立体几何（1）几何体结构特征解答（1）

2023-04-02

解答

一、几何体的结构特征（球、体积、截面等）

柱体体积：$V=Sh$;斜棱柱$S_{侧}=c_{直}\cdot l$,体积$V=S_{直}\cdot l$

锥体体积：$V=\frac{1}{3}Sh$

台体体积:$V=\frac{1}{3}(S_{上}+\sqrt{S_{上}S_{下}}+S_{下})h=\frac{1}{6}(S_{上}+4S_{中}+S_{下})h$

圆柱侧面积$S=2\pi Rh$,体积$V=\pi r^2h$

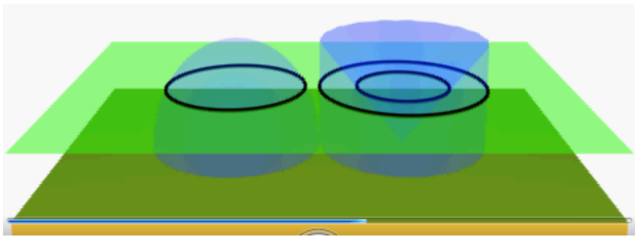
圆锥的侧面积$S=\pi rl$,体积$V=\frac{1}{3}\pi r^2h$;侧面展开图中心角$\theta=\frac{2\pi r}{l}$

圆台侧面积：$S=\pi(r_1+r_2)l$;体积$V=\frac{1}{3}\pi(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)h$；侧面展开图中心角$\theta=\frac{2\pi(r_2-r_1)}{l}$.

球表面积：$S=4\pi R^2$,球体积：$V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

（2010会考）若棱长为a的正方体的表面积等于一个球的表面积，棱长为b的正方体的体积等于该球的体积，则a,b的大小关系为______. key:由等周定理：$a^3<V_{球}=b^3,\therefore a<b$

变式：用与球心距离为 1 的平面去截球，所得的截面面积为π .则球的体积为________,截得的两部分的体积之比为_________. $\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$, $(4\sqrt{2}-5):(4\sqrt{2}+5)$

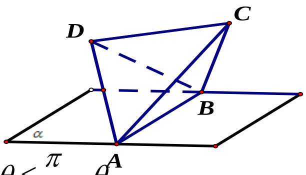


key:利用祖暅原理，$R_{球}=\sqrt{2},r_{截}=1,d=1$

$V_{下部}=\frac{4\sqrt{2}\pi}{3}+[\pi\cdot(\sqrt{2})^2\cdot1-\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot1^2\cdot1]=\frac{4\sqrt{2}+5}{3}\pi$,

$V_{上部}=\frac{4\sqrt{2}\pi}{3}-[\pi\cdot(\sqrt{2})^2\cdot1-\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot1^2\cdot1]=\frac{4\sqrt{2}-5}{3}\pi$,

（2006）已知正四面体$ABCD$的棱长为1，平面$\alpha//AB$，则正四面体在平面α上的射影图形的面积的取值范围为______.



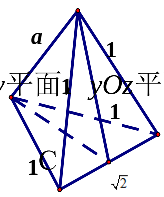
2006key:$[\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{1}{2}]$，$S\le\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=\frac{1}{2}$

$\theta_0=$二面角$D-AB-C$的大小，且$\cos\theta_0=\frac{2}{3}$,设面DAB与α所成角为θ,且$-\frac{\theta_0}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}-\theta_0$,

$\therefore S=\frac{\sqrt{3}}{4}\cos\theta\ge\frac{\sqrt{2}}{4}$($CD\perp\alpha$时最小）

（2012 重庆）设四面体的六条棱的长分别为$1,1,1,1,\sqrt{2}$和a，且长为a的棱与长为$\sqrt{2}$的棱异面，则a的取值范围是（ A ）A. $(0,\sqrt{2})$　　B. $(0,\sqrt{3})$　　C. $(1,\sqrt{2})$　　D. $(1,\sqrt{3})$

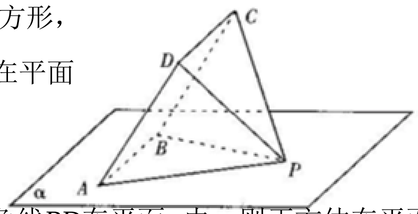
key:如图，



（12 会考）（24）M是空间直角坐标系$O-xyz$中任一点（异于O），若直线OM与xOy平面，yOz平面，zOx平面所成交得余弦值分别为p,q,r，则$p^2+q^2+r^2=$（　）A.$\frac{1}{4}$　B.1　C.2　D.$\frac{9}{4}$

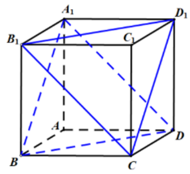
2023-04-02

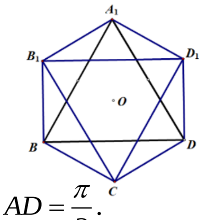
（1507）如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是边长为2的正方形，侧棱长均为$\sqrt{5}$.若侧面PAB放在水平面α上，则四棱锥$P-ABCD$在平面α上的正投影（俯视图）面积为________.



