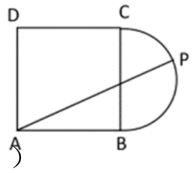
一、选择题:本大题共 8 小题,每一小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知复数 z 在复平面内的对应点为 $(1,1)$，则 $z+\dfrac{1}{z}$ 的虚部为（　　）A. $\dfrac{1}{2}i$　B. $\dfrac{3}{2}$　C. $\dfrac{1}{2}$　D. $\dfrac{3}{2}i$

2. 已知 $x\in R$，则“$x^3>8$”是“$|x|>2$”的（　　）

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件　C. 充要条件　D. 既不充分也不必要条件

3.基础建设对社会经济效益产生巨大的作用，某市投入 a 亿元进行基础建设，t 年后产生 $f(t)=ae^{\lambda t}$ 亿元社会经济效益．若该市投资基础建设 4 年后产生的社会经济效益是投资额的 2 倍，且再过 t 年，该项投资产生的社会经济效益是投资额的 8 倍，则 $t=$（　　）A. 4　B. 8 C. 12　D. 16



4. 如图，$ABCD$ 是边长 2 的正方形，P 为半圆弧 BC 上的动点（含端点）则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$ 的取值范围为（　C　）A. $[2,6]$　B. $[2,3]$　C. $[4,6]$　D. $[4,8]$

5. 已知函数 $f(x)=2\sin x-e^x+e^{-x}$，则关于 x 的不等式 $f(-4+x^2)+f(3x)>0$ 的解集为（　　）

A. $(-4,1)$　B. $(-1,4)$　C. $(-\infty,-4)\cup(1,+\infty)$　D. $[-1,4]$

6. 已知 $\alpha,\beta\in(0,\dfrac{\pi}{4})$，$\sin\alpha\cos(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha)-\sin(\dfrac{\pi}{2}+\alpha)\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$，且 $3\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta)$，则 $\alpha+\beta$ 的值为（　　）

A. $\dfrac{\pi}{12}$　B. $\dfrac{\pi}{6}$　C. $\dfrac{\pi}{4}$　D. $\dfrac{\pi}{3}$

7. 已知边长为 $\sqrt{3}$ 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，点 Q 为 $\triangle A_1BC_1$ 内一个动点，且满足 $QB_1=\sqrt{2}$，则点 Q 的轨迹长度为（　　）A. $\dfrac{\pi}{2}$　B. π　C. $\dfrac{3\pi}{2}$　D. 2π

8. 设无穷等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，集合 $T=\{t|\ t=\sin a_n,n\in N^*\}$.则（　　）

A. T 不可能有无数个元素　B. 当且仅当 $d=0$ 时，T 只有 1 个元素

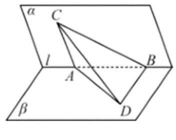
C. 当 T 只有 2 个元素时，这 2 个元素的乘积有可能为 $\dfrac{1}{2}$

D. 当 $d=\dfrac{2\pi}{k},k\geq 2,k\in N^*$ 时，T 最多有 k 个元素，且这 k 个元素的和为 0

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 国际跳水比赛一共有八个评委现场打分，若八位评委给某个选手的打分分别为 $x_1,x_2,\cdots,x_8$，记这组数据的平均分、中位数、方差、极差分别为 $\overline{x}$、z、s^2、j,去掉这组数据的一个最高分和一个最低分后,其平均数、中位数、方差、极差分别为 $\overline{x'}$、$z',(s')^2$、j',则下列判断中一定正确的是（　）

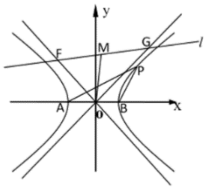
A. $\overline{x}\leq\overline{x'}$　B. $z=z'$　C. $(s')^2\leq s^2$　D. $j'\leq j$



10. 如图，已知二面角 $\alpha-l-\beta$ 的棱 l 上有 A，B 两点, $C\in\alpha$, $AC\perp l$, $D\in\beta$, $BD\perp l$,且 $AC=AB=BD=1$，则下列说法正确的是（　）A. $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}=1$　B. 当二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小为 60° 时，CD 与平面 β 所成的角为 30°

