二次函数、方程即不等式解答（1）

2022-10-30

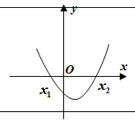
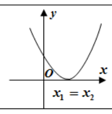
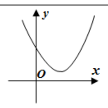
三、一次、二次不等式（组）的解法

1.一次不等式：$ax>b \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{b}{a}(a>0) \\ x<\dfrac{b}{a}(a<0) \\ a=0\begin{cases} b\ge 0,\text{无解} \\ b<0,\text{解为任意实数} \end{cases} \end{cases}$

2.一次不等式组：若$a>b$,则

$\begin{cases} x>a \\ x>b \end{cases} \Leftrightarrow x>a;\begin{cases} x<a \\ x<b \end{cases} \Leftrightarrow x<b;$

$\begin{cases} x>a \\ x<b \end{cases} \Leftrightarrow x\in\Phi;\begin{cases} x<a \\ x>b \end{cases} \Leftrightarrow b<x<a$

$\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$y=ax^2+bx+c$（$a>0$）的图象			
$ax^2+bx+c=0$的根	$x_1,x_2(x_1<x_2)$	$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	没有实根
$ax^2+bx+c>0$	$\{x\mid x<x_1,\text{或}x>x_2\}$	$\{x\mid x\ne-\dfrac{b}{2a},x\in R\}$	R
$ax^2+bx+c\ge0$	$\{x\mid x\le x_1,\text{或}x\ge x_2\}$	R	R
$ax^2+bx+c<0$	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	Φ	Φ
$ax^2+bx+c\le0$	$\{x\mid x_1\le x\le x_2\}$	$\{-\dfrac{b}{2a}\}$	Φ

（08竞赛）设$f(x)$在$[0,1]$上有定义，要使函数$f(x-a)+f(x+a)$有定义，则a的取值范围为（　　）

$A.(-\infty,-\dfrac{1}{2})$　$B.[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}]$　$C.(\dfrac{1}{2},+\infty)$　$D.(-\infty,-\dfrac{1}{2}]\cup[\dfrac{1}{2},+\infty)$　　B

(1001 会考)若不存在整数 x 满足不等式 $(kx-k^2-4)(x-4)<0$, 则实数 k 的取值范围是____________.$1\le k\le 4$

（11竞赛）已知$a\in[-1,1]$,则$x^2+(a-4)x+4-2a>0$的解集为（）　C

$A.(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$　$B.(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$　$C.(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$　$D.(1,3)$

（1704学考）已知函数$f(x)=x^2+ax+b(a,b\in R)$,记集合$A=\{x\in R\mid f(x)\le0\},B=\{x\in R\mid f(f(x)+1)\le0\}$,

若$A=B\ne\Phi$，则实数a的取值范围为（　）$A.[-4,4]$　$B.[-2,2]$　$C.[-2,0]$　$D.[0,4]$

key:设$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x_1\le x_2)$

则$A=\{x\mid x_1\le x\le x_2\},B=\{x\mid x_1-1\le(x-x_1)(x-x_2)\le x_2-1\}$

$\therefore\begin{cases} x_2-1=0 \\ x_1-1\le\dfrac{-(x_1-x_2)^2}{4} \end{cases}$ 得$-3\le x_1\le1,\therefore a=-(1+x_1)\in[-2,2]$

变式（1）①已知集合$A=\{x|\dfrac{x+1}{x-2}\ge 0\}, B=\{x|x^2-(2a-1)x+3-2a<0\}$.

