2023-24（下）模拟（9）

2024-02-21

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知集合 $M=\{x\mid x^2-3x-4<0\}$， $N=\{x\mid y=\ln(x-1)\}$，则 $M\cap N=$（　　）

A. $(1,4)$　　B. $[1,4)$　　C. $(-1,4)$　　D. $[-1,4)$

2.若 $(1-2i)(z-3-2i)=2+i$，则 $\overline{z}=$（　　）A. $-3+3i$　B. $-3-3i$　C. $3+3i$　D. $3-3i$

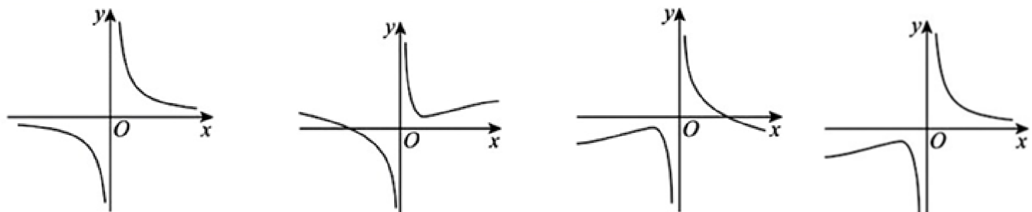
3.已知直线 $ax+y=0$ 是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{4}=1(a>0)$ 的一条渐近线，则该双曲线的半焦距为（　　）

A. $\sqrt{6}$　　B. $2\sqrt{6}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $4\sqrt{2}$

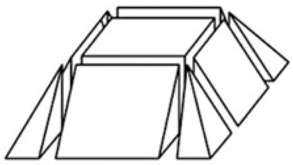
4.已知 $\vec{a},\vec{b}$ 是两个不共线的单位向量，$\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}(\lambda,\mu\in R)$，则“$\lambda>0$ 且 $\mu>0$”是“$\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b})>0$”的（　　）

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件　　C.充分必要条件　　D.既不充分也不必要条件

5.函数 $f(x)=a\ln|x|+\dfrac{1}{x}$ 的图象不可能是（　　）



A.　　B.　　C.　　D.



6.如图，将正四棱台切割成九个部分，其中一个部分为长方体，四个部分为直三棱柱，四个部分为四棱锥.已知每个直三棱柱的体积为 3，每个四棱锥的体积为 1，则该正四棱台的体积为（　　）

A.36　　B.32　　C.28　　D.24

7.在平面直角坐标系 xOy 中，圆 C 的方程为 $(x-3)^2+y^2=1$，且圆 C 与 x 轴交于 M,N 两点，设直线 l 的方程为 $y=kx(k>0)$，直线 l 与圆 C 相交于 A,B 两点，直线 AM 与直线 BN 相交于点 P，直线 AM、直线 BN、直线 OP 的斜率分别为 k_1,k_2,k_3，则（　　）A. $k_1+k_2=2k_3$　　B. $2k_1+k_2=k_3$　　C. $k_1+2k_2=k_3$　　D. $k_1+k_2=k_3$

8.已知直线 BC 垂直单位圆 O 所在的平面，且直线 BC 交单位圆于点 A，$AB=BC=1$，P 为单位圆上除 A 外的任意一点，l 为过点 P 的单位圆 O 的切线，则（　　）

A.有且仅有一点 P 使二面角 $B-l-C$ 取得最小值　　B.有且仅有两点 P 使二面角 $B-l-C$ 取得最小值

C.有且仅有一点 P 使二面角 $B-l-C$ 取得最大值　　D.有且仅有两点 P 使二面角 $B-l-C$ 取得最大值

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9.一个盒子里装有除颜色外完全相同的四个小球，其中黑球有两个，编号为 1，2；红球有两个，编号为 3，4，从中不放回的依次取出两个球，A 表示事件“取出的两球不同色”，B 表示事件“第一次取出的是黑球”，C 表示事件

