线性代数 I 试题

(2016.11)

一、(**每空** 3 **分共** 24 **分**)**填空：**

1．**设方阵**$\boldsymbol{A}$**满足**$\boldsymbol{A}^2+11\boldsymbol{A}-16\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{E}$**是单位矩阵，则**$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=$ (　　　　　　)．

2．**设三阶可逆矩阵**$\boldsymbol{A}$**满足**$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{A}^*$，**其中**$\boldsymbol{A}^*$**为**$\boldsymbol{A}$**的伴随矩阵，则**$\det\boldsymbol{A}=$ (　)．

3．**已知 3 阶方阵**$\boldsymbol{A}$**的特征值为**$1,-1,2$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{A}^{-1}$，**则**$\det\boldsymbol{B}=$(　)．

4．**设**$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$**为 3 阶矩阵，**$\boldsymbol{A}^*$**为**$\boldsymbol{A}$**的伴随矩阵，若**$(0,1,1)^{\mathrm{T}}$**是线性方程组**$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$**的基础解系，则**$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$**的基础解系可为**(　　　　)．

5．**已知** $\boldsymbol{A}$ **为** n **阶可逆矩阵，** $\boldsymbol{E}$ **是单位矩阵，则**
$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$．

6．**设**$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$**为 2 维列向量，矩阵**

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2,\frac{1}{2}\boldsymbol{a}_1-3\boldsymbol{a}_2)，\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$$

如$\det\boldsymbol{A}=4$，**则**$\det\boldsymbol{B}=$(　)．

7．**设 3 阶矩阵**$\boldsymbol{A}$**与**$\boldsymbol{B}$**相似，如**-3**是**$\boldsymbol{A}$**的特征值，矩阵**$\boldsymbol{B}$**的三个特征值的和为**-4**，且**$\boldsymbol{B}$**的三个特征值的乘积为 6，则**$\boldsymbol{B}$**的三个特征值为**(　　　　　　　)．

8．**已知 3 阶对称方阵**$\boldsymbol{A}$**的特征值为**$1,-2,3$，**当** t **满足**(　　　　)**时，矩阵**$2\boldsymbol{A}-t\boldsymbol{E}$**是正定矩阵，其中**$\boldsymbol{E}$**是单位矩阵．**

二、(10 **分**) **计算**n**阶行列式**

$$D_n=\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0&0&1\\1&1&0&\cdots&0&0&2\\0&2&1&\cdots&0&0&3\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\ddots&1&0&n-2\\0&0&0&\cdots&n-2&1&n-1\\0&0&0&\cdots&0&n-1&1\end{vmatrix}$$

三、(10 **分**) **设**$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$**，且**$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{XA}=2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{E}$**，其中**$\boldsymbol{A}^*$**为**$\boldsymbol{A}$**的伴随矩阵，求矩阵**$\boldsymbol{X}$**.**

四、(15 **分**) **设**$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2+l&1&1\\2&3+l&2\\3&3&4+l\end{pmatrix}$**，**$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$**，当**$l$**满足什么条件时，线性方程组**$\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{b}$**有唯一解、无解、无穷多解？在有无穷多解时，求通解.**

五、(12 **分**) **已知**a_1,a_2,a_3**是** 3 **维向量空间**$\mathbf{R}^3$**的一组基，设**$b_1=a_1$**，**$b_2=a_1+a_2$**，**$b_3=a_1+a_2+a_3$**.**

1) **证明**b_1,b_2,b_3**也是**$\mathbf{R}^3$**的一组基；**

2) **求由基**b_1,b_2,b_3**到基**a_1,a_2,a_3**的过渡矩阵**C**；**

3) **是否存在非零向量**$a\in\mathbf{R}^3$**，使**a **在基**a_1,a_2,a_3**及基**b_1,b_2,b_3**下的坐标相同，如存在，求**a**.**

六、(6 **分**) **证明实对称矩阵的特征值为实数.**

七、(15 **分**) **已知二次型**

$$f=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+kx_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$$

经正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$**化为**$y_1^2+4y_2^2$**，求**$k$**及正交矩阵**$\boldsymbol{P}$**.**

八、(8 **分**) **设**n**阶实对称矩阵**$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$**是正定矩阵．证明：**

1) **矩阵**$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$**为正定矩阵；**

2) **矩阵**$\boldsymbol{AB}$**与**$\boldsymbol{BA}$**相似.**