MIDTERM. 25.03.2018

ВАРИАНТ 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sum$

Фамилия, имя студента ______________________________ Группа __________

Фамилия преподавателя, ведущего семинары ______________________________

---

1. Решение каждой задачи должно быть обосновано, ответы без обоснования не принимаются и не оцениваются.
2. В некоторых задачах помимо решения требуется дать краткий ответ "да" или "нет" – это указано в условии после числа баллов за задачу.
3. Можно без доказательства использовать факт **NP**–полноты задач, разобранных на лекциях, на семинарах и описанных в каноническом задании по курсу.
Полиномиальная сводимость обозначается $\le_{\mathbf{P}}$.

Задача 1. (2 балла) Да Нет
Верно ли, что существует такая функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что $\forall c, d > 0$ выполнено

$$f(n) = \omega\left(\log_2^c n\right), \; f(n) = o(n^d),$$

т.е. функция $f(n)$ растет быстрее любой наперед заданной степени двоичного логарифма, но медленнее любого наперед заданного полинома?
При отрицательном ответе приведите доказательство. При положительном ответе приведите явный пример.

Вариант 2. (2 балла) Да Нет
При отрицательном ответе приведите доказательство. При положительном ответе приведите явный пример. Верно ли, что существует такая функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что $\forall\, c, d > 0$ выполнено

$$f(n) = \omega(n^c), \; f(n) = o(2^{nd}),$$

т.е. функция $f(n)$ растет быстрее любого заданного полинома, но медленнее любой заданной экспоненты?

◇

Задача 2. (1 балл) Да Нет
Из урны, в которой находятся белые и черные шары, дважды извлекают и возвращают обратно случайный шар. Верно ли, что вероятность того, что цвета изъятых шаров совпадут, не меньше 50%?

Вариант 2. (1 балл) Да Нет
Предположим, что по статистическим данным за время эксплуатации смартфонов в 10% случаев теряется сенсорная чувствительность экрана (событие A), в 20% случаев выходит из строя аккумулятор (событие B), а в 72% случаев этим поломок не наблюдается. Верно ли, что события A и B зависимы?

Задача 3. (2 балла)

Пусть ξ — дискретная случайная величина, принимающая конечное множество значений $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_n$, соответственно. Найдите минимум функции $f(x) \stackrel{def}{=} \mathbb{E}|\xi - x|$.

Вариант 2. (2 балла)

Саша и Маша решили погулять. Для этого они договорились встретиться у 7-го общежития в 18:00. Саша очень пунктуальный человек и подходит точно ко времени, которое он себе установит. Маша же менее пунктуальна и может опоздать на t_i минут с вероятностью p_i, $0 \le t_1 < \ldots < t_n$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Если Саша пришел раньше Маши, то он ждет её, и наоборот. К какому времени должен прийти Саша, чтобы в среднем время ожидания одним человеком другого было бы минимальным?

◇

Задача 4. (2 балла) Да Нет
Некто анонсировал теорему (т. е. утверждение может быть и неверно), что любой МТ требуется $\Omega(n \log_2^{\log_2 n} n)$ тактов для того, чтобы проверять тавтологичность формул , заданных в формате 4-ДНФ, т. е. дизъюнктивных нормальных форм, в каждый конъюнкт которых входит не более четырех переменных, здесь n — длина входа. Считаем, что теорема верна. Верно ли, что из этого вытекает, что $\mathbf{P} \neq \mathbf{co{-}NP}$?

Вариант 2. Да Нет
Некто анонсировал теорему (т. е. утверждение может быть и неверно), что любой МТ требуется $\Omega(n \log_2^{\log_2 n} n)$ тактов для того, чтобы найти выполняющий набор в задаче 3-SAT, здесь n — длина входа. Считаем, что теорема верна. Верно ли, что из этого вытекает, что $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$?

Задача 5. (1 балл) Да Нет
Верно ли, что язык 5-КНФ-Л является полиномиально полным в **NP**?

