初等函数（Ⅱ）三角函数解答（4）

解三角形解答（1）2023-03-26

三、解三角形的基本工具：（1）正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$（外接圆直径）（两角参与）

（2）余弦定理：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A, b^2=c^2+a^2-2ca\cos B, c^2=a^2+b^2-2ab\cos C,$

变形：$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}, \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$　（一角参与）

(3) 正、余弦定理应用题型：

$\begin{cases}\text{两角一边（用正弦定理，有唯一解）；两边一对角（用正弦定理，注意解的个数讨论）}\\ \text{两边夹角（有余弦定理，有唯一解）；三边（用余弦定理，有唯一解）}\end{cases}$

（4）面积公式：$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ca\sin B=\dfrac{abc}{4R}=pr=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

(5) 三角形中线长公式：$\overrightarrow{AD}^2=\dfrac{2\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AC}^2-(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})^2}{4}=\dfrac{2c^2+2b^2-a^2}{4}$ 或 $\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2=2\overrightarrow{AD}^2+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}^2$

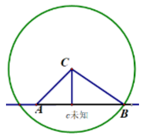
(6) 角平分线长公式：$t_a=\dfrac{bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}, t_b=\dfrac{ac\cos\frac{B}{2}}{a+c}, t_c=\dfrac{ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}$

（7）内切圆半径：$r=\dfrac{2S_{\triangle ABC}}{a+b+c}=\dfrac{b+c-a}{2}\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{a+b-c}{2}\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{a+c-b}{2}\tan\dfrac{B}{2}$

1．已知$\triangle ABC$中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，

（1）①若 $a=2, A=45°, b=x$，若$\triangle ABC$只有一个，则 x 的取值范围为__________$(0,2]\cup\{2\sqrt{2}\}$；

若$\triangle ABC$有两个，则 x 的取值范围为_______________$(2,2\sqrt{2})$



key：如图：$\dfrac{\sqrt{2}}{2}x=2, or, 0<x<2; x>2,$ 且，$2>\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$

③已知 $\tan B=\sqrt{3}, \sin C=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$AC=3\sqrt{6}$，则 $\cos A=$_____；$\triangle ABC$ 的面积为______

key：如图，$\dfrac{3\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{c}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$ 得 $c=8$，而 $8\sin\dfrac{\pi}{3}=4\sqrt{3}<3\sqrt{6}<8, C_1H=3\sqrt{6}\cdot\dfrac{1}{3}=\sqrt{6},$

$\therefore\cos A=\dfrac{64+54-(22\pm8\sqrt{6})}{48\sqrt{6}}=\dfrac{2\sqrt{6}\pm1}{6}, S_{\triangle ABC}=8\sqrt{3}\pm6\sqrt{2}$

（2）①（2015 浙江）已知一个角大于$120°$的三角形的三边长分别为 m、$m+1$、$m+2$．则实数 m 的取值范围是（　D　）$A.m>1$　$B.m>3$　$C.\dfrac{3}{2}<m<3$　$D.1<m<\dfrac{3}{2}$

②（2015 湖南）已知三边为连续自然数的三角形的最大角是最小角的两倍.则该三角形的周长为__________15

③(2015 湖北)已知顶角为$20°$的等腰三角形的底边长为 a，腰长为 b.则 $\dfrac{a^3+b^3}{ab^2}$ 的值为__________.3

key:由已知得 $\dfrac{\frac{a}{2}}{b}=\sin 10°$,即 $\dfrac{a}{b}=2\sin 10°$,$\therefore \dfrac{a^3+b^3}{ab^2}=(\dfrac{a}{b})^2+\dfrac{b}{a}=4\sin^2 10°+\dfrac{1}{2\sin 10°}$

$=\dfrac{2(1-\cos 20°)\cdot 2\sin 10°+1}{2\sin 10°}=\dfrac{4\sin 10°-2(\sin 30°+\sin 10°-20°))+1}{2\sin 10°}=3$

④在锐角$\triangle ABC$ 中，$\angle A=2\angle B,\angle B,\angle C$ 的对边长分别是 b,c，则 $\dfrac{b}{b+c}$ 的取值范围是______. $(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2})$

$key:\dfrac{b}{b+c}=\dfrac{\sin B}{\sin B+\sin(\pi-3B)}=\dfrac{1}{4\cos^2 B}(B,\pi-3B,2B\in(0,\dfrac{\pi}{2})\Rightarrow B\in(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4})\Rightarrow \cos B\in(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}))$

⑤已知$\triangle ABC$的三边长均为正整数，若$\angle A=2\angle B$，且$CA=9$，则BC的最小可能值是____. 12

$key:\dfrac{a}{2\sin B\cos B}=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{9}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin 3B}=\dfrac{c}{\sin B(4\cos^2 B-1)}$得$a=18\cos B,c=9(4\cos^2 B-1)$

$\therefore c=\dfrac{a^2}{9}-9\in N^*$,且$\begin{cases}a+c=\dfrac{a^2}{9}-9+a>9\\ \dfrac{a^2}{9}>a\\ 9+a>\dfrac{a^2}{9}-9\end{cases}$ 得$9<a<18,a\in N^*$得$(a,b,c)=(12,9,7),or,(a,b,c)=(15,9,16)$

2. 已知$\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c.（1）已知$2B=A+C$.则$\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{c}{b+a}=$________;

$key:b^2=a^2+c^2-ac,\therefore \dfrac{a}{b+c}+\dfrac{c}{b+a}=\dfrac{ab+a^2+bc+c^2}{(b+c)(b+a)}=\dfrac{ab+bc+b^2+ac}{(b+c)(b+a)}=1$

若$a+b=14,c=10$,则$a=$_____;

$key:10(10-a)=c(c-a)=b^2-a^2=14(b-a)=14(14-2a)$得$a=\dfrac{16}{3}$

若$b=\sqrt{3}$,则$a\in$______,$a+c\in$__________.

