线性代数

第 1 章 行列式

上三角行列式　　　　下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ * & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

次三角行列式

$$\begin{vmatrix} * & & & a_n \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & a_2 & & \\ a_1 & & & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & & & a_n \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & a_2 & & \\ a_1 & & & * \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1a_2\dots a_n$$

两种特殊的拉普拉斯(Laplace)展开式

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{vmatrix} = |A||B| \\ \begin{vmatrix} * & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A||B| \end{cases}$$

行列式的性质：行列不变；行行变反；倍加行不变。

范德蒙行列式　　　　三对角行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(x_i - x_j) \quad \begin{vmatrix} a & b & & & & & 0 \\ c & a & b & & & & \\ & c & a & b & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & c & a & b & \\ & & & & c & a & b \\ 0 & & & & & c & a \end{vmatrix} \; D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}$$

重要公式：$|AB| = |A||B| \quad |A^*| = |A|^{n-1} \quad |A^{-1}| = |A|^{-1} \quad |A^k| = |A|^k$

Cramer 法则：$x_j = D_j / D$

第 2 章 矩阵

2.1 基本概念

奇异矩阵，非奇异矩阵，零矩阵，同型矩阵，单位矩阵，数量矩阵，对角矩阵，对角块矩阵，对称矩阵，反对称矩阵，逆矩阵，伴随矩阵，正交矩阵

2.2 矩阵的运算

加法，数量乘法，乘法，转置，逆，伴随

$(AB)^T = B^T A^T$

$A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|} \quad AA^* = A^*A = |A|I$

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad (A^{-1})^T = (A^T)^{-1} \quad (A^{-1})^* = (A^*)^{-1} \quad (A^{-1})^n = (A^n)^{-1}$

$(AB)^* = B^*A^* \quad (A^*)^T = (A^T)^* \quad (A^*)^{-1} = (A^{-1})^* \quad (A^*)^* = |A|^{n-2}A$

$$r(A^*) = \begin{cases} n, r(A) = n \\ 1, r(A) = n-1 \\ 0, r(A) \le n-2 \end{cases}$$

2 阶矩阵的伴随矩阵：主对角线互换，副对角线变号

2.3 初等变换

$E_i(c)$　$E_{ij}(c)$　E_{ij} 左乘是行变换，右乘是列变换

$$E_i(\frac{1}{c})E_i(c)=I \quad E_{ij}(-c)E_{ij}(c)=I \quad E_{ij}E_{ij}=I$$

2.4 分块矩阵

同型对角块矩阵

$$\begin{pmatrix} C_1 & & & \\ & C_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} D_1 & & & \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1D_1 & & & \\ & C_2D_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_nD_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \iddots & & \\ A_n & & & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & & & A_n^{-1} \\ & & \iddots & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CB^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$$

2.5 常见题型

求方阵的幂：1.r(A)=1；2.A=B+C；3.相似对角化，$A^n=P^{-1}\Lambda^nP$
求逆矩阵：公式法，分块矩阵法，初等变换法

第 3 章 线性方程组

3.1 n 维向量

线性组合，线性表出，向量组等价，线性相关，线性无关，向量组的秩，极大线性无关组

3.2 矩阵的秩

1. 矩阵的秩=矩阵的行秩=矩阵的列秩=矩阵的非零主子式的最高阶数
2. 初等变换不改变矩阵的秩

$r(A+B)\le r(A)+r(B)$ $r(AB)\le \min(r(A),r(B))$

A 是 m×n 矩阵，若 AB=0，则 $r(A)+r(B)\le n$

标准相抵型 $PAQ=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

同型等秩⇔相抵

3.3 齐次方程组 Ax=0

判定：有非零解⇔r(A)<n
解的结构：有 n-r 个基础解系。对 A 作初等行变换化为阶梯形矩阵，每个非零行中第一个非零系数所在列代表的未知数是基本未知量（有 r 个），剩余的是自由未知量，对自由未知量按阶梯形赋值后，再代入求解就可以得到基础解系。

3.4 非齐次方程组 Ax=b

设 A 是 m×n 矩阵，方程组 Ax=b，则
（1） 有唯一解⇔r(A)=r(A,b)=n；
（2） 有无穷解⇔r(A)=r(A,b)<n；
（3） 无解⇔r(A)+1=r(A,b)。

