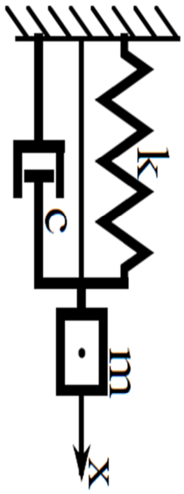
VIBRATION MECANIQUE



Chapitre 1

Vibrations des systèmes mécaniques à un degré de liberté

Professeur M. ABOUSSALEH
Professeur S. ZAKI

Le 13 novembre 2020

Sommaire:

A. INTRODUCTION

Modélisation des systèmes mécanique par des éléments discrète

En dynamique, l'ingénieur est aux prises avec la résolution des systèmes souvent fort complexe, dont il faut faire un modèle pour être en mesure de procéder à l'analyse vibratoire

Deux catégories d'approche existes:,

- Approche discrète
- Approche continue.

A. INTRODUCTION

Approche continue

- La modélisation colle à la géométrie réelles des structures
- Avantage: Modélisation par EFM → Résolution numérique
- Inconvénient: Laborieuse, temps d'exécution très long, résolution doivent être validé.

A. INTRODUCTION

Approche discrète

Simple à mettre en œuvre

Avantage: résolution informatique est rapide

Inconvénient: difficulté dans l'interprétation des phénomènes physiques

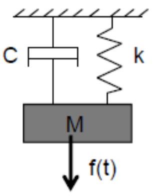
A. INTRODUCTION

Méthode de discrétisation

Visualiser le fonction du système en choisissant d'après le sens physique quelle parties peuvent être assimilées à un élément de base

- **Une masse:** Elément avec masse importante et indéformable;
- **Nœuds sans masse:** Elément avec masse faible mais indéformable
- **Un ressort : Partie** sans masse qui fournit une force élastique en fonction du déplacement
- **Un amortisseur** qui fournit une force de freinage en fonction de la vitesse ,

→ C: est appelé constante d'amortissement visqueux linaire ou résistance du systèm



Exemple de modélisations

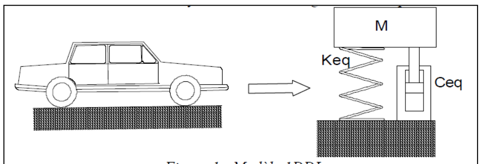


Figure 1 : Modèle 1DDL

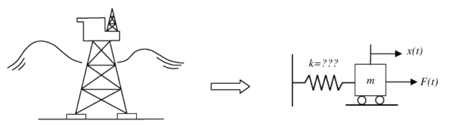


FIG. 2. Modélisation d'une plateforme offshore [8]

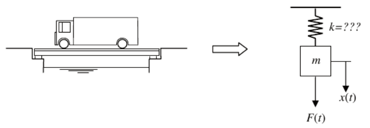


FIG. 3. Modélisation d'un pont chargé par un véhicule à l'arrêt [8]

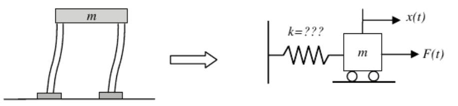


FIG. 4. Modélisation d'un bâtiment

Malgré sa simplicité le système à 1 DDL peut représenter le **comportement dynamique** de systèmes très variés dans le domaine des basses fréquences.

A. INTRODUCTION

Degré de liberté; Nombre de degré de liberté; système linéaire

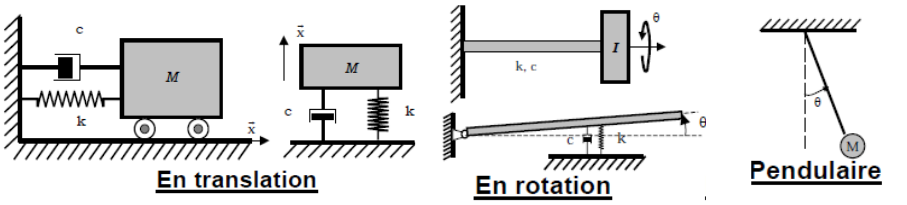
Un système est à un degré de liberté **1DDL** lorsque sa configuration peut être, à chaque instant caractérisé par une seule variable.

Nombre de DDL est le nombre minimum de paramètres indépendants permettant de définir à chaque instant les coordonnées de tous les points du système.

Le système est qualifié de linéaire quand il peut être décrit au moyen d'équations différentielles linéaires.

A. INTRODUCTION

Modèles de Systèmes oscillants à 1DDL



Paramétrage	Translation
Déplacement	Longitudinal: x
Inertie	Masse: M
Effort	Résistance à l'allongement: k
Amortissement	Frottement visqueux: c

Rotation
Angulaire: θ
Moment d'inertie: I
Résistance à la torsion: k
Frottement visqueux: c

Pendulaire
Angulaire: θ
Masse/inertie: m, L
Pesanteur
Frottement visqueux: c

A. INTRODUCTION

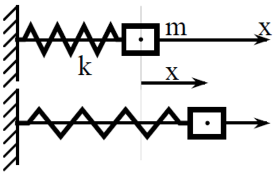
Objectif

L'objectif de cours entre autre la mesure du rapport entre une excitation donnée de la structure et la réponse de la structure (déplacement, vitesses, accélération, ..) que cette excitation provoque.

