Домашняя работа 4 birCXCA

November 14, 2019

Задача 1 (5 баллов)

Гамма-распределение Gamma(α, λ) - это распредление с плотностью вероятности $f(x) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$ ($\Gamma(\alpha)$ - гамма-функция Эйлера) Посчитайте мат.ожидание и дисперсию для гамма-распределения. Как распределена сумма n независимых случайных величин, каждая из которых распределена как $\Gamma(\alpha, \lambda)$? Если $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, то как распределена с.в. aX, где $a > 0$ - произвольная константа? (приведите все! выкладки)

Решение

Перейдем ко второй части.

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}$$

$$\mathbb{E}x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) x dx = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\lambda^\alpha x^\alpha e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{0}^{+\infty} x^{(\alpha+1)-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda^{\alpha+1}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\alpha \Gamma(\alpha)}{\lambda} = \frac{\alpha}{\lambda}$$

$$\mathbb{D}x = \mathbb{E}x^2 - (\mathbb{E}x)^2$$

$$\mathbb{E}x^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) x^2 dx = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha+1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{0}^{+\infty} x^{(\alpha+2)-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^{\alpha+2}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}{\lambda} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}$$

$$\mathbb{D}x = \mathbb{E}x^2 - (\mathbb{E}x)^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

Перейдем ко второй части.

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}$$

$$\phi_\xi(t) = \int \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha+1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} e^{itx} dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int x^{\alpha+1} e^{-\lambda x + itx} dx$$

Замена

$$y = \lambda x - itx = x(\lambda - it) \to x = \frac{y}{\lambda - it} \to dx = \frac{dy}{\lambda - it}$$

$$\phi_\xi(t) = \int \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha+1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} e^{itx} dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int (\frac{y}{\lambda - it})^{\alpha+1} e^{-y} \frac{dy}{\lambda - it} = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} (\lambda - it)^{-\alpha} \int y^{\alpha-1} e^{-y} dy =$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} (\lambda - it)^{-\alpha} \Gamma(\alpha) = \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda - it)^\alpha}$$

Известно, что характеристическая функция суммы случайных величин, можно получить произведением характеристических функций. Тогда

$$\phi_{\sum\limits^n \xi_i}(t) = \frac{\lambda^{\alpha n}}{(\lambda - it)^{\alpha n}}$$

Из вида характеристической функции, легко догадаться о виде функции распределения. Сделаем замену $\alpha n = \alpha$, тогда легко получаем, что

$$\sum^n X \sim \mathrm{Gamma}(\alpha n, \lambda)$$

Теперь рассмотрим aX.

$$f(ax) = F'(ax) = f(ax) \cdot a = \frac{(a\lambda)^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-a\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} = Gamma(\alpha, a\lambda)$$

Задача 2 (4 балла)

Пусть ξ с.в. с действительной характеристической функцией $f(t)$ и дисперсией σ^2. Доказать, что:

$$f(t) \geq 1 - \frac{t^2\sigma^2}{2}$$

Решение

$$\sigma^2 = \mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2$$

Также известно, что $\phi_{\xi}(t)$ - вещественная, значит и ее первая производная тоже. Но нам известно

$$\phi^{(k)} = i^k \mathbb{E}\xi^k$$

Тогда

$$\phi' = i\mathbb{E}\xi = Real \to \mathbb{E}\xi = 0$$

Получаем

$$f(t) \geq 1 - \frac{t^2\sigma^2}{2} = 1 - \frac{t^2}{2}(\mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2) = 1 - \frac{t^2}{2}\mathbb{E}\xi^2$$

$$\phi_{\xi}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{itx}dx \geq 1 - \frac{t^2}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)x^2dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx - \frac{t^2}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)x^2dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)(1 - \frac{t^2x^2}{2})dx$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{itx}dx \geq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)(1 - \frac{t^2x^2}{2})dx$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)(e^{itx} - 1 + \frac{t^2x^2}{2})dx \geq 0$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\cos tx + i\sin tx - 1 + \frac{t^2x^2}{2})dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\cos tx - 1 + \frac{t^2x^2}{2})dx \geq 0$$

Существует известное неравенство, доказывать которое я не буду (можно разложить косинус по формуле тейлора, тогда первый член, который не сократится $\frac{x^4}{4!}$, остальные - о малое от него, значит слева от знака будет стоять неотрицательная величина):

$$1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2} \Longleftrightarrow \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \geq 0$$

Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\cos tx - 1 + \frac{t^2x^2}{2})dx \geq 0 \Longleftrightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx \geq 0$$

$$f(x) \geq 0 \;\; and \;\; g(x) \geq 0 \Longrightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx \geq 0 \Longrightarrow f(t) \geq 1 - \frac{t^2}{2}\mathbb{E}\xi^2 \Longrightarrow f(t) \geq 1 - \frac{t^2\sigma^2}{2}$$

Задача 3 (2 балла)

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \sim \mathrm{N}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 \\ 7 & 7 & 14 \end{pmatrix} \right)$$

Найдите распределение случайного вектора $(Y_1, Y_2)^T$, где $Y_1 = X_1 + X_2 - X_3$, $Y_2 = X_1 + X_2 + X_3$

Решение

$$(Y_1, Y_2)^T = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{E} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbb{E} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{D} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbb{D} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 \\ 7 & 7 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 56 \end{pmatrix}$$

Задача 4 (5 баллов)

Докажите, что сумма n независимых случайных величин, равномерно распределенных на отрезке $[-1, 1]$, имеет плотность f, задаваемую формулой

$$f(x) = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \left(\tfrac{\sin t}{t}\right)^n \cos(tx) dt$$

Верна ли эта формула при $n = 1$?

