高等数学

高中公式

三角函数公式

和差角公式

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha\pm\beta)=\frac{tg\alpha\pm tg\beta}{1\mp tg\alpha\cdot tg\beta}$$

$$ctg(\alpha\pm\beta)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta\mp1}{ctg\beta\pm ctg\alpha}$$

和差化积公式

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

积化和差公式

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

倍角公式

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

$$\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

$$tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}\quad ctg2\alpha=\frac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha}$$

$$\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$

$$\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

$$tg3\alpha=\frac{3tg\alpha-tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha}$$

半角公式

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\quad\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$ctg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

$V_{棱柱}=SH$ $V_{棱锥}=\frac{1}{3}SH$ $V_{棱台}=\frac{1}{3}H(S+\sqrt{SS'}+S')$

球的表面积：$4\pi R^2$ 球的体积：$\frac{4}{3}\pi R^3$ 椭圆面积：πab 椭球的体积：$\frac{4}{3}\pi abc$

第 1 章 极限与连续

1.1 集合、映射、函数

空集，子集，有限集，无限集，可列集，积集，区间，邻域，上界，下界，上有界集，下有界集，无界集，上确界，下确界

确界存在定理：凡有上(下)界的非空数集必有有限的上(下)确界。

映射，象，原象，定义域，值域，满映射，单映射，双射，函数，自变量，因变量，基本初等函数

1.2 数列的极限

性质：

1. （唯一性）收敛数列的极限必唯一。
2. （有界性）收敛数列必为有界数列。
3. （子列不变性）若数列收敛于 a，则其任何子列也收敛于 a。
   注1. 一个数列有若干子列收敛且收敛于一个数，仍不能保证原数列收敛。
   注2. 若数列$\{x_n\}$有两个子列$\{x_p\}$,$\{x_q\}$均收敛于 a，且这两个子列合起来就是原数列，则原数列也收敛于 a。
   注3. 性质 3 提供了证明了某数列发散的方法，即用其逆否命题：若能从该数列中选出两个具有不同极限的子列，则该数列必发散。
4. （对有限变动的不变性）若数列$\{x_n\}$收敛于 a，则改变$\{x_n\}$中的有限项所得到的新数列仍收敛于 a。
5. （保序性）若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，且 a<b，则存在 N，当 n>N 时，有 $x_n<y_n$。

判别法则：

1.夹逼法则：若∃N,当 n>N 时，$x_n\le y_n\le z_n$，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}z_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=a$。

2.单调收敛原理：单调有界数列必收敛。

注：任何有界的数列必存在收敛的子数列。

3.柯西收敛准则：数列{x_n}收敛的充要条件是：对于任意给定的正数 ε，都存在正整数 N ，使得当 m，n>N 时，有$|x_m-x_n|<\varepsilon$。

1.3 函数的极限

性质：极限唯一性，局部有界性，局部保序性。
判别法则：

1.夹逼法则：若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，且存在 x_0 的某一去心邻域

$\overset{o}{U}(x_0,\delta)$，使得$\forall x\in\overset{o}{U}(x_0,\delta)$，均有 $f(x)\le g(x)\le h(x)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$。

2.单调收敛原理：单调有界函数必收敛。
3. 柯西收敛准则：函数 f(x)收敛的充要条件是：$\forall\varepsilon>0$, $\exists>0$, $\forall x',x''\in\overset{o}{U}(x_0,\delta)$，

有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。

4.海涅(Heine)归结原则：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充要条件是：对于任何满足

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 的数列{x_n}，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$。

归结原则对于验证函数在某点没有极限是较方便的，例如可以挑选一个收敛于该点的自变量 x 的数列{x_n}，而相应的函数值数列{$f(x_n)$}却不收敛；或者选出两个收敛于该点的数列{x_n},{x'_n}，而相应的函数值数列{$f(x_n)$},{$f(x_n)$}却具有不同的极限。

1.4 无穷小与无穷大

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=l$，当 $l\begin{cases}=0\\ \neq 0\\ =1\end{cases}$ 时，则称 $x\to x_0$ 时称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的

$$\begin{cases}\text{高阶无穷小，记作}\alpha(x)=o(\beta(x))\\ \text{同阶无穷小，记作}\alpha(x)=O(\beta(x))\\ \text{等阶无穷小，记作}\alpha(x)\sim\beta(x)\end{cases}$$

常用等价无穷小

$\sin x\ \tan x\ \arcsin x\ \arctan x\ e^x-1\ \ln(1+x)\sim x$

$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ $(1+x)^a-1 \sim ax$ $a^x-1 \sim x\ln a$

