一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求．

1. 已知命题 p：$\exists x\in(1,+\infty)$，使 $2x+1>5$，则（　　）

A. 命题 p 的否定为“$\exists x\in(1,+\infty)$，使 $2x+1\le 5$” B. 命题 p 的否定为“$\exists x\in(-\infty,1]$，使 $2x+1\le 5$”

C. 命题 p 的否定为“$\forall x\in(1,+\infty)$，使 $2x+1\le 5$” D. 命题 p 否定为“$\forall x\in(-\infty,1]$，使 $2x+1\le 5$”

2. 已知集合 $A=\{0,2a+1,a^2+3a+1\}$，若 $-1\in A$，则实数 $a=$（　　）

A. －1　　B. －2　　C. －3　　D. －1 或－2

3 已知集合 $M=\{x|x=3n-2,n\in Z\}$，$N=\{x|x=6n+1,n\in Z\}$，则 $M\cup N=$（　　）

A. M　　B. N　　C. Φ　　D. $\mathbf{Z}$

4. 已知 $x>1$，则 $y=4x+\dfrac{1}{x-1}$ 的最小值为（　　）A 16　　B. 8　　C. 4　　D. 2

5. 重庆一中计划面向高一学生开设“科技与创新”，“人文与阅读”两类选修课，为了解学生对这两类选修课的兴趣，对高一某班共 46 名学生调查发现，喜欢“科技与创新”类的学生有 34 名，喜欢“人文与阅读”类的学生有 18 名，两类均不喜欢的有 6 名，则只喜欢“科技与创新”类选修课的学生有（　　）名．

A. 34　　B. 22　　C. 12　　D. 6

6. 设实数 a，b，c，d 满足 $0<\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$，$d<c<0$，则下列不等式一定成立的是（　　）

A. $b>a>0$　　B. $ad^2<bc^2$　　C. $a-c>b-d$　　D. $\dfrac{c}{a}>\dfrac{d}{b}$

7. 若对于任意实数 x，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，例如 $[\sqrt{2}]=1$，$[\sqrt{3}]=1$，$[-1.6]=-2$，那么“$[x]=[y]$”是“$|x-y|<1$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件　　C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. 已知实数 x，y 满足 $x^2+4y^2-xy=3$，则（　　）

A. $xy\ge 1$　　B. $x+2y\le 2$　　C. $x+2y\ge -\sqrt{2}$　　D. $x^2+4y^2\le 4$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分．

9. 已知 p：“$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-(a+1)x+1>0$ 恒成立”为真命题，下列选项可以作为 p 的充分条件的有（　　）A. $-3<a<0$　　B. $a\le -3$ 或 $a\ge 1$　　C. $0<a<1$ D. $-3<a<1$

10. 已知集合 $A=\{x|x^2-2x-3>0\}$，$B=\{x|ax^2+bx+c\le 0\}$（$a\ne 0$），若 $A\cup B=\mathbf{R}$，$A\cap B=\{x|3<x\le 4\}$，则（　　）

A. $a<0$　　B. $bc>6a-3$　　C. 关于 x 的不等式 $ax^2-bx+c>0$ 解集为 $\{x|x<-4$ 或 $x>1\}$

D. 关于 x 的不等式 $ax^2-bx+c>0$ 解集为 $\{x|-4<x<1\}$

11. 已知 $a>0,b>0$，且 $a+b=1$，则说法正确 为（　　）

A. $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 的最大值为 $\sqrt{2}$

B. a^2+2b^2 的最小值为 $\frac{3}{4}$

C. ab^2+a^2b 的最大值为 $\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{4b}$ 的最小值为 $\frac{9}{8}$

12. 已知有限集 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}(n\geq 2,n\in\mathbf{N})$，如果 A 中元素 $a_i(i=1,2,3,\ldots,n)$ 满足

$a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1\times a_2\times\cdots\times a_n$，就称 A 为"完美集"下列结论中正确的有（　　）

A. 集合 $\{-1-\sqrt{3},-1+\sqrt{3}\}$ 不是"完美集"

B. 若 a_1、a_2 是两个不同的正数，且 $\{a_1,a_2\}$ 是"完美集"，则 a_1、a_2 至少有一个大于 2

C. $n=2$ 的"完美集"个数无限

D. 若 $a_i\in\mathbf{N}^*$，则"完美集" A 有且只有一个，且 $n=3$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13. 已知集合 $A=\{x|2x+1\leq 0\}$，$B=\{x|-2x^2-3x+9<0\}$，则 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=$______.

14. 关于 x 的不等式 $\frac{2}{x-3}+x\leq 0$ 的解集为______.

15. 已知集合 $A=\left\{x\left|\frac{x+3}{x-4}<0\right.\right\}$，$B=\{x|2x^2+(2k+7)x+7k<0\}$，若 $A\cap B$ 中恰有一个整数，则实数 k 的取值范围为______.

16. 已知 $a>b>0$，且 $a+b=1$，则 $\frac{a}{b}+\frac{4b}{a-b}+\frac{1}{(a-b)b}-1$ 的最小值为______.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17. 已知全集 $U=\{x\in\mathbf{N}|x(x^2-4x-5)<0\}$，集合 $A=\{1,2,m^2\}$，$B=\{x|x^2-5x+4=0\}$．

（1）若 $a^2+1\in\complement_U B$ 且 $a\in U$，求实数 a 的值；

（2）设集合 $C=A\cap(\complement_U B)$，若 C 的真子集共有 3 个，求实数 m 的值．

18. 已知集合$\{x\mid x^2+ax+b=0,a>0\}$有且仅有两个子集.（1）求a^2-2b^2的最大值；

（2）当且仅当$x_1<x<x_2$时，函数$y=x^2+ax+b$的图像落在直线$y=c$的下方，且$\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{2b+8}{b-c}$，求$c$的值.