Решение

$$\phi_\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x) e^{itx} dx = \int\limits_a^b \frac{1}{b-a} e^{itx} dx = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b e^{itx} dx = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)} = \Big| [-1, 1] \Big| = \frac{e^{-it} - e^{it}}{-2it} = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2it} = \frac{\sin t}{t}$$

$$\phi_\eta(t) = \phi_{\sum\limits^n \xi_i}(t) = \prod^n \phi_{\xi_i}(t) = \prod^n \frac{\sin t}{t} = \frac{\sin^n t}{t^n}$$

Сделаем обратное преобразование Фурье, чтобы найти функцию распределения:

$$f_\eta(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi_\eta(t) e^{-itx} dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\frac{\sin t}{t})^n (\cos tx - i \sin tx) dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\frac{\sin t}{t})^n \cos tx dt - \frac{i}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\frac{\sin t}{t})^n \sin tx dt$$

Так как обратное Фурье от характеристической функциии - действительная функция, значит правое слагаемое равно 0. Тогда:

$$f_\eta(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi_\eta(t) e^{-itx} dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\frac{\sin t}{t})^n \cos tx dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} (\frac{\sin t}{t})^n \cos tx$$

n = 1

$$f_{\eta = \sum^1 \xi = \xi}(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi_\xi(t) e^{-itx} dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-itx} dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \cos t dt + i \cdot 0$$

Посчитаме интеграл, получим $\frac{Si(t)}{\pi}$ функция, которая равна 1/2 от -1 до 1 и 0 в других местах.

Задача 5 (4 балла)

Пусть f - непрерывная, монотонно-возрастающая, неотрицательная, ограниченная функция, такая, что $f(0) = 0$.

Докажите, что для сходимости ξ_n к 0 по вероятности необходимо и достаточно, чтобы сходилась к 0 последовательность $\mathbb{E}f(|\xi_n|)$

Решение

Сходимость(слабая) :

$$\xi_n \xrightarrow{d} \xi \iff$$

$\forall f$ непрерывной и ограниченной : $\mathbb{E}f(\xi_n) \to \mathbb{E}f(\xi)$

Сходимость по вероятности:

$$\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi \iff \forall \epsilon > 0 \;\; \mathbb{P}(|\xi_n - \xi| \geq \epsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Нужно доказать:

$$\xi_n \xrightarrow{d} \xi \iff \xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi$$

5.1 Справа налево известно (доказывали на семинаре) То есть из сходмости по вероятности следует сходимость по распределению. В сходимост по распределению, есть требования, чтобы f была непрерывна и ограничена, они по условию выполняются. Значит доказано.

5.2 Слева направо.

$$\mathbb{E}f(\xi_n) \to \mathbb{E}f(\xi) = 0$$

$$\mathbb{E}f(\xi_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Доказываем:

$$\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \iff \forall \epsilon > 0 \;\; \mathbb{P}(|\xi_n| \geq \epsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Запишем неравенство Маркова для случайной величины xi_n

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \mathbb{P}(|\xi_n| < \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}\xi_n}{\epsilon}$$

Сделаем предельный переход

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \mathbb{P}(|\xi_n| < \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}\xi_n}{\epsilon} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Доказали.

Задача 6 (5 баллов) Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ – последовательность случайных величин с конечными дисперсиями. Положим $a_n = \mathbb{E}\xi_n$, $\sigma_n^2 = \mathbb{D}\xi_n$. Доказать, что если $a_n \to \infty$ и $\sigma_n^2 = o(a_n^2)$ при $n \to \infty$, то

$$\frac{\xi_n}{a_n} \xrightarrow{P} 1, n \to \infty$$

Решение

Требуется доказать:

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \mathbb{P}(|\frac{\xi_n}{\mathbb{E}\xi_n} - 1| \geq \epsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \iff \forall \epsilon > 0 \;\; \mathbb{P}(\left|\frac{\xi_n - \mathbb{E}\xi_n}{\mathbb{E}\xi_n}\right| \geq \epsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Запишем неравенство Чебышева:

$$if \;\; \exists \;\; \mathbb{D}\xi_n \;\; \forall \epsilon > 0 \;\; \mathbb{P}(|\xi_n - \mathbb{E}\xi_n| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{D}\xi_n}{\epsilon^2}$$

Сделаем замену $\epsilon = \epsilon' \mathbb{E}\xi_n$

$$\forall \epsilon' > 0 \;\; \mathbb{P}(|\xi_n - \mathbb{E}\xi_n| \geq \epsilon' \mathbb{E}\xi_n) \leq \frac{\mathbb{D}\xi_n}{\epsilon'^2 \mathbb{E}^2 \xi_n}$$

$$\forall \epsilon' > 0 \;\; \mathbb{P}(\left|\frac{|\xi_n - \mathbb{E}\xi_n|}{\mathbb{E}\xi_n}\right| \geq \epsilon') \leq \frac{\mathbb{D}\xi_n}{\epsilon'^2 \mathbb{E}^2 \xi_n} = \frac{o(\mathbb{E}^2 \xi_n)}{\epsilon'^2 \mathbb{E}^2 \xi_n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Доказали.