2023-24（下）模拟（3）

2024-02-17

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

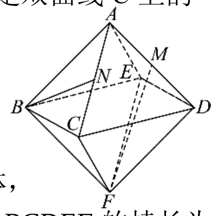
1. 已知 $a\in R$，若 $(2+i)(1+ai)$ 为纯虚数，则 $a=$（　　）A. $-\frac{1}{2}$　B. $\frac{1}{2}$　C. -2　D. 2

2. 已知直线 $l_1: x-ay+1=0$，$l_2:(a-1)x-12y-4=0$，则“$a=4$”是“$l_1//l_2$”的（　　）

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 若 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})=\frac{3}{5}$，则 $\sin(2\alpha+\frac{5\pi}{6})=$（　　）A. $-\frac{7}{25}$　B. $-\frac{12}{25}$　C. $\frac{7}{25}$　D. $\frac{12}{25}$

4. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左，右焦点分别为 F_1,F_2，O 为坐标原点，点 P 是双曲线 C 上的一点，$|OP|=|OF_2|$，且 $\triangle POF_1$ 的面积为 4，则实数 $b=$（　　）A. $\sqrt{2}$　B. 2　C. $2\sqrt{2}$　D. 4



5．正多面体也称柏拉图立体，被誉为最有规律的立体结构，是所有面都只由一种正多边形构成的多面体（各面都是全等的正多边形）．数学家已经证明世界上只存在五种柏拉图立体，即正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体．如图，已知一个正八面体 $ABCDEF$ 的棱长为 2,M,N 分别为棱 AD,AC 的中点，则直线 BN 和 FM 夹角的余弦值为（　　）A. $\frac{5}{6}$　B. $\frac{\sqrt{11}}{6}$　C. $\frac{\sqrt{21}}{6}$　D. $\frac{\sqrt{15}}{6}$

6. 已知两点 $A(1,-2)$，$B(5,0)$，P 是圆 $C:(x-1)^2+(y+1)^2=5$ 上的点，满足 $|PA|=|PB|$，则这样的 P 点有（　　）

A. 0 个　B. 1 个　C. 2 个　D. 3 个

7. 已知函数 $f(x)=\ln^2 x-\frac{a}{2}x\ln x+\frac{a}{e}x^2$ 有三个零点 x_1、x_2、x_3 且 $x_1<x_2<x_3$，则 $\frac{2\ln x_1}{x_1}+\frac{\ln x_2}{x_2}+\frac{\ln x_3}{x_3}$ 的取值范围是（　　）A. $(-\frac{1}{e^2-e},0)$ B. $(-\frac{1}{e^2},0)$　C. $(-\frac{1}{2e},0)$　D. $(-\frac{2}{\mathrm{e}},0)$

8. 17 到 19 世纪间,数学家们研究了用连分式求解代数方程的根,并得到连分式的一个重要功能:用其逼近实数求近似值.例如,把方程 $x^2-x-1=0$ 改写成 $x=1+\frac{1}{x}$ ①,将 x 再代入等式右边得到 $x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}$,继续利用①式将 x 再代入等式右边得到 $x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}$ ……反复进行,取 $x=1$ 时,由此得到数列 $1,1+\frac{1}{1},1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}},1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}},\cdots$,记作 $\{a_n\}$,则当 n 足够大时,a_n 逼近实数 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$．数列 $\{a_n\}$ 的前 2024 项中，满足 $|a_n-\frac{1+\sqrt{5}}{2}|<0.005$ 的 a_n 的个数为（　　）（参考数据：$\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx1.618$）A. 1007B. 1009　C. 2014　D. 2018

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 已知互不相同的 30 个样本数据，若去掉其中最大和最小的数据，设剩下的 28 个样本数据的方差为 s_1^2，平均数为 $\bar{x}_1$;去掉的两个数据的方差为 s_2^2，平均数为 $\bar{x}_2$；原样本数据的方差为 s^2，平均数为 $\bar{x}$，若 $\bar{x}=\bar{x}_2$，则下列说法正确的是（　　）A. $\bar{x}=\bar{x}_1$　B. $15s^2=14s_1^2+s_2^2$　C. 剩下 28 个数据的中位数大于原样本数据的中位数

