定式

一、伴随矩阵

$$A^* = (A_{ji})_{n\times n}$$

$$A^* = (\det A)A^{-1} \qquad (A\text{可逆时})$$

$$A^*A = AA^* = (\det A)E \qquad (\text{一般情形})$$

$$\operatorname{rank} A^* = \begin{cases} n, & \operatorname{rank} A = n \\ 1, & \operatorname{rank} A = n-1 \\ 0, & \operatorname{rank} A < n-1 \end{cases}$$

二、A是正交矩阵

$$A^{\mathrm{T}}A = AA^{\mathrm{T}} = E \qquad A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$$

$$\det A = \pm 1$$

$A^{\mathrm{T}}, A^{-1}, A^{*}, A^{k}$ 均为正交矩阵

当B也为正交矩阵时，AB是正交矩阵。

当 $k=\pm 1$ 时，kA也是正交矩阵。

A的列(或行)向量是两两正交的单位向量。

三、A是实对称矩阵

$$A^{\mathrm{T}} = A$$

1. 特征值均为实数。

2. 不同的特征值对应的特征向量正交。

3. 存在正交矩阵Q，使得

$$Q^{-1}AQ = Q^{\mathrm{T}}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

上页 下页 返回

四、A是正定矩阵

$A^{\mathrm{T}} = A$（实对称矩阵）

存在正交矩阵Q，使得

$$Q^{-1}AQ = Q^{\mathrm{T}}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_i > 0$$

五、特征值与特征向量

1. 已知$\boldsymbol{x}$是$\boldsymbol{A}$的特征向量，列出 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$；

2. 已知λ_0是$\boldsymbol{A}$的特征值，列出 $\det(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E})=0$。

3. 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$的特征值，则

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$$

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=\det\boldsymbol{A}$$

4. 与$\boldsymbol{A}$有关矩阵的特征值和特征向量

矩阵	$\boldsymbol{A}$	$l\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A}^k$	$f(\boldsymbol{A})$	$\boldsymbol{A}^{-1}$	$\boldsymbol{A}^*$	$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$
特征值	λ	$l\lambda$	λ^k	$f(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\det\boldsymbol{A}}{\lambda}$	λ	λ
特征向量	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{x}$		$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$

5. 不同特征值对应的特征向量线性无关。

6. $\boldsymbol{A}$的各行(列)元素之和为a。

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\quad\left(\text{或 }\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right)$$

7. 向量 α 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解向量，则 α是$\boldsymbol{A}$对应特征值 0 的特征向量。

六、已知$f(A)=O$

①用待定法求逆矩阵$\boldsymbol{A}^{-1}$或$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}$等;

②求$\boldsymbol{A}$的部分特征值：$\boldsymbol{A}$的特征值满足$f(\lambda)=0$。

七、$AB=O$

① $\boldsymbol{B}$的列向量是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解向量。

② $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}+\operatorname{rank}\boldsymbol{B}\le n$（$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$均为$n$阶方阵）

八、A与B等价

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$$

九、A与E_n等价

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=n\,,\quad \det\boldsymbol{A}\neq 0$$

上页 下页 返回

十、A与B相似

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank} \boldsymbol{B}$$

$$\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{B}$$

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \det(\boldsymbol{B} - \lambda \boldsymbol{E})$$

$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$有相同的特征值

十一、A与B合同

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank} \boldsymbol{B}$$

当$\boldsymbol{A}$对称时$\boldsymbol{B}$也对称

实对称矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的正负惯性指数相同

十二、有关概念的关系

设 A 为 n 阶方阵

A非奇异$(\det A \neq 0)$ $\Leftrightarrow$ A可逆$(AB = AB = E)$

$\Leftrightarrow$ A满秩$(\mathrm{rank}A = n)$

$\Leftrightarrow$ A的列(行)向量组线性无关

$\Leftrightarrow$ $Ax = 0$ 只有零解

$\Leftrightarrow$ $Ax = b$ 有唯一解

$\Leftrightarrow$ A无零特征值

※