جـامعـة مولاي إسمـاعيـل
UNIVERSITÉ MOULAY ISMAÏL

المدرسة الوطنية العليا للفنون و المهن
ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D'ARTS ET MÉTIERS

TP4 ANALYSE MODALE EXPERIMENTALE MINISHAKER

Prof. Smail ZAKI / Prof. Mohamed ABOUSSALEH

Année Universitaire : 2022-2023

Attention : Deux rapports identiques auront une note égale à 0.

Remarque Importante

Le rapport à rendre doit :

- Être clair et rédigé selon les normes de rédactions de rapport (page de garde, titre, table des matières, résumé, introduction, objectifs, ……, conclusions et recommandations).
- Contenir les explications des objectifs visés par le TP.
- Contenir les résultats et analyses.
- Respect la chronologie fournie à la fin de ce fascicule.

L'objectif de ce travail pratique est de :

- Comprendre les bases de la AME, l'Analyse Modale Expérimentale,
- Étudier le comportement dynamique d'une structure par le biais de ses modes propres et fréquences propres.
- Identifier les paramètres modaux (fréquences propres, amortissements et formes des modes)
- Prévoir les démarches pratiques à mettre en œuvre pour les applications industrielles,
- Identifier les méthodes, normes et procédures nécessaires,
- Utiliser un appareillage spécifique et réaliser l'AME.

1. Introduction :

This electrodynamic exciter is a small, portable permanent magnet shaker with a new generation of ultra-compact precision power amplifier integrated in its base. The revolutionary SmartShakerTM design eliminates the need for a separate, cumbersome power amplifier - just plug the excitation signal from a dynamic signal analyzer or function generator directly into the BNC on the base of the shaker. The unit is supplied with a DC power supply but can be run directly from any 12-21 VDC supply.

The smart shaker features an extremely rugged suspension systems using carbon fiber composite leaf armature flexures, avoiding the suspension damage common with some other small shakers. Isolated linear bearings provide low distortion and eliminate the need for reaction wrenches when mounting loads to the armature. A trunnion base with EasyTurnTM handle allows for convenient mounting and positioning. The exciter is delivered with a variety of 10-32 nylon stingers which provide electrical isolation from and flexible attachments to test articles.

2. Etude théorique

2.1 Vibrations longitudinales d'une barre

Vibrations libres

Les variables considérées sont : $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$ et $N = ES\,\varepsilon$

L'équation d'équilibre local est : $\frac{dN}{dx} = \rho S \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$

Soit $\frac{\partial (S\frac{\partial u}{\partial x})}{\partial x} = \rho S \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)/E$; $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 1/c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$; $(c^2 = E/\rho)$

Les conditions aux limites possibles sont :

- Déplacement imposé nul aux extrémités :

$$u(0, t) = 0 \quad \text{et/ou} \quad u(L,t) = 0$$

- Effort imposé nul aux extrémités :

$$\frac{\partial u}{\partial x(0,t)} = 0 \quad \text{et/ou} \quad \frac{\partial u}{\partial x(L,t)} = 0$$

Fréquences et modes propres

On effectue une séparation des variables : $u(x, t) = U(x)\,T(t)$

L'équilibre devient : $\frac{1}{U}\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right) = \frac{1}{c^2}\,\frac{1}{T}\left(\frac{d^2T}{dt^2}\right) = \text{cste}$

On a égalité de deux fonctions de variables indépendantes. Les deux fonctions sont donc égales à une constante. Cette constante est choisie négative pour assurer la stabilité de la solution en temps : $\frac{1}{U}\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right) = \frac{1}{c^2}\,\frac{1}{T}\left(\frac{d^2T}{dt^2}\right) = -\omega^2/c^2$

Ce qui donne : $\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right) + (\omega^2/c^2)\,U = 0 \rightarrow$ $\mathbf{U(x) = A \sin(\omega x/c) + B \cos(\omega x/c)}$

$\left(\frac{d^2T}{dt^2}\right) + \omega^2 T = 0 \rightarrow$ $\mathbf{T(t) = C \sin(\omega t) + D \cos(\omega t)}$

Les constantes A, B, C et D sont calculées à partir des conditions initiales et des conditions aux limites.

