ФИНАЛЬНАЯ КОНТРОЛЬНАЯ. 13.05.2018

ВАРИАНТ 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\sum$

Фамилия, имя студента ____ Группа _____________

Фамилия преподавателя, ведущего семинары ____

---

1. Решение каждой задачи должно быть обосновано, ответы без обоснования не принимаются и не оцениваются.
2. В некоторых задачах помимо решения требуется дать краткий ответ "да" или "нет" – это указано в условии после числа баллов за задачу.
3. Можно без доказательства использовать факт **NP**–полноты задач, разобранных на лекциях, на семинарах и описанных в каноническом задании по курсу.
4. Можно без доказательства ссылаться на процедуры, разобранные на лекциях, семинарах или в литературе, при этом обязательно нужно кратко описать, в чём данная процедура заключается.

Простой граф — это граф без петель и кратных ребер.

Задача 1. (2 балла) Дано рекуррентное соотношение:

$$T(n) = \frac{n}{2} \cdot T(n-1) + 1, \quad T(1) = 1$$

Используя **дерево рекурсии**, оцените $T(n)$ как можно точнее. Ваша оценка $f(n)$ должна задаваться явной формулой и должна быть асимптотически эквивалентной $T(n)$, т.е. должна удовлетворять следующему равенству:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{T(n)} = 1$$

Решения, не использующие дерево рекурсии, оцениваются из половины баллов.

◇

Задача 2. (2+2 балла) В памяти хранится массив чисел $A[1, \ldots, n]$. Назовем **горкой** элемент $A[i]$, который не меньше обоих своих соседей, если $1 < i < n$, или не меньше своего правого или левого соседа, если $i = 1$ или $i = n$.
Чтобы получить полный балл за эту задачу, время работы алгоритма из первого пункта должно соответствовать теоретической нижней оценке, которую нужно получить во втором пункте.

Задача 2. 1. (2 балла) Постройте как можно более быстрый алгоритм, использующий попарные сравнения, находящий "горку" в A, докажите его корректность и оцените число сравнений.

Задача 2. 2. (2 балла) Приведите как можно более точную $\Omega(\cdot)$–оценку числа попарных сравнений, которые должен использовать любой алгоритм, находящий "горку" посредством попарных сравнений.

Задача 3. (2 балла) Многочлен $A(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ задан последовательностью коэффициентов. Пусть последовательность $\{y_k\}_{k=0}^{n-1}$ — его ДПФ, т. е. $y_k = A\left(e^{\frac{2\pi k}{n} i}\right)$. Предложите алгоритм, вычисляющий $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (\mathrm{Re}\ y_k + \mathrm{Im}\ y_k)$ и требующий $o(n^2)$ арифметических операций.

◇

Задача 4. (1+3+4 балла)

Задача 4. 1. (1 балл) Да Нет
Пусть m — составное число и A — квадратная матрица с элементами из $\mathbb{Z}_m$. Верно ли, что если для некоторого $n > 0$ выполнено $(\det A)^n = 0 \pmod{m}$, то и $A^n = 0 \pmod{m}$?
При отрицательном ответе приведите явный контрпример. При положительном ответе — обоснование.

Задача 4. 2. (3 балла) Пусть p — простое число, A — неотрицательная целочисленная $n \times n$ матрица, элементы которой меньше $m = p^k$, $k > 1$. Предложите алгоритм вычисления $\det A \pmod{p^k}$, использующий $O(n^3 \operatorname{poly} \log m)$ операций.

Задача 4. 3. (4 балла) Пусть A — неотрицательная целочисленная $n \times n$ матрица, элементы которой меньше m. Предложите алгоритм вычисления $\det A \pmod m$, использующий $O(n^3 \operatorname{poly} \log m)$ операций.

Решение, опирающееся на факторизацию m оценивается из 2 баллов.

◇

Задача 5. (5×0.5 баллов)

Пусть L язык, состоящий из (кодировок) пар логических КНФ-формул $\{F_1(\cdot), F_2(\cdot)\}$ от одинакового числа переменных, таких что $F_1 = F_2$. Выберите все нужные варианты ответов на следующие пять вопросов, обоснуйте их и обведите соответствующие поля.

