解析几何（3）双曲线解答（2）

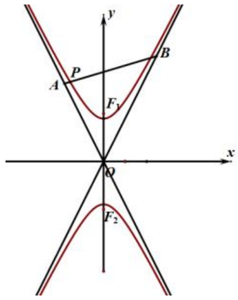
2023-11-25

（2009陕西）已知双曲线$C:\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，离心率$e=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，顶点到渐近线的距离为$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

(1) 求双曲线C的方程；

(2) 如图，P是双曲线C上一点，A,B两点在双曲线C的两条渐近线上，且分别位于第一，二象限，若$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB},\lambda\in[\dfrac{1}{3},2]$，求$\triangle AOB$的面积的取值范围.

2009陕西key:(1) 由已知得$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\\ \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{ab}{c}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\end{cases}$得$c=\sqrt{5},a=2,b=1,\therefore C$的方程为$\dfrac{y^2}{4}-x^2=1$



(2) 设$A(a,-2a),B(b,2b)(a<0<b)$，则$P(\dfrac{a+\lambda b}{1+\lambda},\dfrac{-2a+2\lambda b}{1+\lambda})$,

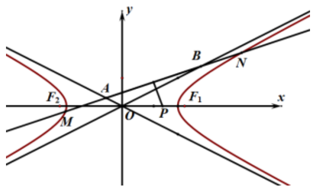
$\therefore\dfrac{(-a+\lambda b)^2}{(1+\lambda)^2}-\dfrac{(a+\lambda b)^2}{(1+\lambda)^2}=\dfrac{-4ab\lambda}{(1+\lambda)^2}=1$即$ab=-\dfrac{(1+\lambda)^2}{4\lambda}$

$\therefore S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}a&-2a&1\\b&2b&1\\0&0&1\end{vmatrix}\right|=2|ab|=\dfrac{1}{2}(\lambda+\dfrac{1}{\lambda}+2)\in[2,\dfrac{8}{3}]$即为所求的$(\because\lambda\in[\dfrac{1}{3},2])$

（14高考）设直线$x-3y+m=0(m\neq0)$与双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的两条渐近线分别交于点$A$、$B$.

若点$P(m,0)$满足$|PA|=|PB|$,则该双曲线的离心率是______.

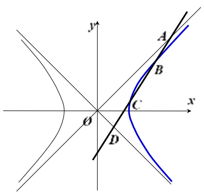
14浙江key:由$\begin{cases}x-3y+m=0\\ b^2x^2-a^2y^2=0\end{cases}$消去$x$得:$(9b^2-a^2)y^2-6b^2my+b^2m^2=0$



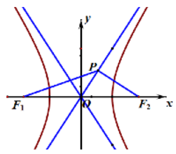
$\therefore AB$的中点$M(\dfrac{a^2m}{9b^2-a^2},\dfrac{3b^2m}{9b^2-a^2})$,

$\therefore k_{PM}=\dfrac{\dfrac{3b^2m}{9b^2-a^2}}{\dfrac{a^2m}{9b^2-a^2}-m}=\dfrac{3b^2}{2a^2-9b^2}=-3$得$a^2=4b^2,\therefore e=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

结论：已知双曲线M:$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，直线$l$与双曲线$M$的实轴不垂直，且依次交直线$y=\dfrac{b}{a}x$、双曲线$M$、直线$y=-\dfrac{b}{a}x$于$A$、$B$、$C$、$D$四点，$O$为坐标原点则$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CD}$



（2023天津）9．双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$．过$F_2$作其中一条渐近线的垂线，垂足为$P$．已知$|PF_2|=2$，直线$PF_1$的斜率为$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，则双曲线的方程为(　D　)



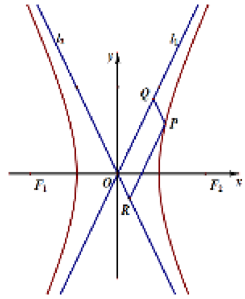
A．$\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{4}=1$　　B．$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{8}=1$　　C．$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{2}=1$　　D．$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{4}=1$

key:$|PF_2|=b=2,|OP|=a$,且$P(\dfrac{a^2}{c},\dfrac{ab}{c}),\therefore k_{PF_1}=\dfrac{\dfrac{ab}{c}}{\dfrac{a^2}{c}+c}=\dfrac{ab}{2a^2+b^2}=\dfrac{2a}{2a^2+4}=\dfrac{a}{a^2+2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$得$a=\sqrt{2}$

变式1（1）①已知过双曲线E:$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$上的任一点$P$分别作两渐近线的平行线与另一条渐近线的交点为$R$、$Q$，则$|PQ|\cdot|PR|=$_____.

