2023-24（下）模拟（8）

2024-02-21

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1.设集合 $A=\{x\mid y=\ln(x-3)\},B=\{x\mid x\le -1\}$，则 $A\cup(\complement_R B)=$（　　）

A． $\{x\mid -1<x\le 3\}$　　B． $\{x\mid x>-1\}$　　C． $\{x\mid x\le -1,或x>3\}$　　D． $\{x\mid x>3\}$

2.已知复数 $z=a+bi(a\in R,b\in R,且a\ne b)$，且 z^2 为纯虚数，则 $\dfrac{\overline{z}}{z}=$（　　）A． 1　B． -1　C． i　D． $-i$

3.已知向量 $\vec{a}=(-2,4)$， $\vec{b}=(1,t)$，若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线，则向量 $\vec{a}+\vec{b}$ 在向量 $\vec{j}=(0,1)$ 上的投影向量为（ ）

A． $\vec{j}$　B． $-\vec{j}$　C． $2\vec{j}$　D． $-2\vec{j}$

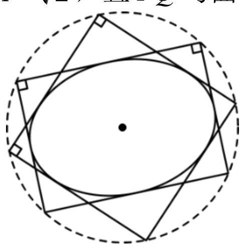
4. “$ab>1$”是“$b>\dfrac{1}{a}>0$”（　　）

A． 充分不必要条件　B． 必要不充分条件　C． 充分必要条件　D． 既不充分也不必要条件

5.有甲、乙等五人到三家企业去应聘，若每人至多被一家企业录用，每家企业至少录用其中一人且甲、乙两人不能被同一家企业录用，则不同的录用情况种数是（　　）A． 60　B． 114　C． 278　D． 336

6.已知 $\odot D:x^2+y^2-2ax-2a-1=0$，点 $P(-3,0)$，若 $\odot D$ 上总存在 M，N 两点使得 $\triangle PMN$ 为等边三角形，则 a 的取值范围是（　　）A. $[-\dfrac{5}{3},-1)\cup(-1,+\infty)$ B. $(-\infty,-\dfrac{5}{3}]\cup[1,+\infty)$　C　$(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$　D． $[-2,-1)\cup(-1,+\infty)$

7.已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC=60^\circ$， $AB=2$，Q 是边 BC 上的动点．若 $PA\perp$ 平面 ABC， $PA=\sqrt{2}$，且 PQ 与面 ABC 所成角的正弦值的最大值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为（　　）



A． 4π　B． 6π　C． 8π　D． 9π

8.加斯帕尔-蒙日是 1819 世纪法国著名的几何学家．如图，他在研究圆锥曲线时发现：椭圆的任意两条互相垂直的切线的交点都在同一个圆上，其圆心是椭圆的中心，这个圆被称为“蒙日圆”．若长方形 G 的四边均与椭圆 $M:\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 相切，则下列说法错误的是（　　）

A． 椭圆 M 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B． 椭圆 M 的蒙日圆方程为 $x^2+y^2=10$

C． 若 G 为正方形，G 的边长为 $2\sqrt{5}$　　D． 长方形 G 的面积的最大值为 18

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9.已知抛物线 $C:y^2=6x$ 的焦点为 F，过点 F 的直线交 C 于 M,N 两个不同点，则下列结论正确的是（　　）

A． $|MN|$ 的最小值是 6　　B． 若点 $P(\dfrac{5}{2},2)$，则 $|MF|+|MP|$ 的最小值是 4

C． $\dfrac{1}{|MF|}+\dfrac{1}{|NF|}=3$　　D． 若 $|MF|\cdot|NF|=18$，则直线 MN 的斜率为 ±1

10.已知双曲线 $E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{2}=1(a>0)$ 的左、右焦点别为 F_1， F_2，过点 F_2 的直线 l 与双曲线 E 的右支相交于 P,Q 两点，则（　　）A． 若 E 的两条渐近线相互垂直，则 $a=\sqrt{2}$　B． 若 E 的离心率为 $\sqrt{3}$，则 E 的实轴长为 1

C． 若 $\angle F_1PF_2=90^\circ$，则 $|PF_1|\cdot|PF_2|=4$　　D． 当 a 变化时，$\triangle F_1PQ$ 周长的最小值为 $8\sqrt{2}$

