，左、右焦点为$F_1,F_2$，$|AB|=4,|F_1F_2|=2\sqrt{3}$. 直线$y=kx+m(k>0)$交椭圆$E$于$C,D$两点，与线段$F_1F_2$、椭圆短轴分别交于$M,N$两点（$M,N$不重合），且$|CM|=|DN|$.（Ⅰ）求椭圆$E$的方程；（Ⅱ）设直线$AD,BC$的斜率分别为$k_1,k_2$，求$\frac{k_1}{k_2}$的取值范围.

key:（Ⅰ）由已知得$2a=4,2c=2\sqrt{3},\therefore a=2,c=\sqrt{3},b=1,$

$\therefore$椭圆E的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$



（Ⅱ）将$y=kx+m$代入椭圆E的方程得:$(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0(m\ne0)$,

$\therefore\begin{cases}x_C+x_D=\frac{-8km}{1+4k^2}\\ x_Cx_D=\frac{4m^2-4}{1+4k^2}\end{cases}$，且$\Delta>0$即$1+4k^2-m^2>0$

而$M(-\frac{m}{k},0)$(且$-\sqrt{3}\le\frac{-m}{k}\le\sqrt{3}$)$,N(0,m),\because|CM|=|DN|,\therefore\sqrt{1+k^2}(-\frac{m}{k}-x_C)=\sqrt{1+k^2}\cdot x_D,$

$\therefore x_C+x_D=-\frac{m}{k}=\frac{-8km}{1+4k^2}$得$k=\frac{1}{2}$，$\therefore\begin{cases}x_C+x_D=-2m\\ x_Cx_D=2m^2-2\end{cases}$，且$2-m^2>0$且$-\frac{\sqrt{3}}{2}\le m\le\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$key1:\frac{k_1}{k_2}=\frac{y_D}{x_D+2}\cdot\frac{x_C-2}{y_C}=\frac{(\frac{1}{2}x_D+m)(x_C-2)}{(\frac{1}{2}x_C+m)(x_D+2)}=\frac{(x_D+2m)(x_C-2)}{(x_C+2m)(x_D+2)}=\frac{x_Cx_D+2mx_C-2x_D-4m}{x_Cx_D+2x_C+2mx_D+4m}$$

$$=\frac{\frac{1-m^2}{m}(x_C+x_D)+2mx_C-2x_D+2x_C+2x_D}{\frac{1-m^2}{m}(x_C+x_D)+2x_C+2mx_D-2x_C-2x_D}=\frac{1+m}{1-m}\in[7-4\sqrt{3},1)\cup(1,7+4\sqrt{3}]$$

$$key2:\because\frac{x_C^2}{4}+y_C^2=1,\therefore y_C^2=1-\frac{x_C^2}{4}=\frac{(2-x_C)(2+x_C)}{4},\therefore\frac{2-x_C}{y_C}=\frac{4y_C}{2+x_C}$$

$$\therefore\frac{k_1}{k_2}=\frac{y_D}{x_D+2}\cdot\frac{x_C-2}{y_C}=\frac{y_D}{x_D+2}\cdot\frac{-4y_C}{x_C+2}=\frac{\frac{1}{2}x_D+m}{x_D+2}\cdot\frac{-4(\frac{1}{2}x_C+m)}{x_C+2}=-\frac{x_Cx_D+2m(x_C+x_D)+4m^2}{x_Cx_D+2(x_C+x_D)+4}$$

$$=-\frac{2m^2-2-4m^2+4m^2}{2m^2-2-4m+4}=-\frac{2m^2-2}{2m^2-4m+2}=-\frac{m+1}{m-1}=-1-\frac{2}{m-1}\in[7-4\sqrt{3},1)\cup(1,7+4\sqrt{3}]$$

$key3$:设CD方程为$x=ty+n$代入E得:$(t^2+4)y^2+2tny+n^2-4=0\therefore\begin{cases}y_C+y_D=\frac{-2tn}{t^2+4}\\ y_Cy_D=\frac{n^2-4}{t^2+4}\end{cases}$，且$\Delta=16(t^2+4-n^2)>0$

由$|CM|=|DN|$得MN的中点与CD的中点重合，$\therefore\frac{-2tn}{t^2+4}=-\frac{n}{t}(\because n\ne0,t>0),\therefore t=2$