解析几何（3）双曲线解答（2）

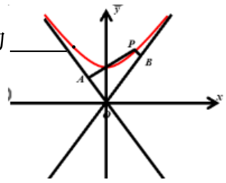
2023-11-25



$key:|PQ|\cdot|PR|=\dfrac{|bx_P-ay_P|}{\sqrt{b^2+a^2}\sin 2\theta}\cdot\dfrac{|bx_P+ay_P|}{\sqrt{b^2+a^2}\sin 2\theta}=\dfrac{|b^2x_P^2-a^2y_P^2|}{(a^2+b^2)\cdot\left(\dfrac{2\cdot\frac{b}{a}}{1+(\frac{b}{a})^2}\right)^2}$

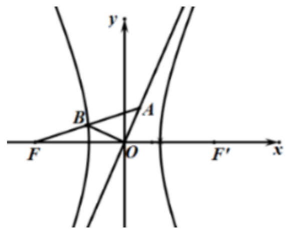
$=\dfrac{a^2b^2}{\dfrac{4a^2b^2}{a^2+b^2}}=\dfrac{a^2+b^2}{4}$（其中$\tan\theta=\dfrac{b}{a}$）

②过双曲线$\dfrac{y^2}{3}-x^2=1$上任一点P向渐近线作垂线，垂足分别为A、B，则$|AB|$的最小值为_____



$key:|AB|=|OP|\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{x_P^2+y_P^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{4x_P^2+3}\geq\dfrac{3}{2}$

（2）已知点F为双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左焦点，$A$为直线$l:y=\dfrac{b}{a}x$在第一象限内的点，过原点$O$作$OA$的垂线交$FA$于点$B$，且$B$恰为线段$AF$的中点，若$\triangle ABO$的内切圆半径为$\dfrac{b-2a}{4}$ $(b>2a)$,则该双曲线的离心率大小为_____.



$key:$连接AF',则$AF'//OB,\because OB\perp OA,\therefore AF'\perp OA,$

$\therefore AF'=b,OA=a,\therefore OB=\dfrac{b}{2}$

$\therefore\dfrac{b-2a}{4}=\dfrac{a+\frac{b}{2}-\sqrt{a^2+\frac{b^2}{4}}}{2}(c^2-a^2=b^2>4a^2$得$e>\sqrt{5})$得$e=\sqrt{13}$

(2008江苏）A、B为双曲线$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$上的两个动点，满足$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$.(Ⅰ）求证:$\dfrac{1}{|\overrightarrow{OA}|^2}+\dfrac{1}{|\overrightarrow{OB}|^2}$为定值；

(Ⅱ）动点P在线段AB上，满足$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，求证：点$P$在定圆上.

2008江苏:(Ⅰ）设$A(s,t)$，则$B(\lambda t,-\lambda s),\therefore\begin{cases}\dfrac{s^2}{a^2}-\dfrac{t^2}{b^2}=1\\ \dfrac{\lambda^2t^2}{a^2}-\dfrac{\lambda^2s^2}{b^2}=1\end{cases}$

$\therefore\dfrac{s^2+t^2}{a^2}-\dfrac{s^2+t^2}{b^2}=1+\dfrac{1}{\lambda^2},\therefore\dfrac{1}{|\overrightarrow{OA}|^2}+\dfrac{1}{|\overrightarrow{OB}|^2}=\dfrac{1}{s^2+t^2}+\dfrac{1}{\lambda^2(s^2+t^2)}=\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{5}{36}$

(Ⅱ）$x^2+y^2=\dfrac{1296}{25}$

（2009 北京）已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为$\sqrt{3}$，右准线方程为$x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

（Ⅰ）求双曲线 C 的方程；（Ⅱ）设直线 l 是圆$O:x^2+y^2=2$上动点$P(x_0,y_0)(x_0y_0\neq 0)$处的切线，l 与双曲线 C 交于不同的两点 A,B，证明$\angle AOB$的大小为定值.

(1) 解：由已知得$\begin{cases}\dfrac{a^2}{c}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\\ e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{3}\end{cases}$ 得$a=1,c=\sqrt{3},b=\sqrt{2},\therefore$双曲线$C$的方程为$x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$

(2) 当$l\not\perp x$轴时，设$l:y=kx+m,$代入C方程得$:(2-k^2)x^2-2kmx-m^2-2=0$

$\therefore\begin{cases}x_A+x_B=\dfrac{2km}{2-k^2}\\ x_Ax_B=-\dfrac{m^2+2}{2-k^2}\end{cases}$,且$\Delta=8(m^2+2-k^2)>0,$且$2-k^2\neq 0,$且$\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{2}$即$m^2=2+2k^2$