Язык 5-КНФ-Л состоит из всех формул в конъюнктивной нормальной форме, принимающих ложное значение при каких-то значениях переменных, в каждый дизъюнкт которых входит не более пяти переменных.
Можно использовать гипотезы $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ и $\mathbf{NP} \neq \mathbf{co{-}NP}$.

Вариант 2. (1 балл) Да Нет
Верно ли, что язык 5-ДНФ-И является полиномиально полным в **co–NP**?

Язык 5-ДНФ-И состоит из всех формул в дизъюнктивной нормальной форме, принимающих истинное значение при каких-то значениях переменных, в каждый конъюнкт которых входит не более пяти переменных.
Можно использовать гипотезы $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ и $\mathbf{NP} \neq \mathbf{co{-}NP}$.

◇

Задача 6. (1 балл) Да Нет
Верно ли, что дополнение к любому вершинному покрытию в графе есть независимое множество?

Справка. Вершинным покрытием называется такое подмножество S множества вершин V, что у каждого ребра хотя бы один из концов принадлежит S. Независимым множеством называется некоторое подмножество S множества V такое, что никакие две вершины из S не соединены ребром.
При положительном ответе приведите доказательство. При отрицательном ответе приведите явный пример.

Вариант 2. (1 балл) Да Нет
Верно ли, что язык четных чисел в десятичной записи может быть полиномиально сведен к некоторому языку, состоящему из одного (конкретного) слова?
При отрицательном ответе приведите доказательство. При положительном ответе приведите явный пример.

Задача 7. (2 балла) Рассмотрим рекуррентное соотношение $T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{\sqrt[3]{n}}{3} \right\rfloor\right) + n$. Найдите Θ–асимптотику $T(n)$.
Обязательно обоснуйте оценки, связанные с округлением или возможным сдвигом аргумента. Решения, в которых эти операции не анализируются, оцениваются из одного балла.

Вариант 2. Рассмотрим рекуррентное соотношение $T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{\sqrt[5]{n}}{5} \right\rfloor\right) + \log_5 n$. Найдите Θ–асимптотику решения $T(n)$.
Обязательно обоснуйте оценки, связанные с округлением или возможным сдвигом аргумента. Решения, в которых эти операции не анализируются, оцениваются из одного балла.

◇

Задача 8. (3 балла) Да Нет
Пусть стало известно, что $\mathbf{NPC} \cap \mathbf{co\text{–}NP} \neq \varnothing$. Верно ли, что отсюда следует, что $\mathbf{NP} = \mathbf{co\text{–}NP}$?

Вариант 2. (3 балла) Да Нет
Рассмотрим язык L, состоящий из таких пар чисел $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, что n можно разложить на k нетривиальных сомножителей.

(i) (2 балла) Докажите, что $L \in \mathbf{co\text{–}NP}$.

(ii) (1 балл) Приведите явный сертификат непринадлежности слова $(524, 4)$ языку L. Простыми в рекурсивном построении считаются только числа 2, 3 и 5 (они сами являются своими сертификатами).

Указание. $2^{65} \neq 1 \mod 131$.

Задача 9. (2 балла)

Массив состоит из двоичных записей всех чисел от 1 до N в произвольном порядке, но два числа пропущены.

Предложите алгоритм нахождения пропущенных чисел, который использует фиксированное число проходов по массиву, т. е. каждый элемент разрешено просматривать фиксированное, не зависящее от N, число раз. Кроме того, разрешается использовать не более $O(\log N)$ дополнительных битов. *Правильно работающий алгоритм, работающий дольше требуемого, либо использующий больше памяти, оценивается из 1 балла.*

Вариант 2. (2 балла)

По двоичному слову w построена функция $f_w : \{0,1\}^{|w|} \to \mathbb{Z}$, которая на слове u равна числу позиций, в которых w и u совпадают. Само слово w неизвестно, известна лишь его длина $|w|$ и то, что в нем ровно три 0. Постройте алгоритм, позволяющий, вызвав $O(\log |w|)$ раз функцию f_w, найти позиции нулей в w, то есть $i < j < k \in [1; |w|]$ такие, что $w[i] = w[j] = w[k] = 0$.