11.在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F 分别是棱 BC,CD 的中点，则（　　）

A． B_1D_1 与 EF 是异面直线　B．存在点 P，使得 $\overrightarrow{A_1P}=2\overrightarrow{PF}$，且 $BC//$ 平面 APB_1

C． A_1F 与平面 B_1EB 所成角的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　D．点 B_1 到平面 A_1EF 的距离为 $\dfrac{4}{5}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12.若二项式 $(x+\dfrac{2}{\sqrt{x}})^n$ 的展开式中二项式系数之和为 64，则二项展开式中系数最大的项为_______

13.若函数 $f(x)=ax+\sin x$ 的图像上存在两条互相垂直的切线，则实数 a 是__________．

14. 若过点 $(0,1)$ 的直线 l 自左往右交抛物线 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ 及圆 $x^2+(y-1)^2=\dfrac{1}{4}$ 于 A,B,C,D 四点，则 $|AB|+3|CD|$ 的最小值为________．

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

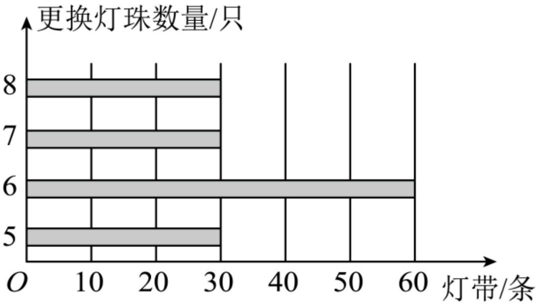
15．（13 分）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且对于任意的 $n\in N^*$ 都有 $3S_n=2a_n+1$．

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；（2）记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项中的最大值为 M_n，最小值为 m_n，令 $b_n=\dfrac{M_n+m_n}{2}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 20 项和 T_{20}．

16.（15 分）灯带是生活中常见的一种装饰材料，已知某款灯带的安全使用寿命为 5 年，灯带上照明的灯珠为易损配件，该灯珠的零售价为 4 元/只，但在购买灯带时可以以零售价五折的价格购买备用灯珠，该灯带销售老板为了给某顾客节省装饰及后期维护的支出，提供了 150 条这款灯带在安全使用寿命内更换的灯珠数量的数据，数据如图所示.以这 150 条灯带在安全使用寿命内更换的灯珠数量的频率代替 1 条灯带更换的灯珠数量发生的概率，若该顾客买 1 盒此款灯带，每盒有 2 条灯带，记 X 表示这 1 盒灯带在安全使用寿命内更换的灯珠数量，n 表示该顾客购买 1 盒灯带的同时购买的备用灯珠数量.（1）求 X 的分布列；

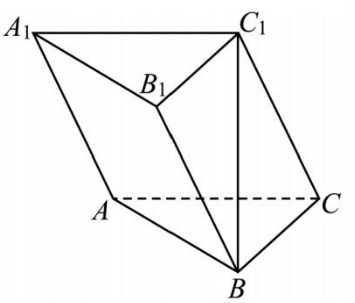
（2）若满足 $P(X \geq n) \leq 0.6$ 的 n 的最小值为 n_0，求 n_0；

（3）在灯带安全使用寿命期内，以购买替换灯珠所需总费用的期望值为依据，比较 $n = n_0 - 1$ 与 $n = n_0$ 哪种方案更优.



17.（15 分）如图,在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中,直线 $C_1B \perp$ 平面 ABC,平面 $AA_1C_1C \perp$ 平面 BB_1C_1C .

（1）求证: $AC \perp BB_1$；（2）若 $AC = BC = BC_1 = 2$,在棱 A_1B_1 上是否存在一点 P,使二面角 $P - BC - C_1$ 的余弦值为 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$?若存在,求 $\frac{B_1P}{A_1B_1}$ 的值;若不存在,请说明理由.



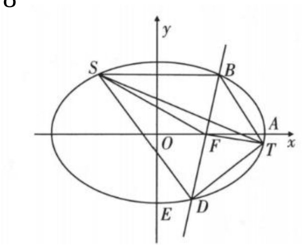
18．（17 分）已知函数 $f(x)=\ln x-x+a$．（1）若直线 $y=(e-1)x$ 与函数 $f(x)$ 的图象相切，求实数 a 的值；

（2）若函数 $g(x)=xf(x)$ 有两个极值点 x_1 和 x_2，且 $x_1<x_2$，证明：$x_2+x_1>1+\ln(\dfrac{x_1}{x_2})$．（$e$ 为自然对数的底数）.