$\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_Ax_B+(kx_A+m)(kx_B+m)=(1+k^2)\cdot\dfrac{-m^2-2}{2-k^2}+\dfrac{2k^2m^2}{2-k^2}+m^2=\dfrac{m^2-2-2k^2}{2-k^2}=0$

$\therefore \overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{Ob},\therefore \angle AOB=90°$

当$l\perp x$轴时，$A(\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{2}),\therefore \angle AOB=90°.$故$\angle AOB$的大小为定值$90°$

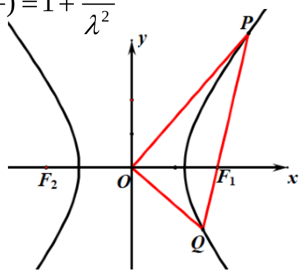
（2010贵州）已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，过坐标原点$O$的直线$l$交椭圆于$A,B$两点，$C$是椭圆上的一点，且满足$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$.（Ⅰ）求证：$\dfrac{1}{|\overrightarrow{OA}|^2}+\dfrac{1}{|\overrightarrow{OC}|^2}$是定值；（Ⅱ）求$\triangle ABC$面积的最小值.

2010贵州（Ⅰ）由$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC},|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|$得$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{AB}$,

设$A(s,t)$，则$C(\lambda t,-\lambda s),\therefore\begin{cases}\dfrac{s^2}{a^2}+\dfrac{t^2}{b^2}=1\\ \dfrac{\lambda^2t^2}{a^2}+\dfrac{\lambda^2s^2}{b^2}=1即\dfrac{t^2}{a^2}+\dfrac{s^2}{b^2}=\dfrac{1}{\lambda^2}\end{cases},\therefore (s^2+t^2)(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2})=1+\dfrac{1}{\lambda^2}$

$\therefore \dfrac{1}{|\overrightarrow{OA}|^2}+\dfrac{1}{|\overrightarrow{OC}|^2}=\dfrac{1}{s^2+t^2}+\dfrac{1}{\lambda^2(s^2+t^2)}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$

（Ⅱ）$S_{\triangle ABC}=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OC}|\ge\dfrac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$

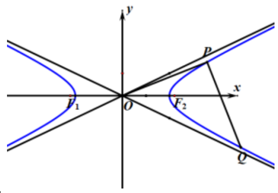


变式（1）①设直线l与双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右支交于$P$，$Q$两点，$O$是坐标原点，$\triangle OPQ$是等腰直角三角形.若这样的直线$l$恰有两条，则双曲线离心率的取值范围是____________.$(\sqrt{4-2\sqrt{2}},\sqrt{2}]$

key:若$\angle POQ=90°$,则由对称性$\triangle OPQ$可以有3个；

$\therefore$只能是$\angle PQO$或$\angle OPQ=90°$,且$\dfrac{b}{a}\le\tan 45°=1$即$1<e\le\sqrt{2}$,由$\angle OPQ=90°$,设$P(s,t)(s,t>0,0<\dfrac{t}{s}<\dfrac{b}{a})$

则$\overrightarrow{PQ}=(t,-s),\therefore Q(s+t,t-s),\therefore 1=\dfrac{(s+t)^2}{a^2}-\dfrac{(t-s)^2}{b^2}$



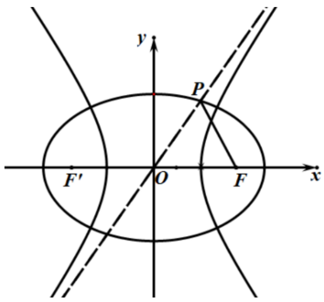
$\therefore 1=\dfrac{(s+t)^2}{a^2}-\dfrac{(t-s)^2}{b^2}=\dfrac{s^2}{a^2}-\dfrac{t^2}{b^2}+\dfrac{t^2}{a^2}-\dfrac{s^2}{b^2}+\dfrac{2c^2}{a^2b^2}st\Leftrightarrow\dfrac{s^2}{b^2}-\dfrac{t^2}{a^2}=\dfrac{2c^2}{a^2b^2}st$

$\Leftrightarrow\dfrac{2c^2}{a^2b^2}=\dfrac{1}{b^2}\cdot\dfrac{s}{t}-\dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{t}{s}>\dfrac{a}{b^3}-\dfrac{b}{a^3}=\dfrac{(a^2-b^2)c^2}{a^3b^3}\Leftrightarrow 2ab>a^2-b^2\Leftrightarrow\dfrac{b}{a}>\sqrt{2}-1$

$\therefore\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+(\dfrac{b}{a})^2}>\sqrt{4-2\sqrt{2}},\therefore e\in(\sqrt{4-2\sqrt{2}},\sqrt{2}]$

②已知椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$与双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$有公共的焦点，$F$为右焦点，$O$为坐标原点，双曲线的一条渐近线交椭圆于$P$点，且点$P$在第一象限，若$OP\perp FP$，则椭圆的离心率等于（ C ）

