例1设n阶矩阵A和B满足$A+B=AB$,(1)证明$A-I$为可逆矩阵;(2)已知$B=\begin{pmatrix}1&-3&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$,求$A$.

(3)证明$AB=BA$

(1)设$A-I=C\Rightarrow A=C+I$

代入方程得

$$C+I+B=(C+I)B$$

$$C(B-I)=I$$

$$(A-I)(B-I)=I$$

所以$A-I$为可逆矩阵

(2)$B-I=\begin{pmatrix}0&-3&0\\2&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

根据高斯消元法或初等矩阵的性质可得

$$(A-I)=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{3}&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{3}&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$(3)(A-I)(B-I)=I\cdots①$$

$$(B-I)(A-I)=I\cdots②$$

$$AB=A+B=BA$$

以小见大：

这是第一章的综合问题，涵盖了解方程，矩阵计算以及矩阵的性质运用。是一道期中考必考题，期末考容易考的题目。从第一小问中可以看出，当矩阵的形式不好观察的时候换个元就能很好的展现矩阵的一些性质和形式。其实，矩阵和数是很像的，数就是一些少量的运算的组合；而矩阵就是大数，是大量数的运算，矩阵的一些运算规则是为了矩阵的处理简便和统一而制定的。因此数和矩阵在很多思想上是相通的，如题中的整体思想的换元法。

在现实生活中，矩阵的运用要比数广泛的多。随着计算机计算量越来越大，数据的越来越复杂。简单的数字计算已经跟不上它的节奏，因此现在的计算机处理的很多时候是矩阵，为此很多元件的参数也是以矩阵的形式给出。不难看出，线性代数是一门现代信息科技的基础学科，如果以后想从事计算机行业，并且是以工程师为目标（而不仅仅是当一名码农），那么线代的学习就很有必要了。

三个小问分别是第一章的重点。对于第一小问前面也说过，换元可以很好的将方程的某些形式给展现出来。第二小问考点在于计算，高斯消元法以及求逆矩阵的熟悉运用。第三小问是一个交换律的体现。矩阵的交换律并不普遍，有如下几种可以交换的情况

①可逆矩阵满足交换律　　如 AB=I=BA

②存在单位矩阵的情况　　如(I+A)(I-A)=(I-A)(I+A)

③两个对称的矩阵可交换　　如$AA^T=A^TA$

例2计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a & a+b & a+b & \cdots & a+b \\ a-b & a & a+b & \cdots & a+b \\ a-b & a-b & a & \cdots & a+b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a-b & a-b & a-b & \cdots & a \end{vmatrix}$

①用倒数第二行消倒数第一行，再用倒数第三行去消倒数第二行，以此类推，最后用第一行消第二行

$$D_n=\begin{vmatrix} a & a+b & a+b & \cdots & a+b & a+b \\ a-b & a & a+b & \cdots & a+b & a+b \\ a-b & a-b & a & \cdots & a+b & a+b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a-b & a-b & a-b & \cdots & a & a+b \\ a-b & a-b & a-b & \cdots & a-b & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & a+b & a+b & \cdots & a+b & a+b \\ a-b & a & a+b & \cdots & a+b & a+b \\ a-b & a-b & a & \cdots & a+b & a+b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a-b & a-b & a-b & \cdots & a & a+b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b & -b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & a+b & a+b & \cdots & a+b & a+b \\ a-b & a & a+b & \cdots & a+b & a+b \\ a-b & a-b & a & \cdots & a+b & a+b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b & -b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & a+b & a+b & \cdots & a+b & a+b \\ -b & -b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -b & -b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b & -b \end{vmatrix}$$

②用倒数第一列消倒数第二列，再用倒数第二列去消倒数第三列，以此类推

$$=\begin{vmatrix} a & a+b & a+b & \cdots & a+b & a+b \\ a-b & a & a+b & \cdots & a+b & a+b \\ a-b & a-b & a & \cdots & a+b & a+b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b & -b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & a+b & a+b & \cdots & a+b & a+b \\ -b & -b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -b & -b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b & -b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & a+b & \cdots & a+b & a+b & a+b \\ -b & -b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -b & -b & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -b & -b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & a+b & \cdots & a+b & 0 & a+b \\ -b & -b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -b & -b & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -b \end{vmatrix}$$