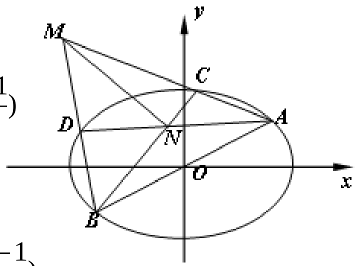
2023-11-04

$\therefore\begin{cases}y_C+y_D=\dfrac{-n}{2}\\ y_Cy_D=\dfrac{n^2-4}{8}\end{cases}$ 且$\Delta=16(8-n^2)>0$, 且$\begin{cases}-\sqrt{3}\le n\le\sqrt{3}\\ -\dfrac{n}{2}\in[-1,1]\\ n\ne 0\end{cases}$，$\therefore n\in[-\sqrt{3},0)\cup(0,\sqrt{3}]$得$2y_Cy_D=\dfrac{4-n^2}{2n}(y_C+y_D)$

$$\frac{k_1}{k_2}=\frac{y_D}{x_D+2}\cdot\frac{x_C-2}{y_C}=\frac{y_D(2y_C+n-2)}{(2y_D+n+2)y_C}=\frac{\dfrac{4-n^2}{2n}(y_C+y_D)+(n-2)y_D}{\dfrac{4-n^2}{2n}(y_C+y_D)+(n+2)y_C}=\frac{2-n}{2+n}\cdot\frac{(2+n)y_C+(2-n)y_D}{(2+n)y_C+(2-n)y_D}$$

$=\dfrac{2-n}{2+n}\in[7-4\sqrt{3},1)\cup(1,7+4\sqrt{3}]$(先根据$\dfrac{k_1}{k_2}$的表达式，判定用$y$表示简单，故设直线$x=ty+n$)

变式 3. 如图，在平面直角坐标系xOy中，椭圆$E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，直线$l:y=\dfrac{1}{2}x$与椭圆$E$相交于$A,B$两点，$AB=2\sqrt{5}$, C,D是椭圆E上异于A,B的两点，且直线AC,BD相交于点M，直线AD,BC相交于点N.（1）求a,b的值；（2）求证：直线MN的斜率为定值.



（Ⅰ）$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$;（Ⅱ）$key1$:由已知得$A(2,1),B(-2,-1)$，则

AC的方程为：$y-1=k_1(x-2)\cdots$①代入E方程得$C(\dfrac{4k_1^2-4k_1-2}{1+2k_1^2},\dfrac{-2k_1^2-4k_1+1}{1+2k_1^2})$

$\therefore BC$方程为：$y+1=-\dfrac{1}{2k_1}(x+2)\cdots$②

BD方程为：$y+1=k_2(x+2)\cdots$③代入E方程得$D(\dfrac{-4k_2^2+4k_2+2}{1+2k_2^2},\dfrac{2k_2^2+4k_2-1}{1+2k_2^2})$

$\therefore AD$方程为：$y-1=-\dfrac{1}{2k_2}(x-2)\cdots$④

由①③得：$M(\dfrac{2-2k_2-2k_1}{k_2-k_1},\dfrac{-4k_1k_2+k_2+k_1}{k_2-k_1})$;由②④得：$N(\dfrac{4k_1k_2+2k_2+2k_1}{k_1-k_2},\dfrac{-k_1-k_2-2}{k_1-k_2})$

$$\therefore k_{MN}=\frac{\dfrac{-4k_1k_2+k_2+k_1}{k_2-k_1}-\dfrac{k_1+k_2+2}{k_2-k_1}}{\dfrac{2-2k_1-2k_2}{k_2-k_1}-\dfrac{-4k_1k_2-2k_2-2k_1}{k_2-k_1}}=\frac{-4k_1k_2-2}{4k_1k_2+2}=-1$$（若$k_1=0$或$k_2=0$仍然成立）

$key2:\because\begin{cases}\dfrac{x_C^2}{6}+\dfrac{y_C^2}{3}=1\\ \dfrac{x_A^2}{6}+\dfrac{y_A^2}{3}=1\end{cases}$, $\therefore\dfrac{(x_C-2)(x_C+2)}{2}+(y_C-1)(y_C+1)=0$, $\therefore\dfrac{(y_C-1)(y_C+1)}{(x_C-2)(x_C+2)}=-\dfrac{1}{2}$, 同理$\dfrac{(y_D-1)(y_D+1)}{(x_D-2)(x_D+2)}=-\dfrac{1}{2}$,