Exemples

i. Barre libre aux deux extrémités

Les conditions aux limites : $\frac{\partial u}{\partial x(0,t)} = 0$ **(1)** et/ou $\frac{\partial u}{\partial x(L,t)} = 0$ **(2)**

Ce qui donne : **(1)** → A (ω/c) (C sin (ωt) + D cos (ωt)) = 0

(2) → (ω/c) (A sin (ωL/c) + B cos (ωL/c)) (C sin (ωt) + D cos (ωt)) = 0

Qui a pour solution non triviale : A = 0 ; sin (ωL/c) = 0

Les modes possibles de vibration sont donc caractérisés par : $\omega L/c = i\pi$

Les ''pulsations propres'' de vibration sont donc : $\omega_i = i\pi c/L = i\, i\pi/L\ (\sqrt{E}/\rho)$

Et les ''modes propres'' associés : $U_i(x) = \cos(i\pi x/L)$

La solution générale du problème de vibration est donc :

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \cos\left(\frac{i\pi x}{L}\right)(Ci\sin(\omega it) + Di\cos(\omega it)$$

Où les constantes C_i et D_i dépendent des conditions initiales.

ii. Barre encastrée - libre

Les conditions aux limites : u (0, t) = 0 et $\frac{\partial u}{\partial x(L,t)} = 0$

Conduisent à : cos (ωL/c) = 0

Les ''pulsations propres'' de vibration sont donc : $\omega_i = (2i - 1)\ \pi/2L\ (\sqrt{E}/\rho)$

Et les ''modes propres'' associés : $U_i(x) = \sin((2i - 1)\ \pi x/2L)$

iii. Barre encastrée – encastrée

Les conditions aux limites : u (0, t) = 0 et u (L, t) = 0

Conduisent à : sin (ωL/c) = 0

Les ''pulsations propres'' de vibration sont donc : $\omega_i = i\pi/L\ (\sqrt{E}/\rho)$

2.2 Vibration de flexion d'une poutre

a) Vibrations libres

Les variables considérées sont :

- Le déplacement radial : $v(x, t)$
- La rotation de la section : $\theta(x, t) = \frac{\partial v}{\partial x}$
- La courbure : $\chi = \frac{\partial \theta}{\partial x}$
- Le moment fléchissant : $M = EI\chi$
- L'effort tranchant : T
- Les équations d'équilibre local sont : $\frac{\partial T}{\partial x} + \rho S\,(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}) = 0$ $\frac{\partial M}{\partial x} - T = 0$

Ici on a négligé les termes d'inertie dus à la rotation des sections devant les termes d'inertie du à leur translation. En éliminant l'effort tranchant, on obtient :

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \rho S\,(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}) = 0$$

Qui devient: $\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + (\rho S/EI)\,(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}) = 0$

Les conditions aux limites possibles sont :

- Déplacement imposé nul aux extrémités : $v(0, t) = 0$ et $v(L, t) = 0$
- Rotation imposée nulle aux extrémités : $\frac{\partial v}{\partial x(0,t)} = 0$ et $\frac{\partial v}{\partial x(L,t)} = 0$
- Moment imposé nul aux extrémités : $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2(0,t)} = 0$ et $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2(L,t)} = 0$
- effort imposé nul aux extrémités : $\frac{\partial^3 v}{\partial x^3(0,t)} = 0$ et $\frac{\partial^3 v}{\partial x^3(L,t)} = 0$

b) Fréquences et modes propres

On effectue une séparation des variables : $v(x, t) = V(x)\,T(t)$

L'équilibre devient : $(EI/\rho SV)\left(\frac{\partial^4 V}{\partial x^4}\right) = -1/T\,(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}) = Cst$

On a égalité de deux fonctions de variables indépendantes. Les deux fonctions sont donc égales à une constante. Cette constante est choisie positive pour assurer la stabilité de la solution en temps :

$$(EI/\rho S)\,\frac{1}{V}\left(\frac{\partial^4 V}{\partial x^4}\right) = -\,\frac{1}{T}\,\left(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right) = \omega^2$$

Ce qui donne :

$$\left(\frac{\partial^4 V}{\partial x^4}\right) - \beta^4 V = 0 \quad \rightarrow \quad V(x) = A\ \mathrm{ch}\ \beta x + B\ \mathrm{sh}\ \beta x + C\cos\beta x + D\sin\beta x$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \omega^2 T = 0 \qquad \rightarrow \quad T(t) = E\sin\omega t + F\ \mathrm{co}\omega t$$

Avec $\beta^4 = \rho S\omega^2/EI$

Les constantes A, B, C, D, E et F sont calculées à partir des conditions initiales et des conditions aux limites.

