2014~2015（二）高等数学期末试卷解答与评分标准（A 卷）

一、填空题（每小题 3 分，共 28 分）

1、$dz\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=-dy$　　2、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial xy}=xyf''_{11}+f'_1+2x^2f''_{21}$　　3、$\dfrac{\partial z}{\partial \vec{l}}=4$

4、$\int_0^1 dx\int_x^1 \cos(y^2-1)dy=\dfrac{1}{2}\sin 1$　　5、收敛域为$[-1,3)$　　6、$b_1=0$

7、$\int_L (e^x+2xy)dx+(x^2+\cos y)dy=e^{\pi}-1$　　8、通解为$y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$

二、(每小题 8 分，共 16 分)

1、求函数$f(x,y)=ye^{x^2-2y^2}$的极值。

解 由$\begin{cases} f'_x=2xye^{x^2-2y^2}=0 \\ f'_y=(1-4y^2)e^{x^2-2y^2}=0 \end{cases}$得驻点$\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$，$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，　　（2 分）

$f''_{xx}=2y(1+2x^2)e^{x^2-2y^2}$，　$f''_{xy}=2x(1-4y^2)e^{x^2-2y^2}=f''_{yx}$，　$f''_{yy}=-4y(3-4y^2)e^{x^2-2y^2}$　　（4 分）

由于 $\left[f''_{xx}\cdot f''_{yy}-(f''_{xy})^2\right]_{\left(0,-\frac{1}{2}\right)}<0$，　$\left[f''_{xx}\cdot f''_{yy}-(f''_{xy})^2\right]_{\left(0,\frac{1}{2}\right)}<0$　　（6 分）

所以$\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$与$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$都不是极值点，　　（7 分）

因此，函数$f(x,y)=ye^{x^2-2y^2}$在其定义域内无极值点。　　（8 分）

2、求曲线$\begin{cases} x^2-y^2+z^2=1 \\ x+y+2z=0 \end{cases}$上$(1,1,-1)$点处的切线方程和法平面方程

解 由$\begin{cases} 2x-2y\dfrac{dy}{dx}+2z\dfrac{dz}{dx}==0 \\ 1+\dfrac{dy}{dx}+2\dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases}$得$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-z}{2y+z}$，$\dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{x+y}{2y+z}$，　　（2 分）

$(1,1,-1)$点处的切向量为$\{1,3,-2\}$　　（4 分）

切线方程为$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+1}{-2}$。　　（6 分）

法平面方程为$(x-1)+3(y-1)-2(z+1)=0$，即$x+3y-2z=6$　　（8 分）

三、(每小题 7 分，共 14 分)

1、求方程$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{2x+y}$的通解

解法 1 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{2}{y}x+1$ （2 分）

其通解为 $x=\left[\int e^{-\int\frac{2}{y}dy}dy+C\right]e^{\int\frac{2}{y}dy}=\left[\int\frac{1}{y^2}dy+C\right]y^2=Cy^2-y$。

（5 分） （6 分） （7 分）

解法 2 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{2}{y}x+1$ （2 分）

针对 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{2}{y}x$，$\dfrac{dx}{x}=\dfrac{2}{y}dy$，得 $x=Cy^2$ （4 分）

设 $x=C(y)y^2$ 为原方程的解，则 $C'(y)y^2=1$，$C(y)=-\dfrac{1}{y}+C$ （6 分）

原方程通解为 $x=\left(C-\dfrac{1}{y}\right)y^2=Cy^2-y$。 （7 分）

2、求微分方程 $y''+y'+1=e^x$ 的通解。

解 特征方程 $r^2+r=0$，特征根 $r=0,-1$ （2 分）

设 $y=ax+be^x$ 为原方程的解，

（也可以：设 $y=ax$ 为 $y''+y'=-1$ 的解，$y=be^x$ 为 $y''+y'=e^x$ 的解） （4 分）

则 $be^x+a+be^x=-1+e^x$，由此得 $a=-1,b=\dfrac{1}{2}$ （6 分）

所以，原方程通解为 $y=C_1+C_2e^{-x}-1+\dfrac{1}{2}e^x$ （7 分）

四、（每小题 7 分，共 14 分）

1、计算 $\iint\limits_D(x+|y|)d\sigma$，其中 $D:(x-1)^2+y^2=1$

解 1 $\iint\limits_D(x+|y|)d\sigma=\int_0^2dx\int_{-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{1-(x-1)^2}}(x+|y|)dy=2\int_0^2dx\int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}}(x+y)dy$ （4 分）