19 已知集合$M=\left\{(a,b)\middle|b=2a+1,a\in\mathrm{R}\right\}$，$N=\left\{(x,y)\middle|y=\left(2m^2+2m\right)x^2-(3m-1)x-2,x\in\mathrm{R}\right\}$.

（1） 当$m=1$时，求$M\cap N$；（2）若$m\le-\dfrac{1}{5}$，求关于x的不等式$y\le0$的解集.

20. 北京、张家港2022年冬奥会申办委员会在俄罗斯索契举办了发布会，某公司为了竞标配套活动的相关代言，决定对旗下的某商品进行一次评估．该商品原来每件售价为25元，年销售8万件.

（1）据市场调查，若价格每提高1元，销售量将相应减少2000件，要使销售的总收入不低于原收入，该商品每件定价最多为多少元？

（2）为了抓住申奥契机，扩大该商品的影响力，提高年销售量．公司决定立即对该商品进行全面技术革新和营销策略改革，并提高定价到x元．公司拟投入$\dfrac{1}{6}\left(x^2-600\right)$万作为技改费用，投入$\left(50+\dfrac{1}{5}x\right)$万元作为宣传费用．试问：当该商品改革后的销售量$a$至少应达到多少万件时，才可能使改革后的销售收入不低于原收入与总投入之和？并求出此时商品的每件定价.

21. 对于函数 $y=mx^3+ax^2+(b-1)x+(b-1)(a\neq 0)$，若存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使得

$mx_0^3+ax_0^2+(b-1)x_0+(b-1)=x_0$ 成立，则称 x_0 为函数 $y=mx^3+ax^2+(b-1)x+(b-1)(a\neq 0)$ 的“囧点”.

（1）当 $m=2$，$a=-3$，$b=2$ 时，求函数 $y=mx^3+ax^2+(b-1)x+(b-1)(a\neq 0)$ 的“囧点”；

（2）当 $m=0$ 时，对任意实数 b，函数 $y=mx^3+ax^2+(b-1)x+(b-1)(a\neq 0)$ 恒有“囧点”，求 a 的取值范围.

22. 若实数 x，y，m 满足 $|x-m|<|y-m|$，则称 x 比 y 接近 m，

（1）请判断命题：“$\sqrt{7}$ 比 $\sqrt{5}$ 接近 $\sqrt{6}$”的真假，并说明理由；

（2）已知 $x>0$，$y>0$，若 $p=\dfrac{2xy}{x^2+4y^2}+\dfrac{xy}{x^2+y^2}$，证明：1 比 p 接近 $\sqrt{2}$；

（3）判断：“x 比 y 接近 m”是“$\dfrac{x+2y-3m}{y-x}>2$”的什么条件（充分不必要条件，必要不充分条件，充要条件，既不充分又不必要条件），并加以证明.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求．

1. 已知命题 p：$\exists x\in(1,+\infty)$，使 $2x+1>5$，则（　　）

A. 命题 p 的否定为“$\exists x\in(1,+\infty)$，使 $2x+1\le 5$”

B. 命题 p 的否定为“$\exists x\in(-\infty,1]$，使 $2x+1\le 5$”

C. 命题 p 的否定为“$\forall x\in(1,+\infty)$，使 $2x+1\le 5$”

D. 命题 p 的否定为“$\forall x\in(-\infty,1]$，使 $2x+1\le 5$”

【答案】C

【解析】

【分析】将特称命题否定为全称命题即可．

【详解】因为命题 p：$\exists x\in(1,+\infty)$，使 $2x+1>5$，

所以命题 p 的否定为“$\forall x\in(1,+\infty)$，使 $2x+1\le 5$”，

故选：C

2. 已知集合 $A=\{0,2a+1,a^2+3a+1\}$，若 $-1\in A$，则实数 a=（　　）

A　－1　　　B. －2　　　C. －3　　　D. －1 或－2

【答案】B

【解析】

【分析】根据 $-1\in A$，便有 $2a+1=-1$ 或 $a^2+3a+1=-1$，对于每种情况求出 a 的值，代入集合 A 中，看是否满足集合元素的互异性，从而得出实数 a 的值．

【详解】$\because -1\in A$，

$\therefore 2a+1=-1$ 或 $a^2+3a+1=-1$．

①当 $2a+1=-1$ 时，$a=-1$，此时 $a^2+3a+1=-1$，与集合的互异性矛盾，舍去；

②当 $a^2+3a+1=-1$ 时，$a=-1$ 或 $a=-2$，$a=-2$ 时 $2a+1=-3$，满足条件，$a=-1$ 时，$2a+1=-1$，与集合的互异性矛盾，舍去，

综上可知 $a=-2$．

故选：B．

3. 已知集合 $M=\{x|x=3n-2,n\in \mathrm{Z}\}$，$N=\{x|x=6n+1,n\in \mathrm{Z}\}$，则 $M\cup N=$（　　）

A. M　　B. N　　C. $\varnothing$　　D. $\mathbf{Z}$

【答案】A

【解析】

【分析】对 n 分类讨论，得到元素的两种形式，即可求出并集.

【详解】$n=2k\left(k\in \mathrm{Z}\right)$ 时，$x=3n-2=6k-2$；

$n=2k+1\left(k\in \mathrm{Z}\right)$ 时，$x=3n-2=6k+1$；

$\therefore M=\{x\,|\,x=6k+1$，或 $6k-2$，$k\in \mathrm{Z}\}$；

$\therefore N\subseteq M$，即 $M\cup N=M$.

