Chapitre 3 :
Mouvement amorti
à un degré de liberté

3.1 Définitions :

En réalité tous les systèmes physiques interagissent avec le milieu environnant. Dans ce chapitre on doit tenir compte de l'influence de la force de frottement de type visqueux $\vec{f}_{fr} = -\alpha\vec{v}$ sur les oscillations du système, où α est le coefficient de frottement et $\vec{v}$ la vitesse de la masse du système. Ceci est une bonne description dans le régime de faibles vitesses.

Au-delà de cette situation, la force devient progressivement proportionnelle au carré de la vitesse. Ce type de mouvement est appelé **mouvement amorti**. Pour un système mécanique (par exemple un ressort avec une masse), la représentation de la force de frottement est comme suit :

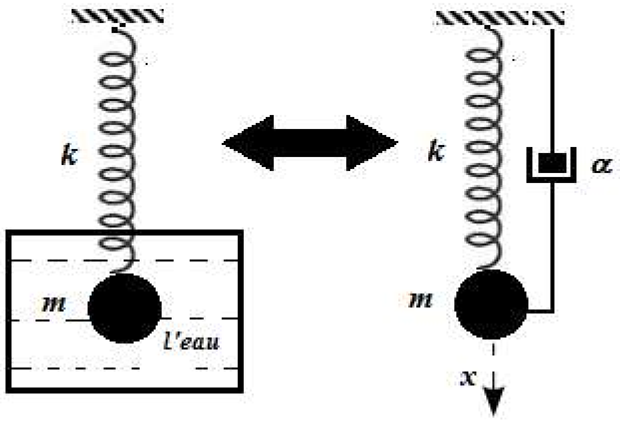


Figure 3.1: Schéma d'un amortisseur mécanique

En fait, l'effet d'amortissement est représenté par le symbole en piston auquel on associe un coefficient de frottement α , et le déplacement vertical est repéré par la coordonnée *x* (coordonnée généralisée).

3.2 Modélisation mathématique:

La deuxième loi de la dynamique s'écrit dans ce cas (en terme de la coordonnée généralisée du système) :

$$m\ddot{q}(t) = -kq(t) - \alpha\dot{q}(t) \tag{3.1}$$

ou encore

$$\ddot{q}(t) + 2\xi\dot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = 0 \tag{3.2}$$

Avec

$$2\xi = \frac{\alpha}{m} \quad et \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

où ξ est un coefficient positif appelé facteur d'amortissement. Ceci est une équation différentielle du second ordre homogène à coefficients constants.

On se propose une solution à l'équation différentielle sous la forme :

$$q(t) = e^{rt} \tag{3.3}$$

où r est une constante à définir. En remplaçant dans l'équation différentielle, on obtient l'équation caractéristique suivante :

$$e^{rt}(r^2 + 2\xi r + \omega_0^2) = 0 \tag{3.4}$$

Le discriminant $\Delta^{'}$ est donné par:

$$\Delta^{'} = \xi^2 - \omega_0^2 \tag{3.5}$$

Il existe trois types de solutions selon la valeur de ce discriminant, à savoir :

3.2.1 Cas d'un amortissement fort: $(\Delta > 0 \Rightarrow \xi > \omega_0)$

Dans ce cas, les solutions **réelles négatives** de l'équation caractéristique sont données par:

$$r_{1,2} = -\xi \pm \sqrt{\xi^2 - \omega_0^2} \tag{3.6}$$

Ainsi, la solution générale de l'équation différentielle est la superposition des deux solutions correspondantes à r_1 et r_2, à savoir:

$$q(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} \tag{3.7}$$

Où A_1 et A_2 sont des coefficients à déterminer par les conditions initiales :

$$\begin{cases} q(t=0) \\ \dot{q}(t=0) \end{cases}$$

Il est utile de noter que la solution ci-dessus ne contient aucun terme représentant un mouvement d'oscillation. On dit alors que le système a un **mouvement apériodique**. En effet, le système une fois lâché de sa position d'équilibre ne fait que revenir à sa position d'équilibre sans faire d'oscillation, tellement l'amortissment appliqué est fort.