D. 剩下 28 个数据的 22%分位数不等于原样本数据的 22%分位数

10. 伟大的古希腊哲学家、百科式科学家阿基米德最早采用不断分割法求得椭圆的面积为椭圆的长半轴长和短半轴长乘积的π倍，这种方法已具有积分计算的雏形.已知椭圆 C 的面积为$12\sqrt{5}\pi$，离心率为$\frac{2}{3}$,F_1,F_2是椭圆 C 的两个焦点，A 为椭圆 C 上的动点，则下列说法正确的是（　　）A. 椭圆C的标准方程可以为$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$

B. 若$\angle F_1AF_2=\frac{\pi}{3}$，则$S_{\triangle F_1AF_2}=20\sqrt{3}$ C. 存在点 A，使得$\angle F_1AF_2=\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{2}{|AF_1|}+\frac{1}{|AF_2|}$的最小值为$\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{6}$

11. 设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，则有以下四个结论中正确的是（　　）

A.若$a_5=0$，则$S_9=0$　　B.若$S_6-S_9=a_{10}$，且$a_2>a_1$，则$a_8<0$且$a_9>0$

C.若$S_{16}=64$，且在前 16 项中，偶数项的和与奇数项的和之比为 3:1，则公差为 2

D.若$(n+1)S_n>nS_{n+1}$，且$a_2^2=a_6^2$，则S_3和S_4均是S_n的最大值

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

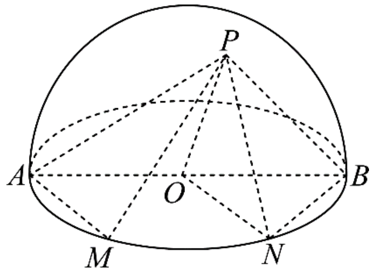
12. 已知平面向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$，满足$|\vec{a}|=1,\vec{b}=-2\vec{a},|\vec{c}-\vec{b}|=2|\vec{c}-\vec{a}|$，则向量$\vec{c}-\vec{b}$与$\vec{a}$的夹角的最大值是___.

13. 已知$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，且满足$a=2$,$b\sin B+c\sin C-2\sin A=b\sin C$,则$\angle A=$____________；$\triangle ABC$的中线 AD 的最大值为____________.

14. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$,$F_1$、$F_2$分别是其左，右焦点,$P$ 为椭圆 C 上非长轴端点的任意一点,D 是 x 轴上一点，使得PD平分$\angle F_1PF_2$．过点 D 作PF_1、PF_2的垂线，垂足分别为 A、B．则$\frac{S_{\triangle DAB}}{S_{\triangle PF_1F_2}}$的最大值是________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 如图，AB 是半球 O 的直径，$AB=4,M,N$ 是底面半圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上的两个三等分点，P 是半球面上一点，且$\angle PON=60^\circ$.（1）证明：$PB\perp$平面 PAM;（2）若点 P 在底面圆内的射影恰在 ON 上，求直线 PM 与平面 PAB 所成角的正弦值.



16. 已知抛物线$C: y^2=2x$，点A为抛物线C上一点，过点A作$AH\perp y$轴，垂足为H，线段AH的中点为T（当A与H重合时，认为T也与H重合），设动点T的轨迹为Γ.（1）求Γ的方程；
（2）设P, M, N为曲线Γ上不同的三点，且$\triangle PMN$的重心为$G(1,0)$，求$\triangle PMN$面积的取值范围.

17. 已知函数$f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$.（1）讨论$f(x)$的单调性；
（2）设a, b为两个不相等的实数，且$ae^b-be^a=e^a-e^b$，证明：$e^a+e^b>2$.

18. 概率论中有很多经典的不等式，其中最著名的两个当属由两位俄国数学家马尔科夫和切比雪夫分别提出的马尔科夫（Markov）不等式和切比雪夫（Chebyshev）不等式．马尔科夫不等式的形式如下：

设X为一个非负随机变量，其数学期望为$E(X)$，则对任意$\varepsilon>0$，均有$P(X\geq\varepsilon)\leq\dfrac{E(X)}{\varepsilon}$，

马尔科夫不等式给出了随机变量取值不小于某正数的概率上界，阐释了随机变量尾部取值概率与其数学期望间的关系．当X为非负离散型随机变量时，马尔科夫不等式的证明如下：

设X的分布列为$P(X=x_i)=p_i, i=1,2,\cdots,n,$ 其中$p_i\in(0,+\infty), x_i\in[0,+\infty)(i=1,2,\cdots,n), \sum\limits_{i=1}^{n}p_i=1$，则对任意

