2023 年 II

2023-06-08

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1．在复平面内，$(1+3i)(3-i)$ 对应的点位于（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

2．设集合 $A=\{0,-a\}$，$B=\{1,a-2,2a-2\}$，若 $A\subseteq B$，则 $a=$（　　）

A．2　　B．1　　C．$\frac{2}{3}$　　D．-1

3．某学校为了解学生参加体育运动的情况，用比例分配的分层随机抽样法作抽样调查，拟从初中部和高中部两层共抽取 60 名学生，已知该校初中部和高中部分别有 400 和 200 名学生，则不同的抽样结果共有（　）A．$C_{400}^{45}\cdot C_{200}^{15}$ 种　　B．$C_{400}^{15}\cdot C_{200}^{45}$ 种　　C．$C_{400}^{30}\cdot C_{200}^{30}$ 种　　D．$C_{400}^{40}\cdot C_{200}^{20}$ 种

4．若 $f(x)=(x+a)\ln\frac{2x-1}{2x+1}$ 为偶函数，则 $a=$（　　）A．-1　B．0　C．$\frac{1}{2}$　D．1

5．已知椭圆 $C:\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，直线 $y=x+m$ 与 C 交于 A，B 两点，若 $S_{\triangle F_1AB}=2S_{\triangle F_2AB}$，则 $m=$（　　）A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　C．$-\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D．$-\frac{2}{3}$

6．已知函数 $f(x)=ae^x-\ln x$ 在区间 $(1,2)$ 单调递增，则 a 的最小值为（　）A．e^2 B．e　C．e^{-1}　D．e^{-2}

7．已知 α 为锐角，$\cos\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$，则 $\sin\frac{\alpha}{2}=$（　　）A．$\frac{3\sqrt{5}}{8}$　B．$\frac{-1+\sqrt{5}}{8}$　C．$\frac{3-\sqrt{5}}{4}$　D．$\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

8．记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_4=-5$，$S_6=21S_2$，则 $S_8=$（　　）

A．120　　B．85　　C．-85　　D．-120

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9．已知圆锥的顶点为 P，底面圆心为 O，AB 为底面直径，$\angle APB=120°$，$PA=2$，点 C 在底面圆周上，且二面角 $P-AC-O$ 为 $45°$，则（　　）

A．该圆锥体积为 π　　B．该圆锥的侧面积为 $4\sqrt{3}\pi$　C．$AC=2\sqrt{2}$　　D．$\triangle PAC$ 的面积为 $\sqrt{3}$

10．设 O 为坐标原点，直线 $y=-\sqrt{3}(x-1)$ 过抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点，且与 C 交于 M，N 两点，l 为 C 的准线，则（ ）A．$p=2$　B．$|MN|=\frac{8}{3}$　C.以 MN 为直径的圆与 l 相切 D．$\triangle OMN$ 为等腰三角形

11．若函数 $f(x)=a\ln x+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}(a\neq 0)$ 既有极大值也有极小值，则（　　）

A．$bc>0$　　B．$ab>0$　　C．$b^2+8ac>0$　　D．$ac<0$

12.在信道内传输0,1信号，信号的传输相互独立，发送0时，收到1的概率为$\alpha(0<\alpha<1)$,收到0的概率为$1-\alpha$；发送1时，收到1的概率为$\beta(0<\beta<1)$,收到1的概率为$1-\beta$.考虑两种传输方案：单次传输和三次传输.单次传输是指每个信号只发送1次；三次传输是只每个信号重复发送3次.收到的信号需要译码，译码规则如下：单次传输时，收到信号即为译码；三次传输时，收到的信号中出现次数多的即为译码（例如，若依次收到1,0,1,则译码为1).(　)

A.采用单次传输方案，若依次发送1, 0, 1，则依次收到1, 0, 1的概率为$(1-\alpha)(1-\beta)^2$

B.采用三次传输方案，若发送1，则依次收到1, 0, 1的概率为$\beta(1-\beta)^2$

C.采用三次传输方案，若发送1，则译码为1的概率为$\beta(1-\beta)^2+(1-\beta)^2$

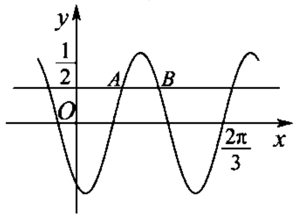
D.当$0<\alpha<0.5$时，若发送0，则采用三次传输方案译码为0的概率大于采用单次传输方案译码为0的概率

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．已知向量$\vec{a},\vec{b}$满足$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}$，$|\vec{a}+\vec{b}|=|2\vec{a}-\vec{b}|$，则$|\vec{b}|=$______.

