Гавриленко Арсений *777*

Домашняя работа 7

Задача 1. В Кормене доказыается, что мин остов деревья строятся жадно. Тогда рассмотрим случай, когда при жадном построении мы получили два разных минимальных остовных дерева.

- Во-первых деревья отличаются на как минимум 2 ребра
- Значит мы на каком-то шаге мы могли выбрать ребро a или ребро b, причем такое было дважды
- Т.к. алгоритмы получения этих деревьев жадные, значит мы оба раза выбрали минимальное ребро, значит есть несколько(болше 1) ребер с одним весом, получаем противоречие.

Задача 2. Пусть ребро добавленное с образованием цикла имеет вес меньший, чем все остальные ребра цикла. Тогда можно было бы выкинуть самое тяжелое ребро из этого цикла , дерево осталось бы остовным(нет циклов, все вершины покрыты). Тогда получается, что до этого было не минимальное остовное дерево - противоречие.

Задача 3. В задаче не сказанно, что остов минимальный, значит просто построим максимальный остов. Сортировка ребер займет O(E log E). Далее просто воспользуемся алгоритмом Крускала, его асимптотика O(E lg E), что нам и нужно(см кормен стр653).

- Мы точно получим остов, так как по алгоиртму Крускала.
- Пусть самое легкое ребро этого остова не максимальное, значит могли взять меньше, значит это не максимальный остов - противоречие.

Задача 4. Найдем все пути мз A в B с помощью BFS - O(V+E). Теперь поймем, что если у двух путей есть общие ребра, то это может сократить нашу сумму. Тогда разобьем все пути на множества такие что, два пути в одном множестве, если у них есть общее ребро. Далее запустм нашу функцию

Задача 5. Для каждой вершины v_i из графа G сделаем следующее - добавим новую вершину $v_i^{'}$ следующим образом:

- все ребра выходящие из v_i теперь выходят из $v_i^{'}$
- все ребра вхоядшие в v_i - без изменений
- на ребро $v_i - v_i^{'}$ поставим пропускную способность, равную пропускной спосбности v_i

Теперь решим задачу макс потока для нового графа G', я утверждаю, что они эквиваленты по построению. Новый сток и новый исток пропускают столько же, сколько старые, для остальных пар вершин аналогично.

Задача 6. Воспользуемся общеизвестным приемом, разобьем каждую вершину на две и соеденим их единичным ребром. Затем найдем все пути из A в B с помощью простой модификации BFS например. Получили какое то множество путей, выберем оттуда не имеющие общих ребер. Получим какое-то новое подмножнство S. Размер S - как раз количество ребер, которые нужно удалить, чтобы A и B оказались в разных компонентах связности.

Корректность Пусть можно удалить меньше вершин, чем мы предложили, тогда не удалим какой- то путь из A в B - противоречие.

Асимптотика $O(E^2)$, так как нужно для каждой пары найти пересечение или отсутсвие такового.

Задача 7. Задача есть на neerc (алгоритм Куна)

Алгоритм просматривает все вершины v первой доли графа: $v = 1 \ldots n_1$. Если текущая вершина v уже насыщена текущим паросочетанием (т.е. уже выбрано какое-то смежное ей ребро), то эту вершину пропускаем. Иначе — алгоритм пытается насытить эту вершину, для чего запускается поиск увеличивающей цепи, начинающейся с этой вершины.

Поиск увеличивающей цепи осуществляется с помощью специального обхода в глубину или ширину (обычно в целях простоты реализации используют именно обход в глубину). Изначально обход в глубину стоит в текущей ненасыщенной вершине v первой доли. Просматриваем все рёбра из этой вершины, пусть текущее ребро — это ребро (v,to). Если вершина to ещё не насыщена паросочетанием, то, значит, мы смогли найти увеличивающую цепь: она состоит из единственного ребра (v,to); в таком случае просто включаем это ребро в паросочетание и прекращаем поиск увеличивающей цепи из вершины v. Иначе, — если to уже насыщена каким-то ребром (p,to), то попытаемся пройти вдоль этого ребра: тем самым мы попробуем найти увеличивающую цепь, проходящую через рёбра (v,to), (to,p). Для этого просто перейдём в нашем обходе в вершину p — теперь мы уже пробуем найти увеличивающую цепь из этой вершины.

Можно понять, что в результате этот обход, запущенный из вершины v, либо найдёт увеличивающую цепь, и тем самым насытит вершину v, либо же такой увеличивающей цепи не найдёт (и, следовательно, эта вершина v уже не сможет стать насыщенной).

После того, как все вершины $v = 1 \ldots n_1$ будут просмотрены, текущее паросочетание будет максимальным.

Асимптотика Запускается n поиском в глубину, поэтому в $O(V^3)$

Задача 8. Очень долгое и муторное решение тоже есть на neerc, надеюсь на КР таких задач не будет - гроб(

Задача 9.

Задача 10.

Задача 11