2.3 Vibration transversale d'une plaque

Définitions

On considère une plaque mince, dont l'épaisseur $\hbar$ est faible devant la longueur a et la largeur b, et l'on supposera dans tout le projet que l'hypothèse des petites perturbations (H.P.P : petits déplacements et petites déformations) est vérifiée. La plaque est située dans le plan (x,y), et le déplacement transverse, qui est l'inconnue du problème, est noté w(x,y,t).

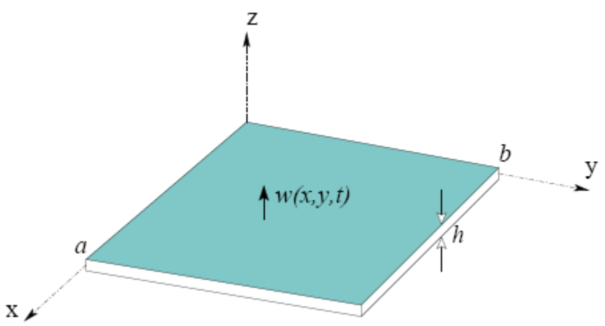


Figure 1: Plaque rectangulaire, de dimensions a et b d'épaisseur h.

Les vibrations libres (charge extérieure F(x, y, t) est nulle) transversales d'une plaque rectangulaire se modélisent par l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\boxed{D\Delta^2 W(x,y,t) + \rho h \frac{\partial^2 W(x,y,t)}{\partial t^2} = 0}$$

Oú W : déplacement transversal au point (x, y), et D: représente la raideur en flexion de la plaque:
On na :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\upsilon)} \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}}$$

Où _ est le module d'Young du matériau, et son coefficient de Poisson. □

On suppose que le mouvement est harmonique et on pose : W(x,y,t)= W(x,y).T(t),

On obtient donc :

$$\boxed{D\Delta^2 W(x,y) + \rho h \omega^2 W(x,y) = 0}$$

D'où on ramène à une EDP d'ordre 4. On a besoin de 4 conditions aux bords pour obtenir la solution.

Cas d'une plaque rectangulaire simplement appuyée en x=0 et x=a. les conductions aux bords dans ce cas.

$$\begin{cases} \mathrm{w}(0,\mathrm{y}) = \mathrm{w}(\mathrm{a},\mathrm{y}) = 0 \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0,y) = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}(a,y) = 0 \end{cases}$$

Une solution admissible vérifiant ces conditions aux bords est :

$$\left\{ \begin{array}{l} W(x, y) = Y\ (y)\sin\left(m\dfrac{\pi . x}{a} \right) \\ \qquad\qquad m \in N \end{array} \right)$$

On injecte W(x, y) dans l'équation aux dérivées partielles :

$$D\Delta^2 W(x,y) + \rho h \omega^2 W(x,y) = 0$$

Et on ramène à l'équation différentiel d'ordre 4 en Y(y).

$$\frac{d^4 Y}{dy^4} - 2\ (\frac{m\pi}{a})^2\ \frac{d^2 Y}{dy^2} + [(\frac{m\pi}{a})^4 - \frac{\rho h}{D}\omega^2]Y=0$$

La solution générale de cette équation se met sous la forme :

$$Y(y) = \sum_{j=1}^{4} C_j\ e^{(\lambda_j y / b)}$$

Ou λ_j vérifient :

$$\lambda_j = \pm b\frac{m\pi}{a}\sqrt{1 \pm K}\ \text{ avec : } K = \frac{\omega}{(\frac{m\pi}{a})^2\sqrt{\dfrac{D}{\rho h}}}$$

C1, C2, C3 et C4 sont des constantes à déterminer en utilisant les conditions aux bords en y.
Dans ce cas on pose :

$$\lambda_1 = \alpha_1 \qquad \lambda_2 = -\alpha_1 \qquad \lambda_3 = i\alpha_2 \qquad \lambda_4 = -i\alpha 2$$

Avec

$$\alpha_1 = \frac{b}{a} m\pi\sqrt{K+1} \qquad \alpha_2 = \frac{b}{a} m\pi\sqrt{K-1}$$