“第二次取出的是黑球”，D 表示事件“取出的两球同色”，则（　　）

A.A 与 D 相互独立　　B.A 与 B 相互独立　　C.B 与 D 相互独立　　D.A 与 C 相互独立

10.已知函数 $f(x),g(x)$ 的定义域均为 R，且 $f(x)+g(2-x)=5$，$g(x)-f(x-4)=7$.若 $x=2$ 是 $g(x)$ 的对称轴，且 $g(2)=4$，则（　　）A. $f(x)$ 是奇函数　B. $(3,6)$ 是 $g(x)$ 的对称中心　C.2 是 $f(x)$ 的周期　D. $\sum\limits_{k=1}^{22} g(k)=130$

11.在平面直角坐标系中，将函数 $f(x)$ 的图象绕坐标原点逆时针旋转 $\alpha(0°<\alpha\le 90°)$ 后，所得曲线仍然是某个函数的图象，则称 $f(x)$ 为“α 旋转函数”.那么（　　）A.存在 $90°$ 旋转函数　B. $80°$ 旋转函数一定是 $70°$ 旋转函数

C.若 $g(x)=ax+\dfrac{1}{x}$ 为 $45°$ 旋转函数，则 $a=1$　　D.若 $h(x)=\dfrac{bx}{e^x}$ 为 $45°$ 旋转函数，则 $-e^2\le b\le 0$

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.把答案填在答题卡中的横线上.

12. $(2+\dfrac{x}{y})(x-2y)^6$ 的展开式中 x^4y^2 的系数为________.（用数字作答）

13.已知 F 为抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点，直线 $x=t$ 与 C 交于 A,B,AF 与 C 的另一个交点为 DF，BF 与 C 的另一个交点为 E.若 $\triangle ABF$ 与 $\triangle DEF$ 的面积之比为 4，则 $t=$________.

14.设严格递增的整数数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{20}$ 满足 $a_1=1,a_{20}=40$.设 f 为 a_1+a_2，$a_2+a_3,\cdots$，$a_{19}+a_{20}$ 这 19 个数中被 3 整除的项的个数，则 f 的最大值为________，使得 f 取到最大值的数列 $\{a_n\}$ 的个数为________.

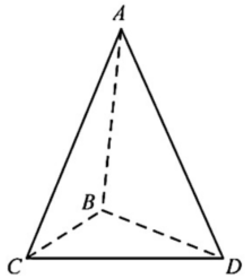
四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. 已知某公司生产的风干牛肉干是按包销售的，每包牛肉干的质量 M（单位：g）服从正态分布 $N(250,\sigma^2)$，且 $P(M<248)=0.1$.（1）若从公司销售的牛肉干中随机选取 3 包，求这 3 包中恰有 2 包质量不小于 $248g$ 的概率；

（2）若从公司销售的牛肉干中随机选取 K（K 为正整数）包，记质量在 $248g\sim 252g$ 内的包数为 X，且 $D(X)>320$，求 K 的最小值.

16.（15 分）如图，在三棱锥 $A-BCD$ 中，$AB\perp$平面 BCD，平面 $ABC\perp$平面 ABD，$AC=AD$，$AB=BD$.

（1）证明：$BC\perp BD$；（2）求二面角 $A-CD-B$ 的余弦值.



17.（15 分）设 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$.（1）若 $\tan x=\dfrac{1}{2}$，求 $\dfrac{\cos 4x-4\cos 2x+3}{\cos 4x+4\cos 2x+3}$；

（2）证明：$\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}>2$；（3）若 $\tan x+2\sin x-ax>0$，求实数 a 的取值范围.

18.（17 分）已知椭圆$C:\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$的左焦点为 F,P 为曲线$E:\frac{x^2+4x}{25}+\frac{y^2}{9}=0$上的动点，且点 P 不在 x 轴上，直线 FP 交 C 于 A,B 两点.（1）证明：曲线 E 为椭圆，并求其离心率；（2）证明：P 为线段 AB 的中点；

（3）设过点 A,B 且与 AB 垂直的直线与 C 的另一个交点分别为 M,N，求$\triangle PMN$ 面积的取值范围.

