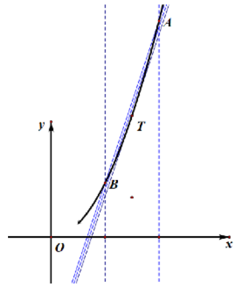
2022-12-04

（4）①已知二次函数 $f(x)=-x^2+ax+b(a,b\in R)$，设 $M(a,b)$ 是函数 $g(x)=|f(x)|$ 在 $[1,2]$ 上的最大值.

则 $M(1,b)=$ ________ 关于 b 的解析式；$\begin{cases} b, b\ge 1, \\ 2-b, b<1. \end{cases}$



若对任意的 $a,b\in R$，恒有 $M(a,b)\ge M(a_0,b_0)$，则 $(a_0,b_0)=$ ______. $(3,-\frac{17}{8})$

$key1: M(a_0,b_0)=\frac{f(x)_{\max}-f(x)_{\min}}{2}$

$key2$:（三点法）$\begin{cases} f(1)=-1+a+b \\ f(2)=-4+2a+b \\ f(\frac{3}{2})=-\frac{9}{4}+\frac{3}{2}a+b \end{cases}$ $,\therefore f(1)+f(2)-2f(\frac{3}{2})=-\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{1}{2}=|f(1)+f(2)-2f(\frac{3}{2})|\le 4M(a,b),\therefore M(a_0,b_0)=\frac{1}{8}$, 且 $f(1)=f(2)=-f(\frac{3}{2})=\pm\frac{1}{2}$ 得 $a_0=3, b_0=-\frac{17}{8}$

$key3$:（截距函数）$|f(x)|=|x^2-(ax+b)|$, 如图

② 若关于 x 的不等式 $ax+6+|x^2-ax-6|\ge 4$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为（ ） B

$A.(-\infty,1]$ $B.[-1,1]$ $C.[-1,+\infty)$ $D.(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

$key: f(x)=\max\{x^2,-x^2+2ax+12\},\therefore \begin{cases} 8+4a\ge 4 \\ 8-4a\ge 4 \end{cases},\therefore -1\le a\le 1$

（2016年1月学考）已知函数 $f(x)=x|x+a|+m|x-1|, 0\le x\le 2$, 其中 $a,m\in R$.

（Ⅰ）若 $a=0,m=1$，求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）对于给定的实数 a, 若函数 $f(x)$ 存在最大值 $1+a$，求实数 m 的取值范围（用 a 表示）

（Ⅰ）$f(x)=x^2+|x-1|=\max\{x^2+x-1,x^2-x+1\}$, 如图, $\therefore f(x)$ 的递增区间为 $[\frac{1}{2},2]$, 递减区间为 $[0,\frac{1}{2}]$

（Ⅱ）$f(0)=m\le a+1, f(1)=|a+1|\le 1+a$ 得 $a\ge -1$

$\therefore f(2)=2|2+a|+m=4+2a+m\le a+1$ 即 $m\le -a-3(a\ge -1)$

当 $1\le x\le 2$ 时, $f(x)=x^2+(a+m)x-m$,

$\therefore f(x)_{\max}=\max\{1+a,2a+m+4\}=1+a(\because a+1-(2a+m+4)=-a-m-3\ge 0)$

当 $0\le x\le 1$ 时，$f(x)=|x^2+ax|+m(1-x)=\max\{x^2+(a-m)x+m,-x^2-(a+m)x+m\}$

由 $f_1(x)-f_2(x)=x^2+(a-m)x+m-(-x^2-(a+m)x+m)=2x^2+2ax=2x(x+a)$

$-\frac{a-m}{2}\le -a-\frac{3}{2}\le -\frac{1}{2}, -\frac{a+m}{2}\ge\frac{3}{2}$,

当 $-a\le 0$ 即 $a\ge 0$ 时，$f_1(x)\ge f_2(x), f(x)=f_1(x)$, 如图, $f(x)_{\max}=f(1)=a+1$

当 $-1\le a<0$ 时，$f_1(x)>f_2(x)\Leftrightarrow -a<x\le 1$, 如图，$f(x)_{\max}=f(1)=a+1$

综上：m 的取值范围为 $(-\infty,-a-3](a\ge -1)$

（202006 学考） 设$a\in R$,已知函数$f(x)=|x^2-a|+|a^2-x|, x\in[-1,1]$.

