Домашняя работа 6 xgDW2DR

December 12, 2019

Задача 1 (5 баллов) Пусть $\xi_0, \xi_1, \dots$ – норсв $U[0,1]$. Найти плотность распределения

$$\eta_n = \prod_{k=0}^{n} \xi_k$$

Решение
Заметим, что если ξ_i – норсв $U[0,1]$, то $-\log \xi_i \sim Exp(1)$, тогда:

$$-\log \xi_1 \cdot \xi_2 ... \cdot \xi_n = -\log \xi_1 - \log \xi_2 - ... - \log \xi_n$$

Есть сумма норсв экспоненциальных распределений. Как известно, сумма экспоненциальных случайных величин равняется $\Gamma(1,n)$, тогда плотность будет:

$$g(y) = \frac{1}{(n-1)!} y^{n-1} e^{-y}, \quad y \geq 0$$

Воспользуемся выражением с Якобианом для обратного преоразования случайной величины:

$$f(h^{-1}(y)) \Big| \frac{\partial h^{-1}(y)}{\partial y} \Big| = g(y), \quad h(x) = -\log(x), \quad h^{-1}(y) = e^{-y}$$

Тогда воспользуемся обратным преобразованием и получим:

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} (-\log(x))^{n-1}, x \in (0,1]$$

Красивое и элегантное решение было подсказано какой-то книгой университета Техас по теорверу(идея логарифмироватЬ).

Задача 2 (5 баллов) Пусть функции $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ удовлетворяют соотношению:

$$f_3(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x-u) f_2(u) du$$

. Найти $f_1(x)$, если $f_2(x) = e^{-x^2}, f_3(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$

Решение

Отнормируем функции f_2, f_3, так чтобы их интеграл был равен 1:

$$\begin{cases} f_2'(x) = \frac{f_2(x)}{\sqrt{\pi}}, \quad f_2(x) = f_2'(x)\sqrt{\pi} \\ f_3'(x) = \frac{f_3(x)}{\sqrt{2\pi}}, \quad f_3(x) = f_3'(x)\sqrt{2\pi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi_2 \ f_2'(x) = \frac{f_2(x)}{\sqrt{\pi}} = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}, \quad \mathbb{E}\xi_2 = 0, \quad \mathbb{D}\xi_2 = \frac{1}{2} \\ \xi_3 \ f_3'(x) = \frac{f_3(x)}{\sqrt{2\pi}} = \frac{e^{\frac{-x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}, \quad \mathbb{E}\xi_3 = 0, \quad \mathbb{D}\xi_3 = 1 \end{cases}$$

Тогда

$$f_3'(x)\sqrt{2\pi} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x-u) f_2'(u)\sqrt{\pi} du$$

$$f_3'(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} f_1(x-u) f_2'(u) du$$

Получили формулу свертки, для плотности $\xi_3 = \xi_1 + \xi_2$ Воспользуемся свойства мат. ожидания и дисперсии:

$$\xi_3 = \xi_1 + \xi_2 => \xi_1 = \xi_3 - \xi_2$$

$$\mathbb{E}\xi_1 = ((1,-1)(\mathbb{E}\xi_3, \mathbb{E}\xi_2)^T) = \mathbb{E}\xi_3 - \mathbb{E}\xi_2 = 0$$

$$\mathbb{D}\xi_1 = \mathbb{D}\xi_3 - \mathbb{D}\xi_2 = \frac{1}{2}$$

Тогда так как линейная комбинация нормальны распределений - нормальное распределение.

$$f_1(x) = \sqrt{2} f_1'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{1}{2}}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\frac{1}{2}}} = \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2}$$

Задача 3 (5 баллов)

Каждая целочисленная точка k на числовой оси покрашена в белый цвет с вероятностью p и черный с вероятнстью $q = 1 - p$ (независимо от остальных). Пусть B – множество всех черных точек, а S – множество всех таких целочисленных точек x, что расстояние от x до B не меньше расстояния от x до начала координат. Найти математическое ожидание числа элементов множества S.

Решение

$$S : x : \rho(x, B) \geq \rho(x, 0) \Longleftrightarrow S : x : \rho(x, 0) \leq \rho(x, B)$$

ПОнятно, что x = 0 всегда лежит в S.

Рассмотрим точки x > 0 (правую половину). Подумаем, как выглядит наше множество S. Пусть у нас есть черная точко x_0. Тогда любая точка y, правее чем x_0 будет ближе к множеству B, чем к нулю координат, так как между 0 и y лежит $x_0 \in B$. Сама точка $x_0 \in B$, поэтому $\rho(x_0, B) = 0$, то есть точка x_0 никогда не принадлежит S, кроме случая $x_0 = 0$(но мы сейчас такое не рассматриваем).

Теперь рассмотрим вероятность отдельно точки x_i принадлежать множеству S. Как было сказано ранее, для этого необходимо, чтобы все точки левее x_i были белыми и сама точко не должна быть черной. Также НЕОБХОДИМО, чтобы количество белых точек справа было не меньше, чем слева. Пусть между 0 и x_i n белых точек, и между x_i и x_0(самой левой черной точкой) m белых точек:

$$\begin{cases} n \leq m => x_i \in S \\ n > m => x_i \notin S \end{cases}$$

Отсюда мы понимаем, что необходимым условием для вхождения точки x_i в S являтся наличие справа такого же количества белых точек, как и слева + сама точка белая.

$$\mathbb{P}(x_i \in S) = p^{x_i - 1} \cdot p \cdot p^{x_i - 1} = p^{2x_i - 1} = p^{2|x_i| - 1}$$

Так как задача симметрична относительно точки $x = 0$, то конечный ответ получим домножением на 2.

