立体几何（4）平行与垂直解答（1）

2023-05-21

一、平行关系证明

$$(1)\ \text{线线平行}:\begin{cases}\text{几何方法}:\begin{cases}\text{定义：在同一平面内两条没有公共点的直线}\\ \text{平行公理：}a//b,b//c\Rightarrow a//c\\ \text{线面平行性质：}a//\alpha,a\subset\beta,\alpha\cap\beta=b\Rightarrow a//b\\ \text{面面平行性质：}\alpha//\beta,\gamma\cap\alpha=a,\gamma\cap\beta=b\Rightarrow a//b\\ \text{线面垂直性质：}a\perp\alpha,b\perp\alpha\Rightarrow a//b\end{cases}\\ \text{向量方法}:\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD}\xrightarrow{AB\text{与}CD\text{不重合}}AB//CD\end{cases}$$

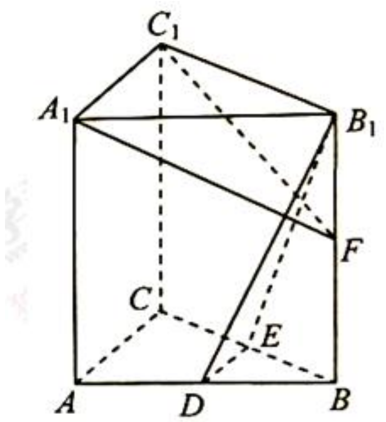
$$(2)\ \text{线面平行}:\begin{cases}\text{几何方法}:\begin{cases}\text{定义：直线与平面没有公共点}\\ \text{判定定理：}a//b,b\subset\alpha,a\not\subset\alpha\Rightarrow a//\alpha\\ \text{面面平行的性质：}\alpha//\beta,a\subset\alpha\Rightarrow a//\beta\end{cases}\\ \text{向量方法}:\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{n_\alpha},AB\not\subset\alpha\Rightarrow AB//\alpha\end{cases}$$

$$(3)\ \text{面面平行}:\begin{cases}\text{几何方法}:\begin{cases}①\text{定义：两个没有公共点的平面}\\ ②a//\beta,b//\beta,a,b\subset\alpha,a\cap b=O\Rightarrow\alpha//\beta\\ ③l\perp\alpha,l\perp\beta\Rightarrow\alpha//\beta\end{cases}\\ \text{向量方法}:\overrightarrow{n_\alpha}//\overrightarrow{n_\beta}\Rightarrow\alpha//\beta\end{cases}$$

$$\text{二、垂直关系：}(1)\ \text{线线垂直}:\begin{cases}\text{几何方法}:\begin{cases}①\text{定义：两直线所成的角是直角}(a//b,a\perp l\Rightarrow b\perp l)\\ ②l\perp\alpha,a\subset\alpha\Rightarrow l\perp a\\ ③\text{三垂线定理：若}PO\perp\alpha\text{于}O,A\in\alpha,a\subset\alpha.\text{则}AO\perp a\Leftrightarrow PA\perp a\end{cases}\\ \text{向量方法}:\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0\Leftrightarrow AB\perp CD\end{cases}$$

$$(2)\ \text{线面垂直}:\begin{cases}\text{几何方法}:\begin{cases}①\text{定义：直线与平面内的所有直线都垂直；}\\ ②l\perp a,l\perp b,a,b\subset\alpha,a\cap b=O\Rightarrow l\perp\alpha\\ ③a//b,a\perp\alpha\Rightarrow b\perp\alpha\\ ④a\perp\alpha,\alpha//\beta\Rightarrow a\perp\beta\\ ⑤\alpha\perp\beta,l\subset\alpha,\alpha\cap\beta=a,l\perp a\Rightarrow l\perp\beta\\ ⑥\alpha\perp\gamma,\beta\perp\gamma,\alpha\cap\beta=l\Rightarrow l\perp\gamma\end{cases}\\ \text{向量方法}:\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{n_\alpha}\Rightarrow AB\perp\alpha\end{cases}$$

$$(3)\ \text{面面垂直}:\begin{cases}\text{几何方法}:\begin{cases}①\text{两平面相交所成的二面角是直二面角}\\ ②l\perp\alpha,l\subset\beta\Rightarrow\alpha\perp\beta\end{cases}\\ \text{向量方法}:\overrightarrow{n_\alpha}\perp\overrightarrow{n_\beta}\Rightarrow\alpha\perp\beta\end{cases}$$



（2005）（06）设α、β 为两个不同的平面，l、m 为两条不同的直线，且$l\subset\alpha$，$m\subset\beta$，有如下的两个命题：①若$\alpha//\beta$，则$l//m$；②若 $l\perp m$，则$\alpha\perp\beta$．那么（　　）D