Sur la figure 3.2, des mouvements apériodiques pour différents cas de conditions initiales sont représentés.

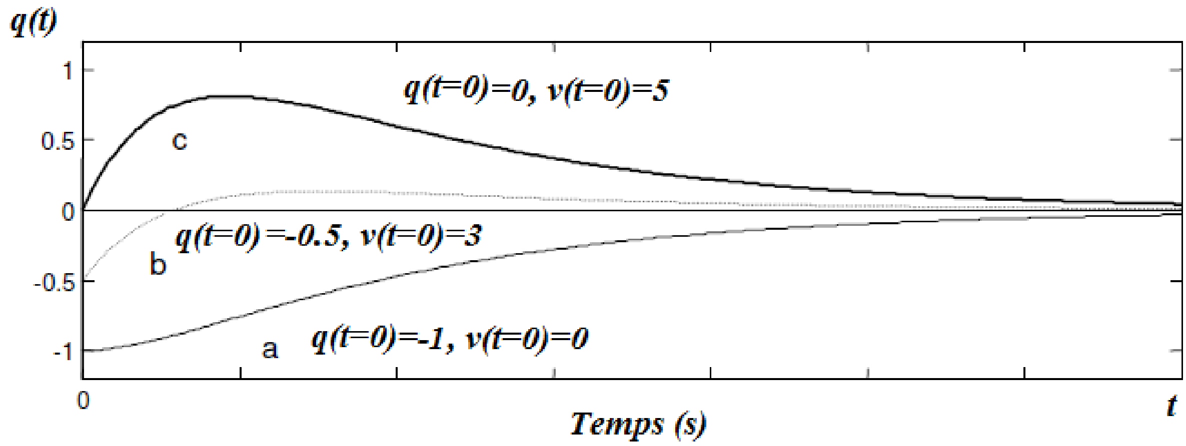


Figure 3.2: Mouvement amorti apériodique

3.2.2 Cas d'un amortissement critique : $(\Delta = 0 \Rightarrow \xi = \omega_0)$

Dans ce cas, une seule solution de l'équation caractéristique existe :

$$r_1 = r_2 = r = -\xi \tag{3.8}$$

C'est à dire un seul terme pour la solution de l'équation différentielle. Il nous manque donc un deuxième terme. Pour cela, on se propose une solution sous la forme :

$$q(t) = u(t)e^{r\,t} \tag{3.9}$$

En remplaçant dans l'équation différentielles si-dessus, on obtient:

$$q(t) = (A_1 t + A_2)e^{r\,t} \tag{3.10}$$

où A_1 et A_2 sont des coefficients à déterminer par les conditions initiales :

$$\begin{cases} q(t=0) \\ \dot{q}(t=0) \end{cases}$$

Encore pas de terme dans l'équation horaire qui indique une oscillation du système. On dit que le système a un mouvement amorti critique. Un fois lâché d'une position hors d'équilibre, le système ne fait pas d'oscillation, bien qu'il revient plus rapidement à sa position d'équilibre. Sur la figure 3.3, sont tracés les allures de mouvements critiques pour différentes conditions initiales.