AC方程为：$y-1=\dfrac{y_C-1}{x_C-2}(x-2)$, $\therefore y_M-1=\dfrac{y_C-1}{x_C-2}(x_M-2)\cdots$①

BD方程为：$y+1=\dfrac{y_D+1}{x_D+2}(x+2)$, $\therefore y_M+1=\dfrac{y_D+1}{x_D+2}(x_M+2)\cdots$②

AD方程为：$y-1=\dfrac{y_D-1}{x_D-2}(x-2)$, $\therefore y_N-1=\dfrac{y_D-1}{x_D-2}(x_N-2)\cdots$③

BC方程为：$y+1=\dfrac{y_C+1}{x_C+2}(x+2)$, $\therefore y_N+1=\dfrac{y_C+1}{x_C+2}(x_N+2)\cdots$④

$\therefore$①×④得:$(y_M-1)(y_N+1)=-\dfrac{1}{2}(x_M-2)(x_N+2)\cdots$⑤，且②×③得:$(y_M+1)(y_N-1)=-\dfrac{1}{2}(x_M+2)(x_N-2)\cdots$⑥

⑤-⑥得:$2(y_M-y_N)-\dfrac{1}{2}(4x_M-4x_N)=0$, $\therefore MN$的斜率$k_{MN}=-1$为定值

（五）对称问题

2023-11-04

（2009辽宁）已知椭圆C经过点$A(1,\frac{3}{2})$，两个焦点为$(-1,0),(1,0)$.(1) 求椭圆C的方程；

（2）E、F是椭圆C上的两个动点，如果直线AE的斜率与AF的斜率互为相反数，证明：直线EF的斜率为定值，并求出这个定值.

(1) 解：由已知得$\begin{cases} c=1 \\ \frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1 \end{cases}$得$a=2,b=\sqrt{3}$，∴ 椭圆$C$的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

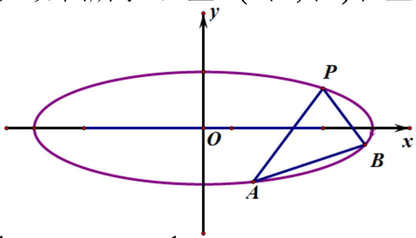
(2) 证明：设$l_{AE}: y-\frac{3}{2}=k(x-1)$代入$C$的方程得$E(\frac{4k^2-12k-3}{3+4k^2},\frac{-12k^2-6k}{3+4k^2}+\frac{3}{2})$

同理$F(\frac{4k^2+12k-3}{3+4k^2},\frac{-12k^2+6k}{3+4k^2}+\frac{3}{2})$

$$\therefore k_{EF}=\frac{\frac{-12k^2-6k}{3+4k^2}-\frac{-12k^2+6k}{3+4k^2}}{\frac{4k^2-12k-3}{3+4k^2}-\frac{4k^2+12k-3}{3+4k^2}}=\frac{1}{2}\text{为定值}$$

（2011A）作斜率为$\frac{1}{3}$的直线 l 与椭圆$C:\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$交于 A、B 两点（如图所示），且$P(3\sqrt{2},\sqrt{2})$在直线 l 上方.（1）证明：$\triangle PAB$的内切圆的圆心在一条定直线上；

（2）若$\angle PAB=60°$，求$\triangle PAB$的面积.



解：（Ⅰ）设l方程为$y=\frac{1}{3}x+m$代入椭圆方程得:$2x^2+6mx+9m^2-36=0$

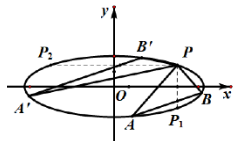
$$\therefore \begin{cases} x_A+x_B=-3m, \\ x_Ax_B=\frac{9m^2-36}{2}, \end{cases}\text{且}\Delta=36(8-m^2)>0,\therefore k_{PA}+k_{PB}=\frac{y_A-\sqrt{2}}{x_A-3\sqrt{2}}+\frac{y_B-\sqrt{2}}{x_B-3\sqrt{2}}=\frac{\frac{1}{3}x_A+m-\sqrt{2}}{x_A-3\sqrt{2}}+\frac{\frac{1}{3}x_B+m-\sqrt{2}}{x_B-3\sqrt{2}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x_Ax_B+(m-2\sqrt{2})(x_A+x_B)-6\sqrt{2}(m-\sqrt{2})=3m^2-12-3m(m-2\sqrt{2})-6\sqrt{2}(m-\sqrt{2})=0,$$