故选：A

4. 已知 $x>1$，则 $y=4x+\dfrac{1}{x-1}$ 的最小值为（　　）

A. 16　　B. 8　　C. 4　　D. 2

【答案】B

【解析】

【分析】可先将不等式 $4x+\dfrac{1}{x-1}$ 写成 $4(x-1)+\dfrac{1}{x-1}+4$，再根据基本不等式进行计算即可.

【详解】当 $x>1$ 时，$4x+\dfrac{1}{x-1}=4(x-1)+\dfrac{1}{x-1}+4\geqslant 2\sqrt{4(x-1)\times\dfrac{1}{x-1}}+4=8$，

当且仅当 $4(x-1)=\dfrac{1}{x-1}$，即 $x=\dfrac{3}{2}$ 时取等号，此时取得最小值 8，

故选：B.

5. 重庆一中计划面向高一学生开设“科技与创新”，“人文与阅读”两类选修课，为了解学生对这两类选修课的兴趣，对高一某班共 46 名学生调查发现，喜欢“科技与创新”类的学生有 34 名，喜欢“人文与阅读”类的学生有 18 名，两类均不喜欢的有 6 名，则只喜欢“科技与创新”类选修课的学生有（　　）名.

A. 34　　B. 22　　C. 12　　D. 6

【答案】B

【解析】

【分析】设两类均喜欢的有 x 名,布列方程即可得到结果.

【详解】设两类均喜欢的有 x 名,

则 $46-6=34+18-x$，解得 $x=12$，

故只喜欢“科技与创新”类选修课的学生有 $34-12=22$ 名，

故选：B

6. 设实数 a，b，c，d 满足 $0<\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，$d<c<0$，则下列不等式一定成立的是（　　）

A. $b>a>0$

B. $ad^2<bc^2$

C. $a-c>b-d$

D. $\frac{c}{a}>\frac{d}{b}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据不等式的基本性质，对选项中的不等式判断正误即可.

【详解】$\because 0<\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，$\therefore a>b>0$，故 A 错误；

$\because d<c<0$，$\therefore d^2>c^2>0$，又 $a>b>0$，$\therefore ad^2>bc^2$，故 B 错误；

根据 $a>b>0$，$d<c<0$，不妨设 $a=2,b=1,c=-1,d=-2$，显然 $a-c=b-d$，故 C 错误；

$\because 0<\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，$0<-c<-d$，$\therefore \frac{-c}{a}<\frac{-d}{b}$，即 $\frac{c}{a}>\frac{d}{b}$，故 D 正确.

故选：D

7. 若对于任意实数 x，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，例如 $[\sqrt{2}]=1$，$[\sqrt{3}]=1$，$[-1.6]=-2$，那么“$[x]=[y]$”是“$|x-y|<1$”的（　　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】根据高斯函数　定义以及充分必要条件的定义推导即可.

【详解】如果 $[x]=[y]=n,n\in Z$，则有 $x=n+d_1,y=n+d_2,d_1,d_2\in[0,1)$，

$\therefore |x-y|=\ |d_1-d_2|<1$，所以 $[x]=[y]$ 是 $|x-y|<1$ 的充分条件；

反之，如果 $|x-y|<1$，比如 $x=3.9,y=4.1$，则有 $|x-y|=0.2<1$，

根据定义，$[x]=3,[y]=4,[x]\neq[y]$，即不是必要条件，

故 $[x]=[y]$ 是 $|x-y|<1$ 的充分不必要条件；

故选：A.

8. 已知实数 x，y 满足 $x^2+4y^2-xy=3$，则（　　）

A. $xy\geq 1$　　B. $x+2y\leq 2$　　C. $x+2y\geq -\sqrt{2}$　　D. $x^2+4y^2\leq 4$

【答案】D

【解析】

【分析】利用重要不等式 $x^2+y^2\geq 2xy$ 及其变形即可作出判断.

【详解】由 $3+xy=x^2+4y^2\geq 2\cdot x\cdot 2y=4xy$，可得 $xy\leq 1$，故 A 错误；

由 $x^2+4y^2-xy=3$，可得 $(x+2y)^2=3+5xy$，

根据 $x\cdot 2y\leq \frac{(x+2y)^2}{4}$，$\therefore xy\leq \frac{(x+2y)^2}{8}$，$\therefore (x+2y)^2\leq 3+5?\frac{(x+2y)^2}{8}$，

$\therefore (x+2y)^2\leq 8$，解得：$-2\sqrt{2}\leq x+2y\leq 2\sqrt{2}$．故 BC 错误；

由 $x^2+4y^2-xy=3$，可得 $x^2+4y^2-3=xy=\frac{1}{2}\cdot x\cdot(2y)\leq \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+4y^2}{2}$，

即 $x^2+4y^2\leq 4$，故 D 正确.

故选：D

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分．

9. 已知 p：“$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-(a+1)x+1>0$ 恒成立”为真命题，下列选项可以作为 p 的充分条件的有（　　）

A. $-3<a<0$　　B. $a\leq -3$ 或 $a\geq 1$

C. $0<a<1$　　D. $-3<a<1$

【答案】ACD

【解析】

【分析】由命题为真，结合一元二次不等式性质有 $\Delta<0$ 求参数范围，根据各选项判断充分条件.

