解析几何（1）直线与圆解答（2）

2023-09-09

（2018福建）已知点$A(-2,0),B(2,0),C(0,2)$，直线$y=kx+b(k>0)$交线段CA于点D，交下端CB于点E.

若$\triangle CDE$的面积为2，则b的取值范围为（B ）

$A.(\sqrt{2}-1,1)$ $B.(2-\sqrt{2},\frac{2}{3}]$ $C.(2-\sqrt{2},\frac{3}{4}]$ $D.(\sqrt{2}-1,\frac{2}{3}]$

（2000II）8.在坐标平面内，与点 $A(1,2)$的距离为 1，且与点 B(3,1)的距离为 2 的直线共有（ B ）

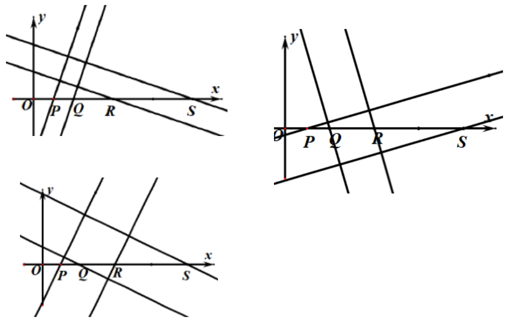
A 1 条 B 2 条 C 3 条 D 4 条

（06 浙江）已知两点 $A(1,2),B(3,1)$ 到直线 l 的距离分别是 $\sqrt{2},\sqrt{5}-\sqrt{2}$,则满足条件的直线 l 共有（ C ）条

A.1 B.2 C.3 D.4

（2015浙江竞赛）若过点$P(1,0),Q(2,0),R(4,0),S(8,0)$作四条直线构成一个正方形，则该正方形的

面积不可能是（ ）$A.\frac{16}{17}$ $B.\frac{36}{5}$ $C.\frac{26}{5}$ $D.\frac{196}{53}$ C



2015浙江key:过P的直线的倾斜角为θ,

如图1,则$\sin\theta=4\cos\theta$得$\tan\theta=4,\therefore S=(\frac{4}{\sqrt{17}})^2=\frac{16}{17}$

$3\sin\theta=6\cos\theta$得$\tan\theta=2,\therefore S=(\frac{6}{\sqrt{5}})^2=\frac{36}{5}$

$2\cos\theta=7\sin\theta$得$\tan\theta=\frac{2}{7},\therefore S=(\frac{14}{\sqrt{53}})^2=\frac{196}{53}$

（2018 年河北）在平面直角坐标系中，若与点 $A(2,2)$ 的距离为 1，且与点 $B(m,0)$ 的距离为 3 的直线恰有三条，则实数 m 的取值集合是________.$\{2-3\sqrt{3},2+2\sqrt{3}\}$

（2018 年贵州）函数 $z=\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{2x^2-10x+13}$ 的最小值是______. $\sqrt{10}$

变式 1（1）函数 $y=\sqrt{2x^2+8}-\sqrt{2x^2-6x+5}$ 的值域为_____________.

$key: y=\sqrt{(x+2)^2+(x-2)^2}-\sqrt{(x-1)^2+(x-2)^2}=|PA_1|-|PB|\le|A_1B|=3(A_1(-2,2),B(1,2),P(x,x))$

（2）已知正实数x,y满足$2x+y=2$,则$x+\sqrt{x^2+y^2}$的最小值为____;

$\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$的取值范围为_________.

$key1: O$关于$2x+y=2$的对称点$O'(1+1\cdot\cos(\pi-2\arctan 2),1\cdot\sin(\pi-2\arctan 2))$

$\therefore x+\sqrt{x^2+y^2}\ge|PH|+|PO|\ge x_{O'}=\frac{8}{5}$

$key2: x+\sqrt{x^2+y^2}=x+\sqrt{x^2+(2-2x)^2}=x+\sqrt{5(x-\frac{4}{5})^2+\frac{4}{5}}=(1,\sqrt{5})\cdot(x,\sqrt{(x-\frac{4}{5})^2+\frac{4}{25}})\ge\frac{8}{5}$

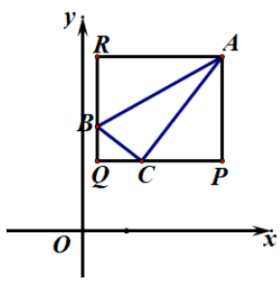
$\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{(1,1)\cdot(x,y)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\sqrt{2}\in(1,\sqrt{2}]$

（2006福建）对于直角坐标平面内的任意两点$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，定义它们之间的一种?距离”:

$\|AB\|=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$.给出下列三个命题：①若点$C$在线段$AB$上，则$\|AC\|+\|CB\|=\|AB\|$；

②在$\triangle ABC$中，若$\angle C=90°$,则$\|AC\|^2+\|CB\|^2=\|AB\|^2$;③在$\triangle ABC$中,$\|AC\|+\|CB\|>\|AB\|$.