A.①是真命题，②是假命题　　B. ①是假命题，②是真命题

C. ①②都是真命题　　　　D. ①②都是假命题

（2010）（6）设l,m是两条不同的直线，α是一个平面，则下列命题正确的是(　　)B

A.若 $l\perp m$， $m\subset\alpha$， 则 $l\perp\alpha$　　B.若 $l\perp\alpha$， $l//m$， 则 $m\perp\alpha$

C.若 $l//\alpha$， $m\subset\alpha$， 则 $l//m$　　D.若 $l//\alpha$， $m//\alpha$， 则 $l//m$

（2016）（2）已知互相垂直的平面 α,β 交于直线 l.若直线 m，n 满足 $m//\alpha, n\perp\beta$， 则（C　）

A． $m//l$　　B． $m//n$　　C． $n\perp l$　　D． $m\perp n$

（2011）（4）下列命题中错误的是　　　　（　D ）

A．如果平面 $\alpha\perp$ 平面 β，那么平面 α 内一定存在直线平行于平面 β

B．如果平面 α 不垂直于平面 β，那么平面 α 内一定不存在直线垂直于平面 β

C．如果平面 $\alpha\perp$ 平面 γ，平面 $\beta\perp$ 平面 γ， $\alpha\cap\beta=l$，那么 $l\perp$ 平面 γ

D．如果平面 $\alpha\perp$ 平面 β，那么平面 α 内所有直线都垂直于平面 β

（2013）（10）在空间中，过点 A 作平面 π 的垂线，垂足为 B，记 $B=f_\pi(A)$. 设 α,β 是两个不同的平面，对空间任意一点 P， $Q_1=f_\beta[f_\alpha(P)], Q_2=f_\alpha[f_\beta(P)]$,恒有 $PQ_1=PQ_2$，则（　A）

A．平面 α 与平面 β 垂直　　B．平面 α 与平面 β 所成的（锐）二面角为 $45°$

C．平面 α 与平面 β 平行　　D．平面 α 与平面 β 所成的（锐）二面角为 $60°$

（16江苏）如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D,E 分别为 AB,BC 的中点，点 F 在侧棱 BB_1 上，且 $B_1D\perp A_1F, A_1C_1\perp A_1B_1$.求证：（Ⅰ）直线 $DE//$ 平面 A_1C_1F；（Ⅱ）平面 $B_1DE\perp$ 平面 A_1C_1F.

试题解析：证明：（1）在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $A_1C_1// AC$，

在三角形 ABC 中，因为 D，E 分别为 AB，BC 的中点，

所以 $DE// AC$，于是 $DE// A_1C_1$，

又因为 $DE\not\subset$ 平面 A_1C_1F, $A_1C_1\subset$ 平面 A_1C_1F，

所以直线 $DE//$ 平面 A_1C_1F.

（2）在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AA_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$

因为 $A_1C_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，所以 $AA_1\perp A_1C_1$，

又因为 $A_1C_1\perp A_1B_1$，$AA_1\subset$ 平面 $ABB_1A_1, A_1B_1\subset$ 平面 $ABB_1A_1, A_1B_1\cap AA_1=A_1$，

所以 $A_1C_1\perp$ 平面 ABB_1A_1.

因为 $B_1D\subset$ 平面 ABB_1A_1，所以 $A_1C_1\perp B_1D$.

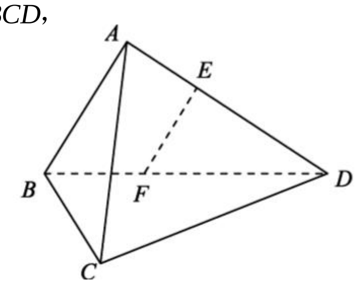
又因为 $B_1D\perp A_1F$，$A_1C_1\subset$ 平面 $A_1C_1F, A_1F\subset$ 平面 $A_1C_1F, A_1C_1\cap A_1F=A_1$，

所以 $B_1D\perp$ 平面 A_1C_1F.

因为直线 $B_1D\subset$ 平面 B_1DE，所以平面 $B_1DE\perp$ 平面 A_1C_1F.学科&网

（17江苏）如图，在三棱锥 A-BCD 中，$AB\perp AD, BC\perp BD$, 平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，点 E,F（E 与 A,D 不重合）分别在 AD,BD 上，且 $EF\perp AD$.

求证：（Ⅰ）$EF//$ 平面 ABC；（Ⅱ）$AD\perp AC$.



