Алгоритмы и модели вычислений, группы $774 - 775$, задание 4

- Кормен–Лейзерсон–Ривест–Штайн, глава 34, параграфы 3, 4 и 5. ***ОБЯЗАТЕЛЬНО ЧИТАТЬ ВСЁ!!!***.
- Конспек 3-ей лекций Мусатова по курсу теории сложностей у ФИВТов:
http://ru.discrete-mathematics.org/fall2017/3/complexity/compl-book.pdf.
Лекцию 3 теперь уже нужно прочитать полностью.
- Хорошая книжка по теории сложностей на английском - http://theory.cs.princeton.edu/complexity/book.pdf. Из неё нужно разобраться с параграфами 2.2, 2.3, 2.4. Параграфы 2.5 и 2.7 тоже полезно почитать. Не бойтесь математического английского! Он простой, серьёзно.
- Также рекомендуем книгу блестящих математиков Гача и Ловаса по вычислительной сложности:
http://www.cs.elte.hu/~lovasz/complexity.pdf. Здесь вам стоит разобраться с параграфами 6.5 и 6.6.

Задание 4

В задачах можете пользоваться любым из определений класса $\mathcal{NP}$ - через недетерминированные машины Тьюринга или сертификаты.

Мотивация домашнего задания: на первой контрольной очень часто задачи на $\mathcal{NP}$-полноту формулируются коварно. А именно, вам предлагается какая-то задача и спрашивается является ли она $\mathcal{NP}$-полной или же вообще лежит в классе $\mathcal{P}$. Для того, чтобы подготовить вас к такому, мы предлагаем порешать домашнее задание с аналогичной постановкой. Отнеситесь к заданию серьёзно, в Интернете полно литературы на тему $\mathcal{NP}$-полноты и ей нужно проникнуться.

Напоминание: если пользуетесь каким-то источником или решаете задачу коллективно, то обязательно пишите об этом в ваших заданиях.

1. Во всех пунктах следующей задачи требуется либо доказать, что рассматриваемый язык $\mathcal{NP}$-полон либо доказать, что он лежит в классе $\mathcal{P}$.

   (i) Язык задаётся набором: целые числа n, a, b и массив из n целых чисел, каждое из которых равно a либо b. При этом весь набор можно разбить на две непересекающиеся части так, чтобы суммы в каждой части были одинаковыми.

   (ii) Язык задаётся набором: целое число n и массив из n целых чисел, каждое из которых может быть равно только неотрицательным степеням двойки: 1, 2, 4 и так далее. При этом весь набор можно разбить на две непересекающиеся части так, чтобы суммы в каждой части были одинаковыми.

   (iii) Язык задаётся набором: целое число n и массив из n целых чисел. При этом весь набор можно разбить на две непересекающиеся части так, чтобы суммы в каждой части были одинаковыми. Обратите внимание, что теперь ограничений на числа в массиве нет.

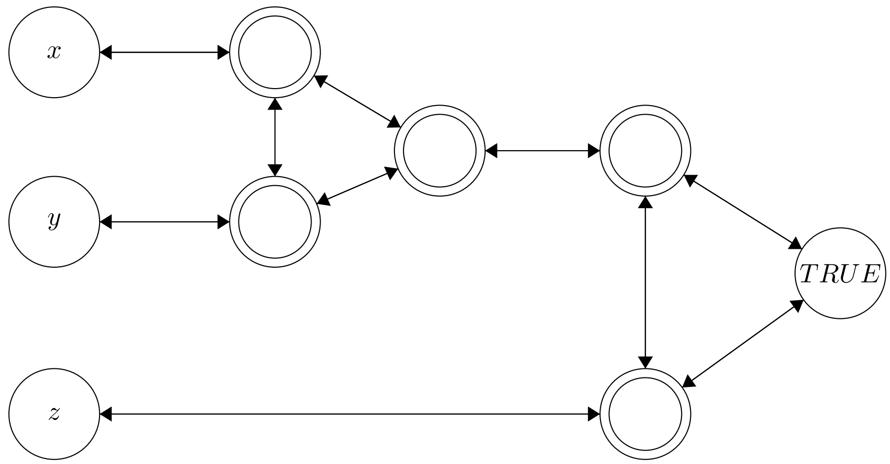
   (iv) Язык задаётся набором: целое число n и массив из n целых чисел. При этом весь набор можно разбить на две непересекающиеся части так, чтобы суммы в них отличались не более 10. Обратите внимание, что теперь ограничений на числа в массиве нет.

   Hint: перед тем, как решать эту задачу, разберитесь с задачей о рюкзаке и задачей о сумме подмножества.

2. Следующая задача демонстрирует насколько близкими по постановке могут быть задачи из классов $\mathcal{NPC}$ и $\mathcal{P}$:

   (i) Докажите, что $2 - COLOR \in \mathcal{P}$, где $2 - COLOR$ язык неориентированных графов, вершины которых можно раскрасить в 2 цвета так, чтобы смежные вершины были раскрашены в разные цвета.