分奇偶讨论

（1） n 为奇数

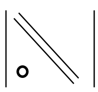
$$D_n=\begin{vmatrix} a & a+b & \cdots & a+b & 0 & a+b \\ -b & -b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & a+b & 0 & a+b \\ 0 & -b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -b \end{vmatrix}=ab^{n-1}$$

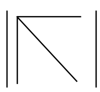
（2） n 为偶数

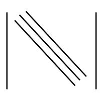
$$D_n=\begin{vmatrix} a & a+b & \cdots & a+b & 0 & a+b \\ -b & -b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & a+b & \cdots & a+b & 0 & a+b \\ -b & -b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -b & a+b & \cdots & a+b & 0 & a+b \\ 0 & -b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -b \end{vmatrix}=b^n$$

以小见大

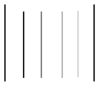
前面也说过行列式是为方程服务的，但有些时候方程导出的系数矩阵行列式比较复杂，所以我们需要掌握一些基本行列式的解法。

①  对于这种双线一点型的问题。直接按点所在行或列展开就行,如 $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$

②  爪型行列式的解决问题。用中间的爪子去消除某一边得到三角形矩阵，再将对角元相乘即可。

③  三线型问题。可以构造数列去求解 如 $\begin{vmatrix} a & a-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a & a-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & a-1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}$

可列出数列递推 $A_n=aA_{n-1}-(a-1)A_{n-2}$

④  每列有大量相同元的行列式。可通过加边法，再消元得到爪型行列式。

如 $$\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ b_1 & a_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ b_1 & b_2 & a_3 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ 0 & a_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ 0 & b_1 & a_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ 0 & b_1 & b_2 & a_3 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

⑤  矩阵上下半部分都是相同的，对角线相同。可通过一组行变换和一组列变换化成三角形矩阵。如本题。

例3求过点$A(-3,0,1)$且平行于平面π_1:$3x-4y-z+5=0$,又与直线$l_1:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$相交的直线$l$ 的方程

解法1，设直线l 的方向向量$s=(m,n,p)$ ，s 垂直于平面π_1 法向量$n=(3,-4,-1)$

有$3m-4n-p=0$

由于l与l_1共面，$B(0,1,-1)$是直线l_1上的点，$A(-3,0,1)$ 是直线l上的点，因此有$r,r_1,\overrightarrow{AB}$ 共面

$$\begin{vmatrix} m & n & p \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=0\Rightarrow -m+n-p=0$$

解得$m=-5p,n=-4p$

所以直线方程为$\dfrac{x+3}{-5}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z-1}{1}$

解法2，找平面

平面π_2是平行于π_1且过点A

$\pi_2:3\left(x+3\right)-4(y-0)-(z-1)=0$

平面π_3是过直线l_1与点A的平面

平面系方程

$x-2y+2+\lambda(z+1+y-1)=0$

代入A点解得λ=1

$$l:\begin{cases} 3x-4y-z+10=0 \\ x-y+z+2=0 \end{cases}$$

以小见大

第三章的问题虽然比较简单，但期末考中必有一道大题会考量第三章的学习。因此对于这个题目，我们必然是要拿下的。第三章主要讲了平面和直线，因此在考试中也主要考察直线和平面的位置关系。从历届考试来看，往往求解直线方程的可能性比较大。那么我们对于已知量如何去推导直线方程呢？下面有两个思路供大家思考。

①通构造直线的点向式。由于点向式需要一个直线上的点和方向向量，为此如果能从题意中能得到这两个东西，那么直线方程自然而然的就解决了。但是从做题时我们发现，这种方法较为复杂，求解点的时候需要解一个三元方程，求解方向向量时还需做个外积运算。不过增加了计算量却减少了题目的思考量。

②通过两个平面相交的几何关系来定出直线的一般式。与第①种方法相比，这个方法明显的减少了计算量，但同时我们需要思考的东西却变多了。对于这种方法，我们只需找到两个平面经过这个直线，那么就可以列出其一般式，通常在求解平面的过程种要运用一些垂直平行关系，甚至要用到平面系方程。

以上两种方法各有各的好处，根据自己的能力恰当选择。

对于平面的求解问题，比较单一，只需抓住平面的法向量即可。

例4设n阶矩阵A的伴随矩阵$A^* \neq 0$,且非齐次方程组$Ax=\beta$ 有两个不同的解向量ξ_1, ξ_2,则下列命题正确的是$(\ \ )$

A $\xi_1+\xi_2$也是$Ax=\beta$的解

B $Ax=\beta$的通解为（$\mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2 \in \mathrm{R}$）； $\mathrm{x}=\mathrm{k}_1\xi_1+\mathrm{k}_2\xi_2$.