∴$\triangle PAB$的内切圆的圆心在直线$x=3\sqrt{2}$上

（Ⅱ）由（Ⅰ）得：$k_{PA}=\sqrt{3},k_{PB}=-\sqrt{3}$

∴ PA的方程为：$y-\sqrt{2}=\sqrt{3}(x-3\sqrt{2})$即$y=\sqrt{3}x-3\sqrt{6}+\sqrt{2}$代入$C$得：$x_A=\frac{39-9\sqrt{3}}{7\sqrt{2}}$，



$\therefore |PA|=2|3\sqrt{2}-\frac{39-9\sqrt{3}}{7\sqrt{2}}|=\frac{6+18\sqrt{3}}{7\sqrt{2}}$

PB的方程为$:y-\sqrt{2}=-\sqrt{3}(x-3\sqrt{2})$即$y=-\sqrt{3}x+3\sqrt{6}+\sqrt{2}$代入$C$得：$x_B=\frac{39+9\sqrt{3}}{7\sqrt{2}}$，

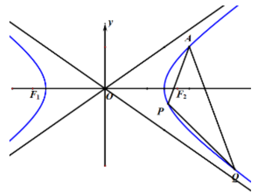
$\therefore |PB|=2|3\sqrt{2}-\frac{39+9\sqrt{3}}{7\sqrt{2}}|=\frac{18\sqrt{3}-6}{7\sqrt{2}},\therefore S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{36\cdot 26}{49\cdot 2}=\frac{117\sqrt{3}}{49}$

（2022Ⅰ）已知点$A(2,1)$在双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2-1}=1(a>1)$上，直线$l$交$C$于$P,Q$两点，直线$AP,AQ$的斜率之和为0.

(1) 求l的斜率；（2）若$\tan\angle PAQ=2\sqrt{2}$，求$\triangle PAQ$的面积.

2022Ⅰ 解:(1) 由$\frac{4}{a^2}-\frac{1}{a^2-1}=1$得$a=\sqrt{2}$，设$l: y=kx+m$代入$C$得:$(1-2k^2)x^2-4kmx-2m^2-2=0$

$$\therefore \begin{cases} x_P+x_Q=\frac{4km}{1-2k^2} \\ x_Px_Q=\frac{-2m^2-2}{1-2k^2} \end{cases},\text{且}\Delta=8(m^2+1-2k^2)>0$$



$\therefore k_{AP}+k_{AQ}=\dfrac{kx_P+m-1}{x_P-2}+\dfrac{kx_Q+m-1}{x_Q-2}=0\Leftrightarrow(kx_P+m-1)(x_Q-2)+(x_P-2)(kx_Q+m-1)$

$=2kx_Px_Q+(m-1-2k)(x_P+x_Q)-4m+4=\dfrac{2k(-2m^2-2)}{1-2k^2}+\dfrac{4km(m-1-2k)}{1-2k^2}-4m+4=0$

得$(k+1)(2k-m+1)=0,\therefore k=-1,or,2k-m+1=0$（此时$l$经过$A$，舍去）$,\therefore l$的斜率为$-1$

$key2:$设$l_{AP}:y-1=k(x-2)$代入C得$x_P=\dfrac{4k^2-4k+2}{2k^2-1},y_P=\dfrac{-4k^2+4k}{2k^2-1}+1$

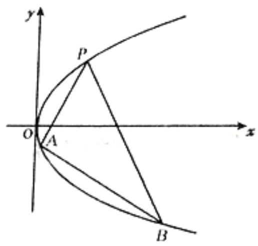
同理$x_Q=\dfrac{4k^2+4k+2}{2k^2-1},y_Q=\dfrac{-4k^2-4k}{2k^2-1}+1,\therefore k_l=\dfrac{\dfrac{-4k^2+4k}{2k^2-1}-\dfrac{-4k^2-4k}{2k^2-1}}{\dfrac{4k^2-4k+2}{2k^2-1}-\dfrac{4k^2+4k+2}{2k^2-1}}=-1$即为所求的