C. 若 $CD=\sqrt{3}$，则四面体 $ABCD$ 的体积为 $\dfrac{1}{12}$　D. 若 $CD=\sqrt{2}$，则二面角 $C-BD-A$ 的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

11. 如图，双曲线$C:x^2-y^2=a^2$ 左右顶点为A,B,P为C右支上一点（不包含顶点），$\angle PAB=\alpha,\angle PBA=\beta$，$\angle APB=\gamma$，直线l与C的渐近线交于$F,G,M$为线段$FG$的中点，则（　　）

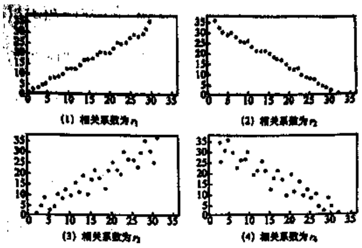


A. 双曲线C的离心率为$e=\sqrt{2}$ B. P到两条渐近线的距离之积为a^2

C. $\tan\alpha+\tan\beta+2\tan\gamma=0$ D. 若直线l与OM的斜率分别为k_1，k_2，则$k_1k_2=1$

三、填空题：本大题共3小题，每小题5分，共15分.把答案填在答题卡中的横线上.

12. 以下4幅散点图所对应的样本相关系数$r_1、r_2、r_3、r_4$的大小关系为__________.



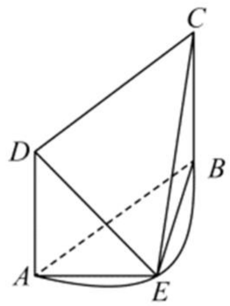
13. 在$\triangle ABC$中，$\tan B=\tan C=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$b=1$，则$\tan(B+C)=$____；$a=$______.

14. $\forall x_1,x_2$，当$1<x_1<x_2<e$时，$(\dfrac{x_2}{x_1})^{x_1x_2}-\dfrac{e^{ax_2}}{e^{ax_1}}<0$，则$a$的范围为______.

四、解答题：本题共5小题，共77分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15. 如图，平面$ABCD\perp$平面ABE，点E为半圆弧AB上异于A,B的点，在矩形$ABCD$中，$AB=4BC$，设平面ABE与平面CDE的交线为l.（1）证明：$l//$平面$ABCD$；

（2）当l与半圆弧AB相切时，求平面ADE与平面CDE的夹角的余弦值.



16. 如图，某人设计了一个类似于高尔顿板的游戏：将一个半径适当的小球放入如图所示的容器最上方的中间入口处，小球将自由下落，小球在下落的过程中，将3次遇到黑色障碍物，已知小球每次遇到黑色障碍物时，向左、右两边下落的概率都是$\dfrac{1}{2}$，最后落入A袋或B袋中.一次游戏中小球落入A袋记1分，落入B袋记2分，游戏可以重复进行.游戏过程中累计得n分的概率为P_n.（1）求P_1，P_2，P_3；

（2）写出P_n与P_{n-1}之间的递推关系，并求出P_n的通项公式.

17. 设动圆 M 与圆 $F_1:(x+1)^2+y^2=\frac{1}{4}$ 外切，与圆 $F_2:(x-1)^2+y^2=\frac{49}{4}$ 内切.（1）求点 M 的轨迹 M 的方程；

（2）过点 F_2 且不与 x 轴垂直的直线 l 交轨迹 M 于 A,B 两点，点 A 关于 x 轴的对称点为 A'，Q 为$\triangle AA'B$的外心，试探究 $\frac{|QF_2|}{|AB|}$ 是否为定值，若是，求出该定值；若不是，请说明理由.

18. 已知函数 $f(x)=\ln(mx)$，m 是大于 0 的常数.记曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_1,f(x_1))$ 处的切线为l，l 在 x 轴上的截距为 x_2，$x_2>0$.（1）当 $x_1=\frac{1}{e}$，$m=1$时求切线l的方程；（2）证明：$|x_1-\frac{1}{m}|\geq|x_2-\frac{1}{m}|$..