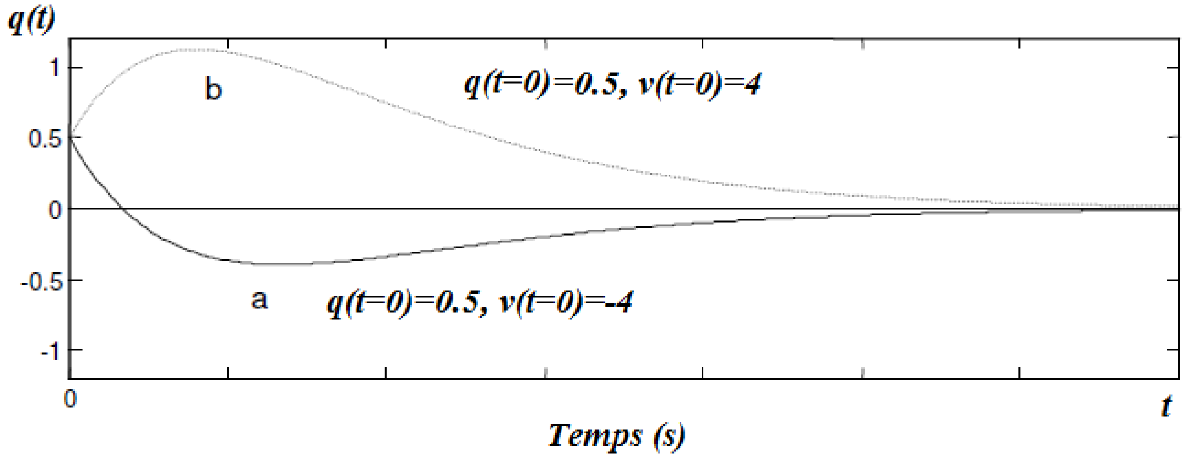


Figure 3.3: Mouvement amorti critique

3.2.3 Cas d'un amortissement faible: $(\Delta < 0 \Rightarrow \xi < \omega_0)$

Dans ce cas, les solution complexes sont données par:

$$r_{1,2} = -\xi \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \xi^2} \tag{3.11}$$

Ainsi, la solution générale de l'équation différentielle s'écrit sous la forme :

$$q(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} \tag{3.12}$$

ou encore

$$q(t) = e^{-\xi t}\left(A_1 e^{\omega_a t} + A_2 e^{-\omega_a t}\right) \tag{3.13}$$

où

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \xi^2} \tag{3.14}$$

est la pseudo-pulsation du système, et A_1 et A_2 des coefficients à déterminer par les conditions initiales :

$$\begin{cases} q(t=0) \\ \dot{q}(t=0) \end{cases}$$

Il est possible de réécrire la solution ci-dessus sous une forme réelle :

$$q(t) = Ae^{-\xi t}\cos(\omega_a t + \varphi) \tag{3.15}$$

où A et φ sont des constantes à déterminer par les conditions initiales.

On voit bien que le système fait des oscillations (à cause de la présence dans la solution du terme cosinus) avec une pseudo-pulsation ω_a, sauf que, contrairement au cas d'un système libre (absence d'amortissment), où l'amplitude de mouvement est constante, l'amplitude de mouvement, en présence d'amortissment (faible), décroit en exponentielle avec le temps. Ceci est une caractéristique du mouvement d'un système mécanique soumis à une force de frottement de type visqueux.