B. VIBRATIONS LIBRES NON AMORTIES

Vibration Libre non amortie

Systèmes en translation horizontale



$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Mouvement harmonique de pulsation naturelle qui dépend de l'inertie et les caractéristique de rigidité.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (rad.s^{-1})$$

Solution générale :

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

A et B des Constantes déterminées par les conditions initiales du problème $x(0)$ et $\dot{x}(0)$

La Solution précédente peut aussi s'écrire sous les formes suivantes:

$$x(t) = X\cos(\omega_0 t + \phi) \rightarrow Xe^{j(\omega_0 t+\phi)}$$

Avec $X = \sqrt{A^2 + B^2}$

$\phi = Arctg\left(\dfrac{A}{B}\right)$

X = Amplitude de vibration= l'élongation maximale du Ressort.
φ = Angle de déphasage

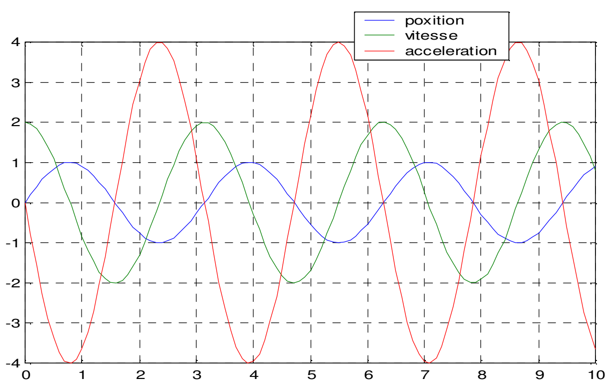
En notant les Conditions Initiales: $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$

On peut écrire: $A = x_0$ et $B = \dfrac{\dot{x}_0}{\omega_0}$

$$\Rightarrow x(t) = x_0\cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

Et $\begin{cases} X = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2}} \\ \varphi = Arctg\left(\dfrac{x_0\omega_0}{\dot{x}_0}\right) \end{cases}$

$$et \quad \dot{x}(t) = -\omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t) + \dot{x}_0\cos(\omega_0 t)$$

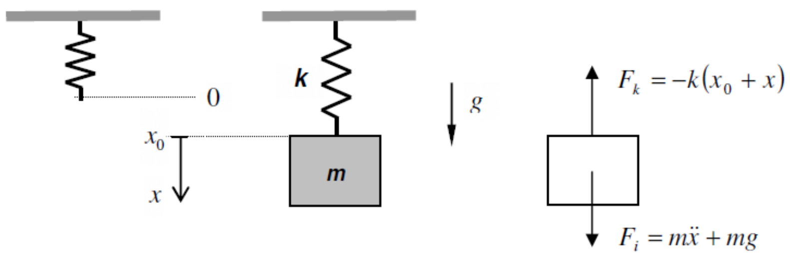


Période et Fréquence

Période « naturelle » d'oscillations est : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ (s)

Fréquence propre ou naturelle: Nombre de cycles /Seconde est : $f = \dfrac{1}{T}$ (Hz)

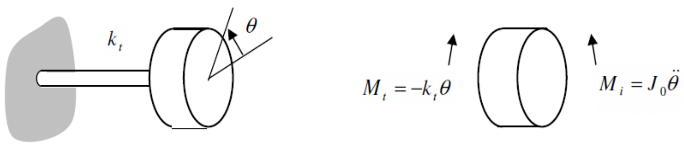
Systèmes de translation suspendu



On obtient la même équation du mouvement *x(t) que précédemment*

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Systèmes de Torsion



PFD donne : $M_i(t) = J_0 \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = J_0\ddot{\theta}$

Avec le moment de torsion $M_t(t) = -k_t\theta$

Ce qui donne: $J_0\ddot{\theta} + k_t\theta = 0$

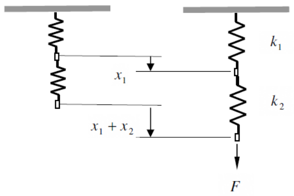
J_0 moment d'inertie de la masse et k_t raideur de torsion en Nm/rad

La pulsation naturelle est: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k_t}{J_0}}$ $[rad/s]$

et la **réponse libre du système non-amorti** $\theta(t) = \dfrac{\sqrt{\omega_0^2\theta_0^2 + \dot{\theta}_0^2}}{\omega_0}\sin\left(\omega_0 t + \arctan\dfrac{\omega_0\theta_0}{\dot{\theta}_0}\right)$

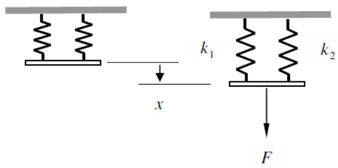
Systèmes équivalents

Assemblage en série :



$$\frac{1}{k_e} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{k_j}$$

Assemblage en parallèle:



$$k_e = \sum_{j=1}^{n} k_j$$

A retenir

Toute vibration se manifeste par un mouvement oscillatoire autour d'une position d'équilibre

Le mouvement peut être soit périodique soit harmonique ou quelconque

Le mouvement harmonique est caractérisé par trois éléments:

- Son amplitude
- Sa pulsation
- Sa phase

L'amplitude du déplacement et la pulsation suffisent pour calculer les amplitudes de la vitesse et de l'accélération de la vibration.:

Remarque:

Mesurer la fréquence naturelle d'oscillations est une excellente méthode expérimentale pour l'évaluation de l'inertie d'un corps de géométrie complexe.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_t}{J_0}}$$

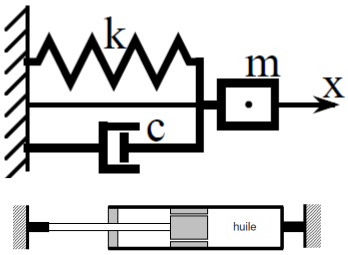
C. VIBRATIONS LIBRES AMORTIES

Vibration amortie

Principe Fondamental de la Dynamique:

$$m\ddot{x} + kx = F_{am}$$

Amortissement visqueux $F_{am} = -c\dot{x}$



Le PDF donne :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

On écrit cette équation sous la forme suivante:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\frac{c}{m} = 2\zeta\omega_0 \Rightarrow \zeta = \frac{c}{2m\omega_0} = \frac{c}{\sqrt{4km}} = \frac{c}{c_{cr}}$$

Vibration amortie

$$\ddot{x}+\frac{c}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=0 \Rightarrow \ddot{x}+2\zeta\omega_0\dot{x}+\omega_0^2x=0$$

ζ: Facteur d'amortissement (sans dimension)

c_{cr} : Coefficient d'amortissement critique (Ns/m)

$$\zeta=\frac{c}{2m\omega_0}=\frac{c}{\sqrt{4km}}=\frac{c}{c_{cr}}$$

$$c_{cr}=\sqrt{4km} \quad \omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Résolution de l'équation du mouvement:

$$\ddot{x}+2\zeta\omega_0\dot{x}+\omega_0^2x=0$$

On cherche la solution sous forme:

$x(t)=A\,e^{rt}$ avec r solution de l'équation caractéristique

$$r^2+2\omega_0\zeta r+\omega_0^2=0 \rightarrow r_{1,2}=-\omega_0\zeta\pm\omega_0\sqrt{\zeta^2-1}$$

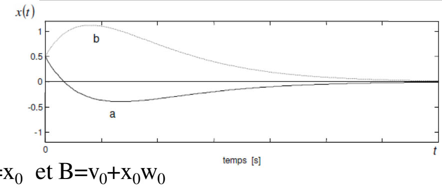
Trois cas à considérer :

$$\begin{matrix}\Delta'<0\\ \Delta'=0\\ \Delta'>0\end{matrix} \Rightarrow \begin{cases}\zeta<1 & \text{système sous amorti: pseudopériodique;}\\ \zeta=1 & \text{système critique;}\\ \zeta>1 & \text{système sur amorti: apériodique}\end{cases}$$

Amortissement critique $\zeta = 1$

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}$$

Réponse libre d'un système critique
a)x_0= 0,5 et v_0=-4, b)x_0= 0,5 et v_0=4



Avec x(t=0)=x_0 et v(t=0)=v_0
on peut déterminer les constantes A et B: A=x_0 et B=v_0+$x_0 w_0$

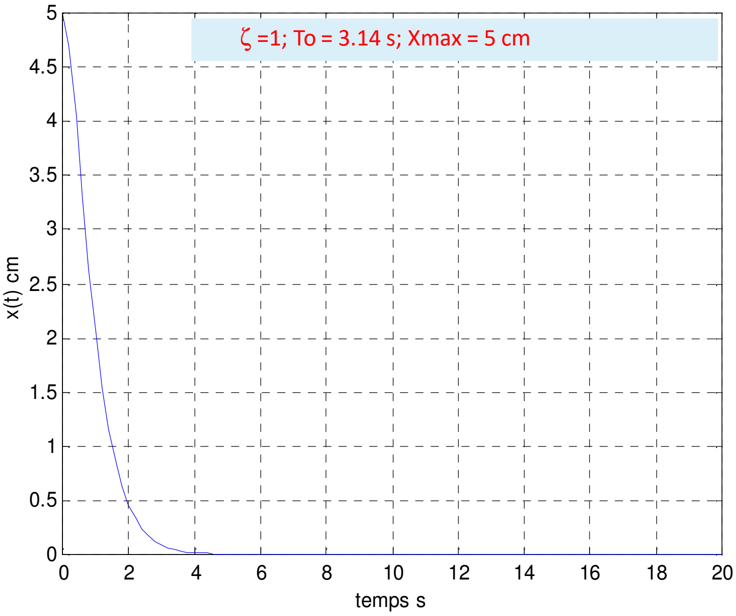
$$x(t) = \left(x_0 + \left(v_0 + x_0\omega_0\right)t\right)e^{-\omega_0 t}$$

Le pique du Système est atteint en t_m tel que:

$$\dot{x}(t_m) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; t_m = \frac{v_0}{\omega_0(v_0 + \omega_0 x_0)}$$

Ce genre de Système tend à approcher la position d'équilibre très rapidement
et sans oscillations ce qui est demandé pour atténuer les vibrations.

ABOUSSALEH & ZAKI / Vibration mécanique : CH 1/ENSAM Meknès/ 2020-2021 P23



ABOUSSALEH & ZAKI / Vibration mécanique : CH 1/ENSAM Meknès/ 2020-2021 P24

Systèmes sur amortis: apériodique $\zeta > 1$

Dans ce cas les 2 racines sont réelles: $\longrightarrow r_{1,2} = -\omega_0 \zeta \pm \omega_0 \sqrt{\zeta^2 - 1}$

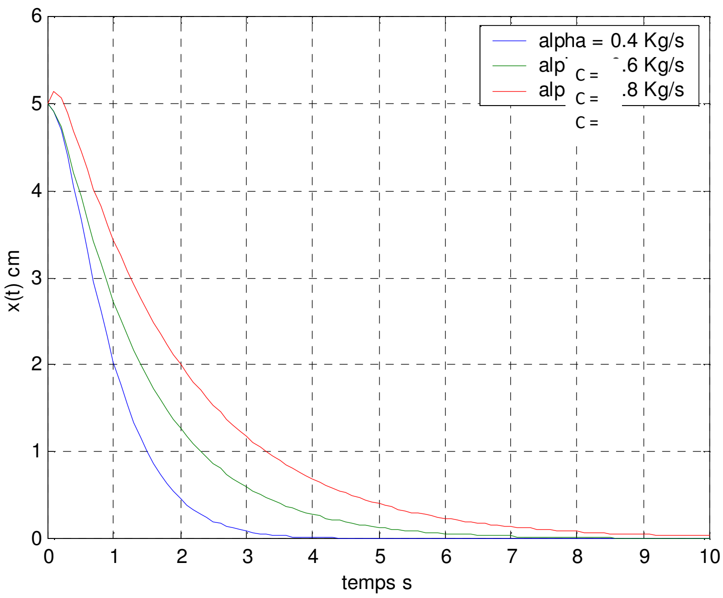
$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

Le mouvement n'est donc pas oscillatoire comme dans le régime critique.

$$x(t) = e^{-\zeta \omega_0 t}\left[Ae^{t\omega_0\sqrt{\zeta^2-1}} + Be^{-t\omega_0\sqrt{\zeta^2-1}}\right]$$

Les constantes A et B sont déterminées par les CI: x_0 et v_0

$$A = \frac{\dfrac{v_0}{\omega_0} + x_0\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad \text{et} \quad B = \frac{-\dfrac{v_0}{\omega_0} + x_0\left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$



Systèmes sous amortis: pseudopériodique : $\zeta < 1$

Les racines r_1 et r_2 sont imaginaires $r_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm j\omega \quad \left(j^2 = -1\right)$

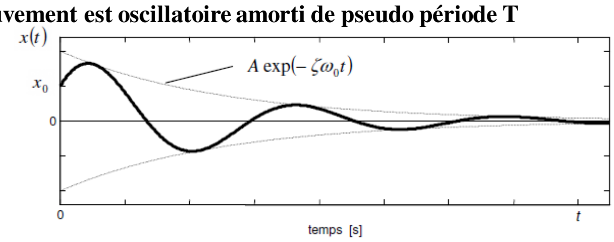
Avec $\omega = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2} \Rightarrow T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$: *pseudo periode*

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_0 t}\left(A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)\right)$$

La solution peut se mettre sous la forme: $x(t) = Xe^{-\zeta\omega_0 t}\sin(\omega t + \varphi)$

X et φ définies par les conditions initiales.