19. 已知数列 $A: a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为有穷正整数数列.若数列 A 满足如下两个性质，则称数列 A 为 m 的 k 减数列：①

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = m$；②对于 $1 \le i < j \le n$，使得 $a_i > a_j$ 的正整数对 (i, j) 有 k 个.

（1）写出所有 4 的 1 减数列；（2）若存在 m 的 6 减数列，证明：$m > 6$；

（3）若存在 2024 的 k 减数列，求 k 的最大值.

一、选择题:本大题共 8 小题,每一小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

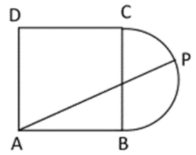
1. 已知复数 z 在复平面内的对应点为 $(1,1)$，则 $z+\frac{1}{z}$ 的虚部为（ C ）A. $\frac{1}{2}i$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{2}i$

2. 已知 $x\in R$，则"$x^3>8$"是"$|x|>2$"的（ A ）

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

3.基础建设对社会经济效益产生巨大的作用，某市投入 a 亿元进行基础建设，t 年后产生 $f(t)=ae^{\lambda t}$ 亿元社会经济效益．若该市投资基础建设 4 年后产生的社会经济效益是投资额的 2 倍，且再过 t 年，该项投资产生的社会经济效益是投资额的 8 倍，则 $t=$（ B ）A. 4 B. 8 C. 12 D. 16

4. 如图，$ABCD$ 是边长 2 的正方形，P 为半圆弧 BC 上的动点（含端点）则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$ 的取值范围为（ C ）A. $[2,6]$ B. $[2,3]$ C. $[4,6]$ D. $[4,8]$



5. 已知函数 $f(x)=2\sin x-e^x+e^{-x}$，则关于 x 的不等式 $f(-4+x^2)+f(3x)>0$ 的解集为（ C ）

A. $(-4,1)$ B. $(-1,4)$ C. $(-\infty,-4)\cup(1,+\infty)$ D. $[-1,4]$

$key: f(-x)=-f(x),\therefore f(x)$是奇函数

而 $\underset{x>0}{f'(x)}=2\cos x-(e^x+e^{-x})\le 2-2=0,\therefore f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上递减

$\therefore f(x)+f(3x)<0\Leftrightarrow f(3x)<-f(x)=f(-x)\Leftrightarrow 3x<-x$

6. 已知 $\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{4})$，$\sin\alpha\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)-\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，且 $3\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta)$，则 $\alpha+\beta$ 的值为（ C ）

A. $\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{3}$

7. 已知边长为 $\sqrt{3}$ 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，点 Q 为 $\triangle A_1BC_1$ 内一个动点，且满足 $QB_1=\sqrt{2}$，则点 Q 的轨迹长度为（ A ）A. $\frac{\pi}{2}$ B. π C. $\frac{3\pi}{2}$ D. 2π

8. 设无穷等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，集合 $T=\{t|\ t=\sin a_n,n\in N^*\}$.则（ D ）