◇

Задача 10. Рассмотрим трехдиагональную $n \times n$ матрицу

$$A_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

На главной диагонали стоят тройки, а на двух соседних — единицы. Пусть $d_n = \det A_n$. Ясно, что $d_1 = 3$, $d_2 = 8$, $d_3 = 21$, $d_4 = 55$.

Задача 10. 1. (2 балла) Найдите рекуррентное уравнение для детерминанта $d_n = \det A_n$.

Замечание. Для упрощения вычислений в следующих пунктах можно (но не необходимо) *определить* последовательность для $d_0 = 1$. При использовании такого продолжения необходимо также обосновать, почему оно удовлетворяет рекуррентному соотношению для исходной (не продолженной) последовательности.

Задача 10. 2. (1 балл) Найдите асимптотику абсолютного значения d_n при $n \to \infty$.

Задача 10. 3. (3 балла) Вычислите точное значение d_{2018} по модулю 11.

Указание. 5 является квадратичным вычетом по модулю 11.

Вариант 2. Рассмотрим трехдиагональную $n \times n$ матрицу

$$A_n = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

На главной диагонали стоят четверки, а на двух соседних — единицы. Пусть $d_n = \det A_n$. Ясно, что $d_1 = 4$, $d_2 = 15$, $d_3 = 56$, $d_4 = 209$.

Задача 10. 4. (2 балла) Найдите рекуррентное уравнение для детерминанта $d_n = \det A_n$.

Замечание. Для упрощения вычислений в следующих пунктах можно (но не необходимо) *определить* последовательность для $d_0 = 1$. При использовании такого продолжения необходимо также обосновать, почему оно удовлетворяет рекуррентному соотношению для исходной (не продолженной) последовательности.

Задача 10. 5. (1 балл) Найдите асимптотику абсолютного значения d_n при $n \to \infty$.

Задача 10. 6. (3 балла) Вычислите точное значение d_{2018} по модулю 11.

Указание. 3 является квадратичным вычетом по модулю 11.

Задача 11. (3+4 балла) Рассматривается язык L выполнимых формул от n переменных вида $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m$, где каждый C_k имеет один из трех видов: $(x_i \equiv x_j)$, $(\overline{x_i} \equiv x_j)$, $(x_i \equiv \overline{x_j})$, $(\overline{x_i} \equiv \overline{x_j})$.

(i) Верно ли, что этот язык **NP**–полон?

(ii) Верно ли, что если каждый C_k будет иметь вид $(x_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \equiv x_{i_2}^{\alpha_{i_2}} \equiv \ldots \equiv x_{i_l}^{\alpha_{i_l}})$, то язык будет **NP**–полон? (Под $x_i^{\alpha_i}$ понимается либо x_i, либо $\overline{x_i}$)

Напоминание: $a \equiv b = \overline{a \operatorname{xor} b} = ab \vee \overline{b}\overline{a}$.

Вариант 2. Рассматривается язык L выполнимых формул от n переменных вида $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m$, где каждый C_k имеет один из трех видов: $(x_i \operatorname{xor} x_j)$, $(\overline{x_i} \operatorname{xor} x_j)$, $(x_i \operatorname{xor} \overline{x_j})$, $(\overline{x_i} \operatorname{xor} \overline{x_j})$.

(i) Верно ли, что этот язык **NP**–полон?

(ii) Верно ли, что если каждый C_k будет иметь вид $(x_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \operatorname{xor} x_{i_2}^{\alpha_{i_2}} \operatorname{xor} \ldots \operatorname{xor} x_{i_l}^{\alpha_{i_l}})$, то язык будет **NP**–полон? (Под $x_i^{\alpha_i}$ понимается либо x_i, либо $\overline{x_i}$)

Напоминание: $a \operatorname{xor} b = \overline{a \equiv b} = a\overline{b} \vee b\overline{a}$.