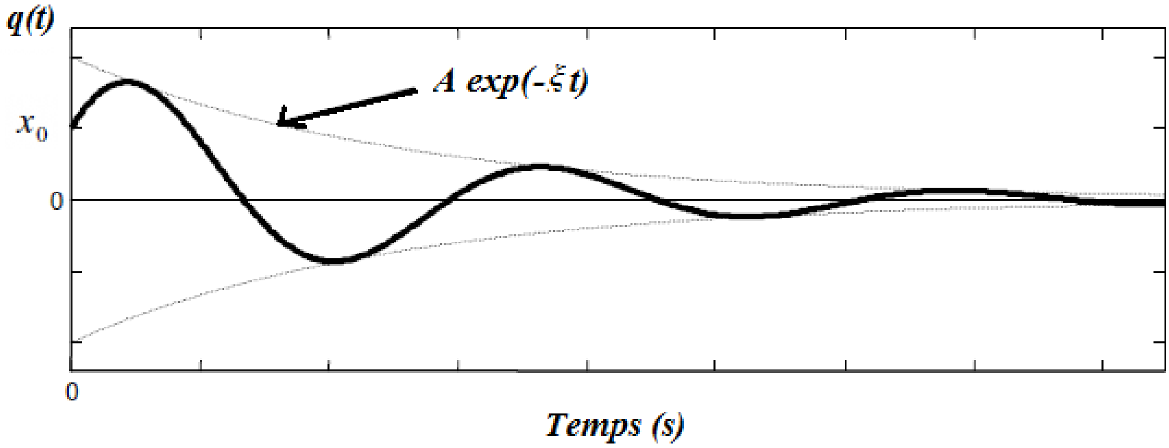


Figure 3.4: Mouvement oscillatoire amorti

On définit aussi la pseudo-période du mouvement comme suit :

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \xi^2}} \tag{3.16}$$

Cette appellation de pseudo-période vient du fait que le système, lors de son mouvement, ne revient pas à sa position initiale, à cause des effets d'amortissement qui font perdre au système de l'énergie, l'empêchant ainsi à terminer so cycle.

On définit le décrément logarithmique δ qui représente la décroissance de l'amplitude après une seule pseudo-période du système comme suit:

$$\delta = \ln \frac{q(t)}{q(t+T)} = \xi T \tag{3.17}$$

3.3 Aspects énergétiques:

Un système mécnique soumis à des forces de frottement voit sont énergie totale diminuer au cous du temps. Cela est dû au travail fait par ces mêmes forces de frottement. Prenons le cas d'un oscillateur mécanique pour lequel l'équation du mouvement s'écrit comme suit (en terme de déplacement x):

$$m\ddot{x} + kx = -\alpha\dot{x} \tag{3.18}$$

On multiplie les deux membres de l'équation, on obtient :

$$m\ddot{x}\,\dot{x} + kx\dot{x} = -\alpha\dot{x}^2 \tag{3.19}$$

ou encore

$$m\dot{x}d\,\dot{x} + kx\,dx = -\alpha\dot{x}^2 dt \tag{3.20}$$

Ce qui peut se mettre sous la forme suivante :

$$d\underbrace{\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right]}_{E_T} = -\alpha\dot{x}^2 dt \tag{3.21}$$

où E_T est l'énergie totale du système. Ce résultat montre que, contrairement au cas d'un système libre où l'énergie totale était constante, la variation de l'énergie totale dans le temps n'est plus nulle. En fait, le signe moins dans le second membre dans l'équation ci-dessus indique la diminution de l'énergie totale.

Finalement on obtient :

$$\frac{dE_T(t)}{dt} = -\alpha\dot{x}^2 < 0 \tag{3.22}$$

D'autre part le travail des forces du frottement se calcule comme suit :

$$\delta W_{fr} = \left|\vec{f}_{fr}\right| d\vec{r} = \alpha\dot{x}dx \tag{3.23}$$

où encore

$$\delta W_{fr} = \alpha\dot{x}^2 dt \tag{3.24}$$

Cela indique que la variation dans le temps de l'énergie totale est égale à la puissance dissipée par la présence de forces de frottement.

3.5 Système électrique équivalent:

Soit un circuit oscillant RLC en série représenté sur la figure 3.5 comme suit :

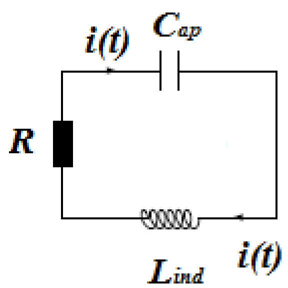


Figure 3.5: Circuit oscillant R.L.C

L'application des lois de Kirchhoff donne l'équation suivante:

$$L_{ind}\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C_{ap}}\int i(t)dt+Ri(t)=0 \tag{3.24}$$