A. T 不可能有无数个元素 B. 当且仅当 $d=0$ 时，T 只有 1 个元素

C. 当 T 只有 2 个元素时，这 2 个元素的乘积有可能为 $\frac{1}{2}$

D. 当 $d=\frac{2\pi}{k},k\ge 2,k\in N^*$ 时，T 最多有 k 个元素，且这 k 个元素的和为 0

$key:$设$a_n=a_1+(n-1)d$,当$d=0$时，$t=\sin a_1,T$只有一个元素；

当$d=2\pi$时，$t=\sin a_1,T$也只有一个元素；

当$d\ne 0$时，$t=\sin a_n$的周期为$\frac{2\pi}{d},\therefore T$只有有限个元素；

当$d=\frac{2\pi}{k}(k\ge 2,k\in N^*)$时，$t=\sin a_n$的周期为$k,\therefore T$最多有$k$个元素，

且$\sin a_1+\sin(a_1+d)+\cdots+\sin(a_1+(k-1)d)$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{d}{2}}[\cos(a_1-\frac{d}{2})-\cos(a_1+\frac{d}{2})+\cos(a_1+\frac{d}{2})-\cos(a_1+\frac{3d}{2})+\cdots+\cos(a_1+\frac{2k-3}{2}d)-\cos(a_1+\frac{2k-1}{2}d)]$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{d}{2}}[\cos(a_1-\frac{\pi}{k})-\cos(a_1+\frac{2k-1}{2}\cdot\frac{2\pi}{k})]=0$$

2023-24（下）模拟（5）

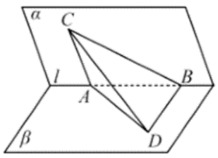
2024-02-17

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 国际跳水比赛一共有八个评委现场打分，若八位评委给某个选手的打分分别为 $x_1,x_2,\cdots,x_8$，记这组数据的平均分、中位数、方差、极差分别为 $\bar{x}$、z、s^2、j ,去掉这组数据的一个最高分和一个最低分后,其平均数、中位数、方差、极差分别为 $\overline{x'}$、$z',(s')^2$、j' ,则下列判断中一定正确的是（BCD　）

A. $\bar{x}\le\overline{x'}$　　B. $z=z'$　　C. $(s')^2\le s^2$　　D. $j'\le j$

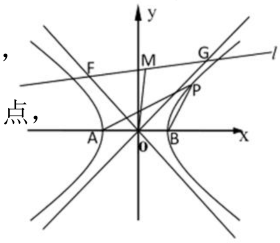
10. 如图，已知二面角 $\alpha-l-\beta$ 的棱 l 上有 A，B 两点, $C\in\alpha$, $AC\perp l$, $D\in\beta$, $BD\perp l$，且 $AC=AB=BD=1$，则下列说法正确的是（　AD　）A. $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}=1$



B. 当二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小为 $60°$ 时，CD 与平面 β 所成的角为 $30°$

C. 若 $CD=\sqrt{3}$，则四面体 $ABCD$ 的体积为 $\dfrac{1}{12}$　D. 若 $CD=\sqrt{2}$，则二面角 $C-BD-A$ 的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

11. 如图，双曲线 $C:x^2-y^2=a^2$　左右顶点为 A,B,P 为 C 右支上一点（不包含顶点），$\angle PAB=\alpha$, $\angle PBA=\beta$ ， $\angle APB=\gamma$ ，直线 l 与 C 的渐近线交于 F,G,M 为线段 FG 的中点，则（ACD　）A. 双曲线 C 的离心率为 $e=\sqrt{2}$ B. P 到两条渐近线的距离之积为 a^2



C. $\tan\alpha+\tan\beta+2\tan\gamma=0$　　　　D. 若直线 l 与 OM 的斜率分别为 k_1， k_2，则 $k_1k_2=1$

$key:e=\dfrac{\sqrt{2}a}{a}=\sqrt{2},A$对；

由$x^2-y^2=(x+y)(x-y)=a\cdot a$,设$\begin{cases}x+y=at\\x-y=\dfrac{a}{t}\end{cases}$得$P(\dfrac{a(t^2+1)}{2t},\dfrac{a(t^2-1)}{2t})$,

$\therefore d_1d_2=\dfrac{|x_P-y_P|}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{|x_P+y_P|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|x_P^2-y_P^2|}{2}=\dfrac{a^2}{2}$,$B$错；

$$k_{PA}=\frac{\dfrac{a(t^2-1)}{2t}}{\dfrac{a(t^2+1)}{2t}+a}=\frac{t-1}{t+1},k_{PB}=\frac{\dfrac{a(t^2-1)}{2t}}{\dfrac{a(t^2+1)}{2t}-a}=\frac{t+1}{t-1},$$