При ответе можно пользоваться стандартными гипотезами:

$$\mathbf{P} \subsetneq \mathbf{NP} \cap \boldsymbol{co}\text{–}\mathbf{NP};\ \mathbf{NP} \not\subset \boldsymbol{co}\text{–}\mathbf{NP};\ \boldsymbol{co}\text{–}\mathbf{NP} \not\subset \mathbf{NP}$$

1. $L \in \mathbf{P}$? Да Нет

2. $L \in \mathbf{NP}$? Да Нет

3. $L \in \mathbf{NPC}$? Да Нет

4. $L \in \mathbf{co}\text{–}\mathbf{NP}$? Да Нет

5. $L \in \mathbf{co}\text{–}\mathbf{NPC}$? Да Нет

Задача 6. (2 балла) Да Нет

Ребро в потоковой сети называется **критическим**, если уменьшение его пропускной способности уменьшает максимальный поток.

Верно ли, что во всякой потоковой сети, пропускающей ненулевой максимальный поток, найдется хотя бы одно критическое ребро?

При отрицательном ответе постройте явный контрпример. При положительном ответе приведите обоснование.

$\diamond$

Задача 7. (2 балла) Да Нет Пусть $G(V, E)$ — простой неориентированный граф, множество вершин которого допускает дизъюнктное разбиение на непересекающиеся подмножества $V = S \sqcup T$, такие, что индуцированные подграфы G_S и G_T являются кликами.
Верно ли, что соответствующий язык всех графов, обладающих таким свойством, принадлежит **NPC**?
По определению, **индуцированный подграф** G_{V_1}, $V_1 \subseteq V(G)$ *имеет вершинами множество* V_1, *а ребрами — все ребра* G *с вершинами из* V_1.

Задача 8. (2+3 балла) Пусть G — ориентированный ациклический граф с неотрицательными весами ребер, в котором выделены вершины s и t, и заданы числа $W_1 \leq W_2$. Вес пути в G равен сумме весов образующих его ребер.

Задача 8. 1. (2 балла) Постройте линейный по входу алгоритм проверки, что вес W минимального пути из s до t попадает в интервал $W_1 \leq W \leq W_2$?
Алгоритм должен быть достаточно подробно описан. Полным баллом оценивается **только линейный алгоритм**

Задача 8. 2. (3 балла) Да Нет
Верно ли, что задача проверки, что вес W *некоторого* пути в G от s до t попадает в интервал $W_1 \leq W \leq W_2$ является NP-полной?

◇

Задача 9. (3 балла) Да Нет
Пусть $L = \{(\langle G\rangle, s, t)\}$ — это язык, состоящий из стандартных описаний неориентированных графов G, в которых выделены различные вершины s и t такие, что для любого $S \geq 10$ существует путь из s в t длины S.
Длина пути равна числу рёбер в нем, а в пути допускается повторение вершин и повторение ребер, т. е. можно, например, возвращаться по ребру, по которому только что был сделан переход.

Верно ли, что $L \in \mathbf{co\text{–}NP}$?

Задача 10. (3 балла) Дан неориентированный граф G без петель и кратных рёбер, имеющий m рёбер, которым приписаны положительные веса. Раскрасим вершины в два цвета, **трудностью раскраски** назовем наибольший вес ребра между вершинами одного и того же цвета, а если таких рёбер нет, то трудность раскраски считаем равной нулю.

Постройте и обоснуйте $O(m \log m)$–алгоритм, находящий раскраску с **наименьшей трудностью**. *Полиномиальный алгоритм, работающий дольше, чем* $O(m \log m)$, *оценивается из* 1 *балла*

$\diamond$

Задача 11. (2+2 балла) Рассмотрим циркулянтную матрицу порядка $n+1$, первый столбец которой равен $(c_0, c_1, \ldots, c_n)^T$, т. е. матрицу вида

$$\begin{bmatrix} c_0 & c_n & c_{n-1} & \dots & c_1 \\ c_1 & c_0 & c_n & \dots & c_2 \\ c_2 & c_1 & c_0 & \dots & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & c_{n-1} & c_{n-2} & \dots & c_0 \end{bmatrix}$$

Задача 11. 1. (2 балла) Докажите, что все её собственные значения, домноженные на $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, могут быть найдены умножением матрицы Фурье $F_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(\omega_{n+1}^{ij}\right)_{i,j=0}^{n}$ размеров $(n+1) \times (n+1)$ на вектор $(c_0, c_n, c_{n-1}, \ldots, c_1)^T$ (здесь $\omega_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ — корень из единицы).
Указание. Можно без доказательства пользоваться тем фактом, что любая циркулянтная матрица в базисе из столбцов F имеет диагональный вид.