Sachant que le courant *i(t)* pendant un temps *dt* apporte une charge telle que :

$$i(t)=\frac{dq(t)}{dt} \tag{3.25}$$

On obtient alors l'équation différentielle du mouvement comme suit :

$$L_{ind}\ddot{q}(t)+R\dot{q}(t)+\frac{q(t)}{C_{ap}}=0 \tag{3.26}$$

On remarque que cette équation est équivalente à l'équation d'un mouvement oscillatoire amorti représenté comme suit:

$$\ddot{q}(t)+\frac{R}{L_{ind}}\dot{q}(t)+\frac{q(t)}{L_{ind}C_{ap}}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x}(t)+\frac{\alpha}{m}\dot{x}(t)+\frac{k}{m}x(t)=0 \tag{3.27}$$

Pour des oscillations faibles, la solution générale de l'équation s'écrit alors:

$$q(t)=Ae^{-\xi t}\cos(\omega t+\varphi) \tag{3.28}$$

En constatant la similitude entre les équations différentielles gouvernant un système mécanique d'une part et le système électrique d'autre part, on peut faire les analogies électromécaniques suivantes:

$$\begin{cases} L_{ind} \quad \Leftrightarrow \quad m \\ q(t) \quad \Leftrightarrow \quad x(t) \qquad et \quad R \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \\ \dfrac{1}{c_{ap}} \quad \Leftrightarrow \quad k \end{cases} \tag{3.29}$$

L'effet critique est caractérisé par :

$$R_{cr}=\sqrt{\frac{L_{ind}}{C_{ap}}} \tag{3.30}$$

Chapitre 3: Mouvement oscillatoire amorti à un degré de liberté

Il faut retenir que :

- L'oscillation amortie est régie par

$$\ddot{q}(t) + 2\xi\dot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = 0$$

- Il existe 3 types de solutions :
  - ***Cas où le système est fortement amorti*** : $\xi \succ \omega_0$

$$q(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$$
$$r_{1,2} = -\xi \pm \sqrt{\xi^2 - \omega_0^2}$$

  - ***Cas où l'amortissement est critique :*** $\xi = \omega_0$

$$q(t) = (A_1 t + A_2)e^{r\,t}$$
$$r_1 = r_2 = r = -\xi$$

  - ***Cas où l'amortissement est faible*** : $\xi \prec \omega_0$

$$q(t) = Ae^{-\xi t}\cos(\omega t + \varphi) \qquad avec \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \xi^2}$$

- On définit **le décrément logarithmique** δ qui représente la décroissance de l'amplitude à une seule période du système comme suit:

$$\delta = Ln\frac{q(t)}{q(t+T)} = \xi T$$

- Il faut signaler que le système subit <u>**une perte d'énergie totale due au travail des forces de frottements.**</u>

Applications

Problème 1:

Chapitre 3: Mouvement oscillatoire amorti à un degré de liberté

On définit un oscillateur amorti régi par l'équation différentielle suivante :

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$$

Avec m est la masse du corps, k est le coefficient de rappel et x est le déplacement du corps. On lance le système avec une vitesse initiale v_0=25cm/s.

Donc on a : t=0, x=0 et $\dot{x} = v_0$

- Calculer la période propre du système,

  Sachant que : m=150g et k=3.8N/m.
- Montrer que si α=0.6kg/s, le corps a un mouvement oscillatoire amorti.
- Résoudre dans ce cas l'équation différentielle.
- Calculer le pseudo-période du mouvement.
- Calculer le temps t_m au bout duquel la première amplitude x_m est atteinte. En déduire x_m.
- Calculer la vitesse d'une pseudo-période.

Solution:

- L'équation du mouvement amorti est de forme :

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad avec \quad 2\lambda = \frac{\alpha}{m} \quad et \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2$$

- La période propre du système est T_0:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \cong 5rad/s$$

$$T_O = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \cong 1.25s$$

- L'équation différentielle du mouvement se transforme en :

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$$

$$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 = -21 \prec 0$$

$$Avec$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = 21$$

❖Le corps m a un mouvement oscillatoire amorti.