Le mouvement est oscillatoire amorti de pseudo période T



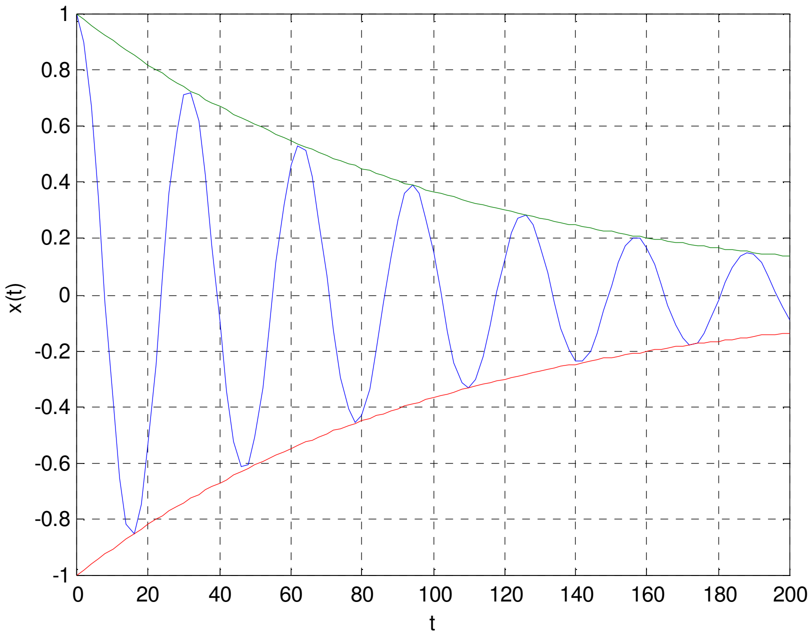
Avec les conditions initiales x_0 et v_0 on obtient:

$$x(t) = Xe^{-\zeta\omega_0 t}\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\textit{Amplitude}: \quad X = \sqrt{\left(\frac{v_0 + \zeta\omega_0 x_0}{\omega}\right)^2 + x_0^2} \qquad \textit{Phase}: \quad \varphi = artg\left(\frac{x_0\omega}{v_0 + \zeta\omega_0 x_0}\right)$$

$$\textit{Pseudo pulsation}: \quad \omega = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$$

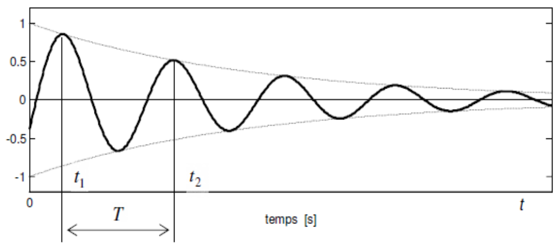
$$\textit{Pseudo periode}: \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$$



Décrément logarithmique: δ

δ mesure la décroissance de l'amplitude pour un système pseudo périodique.

$$\delta = \ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T)}\right) = \zeta\omega_0 T$$



Le coefficient d'amortissement ou le taux d'amortissement sont les plus délicats à déterminer car ils nécessitent une mesure dynamique. On peut les obtenir avec une très bonne précision par δ

Pour n periodes nT on obtient:

$$x(t+nT) = Xe^{-\zeta\omega_0(t+nT)}\sin(\omega(t+nT)+\varphi) = e^{-n\zeta\omega_0 T}x(t)$$

$$\frac{1}{n}\ln e^{n\zeta\omega_0 T} = \zeta\omega_0 T = \delta \qquad \delta \text{ est } \textit{indépendant de n}$$

$$Avec\;\; T = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\delta = \zeta\omega_0 T = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2+\delta^2}}$$

Remarque : Si $\zeta \ll 1$ *alors* $\delta = 2\pi\zeta \Rightarrow \zeta = \dfrac{\delta}{2\pi}$

Perte d'énergie dans le régime pseudopériodique

Dans le régime pseudopériodique la perte d'énergie peut être exprimée en fonction de δ

Soit U_i : Énergie du système au pique du cycle n° i, (Comme $|x_i|$ est maximum alors v_i=0)

$$x(t) = Xe^{-\zeta\omega_0 t}\sin(\omega t+\varphi)$$

U_i : Énergie totale au pique $\dot{x} = 0$ → Énergie élastique = $U_i = \dfrac{1}{2}kx_i^2$

De même $U_{i+1} = \dfrac{1}{2}kx_{i+1}^2$

La perte d'énergie entre 2 cycles successives est alors donnée par : $\Delta U = U_i - U_{i+1}$

$$\Delta U = \frac{1}{2}k(x_i^2 - x_{i+1}^2) \Rightarrow \frac{\Delta U}{U_i} = \left(1 - \frac{x_{i+1}^2}{x_i^2}\right) = 1 - e^{-2\delta}$$

La perte d'énergie spécifique: $\dfrac{\Delta U}{U_i} = 1 - e^{-2\delta}$ **Elle croit avec :** δ