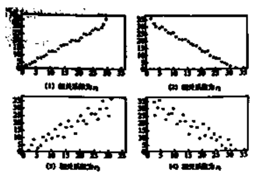
$\therefore\tan\alpha+\tan\beta+2\tan\gamma=k_{PA}-k_{PB}+2\cdot\dfrac{k_{PB}-k_{PA}}{1+k_{PB}k_{PA}}=k_{PA}-k_{PB}+k_{PB}-k_{PA}0,C$对；

$\begin{cases}x_F^2-y_F^2=0\\x_G^2-y_G^2=0\end{cases},\therefore(x_F+x_G)(x_F-x_G)-(y_F+y_G)(y_F-y_G)=2x_M(x_F-x_G)-2y_M(y_F-y_G)=0$

$\Leftrightarrow 1-k_{OM}k_{FG}=1-k_1k_2=0,\therefore D$对.

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.把答案填在答题卡中的横线上.

12. 以下 4 幅散点图所对应的样本相关系数 r_1、r_2、r_3、r_4 的大小关系为__________.



$r_2<r_4<r_3<r_1$

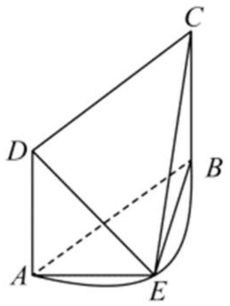
13. 在$\triangle ABC$中，$\tan B=\tan C=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$b=1$，则$\tan(B+C)=$__________；$a=$__________．$\sqrt{3}$，$\sqrt{3}$

14. $\forall x_1,x_2$，当$1<x_1<x_2<e$时，$\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^{x_1x_2}-\dfrac{e^{ax_2}}{e^{ax_1}}<0$，则$a$的范围为______.$a\ge e$

四、解答题：本题共5小题，共77分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15. 如图，平面$ABCD\perp$平面ABE，点E为半圆弧AB上异于A,B的点，在矩形$ABCD$中，$AB=4BC$，设平面ABE与平面CDE的交线为l.（1）证明：$l//$平面$ABCD$；

（2）当l与半圆弧AB相切时，求平面ADE与平面CDE的夹角的余弦值.



【小问1详解】

证明：$\because$四边形$ABCD$为矩形，$\therefore AB//CD$，

$\because AB\subset$平面ABE，$CD\not\subset$平面ABE，$\therefore CD//$平面ABE

又$CD\subset$平面CDE，平面$ABE\cap$平面$CDE=l$，$\therefore l//CD$，

$\because CD\subset$平面$ABCD$，l不在平面$ABCD$内，$\therefore l//$平面$ABCD$.

【小问2详解】

取AB，CD的中点分别为O，F，连接OE，OF，则$OF\perp AB$，

$\because$平面$ABCD\perp$平面ABE，且交线为AB，$OF\subset$平面$ABCD$，$\therefore OF\perp$平面ABE，

又$OE\subset$平面ABE，$OF\perp OE$，当l与半圆弧AB相切时，$OE\perp l$，即$OE\perp AB$，

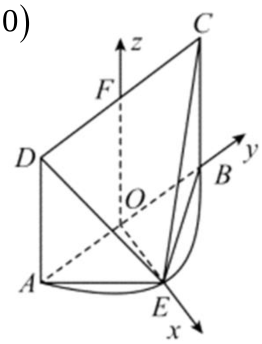
以OE，OB，OF所在的直线分别为x，y，z轴，建立如图所示的空间直角坐标系，

不妨设$BC=1$，易得$A(0,-2,0)$，$C(0,2,1)$，$D(0,-2,1)$，$E(2,0,0)$，

则$\overrightarrow{DE}=(2,2,-1)$，$\overrightarrow{AD}=(0,0,1)$，$\overrightarrow{DC}=(0,4,0)$，

设$\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$为平面DAE的一个法向量，

则$\begin{cases}\overrightarrow{AD}\cdot\vec{m}=0\\\overrightarrow{DE}\cdot\vec{m}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}z_1=0\\2x_1+2y_1-z_1=0\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}z_1=0\\x_1=-y_1\end{cases}$，令$x_1=1$，则$\vec{m}=(1,-1,0)$