1507key:（射影面积公式）$4\cos 60°+2\cos 60°=3$

变式 1（1） 正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1，底面$ABCD$的对角线BD在平面α内，则正方体在平面α内的射影构成的图形面积的取值范围是________. $[1,\sqrt{3}]$





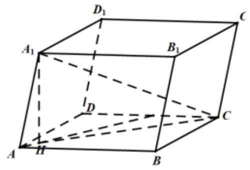
（2）已知平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，底面$ABCD$为矩形，$\angle A_1AB=\angle A_1AD=\dfrac{\pi}{3}$.

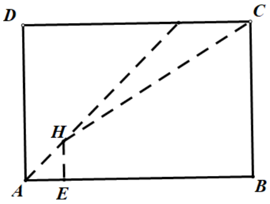
若$AB=a, AD=b, AA_1=c, A_1C=1$,则$c$的最大值为________.

变式：设A在底面$ABCD$上的射影为H,则AH是$\angle DAB$的平分线,

且$\cos\dfrac{\pi}{3}=\cos\angle A_1AH\cos\dfrac{\pi}{4}, \therefore \angle A_1AH=\dfrac{\pi}{4}$

$\therefore 1=AC_1^2=(a-\dfrac{1}{2}c)^2+(b-\dfrac{1}{2}c)^2+\dfrac{1}{2}c^2\ge\dfrac{1}{2}c^2, \therefore c_{\max}=\sqrt{2}$





（2007全国竞赛）已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1，以顶点A为球心，$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$为半径作一个球，

则球面与正方体的表面相交所得曲线的长等于____. $\dfrac{5\sqrt{3}}{6}\pi$

（2021III）15. 已知圆锥的底面半径为 1，母线长为 3，则该圆锥内半径最大的球的体积为_____. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi$

（2021I）3. 已知圆锥的底面半径为$\sqrt{2}$，其侧面展开图为一个半圆，则该圆锥的母线长为（ B ）

A. 2　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 4　　D. $4\sqrt{2}$

（2021II）5. 正四棱台的上、下底面的边长分别为 2，4，侧棱长为 2，则其体积为（ D ）

A. $20+12\sqrt{3}$　　B. $28\sqrt{2}$　　C. $\dfrac{56}{3}$　　D. $\dfrac{28\sqrt{2}}{3}$

（2021 天津）6. 两个圆锥的底面是一个球的同一截面，顶点均在球面上，若球的体积为$\dfrac{32\pi}{3}$，两个圆锥的高之比为$1:3$，则这两个圆锥的体积之和为（ B ）A. 3π　B. 4π　C. 9π　D. 12π

（2022 甲）9. 甲、乙两个圆锥的母线长相等，侧面展开图的圆心角之和为2π，侧面积分别为$S_甲$和$S_乙$，体积分别为$V_甲$和$V_乙$. 若$\dfrac{S_甲}{S_乙}=2$，则$\dfrac{V_甲}{V_乙}=$（ C）A. $\sqrt{5}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{10}$　　D. $\dfrac{5\sqrt{10}}{4}$

（2022 乙）9. 已知球 O 的半径为 1，四棱锥的顶点为 O，底面的四个顶点均在球 O 的球面上，则当该四棱锥的体积最大时，其高为（ C ）A. $\dfrac{1}{3}$　B. $\dfrac{1}{2}$　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

（2022II）7. 已知正三棱台的高为 1，上、下底面边长分别为$3\sqrt{3}$和$4\sqrt{3}$，其顶点都在同一球面上，则该球的表面积为（ A ）A. 100π　B. 128π　　C. 144π　　D. 192π

（2022I）8．已知正四棱锥的侧棱长为 l，其各顶点都在同一球面上.若该球的体积为 36π ，且 $3\le l\le 3\sqrt{3}$，则该正四棱锥体积的取值范围是（　C　）

A $[18,\frac{81}{4}]$　　　　B. $[\frac{27}{4},\frac{81}{4}]$　　　　C. $[\frac{27}{4},\frac{64}{3}]$　　　　D. $[18,27]$

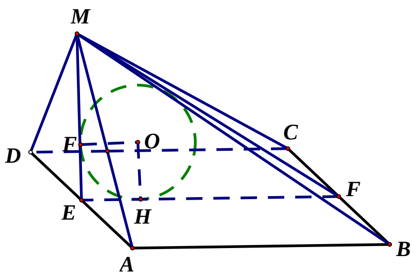
变式 1（1）一个底面半径为 R 的等边圆锥的内接圆柱的表面积的最大值为_____________.

$key:\frac{h}{R-r}=\sqrt{3},\therefore S_{表}=2\pi r^2+2\pi r\cdot\sqrt{3}(R-r)=2(\sqrt{3}-1)\pi r(\frac{3+\sqrt{3}}{2}R-r)\le\frac{3+3\sqrt{3}}{4}\pi R^2$

（2）一个底面半径为 R 的等边圆锥的内接正四棱柱的表面积的最大值为_____________.