【详解】由 p 为真命题，则 $\Delta=(a+1)^2-4=a^2+2a-3<0$，可得 $-3<a<1$，

所以 $-3<a<0$、$0<a<1$、$-3<a<1$ 都是 p 的充分条件，$a\leq -3$ 或 $a\geq 1$ 是 p 的既不充分也不必要条件.

故选：ACD

10 已知集合 $A=\{x|x^2-2x-3>0\}$，$B=\{x|ax^2+bx+c\le 0\}$（$a\ne 0$），若 $A\cup B=\mathbf{R}$，

$A\cap B=\{x|3<x\le 4\}$，则（ ）

A. $a<0$

B. $bc>6a-3$

C. 关于 x 的不等式 $ax^2-bx+c>0$ 解集为 $\{x|x<-4$ 或 $x>1\}$

D. 关于 x 的不等式 $ax^2-bx+c>0$ 解集为 $\{x|-4<x<1\}$

【答案】BC

【分析】先求出集合 A，再根据 $A\cup B=\mathbf{R}$ 和 $A\cap B=\{x|3<x\le 4\}$ 可得 -1 和 4 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根，且 $a>0$，再利用根与系数的关系表示出 b,c，然后逐个分析判断即可.

【详解】（利用数轴）$A=\{x|x^2-2x-3>0\}=\{x|x<-1$ 或 $x>3\}$，

因为 $B=\{x|ax^2+bx+c\le 0\}$，$A\cup B=\mathbf{R}$，$A\cap B=\{x|3<x\le 4\}$，

所以 -1 和 4 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根，且 $a>0$，

所以 $-1+4=-\dfrac{b}{a},-1\times 4=\dfrac{c}{a}$，所以 $b=-3a,c=-4a$，A 错误，

对于 B，$bc-(6a-3)=12a^2-6a+3=12\left(a-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{9}{4}>0$，所以 $bc>6a-3$，所以 B 正确，

对于 CD，不等式 $ax^2-bx+c>0$，可化为 $ax^2+3ax-4a>0$，因为 $a>0$，所以不等式可化为 $x^2+3x-4>0$，得 $(x-1)(x+4)>0$，解得 $x<-4$ 或 $x>1$，所以原不等式的解集为 $\{x|x<-4$ 或 $x>1\}$，所以 C 正确，D 错误，

故选：BC

11. 已知 $a>0,b>0$，且 $a+b=1$，则说法正确的为（ ）

A. $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 的最大值为 $\sqrt{2}$

B. a^2+2b^2 的最小值为 $\dfrac{3}{4}$

C. ab^2+a^2b 的最大值为 $\dfrac{1}{4}$

D. $\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{4b}$ 的最小值为 $\dfrac{9}{8}$

【答案】ACD

【解析】

【分析】A、C 利用已知等量条件，结合基本不等式求最值；B 由 $a^2+2b^2=3(b-\frac{1}{3})^2+\frac{2}{3}$，结合二次函数性质求最值；D 应用基本不等式“1”的代换求最小值.

【详解】A：$a+b=1\ge\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{2}$，则 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\le\sqrt{2}$，当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时等号成立，正确；

$key2$:（柯西不等式）$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a}\cdot 1+\sqrt{b}\cdot 1\le\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

B：$a^2+2b^2=(1-b)^2+2b^2=3b^2-2b+1=3(b-\frac{1}{3})^2+\frac{2}{3}\ge\frac{2}{3}$，当 $b=\frac{1}{3}$ 时等号成立，错误；

key:（柯西不等式）$a+b=1\cdot a+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}b\le\sqrt{1+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{a^2+2b^2},\therefore a^2+2b^2\ge\frac{2}{3}$

C：$ab^2+a^2b=ab(a+b)=ab\le\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{1}{4}$，当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时等号成立，正确；

D：$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{4b}=\frac{1}{2}(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{4b})(a+1+b)=\frac{5}{8}+\frac{1}{2}(\frac{b}{a+1}+\frac{a+1}{4b})\ge\frac{5}{8}+\sqrt{\frac{b}{a+1}\cdot\frac{a+1}{4b}}=\frac{9}{8}$，当且仅当 $a+1=2b$，即 $a=\frac{1}{3},b=\frac{2}{3}$ 时等号成立，正确.

$key2$:（权方和不等式）$\frac{1}{a+1}+\frac{\frac{1}{4}}{b}\ge\frac{(1+\frac{1}{2})^2}{a+1+b}=\frac{9}{8}$

故选：ACD

12. 已知有限集 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}(n\ge 2,n\in\mathbf{N})$，如果 A 中元素 $a_i(i=1,2,3,\ldots,n)$ 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1\times a_2\times\cdots\times a_n$，就称 A 为“完美集”下列结论中正确的有（　　）

A. 集合 $\{-1-\sqrt{3},-1+\sqrt{3}\}$ 不是“完美集”

B. 若 a_1、a_2 是两个不同的正数，且 $\{a_1,a_2\}$ 是“完美集”，则 a_1、a_2 至少有一个大于 2

C. n=2 的“完美集”个数无限

D. 若 $a_i\in\mathbf{N}^*$，则“完美集”A 有且只有一个，且 n=3

【答案】BCD

【解析】

【分析】根据已知中“完美集”的定义，结合韦达定理及反证法，逐一判断四个结论的正误，进而可得答案.