   (ii) Рассмотрим язык $3 - COLOR$ - язык графов, вершины которых можно раскрасить в 3 цвета так, чтобы смежные вершины были раскрашены в разные цвета. Утверждается, что этот язык $\mathcal{NP}$-полон или же лежит в классе $\mathcal{NPC}$. Предлагается сводить язык $3 - SAT \in \mathcal{NPC}$ к нему. Пусть формула ϕ содержит n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и m подвыражений в скобках. По ней строится граф, множество вершин которого V содержит по одной вершине для каждой переменной и по одной вершине для её отрицания, по 5 вершин для каждого подвыражения и 3 специальные вершины: $TRUE, FALSE, RED$. В графе имеются рёбра двух типов, первый тип («литеральные» рёбра): все 3 специальные вершины образуют треугольник, а также вершины $x_i, \neg x_i, RED$ образуют треугольник для всех $i \in \overline{1, n}$. Также для каждого подвыражения в скобках вида $x \vee y \vee z$ создаётся своя копия структурного элемента, изображенного ниже (для рисования подобных графов можно пользоваться сайтом http://madebyevan.com/fsm/, которым ваши семинаристы пользовались в своё время при изучении ТРЯПа), рёбра в таких структурных элементах принадлежат второму типу - «дизъюнктивные рёбра». Каждое подвыражение требует своей копии пяти вершин, выделенных на рисунке двойными кругами, они соединяются с литералами подвыражения и специальной вершиной $TRUE$. Докажите, что при любом 3-раскрашивании подграфа, описанного выше, состоящего из «литеральных» рёбер, для каждой пары вершин $x_i, \vee x_i$ одна имеет цвет вершины $TRUE$, а другая - цвет вершины $FALSE$. Также докажите, что для любого значений переменных функции ϕ существует 3-раскрашивание графа, содержащего только «литеральные» рёбра.



(iii) Докажите, что если каждая из вершин x, y, z окрашена в один из двух цветов вершин $TRUE$ и $FALSE$, то для изображённого на рисунке структурного элемента правильное 3-раскрашивание возможно тогда и только тогда, когда цвет хотя бы одной из x, y, z равен цвету вершины $TRUE$.

(iv) Завершите доказательство утверждения $\mathcal{NP}$-полноты языка $3-COLOR$.

3. В этой задаче нужно доказать принадлежность языка $stingy-SAT$ одному из классов - $\mathcal{P}$ или $\mathcal{NPC}$. $stingy-SAT$ - это язык, состоящий из формулы ϕ в виде КНФ и числа k таких, что существует выполняющий набор переменных для ϕ, в котором не более k переменным присвоено значение $true$.

4. Язык $k-SPANNING\,TREE$ состоит из пар: числа $k \geq 2$ и неориентированного связного графа, для которого существует остовное дерево, каждая вершина которого имеет степень не более k.

   (i) Докажите, что $k - SPANNING\,TREE \in \mathcal{NP}$.

   (ii) Докажите, что $k - SPANNING\,TREE \in \mathcal{NPC}$.

   Hint: для решения второго пункта начните со случая $k = 2$ и попробуйте свести её к задаче о гамильтоновом пути.

5. Рассмотрим язык $3 - CLIQUE$ - язык, состоящий из натуральных чисел k и неориентированных графов G таких, что степень каждой вершины графа G не превышает 3 и в графе G есть клика на k вершинах.

   (i) Докажите, что $3 - CLIQUE \in \mathcal{NP}$.

   (ii) Найдите ошибку в следующем рассуждении: «Для доказательства $\mathcal{NP}$-полноты сведём этот язык к языку $CLIQUE$ (ведь мы уже знаем, что этот язык $\mathcal{NP}$-полон). Поскольку $3 - CLIQUE \subset CLIQUE$, то сведение никак не будет менять ни данный граф G, степень каждой вершины которого не превосходит трёх, ни параметр k. Более того, решение для полученной задачи о клике, очевидно, является решением и для исходной задачи о 3-клике. Таким образом, сведение построено, а значит $3 - CLIQUE \in \mathcal{NPC}$.»

   (iii) Докажите, что $3 - CLIQUE \in \mathcal{P}$.

6. Сведите язык гамильтоновых путей в ориентированных графах $HAMILTON - DIR - PASS$ к языку гамильтоновых путей в неориентированных графах $HAMILTON - PASS$.

7. Пусть имеется программа, которая за полиномиальное время отвечает на вопрос, содержит ли входной граф гамильтонов цикл. Как с её помощью найти за полиномиальное время сам цикл (если он есть)?

8. Докажите, что язык, состоящий из пары графов G_1 и G_2 таких, что G_1 изоморфен какому-то подграфу G_2, $\mathcal{NP}$-полон.

9. Доминирующим множеством (dominating set) неориентированного графа $G = (V, E)$ называется такое подмножество его вершин $D \subseteq V$, что любая вершина графа либо лежит D сама, либо соединена с вершиной, лежащей в D. Число $\gamma(G)$ определяется как число вершин в наименьшем по мощности доминирующем множестве. Язык $DOMINATING\ SET$ состоит из графов G и натуральных чисел k таких, что $\gamma(G) \leq k$. Докажите, что $DOMINATING\ SET \in \mathcal{NPC}$.