（Ⅰ）当$a=0$时，判断函数$f(x)$的奇偶性；（Ⅱ）当$a\le 0$时，证明：$f(x)\le a^2-a+2$;

（Ⅲ）若$f(x)\le 4$恒成立，求实数a的取值范围.

key:（Ⅱ）$f(x)=\max\{|x^2-x+a^2-a|,|x^2+x-a^2-a|\}(-1\le x\le 1)$, 记$f(x)$在$[-1,1]$上的最大值为$M$,

则$M=\max\{\max\{2+a^2-a,\frac{1}{4}-a^2+a\},\max\{2-a^2-a,\frac{1}{4}+a^2+a\}\}$

$\because a\le 0,\therefore (2+a^2-a)-(\frac{1}{4}-a^2+a)=2a^2-2a+\frac{7}{4}>0,$

$2+a^2-a)-(2-a^2-a)=2a^2>0,(2+a^2-a)-(\frac{1}{4}+a^2+a)=-2a+\frac{7}{4}>0,\therefore M\le a^2-a+2,\therefore$ 得证

（Ⅲ）当$a\le 0$时，由（Ⅱ）得：$a^2-a+2\le 4$即$-1\le a\le 0$

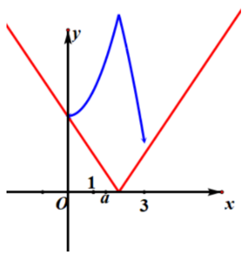
当$a>0$时，$\therefore \frac{1}{4}+a^2+a-(\frac{1}{4}-a^2+a)=2a^2>0,(2+a^2-a)-(2-a^2-a)=2a^2>0,$

$\therefore\begin{cases}\frac{1}{4}+a^2+a\le 4\\ 2+a^2-a\le 4\end{cases}$ 得$0<a\le\frac{3}{2}$.$\therefore a$的取值范围为$[-1,\frac{3}{2}]$

变式 1（1）已知函数 $f(x)=|x^2-4|+a|x-2|(a>0)$在$x\in[0,3]$上的最大值7,则$a=$_______. $\frac{3}{2}$

$key1$: 令$x=0$得$4+2a\le 7$即$a\le\frac{3}{2}$; 令$x=3$得$5+a\le 7$即$a\le 2,\therefore 0<a\le\frac{3}{2}$

$f(x)=\max\{|(x-2)(x+2+a)|,|(x-2)(x+2-a)|\}$, 如图，



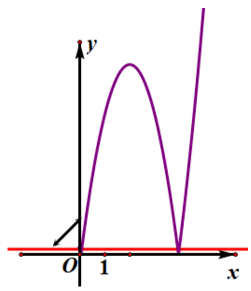
而$(2-\frac{a}{2})^2<4,\therefore \max\{4+2a,5+a\}=7$得$a=\frac{3}{2}$

$key2: a|x-2|\le 7-|x^2-4|=\begin{cases}11-x^2,2\le x\le 3,\\ x^2+3,0\le x\le 2\end{cases}$ 恒成立，且等号成立

如图，得$a=\frac{3}{2}$

（2）已知函数$f(x)=\begin{cases}|x^2-4x-a|+|x^2-4x+a^2|,0<x\le 5,\\ x+2a+2,-1\le x\le 0\end{cases}$的最小值是$a^2+a$，则实数$a$的取值范围

为（　）$A.[0,\frac{\sqrt{5}-1}{2}]$ $B.[0,\frac{\sqrt{5}-1}{2}]\cup\{\frac{\sqrt{5}+1}{2}\}$ $C.[0,\frac{\sqrt{5}+1}{2}]$ $D.[0,\frac{\sqrt{5}+1}{2}]\cup\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}\}$



$key: f(-1)=2a+1\ge a^2+a$得$\frac{1-\sqrt{5}}{2}\le a\le\frac{1+\sqrt{5}}{2}$,

$\because f(x)=\begin{cases}\max\{|2x^2-8x+a^2-a|,|a^2+a|\},0<x\le 5,\\ x+2a+2,-1\le x\le 0,\end{cases}$

设$g(x)=2x^2-8x+a^2-a$, 则$g(5)=a^2-a+10>0, g(x)_{\min}=g(2)=a^2-a-8<0$

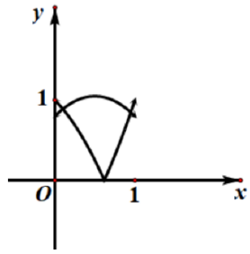
$\therefore\begin{cases}a^2+a\ge 0\\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}\le a\le\frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{cases}$即$0\le a\le\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, or, $\begin{cases}a^2+a<0\\ 2a+1=a^2+a\end{cases}$ 即$a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

（3）已知函数$f(x)=|\sqrt{x}-a|+2|x-b|(a\in R,b\in R)$,当$x\in[0,4]$时，$f(x)$的最大值为$M(a,b)$,

则$M(a,b)$的最小值为____________.5

（4）已知函数 $f(x)=|x+a|+|x^2+b|$， $x\in[0,1]$，设 $f(x)$ 的最大值为 M，若 M 的最小值为 1 时，则 a 的值可以是（　　）A