Y(y) se met sous la forme :

$$\mathrm{Y(y)} = A\mathrm{ch}\,(\alpha_1 \frac{y}{b}) + Bsh(\alpha_1 \frac{y}{b}) + C\cos(\alpha_2 \frac{y}{b}) + D\sin(\alpha_2 \frac{y}{b})$$

I) Cas d'une plaque simplement appuyée des 4 cotés

Dans ce cas :

$$\begin{cases} \mathrm{W(x,0)} = \mathrm{W(x,b)} = 0 \\ \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\mathrm{W(x,0)} = \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\mathrm{W(x,b)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Y(0)} = \mathrm{Y(b)} = 0 \\ \mathrm{Y''(0)} = \mathrm{Y''(b)} = 0 \end{cases} \text{car } \mathrm{W(x,y)} = \mathrm{Y(y)}\sin\left(m\frac{\pi . x}{a}\right)$$

D'où :

$$\boxed{\mathrm{Y(y)} = \mathrm{A}\cosh(\alpha_1 \frac{y}{b}) + B\sinh(\alpha_1 \frac{y}{b}) + C\cos(\alpha_2 \frac{y}{b}) + D\sin(\alpha_2 \frac{y}{b})}$$

Les coefficients A, B, C et D sont alors solutions du système linéaire

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cosh\alpha_1 & \sinh\alpha_1 & \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \alpha_1^2 & 0 & -\alpha_2^2 & 0 \\ \alpha_1\cosh\alpha_1 & \alpha_1^2\sinh\alpha_1 & -\alpha_2\cosh\alpha_2 & -\alpha_2\sin\alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Une solution non triviale. det = 0

$$\boxed{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 \sinh\alpha_1 \sin\alpha_2 = 0}$$

On cherche les solutions non triviales :

$$\Rightarrow \sin\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = n\pi \quad , \mathrm{n} \in \mathrm{N}^* .$$

Or $\alpha_2 = \frac{b}{a} m\pi\sqrt{K-1}$

Où $K_{mn} = (\frac{n}{m})^2 (\frac{a}{b})^2 + 1$

D'où les fréquences propres d'une plaque rectangulaire (SSSS)

