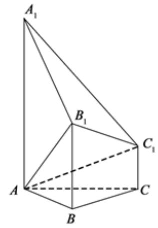
2023-05-21



(18高考）如图，已知多面体$ABCA_1B_1C_1$, A_1A, B_1B, C_1C均垂直于平面ABC, $\angle ABC=120°$,

$A_1A=4, CC_1=1, AB=BC=B_1B=2$.（Ⅰ）证明：$AB_1\perp$平面$A_1B_1C_1$;

（Ⅱ）求直线AC_1与平面ABB_1所成角的正弦值.

18（Ⅰ）证明:$\because AA_1\perp$平面ABC，$BB_1\perp$平面ABC, $\therefore AA_1//BB_1, AA_1\perp AB$

而$AB=1, BB_1=2, AA_1=4, \therefore A_1B_1=2\sqrt{2}, AB_1=2\sqrt{2}, \therefore AB_1\perp A_1B_1$

$\because CC_1\perp$平面ABC, $\therefore BB_1//CC_1, CC_1\perp BC, \because BC=2, CC_1=1, \angle ABC=120°$,

$\therefore B_1C_1=\sqrt{5}, AC=2\sqrt{3}, AC_1=\sqrt{13}, \therefore AC_1^2=AB_1^2+B_1C_1^2, \therefore AB_1\perp B_1C_1$

而$AB_1, B_1C_1\subset$平面AB_1C_1, $AB_1\cap B_1C_1=B_1$, $\therefore AB_1\perp$平面AB_1C_1

（Ⅱ）$\because AA_1\perp$平面ABC, $\therefore$平面$ABB_1A_1\perp$平面ABC,

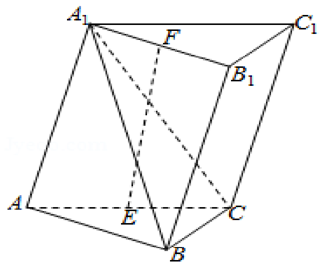
作$CD\perp$直线AB于D, 则$CD\perp$平面ABB_1A_1, 且$CD=\sqrt{3}$

$\because CC_1\perp$平面ABC, $BB_1\perp$平面ABC, $\therefore CC_1//BB_1$, $\therefore CC_1//$平面ABB_1,

$\therefore AC_1$与平面ABB_1所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}=\dfrac{\sqrt{39}}{13}$

(19高考）如图，已知三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$，平面$A_1ACC_1\perp$平面ABC, $\angle ABC=90°$,

$\angle BAC=30°, A_1A=A_1C=AC, E, F$分别为$AC, A_1B_1$的中点.



（Ⅰ）证明：$EF\perp BC$;（Ⅱ）求直线EF与平面A_1BC所成角的余弦值.

19（Ⅰ）证明:$\because$在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，

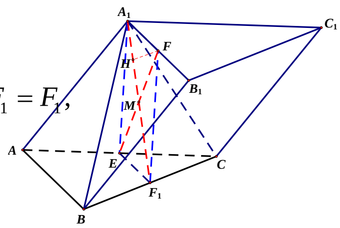
$\because A_1A=A_1C, E$是AC的中点，$\therefore A_1E\perp AC$,

$\because$平面$A_1ACC_1\perp$平面ABC, $\therefore A_1E\perp$平面ABC,

取BC的中点F_1，连FF_1, 则$A_1F\underset{=}{//}\dfrac{1}{2}AB\underset{=}{//}EF_1, \therefore A_1F\underset{=}{//}EF_1, \therefore A_1E\underset{=}{//}FF_1$

$\therefore FF_1\perp$平面ABC, $\therefore EF$在平面ABC内的射影为EF_1,

$\because \angle ABC=90°, \therefore EF_1\perp BC, \therefore EF\perp BC$



（Ⅱ）由（Ⅰ）得：$BC\perp EF_1, BC\perp EF$, 而$EF_1, EF_1\subset$平面AEF_1F, $EF_1\cap FF_1=F_1$,

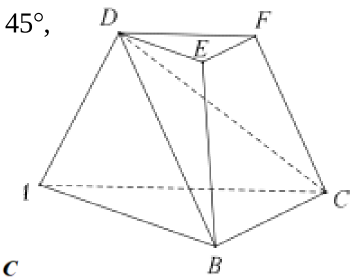
$\therefore BC\perp$平面AF_1FA_1, 而$BC\subset$平面A_1BC, $\therefore$平面$A_1BC\perp$平面EF_1FA_1,

设$EF\cap A_1F_1=M$, 则$\angle EMF_1$就是EF与平面A_1BC所成角，

令$AC=2$, 则$EF_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, A_1E=\sqrt{3}, \therefore \cos\angle EMF_1=\dfrac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}=\dfrac{3}{5}$即为所求的

(2020）如图，三棱台$DEF-ABC$中，面$ADFC\perp$面ABC, $\angle ACB=\angle ACD=45°$,

$DC=2BC$.（Ⅰ）证明：$EF\perp DB$;（Ⅱ）求DF与面DBC所成角的正弦值.