$$\mathbb{E}|S| = 1 + 2\sum_1^\infty 1 * \mathbb{P}(x_i \in S) = 1 + 2\sum_1^\infty p^{2x_i - 1} = 1 + \frac{2p}{1 - p^2}$$

Задача 4 (5 баллов) Докажите, что для любых целых положительных k и n $(k \leq n)$ справедливо неравенство:

$$C_n^k \leq 2^n \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$$

Решение

$$C_n^k \leq 2^n \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \iff C_n^k \cdot 2^{-n} \leq \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \iff \mathbb{P}(\xi = k) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi n}}, \quad \xi \sim Bi(\frac{1}{2}, n)$$

Найдем характеристическую функцию нашего распределения:

$$\phi_\xi(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{itk} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = (pe^{it} + 1 - p)^n$$

Также знаем, что (см Вики):

$$\mathbb{P}(\xi = k) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-itk} \phi_\xi(t) dt$$

$$\mathbb{P}(\xi = k) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-itn/2} (pe^{it} + 1 - p)^n dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-itn/2} (\frac{1}{2} e^{it} + \frac{1}{2})^n dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\frac{1}{2} e^{it} + \frac{1}{2} e^{-it})^n dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\cos \frac{t}{2})^n dt$$

Теперь нужно доказать:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\cos \frac{t}{2})^n dt \leq \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\cos \frac{t}{2})^n dt \leq \sqrt{\frac{8\pi}{n}}$$

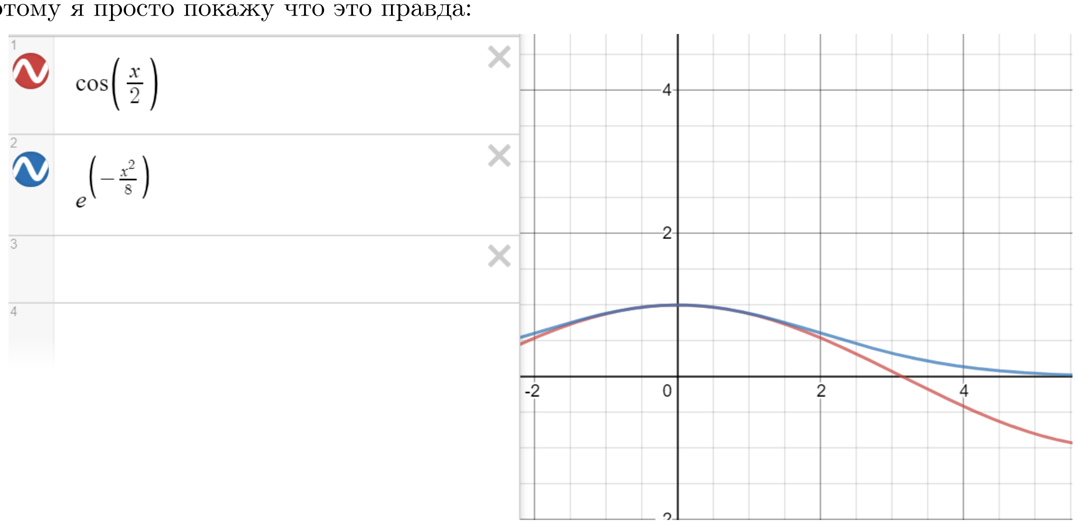
Теперь попробуем подобраться функцию, интеграл который был бы равен $\sqrt{\frac{8\pi}{n}}$. Перебором находим, что :

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{8}} = \sqrt{8\pi}$$

Теперь докажем, что :

$$\cos \frac{x}{2} \leq e^{\frac{-x^2}{8}}, x \in [-\pi, \pi]$$

Вообще можно строго это доказать, расписать первую и вторую производную, но наша цель теорвер, а не матан, поэтому я просто покажу что это правда:



Так как обе функции четные, можно утверждать то же самое и для $[-\pi, 0]$. Тогда перейдем к интегралам.

$$\cos\frac{x}{2} \le e^{\frac{-x^2}{8}} \hookrightarrow (\cos\frac{x}{2})^n \le e^{\frac{-x^2 n}{8}} x \in [-\pi, \pi]$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\cos\frac{t}{2})^n dt \le \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{-t^2 n}{8}} dt \le \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2 n}{8}} = \sqrt{\frac{8\pi}{n}}$$

Доказали что хотели, топ.

Задача 5 (5 баллов) Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – независимые одинаково распределённые случайные величины $P(\xi_k = j) = \frac{1}{N}, j = 1, \ldots, N$. $\eta_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$. Доказать, что $\mathbb{P}(\eta_n$ делится на $n) \geq \frac{1}{N^{n-1}}$

Решение

$$\mathbb{P}(\eta_n \text{ делится на } n) = \mathbb{P}(\eta_n = kn, k \in [1, N]) \geq \tfrac{1}{N^{n-1}}$$

Минимальная величина η_n равна n при $\xi_i = 1$, максимальная при $\xi_i = N$. Понятно, что $\eta_n = \alpha n$ можно получить, если все величины $\xi_i = \alpha$, но также существуют и другие наборы, дающие в сумме нужную величину. Тогда запишем:

$$\mathbb{P}(\eta_n \text{ делится на } n) = \mathbb{P}(\eta_n = kn, k \in [1, N]) = \sum_{i=1}^{i=N} \mathbb{P}(\eta_n = in, \xi_1 = ... = \xi_N = i) + \sum_{i=1}^{i=N} \mathbb{P}(\eta_n = in, \exists \xi_i \neq \xi_j) \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{i=N} \mathbb{P}(\eta_n = in, \xi_1 = ... = \xi_n = i) = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{1}{N^n} = \frac{1}{N^{n-1}}$$