# 一元二次函数、方程及不等式解答（3）

2022-11-13

16. 函数 $f(x)=x^2+ax+\frac{4a}{x}+\frac{16}{x^2}-8$， $x\in[1,4],|f(x)|$ 最大值为 $M(a)$， 则 $M(a)$ 的最小值是________32

$key: f(x)=(x+\frac{4}{x})^2+a(x+\frac{4}{x})-16$，令$t=x+\frac{4}{x}\in[4,5], f(x)=t^2+at-16=g(t)$

（三点法）$g(4)=4a, g(5)=5a+9, g(\frac{9}{2})=\frac{9}{2}a-\frac{17}{4}, \therefore g(4)+g(5)-2f(\frac{9}{2})=9+\frac{17}{2}=\frac{1}{2},$

$\therefore \frac{1}{2}=|f(4)+f(5)-2f(\frac{9}{2})|\le|f(4)|+|f(5)|+2|f(\frac{9}{2})|\le 4M(a), \therefore M(a)\ge\frac{1}{8}$

（由于没考虑等号成立条件，出错）

$key2:$当$-\frac{a}{2}\le 4$即$a\ge -8$时，$M(a)=\max\{-g(4),g(5)\}=\max\{-4a,5a+9\}\ge 32;$

当$-\frac{a}{2}\ge 5$即$a\le -10$时，$M(a)=\max\{4a,-5a-9\}\ge 41$

当$-10<a<-8$时，$M(a)=\max\{\max\{4a,5a+9\},\frac{a^2}{4}+16\}\ge 32$

（2）①已知函数$f(x)=x^3+(a+2)x^2+bx+c(a,b,c\in R)$,若存在异于$a$的实数$m,n(m\ne n)$，使得

$f(m)=f(n)=f(a)$,则$b$的取值范围为（ ） $A.(-\infty,1)$ $B.(-\infty,1]$ $C.(\frac{4}{5},+\infty)$ $D.(\frac{4}{5},1)$

$key:$（交点式）由已知设$f(x)-k=(x-a)(x-m)(x-n)$,

$$\therefore\begin{cases}-a-m-n=a+2\\ am+an+mn=b\\ -amn+k=c\end{cases} 得\begin{cases}m+n=-2a-2\\ mn=b+2a^2+2a\end{cases},$$

$\therefore m,n(m\ne n,m\ne a,n\ne a)$是关于$t$的方程：$t^2+2(a+1)t+b+2a^2+2a=0$的两相异根，

$$\therefore\begin{cases}\Delta=4(a^2+2a+1)-4(b+2a^2+2a)>0即b<1-a^2\\ a^2+2a(a+1)+b+2a^2+2a=5a^2+4a+b\ne 0即b\ne -5(a+\frac{2}{5})^2+\frac{4}{5}\end{cases},\therefore \frac{4}{5}<b<1$$

② 设函数$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\ne 0)$，若$0<2f(2)=3f(3)=4f(4)<1$,则$f(1)+f(5)$的取值范围是（ ）

$A.(0,1)$ $B.(1,2)$ $C.(2,3)$ $D.(3,4)$

$key:$设$xf(x)-m=a(x-2)(x-3)(x-4)(x-e)$（其中$m\in(0,1)$）

而$xf(x)-m=ax^4+bx^3+cx^2+dx-m, \therefore 24ae=-m$

$\therefore f(1)+f(5)=-6a(1-e)+m+\frac{1}{5}(6a(5-e)+m)=\frac{24ae}{5}+\frac{6m}{5}=m\in(0,1)$

（2017 学考）已知 1 是函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a>b>c)$的一个零点，若存在实数$x_0$，使得 $f(x_0)<0$，

则$f(x)$的另一个零点可能是 （B ） $A.x_0-3$ $B.x_0-\frac{1}{2}$ $C.x_0+\frac{3}{2}$ $D.x_0+2$

$key: f(1)=a+b+c=0$得$2a+c>1>a+2c, \therefore \frac{c}{a}\in(-2,-\frac{1}{2}), \because f(x_0)<0, \therefore \frac{c}{a}<x_0<1$

且$f(x)=a(x-1)(x-\frac{c}{a}), \therefore x_0-3<-2<\frac{c}{a}<x_0<1,$

（14竞赛）已知$b,c\in R,$二次函数$f(x)=x^2+bx+c$在$(0,1)$上与$x$轴有两个不同的交点，求$c^2+(1+b)c$的取值范围.