A. $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$　　B. 0　　C. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　　D. 1



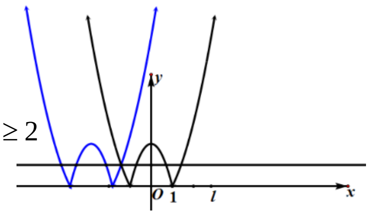
$key: f(x)=\max\{|x^2+x+a+b|,|x^2-x-a+b|\}$

$\therefore M=\max\{\max\{2+a+b,-a-b\},\max\{-a+b,\frac{1}{4}+a-b\}\}$

$\therefore 2M\ge 2+a+b-a-b=2$即$M\ge 1$,且$2M\ge -a+b+\frac{1}{4}-a+b=\frac{1}{4}$,$\therefore M\ge 1$(当且仅当$a+b=-1$时取＝）

$\therefore a+b=-1,\therefore f(x)=\max\{|x^2+x-1|,|x^2-x-2a-1|\},\therefore\begin{cases}-2a-1\le 1\\-2a-\frac{5}{4}\ge -1\end{cases}$即$-1\le a\le -\frac{1}{8}$

变式 2：设函数 $f(x)=\begin{cases}2(1-x^2),|x|\le 1,\\x^2-1,|x|>1\end{cases}$，若$|f(x)+f(x+l)-2|+|f(x)-f(x+l)|\ge 2(l>0)$对任意实数 x 都成立，则 l 的最小值为________.　$2\sqrt{3}$



$key:|f(x)+f(x+l)-2|+|f(x)-f(x+l)|=\max\{|2f(x)-2|,|2f(x+l)-2|\}\ge 2$

$\Leftrightarrow\max\{|f(x)-1|,|f(x+l)-1|\}\ge 1$,如图，

得$l_{\min}=2\sqrt{3}$

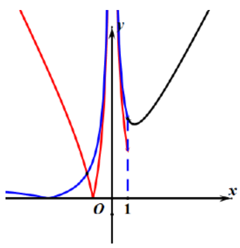
（2022-2023 上温州中学期中）22. 已知实数$a\ge 0$，函数 $f(x)=||x-1|+\frac{4}{x}+a|+|x-a|$..

（1）当 $a=0$ 时，求函数 $f(x)$ 的最小值；

（2）若 $f(x)\ge 4$ 在定义域内恒成立，求实数 a 的取值范围.

解：（1）由$f(x)=||x-1|+\frac{4}{x}|+|x|=\begin{cases}|x-1+\frac{4}{x}|+x=2x+\frac{4}{x}-1,x\ge 1,\\|1-x+\frac{4}{x}|+|x|=\max\{|1+\frac{4}{x}|,|1-2x+\frac{4}{x}|\},x\le 1,\end{cases}$

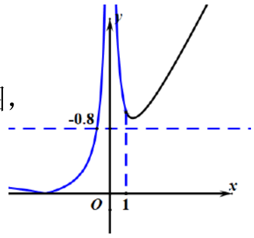
如图，由$-1-\frac{4}{x}=1-2x+\frac{4}{x}$得$x=\frac{1-\sqrt{17}}{2}$



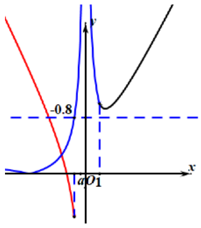
$\therefore f(x)_{\min}=\min\{f(\frac{1-\sqrt{17}}{2}),f(\sqrt{2})\}=\min\{\frac{\sqrt{17}-1}{2},4\sqrt{2}-1\}=\frac{\sqrt{17}-1}{2}$

（2）由$f(x)=\max\{|x-1|+\frac{4}{x}+x|,||x-1|+\frac{4}{x}-x+2a|\}$,

设$p(x)=||x-1|+\frac{4}{x}+x|=\begin{cases}|x-1+\frac{4}{x}+x|=2x+\frac{4}{x}-1\geq 4\sqrt{2}-1>4, x\geq 1,\\|1+\frac{4}{x}|, x\leq 1\end{cases}$ 如图，



由$-1-\frac{4}{x}=4$得$x=-\frac{4}{5}$,$\therefore||x-1|+\frac{4}{x}-x+2a|\geq 4$对$x\leq-\frac{4}{5}$恒成立，



设$q(x)=|x-1|+\frac{4}{x}-x+2a=-2x+\frac{4}{x}+1+2a$在$x\leq-\frac{4}{5}$上递减,

$\therefore q(-\frac{4}{5})=\frac{8}{5}-5+1+2a\geq 2$得$a\geq\frac{16}{5}$,$\therefore a$的取值范围为$[\frac{16}{5},+\infty)$.