（Ⅰ）证明：作$DH\perp AC$于H，连HB, DB,

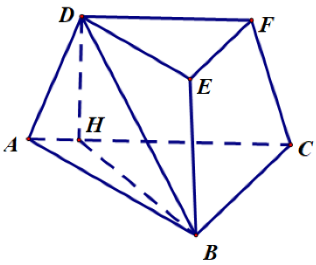
$\because$面$ADFC\perp$面ABC, $\therefore DH\perp$面ABC, $\therefore BC\perp DH$

令$BC=1$，则$DC=2$,

$\because \angle DCA=\angle ACD=45°, \therefore HC=\sqrt{2}, HB\perp BC$

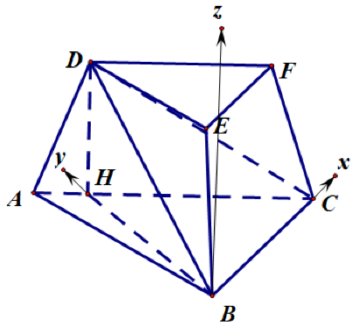
$\therefore BC\perp$面BDH, $\therefore BC\perp BD$,

在三棱台$DEF-ABC$中，$EF//BC$, $\therefore EF\perp BD$,



立体几何（3）线面角解答（2）

2023-05-21



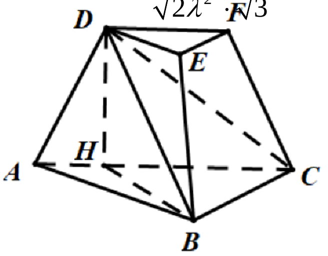
（Ⅱ）解：由（Ⅰ）建立空间直角坐标系如图，

则$C(1,0,0), H(0,1,0), D(0,1,\sqrt{2}), \overrightarrow{DF}=\lambda\overrightarrow{HC}=\lambda(1,-1,0)=(\lambda,-\lambda,0)$

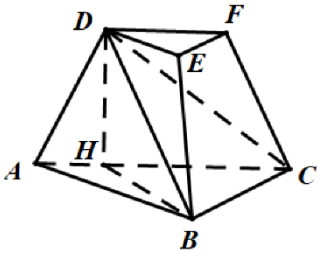
设平面BDC的法向量$\vec{n}=(x,y,z)$

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=x=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=y+\sqrt{2}z=0\end{cases}$，令$z=1$，则$\vec{n}=(0,-\sqrt{2},1)$

$\therefore \sin\theta=\dfrac{|(\lambda,-\lambda,0)\cdot(0,-\sqrt{2},1)|}{\sqrt{2\lambda^2}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$即为所求的

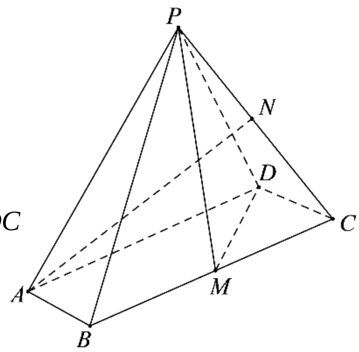


三垂线定理



线面垂直

（2021）19. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是平行四边形，$\angle ABC=120°, AB=1, BC=4,$ $PA=\sqrt{15}$，M，N分别为BC, PC的中点，$PD\perp DC, PM\perp MD$.



