Алгоритмы и модели вычислений, группы 774 – 775, задание 8

- Кормен–Лейзерсон–Ривест–Штайн, глава 23, параграфы 1 и 2 (остовные деревья).
- Кормен–Лейзерсон–Ривест–Штайн, глава 26, параграфы 1 и 2 (максимальный поток).

Задание 8

1. Докажите, что если веса всех ребер связного неориентированного графа различны, то минимальный остов единственен.

2. Ясно, что при добавлении к минимальному остову графа любого ребра, которое в него не вошло, образуется цикл. Докажите, что добавленное ребро имеет вес не меньший, чем любое из ребер цикла.

3. Предложите $O(E \log E)$ алгоритм построения остова с максимальным весом самого легкого ребра в неориентированном связном взвешенном графе.

4. На вход дан ориентированный граф без циклов, у каждого ребра задана его стоимость (натуральное число). Одна из вершин помечена стартовой и одна конечной. Нужно выбрать подмножество ребер с наименьшей суммарной стоимостью так, чтобы любой путь из начальной вершины в конечную проходил ровно через одно ребро из выбранного подмножества.

5. Пусть на вход подан ориентированный граф, для которого указаны исток, сток и пропускные способности всех ребер. Пусть также заданы пропускные способности всех вершин (такие числа, что мощность потока, входящего в вершину ограничена этим числом). Предложите алгоритм поиска максимального потока в таком графе.

6. Предложите полиномальньный алгоритм, который по заданному неориентированному графу с двумя отмеченными вершинами A и B найдет наименьшее по мощности подмножество вершин, при удалении которых вместе с инцидентными ребрами вершины A и B оказываются в разных компонентах связности.

7. **Паросочетание** в графе — произвольное множество рёбер двудольного подграфа, такое, что никакие два ребра не имеют общей вершины.

   Максимальное число рёбер в паросочетании графа G называется **числом паросочетания**.

   Предложите полиномиальный алгоритм поиска паросочетания с максимальным числом в двудольном графе.

8. Вам дана квадратная таблица $n \times n$, заполненная целыми неотрицательными числами, предложите полиномиальный алгоритм, как выбрать из нее n чисел так, чтобы их сумма была максимальной, а никакие два числа не лежали в одной строке или одном столбце.

9. Сделайте что хотите (гуглите, скатывайте, мучайте товарищей), но научитесь аккуратно решать задачу поиска подстроки в строке с помощью БПФ. Пусть A - это строка, а B - шаблон поиска, предложите алгоритм поиска шаблона B в строке A, основанный на БПФ и работающий за время $O(|A| \log |B|)$. Включать решения в домашнее задание не нужно.

10. *Абсолютно философская задача, которая здесь расположена исключительно для развития кругозора.* Как можно заметить, потоки на некотором фиксированном графе образуют линейное пространство. (Сумма двух потоков — поток, произведение потока на число — поток). Ограничения на пропускную сопсобность ребер представимы как некоторые линейные неравенства в этом пространстве. Так, задача поиска максимального потока может быть сформулирована в виде задачи линейного программирования (см английскую Википедию), для которой придумано множество возможных способов решения. Собственно, задача: сформулировать задачу 7 в виде проблемы формальной задачи линейного программирования в канонической форме.