Домашняя работа 1

September 19, 2019

КОД == DKcaatn **Задача 1** (5 баллов)

Отрезок длины $a_1 + a_2$ поделён на две части длины a_1 и a_2 соответственно. n точек последовательно бросаются на удачу на отрезок. Найти вероятность того, что ровно m из n точек попадут на часть отрезка длины a_1.

1 Решение

Классическая задача на распределение Бернулли. Вероятноть упасть на a1 $P_{a_1} = \frac{a_1}{a_1+a_2}$, аналогично $P_{a_2} = \frac{a_2}{a_1+a_2}$. Тогда вероятность что m из n точек упадут на a_1:

$$P = C_n^m \cdot P_{a_1}^m \cdot P_{a_2}^{m-n} = C_n^m \cdot (\frac{a_1}{a_1 + a_2})^m \cdot (\frac{a_2}{a_1 + a_2})^{m-n}$$

Задача 2 (2 балла)

На плоскость нанесены горизонтальные параллельные прямые на одинаковом расстоянии a друг от друга. На плоскость наудачу бросается монета (круг) радиуса R ($R < \frac{a}{2}$). Найти вероятность того, что монета не пересечёт ни одну из прямых.

2 Решение

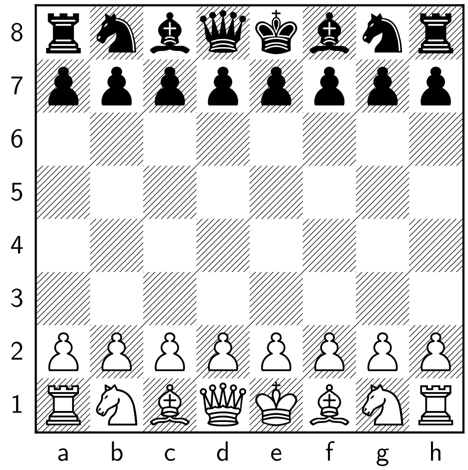
Нарисуем полосы. Нарисовали, теперь видим, что достаточно рассмотреть одну полоску. Задача не геом вероятность. Рассмотреть эту же задачу, но под другим углом, будем работать с половиной полосы, так как задача симметричная. Ширина половины - a/2. Центр монетки радиуса R равновероятно падает в любую точку из a/2. Чтобы монета не пересекла границу полосы, нужно чтобы ее центр упал не ближе R к краю. Тогда:

$$P = \frac{a/2 - R}{a/2}$$

Задача 3 (3 балла)

На шахматную доску случайным образом ставятся два белых короля. Найти вероятность того, что эти два короля будут бить друг друга.

3 Решение



После того как мы нарисовали доску, задача очень просто решается.

Рассмотрим три случая:

- Пусть первый король попадает на самую угловую клетку - таких 4 штуки. Тогда позиций откуда такой конь может быть срублен, по 3 на каждый угол. Тогда

$$P_{corner} = \frac{4}{64} \cdot \frac{3}{63} = \frac{12}{64 * 63}$$

- Пусть первый король упал на какую то из боковых "полосок" A7-A2 например или B1-G1. Таких мест 20, и каждая такая позиция бьется с 5ти рядом стоящих (так как стоит у края доски).

$$P_{stripe} = \frac{24}{64} \cdot \frac{5}{63} = \frac{120}{64 * 63}$$

- Все другие позции для первого короля бьются с 8 клеток.

$$P_{field} = \frac{36}{64} \cdot \frac{8}{63} = \frac{288}{64 * 63}$$

Итого

$$P = \Sigma P_i = \frac{420}{64 * 63}$$

Задача 4 (1.5 балла)

В n ящиках размещают $2n$ шаров. Найти вероятность того, что ни один ящик не пуст, если шары неразличимы и все различимые размещения имеют равные вероятности.