若 f(x=0), f'(0)≠0,则 $\int_0^x f(t)dt \sim \frac{1}{2}f'(0)x^2$

确定等价无穷小的方法：1.洛必达法则，2.泰勒公式

1.5 连续函数

极限存在⇔左右极限存在且相等。
连续⇔左右极限存在且相等，且等于该点函数值。
间断点：1.第一类间断点，左右极限不相等，或相等但不等于该点函数值；2.左右极限至少有一个不存在。
闭区间上连续函数的性质：有界性，最值性，介值性，零点存在定理。

1.6 常见题型

求极限的方法：1.四则运算；2.换元和两个重要极限；3.等价无穷小替换；4.泰勒公式；5.洛必达法则；6.利用函数极限求数列极限；7.放缩法；

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$,就要将数列 xn 放大与缩小成：$z_n \leqslant x_n \leqslant y_n$.

8.求递归数列的极限

(1)先证递归数列{a_n}收敛（常用单调收敛原理），然后设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，再对递归方程 $a_{n+1}=f(a_n)$ 取极限得 A=f(A)，最后解出 A 即可。

(2)先设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，对递归方程取极限后解得 A，再用某种方法证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$。

第 2 章 导数与微分

2.1 求导法则和求导公式

求导法则：

1.四则运算法则

$[\alpha u(x)+\beta v(x)]'=\alpha u'(x)+\beta v'(x)$ $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

$$[\frac{u(x)}{v(x)}]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

2.复合函数求导

$$(f[\varphi(x)])'=f'[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

关键在于区分哪些是中间变量，哪些是自变量

3.反函数求导 $[f^{-1}(y)]'=\dfrac{1}{f'(x)}$

4.隐函数求导

5.参数式求导

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases},\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)},\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^3}$$

6.对数求导法

7.分段函数求导

(1)按求导法则求连接点处的左右导数

设 $f(x)=\begin{cases}g(x),x-\delta<x\le x_0\\ h(x),x_0<x\le x+\delta\end{cases}$，若$g'_-(x_0)=h'_+(x_0)=A$，则$f'(x_0)=A$.

(2) 按定义求连接点处的左右导数

设 $f(x)=\begin{cases}g(x),\ x-\delta<x<x_0\\ A,\qquad x=x_0\\ h(x),\ x_0<x\le x+\delta\end{cases}$，$g(x)$与$f(x)$在点$x_0$处无定义，可按定义求$g'_-(x_0)$与$h'_+(x_0)$

(3)对于 $f(x)=\begin{cases}g(x),x\ne x_0\\ A,\ x=x_0\end{cases}$，(1)$f'(x)$很复杂，按定义求，$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

(2)否则，先求出$f'(x)$，再求$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$

8.变限积分求导

$$y=\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)}f(t)dt,\frac{dy}{dx}=f(\varphi(x))\varphi'(x)-f(\psi(x))\psi'(x)$$

求导公式：

$(C)'=0$

$(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$

$(a^{x})'=a^{x}\ln a$

$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$

$(\sin x)'=\cos x$

$(\cos x)'=-\sin x$

$(\tan x)'=\sec^2 x$

$(ctgx)'=-\csc^2 x$

$(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$

$(\csc x)'=-\csc x\cdot ctgx$

$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$

$(arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}$

2.2 高阶导数和高阶微分

求高阶导数的方法：

1.莱布尼茨（Leibniz）公式： $(u(x)v(x))^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x)$

2.常用公式

$$(e^{ax+b})^{(n)}=a^n e^{ax+b}$$

$$(\sin(ax+b))^{(n)}=a^n\sin(ax+b+\frac{n}{2}\pi)$$

$$(\cos(ax+b))^{(n)}=a^n\cos(ax+b+\frac{n}{2}\pi)$$

$$((ax+b)^{\beta})^{(n)}=a^n\beta(\beta-1)...(\beta-n+1)(ax+b)^{\beta-n}$$

$$(\frac{1}{ax+b})^{(n)}=a^n\frac{(-1)^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$$

$$(\ln(ax+b))^{(n)}=a^n(-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(ax+b)^n}$$

3.分解法
分解为上述初等函数之和

第 3 章 中值定理和泰勒公式

3.1 中值定理

费马定理：若是 x_0 是 f(x)的一个极值点，且 $f'(x_0)$存在，则必有 $f'(x_0)=0$(可微函数的极值点必为驻点)，

1.罗尔定理：若函数 f(x)满足以下条件：(i)在闭区间[a,b]上连续；(ii)在开区间(a,b)内可导；(iii)f(a)=f(b)，则在(a,b)内至少存在一点 ξ，使得 f'(ξ)=0.