$key:-b=\alpha+\beta,c=\alpha\beta(\alpha,\beta\in(0,1),\alpha\neq\beta)$

$\therefore c^2+(1+b)c=\alpha(1-\alpha)\cdot\beta(1-\beta)\in(0,\dfrac{1}{16})$

（2017浙江竞赛）设$f(x)=x^2+ax+b$.若$f(x)=0$在$[0,1]$中有两个实数根，则$a^2-2b$的取值范围为____. $[0,2]$

若$f(x)$在$[0,1]$上有零点，则$3a+b$的取值范围为________.

$key:$设$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(\alpha\in[0,1])$

则$\alpha+\beta=-a,\alpha\beta=b$

$\therefore 3a+b=-3(\alpha+\beta)+\alpha\beta=(\alpha-3)\beta-3\alpha\in(-\infty,+\infty)$

变式 1（1）已知函数 $f(x)=ax^2+4x+b(a<0,a,b\in R)$，设关于 $x$ 的方程 $f(x)=0$ 的两实根为$x_1$、 $x_2$，方程 $f(x)=x$ 的两实根为$\alpha$ 、 $\beta$ .若 $\alpha<1<\beta<2$，则 $(x_1+1)(x_2+1)$的取值范围为________.$(-\infty,7)$

$key1:g(x)=f(x)-x=a(x-\alpha)(x-\beta),\therefore f(x)=ax^2-[a(\alpha+\beta)-1]x+a\alpha\beta,$

$$\therefore\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{a(\alpha+\beta)-1}{a}=\alpha+\beta-\dfrac{1}{a}=\dfrac{4}{3}(\alpha+\beta)\\ x_1x_2=\alpha\beta\end{cases}$$

$\therefore(x_1+1)(x_2+1)=\alpha\beta+\dfrac{4}{3}(\alpha+\beta)+1=(\alpha+\dfrac{4}{3})(\beta+\dfrac{4}{3})-\dfrac{7}{9}<\dfrac{7}{3}(\beta+\dfrac{4}{3})-\dfrac{7}{9}<\dfrac{70}{9}-\dfrac{7}{9}=7$得证

$$key2:\begin{cases}a+b+3<0\cdots①\\4a+b+6>0\cdots②\end{cases},①\cdot(-\lambda)+②得:(4-\lambda)a+(1-\lambda)b+6-3\lambda>0(\lambda>0)(其中\lambda=\frac{10}{7})$$

即$\dfrac{18}{7}a-\dfrac{3}{7}b+\dfrac{12}{7}>0$即$\dfrac{b-4}{a}<6,\therefore(x_1+1)(x_2+1)=\dfrac{b-4}{a}+1<7$

$$key3:\begin{cases}a+b+3=a+b-4<-7\cdots①\\4a+b-4>-10\cdots②\end{cases},①\cdot(-10)+②\cdot7得:18a-3(b-4)>0即\frac{b-4}{a}<6,$$

$\therefore(x_1+1)(x_2+1)=\dfrac{b-4}{a}+1<7$

（2）①已知实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实根，则使得 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq ra^2$ 成立的正实数 $r$ 的最大值为____________.$\dfrac{9}{8}$

$key:$由$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq ra^2\Leftrightarrow r\leq(1-p)^2+(p-q)^2+(1-q)^2$(其中$p=\dfrac{b}{a},q=\dfrac{c}{a}$)

则$ax^2+bx+c=0\Leftrightarrow x^2+px+q=0$的两根为$\alpha,\beta$，其中$-p=\alpha+\beta,q=\alpha\beta,$

$\therefore(1-p)^2+(p-q)^2+(1-q)^2=(1+\alpha+\beta)^2+(\alpha+\beta+\alpha\beta)^2+(\alpha\beta-1)^2$

（主元）$=2(\alpha^2+\alpha+1)(\beta^2+\beta+1)=2[(\alpha+\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}][(\beta+\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}]>\dfrac{9}{8},\therefore r_{\max}=\dfrac{9}{8}$

②若函数 $f(x)=x^2-ax+b(a,b\in R)$ 在区间$[1,2]$上有零点，则 $a^2+2b^2-4b$ 的最小值为______.