【详解】对于 A，$\left(-1-\sqrt{3}\right)+\left(-1+\sqrt{3}\right)=-2$，$\left(-1-\sqrt{3}\right)\cdot\left(-1+\sqrt{3}\right)=-2$，集合$\left\{-1-\sqrt{3},-1+\sqrt{3}\right\}$是“完美集”，故 A 错误；

对于 B，若a_1、a_2是两个不同的正数，且$\{a_1$，$a_2\}$是“完美集”，则设$a_1+a_2=a_1\cdot a_2=t$，根据根和系数的关系a_1和a_2相当于$x^2-tx+t=0$的两根，所以$\Delta=t^2-4t>0$，解得$t>4$或$t<0$，由于t为正数，

$t=a_1\cdot a_2>4$，即所以a_1、a_2至少有一个大于 2，故 B 正确．

$key2:$由$a_1+a_2=a_1a_2$得$1=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}>\frac{2}{a}$（即$a=\max\{a_1,a_2\}$），$\therefore a>2$

对于 C，二元“完美集”有无穷多个；根据选项 B 一元二次方程根和系数的关系a_1和a_2相当于$x^2-tx+t=0$的两根，所以$\Delta=t^2-4t>0$，解得$t>4$或$t<0$，所以有无穷多个，故 C 正确．

对于 D，不妨设A中$a_1<a_2<a_3<\ldots<a_n$，

由$a_1a_2\ldots a_n=a_1+a_2+\ldots+a_n<na_n$，得$a_1a_2\ldots a_{n-1}<n$，

当n=2 时，即有$a_1<2$，$\therefore a_1=1$，于是$1+a_2=a_2$，a_2无解，即不存在满足条件的“完美集”当n=3 时，

$a_1a_2<3$，故只能a_1=1，$a_2=2$，求得$a_3=3$，于是“完美集”A只有一个，为$\{1，2，3\}$．

当$n\geq 4$时，由$a_1a_2\ldots a_{n-1}\geq 1\times 2\times 3\times\ldots\times(n-1)$，即有$n>1\times 2\times 3\times\ldots\times(n-1)$，

事实上，$1\times 2\times 3\times\ldots\times(n-1)\geq(n-1)(n-2)=n^2-3n+2=(n-2)^2-2+n>n$，矛盾，

$\therefore$当$n\geq 4$时不存在完美集A，故 D 正确．

故选：BCD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．已知集合$A=\left\{x\middle|2x+1\leq 0\right\}$，$B=\left\{x\middle|-2x^2-3x+9<0\right\}$，则$A\cap\left(\complement_{\mathrm{R}}B\right)=$______．

【答案】$\left[-3,-\frac{1}{2}\right]$

【解析】

【分析】解一元二次不等式，进而求补集与交集即可．

【详解】由题意可得，$A=\left\{x\middle|x\leq-\frac{1}{2}\right\}$，$B=\left\{x\middle|2x^2+3x-9>0\right\}=\left\{x\middle|x<-3，\text{或 }x>\frac{3}{2}\right\}$，

$\therefore\complement_{\mathrm{R}}B=\left\{x\middle|-3\leq x\leq\frac{3}{2}\right\}$，$\therefore A\cap\left(\complement_{\mathrm{R}}B\right)=\left\{x\middle|-3\leq x\leq-\frac{1}{2}\right\}$，

故答案为：$\left[-3,-\frac{1}{2}\right]$

14. 关于 x 的不等式 $\frac{2}{x-3}+x\le 0$ 的解集为______.

【答案】$(-\infty,1]\cup[2,3)$

【解析】

【分析】通过移项通分，转化为整式不等式，即可得到结果.

【详解】由 $\frac{2}{x-3}+x\le 0$ 可得 $\frac{x^2-3x+2}{x-3}\le 0$，

$\therefore \begin{cases}(x^2-3x+2)(x-3)\le 0\\ x-3\ne 0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x\le 1,\text{或}2\le x\le 3\\ x\ne 3\end{cases}$，

$\therefore$ 不等式解集为 $(-\infty,1]\cup[2,3)$.

故答案为：$(-\infty,1]\cup[2,3)$

15. 已知集合 $A=\left\{x\middle|\frac{x+3}{x\text{-}4}<0\right\}$，$B=\left\{x\middle|2x^2+(2k+7)x+7k<0\right\}$，若 $A\cap B$ 中恰有一个整数，则实数 k 的取值范围为______.

【答案】$[1,2)$

【解析】

【分析】分类讨论解一元二次不等式，结合数轴即可得到结果.

【详解】$A=\left\{x\middle|\frac{x+3}{x-4}<0\right\}=(-3,4)$，

由 $2x^2+(2k+7)x+7k<0$，可得 $(2x+7)(x+k)<0$，

当 $k=\frac{7}{2}$ 时，$B=\varnothing$，不适合题意，

当 $k>\frac{7}{2}$ 时，$B=\left\{x\middle|-k<x<-\frac{7}{2}\right\}$，不适合题意，

当 $k<\frac{7}{2}$ 时，$B=\left\{x\middle|-\frac{7}{2}<x<-k\right\}$，若 $A\cap B$ 中恰有一个整数，

则 $-2<-k\le -1$，即 $1\le k<2$.

故答案为：$[1,2)$

16. 已知 $a>b>0$，且 $a+b=1$，则 $\frac{a}{b}+\frac{4b}{a-b}+\frac{1}{(a-b)b}-1$的最小值为______.

