Домашняя работа 5

November 23, 2019

Задача 1 (3 балла) Пусть $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых случайных величин, причем X_n принимает значения $-\sqrt{n}$, $\sqrt{n}$ с вероятностями $1/2$ каждое. Выполняется для этой последовательности закон больших чисел?

Задача 2 (2 балла) Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ – последовательность независимых случайных величин,

$$\mathbb{P}(\xi_n = \pm 2^n) = 2^{-(2n+1)}, \mathbb{P}(\xi_n = 0) = 1 - 2^{-2n}$$

Решение

$\xi_n = 0$, $\mathbb{E}\xi^2 = 1$, тогда $\mathbb{D}\xi_n = 1$

$$\eta = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k$$

$$\mathbb{E}\eta = 0, \quad \mathbb{D}\eta = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{D}\xi_k = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

Запишем неравенство Чебышева:

$$\mathbb{P}(\eta \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{D}\eta}{\epsilon^2} = \frac{1}{n\epsilon^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Значит ЗБЧ справедлив.

Задача 3 (5 баллов)

Игральная кость подбрасывается до тех пор, пока общая сумма выпавших очков не превысит 700. Оценить вероятность того, что для этого потребуется более 210 бросаний; менее 180 бросаний; от 190 до 210 бросаний. (показать все выкладки и получить конкретное число)

Задача 4 (5 баллов)

Известно, что вероятность рождения мальчика приблизительно равна $0,515$. Какова вероятность того, что среди 10 тысяч новорождённых мальчиков будет меньше, чем девочек? (показать все выкладки и получить конкретное число)

Решение

$p = 0.515$, $q = 1 - p = 0.485$

Если мальчиков будет меньше 5000, значит их будет меньше чем девочек.

$$\mathbb{P}(0 < x < 5000) = \mathbb{P}(\frac{-n\mathbb{E}\xi_i}{\sqrt{n\mathbb{D}\xi_i}} < \frac{x - n\mathbb{E}\xi_i}{\sqrt{n\mathbb{D}\xi_i}} < \frac{5000 - n\mathbb{E}\xi_i}{\sqrt{n\mathbb{D}\xi_i}}) = \mathbb{P}(\frac{-np}{\sqrt{npq}} < \frac{x - np}{\sqrt{npq}} < \frac{5000 - np}{\sqrt{npq}}) =$$

$$= \Phi(\frac{5000 - np}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{-np}{\sqrt{npq}}) = \Phi(\frac{5000 - 5150}{\sqrt{10000 \cdot 0.515 \cdot 0.485}}) - \Phi(\frac{-5150}{\sqrt{10000 \cdot 0.515 \cdot 0.485}}) = \Phi(\frac{-1.5}{\sqrt{0.249775}}) - \Phi(\frac{-51.50}{\sqrt{0.249775}}) =$$

Задача 5 (5 баллов)
Докажите

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{\lfloor n/2+\sqrt{n}\rfloor}^{n} C_n^k 2^{-n} = 1 - \Phi(2)$$

Решение
Вероятность, что из n событий будет k успехов (p - вероятность успеха), рассмотрим схему Бернулли, с вероятностью успеха p = 1/2

$$C_n^k p^k (1-p)^k = C_n^k (\frac{1}{2})^k (\frac{1}{2})^{n-k} = C_n^k 2^{-n}$$

Тогда пусть ξ- количество успешных исходов из n экспериментов:

$$p = \frac{1}{2}, \quad q = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(\xi > \frac{n}{2} + \sqrt{n}) = \mathbb{P}(\infty > \xi > \frac{n}{2} + \sqrt{n}) = \mathbb{P}(\infty > \frac{\xi - \frac{n}{2}}{\sqrt{n}} > 1) = \mathbb{P}(\infty > \frac{\xi - np}{\sqrt{4npq}} > 1) = \mathbb{P}(\infty > \frac{\xi - np}{\sqrt{npq}} > 2)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{\lfloor n/2+\sqrt{n}\rfloor}^{n} C_n^k 2^{-n} = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\xi > \frac{n}{2} + \sqrt{n}) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\infty > \frac{\xi - np}{\sqrt{npq}} > 2) = \Phi(\infty) - \Phi(2) = 1 - \Phi(2)$$

Задача 6 (5 баллов)

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ – последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин с конечными дисперсиями. Для любого фиксированного вещественного x найти предел.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n < x)$$

Решение

Известно, что:

$$\mathbb{P}(\xi < x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(x)dx$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n < x) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n < x) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathbb{D}S_n}} < \frac{x - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathbb{D}S_n}}\big)$$

Вспомним ЦПТ:

$$\lim \frac{S_n - n\mathbb{E}\xi_1}{\sqrt{n \cdot \mathbb{D}\xi_1}} \xrightarrow{n\to\infty} N(0,1)$$

$$f_{N(0,1)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{t^2}{2}}$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathbb{D}S_n}} < \frac{x - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathbb{D}S_n}}\big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathbb{D}S_n}} < \frac{x - \mathbb{E}n\xi_1}{\sqrt{\mathbb{D}n\xi_1}}\big) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\frac{x-\mathbb{E}n\xi_1}{\sqrt{\mathbb{D}n\xi_1}}} f_{S_n}(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\frac{x-\mathbb{E}n\xi_1}{\sqrt{\mathbb{D}n\xi_1}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{t^2}{2}} dt$$

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\frac{x-\mathbb{E}n\xi_1}{\sqrt{\mathbb{D}n\xi_1}}} f_{S_n}(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\frac{x-\mathbb{E}n\xi_1}{\sqrt{\mathbb{D}n\xi_1}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{t^2}{2}} dt = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\Big(\Phi\big(\frac{x - n\mathbb{E}\xi_1}{\sqrt{2n\mathbb{D}\xi_1}}\big) - 1\big)\Big)$$