2.拉格朗日定理：若函数 f(x)满足以下条件：(i)在闭区间[a,b]上连续；(ii)在开区间(a,b)内可导，则在(a,b)内至少存在一点 ξ，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)\cdot$$

3.柯西定理：若函数 f(x)和 g(x)满足以下条件：(i)在闭区间[a,b]上连续；(ii)在开区间(a,b)内可导；(iii) $\forall x\in(a,b), g'(x)\neq 0$，则在(a,b)内至少存在一点 ξ，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

3.2 泰勒公式

求泰勒公式的方法：

1.泰勒公式（拉格朗日余项）： $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

2.常用麦克劳林公式（带拉格朗日余项）

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\theta x$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\theta x$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha=\binom{\alpha}{0}+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+\ldots+(-1)^n x^n+(-1)^{n+1}x^{n+1}(1+\theta x)^{-1-(n+1)}$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+x^{n+1}(1+\theta x)^{-1-(n+1)}$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x+\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}x^k+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}x^{n+1}(1+\theta x)^{\frac{1}{2}-(n+1)}$$

3.逐项求导或逐项积分

若 $f(x)=\varphi'(x)$或$f(x)=\int_{x_0}^{x}\varphi(t)dt$，φ(x)的泰勒公式可以比较方便的求出来，

然后对其逐项求导或逐项积分便可以得到 f(x)的泰勒公式。

例如：$\arctan x=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^x(1-t^2+t^4)dt+o(x^5)=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+o(x^5)$

3.3 函数的极值、最值

驻点，导数不存在的点为极值可疑点。
驻点，导数不存在的点，端点为最值可疑点。
极值判别法则：
1.设点 x_0 为函数 f(x)的极值可疑点，f(x)在点 x_0 的邻域内连续，去心邻域内可微，如果在$(x_0-\delta,x_0)$内 $f'(x_0)\geq0$，在 $(x_0,x_0+\delta)$内 $f'(x_0)\leq0$，则 x_0 必为 f(x)的极大值点。反之必为极小值点。
2.若点 x_0 是 f(x)的驻点且 $f''(x_0)$存在，则当 $f''(x_0)>0(<0)$时，x_0 必为 f(x)的极小(大)值点。
3.设函数 f(x)在点 x_0 处有 n 阶导数，且 $f'(x_0)=f'(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，

但 $f^{(n)}(x_0)\neq0$，则(i)当 n 为偶数时，f(x)在点 x_0 处取极值，当 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时

取极小值，当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时取极大值；(ii)当 n 为奇数时 $f(x_0)$不是极值。

3.4 函数作图

定理：设函数 f(x)在闭区间[a,b]上连续，在开区间(a,b)内可导，则 f(x)在[a,b]上是凸（凹）函数的充要条件是：1.f'(x) 在开区间(a,b)内单调递减（增）。
2. $f(\lambda x_1)+(1-\lambda)x_2)<(>)\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),\ \lambda\in(0,1)$.
3. $f''(x_0)\leq(\geq)0$.
若函数 f(x)在点 x_0 处凹凸性相反，则点 x_0 称为 f(x)的拐点。
拐点的必要条件：$f''(x_0)=0$ 或 $f''(x_0)$不存在。
拐点的充要条件：f''(x)经过时变号。

渐近线：1.垂直渐近线：x=a 是垂直渐近线⇔ $\lim_{x\to a+0}=\infty$ 或 $\lim_{x\to a-0}=\infty$.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f(\frac{i}{n})=\int_0^1 f(x)dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$$

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$$

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx, I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

使用分部积分法的常见题型：

被积函数的形式	所用方法
$P_n(x)e^x, P_n(x)\sin x, P_n(x)\cos x$	进行 n 次分部积分，每次均取 $e^{\alpha x}, \sin\alpha x, \cos\alpha x$ 为 $v'(x)$
$P_n(x)\ln x, P_n(x)arc\sin x, P_n(x)\arctan x$	取 $P_n(x)$ 为 $v'(x)$
$e^{\alpha x}\sin\beta x, e^{\alpha x}\cos\beta x$	取 $e^{\alpha x}$ 为 $v'(x)$，进行两次分部积分

