线性代数Ⅰ试题

(2016.05)

一、(**每空** 3 **分共** 24 **分**)**填空：**

1．**设方阵**A**满足**$A^2+5A-19E=O$，E**是单位矩阵，则**$(A-2E)^{-1}=$ (　　　　　　)．

2．**已知方阵**$A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$，**则**$A^{2016}=$ (　　　　　　)．

3．**已知** 3 **阶方阵**A**的特征值为**$1,-1,2$，$B=A^2-\frac{1}{2}A^*$，A^***为**A**的伴随矩阵，则**$\det B=$(　)．

4．**设方程组**$\begin{pmatrix}a&2&2\\2&a&2\\2&2&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$**的基础解系所含向量个数为** 2，**则**$a$**的值为**(　　　　)．

5．**设**A**是**n**阶实对称矩阵，**P**是**n**阶可逆矩阵，已知**n**维列向量**a**是**A**的属于特征值**l**的特征向量，则矩阵**$(P^{-1}AP)^{\mathrm{T}}$**属于特征值**l**的特征向量为**(　　　　)．

6．**设**a**为** 3 **维列向量，**a^{T}**是**a**的转置，若**$aa^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，**则**$a^{\mathrm{T}}a=$(　)．

7．**设** 3 **阶矩阵**A**与**B**相似，如**$1,-3$**是**A**的特征值，**B**的对角元之和为** 2，**则**B**的三个特征值为**(　　　　　　)．

8．二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_3+x_1)^2$$

的秩为(　　　　　　　)．

二、(10 分) 计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1-1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-\frac{1}{2} & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n-\frac{1}{n} \end{vmatrix}$$

三、(10 分) 设 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，且

$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*=\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1}$，求$\boldsymbol{B}$．

四、(15 分) 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1+l & 1 & 1 \\ 2 & 2+l & 2 \\ 3 & 3 & 3+l \end{pmatrix}，\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}，$$

当 l 满足什么条件时，线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$有唯一解、无解、无穷多解？在有无穷多解时，求通解．

五、(10 分) 已知a_1,a_2,a_3是 3 维向量空间$\mathbf{R}^3$的一组基，设$b_1=a_1+a_2$，$b_2=a_2+a_3$，$b_3=a_3+a_1$．

1) 证明b_1,b_2,b_3也是$\mathbf{R}^3$的一组基；

2) 求由基b_1,b_2,b_3到基a_1,a_2,a_3的过渡矩阵C；

3) 求向量$a=a_1-2a_2-a_3$在基b_1,b_2,b_3下的坐标．

六、(8 **分**) **设**$\boldsymbol{A}$**为** 3 **阶矩阵，**a_1, a_2**为**$\boldsymbol{A}$**的分别属于特征值**$-1,1$**的特征向量，向量**a_3**满足**$\boldsymbol{A}a_3 = a_2 + a_3$**.**

1) **证明：**a_1, a_2, a_3**线性无关；**

2) **令**$\boldsymbol{P} = (a_1, a_2, a_3)$**，求**$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ **.**

七、(8 **分**)

1) **设**$\boldsymbol{B}$**是一秩为**n**的**$m \times n$**矩阵，证明**$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$**为正定矩阵；**

2) **如果**n**阶对称矩阵**$\boldsymbol{A}$**是正定矩阵，证明存在**n**阶可逆矩阵**$\boldsymbol{P}$**，使得**$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$ **.**

八、(15 **分**) **已知二次型**

$$f = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

经正交变换$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Py}$**化为**$y_2^2 + 4y_3^2$**，求**$a$**及正交矩阵**$\boldsymbol{P}$ **.**