$key$:由已知设$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(1\le\alpha\le 2,\beta\in R)$

则$a=\alpha+\beta,b=\alpha\beta,\therefore a^2+2b^2-4b=(\alpha+\beta)^2+2\alpha^2\beta^2-4\alpha\beta=(1+2\alpha^2)\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2$

$\ge\dfrac{4(1+2\alpha^2)\cdot\alpha^2-4\alpha^2}{4(1+2\alpha^2)}$（令$t=2\alpha^2+1\in[3,9]$,则$\alpha^2=\dfrac{t-1}{2}$）

$=\dfrac{t\cdot\dfrac{t-1}{2}-\dfrac{t-1}{2}}{t}=\dfrac{1}{2}(t+\dfrac{1}{t}-1)\ge\dfrac{2}{3}$（在$t\in[3,9]$上递增）,$\therefore$ 所求最小值为$\dfrac{2}{3}$.

③已知二次函数 $f(x)=ax^2+x+c(a,c\in R)$在区间$[1,2]$上有零点，则$4a^2+c^2$的最小值为______. $\dfrac{4}{5}$

$key$: $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)(\alpha\in[1,2])$

则$\begin{cases}\alpha+\beta=-\dfrac{1}{a}\\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a}\end{cases},\therefore 4a^2+c^2=4a^2+a^2\alpha^2(-\dfrac{1}{a}-\alpha)^2=4a^2+\alpha^2(1+2a\alpha+a^2\alpha^2)$

$=(4+\alpha^4)a^2+2\alpha^3a+\alpha^2\ge\dfrac{4(4+\alpha^2)\alpha^2-4\alpha^6}{4(4+\alpha^4)}=\dfrac{4\alpha^2}{4+\alpha^4}=\dfrac{4}{\dfrac{4}{\alpha^2}+\alpha^2}\ge\dfrac{4}{5}$

④已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+a$,若$f(x)$在$(0,2)$上有两个零点，则$\dfrac{bf(1)}{af(-1)}$的取值范围为____. $(0,\dfrac{5}{18})$

$key$: $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$,且$0<\alpha<\beta<2,-\dfrac{b}{a}=\alpha+\beta,\alpha\beta=1,\alpha\in(\dfrac{1}{2},1)$

则$\dfrac{bf(1)}{af(-1)}=\dfrac{-a(\alpha+\dfrac{1}{\alpha})\cdot a(1-\alpha)(1-\dfrac{1}{\alpha})}{a^2(-1-\alpha)(-1-\dfrac{1}{\alpha})}=\dfrac{(\alpha^2+1)(1-\alpha)^2}{\alpha(1+\alpha)^2}=\dfrac{(\alpha+\dfrac{1}{\alpha})(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}-2)}{\alpha+\dfrac{1}{\alpha}+2}$（令$t=\alpha+\dfrac{1}{\alpha}+2\in(4,\dfrac{9}{2})$）

$=\dfrac{(t-2)(t-4)}{t}=t+\dfrac{8}{t}-6\in(0,\dfrac{5}{18})$

变式 2．已知二次函数 $f(x)=px^2+qx+r(p\ne 0,p,q,r\in R)$ 有零点，且 $p+q+r=1$，则

$\max\{\min\{p,q,r\}\}=$_______, $\min\{\max\{p,q,r\}\}=$________.

$key$: $q^2\ge 4pr$,且$p+q+r=1$,

由$1=p+r+q\ge p+r+2\sqrt{pr}\ge 4m,\therefore m\le\dfrac{1}{4}$

若$p=M$，则$q^2\ge 4pr\ge 4qr,\therefore r\le\dfrac{q}{4}\le\dfrac{p}{4},\therefore 1=p+q+r\le p+p+\dfrac{p}{4}=\dfrac{9p}{4},\therefore p\ge\dfrac{4}{9}$

若$q=M$，则$(q-p)(q-r)\ge 0,\therefore q^2+pr\ge q(p+r),\therefore\dfrac{5}{4}q^2\ge q(p+r),\therefore\dfrac{5}{4}q\ge p+r,\therefore 1=p+q+r\le\dfrac{9}{4}q$即$q\ge\dfrac{4}{9}$

若$r=M$，则$q^2\ge 4pr\ge 4pq,\therefore p\le\dfrac{q}{4}\le\dfrac{r}{4},\therefore 1=p+q+r\le\dfrac{r}{4}+r+r=\dfrac{9r}{4},\therefore r\ge\dfrac{4}{9}$

（2006）（16）设 $f(x)=3ax^2+2bx+c$ ，若 $a+b+c=0, f(0)>0, f(1)>0$ ，求证：

（I） $a>0$ 且 $-2<\frac{b}{a}<-1$；（II）方程 $f(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内有两个实根.