【解析】（1）在平面 ABD 内，因为 $AB\perp AD$，$EF\perp AD$，所以 $EF\parallel AB$．

又因为 $EF\not\subset$ 平面 ABC，$AB\subset$ 平面 ABC，所以 $EF\parallel$ 平面 ABC．

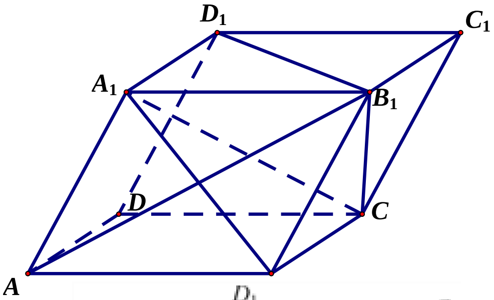
（2）因为平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，平面 $ABD\cap$ 平面 $BCD=BD$，$BC\subset$ 平面 BCD，$BC\perp BD$，

所以 $BC\perp$ 平面 ABD．

因为 $AD\subset$ 平面 ABD，所以 $BC\perp AD$．

又 $AB\perp AD$，$BC\cap AB=B$，$AB\subset$ 平面 ABC，$BC\subset$ 平面 ABC，所以 $AD\perp$ 平面 ABC，

又因为 $AC\subset$ 平面 ABC，所以 $AD\perp AC$．



(18江苏）在平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AA_1=AB, AB_1\perp B_1C_1$.

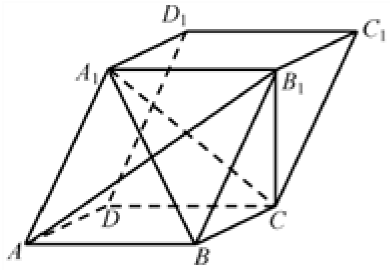
求证：（Ⅰ）$AB//$平面A_1B_1C；（Ⅱ）平面$ABB_1A_1\perp$平面A_1BC.

证明：（1）在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB\,//\,A_1B_1$.

因为 $AB\not\subset$平面 A_1B_1C，$A_1B_1\subset$ 平面 A_1B_1C，

所以 $AB\,//$ 平面 A_1B_1C.

（2）在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，四边形 ABB_1A_1 为平行四边形.



（第 15 题）

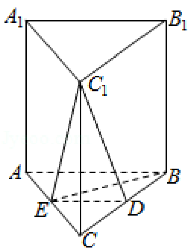
又因为 $AA_1=AB$，所以四边形 ABB_1A_1 为菱形，因此 $AB_1\perp A_1B$.

又因为 $AB_1\perp B_1C_1$，$BC\,//\,B_1C_1$，所以 $AB_1\perp BC$.

又因为 $A_1B\cap BC=B$，$A_1B\subset$ 平面 A_1BC，$BC\subset$ 平面 A_1BC，

所以 $AB_1\perp$ 平面 A_1BC.

因为 $AB_1\subset$ 平面 ABB_1A_1，所以平面 $ABB_1A_1\perp$ 平面 A_1BC.



(19江苏）如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，D,E分别为BC,AC的中点，$AB=BC$.求证：

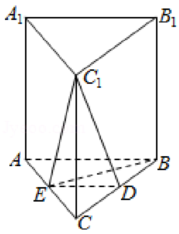
（Ⅰ）$A_1B_1//$平面DEC_1；（Ⅱ）$BE\perp C_1E$.

【解答】证明：(1) $\because$ 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D，E 分别为 BC，AC 的中点，

$\therefore DE//AB$，$AB//A_1B_1$，$\therefore DE//A_1B_1$，

$\because DE\subset$ 平面 DEC_1，$A_1B_1\not\subset$ 平面 DEC_1，

$\therefore A_1B_1//$ 平面 DEC_1．



解：(2) $\because$ 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，E 是 AC 的中点，$AB=BC$．

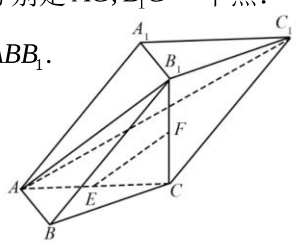
$\therefore BE\perp AA_1$，$BE\perp AC$，

又 $AA_1\bigcap AC=A$，$\therefore BE\perp$ 平面 ACC_1A_1，

$\because C_1E\subset$ 平面 ACC_1A_1，$\therefore BE\perp C_1E$．

（20 江苏）15.在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$中，$AB\perp AC, B_1C\perp$ 平面ABC，E，F 分别是 AC, B_1C 中点.

（1）求证：（Ⅰ）求证：$EF//$平面AB_1C_1；（Ⅱ）求证：平面$AB_1C\perp$平面ABB_1.



【详解】(1) 由于 E,F 分别是 AC,B_1C 的中点，所以 $EF//AB_1$．

由于 $EF\not\subset$ 平面 AB_1C_1，$AB_1\subset$ 平面 AB_1C_1，所以 $EF//$ 平面 AB_1C_1．

(2) 由于 $B_1C\perp$ 平面 ABC，$AB\subset$ 平面 ABC，所以 $B_1C\perp AB$．

由于 $AB\perp AC, AC\cap B_1C=C$，所以 $AB\perp$ 平面 AB_1C，

由于 $AB\subset$ 平面 ABB_1，所以平面 $AB_1C\perp$ 平面 ABB_1．