其中真命题的个数为（ B）$A.0$ $B.1$ $C.2$ $D.3$



key:①对，如图设$a=x_A-x_C,b=x_C-x_B$，则$x_A-x_B=a+b$

$c=y_A-y_B,d=y_B-y_C$,则$y_A-y_C=c+d$,

$\because C=90°,\therefore k_{CA}\cdot k_{CB}=\frac{y_A-y_C}{x_A-x_C}\cdot\frac{y_B-y_C}{x_B-x_C}=\frac{c+d}{a}\cdot\frac{d}{-b}=-1$即$cd+d^2=ab$

$\therefore\|AC\|^2+\|CB\|^2-\|AB\|^2=(a+c+d)^2+(b+d)^2-(c+a+b)^2$

$=2d^2+2ad+2cd+2bd-2bc-2ab=2(bd+ad-bc)\neq 0,\therefore$ ②错

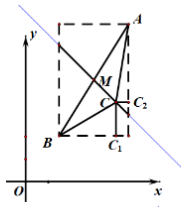
$\|AC\|+\|CB\|-\|AB\|=c+d+a+b+d-(a+b+c)=2d>0,\therefore$ ③对

（2010广东）设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$是平面直角坐标系xOy上的两点，先定义由点A到点B的一种折线距离$p(A,B)$为$p(A,B)=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$.对于平面$xOy$上给定的不同的两点$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$.

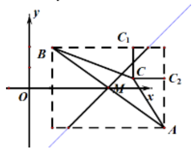
⑴ 若点$C(x,y)$是平面xOy上的点，试证明：$p(A,C)+p(C,B)\geq p(A,B)$;

⑵ 在平面xOy上是否存在点$C(x,y)$，同时满足：①$p(A,C)+p(C,B)=p(A,B)$;

②$p(A,C)=p(C,B)$.若存在，请求出所有符合条件的点，请予以证明.

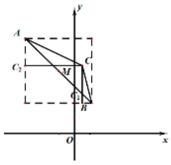


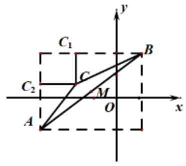
2010广东key:由⑴得：C在以线段AB为对角线的矩形内，



若A在B的右上方，得$x_1-x+y_1-y=x-x_2+y-y_2$即$x-\dfrac{x_1+x_2}{2}+y-\dfrac{y_1+y_2}{2}=0$

若A在B的左上方，得$x-x_1+y_1-y=x_2-x+y-y_2$即$x-\dfrac{x_1+x_2}{2}-y-\dfrac{y_1+y_2}{2}=0$



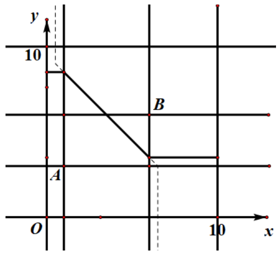


若A在B的右下方，得$x_1-x+y-y_1=x-x_2+y_2-y$即$x-y-\dfrac{x_1+x_2}{2}+\dfrac{y_1+y_2}{2}=0$

若A在B的左下方，得$x-x_1+y-y_1=x_2-x+y_2-y$即$x+y-\dfrac{x_1+x_2}{2}-\dfrac{y_1+y_2}{2}=0$

$\therefore$存在，且C在以AB为对角线的矩形内部，且经过AB的中点，斜率为± 1的线段

变式：在平面直径坐标系中，定义$d(P,Q)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$为两点$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$之间的“坐标距离”.若$C(x,y)$到$A(1,3),B(6,9)$的“坐标距离”相等，其中实数$0\leq x\leq 10,0\leq y\leq 10$,则所有满足探究的点$C$的轨迹的长之和为____.