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$



$key:4-b^2=a^2+1$即$a^2+b^2=3$,设$P(2\cos\theta,b\sin\theta)$，则$2\cos\theta-ab\sin\theta=0$

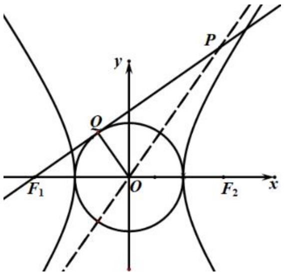
且$k_{OP}k_{FP}=\dfrac{b\sin\theta}{2\cos\theta}\cdot\dfrac{b\sin\theta}{2\cos\theta-c}=-1\Leftrightarrow b^2\sin^2\theta=-4\cos^2\theta+2c\cos\theta=\dfrac{4\cos^2\theta}{a^2}$

得$\cos\theta=\dfrac{a^2c}{2(a^2+1)}=\dfrac{a^2}{2\sqrt{a^2+1}},\sin\theta=\dfrac{a}{b\sqrt{a^2+1}}$,

$\therefore\dfrac{a^4}{4(1+a^2)}+\dfrac{a^2}{(3-a^2)(1+a^2)}=\dfrac{a^2(4-a^2)}{4(3-a^2)}=1$得$a^2=2,b^2=1,\therefore e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2023-11-25

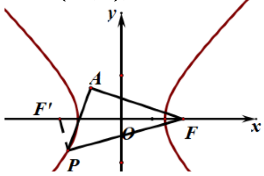
③过双曲线 $E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点 F_1 的直线 l，在第一象限交双曲线的渐近线于点 P，与圆 $x^2+y^2=a^2$ 相切于点 Q. 若 $|PQ|=2|F_1Q|$，则离心率 e 的值为________.



key: 由 $|F_1Q|=b,\therefore |PQ|=2b,$

由 $\begin{cases} y=\dfrac{a}{b}(x+c) \\ y=\dfrac{b}{a}x \end{cases}$ 得 $x_P=\dfrac{a^2c}{b^2-a^2}>0,\therefore |PF_1|=\sqrt{1+\dfrac{a^2}{b^2}}\cdot(\dfrac{a^2c}{b^2-a^2}+c)=3b\Leftrightarrow e=\sqrt{3}$

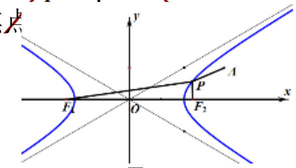
（2017 河北）双曲线 $C:x^2-y^2=2$ 的右焦点为 F，P 为其左支上任意一点，点 $A(-1,1)$，则 $\triangle APF$ 周长的最小值为_____. $3\sqrt{2}+\sqrt{10}$



key: 周长 $=|AF|+|PA|+|PF|=\sqrt{10}+|PA|+|PF'|+2\sqrt{2}$

$\geq\sqrt{10}+|AF'|+2\sqrt{2}=\sqrt{10}+3\sqrt{2}$

变式1（1）①已知双曲线 $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$ 右支上的点 P 及点 $A(3,1)$，F_1,F_2 是左右焦点，

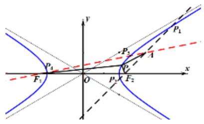


则 $|PF_1|+|PA|$ 的最小值为____；$|PF_1|-|PA|$ 的取值范围为______.

(1) ① key: $|PF_1|+|PA|\geq|F_1A|=\sqrt{26}$

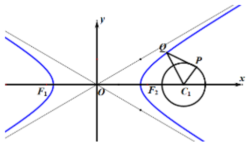
当点 P 在右支上时，$|PF_1|-|PA|=2\sqrt{3}+|PF_2|-|PA|\in[2\sqrt{3}-\sqrt{2},2\sqrt{3}+\sqrt{2}](\because k_{AF_2}=1>\dfrac{\sqrt{3}}{3})$

（2）已知点 P 在曲线 $C_1:(x-4)^2+y^2=1$ 上，点 Q 在曲线 $C_2:\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 上，则 $|PQ|$ 的最小值为______.