$\varepsilon>0$，$P(X\geq\varepsilon)=\sum_{x_i\geq\varepsilon}p_i\leq\sum_{x_i\geq\varepsilon}\frac{x_i}{\varepsilon}p_i=\frac{1}{\varepsilon}\sum_{x_i\geq\varepsilon}x_ip_i\leq\frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=\frac{E(X)}{\varepsilon}$，其中符号$\sum_{x_i\geq\varepsilon}A_i$表示对所有满足$x_i\geq\varepsilon$的指标$i$所对应的$A_i$求和．切比雪夫不等式的形式如下：设随机变量$X$的期望为$E(X)$，方差为$D(X)$，则对任意$\varepsilon>0$，均有$P\left(|X-E(X)|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$.（1）根据以上参考资料，证明切比雪夫不等式对离散型随机变量X成立．

（2）某药企研制出一种新药，宣称对治疗某种疾病的有效率为80%．现随机选择了100名患者，经过使用该药治疗后，治愈的人数为60人，请结合切比雪夫不等式通过计算说明药厂的宣传内容是否真实可信．

19. 对于数列$A_n:a_1,a_2,...a_n(a_i\in N,i=1,2,\cdots,n)$，定义“$T$变换”：$T$将数列$A_n$变换成数列$B_n:b_1,b_2,\cdots,b_n$，其中$b_i=|a_i-a_{i+1}|(i=1,2,\cdots,n-1)$，且$b_n=|a_n-a_1|$，这种“$T$变换”记作$B_n=T(A_n)$.继续对数列$B_n$进行“$T$变换”，得到数列$C_n,\cdots$，依此类推，当得到的数列各项均为0时变换结束．（1）试问$A_3:4,2,8$和$A_4:1,4,2,9$经过不断的“T变换”能否结束？若能，请依次写出经过“T变换”得到的各数列；若不能，说明理由；

（2）求$A_3:a_1,a_2,a_3$经过有限次“T变换”后能够结束的充要条件；

（3）证明：$A_4:a_1,a_2,a_3,a_4$一定能经过有限次“T变换”后结束．

解答

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

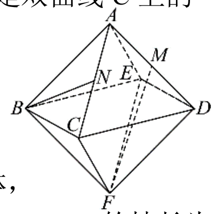
1. 已知 $a\in R$，若 $(2+i)(1+ai)$ 为纯虚数，则 $a=$（ D ）A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. -2 D. 2

2. 已知直线 $l_1: x-ay+1=0$，$l_2:(a-1)x-12y-4=0$，则“$a=4$”是“$l_1//l_2$”的（ C ）

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 若 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})=\frac{3}{5}$，则 $\sin(2\alpha+\frac{5\pi}{6})=$（ A ）A. $-\frac{7}{25}$ B. $-\frac{12}{25}$ C. $\frac{7}{25}$ D. $\frac{12}{25}$

4. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左，右焦点分别为 F_1,F_2，O 为坐标原点，点 P 是双曲线 C 上的一点，$|OP|=|OF_2|$，且 $\triangle POF_1$ 的面积为 4，则实数 $b=$（ C ）A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $2\sqrt{2}$ D. 4



5．正多面体也称柏拉图立体，被誉为最有规律的立体结构，是所有面都只由一种正多边形构成的多面体（各面都是全等的正多边形）．数学家已经证明世界上只存在五种柏拉图立体，即正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体．如图，已知一个正八面体 $ABCDEF$ 的棱长为 2,M,N 分别为棱 AD,AC 的中点，则直线 BN 和 FM 夹角的余弦值为（ D ）A. $\frac{5}{6}$ B. $\frac{\sqrt{11}}{6}$ C. $\frac{\sqrt{21}}{6}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{6}$

6. 已知两点 $A(1,-2)$，$B(5,0)$，P 是圆 $C:(x-1)^2+(y+1)^2=5$ 上的点，满足 $|PA|=|PB|$，则这样的 P 点有（ C ）A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

7. 已知函数 $f(x)=\ln^2 x-\frac{a}{2}x\ln x+\frac{a}{e}x^2$ 有三个零点 x_1、x_2、x_3 且 $x_1<x_2<x_3$，则 $\frac{2\ln x_1}{x_1}+\frac{\ln x_2}{x_2}+\frac{\ln x_3}{x_3}$ 的取值范围是（ D ）A. $(-\frac{1}{e^2-e},0)$ B. $(-\frac{1}{e^2},0)$ C. $(-\frac{1}{2e},0)$ D. $(-\frac{2}{\mathrm{e}},0)$