证明：（1）由 $\begin{cases} a+b+c=0 \\ f(0)=c=-a-b>0 \\ f(1)=3a+2b+c=2a+b>0 \end{cases}$ 得 $-a-b+(2a+b)=a>0$

$\therefore -1-\frac{b}{a}>0$, 且 $2+\frac{b}{a}>0$ 即 $-2<\frac{b}{a}<-1$, 得证

（2）由 $f(x)=3ax^2+2bx-a-b=0(x\in(0,1))\Leftrightarrow g(x)=3x^2+2mx-1-m=0(x\in(0,1)($其中$m=\frac{b}{a}\in(-2,-1))$

而 $\begin{cases} g(0)=-1-m>0 \\ g(1)=2+m>0 \\ -\frac{m}{3}\in(\frac{1}{3},\frac{2}{3})\subseteq(0,1) \\ \Delta=4m^2+12(m+1)=4(m^2+3m+3)>0 \end{cases}$ $,\therefore g(x)=0$ 的两个根都在 $(0,1)$ 内，得证

（15 竞赛） 设 $a,b\in R$, 函数 $f(x)=ax^2+b(x+1)-2$，若对任意实数 $b$，方程 $f(x)=x$ 有两个相异实根，

求实数 $a$ 的取值范围.

$key$: 由 $f(x)=x\Leftrightarrow ax^2+(b-1)x+b-2=0$

$\therefore \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta=(b-1)^2-4a(b-2)=b^2-(2+4a)b+1+8a>0 \end{cases}$

$\therefore \Delta_1=4(4a^2+4a+1)-4(8a+1)<0$ 得 $0<a<4$ 即为所求的

（2015 浙江文科）设函数 $f(x)=x^2+ax+b,(a,b\in R)$. 已知函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上存在零点，$0\le b-2a\le 1$，则

$b$ 的取值范围为________.

解：由已知设 $f(x)=(x-s)(x-t)(s\in[-1,1])$，当 $s=0$ 时，$b=0$;

当 $x\neq 0$ 时，$f(x)=(x-s)(x-\frac{b}{s}), a=-s-\frac{b}{s}, \therefore 0\le b+2s+\frac{2b}{s}\le 1$

即 $\begin{cases} 0<s\le 1 \\ -2(s+2+\frac{4}{s+2})+8=-\frac{2s^2}{s+2}\le b\le \frac{s-2s^2}{s+2}=-2(s+2+\frac{5}{s+2})+9 \end{cases}$,

$or, \begin{cases} -1\le s<0 \\ -2(s+2+\frac{5}{s+2})+9=\frac{s-2s^2}{s+2}\le b\le -\frac{2s^2}{s+2}=-2(s+2+\frac{4}{s+2})+8 \end{cases}$

令 $t=s+2$，则存在 $t\in(2,3]$, 使得 $-2(t+\frac{4}{t})+8\le b\le -2(t+\frac{5}{t})+9$,

或存在 $t\in[1,2)$，使得 $-2(t+\frac{5}{t})+9\le b\le -2(t+\frac{4}{t})+8$

$\therefore -\frac{2}{3}\le b\le 9-4\sqrt{5}, or, -3\le b\le 0, \therefore b$ 的取值范围为 $[-3,9-4\sqrt{5}]$

变式 1（1）已知函数$f(x)=2ax^2+2x-3-a(a\in R)$.