（2）由$k_{PA}=\tan\dfrac{\pi-\angle PAQ}{2}=\sqrt{2},\therefore x_P=\dfrac{10-4\sqrt{2}}{3},x_Q=\dfrac{10+4\sqrt{2}}{3}$

$\therefore S_{\triangle PAQ}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot|\dfrac{10-4\sqrt{2}}{3}-2|\cdot\sqrt{3}|\dfrac{10+4\sqrt{2}}{3}-2|\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{16\sqrt{2}}{9}$

（2004北京）如图，过抛物线$y^2=2px(p>0)$上一定点$P(x_0,y_0)(y_0>0)$，作两条直线分别交抛物线于$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$.(1) 求该抛物线上纵坐标为$\dfrac{p}{2}$的点到其焦点F的距离；

（2）当PA与PB的斜率存在且倾斜角互补时，求$\dfrac{y_1+y_2}{y_0}$的值，并证明直线AB的斜率是非零常数.



(1) 解：由已知得纵坐标为$\dfrac{p}{2}$的点的横坐标为$\dfrac{p}{8}$,到焦点F的距离为$\dfrac{p}{8}+\dfrac{p}{2}=\dfrac{5p}{8}$

（2）证明：由已知得$k_{PA}+k_{PB}=\dfrac{y_0-y_A}{x_0-x_A}+\dfrac{y_0-y_B}{x_0-x_B}=\dfrac{y_0-y_A}{\dfrac{y_0^2-y_A^2}{2p}}+\dfrac{y_0-y_B}{\dfrac{y_0^2-y_B^2}{2p}}$

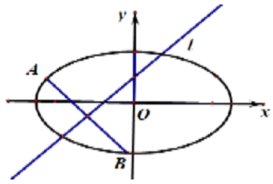
$=\dfrac{2p}{y_0+y_A}+\dfrac{2p}{y_0+y_B}=0\Leftrightarrow 2y_0+y_1+y_2=0,\therefore\dfrac{y_1+y_2}{y_0}=-2$

且$k_{AB}=\dfrac{2p}{y_1+y_2}=\dfrac{2p}{-2}=-p$为非零常数

（2015 浙江）已知椭圆$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$上两个不同的点A,B关于直线$y=mx+\dfrac{1}{2}$对称.

（Ⅰ）求实数m的取值范围；（Ⅱ）求$\triangle AOB$面积的最大值（O为坐标原点）.

key:（Ⅰ）设AB方程为$x+my+n=0$代入椭圆方程得:$(m^2+2)y^2+2mny+n^2-2=0$



$\therefore\begin{cases}y_A+y_B=\dfrac{-2mn}{m^2+2}\\ y_Ay_B=\dfrac{n^2-2}{m^2+2}\end{cases}$,且$\Delta=8(m^2+2-n^2)>0$,且$AB$的中点坐标为$(\dfrac{-2n}{m^2+2},\dfrac{-mn}{m^2+2})$

$\therefore\dfrac{-mn}{m^2+2}=\dfrac{-2mn}{m^2+2}+\dfrac{1}{2}$即$n=\dfrac{m^2+2}{2m},\therefore m^2+2-\dfrac{(m^2+2)^2}{4m^2}>0$得$m\in(-\infty,-\dfrac{\sqrt{6}}{3})\cup(\dfrac{\sqrt{6}}{3},+\infty)$即为所求得

（Ⅱ）由（Ⅰ）得：$S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{1+m^2}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}\sqrt{m^2+2-\dfrac{(m^2+2)^2}{4m^2}}}{m^2+2}\cdot\dfrac{\dfrac{m^2+2}{2|m|}}{\sqrt{1+m^2}}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{m^2+2}{m^2}-\frac{(m^2+2)^2}{4m^4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{-\frac{1}{4}(t-2)^2+1}\le\frac{\sqrt{2}}{2}$（令$t=\frac{m^2+2}{m^2}=1+\frac{2}{m^2}\in(1,4)$），

$\therefore\triangle AOB$的面积的最大值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$

变式 1（1）已知椭圆$C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$上存在两点$P$、$Q$关于直线$l:y=kx+1$对称，则$k$的取值范围为_____.

key:设$l_{PQ}:x+ky+n=0$代入C方程得:$(3k^2+4)y^2+6kny+3n^2-12=0$

$\therefore PQ$中点$M(-\frac{4n}{3k^2+4},-\frac{3kn}{3k^2+4})$, $\therefore -\frac{3kn}{3k^2+4}=\frac{-4kn}{3k^2+4}+1$即$kn=3k^2+4$