8. 17 到 19 世纪间,数学家们研究了用连分式求解代数方程的根,并得到连分式的一个重要功能:用其逼近实数求近似值.例如,把方程 $x^2-x-1=0$ 改写成 $x=1+\frac{1}{x}$ ①,将 x 再代入等式右边得到 $x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}$,继续利用①式将 x 再代入等式右边得到 $x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}$ ……反复进行,取 $x=1$ 时,由此得到数列 $1,1+\frac{1}{1},1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}},1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}},\cdots$,记作 $\{a_n\}$,则当 n 足够大时,a_n 逼近实数 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$．数列 $\{a_n\}$ 的前 2024 项中，满足 $|a_n-\frac{1+\sqrt{5}}{2}|<0.005$ 的 a_n 的个数为（ D ）（参考数据：$\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx1.618$）A. 1007 B. 1009 C. 2014 D. 2018

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 已知互不相同的 30 个样本数据，若去掉其中最大和最小的数据，设剩下的 28 个样本数据的方差为 s_1^2，平均数为 $\bar{x}_1$;去掉的两个数据的方差为 s_2^2，平均数为 $\bar{x}_2$；原样本数据的方差为 s^2，平均数为 $\bar{x}$，若 $\bar{x}=\bar{x}_2$，则下列说

法正确的是（　ABD）A. $\bar{x}=\bar{x}_1$　B. $15s^2=14s_1^2+s_2^2$　C. 剩下 28 个数据的中位数大于原样本数据的中位数

D. 剩下 28 个数据的 22%分位数不等于原样本数据的 22%分位数

10. 伟大的古希腊哲学家、百科式科学家阿基米德最早采用不断分割法求得椭圆的面积为椭圆的长半轴长和短半轴长乘积的π倍，这种方法已具有积分计算的雏形.已知椭圆 C 的面积为$12\sqrt{5}\pi$，离心率为$\frac{2}{3}$, F_1, F_2 是椭圆 C 的两个焦点，A 为椭圆 C 上的动点，则下列说法正确的是（　AD　）A. 椭圆C的标准方程可以为$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$

B. 若$\angle F_1AF_2=\frac{\pi}{3}$，则$S_{\triangle F_1AF_2}=20\sqrt{3}$　C. 存在点 A，使得$\angle F_1AF_2=\frac{\pi}{2}$　D. $\frac{2}{|AF_1|}+\frac{1}{|AF_2|}$的最小值为$\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{6}$

11. 设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，则有以下四个结论中正确的是（　ACD　）

A.若$a_5=0$，则$S_9=0$　B.若$S_6-S_9=a_{10}$，且$a_2>a_1$，则$a_8<0$且$a_9>0$

C.若$S_{16}=64$，且在前 16 项中，偶数项的和与奇数项的和之比为 3:1，则公差为 2

D.若$(n+1)S_n>nS_{n+1}$，且$a_2^2=a_6^2$，则S_3和S_4均是S_n的最大值

$key: S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=9a_5, \therefore A对;$

$S_6-S_9=-a_7-a_8-a_9=a_{10}, \therefore a_7+a_8+a_9+a_{10}=2(a_8+a_9)=0, \therefore a_2>a_1, \therefore d>0, \therefore \{a_n\}递增, \therefore a_8<0, a_9>0, B对$

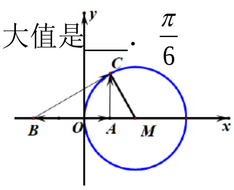
$S_{16}=\frac{16(a_1+a_{16})}{2}=8(a_1+a_{16})=64, \therefore a_1+a_{16}=a_8+a_9=8, \frac{S_奇}{S_偶}=\frac{\frac{8(a_2+a_{16})}{2}}{\frac{8(a_1+a_{15})}{2}}=\frac{a_9}{a_8}=3, \therefore a_8=2, a_9=6, \therefore d=4, C错$

$设S_n=An^2+Bn, 则(n+1)n(An+B)>n(n+1)(A(n+1)+B)\Leftrightarrow \frac{d}{2}=A<0$

$a_6^2-a_2^2=4d(2a_2+4d)=0, \therefore a_2=-2d>0, a_3=-d>0, a_4=0, \therefore D对$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知平面向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$，满足$|\vec{a}|=1, \vec{b}=-2\vec{a}, |\vec{c}-\vec{b}|=2|\vec{c}-\vec{a}|$，则向量$\vec{c}-\vec{b}$与$\vec{a}$的夹角的最大值是____. $\frac{\pi}{6}$