（1）证明：$AB\perp PM$；

（2）求直线AN与平面PDM所成角 正弦值. $\dfrac{\sqrt{15}}{6}$

⑴ 证明：在平行四边形$ABCD$中，$MC=2, CD=1, \angle MCD=60°, \therefore MD\perp DC$

$\because PD\perp DC, \therefore DC\perp$平面$PDM$，$\therefore PM\perp DC$，

$\because PM\perp MD$，而$MD, DC\subset$平面$ABCD$，$MD\cap DC=D$，$\therefore PM\perp$平面$ABCD$

而$AB\subset$平面$ABCD$，$\therefore PM\perp AB$

⑵ 解：由$DM=\sqrt{3}, AM=\sqrt{1+4-2\cdot1\cdot2\cdot(-\frac{1}{2})}=\sqrt{7}, \because PA=\sqrt{15}$

$\therefore PM=\sqrt{8}, PD=\sqrt{11}, PC=\sqrt{12}$，而$AC=\sqrt{21}$，

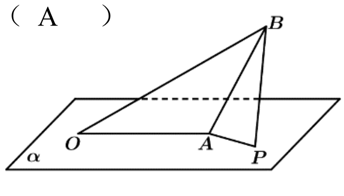
$\therefore|\overrightarrow{AN}|^2=\dfrac{2\overrightarrow{AP}^2+2\overrightarrow{AC}^2-(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})^2}{4}=15$，而$BN=\sqrt{11}$，$\therefore\cos\angle NAB=\dfrac{1+15-11}{2\cdot1\cdot\sqrt{15}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$

$\because DC\perp$平面PDM，$\therefore <\overrightarrow{AN}$，平面$PDM>=\dfrac{\pi}{2}-<\overrightarrow{AN},\overrightarrow{DC}>=\dfrac{\pi}{2}-<\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AB}>$

$\therefore\sin<\overrightarrow{AN}$，平面$PDM>=\dfrac{\sqrt{15}}{6}$即为所求的

（202107学考）18. 如图，平面$OAB\perp$平面$\alpha, OA\subset\alpha, OA=AB, \angle OAB=120°$．平面$\alpha$内一点$P$满足$PA\perp PB$，记直线$OP$与平面$OAB$所成角为$\theta$，则$\tan\theta$的最大值是（ A ）

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{12}$ B. $\dfrac{1}{5}$ C. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ D. $\dfrac{1}{3}$

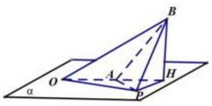


key：作$BH\perp OA$于H，则$BH\perp\alpha$，

$\because PA\perp PB, \therefore PH\perp AP$，

$\because$平面$OAB\perp\alpha, \therefore\theta=\angle POA$

$\therefore\sin\theta\le\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}}=\dfrac{1}{5}, \therefore\tan\theta\le\dfrac{1}{2\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{12}$



立体几何（3）线面角解答（2）

2023-05-21

（2022 甲）7. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 B_1D 与平面 $ABCD$ 和平面 AA_1B_1B 所成的角均为 $30°$，

则（　　D　）A. $AB=2AD$　　B. AB 与平面 AB_1C_1D 所成的角为 $30°$

C. $AC=CB_1$　　　　D. B_1D 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 $45°$

（2022Ⅰ）9. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，则（ABD　　）

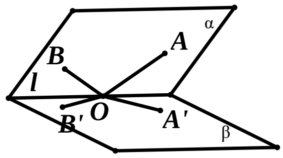
A. 直线 BC_1 与 DA_1 所成的角为 $90°$　　　　B. 直线 BC_1 与 CA_1 所成的角为 $90°$

C. 直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为 $45°$　　D. 直线 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $45°$

变式 1（1）① 如图，小于 90°的二面角 $\alpha-l-\beta$ 中，$O\in l, A,B\in\alpha$，且 $\angle AOB$ 为钝角，$\angle A'OB'$ 是 $\angle AOB$ 在 β 内的射影，则下列结论错误的是（　）D

$A.\angle A'OB'$ 为钝角　　　$B.\angle A'OB'>\angle AOB$

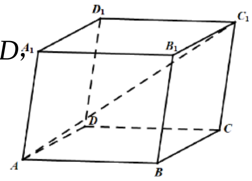
$C.\angle AOB+\angle AOA'<\pi$　$D.\angle B'OB+\angle BOA+\angle AOA'>\pi$



② 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$\angle BAD=90°, \angle A_1AB=\angle A_1AD=60°, AA_1=AB=AD$，

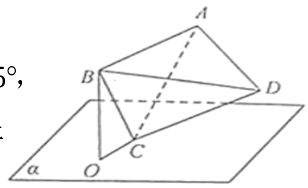
则 AA_1 与面 $ABCD$ 所成角的余弦值为______；45°

AC_1 与面 $ABCD$ 所成角的正弦值为________. $\frac{\sqrt{10}}{10}$



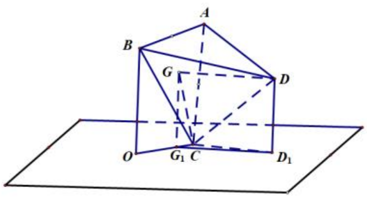
③已知 E、F 分别为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 AB、C_1D_1 的中点，则 A_1B_1 所在直线与过 E、C、F 四点的截面所成角的正切值为_________. $\sqrt{2}$