19．（17 分）阿波罗尼斯是古希腊著名数学家，他的主要研究成果集中在他的代表作《圆锥曲线》一书中.阿波罗尼斯圆是他的研究成果之一，指的是已知动点 M 与两定点 Q,P 的距离之比 $\dfrac{|MQ|}{|MP|}=\lambda(\lambda>0,\lambda\neq1),\lambda$ 是一个常数，那么动点 M 的轨迹就是阿波罗尼斯圆，圆心在直线 PQ 上.已知动点 M 的轨迹是阿波罗尼斯圆，其方程为 $x^2+y^2=4$,定点分别为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的右焦点 F 与右顶点 A,且椭圆 C 的离心率为 $e=\dfrac{1}{2}$.

（1）求椭圆 C 的标准方程；（2）如图，过右焦点 F 斜率为 $k(k>0)$ 的直线 l 与椭圆 C 相交于 B,D(点 B 在 x 轴上方),点 S,T 是椭圆 C 上异于 B,D 的两点，SF 平分 $\angle BSD,TF$ 平分 $\angle BTD$.（1）求 $\dfrac{|BF|}{|DF|}$ 的取值范围；

（2）将点 S、F、T 看作一个阿波罗尼斯圆上的三点，若 $\triangle SFT$ 外接圆的面积为 $\dfrac{81\pi}{8}$,求直线 l 的方程.



解答

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1.设集合 $A=\{x\mid y=\ln(x-3)\},B=\{x\mid x\le -1\}$，则 $A\cup(\complement_R B)=$（　B　）

A．$\{x\mid -1<x\le 3\}$　　B．$\{x\mid x>-1\}$　　C．$\{x\mid x\le -1,或x>3\}$　　D．$\{x\mid x>3\}$

2.已知复数 $z=a+bi(a\in R,b\in R,且a\ne b)$，且 z^2 为纯虚数，则 $\frac{z}{\bar{z}}=$（　D　）A．1　B．-1　C．i　D．$-i$

3.已知向量 $\vec{a}=(-2,4)$，$\vec{b}=(1,t)$，若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线，则向量 $\vec{a}+\vec{b}$ 在向量 $\vec{j}=(0,1)$ 上的投影向量为（C ）

A．$\vec{j}$　B．$-\vec{j}$　C．$2\vec{j}$　D．$-2\vec{j}$

4.“$ab>1$”是“$b>\frac{1}{a}>0$”（　B　）

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件　C．充分必要条件　D．既不充分也不必要条件

5.有甲、乙等五人到三家企业去应聘，若每人至多被一家企业录用，每家企业至少录用其中一人且甲、乙两人不能被同一家企业录用，则不同的录用情况种数是（D　　）A．60　B．114　C．278　D．336

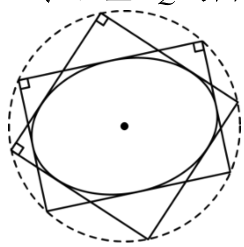
key:（3人被录用）A_5^3+（4人被录用除去甲乙被同一企业录用）$C_5^4C_4^2A_3^3-C_2^2C_3^2\cdot A_3^3$

$+$（5人被录用）$C_5^3A_3^3-C_3^1A_3^3+\frac{C_5^2C_3^2}{2!}A_3^3-C_3^2A_3^3=336$

6.已知$\odot D:x^2+y^2-2ax-2a-1=0$，点 $P(-3,0)$，若$\odot D$ 上总存在 M，N 两点使得$\triangle PMN$ 为等边三角形，则 a 的取值范围是（B　　）A.$[-\frac{5}{3},-1)\cup(-1,+\infty)$ B.$(-\infty,-\frac{5}{3}]\cup[1,+\infty)$　C　$(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$　D．$[-2,-1)\cup(-1,+\infty)$

7.已知$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=60°$，$AB=2$，Q 是边 BC 上的动点．若 $PA\perp$平面 ABC，$PA=\sqrt{2}$，且 PQ 与面 ABC 所成角的正弦值的最大值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为（　B　）