key:由已知得:$|x-1|+|y-3|=|x-6|+|y-9|\,(0\leq x\leq 10,0\leq y\leq 10)$

当$0\leq x\leq 1$时,$|y-3|=5+|9-y|$得$y=\dfrac{17}{2}$

当$1\leq x\leq 6$时，$x-1+|y-3|=6-x+|y-9|$即$2x-7+|y-3|=|y-9|$

当$6\leq x\leq 10$时,$|y-3|=-5+|y-9|$得$y=\dfrac{7}{2}$

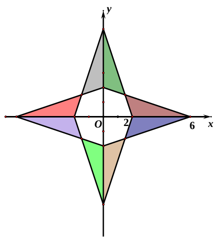
如图，故轨迹长度之和为$5+5\sqrt{2}$

（1994A）在平面直角坐标系中，方程$\dfrac{|x+y|}{2a}+\dfrac{|x-y|}{2b}=1$($a,b$是两个不相等的正数）所代表的曲线是（ ）$A.$三角形$B.$正方形$C.$非正方形的矩形$D.$非正方形的菱形

$key:\dfrac{|x+y|}{2a}+\dfrac{|x-y|}{2b}=1\xleftrightarrow{x\to -x,y\to -y}\dfrac{|x+y|}{2a}+\dfrac{|x-y|}{2b}=1,\therefore$关于原点对称

$\begin{cases}x^2-y^2\geq 0\\ |\dfrac{x+y}{2a}+\dfrac{x-y}{2b}|\leq\end{cases}$即$-1\leq\dfrac{x}{\frac{2ab}{b+a}}+\dfrac{y}{\frac{2ab}{b-a}}\leq 1,or,\begin{cases}x^2-y^2<0\\ |\dfrac{x+y}{2a}-\dfrac{x-y}{2b}|\leq\end{cases}$即$-1\leq\dfrac{x}{\frac{2ab}{b-a}}+\dfrac{y}{\frac{2ab}{b+a}}\leq 1,$

不妨设$b>a$，则其表示得区域如图：D



（2015A）在平面直角坐标系xOy中，点集$K=\{(x,y)\,|\,(|x|+|3y|-6)(|3x|+|y|-6)\leq 0\}$所对应的平面区域的面积为______.

$8\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot\dfrac{3}{2}=24$

（2019 年浙江）设三条不同的直线$l_1:ax+2by+3(a+b+1)=0,l_2:bx+2(a+b+1)y+3a=0,$

$l_3:(a+b+1)x+2ay+3b=0,$则它们相交于一点的充分必要条件为____________ $.a+b=-\dfrac{1}{2}$

变式：已知非空集合A,B满足$A=\{(x,y)\,|\,\dfrac{y-2}{x-1}=a\},B=\{(x,y)\,|\,(1-a)x+(1-a^2)y+3=0\}$,

若$A\cap B=\Phi$,则实数a的取值范围为_________.

解析几何（1）直线与圆解答（2）

2023-09-09

$key:\begin{cases}1-a=0\\1-a^2=0\end{cases},or,1-a+2(1-a^2)+3=0,or,\begin{cases}a=-\dfrac{1}{1+a}\\1-a+2(1-a^2)+3\neq 0\end{cases}$ 得$a\in\{-2,1,\dfrac{3}{2}\}$

（2019 年吉林）若直线 $2x+y-2=0$与直线$x+my-1=0$ 互相垂直,则点 $P(m,m)$到直线$x+y-3=0$ 的距离为__________ . $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

变式 1（1） 若方程$3x^2+2xy-y^2+7x-5y+k=0$表示两条直线，则k的取值范围为________ .

$$key1:(\text{长十字相乘法})\begin{array}{ccc}x & y & 1\\ 3 & -1 & -2\\ 1 & 1 & 3\\ \hline & 2 & -5\ \ 7\end{array},\therefore k=-6$$

$key2:3x^2+(2y+7)x-y^2-5y+k=0,\therefore\Delta=4y^2+28y+49-12(-y^2-5y+k)$

$=16y^2+88y+49-12k,\therefore\Delta_1=88^2+4\cdot16\cdot(49-12k)=0$得$k=-6$

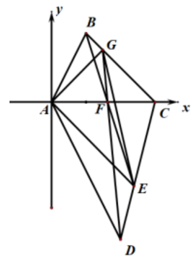
（2008I）10．若直线$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$通过点$M(\cos\alpha,\sin\alpha)$，则（ D ）

A．$a^2+b^2\le1$ B．$a^2+b^2\ge1$ C．$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\le1$ D．$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\ge1$

（2008 江苏）在平面直角坐标系 xOy 中，已知 $A(0,2),B(-2,0),C(1,0),P(0,p)(0<p<2)$，直线 BP 与 AC 交于点 E，直线 CP 与 AB 交于点 F，若 $OE\perp OF$，则实数 p 的值是______.$\dfrac{1}{2}$

变式 1（1）点 $P(-1,-\dfrac{1}{2})$到直线$(2m+1)x+(3m-2)y-18m+5=0$ 的距离的取值范围为________.$[0,\dfrac{\sqrt{145}}{2}]$

(2) 如图，在四边形$ABCD$中,$A(0,0),B(1,2),C(3,0),D(2,-4)$,在$CD$上取一点$E$，$BE$与$AC$相交于$F$，延长$DF$交$BC$于$G$.求证：$\angle GAC=\angle EAC$.