C 满足$|A\text{-}\lambda I|=0$的数必不为0

D $\xi_1-\xi_2$是$Ax=0$的基础解系

解：

A 根据已知条件有$A\xi_1=\beta, A\xi_2=\beta,$因此$A\xi_1+A\xi_2=A(\xi_1+\xi_2)=2\beta$

B 将x代入原方程$Ax=A(k_1\xi_1+k_2\xi_2)=k_1A\xi_1+k_2A\xi_2=k_1\beta+k_2\beta,$显然不是通解

C 若λ为0，则$|A|=0,$这说明以A为系数矩阵的方程有多个解，题中已知该方程有两个解，因此$|A|=0$是成立的

D 基础解系是齐次方程中线性无关的解，而ξ_1，ξ_2是非齐次方程的解，有$A\xi_1=\beta, A\xi_2=\beta,$因此$A(\xi_1-\xi_2)=0,$所以$\xi_1-\xi_2$是齐次方程的基础解系

选 D

以小见大

①线性代数本身是一个以方程为基础的学科，因此在其运用的领域中总是与方程相关。线性代数很好的解释了线性方程的根的概念。引出了通解，特解，基础解析等概念。通解是齐次方程组的解，因为齐次方程组的特殊性，使它有很好的叠加性，不管多少个齐次方程的叠加都是齐次方程。而在齐次方程的基础上得到非齐次方程，而非齐次方程没有良好的叠加性，就像该题的 A 选项，两个非齐次的解相加得到了另外一个方程的解。所以当方程从齐次变成对应的非齐次时，相应的解也需要加上一个特解，这也是为什么非齐次方程组的解是由基础解系和一个特解构成。

②为什么线性代数要引入行列式呢？很多同学觉得行列式又多变又难算，简直就是来为难大家的。其实不然，因为在解方程的过程中，引入了行列式，可以很好的去刻画这个方程。比如克拉默法则，这是在求大型方程中常见的方法，它相当于是描述了一个方程的解的通式，方便计算机去机械的处理。再比如系数矩阵的秩与方程解的个数的关系，如果系数矩阵是方阵，那么行列式是否为零可以确定方程解的个数。同样特征值的计算和很多线代及微积分的判定定理都要用到行列式。所以正确理解行列式，它是一个工具，是为了使方程的体系构建更加严密。

例5设A是n阶方阵，α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_n是一组n维向量，满足$A\alpha_1=\alpha_1, A\alpha_i=\alpha_i+\alpha_{i-1},(i=2,3,\cdots,n)$
其中$\alpha_i\neq 0$,证明α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_n线性无关