14．底面边长为 4 的正四棱锥被平行于其底面的平面所截，截去一个底面边长为 2，高为 3 的正四棱锥，所得棱台的体积为______.

15．已知直线$l:x-my+1=0$与$\odot C:(x-1)^2+y^2=4$交于 *A*，*B* 两点，写出满足“$S_{\triangle ABC}=\dfrac{8}{5}$”的 *m* 的一个值______.



16．已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$，如图 *A*，*B* 是直线$y=\dfrac{1}{2}$与曲线$y=f(x)$的两个交点，若$|AB|=\dfrac{\pi}{6}$，则$f(\pi)=$______.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17．$\triangle ABC$对应边分别为 *a*，*b*，*c*，若 *D* 为 *BC* 中点，且$AD=1$.

（1）若$\angle ADC=\dfrac{\pi}{3}$，求$\tan B$；（2）若$b^2+c^2=8$，求 *b*，*c*.

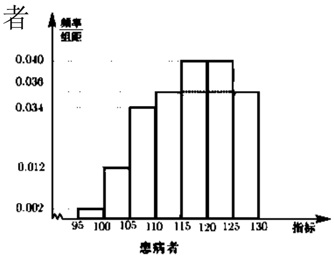
18．$\{a_n\}$为等差数列，$b_n=\begin{cases}a_n-6, n奇\\ 2a_n, n偶\end{cases}$，记$S_n$，$T_n$为$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前 *n* 项和，$S_4=32$，$T_3=16$.

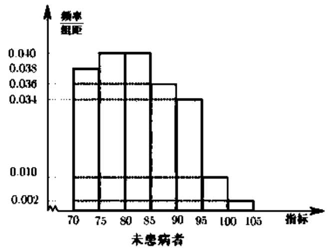
（1）求$\{a_n\}$的通项公式；（2）证明：当$n>5$时，$T_n>S_n$.

2023 年Ⅱ

2023-06-08

19．某研究小组经过研究发现某种疾病的患病者与未患病者的某项医学指标有明显差异，经过大量调查，得到如下的患病者和未患病这指标的频率分布直方图：



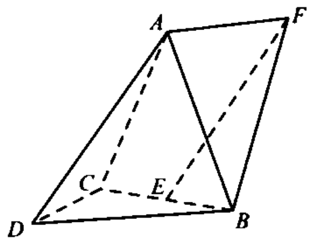


利用该指标制定一个检测标准，需要确定临界值c，将该指标大于c的人判定为阳性，小于或等于c的人判定为阴性，此检测标准的漏诊率是将患病者判为阴性的概率，记为$p(c)$；误诊率是将未患病者判定为阳性的概率，记为$q(c)$.假设数据在组内平均分布，以事件发生的频率作为相应事件发生的概率.⑴ 当$p(c)=0.5\%$时，求临界值c和误诊率$q(c)$;

（2）设函数$f(c)=p(c)+q(c)$，当$c\in[95,105]$时，求$f(c)$的解析式，并求$f(c)$在区间$[95,105]$的最小值.

20．三棱锥 $A-BCD$ 中， $DA=DB=DC$ ， $BD\perp CD$ ， $\angle ADB=\angle ADC=60°$，$E$ 为 BC 中点.

（1）证明： $BC\perp DA$；（2）点 F 满足 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DA}$，求二面角 $D-AB-F$ 的正弦值.



2023 年 II

2023-06-08

21.已知双曲线C中心为坐标原点，左焦点$F_1(-2\sqrt{5},0)$,离心率为$\sqrt{5}$.(1) 求C的方程；

（2）记C的左、右顶点分别为A_1、A_2,过点$B(-4,0)$的直线与C的左支交于M,N两点，M在第二象限，直线MA_1与NA_2交于点P.证明：P在定直线上.

22.(1) 证明：当$0<x<1$时，$x-x^2<\sin x<x$;

（2）已知函数$f(x)=\cos ax-\ln(1-x^2)$,若$x=0$是$f(x)$的极大值点，求a的取值范围.