且$\Delta=36k^2n^2-12(n^2-4)(3k^2+4)=48(3k^2+4-n^2)>0\Leftrightarrow 3k^2+4-\frac{(3k^2+4)^2}{k^2}>0$得$k\in\Phi$

2）椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，直线$l$过椭圆$C$的左焦点，试问椭圆$C$上是否存在两点$A$、$B$关于直线$l$对称，试说明理由. 利用定义得若直线为$y=0$时，存在；否则不存在

（3）①已知曲线$y^2=ax$与其关于点$(1,1)$对称曲线有两个不同的交点的直线的倾斜角为$45°$,则$a=$（　　）

$A.1$　$B.\frac{\sqrt{2}}{2}$　$C.2$　$D.\pm 2$

$key1$:由已知得弦AB的中点为$(1,1)$,且$k_{AB}=1=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{a}{y_A+y_B}=\frac{a}{2}$, $\therefore a=2$

$key2$:对称曲线方程为:$(2-y)^2=a(2-x)$

$(2-y)^2-y^2=a(2-x)-ax=a(2-2x)=(2-2y)\cdot 2$即$ax-2y+2-a=0$, $\therefore a=2$

②A、B是抛物线$y=-x^2+8$上关于直线$x-y+1=0$对称的两点，则$|AB|=$________.

key:由已知得$l_{AB}:y=-x+m$代入抛物线方程得：$x^2-x+m-8=0$

$\therefore\begin{cases}x_A+x_B=\frac{1}{2}\\x_Ax_B=m-8\end{cases}$,且$\Delta=33-4m>0$,且$AB$的中点坐标为$(\frac{1}{4},m-\frac{1}{4})$,

$\therefore\frac{1}{4}-(m-\frac{1}{4})+1=0$即$m=\frac{3}{2}$, $\therefore|AB|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{27}=3\sqrt{6}$

（4）已知双曲线C:$\frac{x^2}{3}-y^2=1$关于直线$l:y=kx+1$的对称双曲线C',若C与C'有公共点，则k的取值范围为______.

key:当直线l与曲线C有公共点时，得$\begin{cases}y=kx+1\\x^2-3y^2=3\end{cases}$得$(1-3k^2)x^2-6kx-6=0$

$\Leftrightarrow k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, or, $\begin{cases}1-3k^2\ne 0\\\Delta=12(2-3k^2)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow k\in[-\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}]$，此时$C$与$C'$有公共点

当$k\in(-\infty,-\frac{\sqrt{6}}{3})\cup(\frac{\sqrt{6}}{3},+\infty)$时，则与直线$l$垂直的直线$l'$与曲线$C$有两个相异交点且交点的中点在直线$l$上

由$\begin{cases}x+ky+n=0\\x^2-3y^2=3\end{cases}$消去$x$得:$(k^2-3)y^2+2kny+n^2-3=0$

$\therefore$中点坐标为$(\frac{3n}{k^2-3},-\frac{kn}{k^2-2})$, 且$\Delta=12(n^2+k^2-3)>0,\therefore -\frac{kn}{k^2-3}=\frac{3kn}{k^2-3}+1$即$n=-\frac{k^2-3}{4k}$,

$\therefore \frac{(k^2-3)^2}{16k^2}+k^2-3>0$得$k^2>3, or, k^2<\frac{1}{17},\therefore k^2>3$, 综上：$k$的取值范围为$(-\infty,-\sqrt{3})\cup[-\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}]\cup(\sqrt{3},+\infty)$

（六）切线问题

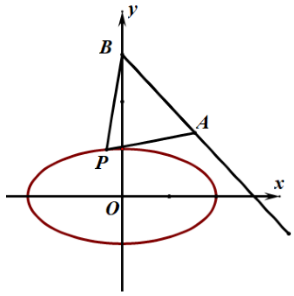
(2005山东）设直线$l:2x+y+2=0$关于原点对称的直线l'，若l'与椭圆$x^2+\frac{y^2}{4}=1$的交点为A、B，点P为椭圆上的动点，则使$\triangle PAB$的面积为$\frac{1}{2}$的个数为（ ）$A.1$ $B.2$ $C.3$ $D.4$ B