19. 若各项为正的无穷数列$\{a_n\}$满足：对于$\forall n\in N^*$，$a_{n+1}^2-a_n^2=d$，其中 d 为非零常数，则称数列$\{a_n\}$为 D 数列. 记$b_n=a_{n+1}-a_n$.（1）判断无穷数列$a_n=\sqrt{n}$和$a_n=2^n$是否是 D 数列，并说明理由；

（2）若$\{a_n\}$是 D 数列，证明：数列$\{b_n\}$中存在小于 1 的项；

（3）若$\{a_n\}$是 D 数列，证明：存在正整数 n，使得$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}>2024$.

解答

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知集合 $M=\{x\mid x^2-3x-4<0\}$，$N=\{x\mid y=\ln(x-1)\}$，则 $M\bigcap N=$（　A　）

A. $(1,4)$　　B. $[1,4)$　　C. $(-1,4)$　　D. $[-1,4)$

2.若 $(1-2i)(z-3-2i)=2+i$，则 $\overline{z}=$（　D　）A. $-3+3i$　B. $-3-3i$　C. $3+3i$　D. $3-3i$

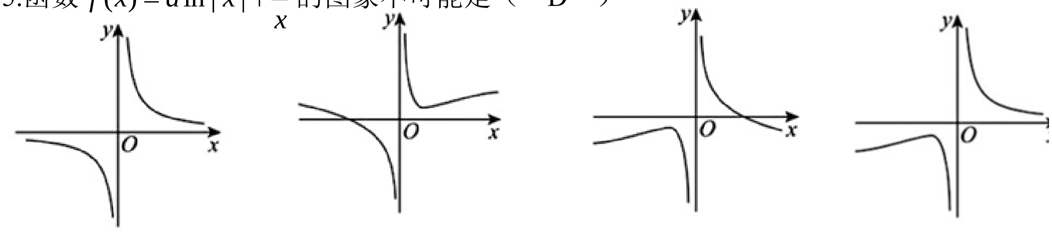
3.已知直线 $ax+y=0$ 是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{4}=1(a>0)$ 的一条渐近线，则该双曲线的半焦距为（ A　）

A. $\sqrt{6}$　　B. $2\sqrt{6}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $4\sqrt{2}$

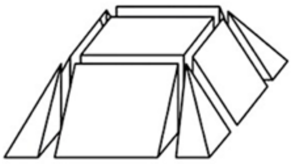
4.已知 $\vec{a},\vec{b}$ 是两个不共线的单位向量，$\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}(\lambda,\mu\in R)$，则“$\lambda>0$ 且 $\mu>0$”是“$\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b})>0$”的（　A　）

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件　　C.充分必要条件　　D.既不充分也不必要条件

5.函数 $f(x)=a\ln|x|+\dfrac{1}{x}$ 的图象不可能是（　D　）



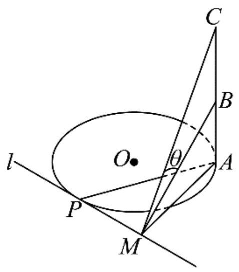
A.　　B.　　C.　　D.



6.如图，将正四棱台切割成九个部分，其中一个部分为长方体，四个部分为直三棱柱，四个部分为四棱锥.已知每个直三棱柱的体积为 3，每个四棱锥的体积为 1，则该正四棱台的体积为（ C　）A.36　B.32　C.28　D.24

7.在平面直角坐标系 xOy 中，圆 C 的方程为 $(x-3)^2+y^2=1$，且圆 C 与 x 轴交于 M,N 两点，设直线 l 的方程为 $y=kx(k>0)$，直线 l 与圆 C 相交于 A,B 两点，直线 AM 与直线 BN 相交于点 P，直线 AM、直线 BN、直线 OP 的斜率分别为 k_1,k_2,k_3，则（ A　）A. $k_1+k_2=2k_3$　B. $2k_1+k_2=k_3$　C. $k_1+2k_2=k_3$　D. $k_1+k_2=k_3$

8.已知直线 BC 垂直单位圆 O 所在的平面，且直线 BC 交单位圆于点 A，$AB=BC=1$，P 为单位圆上除 A 外的任意一点，l 为过点 P 的单位圆 O 的切线，则（　D　）