Задача 11. 2. (2 балла) Найдите с помощью алгоритма БПФ собственные значения циркулянтной матрицы, первый столбец которой имеет вид $(1, 2, 4, 6)^T$.

ФИНАЛЬНАЯ КОНТРОЛЬНАЯ. 13.05.2018

ВАРИАНТ 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\sum$

Фамилия, имя студента ____ Группа _____________

Фамилия преподавателя, ведущего семинары ____

---

1. Решение каждой задачи должно быть обосновано, ответы без обоснования не принимаются и не оцениваются.
2. В некоторых задачах помимо решения требуется дать краткий ответ "да" или "нет" – это указано в условии после числа баллов за задачу.
3. Можно без доказательства использовать факт **NP**–полноты задач, разобранных на лекциях, на семинарах и описанных в каноническом задании по курсу.
4. Можно без доказательства ссылаться на процедуры, разобранные на лекциях, семинарах или в литературе, при этом обязательно нужно кратко описать, в чём данная процедура заключается.

Простой граф — это граф без петель и кратных ребер.

Задача 1. (2 балла) Дано рекуррентное соотношение:

$$T(0) = 0, \quad T(n) = n \cdot T(n-1) + 1$$

Используя **дерево рекурсии**, оцените $T(n)$ как можно точнее. Ваша оценка $f(n)$ должна задаваться явной формулой и должна быть асимптотически эквивалентной $T(n)$, т.е. должна удовлетворять следующему равенству:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{T(n)} = 1$$

Решения, не использующие дерево рекурсии, оцениваются из половины баллов.

◇◇

Задача 2. (2+2 балла) В памяти хранится массив чисел $A[1, \dots, n]$. Назовем **ямкой** элемент $A[i]$, который не больше обоих своих соседей, если $1 < i < n$, или не больше своего правого или левого соседа, если $i = 1$ или $i = n$.
Чтобы получить полный балл за эту задачу, время работы алгоритма из первого пункта должно соответствовать теоретической нижней оценке, которую нужно получить во втором пункте.

Задача 2. 1. (2 балла) Постройте как можно более быстрый алгоритм, использующий попарные сравнения, находящий "ямку" в A, докажите его корректность и оцените число сравнений.

Задача 2. 2. (2 балла) Приведите как можно более точную $\Omega(\cdot)$–оценку числа попарных сравнений, которые должен использовать любой алгоритм, находящий "ямку" посредством попарных сравнений.

Задача 3. (2 балла) Многочлен $A(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ задан последовательностью коэффициентов. Пусть последовательность $\{y_k\}_{k=0}^{n-1}$ — его ДПФ, т. е. $y_k = A\left(e^{\frac{2\pi k}{n} i}\right)$. Предложите алгоритм, вычисляющий $\sum_{k=0}^{n-1}(\mathrm{Re}\ y_k - \mathrm{Im}\ y_k)$ и требующий $o(n^2)$ арифметических операций.

Задача 4. (1+3+4 балла)

Задача 4. 1. (1 балл) Да Нет
Пусть m — составное число и A — квадратная матрица с элементами из $\mathbb{Z}_m$. Верно ли, что если для некоторого $n > 0$ выполнено $A^n = 0 \pmod m$, то и $(\det A)^n = 0 \pmod m$?

При отрицательном ответе приведите явный контрпример. При положительном ответе — обоснование.

Задача 4. 2. (3 балла) Пусть p — простое число, A — неотрицательная целочисленная $n \times n$ матрица, элементы которой меньше $m = p^k$, $k > 1$. Предложите алгоритм вычисления $\det A \pmod{p^k}$, использующий $O(n^3 \operatorname{poly} \log m)$ операций.

Задача 4. 3. (4 балла) Пусть A — неотрицательная целочисленная $n \times n$ матрица, элементы которой меньше m. Предложите алгоритм вычисления $\det A \pmod{m}$, использующий $O(n^3 \operatorname{poly}\log m)$ операций.
Решение, опирающееся на факторизацию m оценивается из 2 баллов.

