**Гавриленко Арсений** *777*

# Домашняя работа 3

## Задача 1.

**1.**

$$T(n) = 10T(\frac{n}{2}) + \frac{n^4}{\log n}$$

$$log_b(a) = log_2(10) \approx 3.01$$

$$f(n) = \frac{n^4}{logn} = n^3 \frac{n}{logn}$$

По Лопиталю, предел n делить на log n стремится к бесконечности, а значит при больших n полином забивает логарифм, значит всегда сможем найти $\delta$

$$f(n) = \Omega(n^{\log_b(a)+\delta})$$

Регулянсоть (c $<$ 1):

$$10(\frac{(\frac{n}{2})^4}{\log(\frac{n}{2})}) \ \leq \ c(\frac{n^4}{\log n})$$

Откуда:

$$c \geq 5/8$$

, например c = 11/16. Тогда :

$$T(n) = \Theta(\frac{n^4}{\log n})$$

**2.**

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \Theta(n^{4/3} \log n)$$

Построив дерево рекурсии увидим что:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_2 n} 2^i * (\frac{n}{2^i})^{4/3} \log_2 \frac{n}{2^i}$$

$$T(n) = n^{4/3} \sum_{i=0}^{\log_2 n} 2^{-i/3} * (\log_2 \frac{n}{2^i})$$

$$T(n) = n^{4/3} \log n \sum_{i=0}^{\log_2 n} 2^{-i/3} - n^{4/3} \log 2 \sum_{i=0}^{\log_2 n} i 2^{-i/3}$$

СУмма геом прогрессии:

$$\sum_{i=0}^{\log_2 n} 2^{-i/3} = \frac{1-(2^{-1/3})^{\log_2 n+1}}{1-2^{-1/3}}$$

ЗАметим, что двойка в числителе возводится в отрицательную степень, так что при больших n будем считать что 2ка стремится в ноль (не уверен в этом переходе), тогда:

$$\sum_{i=0}^{\log_2 n} 2^{-i/3} = \frac{1-(2^{-1/3})^{\log_2 n+1}}{1-2^{-1/3}} = const = O(1)$$

Теперь надо оценить другую сумму: Вроде как получается меньше чем другое слогаемое ( не доказал) То есть ответ:

$$\Theta(n) = \frac{n^{4/3}}{logn}$$

**3.**

$$T(n) = T(n-1) + 2T(n-2)$$

$$T(1) = T(2) = 1$$

ТОгда:

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_1 = 2, x_2 = -1$$

Общее:

$$T(n) = c_1(-1)^n + c_2(2)^n$$

С учетом T(1) T(2)

$$T(n) = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}(2)^n$$

**Задача 2**

**Задача 3.**

$$T(n) = 3T(\frac{n}{\sqrt(3)} - 5) + 10\frac{n^3}{logn}$$

Докажем, что это 3ий случай мастер теоремы. Эквивалентно при больших n:

$$T(n) = 3T(\frac{n}{\sqrt(3)}) + 10\frac{n^3}{logn}$$

тогда:

$$\log_b(a) = 2$$

$$f(n) = 10\frac{n^3}{logn} = 10n^2\frac{n}{logn}$$

Рассмотрев предел $n/logn$ по Лопиталю, найдем, что он стремится к бесконечности, а значит для любого большого n, существует константа $\delta$, такая что $\delta > \frac{n}{logn}$. Значит выполняется условие

$$f(n) = \Omega(n^{2+\delta})$$

Теперь докажем регулярность ( c $<$ 1):

$$3 * 10 * \frac{(n/\sqrt{3})^3}{log(n/\sqrt{3})} \leq c * 10 * \frac{n^3}{logn}$$

Путем простых выкладок, которые мне не хочется техать получаем:

$$c \geq \frac{1}{\sqrt(3)}$$

Значит:

$$T(n) = \Theta(\frac{n^3}{logn})$$

**Задача 4.**

$$S(n) = \begin{cases} 100, n \leq 100 \\ S(n-1) + S(n-3), n > 100 \end{cases}$$

Легко получаем характеристическое уравнение:

$$x^3 - x^2 - 1 = 0$$

Решить его по-человечески мы не можем, воспользуемся вольфрамом. Оттуда получим один действительный и два комплексных корня:

$$x1 \approx 1.5; x2 \approx -0.2 + 0.8i; x3 \approx -0.2 - 0.8i$$

Тогда решение рекуренты(численые методы :))) ):