A.有且仅有一点 P 使二面角 $B-l-C$ 取得最小值

B.有且仅有两点 P 使二面角 $B-l-C$ 取得最小值

C.有且仅有一点 P 使二面角 $B-l-C$ 取得最大值

D.有且仅有两点 P 使二面角 $B-l-C$ 取得最大值

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

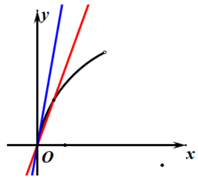
9.一个盒子里装有除颜色外完全相同的四个小球，其中黑球有两个，编号为 1，2；红球有两个，编号为 3，4，从中不放回的依次取出两个球，A 表示事件“取出的两球不同色”，B 表示事件“第一次取出的是黑球”，C 表示事件“第二次取出的是黑球”，D 表示事件“取出的两球同色”，则（　BCD　）

A.A 与 D 相互独立　　B.A 与 B 相互独立　　C.B 与 D 相互独立　　D.A 与 C 相互独立

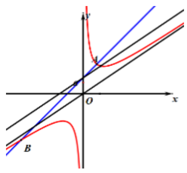
10.已知函数 $f(x),g(x)$ 的定义域均为 R，且 $f(x)+g(2-x)=5$，$g(x)-f(x-4)=7$.若 $x=2$ 是 $g(x)$ 的对称轴，且 $g(2)=4$，则（ BD ）A. $f(x)$ 是奇函数　B. $(3,6)$ 是 $g(x)$ 的对称中心　C.2 是 $f(x)$ 的周期　D. $\sum_{k=1}^{22} g(k)=130$

11.在平面直角坐标系中，将函数 $f(x)$ 的图象绕坐标原点逆时针旋转 $\alpha(0^\circ<\alpha\le 90^\circ)$ 后，所得曲线仍然是某个函数的图象，则称 $f(x)$ 为“α 旋转函数”.那么（　ACD）A.存在 90° 旋转函数　B. 80° 旋转函数一定是 70° 旋转函数

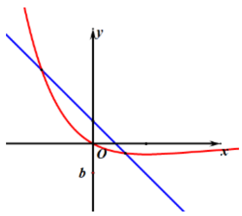
C.若 $g(x)=ax+\dfrac{1}{x}$ 为 45° 旋转函数，则 $a=1$　　D.若 $h(x)=\dfrac{bx}{e^x}$ 为 45° 旋转函数，则 $-e^2\le b\le 0$

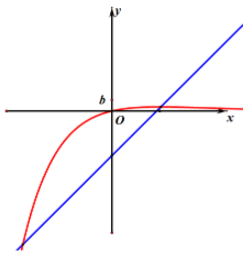


$key:$设$P(x,y)$是$y=g(x)$上的任意一点,$\xrightarrow{\text{顺时针旋转}90^\circ}P'(-y,x),\therefore x=f(-y)$即$y=-f^{-1}(x)$,
如图$f(x)=\sqrt{x}\xrightarrow{\text{逆时针旋转}90^\circ}y=g(x)$, A对,
取$y=f(x)$与$y=x\tan 70^\circ$有2个不同交点,与$y=x\tan 80^\circ$相切,如图,则B错;
C:由$y=ax+\dfrac{1}{x}$逆时针旋转45°还是函数图象,则$y=ax+\dfrac{1}{x}$与直线$y=x+m$及$x=n$至多有一个交点,
$\therefore y=x+m$与$y=ax+\dfrac{1}{x}$的渐近线$y=ax$平行或重合,$\therefore a=1$, C对



D:由$h'(x)=b(1-x)e^{-x}$,若$b=0$,符合;
若$b<0$,则$h'(x)>0\Leftrightarrow x>1$,如图,
则$\dfrac{bx}{e^x}=x+m$至多有1个解$\Leftrightarrow m=x(be^{-x}-1)$记为$p(x)$,
则$p'(x)=be^{-x}(1-x)-1$, $p''(x)=be^{-x}(x-2)>0\Leftrightarrow x<2$,
$\therefore p'(x)_{\max}=p'(2)=-be^{-2}-1\le 0$即$b\ge -e^2$时, $p(x)$递增,符合;
若$b<e^2$,不合;
若$b>0$,如图,不合.综上: $-e^2\le b\le 0$





三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.把答案填在答题卡中的横线上.