$key: l':2x+y-2=0, |AB|=\sqrt{5},\therefore S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot d=\frac{1}{2}$得$d=\frac{1}{\sqrt{5}}$

与l'平行的直线$l_1:2x+y+c=0$代入椭圆方程得$:2x^2+cx+\frac{1}{4}c^2-1=0$

$\therefore \Delta=c^2-8(\frac{1}{4}c^2-1)=8-c^2=0$得$c=\pm2\sqrt{2},\therefore d_1=\frac{2\sqrt{2}+2}{\sqrt{5}}>\frac{1}{\sqrt{5}}, d_2=\frac{2\sqrt{2}-2}{\sqrt{5}}<\frac{1}{\sqrt{5}}$

(2022A)7.在平面直角坐标系中，椭圆$\Omega:\frac{x^2}{4}+y^2=1, P$为$\Omega$上的动点，$A, B$为两个定点，其中$B$的坐标为$(0,3)$. 若$\triangle PAB$的面积的最小值为1、最大值为5，则线段$AB$的长为____.

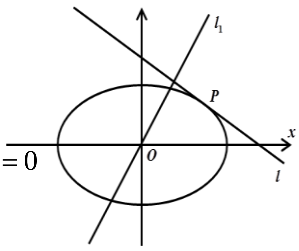


$2022A7key: l_{AB}: y=kx+3$, 设$P(2\cos\alpha,\sin\alpha)$, 则$\sin\alpha<k\cdot2\cos\alpha+3$

则$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+k^2}|x_A|\cdot\frac{k\cdot2\cos\alpha+3-\sin\alpha}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{|x_A|}{2}\cdot(2k\cos\alpha-\sin\alpha+3)$

$\therefore\begin{cases}\frac{1}{2}|x_A|\cdot(3-\sqrt{1+4k^2})=1\\ \frac{1}{2}|x_A|\cdot(3+\sqrt{1+4k^2})=5\end{cases}$ 得$|x_A|=2, k^2=\frac{3}{4},\therefore|AB|=\sqrt{7}$

（2014浙江）如图，设椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$动直线$l$与椭圆$C$只有一个公共点$P$，且点$P$在第一象限.（1）已知直线$l$的斜率为$k$，用$a,b,k$表示点$P$的坐标；



（2）若过原点O的直线l_1与l垂直，证明：点P到直线l_1的距离的最大值为$a-b$.

解:(Ⅰ) 设l的方程为$y=kx+m$代入椭圆方程得$(a^2k^2+b^2)x^2+2kma^2x+a^2(m^2-b^2)=0$

$\therefore \Delta=4a^2b^2(a^2k^2+b^2-m^2)=0$即$a^2k^2+b^2=m^2$, 且切点$P(\frac{-a^2k}{\sqrt{b^2+a^2k^2}},\frac{b^2}{\sqrt{b^2+a^2k^2}})$

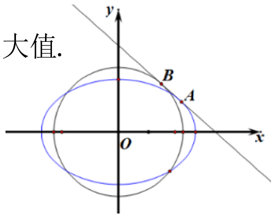
(Ⅱ) 证明：由已知得l_1的方程为$y=-\frac{1}{k}x$即$x+ky=0$

$\therefore P$到l_1的距离为$\frac{\left|-\frac{a^2k}{\sqrt{b^2+a^2k^2}}+\frac{kb^2}{\sqrt{b^2+a^2k^2}}\right|}{\sqrt{1+k^2}}=(a^2-b^2)\cdot\sqrt{\frac{k^2}{(a^2k^2+b^2)(k^2+1)}}$

$=(a^2-b^2)\sqrt{\frac{1}{a^2k^2+\frac{b^2}{k^2}+a^2+b^2}}\le(a^2-b^2)\sqrt{\frac{1}{2ab+a^2+b^2}}=a-b$(当且仅当$k^2=\frac{b}{a}$时，取$=$）得证

2023-11-04

（2004四川）已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，动圆$E:x^2+y^2=R^2(b<R<a)$，若$A$是椭圆$C$上的动点，$B$是动圆$E$上的动点，且使直线$AB$与椭圆$C$和动圆$E$均相切，求$A$、$B$两点的距离$|AB|$的最大值.



变式.已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，直线$l$与椭圆切于点$P$，且与$x$轴正半轴、$y$轴正半轴分别交于$A$、$B$，若$|PA|=b$，则$|PB|=$____.