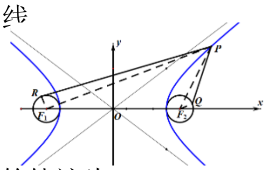


② $|PQ|\geq|QC_1|-|C_1P|=|QC_1|-1$

$=\sqrt{(1+\dfrac{b^2}{4})(x-\dfrac{16}{4+b^2})^2+\dfrac{-b^4+12b^2+48}{b^2+4}}\geq\begin{cases}\sqrt{\dfrac{-b^4+12b^2+48}{b^2+4}}, b<2\\ 1, b\geq 2\end{cases}$



（3）若点 P 在曲线 $C_1:\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 上，点 Q 在曲线 $C_2:(x-5)^2+y^2=1$ 上，点 R 在曲线 $C_3:(x+5)^2+y^2=1$，则 $|PQ|-|PR|$ 的最大值为_______.



key: $|PQ|-|PR|\leq|PC_1|+1-(|PC_2|-1)=|PC_1|-|PC_2|+2=-6$

（2006北京）已知点 $M(-2,0),N(2,0)$，动点 P 满足天津 $|PM|-|PN|=2\sqrt{2}$，记动点 P 的轨迹为 W.

(1) 求 W 的方程；（2）若 A,B 是 W 上的不同两点，0是坐标原点，求 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 的最小值.

（Ⅰ）$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1(x\geq\sqrt{2})$；

（Ⅱ）由 $\dfrac{x_A^2}{2}-\dfrac{y_A^2}{2}=\dfrac{1}{2}(x_A-y_A)(x_A+y_A)=1$，令 $\begin{cases}x_A-y_A=s\\ x_A+y_A=\dfrac{2}{s}\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_A=\dfrac{1}{2}(s+\dfrac{2}{s})\geq\sqrt{2}\\ y_A=\dfrac{1}{2}(\dfrac{2}{s}-s)\end{cases}$

同理令 $\begin{cases}x_B=\dfrac{1}{2}(t+\dfrac{2}{t})\geq\sqrt{2}\\ y_A=\dfrac{1}{2}(\dfrac{2}{t}-t)\end{cases}$，$\therefore\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_Ax_B+y_Ay_B=\dfrac{1}{4}(s+\dfrac{2}{s})(t+\dfrac{2}{t})+\dfrac{1}{4}(\dfrac{2}{s}-s)(\dfrac{2}{t}-t)(s,t>0,\text{且}s\neq t)$

$=\dfrac{1}{2}st+\dfrac{2}{st}\geq 2$（当且仅当 $st=4$ 时，取 $=$），$\therefore\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 最小值为2

解析几何（3）双曲线解答（2）

2023-11-25

（2017 年四川）若 $P(x,y)$是双曲线$\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{4}=1$上的点，则$|x-y|$的最小值是__________.2

$$key:1=(\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{y}{2})(\frac{x}{2\sqrt{2}}-\frac{y}{2})\text{令}\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{y}{2}=t,\text{则}\frac{x}{2\sqrt{2}}-\frac{y}{2}=\frac{1}{t},\text{则}\begin{cases}x=\sqrt{2}(t+\dfrac{1}{t})\\ y=t-\dfrac{1}{t}\end{cases}$$

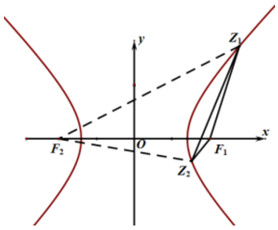
$$\therefore|x-y|=|(\sqrt{2}-1)t+\frac{\sqrt{2}+1}{t}|\ge 2\sqrt{2-1}=2$$

（2017A）设复数z_1,z_2满足$\mathrm{Re}(z_1)>0,\mathrm{Re}(z_2)>0,$且$\mathrm{Re}(z_1^2)=\mathrm{Re}(z_2^2)=2$（其中$\mathrm{Re}(z)$表示复数$z$的实部）.

(1) 求$\mathrm{Re}(z_1z_2)$的最小值；（2）求$|z_1+2|+|\overline{z_2}+2|-|\overline{z_1}-z_2|$的最小值.

$2017Akey$: 设$z_1=a+bi,z_2=c+di(a,c>0,b,d\in R)$

$$\text{则}a^2-b^2=(a+b)(a-b)=c^2-d^2=(c+d)(c-d)=2,\text{令}\begin{cases}a+b=s\\ a-b=\dfrac{2}{s}\end{cases},\text{且}\begin{cases}c+d=t\\ c-d=\dfrac{2}{t}\end{cases}$$



$$\text{则}\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}(s+\dfrac{2}{s})>0\\ b=\dfrac{1}{2}(s-\dfrac{2}{s})\end{cases},\text{且}\begin{cases}c=\dfrac{1}{2}(t+\dfrac{2}{t})>0\\ d=\dfrac{1}{2}(t-\dfrac{2}{t})\end{cases}$$

$$\therefore\mathrm{Re}(z_1z_2)=ac-bd=\frac{1}{4}(s+\frac{2}{s})(t+\frac{2}{t})-\frac{1}{4}(s-\frac{2}{s})(t-\frac{2}{t})=\frac{t}{s}+\frac{s}{t}\ge 2,\therefore\mathrm{Re}(z_1z_2)_{\min}=2$$

$$(2)|z_1+2|+|\overline{z_2}+2|-|\overline{z_1}-z_2|=|z_1+2|+|\overline{z_2}+2|-|z_1-\overline{z_2}|$$

$$=|Z_1F_2|+|Z_2F_2|-|Z_1Z_2|(z_1=\overrightarrow{OZ_1},\overline{z_2}=\overrightarrow{OZ_2})$$

$$=4\sqrt{2}+|\overrightarrow{Z_1F_1}|+|\overrightarrow{Z_2F_1}|-|\overrightarrow{Z_1Z_2}|\ge 4\sqrt{2}\text{即为所求的}$$