设$\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$为平面DCE的一个法向量，则$\begin{cases}\overrightarrow{DC}\cdot\vec{n}=0\\\overrightarrow{DE}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，

即$\begin{cases}4y_2=0\\2x_2+2y_2-z_2=0\end{cases}$，所以$\begin{cases}y_2=0\\2x_2=z_2\end{cases}$，令$x_2=1$，则$\vec{n}=(1,0,2)$

$\therefore\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，所以两平面的夹角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

16. 如图，某人设计了一个类似于高尔顿板的游戏：将一个半径适当的小球放入如图所示的容器最上方的中间入口处，小球将自由下落，小球在下落的过程中，将3次遇到黑色障碍物，已知小球每次遇到黑色障碍物时，向左、右两边下落的概率都是$\dfrac{1}{2}$，最后落入A袋或B袋中.一次游戏中小球落入A袋记1分，落入B袋记2分，游

戏可以重复进行.游戏过程中累计得 n 分的概率为 P_n.（1）求 P_1， P_2， P_3；

（2）写出 P_n 与 P_{n-1} 之间的递推关系，并求出 P_n 的通项公式.

【小问 1 详解】小球三次碰撞全部向左偏或者全部向右偏落入 B 袋，

故概率 $P(B)=\mathrm{C}_3^0\left(\frac{1}{2}\right)^3+\mathrm{C}_3^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$，

小球落入 A 袋中的概率 $P(A)=1-P(B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

故 $P_1=P(A)=\frac{3}{4}$， $P_2=\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{4}=\frac{13}{16}$， $P_3=\left(\frac{3}{4}\right)^3+\mathrm{C}_2^1?\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{51}{64}$.

【小问 2 详解】游戏过程中累计得 n 分可以分为两种情况：得到 $n-2$ 分后的一次游戏小球落入 B 袋中（+2 分），或得到 $n-1$ 分后的一次游戏中小球落入 A 袋中（+1）分，

故 $P_n=\frac{3}{4}P_{n-1}+\frac{1}{4}P_{n-2}\Rightarrow P_n+\frac{1}{4}P_{n-1}=P_{n-1}+\frac{1}{4}P_{n-2}\left(n\geq 3\right)$ ，

故 $\left\{P_n+\frac{1}{4}P_{n-1}\right\}$ 为常数数列且 $P_2+\frac{1}{4}P_1=1$，故 $P_n+\frac{1}{4}P_{n-1}=1$ 即 $P_n=1-\frac{1}{4}P_{n-1}\left(n\geq 2\right)$.

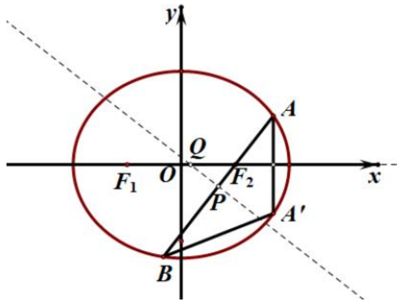
$$P_n=1-\frac{1}{4}P_{n-1}\Rightarrow P_n-\frac{4}{5}=-\frac{1}{4}\left(P_{n-1}-\frac{4}{5}\right),$$

故 $\left\{P_n-\frac{4}{5}\right\}$ 是以 $P_1-\frac{4}{5}=\frac{3}{4}-\frac{4}{5}=-\frac{1}{20}$ 为首项，以 $-\frac{1}{4}$ 为公比的等比数列，

故 $P_n-\frac{4}{5}=\left(-\frac{1}{20}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)^n$，所以 P_n 的通项公式为 $P_n=\left(\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)^n+\frac{4}{5}$.

17. 设动圆 M 与圆 $F_1:(x+1)^2+y^2=\frac{1}{4}$ 外切，与圆 $F_2:(x-1)^2+y^2=\frac{49}{4}$ 内切.（1）求点 M 的轨迹 M 的方程；

（2）过点 F_2 且不与 x 轴垂直的直线 l 交轨迹 M 于 A,B 两点，点 A 关于 x 轴的对称点为 A'，Q 为 $\triangle AA'B$ 的外心，试探究 $\frac{|QF_2|}{|AB|}$ 是否为定值，若是，求出该定值；若不是，请说明理由.