【详解一】∵$a>b>0$，且 $a+b=1$，

$$\therefore \frac{a-b}{b}+\frac{4b}{a-b}+\frac{2}{(a-b)\cdot 2b}\geq 2\sqrt{\frac{a-b}{b}\cdot\frac{4b}{a-b}}+\frac{2}{\left(\frac{a-b+2b}{2}\right)^2}=4+8=12,$$

当且仅当 $\frac{a-b}{b}=\frac{4b}{a-b}$ 且 $a-b=2b$，即 $a=3b=\frac{3}{4}$ 时，等号同时取到，故答案为：12

（注意：这个方法不好，往往等号不同时成立，碰巧了）

$key2:\frac{a}{b}+\frac{4b}{a-b}+\frac{1}{(a-b)b}-1=\frac{1-b}{b}+\frac{4b}{1-2b}=\frac{1}{(1-2b)b}-1(a=1-b>b得1-2b\in(0,1))$

$=\frac{1-2b}{b}+\frac{4b}{1-2b}+\frac{(1-2b+2b)^2}{(1-2b)b}=\frac{1-2b}{b}+\frac{4b}{1-2b}+\frac{(1-2b)^2+4b(1-2b)+4b^2}{(1-2b)b}$

$=\frac{2(1-2b)}{b}+\frac{8b}{1-2b}+4\geq 2\sqrt{16}+4=12$（当且仅当$1-2b=2b$即$b=\frac{1}{4}$时，取＝）

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17. 已知全集$U=\left\{x\in\mathbf{N}\middle|x\left(x^2-4x-5\right)<0\right\}$，集合 $A=\left\{1,2,m^2\right\}$， $B=\left\{x\middle|x^2-5x+4=0\right\}$.

（1）若 $a^2+1\in\complement_U B$ 且 $a\in U$，求实数 a 的值；

（2）设集合 $C=A\cap\left(\complement_U B\right)$，若 C 的真子集共有 3 个，求实数 m 的值.

【答案】（1）1　　（2） $m=\pm\sqrt{3}$

【解析】

【分析】（1）求出集合 U， B，进而求出 $\complement_U B$，由 $a^2+1\in\complement_U B$， $a\in U$，能求出 a.

（2）当 $m^2\neq 3$ 时， $C=\{2\}$，此时集合 C 共有 1 个真子集，不符合题意，当 $m^2=3$ 时， $C=\{2，3\}$，此时集合 C 共有 3 个真子集，符合题意，由此能求出结果.

【小问 1 详解】

因为$U=\left\{x\in\mathbf{N}\middle|0<x<5\right\}=\{1,2,3,4\}$， $B=\left\{x\middle|x^2-5x+4=0\right\}=\{1,4\}$，

因此， $\complement_U B=\{2,3\}$. 若 $a^2+1\in\complement_U B$，则 $a^2+1=2$ 或 $a^2+1=3$，解得 $a=?1$ 或 $\pm\sqrt{2}$.

又 $a\in U$，所以 $a=1$；

【小问 2 详解】

$\because A=\{1,2,m^2\}$，$\complement_U B=\{2,3\}$，

当$m^2\neq 3$时，$C=\{2\}$，此时集合C共有1个真子集，不符合题意；

当$m^2=3$时，$C=\{2,3\}$，此时集合C共有3个真子集，符合题意.

综上所述，$m=?\sqrt{3}$.

18. 已知集合$\{x\mid x^2+ax+b=0,a>0\}$有且仅有两个子集.

（1）求a^2-2b^2的最大值；

（2）当且仅当$x_1<x<x_2$时，函数$y=x^2+ax+b$ 图像落在直线$y=c$的下方，且$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{2b+8}{b-c}$，

求c的值.

【答案】（1）2 （2）4

【解析】

【分析】（1）由题意得集合中只有一个元素，利用判别式得到a和b的关系即可求解；

（2）当且仅当$x_1<x<x_2$时，函数$y=x^2+ax+b$的图像落在直线$y=c$的下方即不等式$x^2+ax+b-c<0$的解集为(x_1,x_2)，利用韦达定理得到x_1+x_2，x_1x_2和a,b,c的关系再通分求值即可.

【小问1详解】

因为集合$\{x\mid x^2+ax+b=0,a>0\}$有且仅有两个子集，

所以集合中只有一个元素即$x^2+ax+b=0$仅有一个解，

所以$\Delta=a^2-4b=0$，$a^2=4b$，

所以$a^2-2b^2=4b-2b^2=-2(b-1)^2+2\leq 2$，当$b=1,a=2$时等号成立，

故a^2-2b^2的最大值为2.

【小问2详解】

当且仅当$x_1<x<x_2$时，函数$y=x^2+ax+b$的图像落在直线$y=c$的下方即不等式$x^2+ax+b-c<0$的解集为(x_1,x_2)，

则$x_1+x_2=-a$，$x_1x_2=b-c$，

所以$\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}}{x_1x_2}=\dfrac{\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=\dfrac{a^2-2b+2c}{b-c}=\dfrac{2b+8}{b-c}$，

又由（1）得$a^2=4b$，解得$c=4$.

19. 已知集合$M=\left\{(a,b)\middle|b=2a+1,a\in\mathrm{R}\right\}$，$N=\left\{(x,y)\middle|y=\left(2m^2+2m\right)x^2-(3m-1)x-2,x\in\mathrm{R}\right\}$.

（1）当$m=1$时，求$M\cap N$；

（2）若$m\le-\dfrac{1}{5}$，求关于x的不等式$y\le0$的解集.

【答案】（1）$M\cap N=\left\{\left(-\dfrac{1}{2},0\right),\left(\dfrac{3}{2},4\right)\right\}$

（2）答案见解析

【解析】

【分析】（1）解方程组即可得到交集；

（2）对参数分类讨论即可得到二次不等式的解集.

【小问1详解】

由题意$M\cap N=\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}y=2x+1\\y=4x^2-2x-2\end{cases}\right\}=\left\{\left(-\dfrac{1}{2},0\right),\left(\dfrac{3}{2},4\right)\right\}$.

