$\int\frac{1}{1+x^n}dx$的计算

首先我们计算一下简单的特例：

$$\int\frac{1}{1+x}dx=\ln\left|x+1\right|+C$$

$$\int\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C$$

$$\frac{1}{1+x^3}=\frac{1}{3(x+1)}+\frac{2}{3}\left(\frac{1-\frac{1}{2}x}{x^2-x+1}\right)$$

$$\int\frac{1}{1+x^3}dx=\frac{1}{3}\left(\ln\left|x+1\right|-\frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+1\right|+\sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\frac{1}{1+x^4}=\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}x-1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)$$

$$\int\frac{1}{1+x^4}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right|$$

$$\frac{1}{1+x^5}=\frac{1}{5(1+x)}+\frac{2}{5}\left(\frac{1-\frac{1+\sqrt{5}}{4}x}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+x^2}+\frac{1-\frac{1-\sqrt{5}}{4}x}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+x^2}\right)$$

$$\int\frac{1}{1+x^5}dx=\frac{1}{5}\{[\ln(x+1)+\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\ln[2x^2+(-1-\sqrt{5})x+2]+\frac{\sqrt{5}-1}{4}\ln[2x^2+(\sqrt{5}-1)x+2]$$
$$+\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}\arctan\frac{4x-1-\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}+\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}\arctan\frac{4x-1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\}$$

$$\frac{1}{1+x^6}=\frac{1}{3}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x+1}{x^2+\sqrt{3}x+1}-\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x-1}{x^2-\sqrt{3}x+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)$$

$$\int\frac{1}{1+x^6}dx=\frac{1}{6}\arctan x^3+\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x^2\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}+1}\right|$$

对于这个不定积分我们需要进行分解因式，于是考虑$1+x^n=0$的根

关于 x 的 n 次方程 $x^n+1=0$ 的根。

注意到 $e^{i\pi}+1=0$ ，和 $e^{i\theta}=i\sin\theta+\cos\theta$可以得到如下结论

如果 n是奇数，那么该方程的根为 $x_m = e^{\frac{k\pi i}{n}} = i\sin\frac{k}{n}\pi + \cos\frac{k\pi}{n}$; .... (其中$m \in \{1, 2, 3, 4 \ldots n\}$, $k \in \{\pm1, \pm3, \pm5 \ldots \pm n-2, n\}$)

.(1)

（该方程一定有根 x=-1 此时 k=n,其余根均为复数根)

如果 n 是偶数

$x_m = e^{\frac{k\pi i}{n}} = i\sin\frac{k}{n}\pi + \cos\frac{k\pi}{n}$ .... (其中$m \in \{1, 2, 3, 4 \ldots n\}$, $k \in \{\pm1, \pm3, \pm5 \ldots \pm(n-1)\}$)

(2)

(该方程有 n 个复数根，且彼此共轭）（其实根的表示形式有许多种，这里取的是较为对称的形式，以便下面写成一元二次方程的形式。）

$x^n + 1$在 n 是奇数时，可以分解为（x-1)和$\frac{n-1}{2}$个关于 x 的二次三项式的积的形式；n 是偶数时，可以分解为$\frac{n}{2}$个关于 x 的二次三项式的形式，而且这些二次三项式都是无实数根的。那么我们来讨论一下这些二次三项式的形式。首先这些复数根都是共轭的，那么一对共轭

复数根就是一个一元二次方程的根，于是

n 为奇数时

$$1 + x^{2n+1} = (1+x)(1-2x\cos\frac{1}{2n+1}\pi + x^2)(1-2x\cos\frac{3}{2n+1}\pi + x^2)\ldots(1-2x\cos\frac{2n-1}{2n+1}\pi + x^2)$$

....

......(3)

n 为偶数时

$$1+x^{2n}=(1-2x\cos\frac{1}{2n}\pi+x^2)(1-2x\cos\frac{3}{2n}\pi+x^2)\ldots(1-2x\cos\frac{2n-4}{2n}\pi+x^2)(1-2x\cos\frac{2n-2}{2n}\pi+x^2)$$

....

...（4）

那么对于 $\frac{1}{1+x^n}$ 的不定积分，对 n 分奇偶讨论，分解因式，就可以得到以下公式：

$$\frac{1}{1+x^{2n+1}}=\frac{B_1}{1+x}+\frac{A_2x+B_2}{1-2x\cos\frac{1}{2n+1}\pi+x^2}+\ldots+\frac{A_{n+1}x+B_{n+1}}{1-2x\cos\frac{2n-1}{2n+1}\pi+x^2}$$ ....

(5)

$$\frac{1}{1+x^{2n}}=\frac{A_1x+B_1}{1-2x\cos\frac{1}{2n}\pi+x^2}+\frac{A_2x+B_2}{1-2x\cos\frac{3}{2n}\pi+x^2}+\ldots+\frac{A_nx+B_n}{1-2x\cos\frac{2n-2}{2n}\pi+x^2}$$

但是我们可以证明（可以用数学归纳法证明）：

对于偶数来说

$$\frac{1}{1+x^{2n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{1-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+x^2}$$ ....(7)

所以 $\int\frac{1}{1+x^{2n}}dx=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int\frac{1-x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{1-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+x^2}dx$

$$=-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}(\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\int\frac{2x-2\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{1-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+x^2}dx)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\sin^2\frac{2k-1}{2n}\pi\int\frac{dx}{(x-\cos\frac{2k-1}{2n}\pi)^2+\sin^2\frac{2k-1}{2n}\pi})$$

$$=-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\ln|1-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+x^2|+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(|\sin\frac{2k-1}{2n}\pi|\arctan\frac{x-\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{\sin\frac{2k-1}{2n}\pi})$$

对于奇数来说，

$$\frac{1}{1+x^{2n+1}}=\frac{1}{(2n+1)(1+x)}+\frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-x\cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi}{1-2x\cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi+x^2}$$

所以 $\int\frac{1}{1+x^{2n+1}}dx=\frac{1}{2n+1}\ln|x+1|-\frac{1}{2n+1}\int\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi*$

$$\frac{2x-2\cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi+2\cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi-\frac{2}{\cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi}}{x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi+1}dx$$

$$=\frac{1}{2n+1}\ln|x+1|-\frac{1}{2n+1}\int\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi*$$

$$\left(\frac{2x-2\cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi}{x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi+1}+\frac{2\cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi-\frac{2}{\cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi}}{x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi+1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2n+1}\ln|x+1|-\frac{1}{2n+1}[\int\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi*\frac{d(x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi+1)}{x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi+1}-$$

$$\int\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin^2\frac{2k-1}{2n+1}\pi dx}{(x-\cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi)^2+\sin^2\frac{2k-1}{2n+1}\pi}$$

$$=\frac{1}{2n+1}\ln|x+1|-\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi\ln\left|x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi+1\right|$$

$$+\frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}|\sin\frac{2k-1}{2n+1}\pi|\arctan\frac{x-\cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi}{\left|\sin\frac{2k-1}{2n+1}\pi\right|}]+C$$

这样我们便得到了 $\int\frac{1}{1+x^n}dx$ 对于 $n\in N^+$ 时的结果。