变式 1：（多选题）已知实数x,y满足$2x+y=1,$记$z=\dfrac{7x^2-2y^2}{3\sqrt{2}x-2\sqrt{x^2+y^2}}$，则$z$的值可能是（ ）

$A.0$ $B.\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $C.\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$ $D.1$

$$③key:z=\frac{7x^2-2(4x^2-4x+1)}{3\sqrt{2}x-2\sqrt{5x^2-4x+1}}=\frac{(-x^2+8x-2)(3\sqrt{2}x+2\sqrt{5x^2-4x+1})}{18x^2-4(5x^2-4x+1)}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{5x^2-4x+1}(x^2-8x+2\ne 0)$$

$$key1:z=\frac{3\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{5}y(y^2=5x^2-4x+1,y>0)$$

$$\text{联立}y=-\frac{3}{\sqrt{10}}x+\frac{z}{\sqrt{5}}\text{与}y^2=5x^2-4x+1\text{得}\Delta\ge 0\text{得}z\ge\frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$\therefore\Delta=8(3\sqrt{5}m-2\sqrt{2})-8(1-5m^2)=0\text{即}\begin{cases}m=\dfrac{1}{\sqrt{10}}\\ z=\sqrt{5}m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ y_{\text{切}}=-\dfrac{2}{\sqrt{10}}<0\end{cases},or,\begin{cases}m=\dfrac{7}{5\sqrt{10}}\\ z=\sqrt{5}m=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}\end{cases},\therefore z\ge\frac{7\sqrt{2}}{10}$$

2023-11-25

$key2:$ 令$y=\sqrt{5x^2-4x+1}$得$y^2=(\sqrt{5}x-\frac{2}{\sqrt{5}})^2+\frac{1}{5}$即$(y-\sqrt{5}x+\frac{2}{\sqrt{5}})(y+\sqrt{5}x-\frac{2}{\sqrt{5}})=\frac{1}{5}$

令$\begin{cases}y-\sqrt{5}x+\frac{2}{\sqrt{5}}=t\\ y+\sqrt{5}x-\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{1}{5t}\end{cases}$,则$\begin{cases}x=\frac{1}{2\sqrt{5}}(\frac{1}{5t}-t+\frac{4}{\sqrt{5}})\\ y=\frac{1}{2}(t+\frac{1}{5t})>0\end{cases}$

$\therefore z=\frac{3}{2\sqrt{10}}(\frac{1}{5t}-t+\frac{4}{\sqrt{5}})+\frac{1}{2}(t+\frac{1}{5t})=\frac{\sqrt{10}-3}{2\sqrt{10}}t+\frac{3+\sqrt{10}}{10\sqrt{10}t}+\frac{3\sqrt{2}}{5}\ge\frac{7\sqrt{2}}{10},\therefore$ 选CD

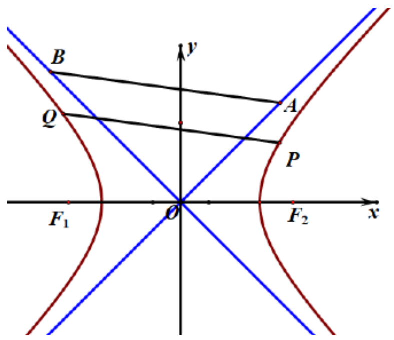
变式 2：双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$经过点$P(\frac{5\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2})$，且点 P 到双曲线 C 两渐近线的距离之比为$4:1$.（1）求 C 的方程；（2）过点 P 作不平行于坐标轴的直线l_1交双曲线于另一点 Q，作直线$l_2//l_1$交 C 的渐近线于两点 A，B（A 在第一象限），使$|AB|=|PQ|$，记l_1和直线 QB 的斜率分别为k_1，k_2，

（i）证明：$k_1\cdot k_2$是定值；（ii）若四边形 $ABQP$ 的面积为 5，求k_1-k_2.