证：由于$A\alpha_1=\alpha_1, A\alpha_{\mathrm{i}}=\alpha_{\mathrm{i}}+\alpha_{\mathrm{i\text{-}1}}$(i=1，2，3⋯n），
有（A-I）$\alpha_1=0,(A-I)\alpha_{\mathrm{i}}=\alpha_{\mathrm{i\text{-}1}}$(i=1,2,3,⋯，n),
于是有$\left(A-I\right)^{i-1}\alpha_i=\alpha_1$(i=1,2,3,⋯，n),$\left(A-I\right)^{i}\alpha_i=0$.
存在一组数k_1，$k_2,\cdots$，k_{n}，
使得$\mathrm{k}_1\alpha_1+\mathrm{k}_2\alpha_2+\cdots+\mathrm{k}_{\mathrm{n}}\alpha_{\mathrm{n}}=0$.
对上式两边同时左乘矩阵$(A-I)^{\mathrm{n\text{-}1}}$，于是有
$(A-I)^{\mathrm{n\text{-}1}}$（$\mathrm{k}_1\alpha_1+\mathrm{k}_2\alpha_2+\cdots+\mathrm{k}_{\mathrm{n}}\alpha_{\mathrm{n}}$)=$k_n\alpha_1=0$,
因$\alpha_1\neq 0$，所以$\mathrm{k}_{\mathrm{n}}=0$.
此时有$\mathrm{k}_1\alpha_1+\mathrm{k}_2\alpha_2+\cdots+\mathrm{k}_{\mathrm{n\text{-}1}}\alpha_{\mathrm{n\text{-}1}}=0$.
对上式两边同时左乘矩阵$(A-I)^{\mathrm{n\text{-}2}}$，于是有
$(A-I)^{\mathrm{n\text{-}2}}$（$\mathrm{k}_1\alpha_1+\mathrm{k}_2\alpha_2+\cdots+\mathrm{k}_{\mathrm{n\text{-}1}}\alpha_{\mathrm{n\text{-}1}}$)=$\mathrm{k}_{\mathrm{n\text{-}1}}\alpha_1=0$,
因$\alpha_1\neq 0$，所以$\mathrm{k}_{\mathrm{n\text{-}1}}=0$.
同理可得k_1，$k_2,\cdots$，k_{n}均为0
所以α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_{n}线性无关。

以小见大

线性无关，线性相关是一个非常抽象的概念，我们没有一个几何的空间去刻画它，因此理解起来比较困难，但是我们可以从一些生活中的例子去理解。最贴切的例子就是化学反应。一个 S 原子可以通过与O_2的反应得到SO_2,同样SO_2也可以通过某些脱硫反应得到 S 和O_2,因此我们用线性代数的语言说 S,O_2,SO_2,是线性相关的；同样我们知道光光一种 S 通过化学变化是无论如何都得不到 C 和O_2的，所以可以说 S,C, O_2是线性无关的。从这个例子中我们可以发现，线性相关就是说在一组向量中能通过其他的向量去构成某个向量，就好像在化学中，某些物质是可以由给定的其他物质通过化学变化得到。同样线性无关表示某个向量无法由该组中的其他向量构成，对应在化学上，某些物质由于缺少某些必要的元素，无法由给定的其他物质反应得到。

对于这类线性无关的证明题，我们首先是列出定义式$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$,再根据题目已知的条件去证明每一个 k 都必须为 0。具体分类如下

①当题目出现对该向量组左乘或右乘某个矩阵时，在证明时可以对上述定义式相应的左乘或右乘该矩阵（有时候需要乘该矩阵的 n 次方或 n-1 次方，都可以试试行不行）

②出现递推的关系时，如$\mathrm{A}\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2$，若第①方法行不通，可以对递推式子做一定修改，将相同的向量合并，该例中得到$(\mathrm{A}-\mathrm{I})\alpha_1=\alpha_2$,其他具体的例子，思路相同。之后在定义式中可以左乘该推导出来的矩阵（A-I）。

③反证法。但题目中没有出现任何递推公式时，并且你也毫无头绪时，试试看反证法，假设某个 k 不为 0，根据已知条件推出矛盾。

④利用向量组的秩结合书本 P136 的推论 1。由于向量组的秩和向量组个数有对应关系，当向量组的秩 r 与向量个数 n 相等时，该向量组线性无关。

例6设有三维列向量组$\alpha_1=\begin{bmatrix}1+\lambda\\1\\1\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\1+\lambda\\1\end{bmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1+\lambda\end{bmatrix}$，$\beta=\begin{bmatrix}0\\\lambda\\\lambda^2\end{bmatrix}$，$\lambda$为何值时，

$(1)\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，且表示唯一。$(2)\beta$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出。

$(3)\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，且有无穷种表示式，写出表示式

$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$　换种写法$\alpha_1k_1+\alpha_2k_2+\alpha_3k_3=\beta$　再换个变量$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3=\beta$

写成矩阵$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\beta\Rightarrow\begin{pmatrix}1+\lambda&1&1\\1&1+\lambda&1\\1&1&1+\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\beta$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}1+\lambda&1&1\\1&1+\lambda&1\\1&1&1+\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow\lambda^2(\lambda+3)=0$$