12. $(2+\dfrac{x}{y})(x-2y)^6$ 的展开式中 x^4y^2 的系数为________.（用数字作答）-40

13.已知 F 为抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点，直线 $x=t$ 与 C 交于 A,B,AF 与 C 的另一个交点为 DF，BF 与 C 的另一个交点为 E.若 $\triangle ABF$ 与 $\triangle DEF$ 的面积之比为 4，则 $t=$________.2

14.设严格递增的整数数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{20}$满足$a_1=1,a_{20}=40$.设 f 为 a_1+a_2，a_2+a_3，$\cdots$，$a_{19}+a_{20}$ 这 19 个数中被 3 整除的项的个数，则 f 的最大值为________，使得 f 取到最大值的数列 $\{a_n\}$ 的个数为________.18， 25270

key:由已知得$a_1+a_2\ge 3,a_2+a_3\ge 5,\cdots,39\le a_{19}+a_{20}\le 79,$

若这19个数全是3的倍数,$\because a_1=1,\therefore a_2 \bmod 3=2,a_3 \bmod 3=1,a_4 \bmod 3=2,\cdots,a_{20} \bmod 3=2$与$a_{20}=40 \bmod 3=1$矛盾,

$1+2,2+4,4+5,5+7,7+8,8+10,10+11,11+13,13+14,14+16,16+17,$

$17+19,19+20,20+22,22+23,23+25,25+26,26+28,28+40=68$不是3的倍数,$\therefore f_{\max}=18$

1到40中:$a_i \bmod 3=1$有14个,$a_i \bmod 3=2$有13个,将这27个数排列如下：

$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{4}\boxed{5}\boxed{7}\boxed{8}\boxed{10}\boxed{11}\boxed{13}\boxed{14}\boxed{16}\boxed{17}\boxed{19}\boxed{20}\boxed{22}\boxed{23}\boxed{25}\boxed{26}\boxed{28}\boxed{29}\boxed{31}\boxed{32}\boxed{34}\boxed{35}\boxed{37}\boxed{38}\boxed{40},a_1=1,a_{20}=40,$

①要在2～38这25个数中删掉7个相邻数$\Leftrightarrow$21个中删掉4个数，有$C_{21}^4C_8^1$(山东8个补回1个）

②1或4被删掉，其余从中间21个数在删除，则有$2C_{21}^3$

$\therefore\{a_n\}$的个数为$\frac{1}{2}(C_{21}^4C_8^1+2C_{21}^3)=25270$

四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. 已知某公司生产的风干牛肉干是按包销售的，每包牛肉干的质量 M（单位：g）服从正态分布 $N(250,\sigma^2)$，且 $P(M<248)=0.1$.（1）若从公司销售的牛肉干中随机选取 3 包，求这 3 包中恰有 2 包质量不小于 $248g$ 的概率；

（2）若从公司销售的牛肉干中随机选取 K（K 为正整数）包，记质量在 $248g\sim 252g$ 内的包数为 X，且 $D(X)>320$，求 K 的最小值.

【小问 1 详解】由题意知每包牛肉干的质量 M（单位：g）服从正态分布 $N\left(250,\sigma^2\right)$，且 $P(M<248)=0.1$，

所以 $P(M\ge 248)=1-0.1=0.9$，

则这 3 包中恰有 2 包质量不小于 248g 的概率为 $\mathrm{C}_3^2\times 0.9^2\times 0.1=0.243$.

【小问 2 详解】因为 $P(M<248)=0.1$，所以 $P(248<M<252)=(0.5-0.1)\times 2=0.8$，

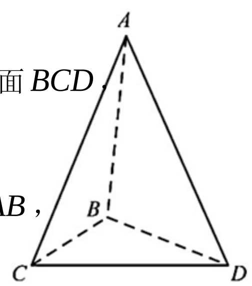
依题意可得 $X\sim B(K,0.8)$，所以 $D(X)=K\times 0.8\times(1-0.8)=0.16K$，

因为 $D(X)>320$，所以 $0.16K>320,K>2000$，

又 K 为正整数，所以 K 的最小值为 2001.