$key: C的轨迹时圆心为M，半径为2的圆，$

$\therefore <\vec{c}-\vec{b},\vec{a}> = \angle CBA\le\frac{\pi}{6}$

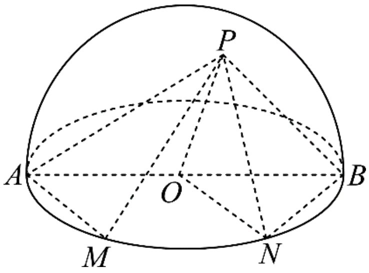
13. 已知$\triangle ABC$的内角 A, B, C 的对边分别为a, b, c，且满足$a=2$, $b\sin B+c\sin C-2\sin A=b\sin C$,则$\angle A=$____________；$\triangle ABC$ 的中线 AD 的最大值为____________. $\frac{\pi}{3}$，$\sqrt{3}$

14. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$, F_1、F_2分别是其左，右焦点,P 为椭圆 C 上非长轴端点的任意一点,D 是 x 轴上一点，使得 PD 平分$\angle F_1PF_2$．过点 D 作 PF_1、PF_2 的垂线，垂足分别为 A、B．则$\frac{S_{\triangle DAB}}{S_{\triangle PF_1F_2}}$的最大值是________. $\frac{3}{16}$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15. 如图，AB 是半球 O 的直径，$AB=4,M,N$ 是底面半圆弧 AB 上的两个三等分点，P 是半球面上一点，且 $\angle PON=60°$.（1）证明：$PB\perp$ 平面 PAM;（2）若点 P 在底面圆内的射影恰在 ON 上，求直线 PM 与平面 PAB 所成角的正弦值.

【小问 1 详解】连接 OM,MN,BM，因为 M,N 是底面半圆弧 AB 上的两个三等分点，



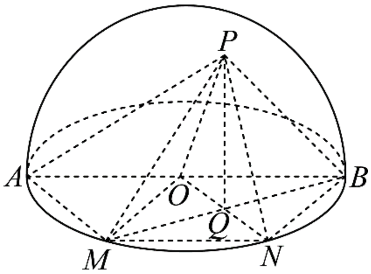
所以有 $\angle MON=\angle NOB=60°$，又因为 $OM=ON=OB=2$，

所以 $\triangle MON,\triangle NOB$ 都为正三角形，

所以 $MN=NB=BO=OM$，四边形 $OMNB$ 是菱形，

记 ON 与 BM 的交点为 Q，Q 为 ON 和 BM 的中点，

因为 $\angle PON=60°,OP=ON$，所以三角形 OPN 为正三角形，



所以 $PQ=\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}BM$，所以 $PB\perp PM$，

因为 P 是半球面上一点，AB 是半球 O 的直径，所以 $PB\perp PA$，

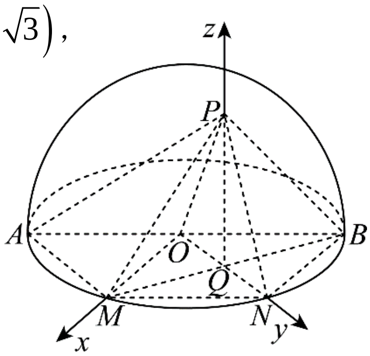
因为 $PM\cap PA=P$，$PM,PA\subset$ 平面 PAM，所以 $PB\perp$ 平面 PAM.

【小问 2 详解】因为点 P 在底面圆内的射影恰在 ON 上，

由（1）知 Q 为 ON 的中点，$\triangle OPN$ 为正三角形，所以 $PQ\perp ON$，所以 $PQ\perp$ 底面 ABM，

因为四边形 $OMNB$ 是菱形，所以 $MB\perp ON$，即 MB、ON、PQ 两两互相垂直，

以点 Q 为坐标原点，QM，QN，QP 分别为 x，y，z 轴，建立空间直角坐标系 $Q-xyz$，如图所示，



则 $O(0,-1,0),M(\sqrt{3},0,0),B(-\sqrt{3},0,0),N(0,1,0),A(\sqrt{3},-2,0),P(0,0,\sqrt{3})$，

所以 $\overrightarrow{PM}=(\sqrt{3},0,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{OP}=(0,1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{OB}=(-\sqrt{3},1,0)$，

设平面 PAB 的一个法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{OP}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{OB}=0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}y+\sqrt{3}z=0\\ -\sqrt{3}x+y=0\end{cases}$，取 $x=1$，则 $\vec{m}=(1,\sqrt{3},-1)$，