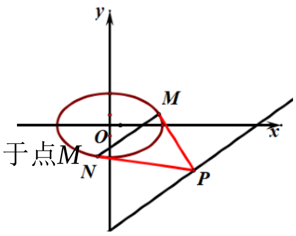
key：设l方程为$y=kx+m$，代入椭圆方程得$(a^2k^2+b^2)x^2+2a^2kmx+a^2m^2-a^2b^2=0$

$\therefore \Delta=0$即$a^2k^2+b^2=m^2$，且$x_P=\frac{-a^2km}{a^2k^2+b^2}=\frac{-a^2k}{m}$

$\therefore |PA|=\sqrt{1+k^2}\cdot|\frac{-m}{k}+\frac{a^2k}{m}|=\frac{\sqrt{1+k^2}b^2}{-km}=b$即$\frac{\sqrt{1+k^2}}{m}=\frac{-k}{b}$

$\therefore |PB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{-a^2k}{m}=\frac{a^2k^2}{b}=a$（而由$\begin{cases}a^2k^2+b^2=m^2\\ b^2(1+k^2)=k^2m^2\end{cases}$得$k^2=\frac{b}{a}$）

（2008湖南，2017广东）过直线$L:5x-7y-70$上的点P作椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$的切线$PM$、$PN$，切点分别为$M$、$N$，联结$MN$.（1）当点$P$在直线$L$上运动是，证明：直线$MN$恒过定点$Q$;
（2）当$MN//L$时，定点Q平分线段MN.



证明：（1）先证：若点$M(x_0,y_0)$是椭圆上任意一点，则直线$\frac{x_0x}{25}+\frac{y_0y}{9}=1$与椭圆切于点$M$

由$\begin{cases}\frac{x_0x}{25}+\frac{y_0y}{9}=1\\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1\end{cases}$得$\begin{cases}(\frac{y_0y}{9})^2=(1-\frac{x_0x}{25})^2\\ \frac{y_0^2y^2}{9^2}=\frac{y_0^2}{9}(1-\frac{x^2}{25})\end{cases}$消去$y$得$(\frac{x_0^2}{25^2}+\frac{y_0^2}{9\cdot 25})x^2-\frac{2x_0x}{25}+1-\frac{y_0^2}{9}=\frac{1}{25}x^2-\frac{2x_0}{25}x+\frac{x_0^2}{25}=0$

$\therefore \Delta=\frac{4x_0^2}{25^2}-\frac{4x_0^2}{25^2}=0$, 证毕

$\therefore l_{PM}:\frac{x_Mx}{25}+\frac{y_My}{9}=1, l_{PN}:\frac{x_Nx}{25}+\frac{y_Ny}{9}=1$, 设$P(s,t)$(其中$5s-7t-70=0$)

则$\begin{cases}\frac{x_Ms}{25}+\frac{y_Mt}{9}=1\\ \frac{x_Ns}{25}+\frac{y_Nt}{9}=1\end{cases}$,$\therefore l_{MN}:\frac{sx}{25}+\frac{ty}{9}=1$即$\frac{sx}{25}+\frac{(5s-70)y}{63}=(\frac{x}{25}+\frac{5y}{63})s-\frac{10}{9}y=1$经过定点$Q(\frac{25}{14},-\frac{9}{10})$

（2）当$MN//L$时,$\frac{\frac{s}{25}}{5}=\frac{\frac{t}{9}}{-7}$, 且$5s-7t-70=0$

由$\begin{cases}\frac{x_M^2}{25}+\frac{y_M^2}{9}=1\\ \frac{x_N^2}{25}+\frac{y_N^2}{9}=1\end{cases}$得$\frac{(x_M+x_N)(x_M-x_N)}{25}+\frac{(y_M+y_N)(y_M-y_N)}{9}=0\Leftrightarrow\frac{x_M+x_N}{25}+\frac{y_M+y_N}{9}\cdot\frac{5}{7}=0$

$\therefore k_{OQ'}=\frac{y_M+y_N}{x_M+x_N}=-\frac{63}{125}=\frac{-\frac{9}{10}}{\frac{25}{14}}=\frac{63}{125}=\frac{y_Q}{x_Q}=k_{OQ}$（$Q'$为$MN$的中点）,$\therefore Q'=Q$,$\therefore$定点$Q$平分线段$MN$