若$(\complement_R A)\cap B=B$，则$a$的取值范围为______. $[-\sqrt{3}-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}]$

$(\complement_R A)\cup B=B$,则实数$a$的取值范围为______. Φ

② 设$a\in R$,集合$S=\{x|2ax^2-x\le 0\}, T=\{x|4ax^2-4a(1-2a)x+1\ge 0\}$，若$S\bigcup T=R$（$R$为实数集），

则实数a的取值范围为_______. $[0,1]$

$key2:$设$f(x)=4ax^2-4a(1-2a)x+1$,当$a=0$时，$S=[0,+\infty), T=R, \therefore S\cup T=R;$

当$a<0$时, $S=(-\infty,\dfrac{1}{2a}]\cup[0,+\infty)$, 如图（1），则有$\begin{cases} f(0)=1\ge 0 \\ f(\dfrac{1}{2a})=4a-\dfrac{1}{a}-1\ge 0 \\ \Delta=16a^2(1-2a)^2-16a>0 \end{cases}$ 无解

当$a>0$时，$S=[0,\dfrac{1}{2a}]$，如图（2），

则有$\begin{cases} f(0)=1\ge 0 \\ f(\dfrac{1}{2a})=4a-\dfrac{1}{a}-1\ge 0 \\ 0<\dfrac{1-2a}{2}<\dfrac{1}{2a} \\ \Delta=16a^2(1-2a)^2-16a>0 \end{cases}$ 即无解，$or, \Delta=16a^2(1-2a)^2-16a\le 0$即$0<a\le 1,$

综上：a的取值范围为$[0,1]$

（2）已知函数 $f(x)=ax^2+x-b(a>0,b>0)$,不等式$f(x)>0$的解集为P,集合$Q=\{x|-2-t<x<-2+t\}$.

若对于任意正数t, $P\cap Q\ne\Phi$,则$\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}$的最大值为_______. $\dfrac{1}{2}$

$key:$ 设 $p:\forall t>0, P\cap Q\neq\Phi$，则 $\neg p:\exists t>0, P\cap Q=\Phi$

（数轴解法）由 $f(x)>0\Leftrightarrow x<\dfrac{-1-\sqrt{1+4ab}}{2a}, or, x>\dfrac{-1+\sqrt{1+4ab}}{2a}$

$\therefore \dfrac{-1-\sqrt{1+4ab}}{2a}\le -2-t<t-2\le\dfrac{-1+\sqrt{1+4ab}}{2a}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0<t\le\dfrac{4a-1+\sqrt{1+4ab}}{2a}\\ 0<t\le\dfrac{1-4a+\sqrt{1+4ab}}{2a}\end{cases}\Leftrightarrow 0<t<-|4a-1|+\sqrt{1+4ab}\Leftrightarrow\sqrt{1+4ab}>|4a-1|\Leftrightarrow b>4a-2$$

$\therefore b\le 4a-2(a>\dfrac{1}{2})$,

$\therefore$（分母不动分子用分母表示）$\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\le\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{4(a-\frac{1}{2})}=\dfrac{2(a-(a-\frac{1}{2}))}{a}-\dfrac{2(a-(a-\frac{1}{2}))}{4(a-\frac{1}{2})}$

$=\dfrac{3}{2}-2(\dfrac{a-\frac{1}{2}}{a}+\dfrac{a}{4(a-\frac{1}{2})})\ge\dfrac{3}{2}-2\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}$

（3）①已知函数 $f(x)=x^2+ax+b$，集合 $A=\{x\,|\,f(x)\le 0\}$，集合 $B=\{x\,|\,f(f(x))\le\dfrac{5}{4}\}$，若 $A=B\neq\Phi$，

则实数 a 的取值范围是（　）A．$[\sqrt{5},5]$　　B．$[-1,5]$　　C．$[\sqrt{5},3]$　　D．$[-1,3]$

$key: f(x)\le 0\Leftrightarrow x_1\le x\le x_2$

$f(f(x))\le\dfrac{5}{4}\Leftrightarrow t_1\le f(x)\le t_2$（其中 $t_1\le-\dfrac{a^2}{4}+b, t_2=0$ 即 $b=\dfrac{5}{4}$）

$\therefore -a\le-\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{5}{4}$ 即 $-1\le a\le 5$，而 $a^2-4b=a^2-5\ge 0,\therefore a\in[\sqrt{5},5]$