若$f(x)$在区间$[-1,1]$上有且只有一个零点，则$a$的取值范围为__________; $[1,5)\cup\{-\frac{3+\sqrt{7}}{2}\}$

若$f(x)$在区间$[-1,1]$上有两个零点，则$a$的取值范围为____. $(-\infty,-\frac{3+\sqrt{7}}{2})\cup[5,+\infty)$

$key1$:①$f(-1)=a-5=0$即$a=5$时，另一零点$x=\frac{3+a}{2a}=\frac{4}{5}\in[-1,1]$

$f(1)=a-1$即$a=1$时，另一个零点$x=\frac{-a-3}{2a}=-2\notin[-1,1]$

②当$\begin{cases} a>0,\text{且}f(-1)=a-5>0,\text{且}f(1)=a-1>0\text{即}a>5 \\ -1<-\frac{1}{2a}<1\text{即}a>\frac{1}{2},or,a<-\frac{1}{2} \\ \Delta=4+8a(3+a)>0\text{即}a<-\frac{3+\sqrt{7}}{2},or,a>\frac{-3+\sqrt{7}}{2}\end{cases}$, $or\begin{cases} a<0,\text{且}f(-1)=a-5<0,\text{且}f(1)=a-1<0\text{即}a<0 \\ -1<-\frac{1}{2a}<1\text{即}a>\frac{1}{2},or,a<-\frac{1}{2} \\ \Delta=4+8a(3+a)>0\text{即}a<-\frac{3+\sqrt{7}}{2},or,a>\frac{-3+\sqrt{7}}{2}\end{cases}$,

即$a>5,or,a<\frac{-3-\sqrt{7}}{2}$有2个零点

③当$f(-1)f(1)<0,or,\begin{cases} f(-1)\cdot f(1)=(a-1)(a-5)>0\text{即}a<1,or,a>5 \\ -1<-\frac{1}{2a}<1\text{即}a>\frac{1}{2},or,a<-\frac{1}{2} \\ \Delta=4+8a(3+a)=0\text{即}a=-\frac{3+\sqrt{7}}{2},or,a=\frac{-3+\sqrt{7}}{2}\end{cases}$ 即$a=-\frac{3+\sqrt{7}}{2},or,1<a<5$有1个零点

$\therefore a\le-\frac{3+\sqrt{7}}{2},or,a\ge1$即为所求的

$key2$: $f(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{a}=\frac{2x^2-1}{3-2x}(t=3-2x\in[1,5])=\frac{t^2-6t+7}{2t}=\frac{1}{2}(t+\frac{7}{t}-6)\in[\sqrt{7}-3,0)\cup(0,1]$

$\therefore a\in(-\infty,-\frac{3+\sqrt{7}}{2}]\cup[1,+\infty)$即为所求的

（2）① 设$x_1,x_2$是$a^2x^2+bx+1=0$的两实根，$x_3,x_4$是$ax^2-bx-1=0$的两实根.

若$x_3<x_1<x_2<x_4$，则实数$a$的取值范围为______; $(-\infty,-1)$

若$x_1<x_3<x_2<x_4$，则实数$a$的取值范围为______. $\Phi$

$key$: 设$f(x)=a^2x^2+bx+1, g(x)=ax^2-bx-1$

若$x_3<x_1<x_2<x_4$,则$\begin{cases} a>0, \\ g(x_1)=ax_1^2-bx_1-1=(a+a^2)x_1^2<0,\text{无解} \\ g(x_2)=(a+a^2)x_2^2<0\end{cases}$

$$or,\begin{cases}a<0\\ g(x_1)=ax_1^2+bx_1+1=(a+a^2)x_1^2>0\text{得}a<-1\\ g(x_2)=(a+a^2)x_2^2>0\end{cases}$$

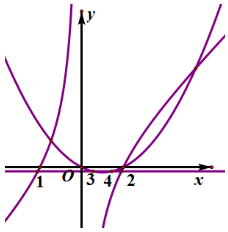
若$x_1<x_3<x_2<x_4$，则$\begin{cases}f(x_3)=a^2x_3^2+bx_3+1=(a^2+a)x_1^2<0\\ f(x_4)=(a^2+a)x_2^2>0\end{cases}$无解

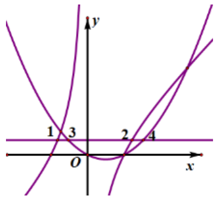
② 设关于$x$的方程$x^2-ax-1=0$和$x^2-x-2a=0$的实根分别为$x_1,x_2$和$x_3,x_4$.

若$x_1<x_3<x_4<x_2$，则实数$a$的取值范围为_______；

若$x_1<x_3<x_2<x_4$，则实数$a$的取值范围为_______.