A．4π　B．6π　C．8π　D．9π

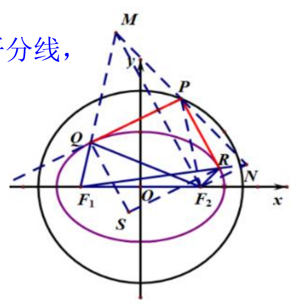


8.加斯帕尔-蒙日是 1819 世纪法国著名的几何学家．如图，他在研究圆锥曲线时发现：椭圆的任意两条互相垂直的切线的交点都在同一个圆上，其圆心是椭圆的中心，这个圆被称为“蒙日圆”．若长方形 G 的四边均与椭圆 $M:\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1$ 相切，则下列说法错误的是（　D　）

A．椭圆 M 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B．椭圆 M 的蒙日圆方程为 $x^2+y^2=10$

C．若 G 为正方形，G 的边长为 $2\sqrt{5}$　　D．长方形 G 的面积的最大值为 18

引理：（蒙日圆）由点P向椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$作出两条互相垂直的切线，则$P$的轨迹 方程为____．



$key1$:作F_2关于PQ,PR的对称点M,N，由椭圆的光学性质得SQ,SR为$\angle F_1QF_2,\angle F_1RF_2$的平分线，

$\therefore F_1,Q,M$共线，F_1,R,N共线，$\angle PMF_2=\angle F_2PR=\angle RPN$，

$\because PQ\perp PR,\therefore M,P,N$共线，且$|PM|=|PF_2|=|PN|,\therefore P$是$MN$的中点，

而$|F_1M|=2a=|F_1N|,\therefore PF_1\perp MN$，

$\therefore 2PO^2+2c^2=PF_1^2+PF_2^2=PF_1^2+PN^2=F_1N^2=4a^2,\therefore PO^2=2a^2-c^2=a^2+b^2$（蒙日圆）

$key2:$ 设 $P(u,v),l_{PQ}:y-v=k_1(x-u)$ 即 $y=k_1x+v-k_1u$ 代入椭圆得：$(a^2-u^2)k_1^2+2uvk_1+b^2-v^2=0$

设 $l_{PR}:y-v=k_2(x-u)$，同理得：$(a^2-u^2)k_2^2+2uvk_2+b^2-v^2=0,\therefore k_1k_2=\dfrac{b^2-v^2}{a^2-u^2}=-1$ 即 $u^2+v^2=a^2+b^2$

$key:e=\dfrac{\sqrt{6-4}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，蒙日圆方程位 $x^2+y^2=4+6=10$ 其内接正方形的 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\sqrt{10}=2\sqrt{5}$

内接矩形面积为 $mn\le\dfrac{m^2+n^2}{2}=\dfrac{2\times 10}{2}=10$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9.已知抛物线 $C:y^2=6x$ 的焦点为 F，过点 F 的直线交 C 于 M,N 两个不同点，则下列结论正确的是（ ABD）

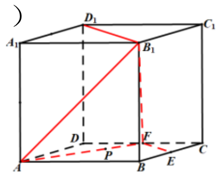
A．$|MN|$ 的最小值是 6　　B．若点 $P(\dfrac{5}{2},2)$，则 $|MF|+|MP|$ 的最小值是 4

C．$\dfrac{1}{|MF|}+\dfrac{1}{|NF|}=3$　　D．若 $|MF|\cdot|NF|=18$，则直线 MN 的斜率为 ± 1

10.已知双曲线 $E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{2}=1(a>0)$ 的左、右焦点别为 F_1，F_2，过点 F_2 的直线 l 与双曲线 E 的右支相交于 P,Q 两点，则（ ACD ）A．若 E 的两条渐近线相互垂直，则 $a=\sqrt{2}$　B．若 E 的离心率为 $\sqrt{3}$，则 E 的实轴长为 1

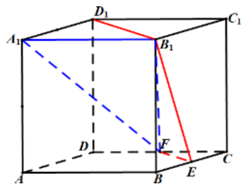
C．若 $\angle F_1PF_2=90^\circ$，则 $|PF_1|\cdot|PF_2|=4$　　D．当 a 变化时，$\triangle F_1PQ$ 周长的最小值为 $8\sqrt{2}$

11.在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F 分别是棱 BC,CD 的中点，则（ AC ）



A．BD_1 与 EF 是异面直线　B．存在点 P，使得 $\overrightarrow{A_1P}=2\overrightarrow{PF}$，且 $BC//$ 平面 APB_1

C．A_1F 与平面 B_1EB 所成角的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　D．点 B_1 到平面 A_1EF 的距离为 $\dfrac{4}{5}$