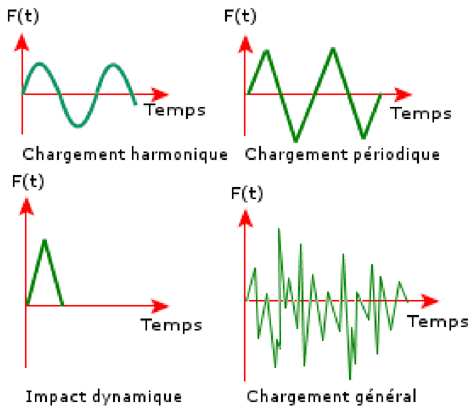
D. VIBRATIONS FORCEES

Mouvement vibratoire forcée

Pratiquement n'importe quelle structure est susceptible de subir pendant sa durée de vie un chargement dynamique sous une forme ou une autre. D'un point de vue analytique, on peut subdiviser les chargements en deux grandes catégories: **périodiques et non périodiques.**

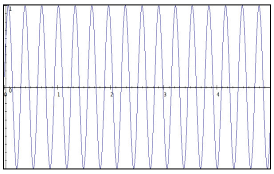
I. Excitations périodiques

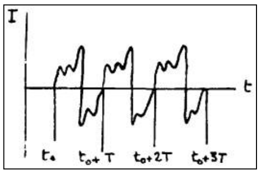
II. Excitations non périodiques



Excitations périodiques :

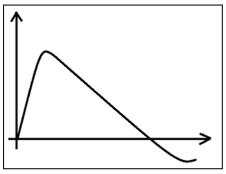
Machines tournantes | **Hélice à l'arrière d'un navire**

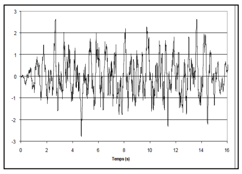




Excitations non périodiques : (cette partie ne va pas être traité)

Explosion au voisinage d'un bâtiment | **Secousse sismique.**





D1. Excitation par une force harmonique

Force d'excitation:

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t)$$

Le PFD donne:

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx + F_0 \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t)$$

déplacement

$$\frac{m}{k}\ddot{x} + \frac{c}{k}\dot{x} + x = \frac{F_0}{k}\cos(\omega t)$$

accélération

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

$$\frac{m}{c}\ddot{x} + \dot{x} + \frac{k}{c}x = \frac{F_0}{c}\cos(\omega t)$$

vitesse

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

Équation différentielle du second ordre avec second membre.

La solution est la combinaison de deux solutions: $x_1(t)$ et $x_2(t)$

- **$x_1(t)$ est la solution de l'équation homogène sans second membre**
- **$x_2(t)$ est la solution particulière de l'équation générale avec second membre**

Conditions initiales:
À $t = 0$: $x(0) = x_0$ et $v(0) = v_0$

Solution de l'équation sans second membre $x_1(t)$ est donnée dans le régime libre.

Cette solution finit toujours par disparaitre à cause de l'amortissement.

La solution dans le régime permanant est alors la solution particulière de l'équation générale $x_2(t)$:

La réponse doit donc être sinusoïdale de type

$$\Longrightarrow \quad x(t) = x_2(t) = X\cos(\omega t + \varphi)$$

Passage aux nombres complexes:

$$x(t) = Xe^{j(\omega t+\varphi)} \quad \text{et} \quad F(t) = F_0 e^{j\omega t}$$

X est l'amplitude de la réponse
φ est la phase de la réponse

En reportant cette solution dans l'équation générale:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

$$x(t) = Xe^{j(\omega t+\varphi)} \Rightarrow \dot{x}(t) = Xj\omega e^{j(\omega t+\varphi)}$$

$$\Rightarrow \ddot{x}(t) = -X\omega^2 e^{j(\omega t+\varphi)}$$

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

$$-X\omega^2 e^{j(\omega t+\varphi)} + 2\zeta\omega_0 Xj\omega e^{j(\omega t+\varphi)} + \omega_0^2 Xe^{j(\omega t+\varphi)} = \frac{F_0}{m}e^{j\omega t}$$

En simplifiant par : $e^{j\omega t}$

$$-X\omega^2 e^{j\omega t}e^{j\varphi}+2\zeta\omega_0 Xj\omega e^{j\omega t}e^{j\varphi}+\omega_0^2 Xe^{j\omega t}e^{j\varphi}=\frac{F_0}{m}e^{j\omega t}$$

$$\Downarrow$$

$$-X\omega^2 e^{j\varphi}+2\zeta\omega_0 Xj\omega e^{j\varphi}+\omega_0^2 Xe^{j\varphi}=\frac{F_0}{m}$$

$$\Downarrow$$

$$Xe^{j\varphi}\left(-\omega^2+2\zeta\omega_0 j\omega+\omega_0^2\right)=\frac{F_0}{m}$$

$$Xe^{j\varphi}\left(-\omega^2+2\zeta\omega_0 j\omega+\omega_0^2\right)=\frac{F_0}{m}$$

En calculant la norme et l'argument on trouve:

$$X=\frac{\frac{F_0}{m\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+4\zeta^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}=\frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+4\zeta^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$tg(\varphi)=\frac{-2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Facteur d'amplification dynamique A(β):

$$A(\beta)=\frac{X}{X_{st}}=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\beta^2\right)^2+4\zeta^2\beta^2}} \quad \text{et} \quad tg(\varphi)=\frac{-2\zeta\beta}{1-\beta^2}$$

$$\beta=\frac{\omega}{\omega_0} \text{ pulsation relative}$$

$$X_{st}=\frac{F_0}{k} \text{ déplacement du système sous la charge staique } F_0$$

$$X=A\left(\beta\right)X_{st}$$

D'après l'expression de l'amplitude on voit que celle-ci dépend de la pulsation de l'excitation.