$key:a=x-\dfrac{1}{x},a=\dfrac{x^2-x}{2}$,由$\dfrac{x^2-1}{x}=\dfrac{x^2-x}{2}$得$x=1,1\pm\sqrt{3}$,如图，得



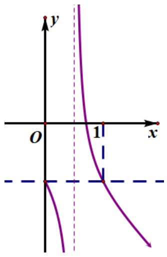




若$x_1<x_3<x_4<x_2$,则$a\in(-\dfrac{1}{8},0)$

若$x_1<x_3<x_2<x_4$，则$a\in(0,\dfrac{3-\sqrt{3}}{2})$

（3）设函数$f(x)=2ax^2+2bx$,若存在实数$x_0\in(0,t)$，使得对任意不为零的实数$a,b$均有$f(x_0)=a+b$成立，

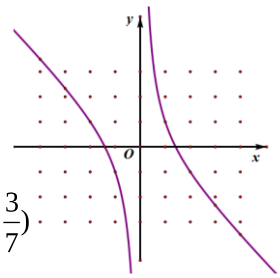
则$t$的取值范围为________. $(1,+\infty)$




$key2$:（全分离）$m=\dfrac{1-2x^2}{2x-1}$记为$g(x)(x>0)$,如图，得$t>1$

（4）已知函数$f(x)=ax^2+x-2a$的两个零点分别为$x_1,x_2$,若在区间$(x_1,x_2)$内恰有四个整数，

则实数$a$的取值范围是____.




$key:f(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{a}=\dfrac{2}{x}-x=g(x)$,

而$g(1)=1=g(-2),g(-3)=\dfrac{7}{3},g(-4)=\dfrac{7}{2},g(-5)=\dfrac{7}{3},\therefore\dfrac{1}{a}\in(\dfrac{7}{2},\dfrac{3}{3}]$即$a\in[\dfrac{2}{7},\dfrac{3}{7})$

$g(-1)=-1,g(-2)=-1,g(3)=-\dfrac{7}{3},g(4)=-\dfrac{7}{2},\therefore\dfrac{1}{a}\in[-\dfrac{7}{2},-\dfrac{7}{3})$即$a\in(-\dfrac{3}{7},-\dfrac{2}{7}],\therefore a\in(-\dfrac{3}{7},-\dfrac{2}{7}]\cup[\dfrac{2}{7},\dfrac{3}{7})$

（5）已知函数$f(x)=x^2-(k+1)^2x+1$,若存在$x_1\in[k,k+1],x_2\in[k+2,k+4]$,使得$f(x_1)=f(x_2)$,则实数$k$的取值范围是___________.$[-2,-1]\cup[1,2]$

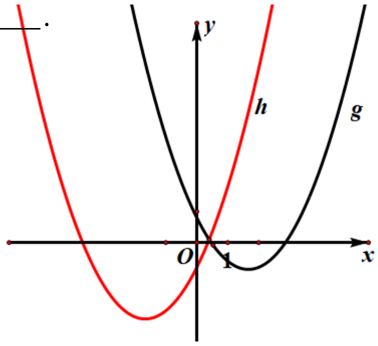
$key$:（因式分解）$f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)(x_1+x_2-(k+1)^2)=0\Leftrightarrow x_1+x_2=(k+1)^2$

$\therefore 2k+2\le(k+1)^2\le 2k+5$得$k\in[-2,-1]\cup[1,2]$

2（1）已知函数$f(x)=ax^2-|2x-b|$，其中$a>0,b\in R$.若对任意的实数$b\in[\frac{1}{2},1]$，总存在实数$a$，使得函数$f(x)$

（ⅰ）在$x\in R$上有四个不同的零点，则实数$a$的取值范围为_____________；

（ⅱ）在$x\in[m,2]$上有四个不同的零点，则实数$m$的取值范围为__________.