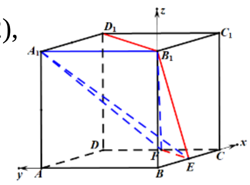


$key:EF//BD//B_1D_1$，A 错；由直线 BC 与 AF 相交的 BC 与平面 APB_1 相交，B 错；

$\because <A_1F,\text{平面}BB_1E>=\dfrac{\pi}{2}-<\overrightarrow{A_1F},\overrightarrow{A_1B_1}>,\therefore \cos<A_1F,\text{平面}BB_1E>=\sin<\overrightarrow{A_1F},\overrightarrow{A_1B_1}>$

$=\sqrt{1-(\dfrac{4+9-9}{2\cdot 2\cdot 3})^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$C$ 对；

建系如图，$E(1,0,0),F(2,1,0),A_1(0,2,2),B_1(0,0,2),\overrightarrow{EA_1}=(-1,2,2),\overrightarrow{EF}=(1,1,0),\overrightarrow{EB_1}=(-1,0,2)$，



则 $\overrightarrow{n_{\text{平面}A_1EF}}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&0\\-1&2&2\end{vmatrix}=(2,-2,3),\therefore d_{B_1\to\text{平面}A_1EF}=\dfrac{|(-1,0,2)\cdot(2,-2,3)|}{\sqrt{4+4+9}}=\dfrac{4}{\sqrt{13}}$，$D$ 错

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12.若二项式 $(x+\dfrac{2}{\sqrt{x}})^n$ 的展开式中二项式系数之和为 64，则二项展开式中系数最大的项为__240____

13.若函数 $f(x)=ax+\sin x$ 的图像上存在两条互相垂直的切线，则实数 a 是________.0

14. 若过点 $(0,1)$ 的直线 l 自左往右交抛物线 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ 及圆 $x^2+(y-1)^2=\dfrac{1}{4}$ 于 A,B,C,D 四点，则 $|AB|+3|CD|$ 的最小值

为________. $2\sqrt{3}+2$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（13 分）已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，且对于任意的$n\in N^*$都有$3S_n=2a_n+1$．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；（2）记数列$\{a_n\}$的前 n 项中的最大值为M_n，最小值为m_n，令$b_n=\dfrac{M_n+m_n}{2}$，求数列$\{b_n\}$的前 20 项和T_{20}．

【小问 1 详解】对于任意的$n\in N^*$都有$3S_n=2a_n+1$，

当$n\ge 2$时，$3S_{n-1}=2a_{n-1}+1$，两式相减得$3\left(S_n-S_{n-1}\right)=\left(2a_n+1\right)-\left(2a_{n-1}+1\right)$，即$3a_n=2a_n-2a_{n-1}(n\ge 2)$，

进而得$a_n=-2a_{n-1}(n\ge 2)$， ....4 分

当$n=1$时，$3S_1=2a_1+1$，故$a_1=1$，

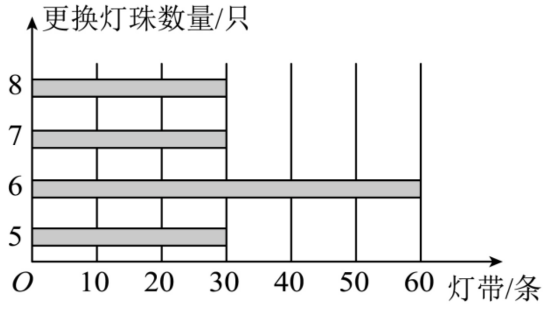
所以数列$\{a_n\}$是以首项为 1，公比为-2的等比数列，所以$a_n=(-2)^{n-1}$ ....6 分

（2）由（1）得：$b_{2k}=\dfrac{(-2)^{2k-2}+(-2)^{2k-1}}{2}=-2^{2k-3}; b_{2k+1}=\dfrac{(-2)^{2k}+(-2)^{2k-1}}{2}=2^{2k-2}(k\ge 1), b_1=1$

$\therefore b_{2k}+b_{2k+1}=2^{2k-3}(k\ge 1), \therefore T_{20}=b_1+(b_2+b_3)+(b_4+b_5)+\cdots+(b_{18}+b_{19})+b_{20}$