- La résolution de cette équation différentielle est de forme :

$$x(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi)$$

En appliquant les conditions initiales :

$$t = 0, x = 0 \Rightarrow \quad \cos\varphi = 0 \Rightarrow \quad \varphi = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$t = 0, \dot{x} = v_0 \Rightarrow \quad A = \frac{v_0}{\omega} \quad avec \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

La solution finale sera exprimée comme suit :

$$x(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \quad x(t) = \frac{v_0}{\omega}e^{-\lambda t}\sin\omega t$$

La figure 6.3 représente le mouvement oscillatoire amorti.

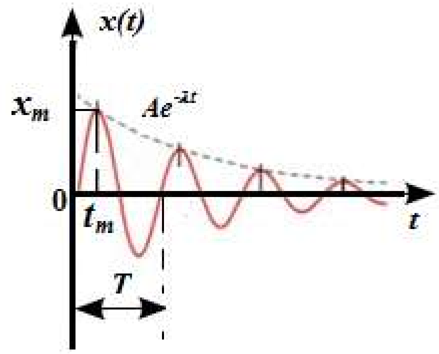


Figure 3.6: Mouvement oscillatoire amorti

▪La pseudo-période se calcule comme suit :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 1.37s$$

▪Le temps de la première amplitude t_m

Il faut que :

$$\dot{x}(t = t_m) = \frac{dx(t)}{dt}\Big|_{t=t_m} = 0 \Rightarrow \quad t_m = \frac{Arctg\,\dfrac{\omega}{\lambda}}{\omega}$$

D'où :

$$t_m = 0.25s \neq \frac{T}{4}$$

Problème 2 :

Chapitre 3: Mouvement oscillatoire amorti à un degré de liberté

On donne l'équation du mouvement d'un système amorti (une masse m attachée verticalement à un ressort de raideur k avec un coefficient d'amortissement de type visqueux, α) sous la forme:

$$\tilde{x}(t) = e^{-\gamma t}\left[\tilde{A}e^{j\omega_a t} + \tilde{B}e^{-j\omega_a t}\right]$$

$\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ étant deux constantes complexes, et ω_a la nouvelle pulsation du système et $\gamma = \frac{\alpha}{2m}$.

1- Quelle est la nature du mouvement du système?

2- Écrire l'équation différentielle du mouvement du système.

3- En déduire l'expression de la pseudo-période d'oscillation du système.

4- Écrire $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ en fonction des conditions initiales (déplacement $x(0) = x_0$ et vitesse $v(0) = v_0$).

5-En déduire la partie réelle de $\tilde{x}(t)$. Que représente-t-elle physiquement?

<u>Solution :</u>

1-Le mouvement est oscillatoire car la solution proposée contient un terme qui représente une oscillation, à savoir $e^{j\omega_a t}$ et amorti car contenant le terme $e^{-\gamma t}$

2- L'équation différentielle du mouvement d'une masse attachée à un ressort en présence de forces de frottement de type visqueux $F_f = -\alpha\dot{x}$ est donnée par:

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x}$$

En divisant les deux membres de l'équation par m, l'équation différentielle devient:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\gamma\dot{x} = 0$$

avec

$$2\xi = \frac{\alpha}{m} \quad et \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

L'équation du mouvement du système en notation complexe s'écrit sous la forme:

$$\tilde{x}(t) = e^{-\gamma t}\left[\tilde{A}e^{j\omega_a t} + \tilde{B}e^{-j\omega_a t}\right]$$

En remplaçant dans l'équation ci-dessus, on trouve

$$\tilde{x}(0)=\tilde{A}+\tilde{B}=0 \text{ et } \dot{\tilde{x}}(0)=-\gamma\left(\tilde{A}+\tilde{B}\right)-j\omega_a\left(\tilde{A}-\tilde{B}\right)=v_0$$