$=2\int_0^2\left(x\sqrt{1-(x-1)^2}+\dfrac{1}{2}(2x-x^2)\right)dx=\dfrac{4}{3}+2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin t)\cos^2 t\,dt$ （6 分）

$$=\frac{4}{3}+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=\frac{4}{3}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=\frac{4}{3}+\pi$$ （7 分）

解法 2 $\iint\limits_D (x+|y|)d\sigma=\int_{-1}^{1}dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}}(x+|y|)dx$

（4 分）

$$=\int_{-1}^{1}\left[2\sqrt{1-y^2}+2|y|\sqrt{1-y^2}\right]dy=4\int_0^1(1+y)\sqrt{1-y^2}dy$$ （6 分）

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin t)\cos^2 t dt=\frac{4}{3}+\pi$$ （7 分）

2、计算 $\iiint\limits_\Omega (z+xy)dV$，其中 Ω 由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 围成

解 $\iiint\limits_\Omega (z+xy)dV=\iiint\limits_\Omega zdv+\iiint\limits_\Omega xydv=\int_0^1 dz\iint\limits_{D_z} zdxdy+\iint\limits_{D_{xy}} dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} xydz$

其中 $D_z: x^2+y^2\le z^2$；$D_{xy}: x^2+y^2\le 1$ （3 分）

$$=\pi\int_0^1 z^3dz+\iint\limits_{D_{xy}}\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)xydxdy$$ （5 分）

$$=\pi\int_0^1 z^3dz=\frac{\pi}{4}$$ （7 分）

五、（每小题 8 分，共 16 分）

1、将函数 $x\ln(1+2x)$ 展开成关于 x 的幂级数。

解 由 $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$, $(|x|<1)$，得 $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$, $(-1<x\le 1)$

（2 分） （4 分）

因此，$x\ln(1+2x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{n+1}}{n+1}x^{n+2}$, $(-1<x\le 1)$ （8 分）

2、证明级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)2^n}{n\,!}$ 收敛，并求出其收敛值。

证 因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)2^{n+1}}{(n+1)!}/\frac{(n+2)2^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+3)}{(n+1)(n+2)}=0<1$， （2 分）

所以，根据比值判别法，正向级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)2^n}{n\,!}$ 收敛。 （3 分）

因为，$x=1$时，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)2^n}{n!}x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)2^n}{n!}$ （4 分）

又因为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)2^n}{n!}x^{n+1}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^{n+2}\right)'=\left(x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(2x)^n\right)'=\left(x^2e^{2x}\right)'=2x(1+x)e^{2x}$$

（5 分） （6 分） （7 分）

所以，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)2^n}{n!}=2x(1+x)e^{2x}\Big|_{x=1}=4e^2$ （8 分）

六、（每小题 8 分，共 16 分）

1、求曲面 $y=2x^2+z^2$ 上距离平面 $x-2y+2z=1$ 最近的点，及该点到平面的距离。

解 曲面 $y=2x^2+z^2$ 上 (x_0,y_0,z_0) 点处的法向量 $\{4x_0,-1,2z_0\}$ （2 分）

由 $\frac{4x_0}{1}=\frac{-1}{-2}=\frac{2z_0}{2}$ 得，$x_0=\frac{1}{8},z_0=\frac{1}{2}$，代入曲面得 $y_0=\frac{9}{32}$。 （5 分）

则 (x_0,y_0,z_0) 为曲面上距离平面 $x-2y+2z=1$ 最近的点，因此 （6 分）

所求距离为 $d=\frac{|x_0-2y_0+2z_0-1|}{\sqrt{1+(-2)^2+2^2}}=\frac{7}{48}$ （8 分）

2、计算 $\iint_{\Sigma}(x+yz)dydz+(y+2x)dzdx+zdxdy$，其中 $\Sigma: z=x^2+y^2$，$(x^2+y^2\le 1)$，下侧为正方向。

解 设 $\Sigma_0: z=1,(x^2+y^2\le 1)$，上侧为正方向。 （1 分）

$$\iint_{\Sigma}=\oiint_{\Sigma\cup\Sigma_0}-\iint_{\Sigma_0}=\iiint_{\Omega}3dv-\iint_{D_{xy}}dxdy,\ (\Omega: x^2+y^2\le z\le 1;\ D_{xy}: x^2+y^2\le 1)$$ （4 分）

$$=3\int_0^1 dz\iint_{D_z}dxdy-\pi \quad (D_z: x^2+y^2\le z)$$ （6 分）

$$=3\pi\int_0^1 zdz-\pi=\frac{\pi}{2}$$ （8 分）