

Домашняя работа 3

P.S. Я доделаю остальные задачи в ближайшее время. P.P.S. Всё воскресенье мы с Сергеевым Никитой(мой сосед) коллективным разумом решали АМВ, поэтому многие решения могут быть похожи(правильны или не правильны), прошу отнестись с пониманием.

Задача 1.

Задача 2.

1. Докажем, что NP. Сертификат - набор, на котором выполняется формула. Проверим, что там не более k истин и потом проверим что выполняется - и то и то полином.

2.

Задача 4.

1. Пусть в качестве сертификата подается описание остовного дерева. Сначала проверим, что все его вершины - вершины нашего графа - полином, потом проверим связность (BFS) - полином и еще проверка ацикличности - тоже модификация BFS - полином. В конце концов нужно еще проверить условие на степень вершины - полином. Таким образом сертификат проверен на определение остовного дерева + условие на вершины за полином $\Rightarrow L \in NP$.

2. Сведем задачу поиска гамильтонова пути (NPC) к нашей задаче.

- Пусть $k = 2$, тогда задача поиска остовного дерева = поиск гамильтонова пути. "константная сводимость" а значит и полиномиальная.
- И так, $k = 2$ задача NPC, а значит для любых больших тоже NPC, чтд.

Задача 5.

1. Сертификат - список вершин клики, а также нужно за полином от колва вершин проверить что степень удовлетворяет условиям.

2. Нужно сводить CLIQUE к 3-CLIQUE а не наоборот, иначе доказательство неконструктивно.

3. Заметим, что ограничение на степень вершин очень сильно упрощает нам жизнь, то есть, максимальный возможный размер клики - 4 вершины, докажем, что больше нельзя:

Пусть возможна клика на 5ти вершинах, тогда по определению клики(полный подграф на n вершинах) из каждой вершины этого подграфа должно выходить как минимум 4 ребра - что невозможно в рамках нашей задачи.

- То есть у нас в принципе возможны клики на 4, 3, 2 и 1(ха) вершинах. Тогда если приходит $k > 4$ ответ сразу нет, если 1 или 2 и граф не пустой - ответ да за константу времени.
- Напишем как мы проверим наличие клики на 3 или на 4 вершины. Понятно что если есть клика на 4 - то это отдельная компонента связности. Найти все компоненты связности можно с помощью BFS. И так если мы нашли компоненту связности размером в 4 вершины, за константу проверим, что этот подграф полный. Так мы найдем(или нет) всем клики размером 4. Тут у нас BFS для поиска компонент связности, и потом проверка на полноту - итого полином.
- если $k = 3$, нужно найти клики размером 3. Тогда для каждой вершины найдем смежные с ней, и если две какие то вершины смежные с начальнйо вершиной тоже смежные - то клика есть, иначе нет. Очевидно полином от колва вершин.

Задача 6.

Задача 7. Пусть у нас есть некоторая программа которая проверяет наличие цикла(по условию). Так как авторы послали нам такой крутой алгоритм, давайте просто эмпирически попробуем выяснить как то или иное ребро влияет на гамильтоновость цикла. Будем последовательно каждое из ребер и заново запускать на них нашу программу. Допустим после удаления ребра X у нас ответ алгоритма не изменился - был да, и остался да, тут два варианта:

- Это ребро не является частью пути

- В графе несколько гам. циклов и мы сломали один, но сохранили другие. Давайте сведем этот случай к поиску "последнего" гам. цикла. Т.е. будем считать, что если мы удалили ребро и в цикле по прежнему есть гам.цикл, то см пункт 1.

Если же ответ изменился на - НЕТ, то сохраним это ребро в список ребер из гам. цикла. Таким образом мы за $O(|E| * poly(n))$ проверим все ребра на принадлежность нашему циклу.

Задача 8.

1. Докажем что NP. Сертификат - набор пар "изоморфных" вершин. Проверить что графы реально изоморфны - пробажить по матрицам смежности зная порядковые номера вершин - полином.

2. https://en.wikipedia.org/wiki/Subgraph_isomorphism_problem Мы доказали, что задача NP, докажем, что она NP Трудная, тогда она будет NPC. Утверждение - задача NP трудная, если хотя бы одна ее подзадача NP-трудная. Тогда рассмотрим изоморфизм таких G_1, G_2 , где G_2 -полный граф на k вершинах. То есть у нас есть частный случай, который не решается за полином \Rightarrow Общий случай тоже не решается за полином. Говоря более строго, наша задача с полным G_2 = задача поиска клики на K вершинах в графе G_1 - она NPC, а значит и NP Трудная. Тогда у нас есть задача, у которой подзадача NP-трудная \Rightarrow вся задача такова. Так как она еще и NP \Rightarrow она NPC.

Задача 8. https://ru.wikipedia.org/wiki/Доминирующее_множество_чтобы_никого_не_обманывать, скажу что мое решение - перевареное решение с вики.

1. Доказательство принадлежности NP. Сертификат - множество вершин из D и не из D , далее для каждой вершины не из D проверка, что одна из смежных с какой нибудь из D . За полином, так как n вершин и проверка смежности - полином.

2.