$key:\frac{h}{R-\frac{\sqrt{2}}{2}a}=\sqrt{3},\therefore S_{表}=2a^2+4ah=(\sqrt{6}-2)a[(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})R-a]\le\frac{3(2+\sqrt{6})}{2}R^2$

（1991 全国）设棱锥 $M-ABCD$ 的底面是正方形，且 $MA=MD,MA\perp AB$，如果 $\triangle AMD$ 的面积为 1，则能够放入这个棱锥的最大球的半径为________.



$key:$由已知得平面$MAD\perp$平面$ABCD$，设$AD=a,EM=h$,则$ah=2$

则$\triangle MEF$的内切圆半径$r=\frac{a+h-\sqrt{a^2+h^2}}{2}=\frac{ah}{a+h+\sqrt{a^2+h^2}}$

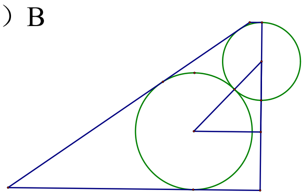
$\le\frac{ah}{2\sqrt{ah}+\sqrt{2ah}}=\sqrt{2}-1$(当且仅当$a=h=\sqrt{2}$时取＝)

此时O到面MAB的距离就是F到平面MAB的距离为$\frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}}(h-r)=\frac{1}{\sqrt{5}}>\sqrt{2}-1,$

$\therefore$能够放入的最大球的半径为$\sqrt{2}-1.$

（1996 全国竞赛）6.高为 8 的圆台内有一个半径为 2 的球 O_1，球心 O_1 在圆台的轴上. 球 O_1 与圆台上底面、侧面都相切. 圆台内可再放入一个半径为 3 的球 O_2，使得球 O_2 与球 O_1、圆台的下底面及侧面都只有一个公共点，除球 O_2，圆台内最多还能放入半径为 3 的球的个数是（　）B

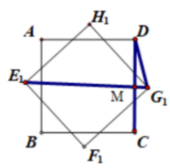
A.1　　　　B.2　　　　C.3　　　　D.4



$key:$在半径为4的圆周上放置距离为6的点

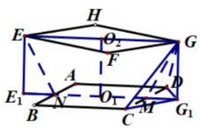
$\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 6=2\sqrt{3}<4,\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2}=3\sqrt{2}<4$

（2003 年全国竞赛）将8个半径都为1的球分两层放置在一个圆柱内，并使得每个球和其相邻的四个球相切，且与圆柱的一个底面及侧面都相切，则此圆柱的高等于______. $2+\sqrt[4]{8}$



$key:$如图，$MG_1=\frac{2\sqrt{2}-2}{2}=\sqrt{2}-1,GM=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3},$

$\therefore GG_1=\sqrt{3-(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt[4]{8},\therefore$此圆柱的高为$2+\sqrt[4]{8}$



（2005全国Ⅱ）将半径为1的4个钢球完全装入形状为正四面体的容器里，这个四面体的高的最小值为（ ）

$A.\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{3}$ $B.2+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ $C.4+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ $D.\dfrac{4\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{3}$ **C**

$key: d_{中心\to顶点}=3d_{中心\to面}\quad 3+\sqrt{4-\dfrac{4}{3}}+1=4+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

（2018竞赛）四面体$ABCD, PA=BC=\sqrt{6}, PB=AC=\sqrt{8}, PC=AB=\sqrt{10}$,则该四面体的外接球的半径为___.

$2018key$:补成长方体得$R=\sqrt{3}$

变式 2（1）①棱长为a的正四面体内恰好放入四个半径相同的球,则在小球与正四面体的顶点之间的空 间内可放入的小球的最大半径为__________.

$key: 3r+\dfrac{\sqrt{6}}{3}\cdot 2r+r=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$得$r=\dfrac{\sqrt{6}-1}{10}a, \therefore r+r_0+3r_0=3r$得$r_0=\dfrac{\sqrt{6}-1}{20}a$

② 浑仪（如图）是中国古代用于测量天体球面坐标 观测仪器，它是由一重重的同心圆环构成，整体看起来就像一个圆球.学校天文兴趣小组的学生根据浑仪运行原理制作一个简单模型：同心的小球半径为 1，大球半径为 R.现要在大球内放入一个由六根等长的铁丝（不计粗细）组成的四面体框架，同时使得小球可以在框架内自由转动，则 R 的最小值为__________.

key:设正四面体的棱长为a，则$\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{3}a\le R$即$a\le\dfrac{4}{\sqrt{6}}R$

小球时正四面体的棱切球，则$\dfrac{\sqrt{2}}{4}a\ge 1$即$a\ge 2\sqrt{2}, \therefore \dfrac{4}{\sqrt{6}}R\ge 2\sqrt{2}$即$R\ge\sqrt{3}$