$key: f(x)=\min\{ax^2-2x+b, ax^2+2x-b\}$，

则$\Delta_1=4-4ab>0$且$\Delta_2=4+4ab>0$得$0<a<1$

如图，有$f(\frac{b}{2})=\frac{ab^2}{4}>0, \therefore a\in(0,1)$

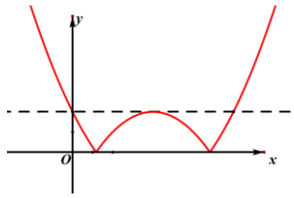
（ⅱ）$\begin{cases}\frac{1}{a}<2\\ 4a-4+b\ge 0\end{cases}$ 得$\frac{7}{8}\le a<1$

且$\exists a\in[\frac{7}{8},1), \forall b\in[\frac{1}{2},1], \begin{cases}-\frac{1}{a}>m\\ am^2+2m-b\ge 0\end{cases}$ 成立，得$\begin{cases}m<-1\\ m^2+2m-1\ge 0\end{cases}$ 即$m\le -1-\sqrt{2}$

（2）已知函数$f(x)=|x^2+mx+\frac{1}{2}|(x\in R)$，且$y=f(x)$在$x\in[0,2]$上的最大值为$\frac{1}{2}$，若函数$g(x)=f(x)-ax^2$

有三个不同的零点，则实数$a$的取值范围为______.

$key$:（必要条件）$|x^2+mx+\frac{1}{2}|\le\frac{1}{2}$对$x\in[0,2]$恒成立$\Leftrightarrow -x-\frac{1}{x}\le m\le -x$对$0<x\le 2$恒成立




$\therefore -2\le m\le -2$即$m=-2$

$\therefore g(x)=|x^2-2x+\frac{1}{2}|-ax^2=0\Leftrightarrow|1-\frac{2}{x}+\frac{1}{2x^2}|=a$

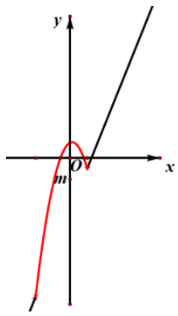
令$t=\frac{1}{x}$，则$|\frac{1}{2}t^2-2t+1|=a$有三个零点，如图，则有$a=1$

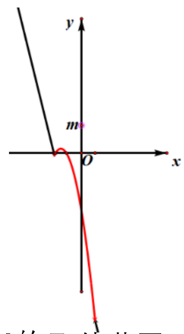
（3）已知函数$f(x)=x^2+x-2$，若函数$g(x)=|f(x)|-f(x)-2mx-2m^2$有三个的零点，则 $m$的取值范围为（A ）

$A.(\frac{1-2\sqrt{7}}{3},-1)\cup(2,\frac{1+2\sqrt{7}}{3})$ $B.(\frac{1-2\sqrt{7}}{3},\frac{1+2\sqrt{7}}{3})$ $C.(\frac{1-4\sqrt{2}}{3},-1)\cup(2,\frac{1-4\sqrt{2}}{3})$ $D.(\frac{1-4\sqrt{2}}{3},\frac{1+4\sqrt{2}}{3})$

$key: g(x)=\begin{cases}-2mx-2m^2, x\le -2, or, x\ge 1,\\ -2x^2-2(m+1)x+4-2m^2, -2<x<1,\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}\Delta=4(m^2+2m+1)+16(2-m^2)>0\\ g(-2)=-2m^2+4m<0\\ g(1)=-2m^2-2m<0\end{cases}\Leftrightarrow\frac{1-2\sqrt{7}}{3}<m<-1, or, 2<m<\frac{1+2\sqrt{7}}{3}$



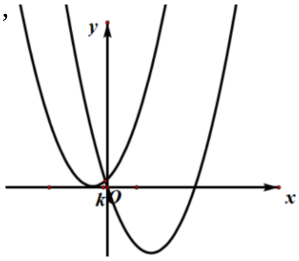



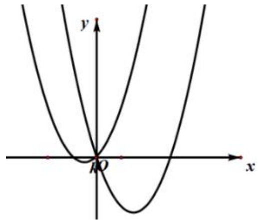

当$\frac{1-2\sqrt{7}}{3}<m<-1$时，如图，符合；当$2<m<\frac{1+2\sqrt{7}}{3}$时，如图，符合.

（4）已知函数$f(x)=x^2-x-k, g(x)=2x-k$ 若函数$h(x)=f(x)-|g(x)|$恰有三个零点，则实数$k$的取值范围

为_______.$\{-\frac{1}{8},0\}$

解：$h(x)=\min\{x^2-3x, x^2+x-2k\}$，则$\Delta=1+8k\geq 0$即$k\geq -\frac{1}{8}$，




当$k=-\frac{1}{8}$时，如图，符合题意；

当$k>-\frac{1}{8}$时，如图，$-2k=0$即$k=0$