$$T(n) = C_1 * x_1^n + C_2 * \exp(nx_2) + C_3 * \exp(nx_3)$$

Так как нам нужна оценка, то скажем, что при больших n члены с экспонентной забиваеются ( так как там константы в иксах меньше 1), то есть

$$T(n) \approx C_1 * 1.5^n$$

Вообще можно уже на этом этапе прекратить решение, так как просят оценить, а константа роли не играет. Но при желании ее можно найти из условия, что при 100 рекурсивные вызовы прекращаются. Ответ:

$$T(10^{12}) = C_1 * 1.5^{10^{12}}$$

**Задача 5.** Рекурсия разбивает начальную задачу на n задач размера $\frac{n}{2}$, каждая из которых ,бьется на $\frac{n}{2}$ задач $\frac{n}{4}$ и т.д. Теперь нужно умножить количество задач на уровне на работу потраченную на каждую из них: сначала $O(n)$, далее $n \cdot O(\frac{n}{2})$, на третьем уже $\frac{n^2}{2} \cdot O(\frac{n}{4})$. Тогда на i-том шаге $\frac{n^i}{2^{i-1}}$ вызовов, каждый совершает работу O(n) (а точнее $\frac{n}{2^i}$). Соответственно на i-том будет:

$$\frac{n^i}{2^{i-1}} \cdot O(\frac{n}{2^i}) = \frac{n^{i+1}}{2^{2i-1}}$$

Итераций будет $log_2(n)$

Тогда общая работа будет считаться $n$ + сумма геом.прогрессии:

$$n + \sum_{i=1}^{\log_2(n)} \frac{n^{i+1}}{2^{2i-1}}$$

Совершим замену $n = 2^k$:

$$2^k + \sum_{i=1}^{k} \frac{2^{i \cdot k+k}}{2^{2i-1}} = 2^k + \sum_{i=1}^{k} 2^{i \cdot (k-2)+1+k} = 2^k + 2^{k+1} \sum_{i=1}^{k} 2^{i \cdot (k-2)}$$

Найдем сумму геом. прогрессии.

$$S_n = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$2^k + 2^{k+1} \sum_{i=1}^{k} 2^{i \cdot (k-2)} = 2^k + 2^{k+1} \cdot \frac{2^{k-2}(1-(2^{k-2})^{k-1})}{1-2^{k-2}}$$

Подставим $n = 2^k$

$$n + 2 \cdot n(\frac{(\frac{n}{4})(1-(\frac{n}{4})^{\log_2(n)-1})}{1-\frac{n}{4}})$$

Сократим дробь на $\frac{n}{4}$. Получим:

$$f(n) = n + C \cdot n^{log_2(n)}$$

Таким образом:

$$T(n) = \Theta(n^{\log n})$$

**Задача 6** рассмотрим случай $n = 2^k$. тогда рекурсия преобретает вид очень похожий на числа Ф.:

$$T(2^k) = T(2^{k-1}) + T(2^{k-2}) + 3$$

Решим рекуренту(см решения для чисел Ф.): Выведем начльные условия глядя на код:

$$T(1) = 3$$

$$T(2) = 6$$

Тогда:

$$T(n) = C_1 * (\frac{1 + (5)}{2})^n + C_2 * (\frac{1 - \sqrt(5)}{2})^n$$

$$C_1 = 3/2 * \frac{1 + \sqrt(5)}{\sqrt(5)}$$

$$C_2 = 3/2 * \frac{\sqrt(5) - 1}{\sqrt(5)}$$

**Задача 7**

**Решение** Я не был на семинаре, но вроде уловил концепцию - "перегон входных элементов"Возьмем 4 группы: I - непросмотренные элементы,
II - потенциальные максимумы,
III - потенциальные минимумы,
IV - точно не максимумы и не минимумы.
Пусть на некотором шаге в этих группах оказалось x1 x2 x3 x4 элементов. Берем два из первой группы, после сравнения, один попадает в II другой в III , то есть x1 = x1 -2, x2++, x3++, Затем сравнем максимум в II с новым элементом и аналогично в III, получим x2 - -, x3 - -, x4 = x4+2. Совершим три сравнения, мы уменьшили на два входные данные. То есть итого 3n/2 сравнений до опустошения входных данных, но также у нас в конце останется в II и III по элементу, то есть в итоге чуть меньше сравнений, а именно 3n/2 - 2.