4.2.3.定积分的应用

(1)平面图形的面积

$$dS=f(x)dx=\varphi(y)dy=\frac{1}{2}r^2(\theta)d\theta$$

(2)旋转体的体积

$$dV=\pi f^2(x)dx=\pi\varphi^2(y)dy=2\pi xf(x)dx$$

(3)弧长、曲率

弧微分公式：$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+f'^2(x)}dx=\sqrt{1+\varphi'^2(y)}dy$
$=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta$

曲率：$K=|\frac{d\alpha}{ds}|=\frac{|y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)|}{[x'^2(t)+y'^2(t)]^{3/2}}=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$

(4)静矩、转动惯量

mr,　mr^2

(5) 引力 $F=G\frac{m_1m_2}{r^2}$

①均匀细杆质量为 M，长度为 l，在杆的延长线上离右端为 a 处有一质量为 m 的质点，则质点与细杆之间的引力为 F=kMm/a(a+l).

②均匀圆环质量为 M，半径为 r，在圆心的正上方距离为 b 处有一质量为 m 的质点，则质点与均匀圆环之间的引力为 $F=\frac{kMmb}{(r^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$.

③均匀圆盘可以看作是无数个均匀圆环。

4.3 广义积分

广义积分审敛法

1.比较法 $f(x)\le kg(x),k\ge 0$

2.比较法的极限形式 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k$

3.柯西收敛准则 $|\int_{A'}^{A''}f(x)dx|<\varepsilon$

几个常见的广义积分

1.$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p},a>0\begin{cases}收敛,p>1\\发散,p\le 1\end{cases}$;　2.$\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^p},a>0\begin{cases}收敛,p<1\\发散,p\ge 1\end{cases}$

3.$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^p x},a>1\begin{cases}收敛,p>1\\发散,p\le 1\end{cases}$;　4.$\int_a^{+\infty}x^ke^{-\lambda x}dx,k\ge 0\begin{cases}收敛,\lambda>0\\发散,\lambda\le 0\end{cases}$

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^a)}dx\overset{x=\frac{1}{t}}{\rightarrow}I=\frac{\pi}{4}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

第 5 章 无穷级数

常数项级数敛散性的判定

1.若 $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$，级数发散，等于零，需进一步判定。

2.若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，根据一般项的特点选择相应判别法：

①一般项中含有 n!或 n 的乘积形式，采用比值判别法；
②一般项中含有以 n 为指数幂的因子，采用根值判别法；
③一般项中含有形如 n^{α}（α 不一定是整数）的因子，采用比较判别法；
④利用已知敛散性的结果，结合级数的性质，判别其敛散性；
⑤采用定义，部分和数列$\{S_n\}$有上界。

3. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为任意级数，若其为交错级数，采用莱布尼茨判别法，若不为交错级数或是交错级数但不满足莱布尼茨判别法的条件，采用比值判别法和根值判别法。

求函数项级数的收敛域：(1)比值法 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|<1$；(2)根值法 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n(x)}<1$。

求幂级数的收敛域：（1）比值法 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$或$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|<1$；

（2）根值法 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$或$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n(x)}<1$。

常数项级数的求和：1.直接计算部分和 S_n，然后求极限；

2.利用相应的幂级数。

幂级数的求和：利用逐项求导，逐项积分，四则运算等手段，将其化为可求和形式（即前面的麦克劳林公式）。

求函数的幂级数展开式：就是求泰勒公式（前面有求泰勒公式的三个方法）。

傅立叶级数 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，$\begin{cases}a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx\\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx\end{cases}$

狄利克雷充分条件

$$S(x)=\begin{cases}f(x)\text{，续点}\\ \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\text{，间断点}\\ \frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)]\text{，}x=\pm\pi\end{cases}$$

几个重要的级数

1.几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}\begin{cases}\text{当}|q|<1\text{时收敛}\\ \text{当}|q|\geq 1\text{时发散}\end{cases}$ 2.p-级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases}\text{当p}>1\text{时收敛}\\ \text{当p}\leq 1\text{时发散}\end{cases}$

3. $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln^p n}\begin{cases}\text{当}p>1\text{时收敛}\\ \text{当}p\leq 1\text{时发散}\end{cases}=$ 4. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}=e$ 5. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

第 6 章 微分方程

1. 可分离变量方程 $\frac{dy}{dx}=g(x)h(y)$

2. 可化为可分离变量方程的方程 $\begin{cases}\text{齐次方程 }\frac{dy}{dx}=f(x,y)=\varphi(\frac{y}{x})\\ \text{可化为齐次方程的方程 }\frac{dy}{dx}=f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})\end{cases}$