Après un calcul simple, on trouve :

$$\tilde{A}=\frac{x_0}{2}+\frac{v_0+\gamma x_0}{2j\omega_a} \text{ et } \tilde{B}=\frac{x_0}{2}-\frac{v_0+\gamma x_0}{2j\omega_a}$$

et la solution générale s'écrit:

$$\tilde{x}(t)=e^{-\gamma t}\left[\tilde{x}_0\cos(\omega_a t)+\frac{\tilde{v}_0+\gamma\tilde{x}_0}{\omega_a}\sin(\omega_a t)\right]$$

Remarquons que toute quantité physique mesurable, par exemple un déplacement ou une vitesse, est une quantité réelle; d'où l'équation du mouvement du mobile est la partie réelle de $\tilde{x}(t)$:

$$x(t)=\mathrm{Re}\{\tilde{x}(t)\}=e^{-\gamma t}\left[x_0\cos(\omega_a t)+\frac{v_0+\gamma x_0}{\omega_a}\sin(\omega_a t)\right]$$

qui peut encore s'écrire comme:

$$x(t)=Ce^{-\gamma t}\cos(\omega_a t-\varphi)$$

avec

$$C=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0+\gamma x_0}{\omega_a}\right)^2} \text{ et } tg(\varphi)=\frac{v_0+\gamma x_0}{x_0\omega_a}$$

C'est le mouvement périodique amorti avec une nouvelle pulsation ω_a. L'amortissement est assez faible pour que des oscillations autour de la position d'équilibre aient lieu. Mais l'amplitude des oscillations diminue au cours du temps pour tendre vers zéro quand t est grand. Le mobile finit toujours par revenir à sa position d'équilibre.

Problème 3 :

Chapitre 3: Mouvement oscillatoire amorti à un degré de liberté

Soient les systèmes mécaniques représentés dans les figures 7.3 et 8.3 comme suit :

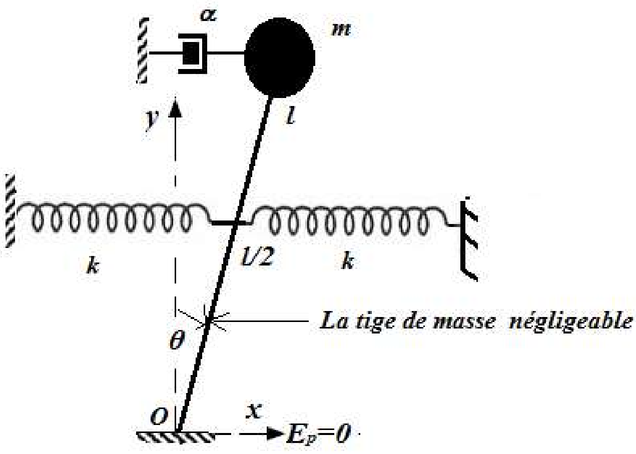


figure 3.7: Mouvement oscillatoire amorti en rotation

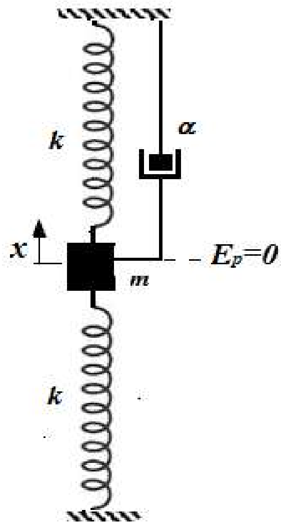


Figure 3.8: Mouvement oscillatoire amorti en translation

Pour des petites oscillations, déterminer pour chaque système :

- Le Lagrangien
- L'équation différentielle du mouvement.
- La pulsation propre
- La solution générale pour un faible amortissement.