Calculons son maximum:

$$A(\beta)=\frac{X}{X_{st}}=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\beta^2\right)^2+4\zeta^2\beta^2}}$$

$$\frac{dA(\beta)}{d\beta}=0\Rightarrow\beta^2=1-2\zeta^2 \quad \text{or } \beta \text{ existe si } \left(1-2\zeta^2\right)\geq 0$$

$$\Rightarrow\zeta\leq\frac{1}{\sqrt{2}}=0.707$$

$$\text{Avec } \omega=\beta\omega_0\Rightarrow\omega_R^2=\beta^2\omega_0^2=\left(1-2\zeta^2\right)\omega_0^2$$

$$\text{Pulsation de Résonance: } \omega_R=\omega_0\sqrt{1-2\zeta^2}$$

A la résonance l'amplitude passe par son maximum.

$$X = X_{st} A(\beta) \text{ avec } A(\beta) = \frac{X}{X_{st}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\beta^2\right)^2 + 4\zeta^2\beta^2}}$$

et $\beta^2 = 1 - 2\zeta^2$ à la résonance.

$\rightarrow$ A la résonance:

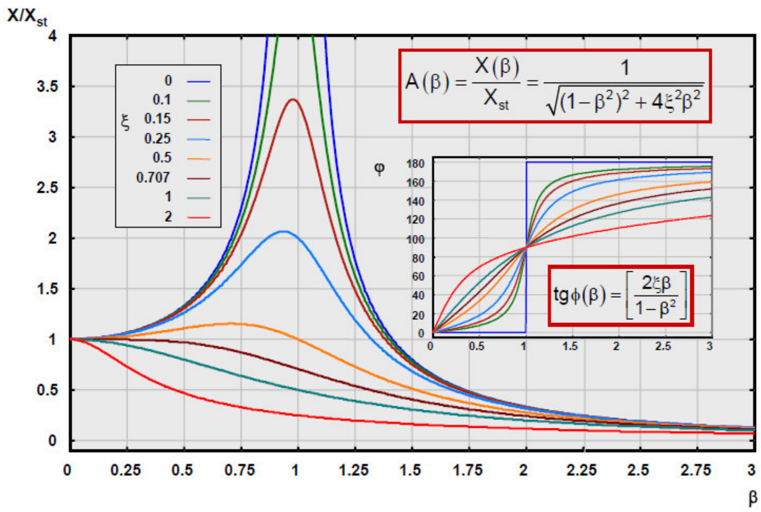
$$X_R = \frac{X_{st}}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \text{et} \quad \omega_R = \omega_0\sqrt{1-2\zeta^2} \leq \omega_0$$

L'amplitude de résonance est d'autant plus grande si z diminue: (amortissement faible)

$$Or\ si\ \ \zeta \downarrow \Rightarrow c \downarrow \text{ à la limite } \zeta \rightarrow 0 \ \Rightarrow \beta \rightarrow 1$$

$$\Rightarrow \omega \rightarrow \omega_0 \text{ et } X \rightarrow \infty \quad (\text{cas } \omega_R = \omega_0)$$

Facteur d'amplification dynamique A et déphasage φ en fonction de la pulsation relative β avec, comme paramètre, le facteur d'amortissement ζ



Remarques Générales

Système fortement amorti: $\xi > \frac{1}{\sqrt{2}}$

L'amplitude est strictement décroissante et ne passe pas par un maximum quelque soit la valeur de ω.

Cette conclusion est aussi valable pour ***le système « critique »*** $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Système faiblement amorti: $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$

L'amplitude passe par un maximum lorsque la pulsation est proche de la pulsation propre ω_0 du système ti

$$\omega_R = \omega_0\sqrt{1-2\zeta^2} \rightarrow \omega_0 \text{ lorsque } \zeta \text{ faible}$$

A RETENIR

Amplitude et pulsation à la résonance: $\zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$

Pulsation de résonance:

$$\omega_R = \omega_0\sqrt{1-2\zeta^2} < \omega_0$$

Amplitude à la résonance:

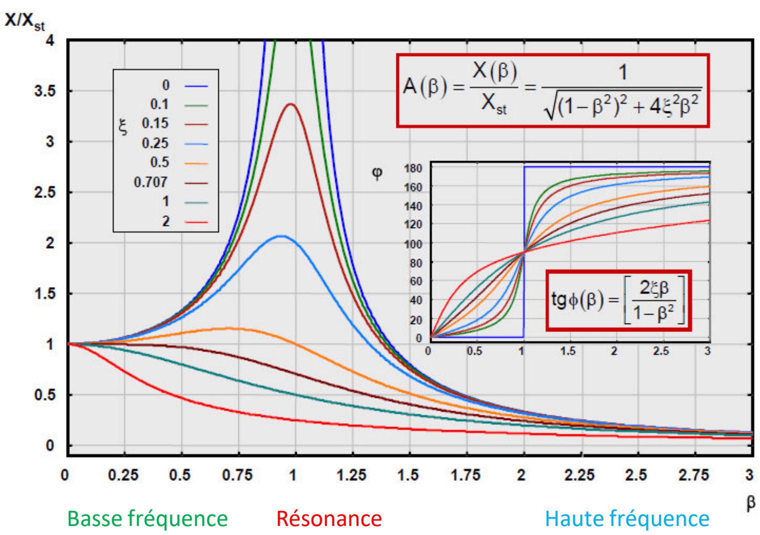
$$X_R = \frac{X_{st}}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} > X_{st}$$

Remarque:

L'amplitude à la résonance est d'autant plus grande lorsque ζ est très petit: oscillateur très faiblement amorti. Dans ce cas on peut écrire:

$$\omega_R \approx \omega_0 \quad \text{et} \quad X_R = \frac{X_{st}}{2\zeta}$$

si ζ=0.1 alors l'écart entre ω_R et ω_o est de 1%



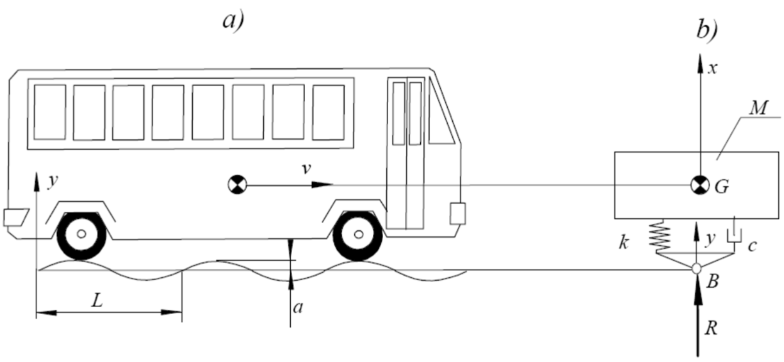
Basse fréquence Résonance Haute fréquence