$key:B$的轨迹为直径为2的圆弧,$\therefore a\in(0,2],a+c=\sqrt{3+4\sqrt{3}S}\in(\sqrt{3},2\sqrt{3}]$

（2）若$2b=a+c$，则B的取值范围为_____; $(0,\dfrac{\pi}{3}]$

$\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}=$_________;

$key:2\sin(A+C)=\sin A+\sin C=2\sin\dfrac{A+C}{2}\cos\dfrac{A-C}{2}$得$2\cos\dfrac{A+C}{2}=\cos\dfrac{A-C}{2}$

$\therefore \tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{3}$

$5\cos A-4\cos A\cos C+5\cos C=$____________.

$key1:\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b+2c-2a}{2c}=\frac{1}{4}(5-\frac{3a}{c})$,同理$\cos C=\frac{1}{4}(5-\frac{3c}{a})$

$key2:$原式$=10\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}-2[\cos(A+C)+\cos(A-C)]$

$=5\cos^2\frac{A-C}{2}-2[2\cos^2\frac{A+C}{2}-1+2\cos^2\frac{A-C}{2}-1]=4$

若$ac=b^2$,则B的取值范围为__________. $(0,\frac{\pi}{3}]$

变式：（多选题）下列判断正确的是（ ABC）

A.若$ab>c^2$,则$C<\frac{\pi}{3}$　　B.若$a+b>2c$,则$C<\frac{\pi}{3}$

C.若$a^3+b^3=c^3$,则$C<\frac{\pi}{2}$　D.$(a^2+b^2)c^2<2a^2b^2$,则$C>\frac{\pi}{3}$.

$key:A:\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}>\frac{a^2+b^2-ab}{2ab}=\frac{1}{2}(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1)\ge\frac{1}{2},\therefore C<\frac{\pi}{3};$

$B:\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}>\frac{a^2+b^2-\frac{(a+b)^2}{4}}{2ab}=\frac{1}{8}(\frac{3a}{b}+\frac{3b}{a}-2)\ge\frac{1}{2},\therefore C<\frac{\pi}{3}$

$C:c^3=a^3+b^3,\therefore 1=(\frac{a}{c})^3+(\frac{b}{c})^3<(\frac{a}{c})^2+(\frac{b}{c})^2(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\in(0,1)),\therefore c^2<a^2+b^2,\therefore C<\frac{\pi}{2};$

$D:\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}>\frac{a^2+b^2-\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}}{2ab}=\frac{1}{2}(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})-\frac{1}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}=\frac{1}{2}t-\frac{1}{t}\ge\frac{1}{2},\therefore C<\frac{\pi}{3}$

（3）若$a^2+b^2=c^2+\sqrt{3}ab$.则C=_____； $\frac{\pi}{6}$

若$c=1$，则$a+b\in$________,$ab\in$_______,$a^2+b^2\in$________.

$key:$由$a^2+b^2=c^2+\sqrt{3}ab=a^2+b^2-2ab\cos C+\sqrt{3}ab=0$得$\cos C=\frac{\sqrt{3}}{2},\because C\in(0,\pi),\therefore C=\frac{\pi}{6}$

$\therefore S=\frac{1}{2}ab\cdot\frac{1}{2}$得$ab=4S$,而$S\in(0,\frac{2+\sqrt{3}}{4}]$,

$\therefore a+b=\sqrt{1+4(2+\sqrt{3})S}\in(1,\sqrt{6}+\sqrt{2}],ab=4S\in(0,2+\sqrt{3}],a^2+b^2=1+4\sqrt{3}S\in(1,4+2\sqrt{3}]$

若$\triangle ABC$为锐角三角形，且$c=1$，则$a+b\in$_______,$ab\in$_______,$a^2+b^2\in$________;

$key:S=\frac{1}{2}ab\cdot\frac{1}{2}$得$ab=4S$,而$S\in(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{2+\sqrt{3}}{4}]$,

$\therefore a+b=\sqrt{1+4(2+\sqrt{3})S}\in(2+\sqrt{3},\sqrt{6}+\sqrt{2}],ab=4S\in(2\sqrt{3},2+\sqrt{3}],a^2+b^2=1+4\sqrt{3}S\in(7,4+2\sqrt{3}]$

$a+2b\in$____________；$a^2+2b^2\in$________.

key：由$\begin{cases} A\in(0,\dfrac{\pi}{2}) \\ B=\dfrac{5\pi}{6}-A\in(0,\dfrac{\pi}{2}) \end{cases}$ 得$A\in(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2})$

由$2R=\dfrac{c}{\sin C}=2,\therefore a+2b=2\sin A+4\sin(A+\dfrac{\pi}{6})=(2+2\sqrt{3})\sin A+2\cos A$

$=(2,2+2\sqrt{3})\cdot(\cos A,\sin A)\in(2+2\sqrt{3},2\sqrt{5+2\sqrt{3}}]$

$a^2+2b^2=4(\dfrac{1-\cos 2A}{2}+2\cdot\dfrac{1-\cos(2A+\dfrac{\pi}{3})}{2})=6+(-4,2\sqrt{3})\cdot(\cos 2A,\sin 2A)\in(10,6+2\sqrt{7}]$