3.一阶线性方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(y)$ $y=e^{-\int P(x)dx}(C+\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx)$

2.斜渐近线：f(x)=ax+b, $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}, b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$ 或

$a=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}, b=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-ax)$（水平渐近线为其特例）。

函数作图的步骤：

1. 确定函数的定义域；
2. 观察函数的某些特性，奇偶性，周期性等；
3. 判断函数是否有渐近线，如有，求出渐近线；
4. 确定函数的单调区间，极值，凹凸区间，拐点，并列表；
5. 适当确定一些特殊点的函数值；
6. 根据上面提供的数据，作图。

第 4 章 积分

4.1 不定积分

4.1.1.基本积分表

$\int x^{\mu}dx=\dfrac{1}{\mu+1}x^{\mu+1}+C \quad \int\dfrac{1}{x}dx=\ln|x|+C \quad \int a^{x}dx=\dfrac{1}{\ln a}a^{x}+C$

$\int\sin xdx=-\cos x+C \quad \int\cos xdx=\sin x+C$

$\int\tan xdx=-\ln|\cos x|+C \quad \int\cot xdx=\ln|\sin x|+C$

$\int\sec xdx=\ln|\sec x+\tan x|+C$

$\int\csc xdx=-\ln|\csc x+\cot x|+C=\ln|\csc x-\cot x|+C=\ln|\tan\dfrac{x}{2}|+C$

$\int\sec^2 xdx=\tan x+C \quad \int\csc^2 xdx=-\cot x+C$

$\int\tan x\sec xdx=\sec x+C \quad \int\csc x\cot xdx=-\csc x+C$

$\int\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C$或$-\arccos x+C$

$\int\dfrac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C$或$-\operatorname{arccot} x+C$

$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a}+C$

$\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$

$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$

$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$

$\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$

$\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$

$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)+C$

$\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C$

不可积的几个初等函数： $e^{-x^2} \quad \frac{1}{\ln x} \quad \sin x^2 \quad \cos x^2 \quad \frac{\sin x}{x} \quad \frac{\cos x}{x}$

4.1.2.换元积分法和分部积分法

换元积分法： 1.第一类换元积分法，即凑微分法，合并。
2.第二类换元积分法，拆分。

分部积分法： $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx$

4.1.3.有理函数和可化为有理函数的积分

有理函数 $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的积分可以归结为下列四种简单分式的积分：

（1） $\int \frac{A}{x-a}dx$；（2） $\int \frac{A}{(x-a)^n}dx$；

（3）$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$；（4）$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx$

$$I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{2a^2(n-1)}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1}$$

三角函数有理式的积分一般用万能代换 $\tan\frac{x}{2}=t$，对于如下形式可以采用更灵活的代换：

对于积分 $\int R(\sin^2 x,\cos^2 x)dx$，可令 tanx=t；

对于积分 $\int R(\sin x)\cos xdx$，可令 sinx=t；

对于积分 $\int R(\cos x)\sin xdx$，可令 cosx=t，等等。

某些可化为有理函数的积分

1. $\int R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$ 型积分，其中 n>1，其中 ad ≠bc。

这里的关键问题是消去根号，可令 $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$。

2. $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c}dx$ 型积分，其中 $b^2-4ac\neq 0$，a ≠0。由于

$ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}$，故此类型积分可以化为以下三种类型：

$\int R(u,\sqrt{k^2-u^2})dx$，可用三角替换 $u=k\sin t$；

$\int R(u,\sqrt{u^2-k^2})dx$，可用三角替换 $u=k\sec t$；

$\int R(u,\sqrt{u^2+k^2})dx$，可用三角替换 $u=k\tan t$。

$I_n=\int \tan^n x dx=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-I_{n-2}$

倒代换：$\int\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$，$\int\frac{1-x^2}{1+x^4}dx$，由此还可以求出$\int\frac{1}{1+x^4}dx$，$\int\frac{x^2}{1+x^4}dx$

$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin x+b\cos x}dx,(a^2+b^2\neq 0)$

解：设 $a_1\sin x+b_1\cos x=A(a\sin x+b\cos x)+B(a\cos x-b\sin x)$，为此应有

$\begin{cases}aA-bB=a_1\\ bA+aB=b_1\end{cases}$，解得 $A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2},B=\frac{ab_1-ba_1}{a^2+b^2}$，故

$$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin x+b\cos x}dx=A\int dx+B\int\frac{(a\sin x+b\cos x)'}{a\sin x+b\cos x}dx$$

$$=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}x+\frac{ab_1-ba_1}{a^2+b^2}\ln|a\sin x+b\cos x|+C$$