【小问2详解】

$\because\left(2m^2+2m\right)x^2-(3m-1)x-2\le0$，

$\therefore(2mx+1)\left[(m+1)x-2\right]\le0$

当$m=-1$时，解集为：$\left\{x\middle|x\le\dfrac{1}{2}\right\}$；

当$m=-\dfrac{1}{5}$时，$\Delta=(5m+1)^2=0$，解集为：$\mathbf{R}$；

当$-1<m<-\dfrac{1}{5}$时，$\Delta>0$，$\dfrac{2}{m+1}>-\dfrac{1}{2m}$，解集为：$\left\{x\middle|x\le-\dfrac{1}{2m}\text{或}x\ge\dfrac{2}{m+1}\right\}$；

当$m<-1$时，$\Delta>0$，$\dfrac{2}{m+1}<-\dfrac{1}{2m}$，解集为：$\left\{x\middle|\dfrac{2}{m+1}\le x\le-\dfrac{1}{2m}\right\}$.

20. 北京、张家港2022年冬奥会申办委员会在俄罗斯索契举办了发布会，某公司为了竞标配套活动的相关代言，决定对旗下的某商品进行一次评估．该商品原来每件售价为25元，年销售8万件.

（1）据市场调查，若价格每提高1元，销售量将相应减少2000件，要使销售的总收入不低于原收入，该

商品每件定价最多为多少元？

（2）为了抓住申奥契机，扩大该商品的影响力，提高年销售量．公司决定立即对该商品进行全面技术革新和营销策略改革，并提高定价到x元．公司拟投入$\frac{1}{6}\left(x^2-600\right)$万作为技改费用，投入$\left(50+\frac{1}{5}x\right)$万元作为宣传费用．试问：当该商品改革后的销售量$a$至少应达到多少万件时，才可能使改革后的销售收入不低于原收入与总投入之和？并求出此时商品的每件定价．

【答案】（1） 40 元

（2）当该商品改革后的销售量a至少达到10.2万件时，才可能使改革后的销售收入不低于原收入与总投入之和，此时该商品的每件定价为30元．

【解析】

【分析】(1) 根据条件列出不等式$t^2-65t+1000\le 0$，解不等式即可；

(2) 将问题转化为不等式有解问题$ax\ge 25\times 8+50+\frac{1}{5}x+\frac{1}{6}\left(x^2-600\right)$有解，然后分离参数$a\ge\frac{150}{x}+\frac{1}{6}x+\frac{1}{5}$有解，利用基本不等式求最值．

【小问 1 详解】

设每件定价为t元，依题意得$\left(8-\frac{t-25}{1}\times 0.2\right)t\geqslant 25\times 8$，

整理得$t^2-65t+1000\le 0$，解得$25\le t\le 40$．

所以要使销售的总收入不低于原收入，每件定价最多为40元．

【小问 2 详解】

依题意知，当$x>25$时，不等式$ax\geqslant 25\times 8+50+\frac{1}{5}x+\frac{1}{6}\left(x^2-600\right)$有解，

等价于当$x>25$时，$a\geqslant\frac{150}{x}+\frac{1}{6}x+\frac{1}{5}$有解，

由于$\frac{150}{x}+\frac{1}{6}x\geqslant 2\sqrt{\frac{150}{x}\times\frac{1}{6}x}=10$，当且仅当$\frac{150}{x}=\frac{x}{6}$，即$x=30$时等号成立，

所以$a\ge 10.2$．

答：当该商品改革后的销售量a至少达到10.2万件时，才可能使改革后的销售收入

不低于原收入与总投入之和，此时该商品的每件定价为30元．

21. 对于函数 $y=mx^3+ax^2+(b-1)x+(b-1)(a\neq 0)$，若存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使得 $mx_0^3+ax_0^2+(b-1)x_0+(b-1)=x_0$ 成立，则称 x_0 为函数 $y=mx^3+ax^2+(b-1)x+(b-1)(a\neq 0)$ 的“囧点”．

（1）当 $m=2$，$a=-3$，$b=2$ 时，求函数 $y=mx^3+ax^2+(b-1)x+(b-1)(a\neq 0)$ 的“囧点”；

（2）当 $m=0$ 时，对任意实数 b，函数 $y=mx^3+ax^2+(b-1)x+(b-1)(a\neq 0)$ 恒有“囧点”，求 a 的取值范围．

【答案】（1）“囧点” $x_1=1$，$x_2=-\dfrac{1}{2}$

（2）$-1\leq a<0$

【解析】

【分析】（1）利用“囧点”定义布列方程，即可得到结果；

（2）函数 $y=mx^3+ax^2+(b-1)x+(b-1)(a\neq 0)$ 恒有“囧点”，等价于函数 $y=ax^2+(b+1)x+(b-1)(a\neq 0)$ 恒有“囧点”，结合判别式即可得到结果．

【小问 1 详解】

当 $m=2$，$a=-3$，$b=2$ 时，$y=2x^3-3x^2+x+1$，

由题意知：$\therefore 2x^3-3x^2+x+1=x$，$\therefore (2x+1)(x-1)^2=0$，

解得 $x_1=1$，$x_2=-\dfrac{1}{2}$，

所以当 $m=2$，$a=-3$，$b=2$ 时，函数 $y=mx^3+ax^2+(b-1)x+(b-1)(a\neq 0)$ 的“囧点” $x_1=1$，$x_2=-\dfrac{1}{2}$．