$\boxed{\beta \downarrow \Rightarrow X \rightarrow \frac{F_0}{k}}$ $\boxed{\beta \rightarrow 1 \Rightarrow X \rightarrow \frac{Xst}{2\zeta}}$ $\boxed{\beta \uparrow \Rightarrow X \rightarrow \frac{X_{st}}{\beta^2} = \frac{F_0}{\omega^2 m}}$

Exemples d'excitations

1. Excitation par la base

Souvent une structure est excitée par l'intermédiaire des plots de suspension (machine excitée par les supports, automobile excitée par la route par l'intermédiaire des suspensions)



Exemples d'excitations

Modélisation

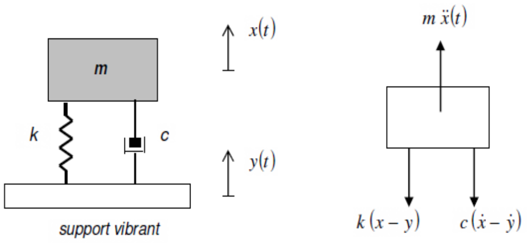
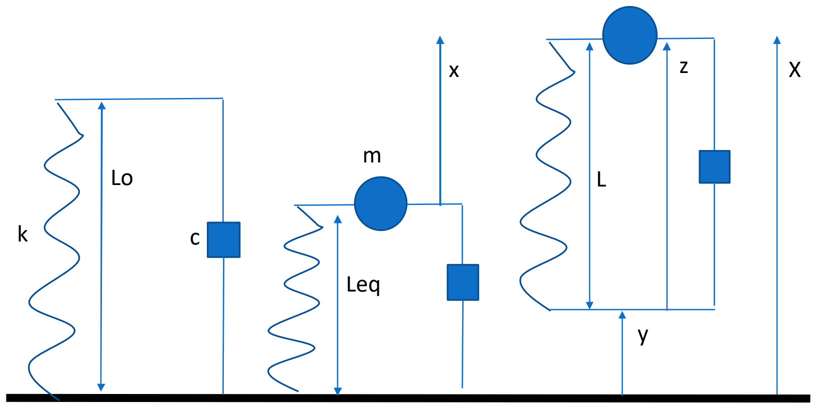


Fig. Excitation d'une masse suspendue par la base [Support vibrant]

En sommant les forces qui s'exercent sur la masse, on obtient à l'équilibre:

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0$$

$$\longrightarrow \ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 2\zeta\omega_0\dot{y} + \omega_0^2 y$$

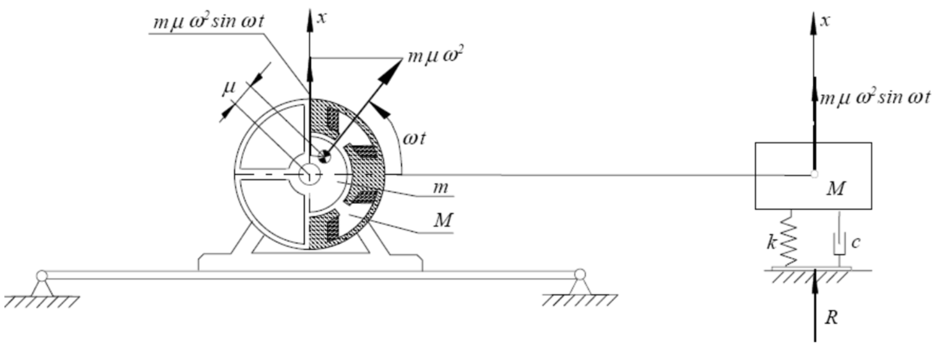


Animation

Exemples d'excitations

2. Excitation par déséquilibre dynamique en rotation

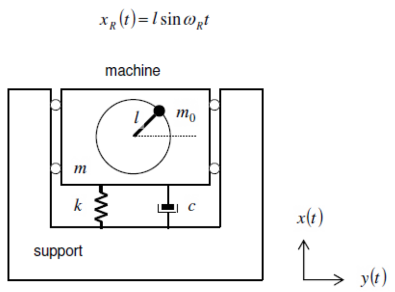
Les machines tournantes constituent des sources de vibrations très courantes. De petites irrégularités dans la distribution des masses des parties en rotation causent des niveaux vibratoires importants.



Modélisation

On schématise une machine de masse m *comportant une masse* m_0 en rotation à une distance l *de son centre. Un guidage sans friction autorise seulement un* mouvement dans la direction x *(voir Figure ci contre). En supposant la vitesse de rotation* ω_{rot} constante.

$$x_{rot} = l\sin(\omega_{rot} t)$$



Excitation d’une machine suspendue par une masse en rotation

2. Excitation par déséquilibre dynamique en rotation

La force d’inertie générée par la rotation de la masse a une composante dans la direction x *qui est proportionnelle à* m_0 *et à l'accélération a . Cette force agit sur la masse m de* la machine (les forces dans la direction y *ne sont pas considérées). L’équilibre des forces* par rapport au référentiel du support s’écrit (m_0 *fait partie de la masse m de la machine)*

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} - m_0\ddot{x}_{rot}$$

Ce qui conduit à l’équation

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m_0\ddot{x}_{rot} \rightarrow F_0\sin(\omega t)$$

2. Excitation par déséquilibre dynamique en rotation

Le terme au second membre est la force $F(t) = -m_0 \ddot{x}_{rot}$ qui excite le système.