4.2 定积分

4.2.1.可积条件

可积的必要条件：若函数 f(x)在闭区间[a,b]上可积，则 f(x)在[a,b]上有界。
可积函数类：闭区间上的连续函数，单调函数，有界且只有有限个间断点。

4.2.2.定积分的计算

1.换元积分法 $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dx$

从右到左，相当于不定积分的第一类换元积分法，从左到右，相当于第二类换元积分法。

2.分部积分法 $\int_a^b u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)|_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx$

常见的积分和式

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(a+\frac{i(b-a)}{n})\frac{(b-a)}{n}$$

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(a+\frac{(i-1)(b-a)}{n})\frac{(b-a)}{n}$$

4.伯努利方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^{\alpha}$ 令 $y=z^{1-\alpha}\Rightarrow\frac{dz}{dx}+(1-\alpha)P(x)z=(1-\alpha)Q(x)$

5.全微分方程　特殊路径法，凑微分法

6.可降阶的高阶方程

$$\begin{cases} \text{不含y}\quad y''=f(x,y')\quad \text{令}p=y',y''=\frac{dp}{dx} \\ \text{不含x}\quad y''=f(y,y')\quad \text{令}p=y',y''=y\frac{dp}{dy} \end{cases}$$

7.

线性微分方程

$$\begin{cases} \text{二阶齐次}\ y''+p(x)y'+q(x)y=0 & \begin{cases} (1)\text{已知}y_1 \\ (2)\text{令}y_2=u(x)y_1\text{，代入求出}y_2 \\ (3)y=c_1y_1+c_2y_2 \end{cases} \\ \text{二阶非齐次}\ y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) & \begin{cases} (1)\text{求出对应齐次方程的}y_1,y_2 \\ (2)\text{令}y^*=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)\text{,求出}u_1,u_2 \begin{cases} u_1'y_1+u_2'y_2=0 \\ u_1'y_1'+u_2'y_2'=f(x) \end{cases} \\ (3)y=c_1y_1+c_2y_2+y^* \end{cases} \end{cases}$$

8.常系数线性微分方程

二阶齐次 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$	特征方程的根	微分方程的线性无关解	微分方程的通解
	互异实根 r_1,r_2	e^{r_1x},e^{r_2x}	$y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$
	二重实根 $r_1=r_2=r$	e^{rx},xe^{rx}	$(c_1+c_2x)e^{rx}$
	共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	$e^{\alpha x}\cos\beta x,e^{\alpha x}\sin\beta x$	$e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$

二阶非齐次 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$	(1) 求对应齐次方程的 y_1,y_2 (2) 令 $y^*=Q(x)e^{\lambda x}=x^k(A_0+A_1x+\ldots+A_mx^m)e^{\lambda x}$ $Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=p_m(x)$ (3) $y=c_1y_1+c_2y_2+y^*$

9.欧拉方程

$$x^ny^{(n)}+p_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}xy'+p_ny=f(x)$$

$$令x=e^t,D^k=\frac{d^k}{dt^k},则x^ky^{(k)}=D(D-1)\ldots(D-k+1)y$$

$$\therefore[D(D-1)\ldots(D-n+1)+p_1D(D-1)\ldots(D-n+2)+\ldots+p_{n-1}D]y=f(e^t)$$

第 7 章 向量代数与空间解析几何

$$\overset{叉积}{a\times b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}\quad \overset{混合积}{(a,b,c)}=(a\times b)\bullet c=\underset{(平行六面体的体积)}{\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}}$$

$$平面方程\begin{cases} 点法式\ A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \\ 三点式\ 混合积为零 \\ 截距式\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1 \\ 一般式\ Ax+By+Cz+D=0 \end{cases}$$

$$直线方程\begin{cases} 参数式\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases} \\ 对称式\ \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p} \\ 一般式\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \end{cases}$$

平面束方程 $\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$

两平面夹角
两直线夹角 $\Big\}\cos\theta=\dfrac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}=\sin\varphi$(平面与直线的夹角)

点到直线的距离 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ 点到直线的距离 $d=\dfrac{|\overline{p_1p_0}\times s|}{|s|}$