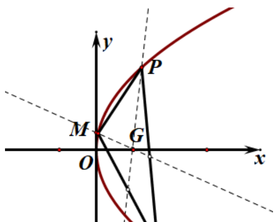
设直线 PM 与平面 PAB 的所成角为 θ，所以 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{PM},\vec{m}\right\rangle\right|=\left|\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}\times\sqrt{5}}\right|=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，

故直线 PM 与平面 PAB 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

16. 已知抛物线 $C:y^2=2x$，点 A 为抛物线 C 上一点，过点 A 作 $AH\perp y$ 轴，垂足为 H，线段 AH 的中点为 T（当 A 与 H 重合时，认为 T 也与 H 重合），设动点 T 的轨迹为 Γ.（1）求 Γ 的方程；

（2）设 P,M,N 为曲线 Γ 上不同的三点，且 $\triangle PMN$ 的重心为 $G(1,0)$，求 $\triangle PMN$ 面积的取值范围.

解：⑴ 设 $T(x,y)$，则 $A(2x,y)$，$\therefore\Gamma$ 的方程为 $y^2=4x$



（2）设$P(t^2,2t),M(m^2,2m),N(n^2,2n)$,

$\because G(1,0)$是$\triangle PMN$的重心，$\therefore \begin{cases} t^2+m^2+n^2=3 \\ 2t+2m+2n=0 \end{cases}$，$\therefore \begin{cases} m+n=-t \\ m^2+n^2=3-t^2 \\ mn=t^2-\dfrac{3}{2} \\ (m-n)^2=6-3t^2 \end{cases}$

$$\therefore S_{\triangle PMN}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} t^2 & 2t & 1 \\ m^2 & 2m & 1 \\ n^2 & 2n & 1 \end{matrix}\right\|=3\sqrt{3}\,|(t^2-\frac{1}{2})\sqrt{2-t^2}\,|=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sqrt{(t^2-\frac{1}{2})^2(4-2t^2)}\le\frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

$\therefore\triangle PMN$的面积的取值范围为$(0,\dfrac{3\sqrt{6}}{2}]$

17. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$.（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）设 a,b 为两个不相等的实数，且 $ae^b-be^a=e^a-e^b$，证明：$e^a+e^b>2$.

⑴ 解：由$f'(x)=\dfrac{-\ln x}{x^2}>0\Leftrightarrow 0<x<1,\therefore f(x)$在$(0,1)$上递增，在$(1,+\infty)$上递减

(2) 证明：由$ae^b-be^a=e^a-e^b\Leftrightarrow(a+1)e^b=(b+1)e^a\Leftrightarrow\dfrac{\ln e^a+1}{e^a}=\dfrac{\ln e^b+1}{e^b}$

不妨设$a>b$,令$x_1=e^a,x_2=e^b$，则$\dfrac{\ln x_1+1}{x_1}=\dfrac{\ln x_2+1}{x_2}$即$f(x_1)=f(x_2)$,且$0<x_1<x_2$,

由⑴得$f(x)_{\max}=f(1)=1,f(\dfrac{1}{e})=0,\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty,\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

$\therefore\dfrac{1}{e}<x_1<1<x_2$,令$t=\dfrac{x_2}{x_1}>1$,则$x_1=e^{\frac{\ln t}{t-1}-1}$,

$\therefore x_1+x_2=(1+t)e^{\frac{\ln t}{t-1}-1}>2\Leftrightarrow\ln(1+t)+\dfrac{\ln t}{t-1}-1>\ln 2\cdots(*)$

设$p(t)=\ln(1+t)+\dfrac{\ln t}{t-1}-1-\ln 2(t>1)$,则$p'(t)=\dfrac{1}{t+1}+\dfrac{\frac{t-1}{t}-\ln t}{(t-1)^2}>0$

$\Leftrightarrow 0<\dfrac{(t-1)^2}{t+1}+\dfrac{t-1}{t}-\ln t$记为$q(t)$

则$q'(t)=\dfrac{t^2+2t-3}{(t+1)^2}+\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{1}{t}=\dfrac{(t-1)^2(t^2+3t+1)}{t^2(t+1)^2}>0$