解的结构：$x=x_0+\bar{x}$

3.5 常见题型

1.线性无关的证明，常用思路是是设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\dots+k_n\alpha_n=0$，两边同乘作恒等变形。

2.Ax=0 和 $A^TAx=0$ 同解。

3.基础解系的证明：是解，线性无关，n-r

第 4 章 向量空间与线性变换

4.1 基本概念

自然基，标准基，标准正交基，基，维数，坐标，过度矩阵，向量的内积，欧氏空间，线性空间

4.2 坐标变换

基变换：$B_1A=B_2$ 坐标变换：$x=Ay$

旋转变换 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

4.3 施密特正交化

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_j=\alpha_j+\sum_{i=j-1}^{1}k_{ij}\beta_i, k_{ij}=-\frac{(\alpha_j,\beta_i)}{(\beta_i,\beta_i)}$$

4.5 正交矩阵

正交矩阵 $A^TA=I$⇔列向量组是标准正交基

设 A,B 是正交矩阵,则 A^T, A^{-1}, AB 也是正交矩阵.

Ax,Ay 的长度,夹角和内积保持不变.

第 5 章 特征值和特征向量

5.1 特征值和特征向量

概念：特征值，特征向量，特征矩阵，特征多项式，特征方程
定义：$Ax=\lambda x$
性质：

1. 不同特征值的特征向量是线性无关的
2. $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii};\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=\det A$
3. $k\lambda$, $\lambda+k$, λ^m, λ^{-1}
4. A 和 A^T，AB 和 BA 的特征值相同。

5.2 相似矩阵

定义：若存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$，就称 A 相似于 B，记作 A~B。
性质：1 .若 A~B，则 $A+kI\sim B+kI, A^m\sim B^m$;
2 .相似矩阵的特征值相同。

5.3 可对角化的条件

(1)有 n 个线性无关的特征向量；或(2)每个特征值的重数等于对应特征向量子

空间的维数。

5.4 实对称矩阵

性质：
1．实对称矩阵一定是可对角化的；
2．实对称矩阵的特征值全是实数，特征向量全是实向量，不同特征值的特征向量是正交的；
3．存在正交矩阵 T，使得 $T^{-1}AT=diag(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$

求 T：先求得特征向量，再正交化。

第 6 章 二次型

6.1 二次型的定义和矩阵表示

二次型：二次型就是二次齐次多项式（即每项都是二次的）
矩阵表示：x^TAx

合同矩阵：若存在存在可逆矩阵 C，使得 $C^TAC=B$，就称 A 合同于 B，记作

$A\simeq B$。

6.2 化二次型为标准型

1．正交变换法
2．配方法
3．初等变换法

6.3 惯性定理和二次型的规范性

惯性定理：对于一个 n 元二次型，不论做怎样的坐标变换使之化为标准型，其中正平方项的项数和负平方项的项数都是唯一的。
规范型：设 A 为 n 阶实对称矩阵，若 A 的正、负惯性指数分别为 p 和 q，则

$$A\simeq diag(1,\ldots,1,-1,\ldots,-1,0,\ldots,0)$$

其中 1 有 p 个，-1 有 q 个。
或者说对于二次型 x^TAx，存在坐标变换 x=Cy，使得

$$x^TAx=y_1^2+\ldots+y_p^2-y_{p+1}^2-\ldots-y_{p+q}^2$$

把右端的二次型称为 x^TAx 的规范型，把上面的对角矩阵称为 A 的合同规范型。
合同的充要条件： A、B 有相同的正惯性指数和负惯性指数。
合同的充分条件：A~B。（二者的前提是，A, B 是实对称矩阵）
合同的必要条件：r(A)=r(B)

6.4 正定二次型和正定矩阵

定义：如果对于任意的非零向量 x=(x1,x2,...,xn)T 都有 $x^TAx>0$，就称 x^TAx 为正定二次型，称 A 为正定矩阵。
二次型正定的充要条件：
1．x^TAx 是正定二次型；
2．A 的正惯性指数为 n，即 $A\simeq I$；
3．存在可逆矩阵 P，使得 $A=P^TP$；
4．A 的特征值全大于 0；
5．A 的顺序主子式全大于 0。

必要条件：1.$a_{ii}>0$；2.|A|>0。