常见二次曲线

- 柱面：椭圆柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$ 双曲柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=1$ 抛物柱面 $x^2=2pz$
- 球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 椎面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$
- 旋转面
  - $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}\xrightarrow{\text{绕z轴旋转}}\begin{cases}x=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}\cos\theta\\ y=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}\sin\theta\\ z=z(t)\end{cases}$
  - $\begin{cases}f(x,z)\\ y=0\end{cases}\xrightarrow{\text{绕z轴旋转}}f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$
    - 旋转椭圆面 $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$
    - 旋转双 $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=1$(单叶)
    - 曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2+z^2}{b^2}=1$(双叶)
    - 旋转抛物面 $x^2+y^2=2pz$
- 椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=\pm1\begin{pmatrix}\text{单}\\ \text{双}\end{pmatrix}$ 抛物面 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\pm z\text{(椭圆)}\\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\pm z\text{(双曲)}\end{cases}$

复合函数微分法，关键在于确定哪些是中间变量，哪些是自变量

$$\text{隐函数微分法}\begin{cases}\text{由方程确定的隐函数 } F(x_1,x_2,\dots,x_n)\Rightarrow \dfrac{\partial y}{\partial x_i}=\dfrac{-Fx_i}{F_y}\\[2ex] \text{由方程组确定的隐函数}\begin{cases}\begin{cases}F(x,u,v)=0\\G(x,u,v)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{du}{dx}=-\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}\\[2ex] \dfrac{dv}{dx}=-\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}\end{cases}\\[6ex] \begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}\\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)},\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

曲线的切线和法平面

$$(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$$
$$(1,y'(x_0),z'(x_0))$$
$$\left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right)$$

曲面的切平面和法线

$$(F_x(P_0),F_y(P_0),F_z(P_0))$$
$$(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0),-1)$$
$$\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$$

二元函数泰勒公式

$$f(x_0+h,y_0+l)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(h\dfrac{\partial}{\partial x}+l\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^{(k)}}{k!}f(x_0,y_0)+\frac{\left(h\dfrac{\partial}{\partial x}+l\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^{(n+1)}}{n!}f(x_0+\theta h,y_0+\theta l)$$

多元函数取极值的必要条件： $f_x(x_0,y_0)=0,f_y(x_0,y_0)=0$

$$\text{多元函数取极值的充分条件}\begin{cases}1.f'_x(x_0,y_0)=0,f'_y(x_0,y_0)=0\\ 2.(1)AC-B^2>0,A>0,\text{正定，有极小值};A<0,\text{负定，有极大值}\\ \quad(2)AC-B^2<0,A>0,\text{不定，无极值}\\ \quad(3)AC-B^2=0,\text{不能确定}\end{cases}$$

求条件极值，用拉格朗日数乘法

$$\begin{cases}\min(\text{或}\max)z=f(x,y)\\ \varphi(x,y)=0\end{cases},\text{令}F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y),\text{有}\begin{cases}F_x=0\\F_y=0\\\varphi(x,y)=0\end{cases}$$

方向导数：偏导数是函数在平行于坐标轴方向上的变化率，有时需要考虑函数沿某一指定方向的变化率，这种变化率就是方向导数。

方向导数 $\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$ 梯度 $(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z})$

第 9 章 多元函数积分学

9.1 二重积分

$$\begin{array}{c}\text{二重积分}\\ I=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\end{array}\begin{cases}1.x-\text{型区域}I=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)dy\\ 2.y-\text{型区域}I=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}f(x,y)dx\\ 3.\text{换元法 令}\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}\Rightarrow I=\iint\limits_D f(x(u,v),y(u,v))|J|dudv\\ (1)\text{平移变换 令}\begin{cases}x=u+a\\ y=v+b\end{cases}\Rightarrow I=\iint\limits_{D'} f(u+a,v+b)dudv\\ (2)\text{极坐标变换 令}\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\Rightarrow I=\iint\limits_{D'} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta\end{cases}$$

9.2 三重积分

$$\begin{array}{c}\text{三重积分}\\ I=\iiint\limits_V f(x,y,z)dv\end{array}\begin{cases}1.\text{二套一，一套二}\\ 2.\text{换元法 令}\begin{cases}x=x(u,v,w)\\ y=y(u,v,w)\\ z=z(u,v,w)\end{cases}\Rightarrow I=\iiint\limits_{V'} f(x(u,v,w),y(\ldots),z(\ldots))|J|dudvdw\\ \quad(1)\text{平移变换 令}\begin{cases}x=u+a\\ y=v+b\\ z=w+c\end{cases}\Rightarrow I=\iiint\limits_{V'} f(\ldots)dudvdw\\ \quad(2)\text{柱坐标变换 令}\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=z\end{cases}\Rightarrow I=\iiint\limits_{V'} f(\ldots)rdrd\theta dz\end{cases}$$