16.（15 分）如图，在三棱锥 $A-BCD$ 中，$AB\perp$平面 BCD，平面 $ABC\perp$平面 ABD，$AC=AD$，$AB=BD$.

（1）证明：$BC\perp BD$；（2）求二面角 $A-CD-B$ 的余弦值.



15.（13 分）[证]（1）依题意，$AB\perp$面 BCD，又因为 $AB\cap BC=B$，且 $BC\subset$面 BCD，

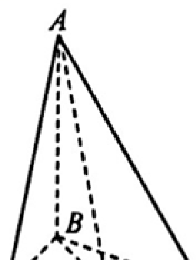
所以 $AB\perp BC$，同理可得 $AB\perp BD$，

因为面 $ABC\perp$面 BCD，面 $ABC\cap$面 $ABD=AB$，$BD\subset$面 BCD，且 $BD\perp AB$，

所以 $BD\perp$面 ABC，

因为 $BC\subset$面 ABC，所以 $BC\perp BD$.

[解]（2）[方法 1]取 CD 中点 M，并联结 AM、BM.



（方法 1）因为 $AC=AD$，所以 $AM\perp CD$，

由勾股定理可知 $BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{AD^2-AB^2}=BD=AB$.

因为 $BC=BD$，所以 $BM\perp CD$；

则根据二面角定义可知 $\angle AMB$ 是二面角 $A-CD-B$ 的一个平面角，且由图可知 $\angle AMB$ 为锐角.

又因为 $AB\perp$ 面 BCD，同理（1）可知 $AB\perp BM$，

设 $AB=a$，可得 $BM=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，所以 $\tan\angle AMB=\sqrt{2}$，即二面角 $A-CD-B$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

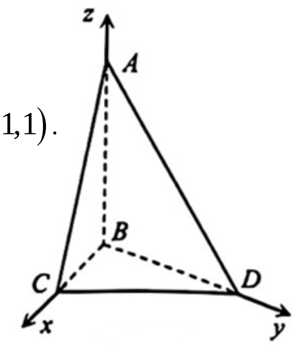
[方法 2]由（1）可知，AB、BC、BD 三者两两相互垂直，

故以点 B 为坐标原点，分别以 $\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{BD}$、$\overrightarrow{BA}$ 的方向为 x、y、z 轴的正方向，建立空间直角坐标系.

（方法 2）由勾股定理可知 $BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{AD^2-AB^2}=BD=AB$.

设 $\overrightarrow{BC}=(a,0,0)$，则 $\overrightarrow{BD}=(0,a,0)$，

则易得平面 BCD 的一个法向量可以是 $\overrightarrow{n_1}=(0,0,1)$，



而 $\overrightarrow{AC}=(a,0,-a)$，$\overrightarrow{AD}=(0,a,-a)$，故可得平面 ACD 的一个法向量可以是 $\overrightarrow{n_2}=(1,1,1)$.

设二面角 $A-CD-B$ 的一个平面角为 α，且由图可知 α 为锐角.

则 $\cos\alpha=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right\rangle\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，即二面角 $A-CD-B$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

17.（15 分）设 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$.（1）若 $\tan x=\dfrac{1}{2}$，求 $\dfrac{\cos 4x-4\cos 2x+3}{\cos 4x+4\cos 2x+3}$；

（2）证明：$\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}>2$；（3）若 $\tan x+2\sin x-ax>0$，求实数 a 的取值范围.

(1) 解:$\because \tan x=\dfrac{1}{2},\therefore \dfrac{\cos 4x-4\cos 2x+3}{\cos 4x+4\cos 2x+3}=\dfrac{2\cos^2 2x-1-4\cos 2x+3}{2\cos^2 2x-1+4\cos 2x+3}=\dfrac{\cos^2 2x-2\cos 2x+1}{\cos^2 2x+2\cos 2x+1}=(\dfrac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x})^2=\tan^4 x=\dfrac{1}{16}$

(2) 证明：设$p(x)=x-\sin x(0<x<\dfrac{\pi}{2})$, 则$p'(x)=1-\cos x>0,\therefore p(x)>p(0)=0$

$\therefore \dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}>2\Leftrightarrow \tan x-x>2x-2\sin x\Leftrightarrow 0<\tan x+2\sin x-3x$记为$q(x)(0<x<\dfrac{\pi}{2})$,