证明：由已知得$l_{CD}:\dfrac{x-3}{2-3}=\dfrac{y}{-4}$即$4x-y-12=0;l_{BC}:\dfrac{x-3}{1-3}=\dfrac{y}{2}$即$x+y-3=0$

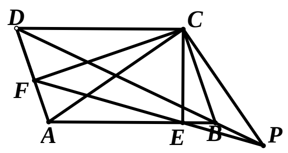
设$F(f,0)$,则$l_{BE}:2(x-f)-(1-f)y=0;l_{DG}:4(x-f)+(2-f)y=0$

则$l_{AE}:2(x-f)-(1-f)y+\lambda(4x-y-12)=0$过$A$得$\lambda=-\dfrac{f}{6},\therefore k_{AE}=-\dfrac{12-4f}{7f-6}$

$l_{AG}:4(x-f)+(2-f)y+\mu(x+y-3)=0$过$A$得$\mu=-\dfrac{4f}{3},\therefore k_{AG}=-\dfrac{\frac{12-4f}{3}}{\frac{6-7f}{3}}=-k_{AE},\therefore\angle GAC=\angle EAC$

(3) 在▱$ABCD$(非菱形或矩形）中，作$CE\perp AB=E,CF\perp AD=F$，连$FE$并延长交$DB$的延长线于$P$,证明：$\angle FCP=90°$.

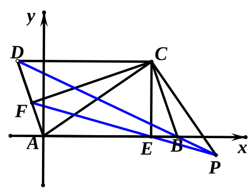
①建系如图，设$A(0,0),B(b,0),C(c,d)$,则$D(c-b,d),E(c,0)$,



则$l_{AD}:y=\dfrac{d}{c-b}x$即$dx+(b-c)y=0,\therefore l_{CF}:(b-c)(x-c)-d(y-d)=0$

$\therefore l_{EF}:(b-c)(x-c)-d(y-d)+\lambda(dx+(b-c)y)=0$得$\lambda=-\dfrac{(b-c)^2+d^2}{bd}$

而$l_{BD}:d(x-b)-(c-2b)y=0$



$\therefore l_{CP}:(b-c)(x-c)-d(y-d)+\lambda(dx+(b-c)y)+\mu(d(x-b)-(c-2b)y)=0$

得$\mu=-\lambda,\therefore k_{CP}\cdot k_{CF}=\dfrac{b-c}{d+b\lambda}\cdot\dfrac{c-b}{-d}$

$=\dfrac{b-c}{d-\frac{(b-c)^2+d^2}{d}}\cdot\dfrac{b-c}{d}=\dfrac{d}{c-b}\cdot\dfrac{b-c}{d}=-1,\therefore CF\perp CP$即$\angle FCP=90°$

解析几何（1）直线与圆解答（2）

2023-09-09

（1992II）已知直线 l_1和l_2 夹角的平分线为 $y=x$，如果 l_1 的方程是 $ax+by+c=0(ab>0)$，那么 l_2 的方程是（ A ） $A.bx+ay+c=0$ $B.ax-by+c=0$ $C.bx+ay-c=0$ $D.bx-ay+c=0$

（2015 福建）2．若直线 l_2 与直线 $l_1: y=2x-1$ 关于直线 $y=x$ 对称，则 l_2 与两坐标轴围成的三角形的面积为（ D ）A．1 B．$\frac{2}{3}$ C．$\frac{1}{2}$ D．$\frac{1}{4}$

（2006 河北）7. 以直线 $l: mx-y+3m+4=0$ 为对称轴，点 $P(1,1)$ 的对称点 Q 的轨迹方程为____________$(x+3)^2+(y-4)^2=25$

（2003I）已知矩形的四个顶点$A(0,0),B(2,0),C(2,1),D(0,1)$,一质点从$AB$的中点$P_0$与$AB$夹角为$\theta$方向射到$BC$上的点$P_1$后,依次反射到$CD,DA,AB$上的点$P_2,P_3$和$P_4$(入射角与反射角相等),设$P_4$的坐标为$(x_4,0)$,若$1<x_4<2$,则$\tan\theta$的取值范围为（ ）