(1) 解：由已知得$\begin{cases}\frac{25}{2a^2}-\frac{9}{2b^2}=1\\ \frac{|\frac{5b}{\sqrt{2}}-\frac{3a}{\sqrt{2}}|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{|\frac{5b}{\sqrt{2}}+\frac{3a}{\sqrt{2}}|}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}$得$a=b=2\sqrt{2},\therefore C$的方程为$x^2-y^2=8$

(2) 设$A(s,s)(s>0),B(-t,t),Q(\sqrt{2}(q+\frac{1}{q}),\sqrt{2}(q-\frac{1}{q}))$

$\because AB\underset{=}{//}PQ,\therefore\begin{cases}s+\sqrt{2}(q+\frac{1}{q})=-t+\frac{5\sqrt{2}}{2}\\ s+\sqrt{2}(q-\frac{1}{q})=t+\frac{3\sqrt{2}}{2}\end{cases},\therefore\begin{cases}s=2\sqrt{2}-\sqrt{2}q\\ t=-\frac{\sqrt{2}}{q}+\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$



$\therefore k_1k_2=\frac{\sqrt{2}(q-\frac{1}{q})-\frac{3}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}(q+\frac{1}{q})-\frac{5}{\sqrt{2}}}\cdot\frac{s-\frac{3}{\sqrt{2}}}{s-\frac{5}{\sqrt{2}}}=\frac{2q+1}{2q-1}\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}q}{-\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}q}=1$是定值

(ii) 由 (i) 得$ABQP$是平行四边形,

且$k_1=\frac{2q+1}{2q-1},\therefore\tan\angle APQ=\frac{|k_1-k_2|}{1+k_1k_2}=|\frac{k_1^2-1|}{2k_1},\therefore\sin\angle APQ=\frac{|k_1^2-1|}{k_1^2+1}$

$\therefore S_{ABQP}=\sqrt{1+k_1^2}\,|s-\frac{5}{\sqrt{2}}|\cdot\sqrt{1+k_2^2}\,|-t-s|\cdot\frac{|k_1^2-1|}{k_1^2+1}=|k_1-\frac{1}{k_1}|\cdot\frac{|(2q+1)(2q-1)(q-2)|}{|2q|}$

$=|\frac{8q}{4q^2-1}|\cdot\frac{|(2q+1)(2q-1)(q-2)|}{|2q|}=4|q-2|=5$得$q=\frac{3}{4},or,\frac{13}{4}$（此时$s=-\frac{5\sqrt{2}}{4}<0$，舍去）

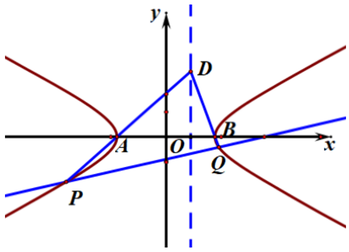
$\therefore k_1-k_2=k_1-\frac{1}{k_1}=\frac{2q+1}{2q-1}-\frac{2q-1}{2q+1}=\frac{8q}{4q^2-1}=\frac{24}{5}$

变式 3.已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{5}}{2}$，$A$，$B$ 分别是 C 的左、右顶点，点$(4,\sqrt{3})$在 C 上，点$D(1,t)$，直线 AD，BD 与 C 的另一个交点分别为 P，Q.

（1） 求双曲线 C 的标准方程；（2）证明：直线 PQ 经过定点.

(1) 解：由已知得$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}\\ \frac{16}{a^2}-\frac{3}{b^2}=1\end{cases}$ 得$a=2,b=1,\therefore C$的标准方程为$\frac{x^2}{4}-y^2=1$

（2）证明：设$P(p+\frac{1}{p},\frac{1}{2}(p-\frac{1}{p})),Q(q+\frac{1}{q},\frac{1}{2}(q-\frac{1}{q}))$,



由D,A,P三点共线得：$\frac{t}{3}=\dfrac{\frac{1}{2}(p-\frac{1}{p})}{p+\frac{1}{p}+2}=\frac{p-1}{2(p+1)}$得$p=\frac{3+2t}{3-2t}$

由D,B,Q三点共线得：$\frac{t}{-1}=\dfrac{\frac{1}{2}(q-\frac{1}{q})}{q+\frac{1}{q}-2}=\frac{q+1}{2(q-1)}$得$q=\frac{2t-1}{2t+1}$

$$\therefore k_{PQ}=\dfrac{\frac{p^2-1}{2p}-\frac{q^2-1}{2q}}{\frac{p^2+1}{p}-\frac{q^2+1}{q}}=\frac{pq+1}{2(pq-1)}=\dfrac{\frac{3+2t}{3-2t}\cdot\frac{2t-1}{2t+1}+1}{2(\frac{3+2t}{3-2t}\cdot\frac{2t-1}{2t+1}-1)}=\frac{2t}{4t^2-3}$$