则$q'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}+2\cos x-3=\dfrac{(\cos x-1)^2(2\cos x+1)}{\cos^2 x}>0,\therefore q(x)>q(0)=0,\therefore \dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}>2$

(3) 解：由（2）得 $\dfrac{\tan x+2\sin x}{x}>3$, 且 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan x+2\sin x}{x}=3$

而 $\tan x+2\sin x-ax>0\Leftrightarrow a<\dfrac{\tan x+2\sin x}{x},\therefore a\le 3$即为所求的

18.（17 分）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的左焦点为 F,P 为曲线 $E:\dfrac{x^2+4x}{25}+\dfrac{y^2}{9}=0$ 上的动点，且点 P 不在 x 轴上，直线 FP 交 C 于 A,B 两点.（1）证明：曲线 E 为椭圆，并求其离心率；（2）证明：P 为线段 AB 的中点；（3）设过点

A,B 且与 AB 垂直的直线与 C 的另一个交点分别为 M,N，求$\triangle PMN$ 面积的取值范围.

(1) 证明：由$E:\dfrac{x^2+4x}{25}+\dfrac{y^2}{9}=\dfrac{(x+2)^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{4}{25}=0\Leftrightarrow\dfrac{(x+2)^2}{4}+\dfrac{y^2}{\frac{36}{25}}=1$

向左平移2个单位得$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{\frac{36}{25}}=1$是椭圆方程，$\therefore$曲线$E$为椭圆，且其离心率为$\dfrac{4}{5}$

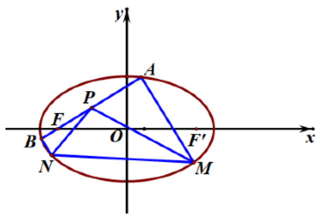
(2) 证明：设AB的中点$Q(x,y)$,则$\begin{cases}\dfrac{x_A^2}{25}+\dfrac{y_A^2}{9}=1\cdots①\\\dfrac{x_B^2}{25}+\dfrac{y_B^2}{9}=1\cdots②\\x_A+x_B=2x\\y_A+y_B=2y\\\dfrac{y}{x+4}=\dfrac{y_A-y_B}{x_A-x_B}\end{cases}$

$①-②$得$:\dfrac{(x_A-x_B)\cdot 2x}{25}+\dfrac{(y_A-y_B)\cdot 2y}{9}=0,\therefore\dfrac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=-\dfrac{9x}{25y}=\dfrac{y}{x+4}$即$9x^2+25y^2+36x=0$

即$\dfrac{(x+2)^2}{4}+\dfrac{y^2}{\frac{36}{25}}=1$即为曲线$E$的方程,$\therefore Q$在曲线$E$上,$\therefore P$为$AB$的中点.

(3) 解：设$l_{AB}:x=ty-4$代入C方程得$(9t^2+25)y^2-72ty-81=0$

$\therefore\begin{cases}y_A+y_B=\dfrac{72t}{9t^2+25}\\y_Ay_B=\dfrac{-81}{9t^2+25}<0\end{cases}$，且$\Delta=8100(t^2+1)>0,\therefore P(-\dfrac{100}{9t^2+25},\dfrac{36t}{9t^2+25})$



由$l_{AM}:y-y_A=-t(x-x_A)$即$y=-tx+(t^2+1)y_A-4t$代入C方程得：

$(9+25t^2)x^2-50t((t^2+1)y_A-4t)x+25((t^2+1)y_A-4t)^2-225=0$

$\therefore\Delta_A=900[9+25t^2-((t^2+1)y_A-4t)^2]=1600(t^2+1)y_A^2,$

$\therefore|AM|=\sqrt{1+t^2}\cdot\dfrac{40\sqrt{1+t^2}\,|y_A|}{9+25t^2}=\dfrac{40(1+t^2)}{9+25t^2}|y_A|$,同理$:|BN|=\dfrac{40(1+t^2)}{9+25t^2}|y_B|$