$(1)\lambda\neq-3$且$\lambda\neq0$

$(2)\lambda=0$时验证　　　　　　　　$\lambda=-3$时验证

$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$有解　　　　$\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-3\\9\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$的秩与$\left(\begin{array}{ccc|c}-2&1&1&0\\1&-2&1&-3\\1&1&-2&9\end{array}\right)$秩比较得到符合条件。

$(3)\lambda=0$

以小见大

这道题表面上看是一道向量组的题，但是我们实际去解决时却把它看成一个方程。这就是线性代数最重要的思想—方程思想。线性代数是一个研究多元方程的问题，第四章开始引入 n 维向量的同时在最后一节也引入了 n 元方程组。这道题就很好的阐述了方程与向量组的关系。向量组线性相关等价与方程组有解，相对地，向量组线性无关等价于方程无解。因此这道题可以很好的帮我们建立向量组和方程之间的桥梁，也能更透彻的解释 n 维空间的含义，实际上就是一个 n 元方程。所以光从向量组单方面去理解第四章的概念会很困难，但再从方程的角度去考虑可能就会有新的认识。

例7 (1) 已知三阶矩阵A的特征值为1，−1，2，则$|A^3-2A|=$

(2) 设A是三阶可逆矩阵，且满足$A^2-A-6I=0, |A^*|=144$, 则A的三个特征值为____

(3) 设A为3阶实对称矩阵，λ_1是二重特征根，对应两线性无关的向量

$\xi_1=(1,2,3)^T$，$\xi_2=(-2,1,-1)^T$，则对应另一特征值λ_3的全部特征向量是_____

(1) $|A^3-2A|=|A^2-2I|\,|A|$

根据特征值的性质我们有$|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$=-2

因此为求$|A^3-2A|$，只需求得$|A^2-2I|$

由于可逆矩阵可以相似对角化，即$A=P\Lambda P^{-1}$，从而$A^2=P\Lambda P^{-1}P\Lambda P^{-1}=P\Lambda^2P^{-1}$

因此可以对$|A^2-2I|$左乘$|P|$，右乘$|P^{-1}|$，得$|A^2-2I|=|P|\,|A^2-2I|\,|P^{-1}|=|\Lambda^2-2I|$

$$\left|\Lambda^2-2I\right|=\left|\begin{pmatrix}1^2 & & \\ & (-1)^2 & \\ & & 2^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-1 & & \\ & -1 & \\ & & 2\end{pmatrix}\right|=2$$

$\therefore |A^3-2A|=|A^2-2I|\,|A|=2\times(-2)=-4$

(2)

解法一：

$A^2-A-6I=0\Rightarrow(A-3I)(A+2I)=(A+2I)(A-3I)=0$

对于$(A-3I)(A+2I)=0$，我们可以将$(A+2I)$分块成列向量，

那么每个列向量都可以看成A矩阵在特征值等于3时的特征向量；

同理对于$(A+2I)(A-3I)=0$，我们也可以将$(A-3I)$的列向量看成

A矩阵在特征值为-2时的特征向量。因此我们可以断定3,-2是A的特征向量

解法二

$(A^2-A-6I)\alpha=0\cdot\alpha\Rightarrow(\lambda^2-\lambda-6)\alpha=0\Rightarrow\lambda_1=3$，$\lambda_2=-2$，因此有两个特征值

根据$|A^*|=|A|^{n-1}=144\Rightarrow|A|=\pm12$

但若$|A|=-12$，那么会出现第三个特征值$\lambda_2=2$，但发现这个解不满足$(\lambda^2-\lambda-6)=0$

因此这个解不是特征值，从而$|A|=12$，解出$\lambda_1=3$，$\lambda_2=\lambda_3=-2$

(3) 根据实对称矩阵不同特征值对应的特征向量正交，因此$\xi_3\perp\xi_1$，$\xi_3\perp\xi_2$

$\therefore \xi_3=k\xi_1\times\xi_2=k(1,1,-1)^T$

以小见大

第五章的题由于和行列式联系在一起，因此变换比较多，容易考填空题。并且常和特征值的计算联系在一起。大题考的是基本知识，但填空题考的是技巧，因此我们平时上课时容易忽视的一些性质和结论在填空题里就有很大作用。填空题中运用最多的性质便是特征值