$$(3)\ \begin{matrix}\text{球坐标}\\ \text{变换}\end{matrix}\ \text{令}\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta\\ y=r\sin\varphi\sin\theta\\ z=r\cos\varphi\end{cases}\Rightarrow I=\iiint_{\Omega} f(\ldots)r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

$$(4)\ \begin{matrix}\text{椭球}\\ \text{坐标}\\ \text{变换}\end{matrix}\ \text{令}\begin{cases}x=ar\sin\varphi\cos\theta\\ y=br\sin\varphi\sin\theta\\ z=cr\cos\varphi\end{cases}\Rightarrow I=\iiint_{\Omega} f(\ldots)abcr^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

9.3 重积分的应用

$$\begin{cases}(1)\text{曲面面积 面积元素}:\dfrac{dxdy}{\cos(n,z)},\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}dxdy,\sqrt{EG-F^2}dudv\\ (2)\text{物体重心}\ \bar{x}=\dfrac{\iiint_{\Omega} x\rho(x,y,z)dv}{\iiint_{\Omega}\rho(x,y,z)dv}\\ (3)\text{转动惯量}(mr^2)\ \text{对z轴}dJ_z=(x^2+y^2)\rho(x,y,z)dv\ \text{对xy平面}dJ_{xy}=z^2\rho(x,y,z)dv\end{cases}$$

9.4 曲线积分

$$\begin{cases}\text{第一类}(\int_L f(x,y,z)ds)\ \text{代入弧微分公式}\\ \text{第二类}(\int_{L(A,B)} Pdx+Qdy+Rdz)\xrightarrow{\text{代入参数方程}}\int_\alpha^\beta[P(\ldots)x'(t)+Q(\ldots)y'(t)+R(\ldots)z'(t)]dt\end{cases}$$

9.5 曲面积分

$$\begin{cases}\text{第一类}(\iint_S f(x,y,z)dS)\ \text{代入面积元素}\\ \text{第二类}(\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy)=\pm\iint_{D_{xy}}[P(-\dfrac{\partial z}{\partial x})+Q(-\dfrac{\partial z}{\partial y})+R]dxdy\end{cases}$$

9.6 格林公式

$$\begin{cases} \oint_L Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \Leftarrow \begin{cases} \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy=\oint_L Qdy \\ \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy=-\oint_L Pdx \end{cases} \\ (i)\oint_L Pdx+Qdy=0 \Rightarrow (ii)\text{与路径无关} \Rightarrow (iii)du=Pdx+Qdy \Rightarrow (iv)\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow (i) \\ \text{求}Pdx+Qdy\text{的原函数} \begin{cases} (1)\text{不定积分法} \\ (2)\text{若}\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}\text{,特殊路径法} \\ (3)\text{凑微分法} \end{cases} \end{cases}$$

9.7 高斯公式

$$\oiint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_v\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv \begin{cases} \iiint_v \frac{\partial P}{\partial x}dv=\oiint_S Pdydz \\ \iiint_v \frac{\partial Q}{\partial y}dv=\oiint_S Qdzdx \\ \iiint_v \frac{\partial R}{\partial z}dv=\oiint_S Pdxdy \end{cases}$$

9.8 斯托克公式

$$
\begin{cases}
\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \Leftarrow \begin{cases} \oint_L Pdx=\iint_S \dfrac{\partial P}{\partial z}dzdx-\dfrac{\partial P}{\partial y}dydx) \\ \oint_L Qdx=\iint_S \dfrac{\partial Q}{\partial x}dxdy-\dfrac{\partial Q}{\partial z}dzdy) \\ \oint_L Rdz=\iint_S \dfrac{\partial R}{\partial y}dydz-\dfrac{\partial R}{\partial x}dxdz) \end{cases} \\
(i)\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=0 \Rightarrow (ii)\text{与路径无关} \Rightarrow (iii)du=Pdx+Qdy+Rdz \Rightarrow \\
\qquad (iv)\dfrac{\partial R}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial z},\dfrac{\partial P}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial x},\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow (i)
\end{cases}
$$

9.9 如何简化计算

1. 选择积分顺序（二重积分，三重积分）
2. 选择投影方向（第 II 类曲面积分）
3. 利用对称性与奇偶性
4. 换元
5. 曲线和曲面积分，利用已有方程
6. 利用几何或物理意义
7. 利用三个公式