【小问 2 详解】

由题知：$ax^2+(b-1)x+(b-1)=x(a\neq 0)$，所以 $ax^2+(b-2)x+(b-1)=0$，

由于函数 $y=ax^2+(b+1)x+(b-1)(a\neq 0)$ 恒有“囧点”，

所以 $\Delta=(b-2)^2-4a(b-1)\geq 0$，即 $b^2-4(a+1)b+4(a+1)\geq 0$，

又因为 b 是任意实数，所以 $\Delta_1=a(a+1)\leq 0$，

解得 $-1\leq a\leq 0$，又 $a\neq 0$．故 $-1\leq a<0$．

22. 若实数 x，y，m 满足 $\left|x-m\right|<\left|y-m\right|$，则称 x 比 y 接近 m，

（1）请判断命题：“$\sqrt{7}$ 比 $\sqrt{5}$ 接近 $\sqrt{6}$”的真假，并说明理由；

（2）已知 $x>0$，$y>0$，若 $p=\dfrac{2xy}{x^2+4y^2}+\dfrac{xy}{x^2+y^2}$，证明：1 比 p 接近 $\sqrt{2}$；

（3）判断：“x 比 y 接近 m”是“$\dfrac{x+2y-3m}{y-x}>2$”的什么条件（充分不必要条件，必要不充分条件，充要条件，既不充分又不必要条件），并加以证明.

(3) 解: $|x-m|<|y-m| \Leftrightarrow (x-m)^2<(y-m)^2 \Leftrightarrow (x-y)(x+y-2m)=(x-y)(x-m)+(x-y)(y-m)<0$

而 $\dfrac{x+2y-3m}{y-x}<-1 \Leftrightarrow \dfrac{x+2y-3m}{y-x}-2=\dfrac{3x-3m}{y-x}>0 \Leftrightarrow (y-x)(x-m)>0 \Leftrightarrow (x-y)(x-m)<0$

【答案】（1）命题：“$\sqrt{7}$ 比 $\sqrt{5}$ 接近 $\sqrt{6}$”为真，理由见解析

（2）证明见解析　　（3）“x 比 y 接近 m”是“$\dfrac{x+y-3m}{x-y}<-1$”必要不充分条件，证明见解析

【解析】

【分析】（1）根据定义结合分子有理化即可作出判断；

（2）利用基本不等式求出 p 的最大值，即可作出判断；

（3）举特例判断充分性，利用不等式性质证明必要性.

小问 1 详解】

$\because \sqrt{7}-\sqrt{6}=\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$，$\sqrt{6}-\sqrt{5}=\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$，

$\therefore \sqrt{7}-\sqrt{6}<\sqrt{6}-\sqrt{5}$，

命题：“$\sqrt{7}$ 比 $\sqrt{5}$ 接近 $\sqrt{6}$”为真.

【小问 2 详解】

$p=\dfrac{2xy}{x^2+4y^2}+\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\dfrac{2}{\dfrac{x}{y}+\dfrac{4y}{x}}+\dfrac{1}{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}}$，设 $t=\dfrac{x}{y}(t>0)$，$t+\dfrac{2}{t}\geq 2\sqrt{2}$ 当且仅当 $t=\sqrt{2}$ 时取等，

所以原式 $=\dfrac{2}{t+\dfrac{4}{t}}+\dfrac{1}{t+\dfrac{1}{t}}=\dfrac{2t}{t^2+4}+\dfrac{t}{t^2+1}=\dfrac{3\left(t^3+2t\right)}{t^4+5t^2+4}=\dfrac{3\left(t+\dfrac{2}{t}\right)}{t^2+5+\dfrac{4}{t^2}}=\dfrac{3\left(t+\dfrac{2}{t}\right)}{\left(t+\dfrac{2}{t}\right)^2+1}$

$=\dfrac{3}{\left(t+\dfrac{2}{t}\right)+\dfrac{1}{\left(t+\dfrac{2}{t}\right)}}\le\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，此时 $t=\sqrt{2}$，取等号.

$p\le\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\because\dfrac{2\sqrt{2}}{3}<1<\sqrt{2}$，所以 1 比 p 接近 $\sqrt{2}$；

【小问 3 详解】

取 $x=-\dfrac{1}{2}$，$y=2$，$m=0$，则 $|x-m|=\dfrac{1}{2}<2=|y-m|$，故 x 比 y 接近 m.

但 $\dfrac{x+2y-3m}{y-x}<2$，故“x 比 y 接近 m”推不出“$\dfrac{x+2y-3m}{y-x}>2$”.

所以“x 比 y 接近 m”是“$\dfrac{x+2y-3m}{y-x}>2$”不充分条件.

若 $\dfrac{x+2y-3m}{y-x}>2$，则 $\dfrac{3x-3m}{x-y}<0$，故（$x-m$）（$x-y$）<0，

所以 $\begin{cases}x-m<0\\x-y>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-m>0\\x-y<0\end{cases}$，

若 $\begin{cases}x-m<0\\x-y>0\end{cases}$，则 $y<x$ 且 $x<m$，故 $x+y<m+x<2m$，

所以（$x+y-2m$）（$x-y$）<0，

故 $|x-m|^2-|y-m|^2=(x+y-2m)(x-y)<0$，所以 $|x-m|<|y-m|$，

也就是“x 比 y 接近 m”.

若 $\begin{cases}x-m>0\\x-y<0\end{cases}$，则 $x<y$ 且 $m<x$，故 $x+y>m+x>2m$，

所以（$x+y-2m$）（$x-y$）<0，

故 $|x-m|^2-|y-m|^2=(x+y-2m)(x-y)<0$，所以 $|x-m|<|y-m|$，

故“x 比 y 接近 m”是“$\dfrac{x+y-3m}{x-y}<-1$”必要不充分条件.