和行列式以及特征值和迹的一些关系。有 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|,\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=tr(A)$ 。这两个性质属于期末的填空必考内容。因此一定要熟悉熟悉再熟悉。

同时还有一些相似对角化的性质，如题(1)中 A^2的相似对角矩阵为Λ^2 。

题(2)的题型也是常考的内容，注意解法二是一个充要条件，$\left(\lambda^2-\lambda-6\right)=0$ 的解必然是特征值，同时所有的特征值必须要是该方程的解，因为这是通过定义推出来的式子，是一般化的式子，因此所有的特征值都需满足这个方程。如不注意这一点，那很可能就会引入错误的解。

题(3)是一个特征值和三维空间结合的题。由于三维空间有外积的运算，因此对于三维的向量问题，采取第三章的知识将会减少计算量。但若是大于 3 维的问题，便只能老老实实一步一步的算了。

例8设A为三阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是三个线性无关的三维列向量，且满足

$A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, A\alpha_2=2\alpha_2+\alpha_3, A\alpha_3=2\alpha_2+3\alpha_3$

(1)求矩阵B,使得$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)B$

(2)求矩阵A的特征值

(3)求可逆矩阵P,使$P^{-1}AP$为对角矩阵

(1)由题设知

$$A\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}$$

故$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}$

(2)因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，故矩阵$C=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$可逆，所以有$C^{-1}AC=B$

即A与B相似，从而A与B有相同的特征值

$$\left|\lambda I-B\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\-1&\lambda-2&-2\\-1&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-4)=0$$

$\therefore A$的特征值为λ_1=λ_2=1，λ_3=4.

(3)①当特征值为λ_1=λ_2=1时，代入得$\left(I-B\right)X=0$解得基础解系

ξ_1=(-1,1,0)^T,ξ_2=(-2,0,1)^T

②当特征值为λ_3=4，代入得$\left(4I-B\right)X=0$解得基础解系

ξ_3=(0,1,1)^T

$$令Q=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow Q^{-1}BQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$

由$Q^{-1}BQ$=$Q^{-1}C^{-1}ACQ$,记矩阵

$$P=CQ=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}-1&-2&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}=\left(-\alpha_1+\alpha_2,-2\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2+\alpha_3\right)$$

以小见大

在第五章的线性代数的学习中和前四章有一些不同。前四章主要讲的是线性方程的基础概念。也就是说你要会用线性代数必须先要学前四章，就好像要学数学就要先学加减乘除一样。所以我们可以称它为基础性质的章节。而从第五章开始，讲的有点偏应用了，变的和现实生活有点相关了。所以大家会发现从第五章开始题目类型变的比较单一了，因为这两章是有实际应用的章节，因此出的题目也需要和实际接轨，自然就不会出的特别难，特别怪。所以这两章虽然难理解，但是很好考试，题目做多了，自然就知道这个题目的套路，考试也无外乎

出这几道题。
其实这种情况以后大家会经常遇到。应用和理论是两个区别很大的领域。理论是要锱铢必较，而工程应用则是没必要搞的特别清楚，取个近似，能用就行。大家来到电子科大的，绝大部份是工科学生，因此要学会取舍什么时候我该专研，弄得一清二楚；什么时候我只需要会运用就行，没必要在意那些细枝末节。
当然对于第五章的题目自然有个归纳总结。第五章的题目无非是让你求特征值，特征向量。所以第五章的题只要能把这两个东西给解出来，剩下的就没什么稀奇的了。具体步骤如下。

①首先根据$\left|\lambda I-A\right|=0$解出其特征值。

②将特征值代入该方程求解，每个基础解系代表该特征值下的一个特征向量
③将所有的特征向量构成一个矩阵，也就是相似对角化所乘的矩阵。

例9用正交变换化二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3$为标准型，并求出相应的正交矩阵

写出二次型矩阵$A=\begin{bmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{bmatrix}$

解出特征值$|\lambda I-A|=0=(\lambda-3)^2(\lambda+3)\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=3,\lambda_3=-3$

代回方程$(\lambda I-A)X=0$，解出特征向量

①λ=3时，特征向量$\alpha_1=(1,-1,0)^T,\alpha_2=(1,1,2)^T$

②λ=-3时，特征向量$\alpha_3=(1,1,1)^T$

单位化$\beta_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T,\beta_2=(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}})^T,\beta_3=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^T$