④ 如图，正四面体 $ABCD$ 的顶点 C 在平面 α 内，且直线 BC 与平面 α 所成的角为 $45°$，顶点 B 在平面 α 上的射影为点 O，当顶点 A 与点 O 的距离最大值时，直线 CD 与平面 α 所成角的正弦值等于（　）A

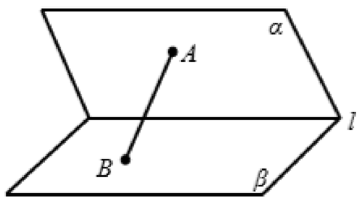


$A.\frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{12}$ $B.\frac{2\sqrt{2}+1}{5}$ $C.\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ $D.\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{12}$

$$key:\sin\alpha=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}\sin 75°}{1}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{12}$$



（2）①如图所示，平面 $\alpha\cap$ 平面 $\beta=l$，二面角 $\alpha-l-\beta\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}]$，已知 $A\in\alpha, B\in\beta$，直线 AB 与平面 α，平面 β 所成角均为 θ，与 l 所成角为 γ，若 $\sin(\gamma+\theta)=1$，则 $\sin(\gamma-\theta)$ 的最大值是（　）



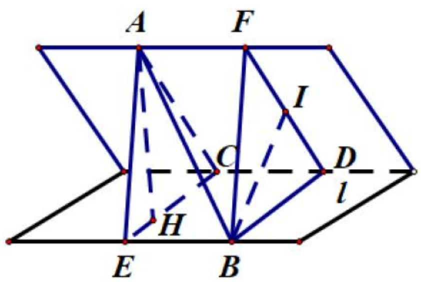
$A.\frac{1}{14}$　$B.\frac{1}{7}$　$C.\frac{3}{14}$　$D.\frac{2}{7}$

key：构造直三棱柱 $ACE-FDB$，其中 $\angle ACE=\angle FDB=\varphi\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}]$，

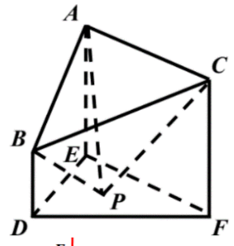
$\angle ABE=\gamma$，令 $AC=1$，则 $AC=CE=DB=DF=1$，

$AH=BI=\sin\varphi, AE=BF=2\sin\frac{\varphi}{2}, AB=\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}$，

$$\therefore\sin\gamma=\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}}{\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}}=\frac{\sin\theta}{\cos\frac{\varphi}{2}}=\cos\theta$$



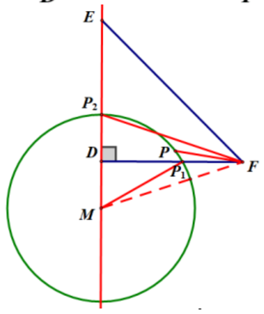
$\therefore \tan\theta=\cos\dfrac{\varphi}{2},\therefore \sin(\gamma-\theta)=\sin(\dfrac{\pi}{2}-2\theta)=\cos 2\theta=\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\dfrac{1-\cos^2\dfrac{\varphi}{2}}{1+\cos^2\dfrac{\varphi}{2}}=\dfrac{1-\cos\varphi}{3+\cos\varphi}=\dfrac{4}{3+\cos\varphi}-1\le\dfrac{1}{7}$



②如图，在多面体 $ABC-DEF$ 中，已知棱 AE,BD,CF 两两平行，$AE\perp$ 底面 DEF，$DE\perp DF$，四边形 $ACFE$ 为矩形, $AE=DE=DF=2BD=3$，底面 $\triangle DEF$ 内(包括边界)的动点 P 满足 AP,BP 与底面 DEF 所成的角相等. 记直线 CP 与底面 DEF 的所成角为 θ，则 $\tan\theta$ 的取值范围是___________.

key:由已知得$PE=2PD,\therefore P$的轨迹为圆心M(M在ED延长线上，

且$DM=1$)半径为2的圆在$\triangle DEF$内的圆弧，

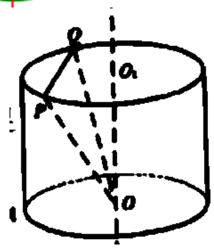


$\therefore \tan\theta=\dfrac{CF}{PF}=\dfrac{3}{PF}\in[\dfrac{3\sqrt{10}}{10},\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}](\because PF\in[3-\sqrt{3},\sqrt{10}])$