4 Решение

Перевернем задачу с ног на голову. Пусть у нас есть 2n-1 ящиков - один ящик соответствует месту между двумя шарамми или перегородки. Так как шаров 2n, мест между ними 2n-1. Теперь чтобы найти кол-во положений когда ни один ящик не будет пуст, нужно ставить n-1 перегородвку на какую то из 2n-1 позиций, итого

$$N = C_{2n-1}^{n-1}$$

Найдем общее количество перестановок, теперь у нас есть 3n-1 обьектов - 2n шаров + n-1 перегородвка. Из них нужно "выбрать", тех кого назовем перегородкой (n-1) штука

$$N_{total} = C_{3n-1}^{n-1}$$

$$P = \frac{N}{N_{total}} = \frac{C_{2n-1}^{n-1}}{C_{3n-1}^{n-1}}$$

Задача 5 (*продолжение 4*) (1.5 балла)

5 Решение

Аналогично предыдущей(как будто мы m шаров уже убрали в один ящик)

$$P = \frac{C_{3n-m-2}^{n-2}}{C_{3n-1}^{n-1}}$$

Найти вероятность того, что заданный ящик содержит ровно m шаров.

Задача 6 (4 балла)

Пусть $A_1, A_2, \dots$ – последовательность независимых событий. Доказать, что

$$\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$$

6 Решение

Задача 7 (3 балла)

В самолете n мест. Есть n пассажиров, выстроившихся друг за другом в очередь. Во главе очереди – «заяц» (пассажир без билета). У всех, кроме «зайца», есть билет, на котором указан номер посадочного билета. Так как «заяц» входит первым, он случайным образом занимает некоторое место. Каждый следующий пассажир, входящий в салон самолета, действует по такому принципу: если его место свободно, то садится на него, если занято, то занимает с равной вероятностью любое свободное. Найдите вероятность того, что последний пассажир сядет на свое место.

7 Решение

Я помню, что ответ 1/2, попробуем доказать по индукции. Пусть всего два пассажира, заяц и нормальный пассажир, ответ очевидно 1/2. Пусть верно, что при n-2 пассажирах и одном заяце $P_{OK} = 1/2$

Пусть теперь у нас n пассажиров и заяц. Рассмотрим все случаи:

- Пусть заяц сядет на свое место(то которое ни у кого) и тогда все будет OK - 1/n
- Пуст заяц сел на место последнего пассажира OK не будет никогда - 1/n
- Пусть заяц сел не на свое место и не на место последнего, вероятность этого $\frac{n-2}{n}$. Теперь среди оставшихся n-1 пассажира есть точно такой же заяц, для которого нет места(то есть он будет выбирать рандомное место из всех. не забудем что там есть метсо на которое нет билета не у кого(место первого заяца)), задача сводится к n-1

$$P = 1/n + P_{n-1} \cdot \frac{n-2}{n} = \frac{2}{2n} + \frac{n-2}{2n} = \frac{n}{2n} = 1/2$$

Задача 8 (5 баллов)

Пусть мужик производит эксперимент, который может завершиться любым из N способов, причем i-й результат происходит (независимо от мужика) с вероятностью p_i. Пусть мужик может врать или говорить правду вне зависимости от того, какой результат наблюдает (хотя его ответ, естественно, от наблюдения зависит), причем говорит правду с вероятностью p_{true}, а врет с вероятностью $p_{lie} = 1 - p_{true}$. Если он говорит правду, он называет результат, который имеет место. Если он врет, то он равновероятно говорит любой из оставшихся $N-1$ вариантов. Требуется найти вероятность того, что произошло условие i, при условии, что мужик сказал, что произошло условие i.

8 Решение

Задача не теорему Баеса. Запишем:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

В нашем случае:

- P(A|B) = P(произошло i|сказал, что произошло i)
- P(B|A) = P(сказал, что произошло i|произолшло i) = p_{true}
- P(A) = P(произошло i) = p_i
- P(B) = P(скзаал, что произошло i) = (произошло i + сказал правду) + (произолшо не i + соврал) = $p_i \cdot p_{true} + \frac{1-p_i}{1} \cdot \frac{1}{N-1}$

Ответ P(произошло i|сказал, что произошло i) =

$$\frac{p_{true} \cdot p_i}{p_i \cdot p_{true} + \frac{1-p_i}{1} \cdot \frac{1}{N-1}}$$