$=1+(2^{-1}+2^1+\cdots+2^{15})-2^{17}=1+\dfrac{\frac{1}{2}(1-2^{18})}{1-2^2}-2^{17}=\dfrac{5-2^{19}}{6}$

16．（15 分）灯带是生活中常见的一种装饰材料，已知某款灯带的安全使用寿命为 5 年，灯带上照明的灯珠为易损配件，该灯珠的零售价为 4 元/只，但在购买灯带时可以以零售价五折的价格购买备用灯珠，该灯带销售老板为了给某顾客节省装饰及后期维护的支出，提供了 150 条这款灯带在安全使用寿命内更换的灯珠数量的数据，数据如图所示.以这 150 条灯带在安全使用寿命内更换的灯珠数量的频率代替 1 条灯带更换的灯珠数量发生的概率，若该顾客买 1 盒此款灯带，每盒有 2 条灯带，记 X 表示这 1 盒灯带在安全使用寿命内更换的灯珠数量，n 表示该顾客购买 1 盒灯带的同时购买的备用灯珠数量.（1）求 X 的分布列；



（2）若满足$P(X\ge n)\le 0.6$的 n 的最小值为n_0，求n_0；

（3）在灯带安全使用寿命期内，以购买替换灯珠所需总费用的期望值为依据，比较$n=n_0-1$与$n=n_0$哪种方案更优.

【小问 1 详解】设 ξ 表示 1 条灯带在安全使用寿命内更换的灯珠数量，

则$\mathrm{P}(\xi=5)=\mathrm{P}(\xi=7)=\mathrm{P}(\xi=8)=0.2$，$\mathrm{P}(\xi=6)=0.4$，

X 的取值范围是$\{10,11,12,13,14,15,16\}$，

$P(X=10)=0.2\times 0.2=0.04$，$P(X=11)=2\times 0.2\times 0.4=0.16$，

$P(X=12)=0.4^2+2\times 0.2\times 0.2=0.24$，$P(X=13)=2\times\left(0.2\times 0.2+0.2\times 0.4\right)=0.24$，

$P\left(X=14\right)=0.2^{2}+2\times0.4\times0.2=0.2$， $P\left(X=15\right)=2\times0.2\times0.2=0.08$，

$P\left(X=16\right)=0.2\times0.2=0.04$， X 的分布列为

X	10	11	12	13	14	15	16
P	0.04	0.16	0.24	0.24	0.2	0.08	0.04

.... 6 分

【小问 2 详解】由（1）可知 $P(X\geq12)=0.8$， $P\left(X\geq13\right)=0.56$，故 $\mathrm{n}_0=13$． ....9 分

【小问 3 详解】由（2）可知 $n=n_0-1=12$．

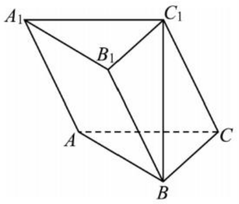
在灯带安全使用寿命期内，当 $n=12$ 时，设购买替换灯珠所需总费用为 u 元，当 $n=13$ 时，设购买替换灯珠所需总费用为 v 元，则 $E\left(u\right)=24+0.24\times4+0.2\times8+0.08\times12+0.04\times16=28.16$，

$E\left(v\right)=26+0.2\times4+0.08\times8+0.04\times12=27.92$. $E\left(v\right)<E\left(u\right)$，

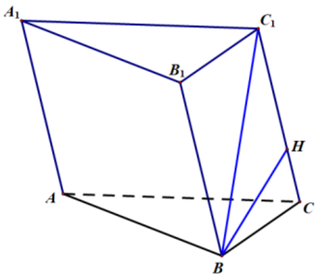
故以购买替换灯珠所需总费用的期望值为依据， $n=n_0$ 比 $n=n_0-1$ 的方案更优。 .... 13 分

17.（15 分）如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,直线 $C_1B\perp$ 平面 ABC,平面 $AA_1C_1C\perp$ 平面 BB_1C_1C .

（1）求证: $AC\perp BB_1$；（2）若 $AC=BC=BC_1=2$,在棱 A_1B_1 上是否存在一点 P,使二面角 $P-BC-C_1$ 的余弦值为 $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$?若存在,求 $\dfrac{B_1P}{A_1B_1}$ 的值;若不存在,请说明理由.