$\therefore q(t)>q(1)=0,\therefore p'(t)>0,$

而$\lim\limits_{t\to1^+}p(t)=0,\therefore p(t)>0,\therefore(*)$成立，证毕

18. 概率论中有很多经典的不等式，其中最著名的两个当属由两位俄国数学家马尔科夫和切比雪夫分别提出的马尔科夫（Markov）不等式和切比雪夫（Chebyshev）不等式．马尔科夫不等式的形式如下：设 X 为一个非负随机变量，其数学期望为 $E(X)$，则对任意 $\varepsilon>0$，均有 $P(X\ge\varepsilon)\le\dfrac{E(X)}{\varepsilon}$，马尔科夫不等式给出了随机变量取值不小于某正数的概率上界，阐释了随机变量尾部取值概率与其数学期望间的关系．

当 X 为非负离散型随机变量时，马尔科夫不等式的证明如下：设 X 的分布列为 $P(X=x_i)=p_i,i=1,2,\cdots,n,$ 其中

$p_i\in(0,+\infty),x_i\in[0,+\infty)(i=1,2,\cdots,n),\sum\limits_{i=1}^{n}p_i=1$，则对任意 $\varepsilon>0$，

$P(X\ge\varepsilon)=\sum_{x_i\ge\varepsilon}p_i\le\sum_{x_i\ge\varepsilon}\frac{x_i}{\varepsilon}p_i=\frac{1}{\varepsilon}\sum_{x_i\ge\varepsilon}x_ip_i\le\frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=\frac{E(X)}{\varepsilon}$，其中符号 $\sum_{x_i\ge\varepsilon}A_i$ 表示对所有满足 $x_i\ge\varepsilon$ 的指标 i 所对应的 A_i 求和．切比雪夫不等式的形式如下：设随机变量 X 的期望为 $E(X)$，方差为 $D(X)$，则对任意 $\varepsilon>0$，均有 $P(|X-E(X)|\ge\varepsilon)\le\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$．（1）根据以上参考资料，证明切比雪夫不等式对离散型随机变量 X 成立．

（2）某药企研制出一种新药，宣称对治疗某种疾病的有效率为80%．现随机选择了 100 名患者，经过使用该药治疗后，治愈的人数为 60 人，请结合切比雪夫不等式通过计算说明药厂的宣传内容是否真实可信．

⑴ 证明：由$P(|X-E(X)|\ge\varepsilon)=P((X-E(X))^2\ge\varepsilon^2)\le\frac{E(X-E(X))^2}{\varepsilon^2}$

$=\frac{E(X^2-2XE(X)+(E(X))^2)}{\varepsilon^2}=\frac{E(X^2)-2(EX)^2+(E(X))^2}{\varepsilon^2}=\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$,证毕

法二：设 X 的分布列为 $P\left(X=x_i\right)=p_i,i=1,2,\cdots,n,$

其中 $p_i,x_i\in(0,+\infty)(i=1,2,\cdots,n),\sum_{i=1}^{n}p_i=1$，记 $\mu=E\left(X\right)$，则对任意 $\varepsilon>0$，

$$P\left(\left|X-\mu\right|\ge\varepsilon\right)=\sum_{|x_i-\mu|\ge\varepsilon}P_i\le\sum_{|x_i-\mu|\ge\varepsilon}\frac{\left(x_i-\mu\right)^2}{\varepsilon^2}P_i=\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{|x_i-\mu|\ge\varepsilon}\left(x_i-\mu\right)^2P_i\le\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2P_i=\frac{D\left(X\right)}{\varepsilon^2}.$$

（2）解：按药企宣传的100人被治愈的人数为$E(X)=80,D(X)=100\cdot0.8\cdot0.2=16,$

由切比雪夫不等式得$P((X-E(X)|\ge20)\le\frac{D(X)}{20^2}=\frac{1}{25}=0.04$是比较小的概率

$\therefore$药企宣传的内容不可信

19. 对于数列 $A_n:a_1,a_2,...a_n(a_i\in N,i=1,2,\cdots,n)$，定义“$T$ 变换”：T 将数列 A_n 变换成数列 $B_n:b_1,b_2,\cdots,b_n$，其中 $b_i=|a_i-a_{i+1}|(i=1,2,\cdots,n-1)$，且 $b_n=|a_n-a_1|$，这种“T 变换”记作 $B_n=T(A_n)$.继续对数列 B_n 进行“T 变换”，得到数列 $C_n,\cdots$，依此类推，当得到的数列各项均为 0 时变换结束．（1）试问 $A_3:4,2,8$ 和 $A_4:1,4,2,9$ 经过不断的“T 变换”能否结束？若能，请依次写出经过“T 变换”得到的各数列；若不能，说明理由；

