Домашняя работа 3 u9uL3K8

October 24, 2019

Задача 1 (5 баллов) Пусть $\xi, \eta \sim \text{Exp}(1)$ – независимые случайные величины. Найдите распределение случайной величины $\frac{\xi}{\xi+\eta}$ (подсказка: рассмотрите преобразование обратное к преобразованию $(\xi,\eta) \longrightarrow (\zeta,\theta), \zeta = \frac{\xi}{\xi+\eta}, \theta = \xi+\eta$ и выразите $f_{\zeta,\theta}(z,u)$, используя $f_{\zeta,\theta}(z,u)$).

Решение
Воспользуемся подсказкой. У нас есть преобразование $(\xi,\eta) \longrightarrow (\zeta,\theta), \zeta = \frac{\xi}{\xi+\eta}, \theta = \xi+\eta$, откуда простой арифметикой можно получить, что обратное преобразование задается следующим образом: $\xi = \theta\zeta$ $\eta = \theta(1-\zeta)$
Теперь воспользуемся второй подсказуой из условия и выразим $f_{\zeta,\theta}$ через $f_{\xi,\eta}$:

$$f_{\zeta,\theta}(z,u) = \det(J) f_{\xi,\eta}(z',u') = \det(J) f_{\xi,\eta}(zu, u-zu)$$

J - якобиан (перехода), состоит из частных производных ξ, η по ζ, θ.

$$det \begin{bmatrix} u & z \\ -u & 1-z \end{bmatrix} = u$$

Получается:

$$f_{\zeta,\theta}(z,u) = u f_{\xi,\eta}(zu, u-zu) = ue^{-zu}e^{-u+zu} = ue^{-u}$$

Важно скзаать, что плотность, а значит и ее интеграл не зависят от z. Отсюда и потому что действие происходит на отрезке [0,1] ($F_\zeta(z) = 1$, получаем, что сама величина ζ имеет равномерное распределение.
Задача 2 (3 балла)
Пусть $\xi \sim \text{Poly}(k, p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Покажите, что $\xi_i \sim \text{Bi}(k, p_i)$
Решение
Рассмотрим $k_i \in [0,k]$

$$\mathbb{P}\{\xi = k_i\} = \sum_{...+k_{i-1}+k_{i+1}+...} \frac{k!}{k_1!...k_n!} \cdot p_1^{k_1}...p_n^{k_n}$$

Дальше так как коэфиценты с k_i в сумме не участвуют, вынесем их

$$= \frac{k!}{k_i!} p_i^{k_i} \sum_{...+k_{i-1}+k_{i+1}+...} \frac{1}{k_1!..k_{i-1}k_{i+1}..k_n!} \cdot p_1^{k_1}...p_{i-1}^{k_{i-1}} p_{i+1}^{k_{i+1}}...p_n^{k_n}$$

Далее делаем математический трюк, домножим и разделим на следующую величину:

$$= \frac{k!}{k_i!(k-k_i)!} p_i^{k_i} \sum_{...+k_{i-1}+k_{i+1}+...=k-k_i} \frac{(k-k_i)!}{k_1!..k_{i-1}k_{i+1}..k_n!} \cdot p_1^{k_1}...p_{i-1}^{k_{i-1}} p_{i+1}^{k_{i+1}}...p_n^{k_n} = C_k^{k_i} p_i^{k_i} (p_1+..+p_{i-1}+p_{i+1}+...)^{k-k_i}$$

Так как сумма вероятностей, это 1, то

$$= C_k^{k_i} p_i^{k_i} (1-p_i)^{k-k_i}$$

Получаем то что искали.
Задача 3 (5 баллов) Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ имеет равномерное распределение в треугольнике с вершинами в точках $(-1,0), (0,1), (1,0)$. Найти распределение случайной величины $\eta = \frac{\xi_1+\xi_2}{2}$

Решение Введем $\eta_1 = \frac{\xi_1+\xi_2}{2}$, $\eta_2 = \eta_2$. К сожалению, я никак не успел довести решение до конца, но я напишу идею решения, надеюсь , что она чего нибудь будет стоить. В общем мы построили некое преобразование, посчитаем модуль Якобиана матрицы преобразования. Затем построим обратное преобразование.
С помощью этого преобразования, мы можем найти как будет выглядить треугольник в новых координатах, затем просто проинтегрировав плотность распределения по площади нового треугольника, мы сможем найти маргинальную плотность.

Задача 4 (3 балла) В каждую i-ую единицу времени живая клетка получает случайную дозу облучения X_i, причем $\{X_i\}_{i=1}^{t}$ имеют одинаковую функцию распределения $F_X(x)$ и независимы в совокупности для любого t. Получив интегральную дозу облучения, равную ν, клетка погибает. Оценить среднее время жизни клетки $\mathrm{E}T$.

Решение
Мне подкинули идею, что нужно как то сделать индикаторную функцию, я попытался. Определим условие жизни в момент времени T как $S = \sum\limits_{i=1}^{i=T} X_i < \nu$. Введем также некоторое $\mathbb{E}X$. Попробуем построить величину, характеризующую состояние клетки, то есть умерла или жива в каждый момент. Тогда взвесив эти вероятности, получим матожидание времени жизни.

$$DEAD_j = \begin{cases} 0, \sum\limits_{i=1}^{i=j} X_i < q \\ 1, else \end{cases}$$

Построили, заметим что $DEAD$, X распределения независимы(!!!). Теперь искомую сумму и соотвественно ее матожидание можно записать иначе:

$$\mathbb{E}S_T = \sum_{i=1}^{i=\infty} \mathbb{E}DEAD_i \cdot \mathbb{E}X_i = \mathbb{E}X \sum_{i=1}^{i=\infty} \mathbb{P}(DEAD_i = 1) \cdot 1 = \mathbb{E}X \sum_{i=1}^{i=\infty} \mathbb{P}(T \geq i) = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}T$$

И все это должно быть меньше ν чтобы клетка была жива, тогда

$$\mathbb{E}T < \frac{\nu}{\mathbb{E}X}$$

Задача 5 (4 балла) Пусть N – случайная величина, принимающая натуральные значения, $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ – некоррелированные одинаково распределенные случайные величины с конечными математическими ожиданиями и дисперсиями, не зависящие от N. Рассмотрим $S_N = \sum\limits_{i=1}^{N} \xi_i$. Посчитайте $\mathrm{D}S_N$.

Задача 6 (5 баллов) Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – независимые одинаково распределённые с.в. с конечным мат.ожиданием, $\eta_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$. Доказать, что

$$\mathbb{E}(\xi_1 | \eta_n, \eta_{n+1}, \ldots) = \frac{\eta_n}{n}$$

Решение
После того как я преисполнился от идеи решения , подсказанной тобой, я кажется доказал.

$$\eta_n = \mathbb{E}(\eta_n | \eta_n,\ \eta_{n+1},\ ...) = \mathbb{E}(\xi_1 + ... + \xi_n |\ \eta_n,\ \eta_{n+1},\ ...) = n\mathbb{E}(\xi_1 | \eta_n,\ \eta_{n+1}, ...)$$

Так как распределение случайных величин у нас одно и то же, получаем доказательство.