解：（1）由圆 F_1 与圆 F_2 内含，得 $\begin{cases}|MF_1|=r_M+\frac{1}{2}\\|MF_2|=\frac{7}{2}-r_M\end{cases}$，$\therefore|MF_1|+|MF_2|=4$

$\therefore a=2,c=1,b=\sqrt{3},\therefore M$ 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

（2）由题意得l与x轴不重合也不垂直,且$\triangle AA'B$的外心为AB的中垂线与x轴的交点

设$\angle AF_2x=\theta$,则$|AF_2|=\dfrac{3}{2+\cos\theta},|BF_2|=\dfrac{3}{2-\cos\theta}$,

$\therefore |AB|=\dfrac{12}{4-\cos^2\theta},|PF_2|=||AP|-|AF_2||=\dfrac{1}{2}||AF_2|-|BF_2||=\dfrac{3|\cos\theta|}{4-\cos^2\theta}$

$\therefore \dfrac{|QF_2|}{|AB|}=\dfrac{|PF_2|}{|\cos\theta|\cdot|AB|}=\dfrac{\dfrac{3|\cos\theta|}{4-\cos^2\theta}}{|\cos\theta|\cdot\dfrac{12}{4-\cos^2\theta}}=\dfrac{1}{4}$为定值

18. 已知函数 $f(x)=\ln(mx)$，m 是大于 0 的常数.记曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_1,f(x_1))$ 处的切线为 l，l 在 x 轴上的截距为 x_2，$x_2>0$.（1）当 $x_1=\dfrac{1}{e}$，$m=1$时,求切线 l 的方程；

（2）证明：$|x_1-\dfrac{1}{m}|\ge|x_2-\dfrac{1}{m}|$.

⑴ 解:$\because m=1,\therefore f(x)=\ln x,\therefore f'(x)=\dfrac{1}{x},\therefore$ 切线l的方程为$y+1=e(x-\dfrac{1}{e})$即$y=ex-2$

（2）证明：由$f'(x)=\dfrac{m}{mx}=\dfrac{1}{x}$得$l$的方程为$y-\ln(mx_1)=\dfrac{1}{x_1}(x-x_1)$即$y=\dfrac{1}{x_1}x-1+\ln(mx_1)$

令$y=0$得$x_2=x_1(1-\ln(mx_1))>0\Leftrightarrow 0<mx_1<e,\therefore x_2-x_1=-x_1\ln(mx_1)$

要证:$|x_1-\dfrac{1}{m}|\ge|x_2-\dfrac{1}{m}|$,只要证明:$(x_1-\dfrac{1}{m})^2\ge(x_2-\dfrac{1}{m})^2$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2-\dfrac{2}{m})(x_1-x_2)=(x_1+x_1(1-\ln(mx_1))-\dfrac{2}{m})\cdot(x_1\ln(mx_1))\ge 0\cdots(*)$

当$1\le mx_1<e$即$\dfrac{1}{m}\le x_1<\dfrac{e}{m}$时,$(*)\Leftrightarrow 0\le 2x_1-x_1\ln(mx_1)-\dfrac{2}{m}$ 记为$p(x_1)$

则$p'(x_1)=1-\ln(mx_1)>0,\therefore p(x_1)\ge p(\dfrac{1}{m})=0,\therefore (*)$成立,

当$0<mx_1<1$时,$(*)\Leftrightarrow 0\ge 2x_1-x_1\ln(mx_1)-\dfrac{2}{m}$ 记为$q(x_1)$

则$q'(x_1)=1-\ln(mx_1)>0,\therefore p(x_1)<p(\dfrac{1}{m})=0,\therefore (*)$成立,$\therefore |x_1-\dfrac{1}{m}|\ge|x_2-\dfrac{1}{m}|$.