Задача 5. (5×0.5 баллов)
Пусть L язык, состоящий из (кодировок) пар логических ДНФ-формул $\{F_1(\cdot), F_2(\cdot)\}$ от одинакового числа переменных, таких, что $F_1 \neq F_2$. Выберите все нужные варианты ответов на следующие пять вопросов, обоснуйте их и обведите соответствующие поля.
При ответе можно пользоваться стандартными гипотезами:

$$\mathbf{P} \subsetneq \mathbf{NP} \cap \boldsymbol{co}\text{–}\mathbf{NP}; \ \mathbf{NP} \not\subset \boldsymbol{co}\text{–}\mathbf{NP}; \ \boldsymbol{co}\text{–}\mathbf{NP} \not\subset \mathbf{NP}$$

1. $L \in \mathbf{P}$? Да Нет

2. $L \in \mathbf{NP}$? Да Нет

3. $L \in \mathbf{NPC}$? Да Нет

4. $L \in \mathbf{co\text{–}NP}$? Да Нет

5. $L \in \mathbf{co\text{–}NPC}$? Да Нет

Задача 6. (2 балла) Да Нет
Назовем ребро потоковой сети **блокирующим**, если увеличение его пропускной способности приводит к увеличению максимального потока. Покажите, что если ребро (u, v) – блокирующее, то любой минимальный разрез содержит его.

◇◇

Задача 7. (2 балла) Да Нет

Пусть $G(V, E)$ — простой неориентированный граф, множество вершин которого допускает дизъюнктное разбиение на непересекающиеся подмножества $V = S \sqcup T$, такие, что индуцированные подграфы G_S и G_T являются независимыми множествами.

Верно ли, что соответствующий язык всех графов, обладающих таким свойством, принадлежит **NPC**?

По определению, **индуцированный подграф** G_{V_1}, $V_1 \subseteq V(G)$ *имеет вершинами множество* V_1*, а ребрами — все ребра* G *с вершинами из* V_1*.*

Задача 8. (2+3 балла)

Задача 8. 1. (2 балла) Пусть G — простой неориентированный граф, в котором степень каждой вершины чётная, и W — натуральное число. Постройте линейный по входу алгоритм проверки, что в G есть цикл, состоящий из $\geq W$ *различных* ребер.
Алгоритм должен быть достаточно подробно описан. Полным баллом оценивается **только линейный алгоритм**

Задача 8. 2. (3 балла) Да Нет
Пусть G — ориентированный граф без петель и кратных дуг и W — натуральное число. Верно ли, что задача проверки, что в G есть цикл, состоящий из $\geq W$ различных дуг, является NP-полной?

◇◇

Задача 9. (3 балла) Да Нет
Пусть G — неориентированный граф с выделенными вершинами s и t, такой, что существует $S \geq 10$ такое, что в G нет пути от s до t длины S.
Длина пути равна числу ребер в нем, а в пути допускается повторение вершин и повторение ребер, т. е. можно, например, возвращаться по ребру, по которому только что был сделан переход.

Верно ли, что соответствующий язык $L = \{(\langle G\rangle, s, t)\}$ принадлежит **NP**?

Задача 10. (3 балла) Дан неориентированный граф без петель и кратных ребер G, имеющий m рёбер, которым приписаны положительные веса. Раскрасим вершины в два цвета, **легкостью раскраски** назовем наименьший вес ребра между вершинами одного и того же цвета, а если таких рёбер нет, то легкость раскраски считаем равной $+\infty$.

Полным баллом оценивается $O(m \log m)$–алгоритм, находящий раскраску с **наибольшей легкостью**.

Задача 11. (2+2 балла) Рассмотрим циркулянтную матрицу порядка $n+1$, первый столбец которой равен $(c_0, c_1, \ldots, c_n)^T$, т. е. матрицу вида

$$\begin{bmatrix} c_0 & c_n & c_{n-1} & \ldots & c_1 \\ c_1 & c_0 & c_n & \ldots & c_2 \\ c_2 & c_1 & c_0 & \ldots & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & c_{n-1} & c_{n-2} & \ldots & c_0 \end{bmatrix}$$

Задача 11. 1. (2 балла) Докажите, что все её собственные значения, домноженные на $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, могут быть найдены умножением матрицы Фурье $F_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(\omega_{n+1}^{ij}\right)_{i,j=0}^{n}$ размеров $(n+1) \times (n+1)$ на вектор $(c_0, c_n, c_{n-1}, \ldots, c_1)^T$ (здесь $\omega_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ — корень из единицы).
Указание. Можно без доказательства пользоваться тем фактом, что любая циркулянтная матрица в базисе из столбцов F имеет диагональный вид.

Задача 11. 2. (2 балла) Найдите с помощью алгоритма БПФ собственные значения циркулянтной матрицы, первый столбец которой имеет вид $(1, 3, 6, 9)^T$.