写出正交矩阵$C=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{-2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$

写出化简的二次型 $X=CY$化二次型为$3y_1^2+3y_2^2-3y_3^2$

以小见大

与第五章的一样，第六章的内容也是偏应用的，因此出的题目也偏实际应用，从而造成每年考试的题目总是类似的（可能还会让你判断这个二次型表示什么样的曲面），因此这两章虽然理解起来并不是那么轻松，但考试还是可以的。所以对这两章的题目，刷题还是非常有效的，一定要清楚它的套路，那么考试时就会得心应手。对于本题，可以说是每年必考类似的，具体步骤如下

①根据二次型写出对应的二次型矩阵

②解出对应的特征值

③解出 n 个线性无关的特征向量

④将特征向量单位化

⑤用正交的单位向量构造正交矩阵

⑥根据变化写出二次型（其实算出特征值时，二次型已经确定，但是出于题目解题的完整性，还需将通过正交矩阵得到标准型的变换式写出）

例10设A,B均为n阶矩阵，A有n个不相同的特征值，试证明(1)若$AB=BA$,
则B相似于对角阵;(2)若A的特征向量也是B的特征向量，则$AB=BA$.

设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$为$n$个互不相同的特征值，则存在可逆矩阵$P$使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}=\Lambda_1$$

(1)由$AB=BA$得

$(P^{-1}AP)(P^{-1}BP)=(P^{-1}BAP)(P^{-1}AP)$

即

$\Lambda_1(P^{-1}BP)$=$(P^{-1}BP)\Lambda_1$，令$C=(P^{-1}BP)$

根据上式得

$$\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&&c_{2n}\\&&\ddots&\\c_{n1}&c_{n2}&&c_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&&c_{2n}\\&&\ddots&\\c_{n1}&c_{n2}&&c_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\lambda_1c_{11}&\lambda_1c_{12}&&\lambda_1c_{1n}\\\lambda_2c_{21}&\lambda_2c_{22}&&\lambda_2c_{2n}\\&&\ddots&\\\lambda_nc_{n1}&\lambda_nc_{n2}&&\lambda_nc_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1c_{11}&\lambda_2c_{12}&&\lambda_nc_{1n}\\\lambda_1c_{21}&\lambda_2c_{22}&&\lambda_nc_{2n}\\&&\ddots&\\\lambda_1c_{n1}&\lambda_2c_{n2}&&\lambda_nc_{nn}\end{pmatrix}$$

比较两边(i,j)元素得

$\lambda_ic_{ij}=\lambda_jc_{ij}\Rightarrow(\lambda_i-\lambda_j)c_{ij}=0$

当$i\neq j$时，$\lambda_i-\lambda_j\neq0$，从而$c_{ij}=0$

$\therefore C$是一个对角阵，即$P^{-1}BP$为对角阵，B相似于对角阵。

(2)记$P=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$.其中每一个$p_i(i=1,2,\cdots,n)$都是A的特征向量

从而p_i也是B的特征向量，即

$$Bp_i=u_ip_i\Leftrightarrow P^{-1}BP=\begin{pmatrix}u_1&&&\\&u_2&&\\&&\ddots&\\&&&u_n\end{pmatrix}=\Lambda_2$$

从而$P^{-1}ABP=(P^{-1}AP)(P^{-1}BP)=\Lambda_1\Lambda_2=\Lambda_2\Lambda_1=(P^{-1}BP)(P^{-1}AP)=P^{-1}BAP$

由此可得$AB=BA$

以小见大

这是一道大综合题，融合了第一章，第四章，第五章的知识。这种题常作为考试的最后一题出现，因此在考试时一定要注意证明题放在后面做，先确保前面分数能拿全了，再去思

考最后一道证明题。证明题一旦扯上了第四章和第五章，难度就会非常大，历来得分率都不高。因此在有限的时间内，合理分配答题时间，根据自身能力，适当的放弃一些难以驾驭的题，从而达到分数最大化。第四章和第五章的证明题是做不完的，所以这时候不推荐刷题，熟悉个几道，知道它大概是如何出题就行，大量的刷题只能是徒劳。