19. （2024 上通州区期末）已知数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为有穷正整数数列.若数列 A 满足如下两个性质，则称数列 A 为 m 的 k 减数列：① $a_1+a_2+\cdots+a_n=m$；②对于$1\le i<j\le n$，使得 $a_i>a_j$ 的正整数对 (i,j) 有 k 个.

（1）写出所有 4 的 1 减数列;（2）若存在 m 的 6 减数列，证明：$m>6$；

（3）若存在 2024 的 k 减数列，求 k 的最大值.

⑴ 解：由已知得$a_1+a_2+\cdots+a_n=4(a_1,a_2,\cdots,a_n\in N^*)$

$\therefore 1+2+1=4,or,3+1=4,\therefore A:3,1;$或$A:1,2,1$

（2）证明：当$m\le 5$时,$a_1+a_2+\cdots+a_n=m(n\le 3)$,

则(i,j)的个数小于$C_4^2=6$.当$m=6$时,$n\le 4$.若$n=2$，则(i,j)的个数$k\le 1$;

若$n=3$，则(i,j)的个数$k\le 3(4,1,1;3,2,1;3,1,2;2,2,2)$

若$n=4$，则(i,j)的个数$k\le 4(3,1,1,1;2,2,1,1)$.综上:$m>6$

(3) 解：若$a_1=a_2=\cdots=a_n=N$(若$nN=2024$),则$k=0$;

若$k\neq 0$，则数列A存在大于1的项，

若末项$a_n\neq 1$，将a_n拆分成$(a_n-1),1$此时k变大，$\therefore$末项$a_n=1$，

当$i=1,2,\cdots,n-1$时，若$a_i<a_{i+1}$，交换a_i,a_{i+1}($(a_1,\cdots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\cdots,a_n)\to(a_1,\cdots,a_{i-1},a_{i+1},a_i,\cdots a_n)$)

的顺序后k变为$k+1$,$\therefore$要使k最大，则$a_i\geq a_{i+1}$，

若$a_i-a_{i+1}\notin\{0,1\}$，则$a_i\geq a_{i+1}+2$，将a_i改为a_i-1($(a_1,\cdots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\cdots,a_n)\to(a_1,\cdots,a_{i-1},a_i-1,a_{i+1},\cdots,a_n,1)$)

并在数列末尾添加一项1，此时k变大，

$\therefore$要使k最大，则$a_i-a_{i+1}\in\{0,1\}$，

若数列A中存在相邻的两项$a_i>3,a_{i+1}=2$(即$a_1,\cdots,a_{i-1},a_i,\underbrace{2,\cdots,2}_{l项},\underbrace{1,\cdots,1}_{j项},\underbrace{0,\cdots,0}_{r项}$)

将a_i改为a_i-1，若$a_1,\cdots,a_{i-1},a_i,\underbrace{2,\cdots,2}_{l项},\underbrace{1,\cdots,1}_{j项},\underbrace{0,\cdots,0}_{r项}\to a_1,\cdots,a_{i-1},a_i-1,\underbrace{2,\cdots,2}_{l项},\underbrace{2,1,\cdots,1}_{j项},\underbrace{0,\cdots,0}_{r项}$: k变为$j-1+r$,$\therefore r=0$,

若$a_i=3$，若$a_1,\cdots,a_{i-1},3,\underbrace{2,\cdots,2}_{l项},\underbrace{1,\cdots,1}_{j项}\to a_1,\cdots,a_{i-1},2,\underbrace{2,\cdots,2}_{l项},\underbrace{1,1,\cdots,1}_{j项},1$，则$k$变为$-l+l+1=1$

$\therefore$数列A: $\underbrace{2,2,\cdots,2}_{j项},\underbrace{1,1,\cdots,1}_{l项}$，且$\begin{cases}j+l=n\\2j+l=2024\end{cases}$

$\therefore k=jl=j(2024-2j)=2j(1012-j)\leq 2\cdot 506^2=512072$（当$j=506$时，取$=$）

$\therefore k$的最大值为512072