高等数学（上）试题解答（A 卷）2018-1-8

一、填空题（每题 4 分，共 40 分）

1. $\ln|1-x^2|$； 2. 6； 3. $\frac{1}{2}$； 4. $g(\sin^2 x)\sin 2x\,\mathrm{d}x$； 5. $[0,+\infty)$； 6. $y=0$；

7. $1+\cos x$； 8. $4\sqrt{2}$； 9. $\int_0^{\pi}|\sin x-\sin 2x|\,\mathrm{d}x$； 10. $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$.

二、计算题（每题 6 分，共 30 分）

11. 解　视 $y=y(x)$，方程两边对 x 求导得：　$\mathrm{e}^y y'+(y+xy')=0$　(*)，（2 分）

再对 x 求导，　$[\mathrm{e}^y (y')^2+\mathrm{e}^y y'')+y'+(y'+xy'')=0$　(**)，（4 分）

当 $x=0$ 时，$y=1$. 代入（*）得 $y'(0)=-\mathrm{e}^{-1}$，代入（**）得：$y''(0)=\mathrm{e}^{-2}$.（6 分）

12. 解　点 $(1,-1)$ 在曲线上，$a+b+c=-2$；（2 分）

又 $x=0$ 是函数的极值点，$y'(0)=b=0$；（4 分）

又点 $(1,-1)$ 是曲线的拐点，$y''(1)=6+2a=0$，故 $a=-3,b=0,c=1$.（6 分）

13. 解　令 $t=\arcsin x$，则 $x=\sin t$，$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.（2 分）

$$I=\int\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int t\sin t\,\mathrm{d}t \quad （3 分）$$

$$=-\int t\,\mathrm{d}(\cos t)=-t\cos t+\int\cos t\,\mathrm{d}t=-t\cos t+\sin t+C \quad （5 分）$$

$$=-\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}+x+C \quad （6 分）$$

14. 解　极限为 $\frac{0}{0}$ 型，利用洛必达法则，

$$I=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h} \quad （3 分）$$

在利用导数定义，$I=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}+\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f'(x-h)-f'(x)}{-h}$$

$$=\frac{1}{2}[f''(x)+f''(x)]=f''(x) \quad （6 分）$$

注　用两次洛必达法则且结果一致的扣 2 分.

15．解　等式 $\int_0^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t = x^2$ 两边对 x 求导得，$g[f(x)]f'(x) = 2x$，（2 分）

由 $g[f(x)] = x$ 得 $xf'(x) = 2x$，$f'(x) = 2$，（4 分）

$f(x) = 2x + C$，由 $f(0) = 0$ 得 $C = 0$，故 $f(x) = 2x$.（6 分）

三、解　$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}\cdot\frac{2ax}{x-a}} = \mathrm{e}^{2a}$（3 分）

$\int_{-\infty}^{a} t\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{a} t\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2t}) = \dfrac{1}{2}t\mathrm{e}^{2t}\Big|_{-\infty}^{a} - \dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{a}\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2a}(a-\dfrac{1}{2})$（8 分）

故　$\mathrm{e}^{2a} = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2a}(a-\dfrac{1}{2})$，$a = \dfrac{5}{2}$.（9 分）

四、解　因 $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，故曲线 $y = \sqrt{x}$ 在 $(t,\sqrt{t})$ 处的切线 L 方程为：

$y - \sqrt{t} = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}(x-t)$，即 $y = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}x + \dfrac{\sqrt{t}}{2}$（3 分）

面积　$S(t) = \int_0^2 [\dfrac{1}{2\sqrt{t}}x + \dfrac{\sqrt{t}}{2} - \sqrt{x}]\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\sqrt{t}} + \sqrt{t} - \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$（6 分）

$$S'(x) = -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} = \frac{t-1}{2t^{\frac{3}{2}}}\begin{cases} <0, 0<t<1 \\ =0,\ t=1 \\ >0,\ t>1 \end{cases}$$

当 $t = 1$ 时，面积 S 取得最小值. 故所求切线为：

$y - 1 = \dfrac{1}{2}(x-1)$，即 $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$（9 分）

五、解　$\varPhi(x)$ 为偶函数. 下证：$\varPhi(-x) = \varPhi(x)$.（2 分）

$\Phi(-x) = \int_a^{-x} f(t)\mathrm{d}t \overset{令u=-t}{=} -\int_{-a}^{x} f(-u)\mathrm{d}u$（4 分）

因 $f(x)$ 为奇函数，

$\Phi(-x) = \int_{-a}^{x} f(u)\mathrm{d}u = \int_{-a}^{a} f(u)\mathrm{d}u + \int_a^x f(u)\mathrm{d}u$（6 分）

$= 0 + \int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \varPhi(x)$

即当 $f(x)$ 为连续的奇函数时，$\varPhi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数.（7 分）

六、证　由$\left|f(x)-f(y)\right|\le k\left|x-y\right|$得，$\lim\limits_{x\to c}f(x)=f(c)$，

即 $f(x)$在$[a,b]$上连续. （1 分）

存在性. 作$g(x)=f(x)-x$，则$g(x)$在$[a,b]$连续. 由$a\le f(x)\le b$知，

$$g(a)=f(a)-a\ge 0，\quad g(b)=f(b)-b\le 0$$

若$g(a)=0$，则$x_0=a$为根；若$g(b)=0$，则$x_0=b$为根；

若$g(a)g(b)<0$，由零值定理，存在$x_0\in(a,b)$，使得$g(x_0)=0$，即$x_0=f(x_0)$.

综上，存在$x_0\in[a,b]$，使得$x_0=f(x_0)$. （4 分）

唯一性. 反证法. 若另有$x^*\in[a,b]$，使$x^*=f(x^*)$，$x^*\ne x_0$，则由$k\in(0,1)$得，

$$\left|x_0-x^*\right|=\left|f(x_0)-f(x^*)\right|\le k\left|x_0-x^*\right|<\left|x_0-x^*\right|$$

矛盾, 故方程$x=f(x)$存在唯一的根. （5 分）