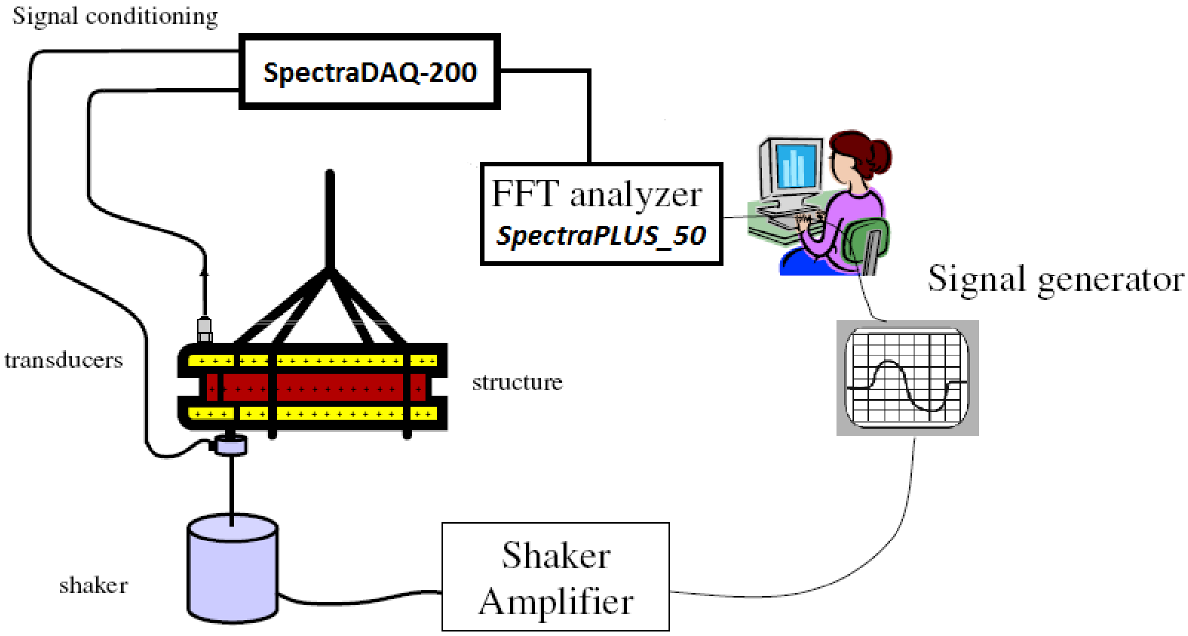
n, m € N,N *

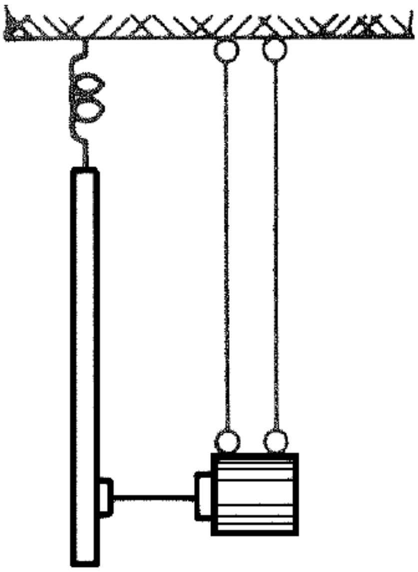
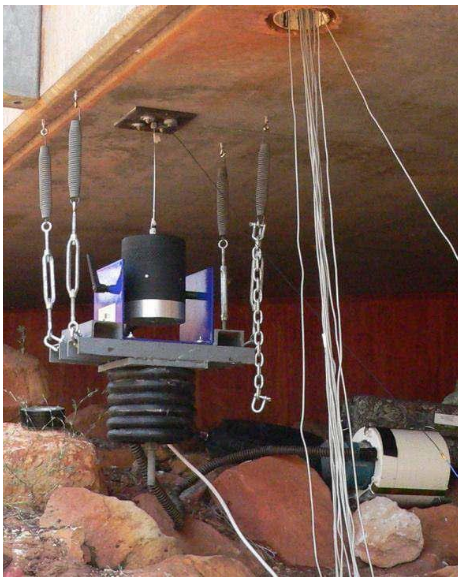
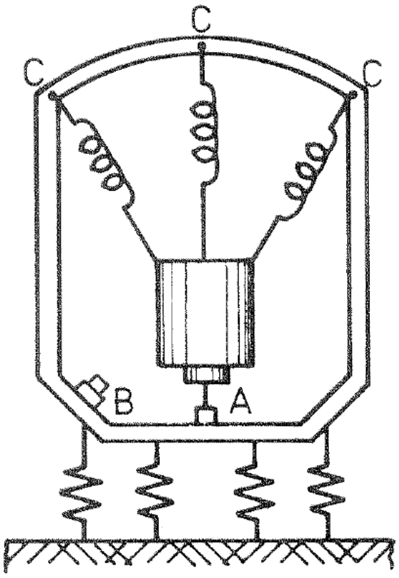
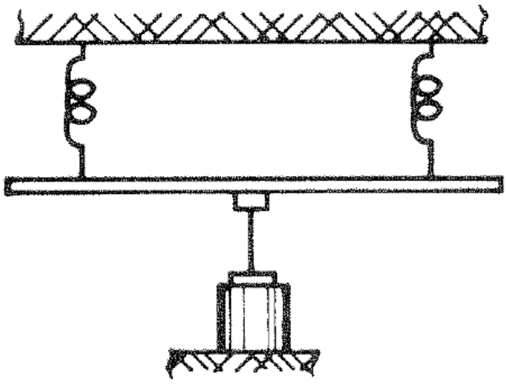
$$\boxed{\omega_{nm} = \pi^2 \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right] \sqrt{\frac{D}{\rho h}}}$$

1. Application :

Dans cette manipulation, on utilise la chaîne de mesure Mini-shaker. Afin de retrouver les fréquences propres.

Cette manipulation consiste à exciter la pièce à l'aide d'un pot vibrant, qui permettra d'obtenir diverses fréquences. Cette application a pour objectif destiné à faire vibrer l'élément à basse fréquence.



	
	C C C B A
	

Structure du compte rendu de TP

1. **Introduction**
2. **Partie théorique**
   a) Equation de mouvement
   b) Condition aux limites (L-L)
   c) Détermination des fréquences propres et modes propres pour les BC : L-L

3. **Partie simulation**
   a) Démarche de la méthode
   b) Résultats (L-L)

4. **Partie expérimentale**
   a. Explication (montage L –L)
   b. Résultats (L-L)

5. **Conclusion et recommandations**