Soit sous la forme classique: $$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

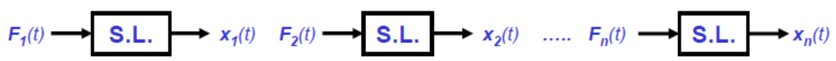
Avec

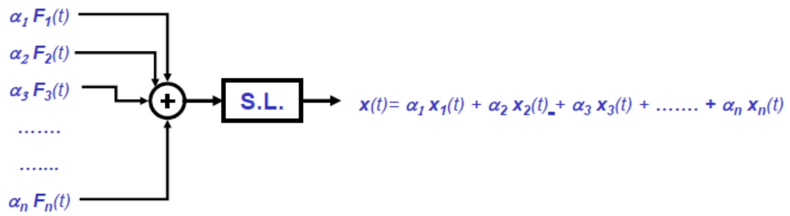
$$F(t) = -m_0\ddot{x}_{rot} = l m_0 \omega_{rot}^2 \sin\left(\omega_{rot} t\right)$$

D2. Excitation par une force Périodique

Système soumis à des excitations multiples « Principe de superposition »

La réponse d'un système linéaire à une somme d'excitation est la superposition des réponses à chacune des excitations





Principe de superposition

- Soient $F_1(t)$ et $F_2(t)$ deux excitations distinctes
- On peut écrire:

$$m\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + kx_1 = F_1(t)$$
$$m\ddot{x}_2 + c\dot{x}_2 + kx_2 = F_2(t)$$

Le principe de superposition donne:

$$\begin{array}{l} m\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + kx_1 = F_1(t) \\ \qquad\quad + \qquad\qquad\quad + \\ m\ddot{x}_2 + c\dot{x}_2 + kx_2 = F_2(t) \\ \Rightarrow m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + c(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + k(x_1 + x_2) = F_1(t) + F_2(t) = F(t) \end{array}$$

Généralisation du Principe de Superposition

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$
$$x = x_1 + x_2 \quad \text{et} \quad F(t) = F_1(t) + F_2(t)$$

Ce résultat peut être généralisé comme suit:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$
$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i(t)$$
$$F(t) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i(t)$$

D2. Excitation par une force Périodique

La fonction F(t) peut s'écrire sous la forme de série de Fourrier donnée par:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right) \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} F(t)\cos(n\omega t)dt; \qquad a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} F(t)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} F(t)\sin(n\omega t)dt$$

La solution sera obtenue en utilisant le principe de superposition

Remarques:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right) \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} F(t)\cos(n\omega t)dt; \qquad a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} F(t)dt$$

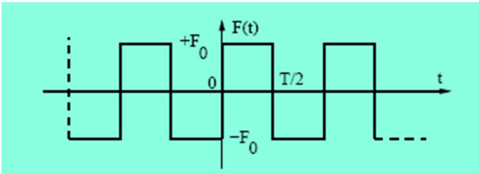
$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} F(t)\sin(n\omega t)dt$$

Si $F(t)$ est impaire $F(t)=-F(-t)$ alors $a_n=0$;

Si $F(t)$ est paire $F(t)=F(-t)$ alors $b_n = 0$

Exemple

Calculer la réponse d'un oscillateur harmonique sans amortissement à une excitation créneau de période T



La fonction créneau est périodique donc on peut l'écrire sous forme de série de Fourier

Remarque:

La fonction créneau est impaire

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right] \quad (\text{avec} \quad \omega = \frac{2\pi}{T})$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} F(t) \cos(n\omega t) dt \longrightarrow \forall n \quad a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} F(t) \sin(n\omega t) dt \longrightarrow b_n = \frac{4F_0}{n\omega T} \left[1 - \cos\left(n\omega \frac{T}{2} \right) \right]$$

$$b_n = \frac{4F_0}{n\pi} \quad \text{avec } n = 1, 3, 5, \ldots$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} F(t) dt = 0$$

La solution x(t) doit donc vérifie l'équation suivante:

$$m\ddot{x}(t)+kx(t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4F_0}{n\pi}\sin(n\omega t) \quad \text{avec } n=1,3,5,\ldots$$

La solution pour l'harmonique d'ordre n s'écrit:

$$m\ddot{x}_n(t)+kx_n(t)=b_n \sin(n\omega t)$$
$$=\frac{4F_0}{n\pi}\sin(n\omega t)$$

La réponse pour l'harmonique d'ordre n est alors:

$$m\ddot{x}_n(t)+kx_n(t)=b_n \sin(n\omega t)=F_n \sin(n\omega t) \ \text{ avec } F_n=\frac{4F_0}{n\pi}$$

$$\frac{X}{X_{st}}=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\beta^2\right)^2+4\zeta^2\beta^2}} \quad \text{avec } X_{st}=\frac{F_n}{k} \ ; \ \zeta=0 \ ; \ \beta=\frac{n\omega}{\omega_0}$$

$$X_n \quad \Rightarrow X_n=\frac{4F_0}{k\pi n}\frac{1}{\left[\left(1-\beta^2\right)\right]}$$

D'ou on déduit

$$X_n=\frac{4F_0}{k\pi n}\frac{1}{\left[\left(1-n^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\right]}$$

$$X_n = \frac{4F_0}{k\pi n}\frac{1}{\left[\left(1-n^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\right]}$$

La solution Finale est alors: (Principe de superposition)

$$x(t)=\sum_{n=1}^{\infty} X_n \sin(n\omega t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4F_0}{k\pi n}\frac{1}{\left[\left(1-n^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\right]}\sin(n\omega t)$$

$$avec\ n=1,3,5,\ldots$$

Références Bibliographique

1. L.CHAMPANY , ***Vibration de systèmes continus,*** notes du cours , ENSMP-Paris, 2005.
2. Jean-Claude PASCAL, ***Vibrations et Acoustique 1&2,*** notes du cours , ENSIM-Le Mans, 2005.
3. R. KEITH MOBLEY, ***Root Cause Failure Analysis***, Butterworth–Heinemann-1999, ISBN 0-7506-7158-0
4. J.M. KRODKIEWSK, ***Mechanical Vibration***, Design and Print Center-University of Melbourne 2006
5. Rao V.DUKKIPATI, ***Solving Vibration Analysis Problems Using Matlab,*** New Age International (P) Ltd., Publishers ISBN : 978-81-224-2427-0 .
6. S.TIMOSHENKO, ***Vibration Problems in Engineering,*** New York D. Van Nostrand Company, INC. 1928