（2）求 $A_3:a_1,a_2,a_3$ 经过有限次“T 变换”后能够结束的充要条件；

（3）证明：$A_4:a_1,a_2,a_3,a_4$ 一定能经过有限次“T 变换”后结束．

⑴ 解：$B_3=T(A_3):2,6,4,C_3=T(B_3):4,2,2;$

$D_3=T(C_3):2,0,2;E_3=T(D_3):2,2,0;F_3=T(E_3):0,2,2;G_3=T(F_3):2,0,2$是$D_3,\therefore A_3$不能结束

$B_4=T(A_4):3,2,7,8,C_4=T(B_4):1,5,1,5;D_4=T(C_4):4,4,4,4,E_4=T(D_4):0,0,0,0,\therefore A_4$能结束

（2）解：若$a\ne0$,则$(0,0,0)\to(a,a,a)\to(b,-a+b,b),\therefore a=0,$矛盾

$\therefore A_3$经过有限次“T变换”能结束的必要条件为$A_3:a,a,a$

$\therefore A_3$经过有限次“T变换”能结束的充要条件是$A_3:a,a,a,$

下面证明充分性：若$A_3:a,a,a$，则$B_3=T(A_3)=0,0,0,\therefore T$变换后，数列还是0,0,0

（3）证明：先证明引理："数列 $T(A_n)$ 的最大项一定不大于数列 A_n 的最大项，其中 $n\geq 3$".

证明：记数列 A_n 中最大项为 $\max(A_n)$，则$0\leq a_i\leq \max(A_n)$.

令 $B_n=T(A_n),b_i=a_p-a_q$,其中$a_p\geq a_q$，因为$\because a_q\geq 0,\therefore b_i\leq a_p\leq \max(A_n),\therefore \max(B_n)\leq \max(A_n)$，证毕.

现将数列 A_4 分为两类．第一类是没有为 0 的项，或者为 0 的项与最大项不相邻（规定首项与末项相邻），此时

由引理可知，$\max(B_4)\leq \max(A_4)-1$,

第二类是含有为 0 的项，且与最大项相邻，此时 $\max(B_n)\leq \max(A_n)$.

下面证明第二类数列 A_4 经过有限次"T 变换"，一定可以得到第一类数列.

不妨令数列 A_4 的第一项为 0，第二项 $a\,(a>0)$ 最大.（其它情形同理）

①当数列 A_4 中只有一项为 0 时，若 $A_4:0,a,b,c(a>b,a>c,bc\neq 0)$，则$T(A_4):a,a-b,|b-c|,c$，此数列各项均不为 0 或含有 0 项但与最大项不相邻，为第一类数列；

若 $A_4:0,a,a,b(a>b,b\neq 0)$，则$T(A_4):a,0,a-b,b;T(T(A_4)):a,a-b,|a-2b|,|a-b|$此数列各项均不为 0 或含有 0 项但与最大项不相邻，为第一类数列；

若 $A_4:0,a,b,a(a>b,b\neq 0)$，则$T(A_4):a,a-b,a-b,b,$ 此数列各项均不为 0，为第一类数列；

若 $A_4:0,a,a,a,$则$T(A_4):a,0,0,a;T(T(A_4)):a,0,a,0;T(T(T(A_4))):a,a,a,a,$ 此数列各项均不为 0，为第一类数列.

②当数列 A_4 中有两项为 0 时，若 $A_4:0,a,0,b(a\geq b>0),$则$T(A_4):a,a,b,b,$ 此数列各项均不为 0，为第一类数列；

若 $A_4:0,a,b,0(a\geq b>0),$则$T(A_4):a,a-b,b,0,T(T(A)):b,|a-2b|,b,a,$ 此数列各项均不为 0 或含有 0 项但与最大项不相邻，为第一类数列.

③当数列 A_4 中有三项为 0 时，只能是 $A_4:0,a,0,0$，则$T(A):a,a,0,0,T(T(A_4)):0,a,0,a,T(T(T(A_4))):a,a,a,a,$ 此数列各项均不为 0，为第一类数列.

总之，第二类数列 A_4 至多经过 3 次"T 变换"，就会得到第一类数列，即至多连续经历 3 次"T 变换"，数列的最大项又开始减少．又因为各数列的最大项是非负整数，
故经过有限次"T 变换"后，数列的最大项一定会为 0，此时数列的各项均为 0，从而结束.