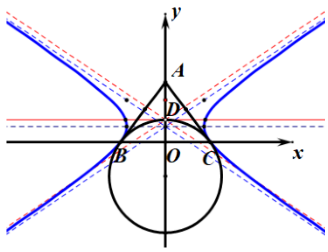
$$\therefore l_{PQ}:y+\frac{4t}{4t^2-1}=\frac{2t}{4t^2-3}(x-\frac{8t^2+2}{4t^2-1})\text{即}y=\frac{2t}{4t^2-3}x-\frac{2t}{4t^2-3}\cdot\frac{8t^2+2}{4t^2-1}-\frac{4t}{4t^2-1}$$

$=\frac{2t}{4t^2-3}x-\frac{8t}{4t^2-3}=\frac{2t}{4t^2-3}(x-4)$，$\therefore PQ$过定点$(4,0)$，证毕

（2004A）在平面直角坐标系xOy中，给定三点$A(0,\frac{4}{3}),B(-1,0),C(1,0)$，点$P$到直线$BC$的距离是该点到直线$AB,AC$距离的等比中项.(1) 求点$P$的轨迹方程；

（2）若直线l经过$\triangle ABC$的内心（设为D），且与P点的轨迹恰好有3个公共点，求l的斜率的取值范围.

解： (1) 设$P(x,y)$，由$l_{BC}:y=0,l_{AB}:-4x+3y=4,l_{AC}:4x+3y=4$



则$y^2=\frac{|-4x+3y-4|}{5}\cdot\frac{|4x+3y-4|}{5}=\frac{|(3y-4)^2-16x^2|}{25}$

即$25y^2=(3y-4)^2-16x^2$，或，$25y^2=16x^2-(3y-4)^2$

即$C_1:2x^2+2y^2+3y-2=0$即$x^2+(y+\frac{3}{4})^2=\frac{25}{16}$，或，

$C_2:8x^2-17y^2+12y-8=0$即$\frac{34x^2}{25}-\frac{289}{100}(y-\frac{6}{17})^2=1$即为$P$的轨迹方程

（2）由$l_{BD}:y=\frac{1}{2}(x+1)$得$D(0,\frac{1}{2})$，且$D$在圆$C_1:x^2+(y+\frac{3}{4})^2=\frac{25}{16}$上，$C_1$与$C_2$都经过点$(\pm1,0)$，

当$k=\pm\frac{1}{2}$时，有3个交点；

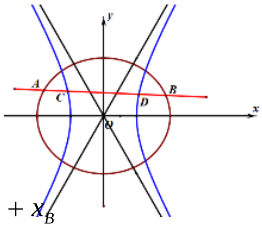
由$\begin{cases}y=kx+\frac{1}{2}\\8x^2-17y^2+12y-8=0\end{cases}$得$(8-17k^2)x^2-5kx-\frac{25}{4}=0$，当$8-17k^2=0$即$k=\pm\frac{2\sqrt{34}}{17}$时，有3个交点；

当$\begin{cases}8-17k^2\neq0\\\Delta=25(8-16k^2)=0\end{cases}$即$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$时，有3个交点；$\therefore k\in\{0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{2\sqrt{34}}{17},\frac{2\sqrt{34}}{17}\}$

（2010竞赛）设直线$l:y=kx+m$（其中$k,m\in Z$）与椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$交于不同两点$A,B$，与双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$交于不同两点$C,D$，问是否存在直线$l$，使得向量$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\vec{0}$，若存在，指出这样的直线有多少条？若不存在，请说明理由.

2023-11-25

$key:\begin{cases}y=kx+m\\3x^2+4y^2=48\end{cases}$ 消去y得：$(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-48=0,\therefore x_A+x_B=\dfrac{-8km}{3+4k^2}$，且$\Delta=16(16k^2+12-m^2)>0$



由$\begin{cases}y=kx+m\\3x^2-y^2=12\end{cases}$ 消去y得$(3-k^2)x^2-2kmx-m^2-12=0$

$\therefore x_C+x_D=\dfrac{2km}{3-k^2}$，且$\Delta_1=12(m^2+12-4k^2)>0$且$k^2\neq 3$

由$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=(x_C+x_D-x_A-x_B,y_C+y_D-y_A-y_B)=\vec{0},\therefore x_C+x_D=\dfrac{2km}{3-k^2}=\dfrac{-8km}{3+4k^2}=x_A+x_B$

$\because k,m\in Z,\therefore 2km=0,or,-\dfrac{4}{3+4k^2}=\dfrac{1}{3-k^2}$ 无解

当$k=0$时，$\begin{cases}12-m^2>0\\m^2+12>0\end{cases}$ 得$m=\pm3,\pm2,\pm1,0$；当$m=0$时，$\begin{cases}16k^2+12>0\\12-4k^2>0\end{cases}$ 得$k=\pm1,0,\therefore$ 共有9条