③ 如图，已知圆柱OO_1, A在圆O上，$AO=1,OO_1=\sqrt{2},P,Q$在圆O_1上，且满足

$PQ=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}$,则直线AO_1与平面OPQ所成角的正弦值的取值范围为（ ） A

$A.[0,\dfrac{3\sqrt{6}}{6}]$　$B.[\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3},\dfrac{3+\sqrt{6}}{6}]$　$C.[\dfrac{3-\sqrt{6}}{6},1]$　$D.[0,1]$

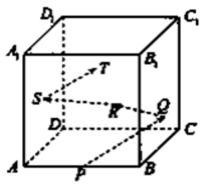


$key1$:设M为PQ的中点，作$O_1H\perp OM$于H,则AO_1与平面OPQ所成角为$\theta=\dfrac{\pi}{2}-\angle AO_1H$

而$O_1H=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\therefore \angle HO_1O=\dfrac{\pi}{3}$,且$O_1H$的轨迹为圆锥，

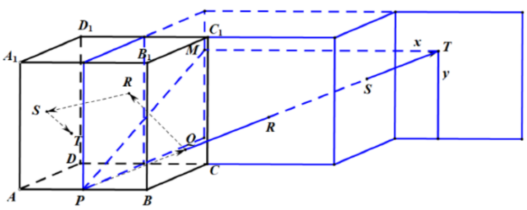
而$\angle AO_1O=\arctan\dfrac{1}{\sqrt{2}}>\dfrac{\pi}{6},\therefore \dfrac{\pi}{2}\ge\theta\ge\dfrac{\pi}{3}-\arctan\dfrac{1}{\sqrt{2}},\therefore 0\le\cos\angle AO_1H=\sin\theta\le\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}+3}{6}$

④如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，棱 AB 的中点为 P，若光线从点 P 出发，依次经三个面 $BCC_1B_1,DCC_1D_1,ADD_1A_1$反射后，落到侧面$ABB_1A_1$(不包括边界），则入射光线$PQ$与侧面$BCC_1B_1$所成角的正切值的范围是（ ）D



$A.(\dfrac{3}{4},\dfrac{5}{4})$　$B.(\dfrac{2\sqrt{17}}{17},4)$　$C.(\dfrac{\sqrt{5}}{5},\dfrac{3}{2})$　$D.(\dfrac{3\sqrt{5}}{10},\dfrac{5}{4})$

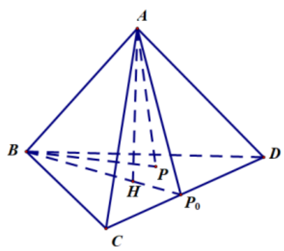
$key:\tan\theta=\dfrac{MT}{MP}=\dfrac{x+\dfrac{3}{2}}{\sqrt{4+y^2}}\in(\dfrac{3\sqrt{5}}{10},\dfrac{5}{4})(\because x,y\in(0,1))$



（3）已知三棱锥 $A-BCD$ 的三条侧棱两两垂直，AB 面 BCD 成 $30°$ 角，P 是平面 BCD 内任意一点，则 $\dfrac{AP}{BP}$ 的最小值是_________.

key:设A在平面BCD上的射影为H，连BH交CD于P_0，

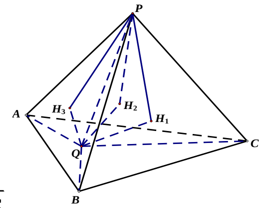
$\dfrac{AP}{PB}=\dfrac{\sin\angle ABP}{\sin\angle PAB}\ge\dfrac{\sin 30°}{\sin 90°}=\dfrac{1}{2}$（当且仅当$P=P_0$时，取$=$）



立体几何（3）线面角解答（2）

2023-05-21

变式 3（1）已知正四面体$P-ABC,Q$为$\triangle ABC$内的一点，记PQ与平面PAB、PAC、PBC所成的角分别为α、β、γ，则下列恒成立的是（ ）



$A.\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma\ge 2$ $B.\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\ge 2$

$C.\tan^2\alpha+\tan^2\beta+\tan^2\gamma\le 1$ $D.\dfrac{1}{\tan^2\alpha}+\dfrac{1}{\tan^2\beta}+\dfrac{1}{\tan^2\gamma}\le 1$