A．$(\frac{1}{3},1)$ B．$(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ C．$(\frac{2}{5},\frac{1}{2})$ D．$(\frac{2}{5},\frac{2}{3})$

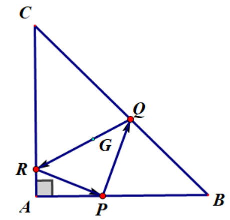
$key: P_0P_1: y=k(x-1)\therefore P_1(2,k)\Rightarrow P_1P_2: y-k=-k(x-2)$

$\therefore P_2(3-\frac{1}{k},1)\Rightarrow P_2P_3: y-1=k(x-3+\frac{1}{k})$

$\therefore P_3(0,2-3k)\Rightarrow P_3P_4: y=-kx+2-3k,\therefore x_4=\frac{2}{\tan\theta}-3\in(1,2),\therefore \tan\theta\in(\frac{2}{5},\frac{1}{2})$

（2013 湖南）在等腰直角$\triangle ABC$中，$AB=AC=4$,点P是边AB上异于A,B的一点光线从点P出发，经BC,CA反射后又回到点P(如图).若光线QR经过$\triangle ABC$的重心，则AP等于（ ）$A.2$ $B.1$ $C.\frac{8}{3}$ $D.\frac{4}{3}$ D

key:以AB、AC所在直线为x、y轴建立直角坐标系，设$P(a,0)$

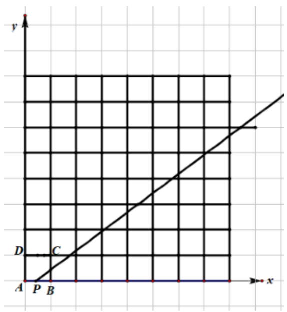


则BC：$x+y=4, G(\frac{4}{3},\frac{4}{3}), P$关于$BC$的对称点$P_1(4,,4-a)$,

G关于AC的对称点$G'(-\frac{4}{3},\frac{4}{3}), P_1$关于$AC$的对称点$P_2(-4,4-a)$

由已知得：G',P_2,P三点共线,$\therefore\frac{-\frac{4}{3}}{a+\frac{4}{3}}=\frac{4-a}{-4-a}$得$a=\frac{4}{3}$

（2012 大纲）正方形$ABCD$的边长为1，点E在边AB上，$AE=BF=\frac{3}{7}$，动点P从E出发沿直线向F运动，每当碰到正方形的边时反弹，反弹时反射角等于入射角，当点P第一次碰到E时，P与正方形的边的碰撞次数为（ ）$A.16$ $B.14$ $C.12$ $D.10$



$2.y=\frac{3}{4}(x-\frac{3}{7})$令$x=4+\frac{3}{7}$得$y=3$

纵坐标从0到3经过$y=1,y=2,y=3$，故碰撞3次，

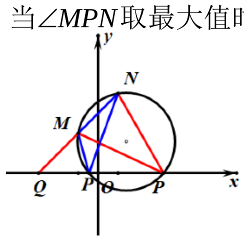
横坐标从$\frac{3}{4}$到$4\frac{3}{7}$经过$x=1,x=2,x=3,x=4$,故碰撞4次，

$\therefore$从点$(\frac{3}{7},0)$到达$(4\frac{3}{7},3)$共碰撞7次，故回到出发点碰撞14次

变式 1：已知单位正方形的四个顶点$A(0,0),B(1,0),C(1,1)$和$D(0,1)$,从A点向边CD上的点$P(\frac{3}{4},1)$发出一束光线被正方形各边反射，光线经过正方形某个顶点后射出，则这束光线在正方形内经过的路程长度为______.5

$key: y=\frac{4}{3}x$,令$x=3,y=4$得路程为5

（2004A）在平面直角坐标系xOy中，给定两点$M(-1,2)$和$N(1,4)$，点P在x轴上移动，当$\angle MPN$取最大值时，



点P的横坐标为__________.

$key:\dfrac{4-2}{1+1}=\dfrac{2}{-1-x_Q}$得$x_Q=-3,\therefore|QP|^2=2\cdot2\cdot4=16,\therefore P(1,0)$

变式 1.已知点$A(4,1),C(4,3)$,点P在直线$l:3x-y-1=0$上.则使$\angle APC$最大的P的坐标为____.

$(4-\sqrt{7},11-3\sqrt{7})$