【解析】(1)在平面 BB_1C_1C 中作 $BH\perp CC_1$ 于 H,



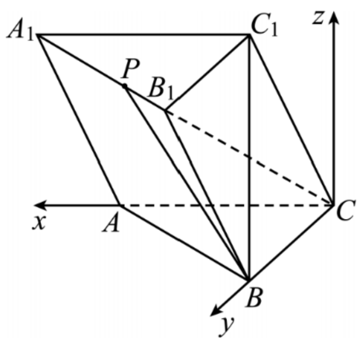
因为平面 $AA_1C_1C\perp$ 平面 BB_1C_1C ,且平面 $AA_1C_1C\cap$ 平面 $BB_1C_1C=CC_1$,

所以 $BH\perp$ 平面 AA_1C_1C ,从而 $AC\perp BH$ . ...4 分

在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $C_1B\perp$ 平面 ABC, $AC\subset$ 平面 ABC,所以 $AC\perp C_1B$.

又因为 $BC_1\cap BH=B$,所以 $AC\perp$ 平面 BB_1C_1C ,因此 $AC\perp BB_1$ ....7 分

(2)由(1)可知, CA,CB,BC_1 两两垂直,如图,以 C 为原点建立空间直角坐标系.



则 $A(2,0,0),B(0,2,0),C_1(0,2,2),B_1(0,4,2),\overrightarrow{B_1A_1}=\overrightarrow{BA}=(2,-2,0)$.

设 $\overrightarrow{B_1P}=\lambda\overrightarrow{B_1A_1}=(2\lambda,-2\lambda,0),\lambda\in[0,1]$,则 $P(2\lambda,4-2\lambda,2)$ . ...9 分

设平面 PBC 的一个法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$,因为 $\overrightarrow{BP}=(2\lambda,2-2\lambda,2),\overrightarrow{CB}=(0,2,0)$,

所以$\begin{cases}\vec{n_1}\cdot\overrightarrow{BP}=0,\\ \vec{n_1}\cdot\overrightarrow{CB}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}2\lambda x+(2-2\lambda)y+2z=0,\\ 2y=0,\end{cases}$则有$\begin{cases}z=-\lambda x,\\ y=0.\end{cases}$令$x=1$,得$\mathbf{n}_1=(1,0,-\lambda)$.10 分，

而平面BCC_1的一个法向量可以是$\vec{n_2}=(1,0,0)$，

则$\left|\cos<\vec{n_1},\vec{n_2}>\right|=\dfrac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}=\dfrac{(1,0,-\lambda)\cdot(1,0,0)}{\sqrt{1+\lambda^2}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$,解得$\lambda=\dfrac{1}{3}$,即 P 为棱$B_1A_1$的三等分点,$\dfrac{B_1P}{A_1B_1}=\dfrac{1}{3}$.......15 分

18.（17 分）已知函数$f(x)=\ln x-x+a$.（1）若直线$y=(e-1)x$与函数$f(x)$的图象相切，求实数a的值；

（2）若函数$g(x)=xf(x)$有两个极值点x_1和x_2，且$x_1<x_2$，证明：$x_2+x_1>1+\ln(\dfrac{x_1}{x_2})$.（$e$为自然对数的底数）.

(1) 解：设切点$(t,f(t))$,则$\dfrac{1}{t}-1=e-1$即$t=\dfrac{1}{e}$,$\therefore(e-1)\cdot\dfrac{1}{e}=1-\dfrac{1}{e}=-1-\dfrac{1}{e}+a$得$a=2$

(2) 证明：由$g(x)=xf(x)=x\ln x-x^2+ax$得$g'(x)=\ln x+1-2x+a=0$

$\Leftrightarrow a=2x-\ln x-1$记为$p(x)$,则$p'(x)=2-\dfrac{1}{x}>0\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2}$

$\therefore p(x)_{\min}=p(\dfrac{1}{2})=\ln 2$,而$\lim\limits_{x\to0^+}p(x)=+\infty$,$\lim\limits_{x\to+\infty}p(x)=+\infty$,

$\therefore a\in(\ln 2,+\infty)$,且$0<x_1<\dfrac{1}{2}<x_2$,且$a=2x_1-\ln x_1-1=2x_2-\ln x_2-1$

$\therefore\ln\dfrac{x_1}{x_2}=\ln x_1-\ln x_2=2x_1-2x_2$

要证:$x_1+x_2>1+\ln\dfrac{x_1}{x_2}$,只要证明：$x_1+x_2>1+2x_1-2x_2\Leftrightarrow x_1<3x_2-1\cdots(*)$

