Гавриленко Арсений *777*

Домашняя работа 6

hyperref

Задача 1.

1. Перемножим матрицы, тогда получим некоторую матрицу $W * W^{-1} = M$. Хотим доказать, что М - единичная. Выпишем в явном виде ее элементы, равные скалярному произведения строки первой матрицы на столбец второй:

$$M_{kj} = \frac{1}{n}\sum_{f=0}^{n-1} \omega_n^{kf}\omega_n^{-fj} = \frac{1}{n}\sum_{f=0}^{n-1} \omega_n^{f(k-j)} = \frac{1}{n}\sum_{f=0}^{n-1} e^{f\frac{2\pi i}{n}(k-l)}$$

Отсюда заметим, что во-первых, при k = l выражение равно 1 - то есть на диагонали единицы. Во-вторых, если k-l = m != 0, то запишем как сумму геометрической прогрессии с шагом e^m

$$\frac{1}{n}\sum_{f=0}^{n-1} e^{f\frac{2\pi i}{n}(k-l)} = \frac{1}{n}\sum_{f=0}^{n-1} e^{f\frac{2\pi i}{n}m} = \frac{1}{n}\cdot\frac{e^0(1-(e^m)^n)}{1-e^m} = 0$$

2. В середине пары Даня мне любезно еще раз пояснил, что чтобы воспользоваться обратным ДПФ, нужно сделать следующее:

- Будем также рекурсивно спускаться.
- Но теперь будем подставлять в качетве корней $\frac{w_n^{-\alpha}}{n}$, а домножать на корни y.
- дальше будем возводить в степени/подставлять, в общем действовать как в прямом ДПФ. Таким образом $y = M \cdot a$, теперь $M^{-1} \cdot y = a$

Задача 2. Находим корни 1го, корни 2го, перемножаем их, потом делаем обратное БПФ к полученым корням произведения.

Задача 3. source https://eduardgorbunov.github.io/assets/files/amc$_7 78_s eminar_0 8.pdf$.,.

Задача 4. Запишем для начала DFT для вектора c- DFT(c) = W * c и вектора b FT(x) = W * x:

$$DFT(c) = \begin{bmatrix} \sum_{p=0}^{n-1} c_p \omega_n^{0p} \\ \sum_{p=0}^{n-1} c_p \omega_n^{1p} \\ \vdots \\ \sum_{p=0}^{n-1} c_p \omega_n^{(n-1)p} \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$DFT(x) = \begin{bmatrix} \sum_{p=0}^{n-1} x_p \omega_n^{0p} \\ \sum_{p=0}^{n-1} x_p \omega_n^{1p} \\ \vdots \\ \sum_{p=0}^{n-1} x_p \omega_n^{(n-1)p} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Рассмотрим j ую компоненту вектора b:

$$DFT(b)_j = \sum_{p=0}^{n-1} b_p \omega_n^{jp}$$

теперь подставим все b_p :

$$DFT(b_j) = \sum_{p=0}^{n-1} b_p \omega_n^{jp}$$

$$DFT(b_j) = DFT(c_j) \cdot DFT(x_j) = \sum_{p=0}^{n-1} c_p \omega_n^{jp} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x_k \omega_n^{jk} = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} c_p \cdot x_k \omega_n^{j(k+p)}$$

Понятно, что и в той и в той сумме у нас предоставлены все комбинации $c_p \cdot x_k$, осталось доказать что степени при них будут совпадать. Заметим, что сумма $k + p$ равна либо какой то величине p либо p+n для каждого b_j. Рассмотрим b через произведение двухDFT - мы видим, что для каждой суммы k+p у нас существует две пары $c_p \cdot x_k$ которые ее дадут(пара и развернутая пара). Приччем в одном случае сумма будет равна p , а в другом p + n, но по свойству корней , у ω в обоих случаях будет одинаковая степень ω_n^{jp}. Понятно что все такие пары с одинаковыми степенями эквиваленты b_p вычисленному обычным способом.