$\therefore S_{\triangle PMN}=\dfrac{1}{2}(|AM|+|BN|)\cdot|AB|-\dfrac{1}{2}|AM|\cdot\dfrac{1}{2}|AB|-\dfrac{1}{2}|BN|\cdot\dfrac{1}{2}|AB|=\dfrac{1}{4}|AB|\cdot(|AM|+|BN|)$

$=\dfrac{1}{4}\sqrt{1+t^2}\cdot\dfrac{90\sqrt{t^2+1}}{9t^2+25}\cdot\dfrac{40(1+t^2)}{9+25t^2}(|y_A|+|y_B|)=\dfrac{900(t^2+1)^2}{(9t^2+25)(25t^2+9)}\cdot\dfrac{90\sqrt{t^2+1}}{9t^2+25}$

$=81000\cdot\dfrac{(t^2+1)^{\frac{5}{2}}}{(9t^2+25)^2(25t^2+9)}=81000\sqrt{\dfrac{(t^2+1)^5}{(9t^2+25)^4(25t^2+9)^2}}$

设$f(t)=\dfrac{(t^2+1)^5}{(9t^2+25)^4(25t^2+9)^2}$,则$f'(t)=\dfrac{-2t(t^2+1)^4(225t^4-606t^2+449)}{(9t^2+25)^5(25t^2+9)^3}<0$

$\therefore 81000f(t)\in(0,\dfrac{72}{5}),\therefore\triangle PMN$的面积的取值范围为$(0,\dfrac{72}{5})$

19. 若各项为正的无穷数列$\{a_n\}$满足：对于$\forall n\in N^*$，$a_{n+1}^2-a_n^2=d$，其中d为非零常数，则称数列$\{a_n\}$为D数列.

记$b_n=a_{n+1}-a_n$.（1）判断无穷数列$a_n=\sqrt{n}$和$a_n=2^n$是否是D数列，并说明理由；

（2）若$\{a_n\}$是D数列，证明：数列$\{b_n\}$中存在小于1的项；

（3）若$\{a_n\}$是D数列，证明：存在正整数n，使得$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}>2024$.

⑴ 解：由$a_{n+1}^2-a_n^2=n+1-n=1$是非零常数，$\therefore a_n=\sqrt{n}$是D数列；
$a_{n+1}^2-a_n^2=2^{2n+2}-2^{2n}=3\cdot 2^{2n}$不是常数，$\therefore a_n=2^n$不是$D$数列

⑵ 证明：$\because \{a\}$是D数列，$\therefore a_{n+1}^2-a_n^2=d$
$\therefore a_n^2=(a_n^2-a_{n-1}^2)+\cdots+(a_2^2-a_1^2)+a_1^2=(n-1)d+a_1, n\geq 2$
$\therefore a_n=\sqrt{(n-1)d+a_1}\,(n\in N^*, d\geq 0, a_1>0)$
$\therefore b_n=\sqrt{nd+a_1}-\sqrt{(n-1)d+a_1}=\dfrac{d}{\sqrt{nd+a_1}+\sqrt{(n-1)d+a_1}}$递减，$\therefore$当$n>d$时，$b_n<1$，证毕

⑶ 证明：由（2）得：$a_n=\sqrt{(n-1)d+a_1}\,(n\in N^*, d\geq 0, a_1>0)$，
$\therefore \dfrac{1}{a_i}=\dfrac{1}{\sqrt{d(i-1)+a_1}}\geq \dfrac{1}{\sqrt{m}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{i}}$（记$m=\max\{a_1,d\}$）
$=\dfrac{1}{\sqrt{m}}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{i}+\sqrt{i}}>\dfrac{1}{\sqrt{m}}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{i}+\sqrt{i+1}}=\dfrac{2}{\sqrt{m}}(\sqrt{i+1}-\sqrt{i})$，$\therefore \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}>\dfrac{2}{\sqrt{m}}(\sqrt{n+1}-1)$，
要使：$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}>2024$，只要：$\dfrac{2}{\sqrt{m}}(\sqrt{n+1}-1)>2024\Leftrightarrow \sqrt{n+1}>1+1012\sqrt{m}\Leftrightarrow n>(1+1012\sqrt{m})^2-1$
取$n=[(1+1012\sqrt{m})^2]$，使得$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}>2024$