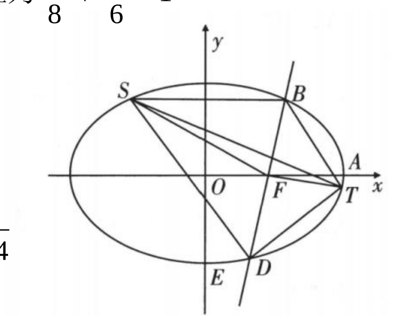
$\therefore 0<x_1<\dfrac{1}{2}<x_2$,$\therefore 3x_2-1=x_2+2x_2-1>x_2>x_1$,$\therefore(*)$成立，证毕

19.（17 分）阿波罗尼斯是古希腊著名数学家，他的主要研究成果集中在他的代表作《圆锥曲线》一书中.阿波罗尼斯圆是他的研究成果之一，指的是已知动点M与两定点Q,P的距离之比$\dfrac{|MQ|}{|MP|}=\lambda(\lambda>0,\lambda\neq1)$,$\lambda$是一个常数，那么动点$M$的轨迹就是阿波罗尼斯圆，圆心在直线$PQ$上.已知动点$M$的轨迹是阿波罗尼斯圆，其方程为$x^2+y^2=4$,定点分别为椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$的右焦点$F$与右顶点$A$,且椭圆$C$的离心率为$e=\dfrac{1}{2}$.

（1）求椭圆C的标准方程；（2）如图，过右焦点F斜率为$k(k>0)$的直线l与椭圆C相交于B,D(点B在x轴上方),点S,T是椭圆C上异于B,D的两点，SF平分$\angle BSD$,TF平分$\angle BTD$.（Ⅰ）求$\dfrac{|BF|}{|DF|}$的取值范围；

（Ⅱ）将点S、F、T看作一个阿波罗尼斯圆上的三点，若$\triangle SFT$外接圆的面积为$\dfrac{81\pi}{8}$,求直线l的方程.

解：（1）由已知得$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}即a=2c\\ \dfrac{a-2}{2-c}=\dfrac{a+2}{c+2}=\lambda\end{cases}$得$c=\sqrt{2},a=2\sqrt{2},b=\sqrt{6},\therefore$椭圆$C$的标准方程为$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{6}=1$



（2）（Ⅰ）$l_{BD}:x=ty+\sqrt{2}(t=\dfrac{1}{k}>0)$，代入椭圆方程得:$(3t^2+4)y^2+6\sqrt{2}ty-18=0$

$\therefore\begin{cases}y_B+y_D=-\dfrac{6\sqrt{2}t}{3t^2+4}\\ y_By_D=\dfrac{-18}{3t^2+4}\end{cases}$，设$m=\dfrac{|BF|}{|DF|}=-\dfrac{y_B}{y_D}<1$，则$\dfrac{(y_b+y_D)^2}{y_By_D}=-m+2-\dfrac{1}{m}=-\dfrac{4t^2}{3t^2+4}$

即$m+\dfrac{1}{m}-2=\dfrac{4}{3}(1-\dfrac{4}{3t^2+4})\in(0,\dfrac{4}{3})$得$m\in(\dfrac{1}{3},3)$，$\therefore\dfrac{|BF|}{|DF|}$的取值范围为$(\dfrac{1}{3},1)$

（Ⅱ）由内角平分线定理及（Ⅰ）得:$\dfrac{|SB|}{|SD|}=\dfrac{|BF|}{|FD|}=\dfrac{|TB|}{|TD|}=m$,

设$\triangle SFT$的外接圆的一条直径EF，则$\dfrac{|EB|}{|ED|}=\dfrac{y_E-y_B}{y_E-y_D}=m$得$y_E=\dfrac{y_B-my_D}{1-m}=\dfrac{2y_By_D}{y_B+y_D}=\dfrac{3\sqrt{2}}{t}$

由$\triangle SFT$的面积为$\dfrac{81\pi}{8}$得直径$2R=\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$

$\therefore|EF|=\sqrt{1+t^2}\,|y_E-y_F|=\sqrt{1+t^2}\cdot\dfrac{3\sqrt{2}}{t}=\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$得$t=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\therefore l$的方程为$y=\dfrac{\sqrt{5}}{2}x-\dfrac{\sqrt{10}}{2}$