$key:\because V_{PABC}=V_{Q-PAB}+V_{Q-PAC}+V_{Q-PBC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}(QH_1+QH_2+QH_3)=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}AB(AB=1)$

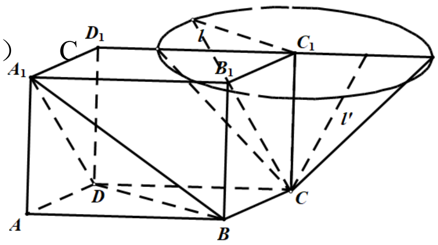
$\therefore QH_1+QH_2+QH_3=\frac{\sqrt{6}}{3},\therefore \sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\frac{QH_3}{PQ}+\frac{QH_2}{PQ}+\frac{QH_3}{PQ}=\frac{\sqrt{6}}{3}\in[\frac{\sqrt{6}}{3},1]$

$,\therefore \sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma<\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\le 1$

$\therefore \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=3-(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)\ge 2$

（2）长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，已知二面角A_1-BD-A的大小为$\frac{\pi}{6}$，若空间有一条直线

l与直线CC_1所成角 为$\frac{\pi}{4}$，则直线l与平面A_1BD所成角的取值范围为（ ） C

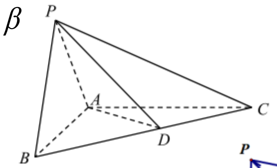


$A.[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}]$ $B.[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}]$ $C.[\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}]$ $D.[0,\frac{\pi}{2}]$

$key:\because AA_1\perp$平面$ABD,\therefore$平面A_1BD的垂线与AA_1成$\frac{\pi}{6}$角$,\therefore\theta\in[\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}]$

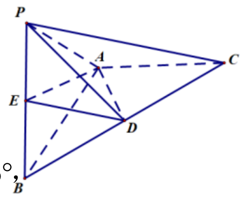
（3） 如图，在三棱锥$P-ABC$中，$AB\perp AC,AB=AP,D$是棱BC上一点（不含端点）且$PD=BD$，记$\angle DAB$为α，直线AB与平面PAC所成角为β，直线PA与平面ABC所成角为γ，则（ A ）

A. $\gamma\le\beta,\gamma\le\alpha$ B. $\beta\le\alpha,\beta\le\gamma$ C. $\beta\le\alpha,\gamma\le\alpha$ D. $\alpha\le\beta,\gamma\le\beta$



$key:E$为PB的中点，则$PB\perp$平面AED,

$\sin\beta=\frac{d_{B\to PAC}}{AB}>\sin\gamma=\frac{d_{P\to ABC}}{PA}=\frac{d_{P\to ABC}}{AB}(\because AP=AB)$

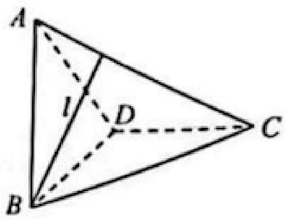


$(\because S_{\triangle ABC}\ge S_{\triangle PAC},V_{B-PAC}=V_{P-ABC}\therefore d_{P\to ABC}\le d_{B\to PAC}),\therefore\beta\ge\gamma,$

$\because\triangle BAD\cong\triangle PAD,\therefore\gamma\le\alpha=\angle BAD$(最小角定理)

（4（(台州市 4 月） 空间四面体$ABCD$中，$\angle ACD=60°$，二面角$A-CD-B$的大小为$45°$，在平面ABC内过点B作AC的垂线l，则l与平面BCD所成的最大角的正弦值为_____.

key:(线面角的转化方法二：法向量）由题意得$\vec{l}//$平面α,且$AC\perp\alpha$,



作$AE\perp$平面BCD于E，作AD于D,连ED，则$\angle ADE=45°$,

令$AC=2$,则$AD=\sqrt{3},AE=\frac{\sqrt{6}}{2},\therefore\cos\angle EAC=\frac{\sqrt{6}}{4}$,

$\therefore<l,$平面$BCD>=\frac{\pi}{2}-<\vec{l},\overrightarrow{n_{BCD}}>=<\frac{\pi}{2}-<\vec{l},\overrightarrow{EA}>\le\frac{\pi}{2}-<\overrightarrow{EA},$平面$EFG>$

$=<\overrightarrow{EA},\overrightarrow{CA}>=\arccos\frac{\sqrt{6}}{4},\therefore\sin<l,$平面$BCD>_{\max}=\frac{\sqrt{10}}{4}$