<u>Solution:</u>

- Le Lagrangien ***:***

✓L'énergie cinétique s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

✓Et l'énergie Potentielle:

$$E_p = 2\frac{1}{2}kx^2 + mgl\cos\theta \quad \text{avec} \quad x = \frac{l}{2}\sin\theta \cong \frac{l}{2}\theta$$

✓Le Lagrangien s'écrit sous la forme :

$$L(\dot{\theta},\theta) = E_c - E_p = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - k(\frac{l}{2}\theta)^2 - mgl\cos\theta$$

✓Après calcul, l'équation différentielle est donnée par:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \sum \overline{M}_{ext} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{\lambda}{m}\dot{\theta} + \frac{2k(\frac{l}{2})^2 - mgl}{ml^2}\theta = 0$$

D'où :

$$\ddot{\theta} + 2\xi\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

$$Avec \quad 2\xi = \frac{\lambda}{m}, \omega_0^2 = \frac{2k(\frac{l}{2})^2 - mgl}{ml^2}$$

✓La solution générale est dans le cas d'un faible amortissement de la forme:

$$\theta(t) = Ae^{-\xi t}\cos(\omega t + \varphi)$$

▪Le Lagrangien ***:***

✓L'énergie cinétique on a:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

✓L'énergie Potentielle s'écrit :

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}k(-x)^2$$

✓Le Lagrangien s'écrit alors :

$$L(\dot{x},x) = E_c - E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - kx^2$$

▪Après calcul, on obtient l'équation différentielle du mouvement comme suit :

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \sum \overline{F}_{ext} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \frac{2k}{m}x = 0$$

D'où

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$Avec \quad 2\zeta = \frac{\lambda}{m}, \omega_0^2 = \frac{2k}{m}$$

▪La solution générale pour un faible amortissement est de la forme :

$$x(t) = Ae^{-\xi t}\cos(\omega t + \varphi)$$

<u>Problème 4 :</u>

On considère un système mécanique amorti oscillant autour d'un axe passant par O représenté par une tige métallique de longueur l de masse négligeable reliée par un ressort de constante de raideur k au point $l/2$ comme le montre la figure 3.9:

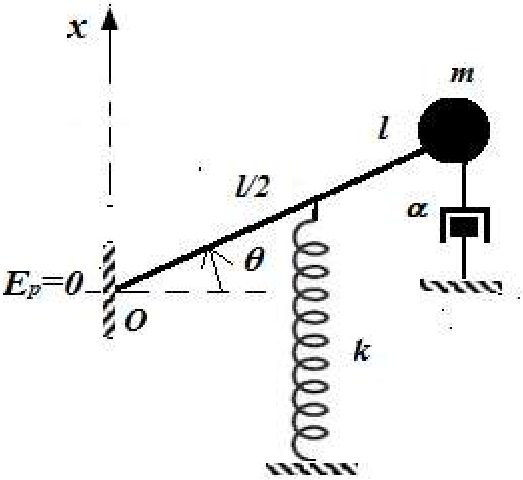


Figure 3.9 : Mouvement oscillatoire amorti

A l'équilibre la barre est horizontale. Dans le cas des petites oscillations :

- Etablir le Lagrangien du système.
- Déterminer l'équation différentielle du mouvement.
- En déduire la pulsation propre du système.
- Résoudre dans le cas de faible amortissement l'équation différentielle du mouvement avec les conditions initiales suivantes :

$$\theta(t=0)=0, \dot{\theta}(t=0)=\dot{\theta}_0$$

<u>Solution:</u>

- Le Lagrangien ***:***

  Le système a un seul degré de liberté représenté par $\boldsymbol{\theta}$

✓L'énergie cinétique s'écrit :

$$E_c=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

✓Pour l'énergie potentielle on a:

$$E_p=\frac{1}{2}kx^2 \quad avec \quad x=\frac{l}{2}\sin\theta\cong\frac{l}{2}\theta$$

✓Le Lagrangien s'écrit :

$$L(\theta,\dot{\theta}) = E_c - E_p = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k(\frac{l}{2}\theta)^2$$

▪L'équation différentielle est :

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \sum \overline{M}_{ext} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{k\frac{l^2}{4}}{ml^2}\theta = 0$$

D'où :

$$\ddot{\theta} + 2\xi\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

$$2\xi = \frac{\alpha}{m}, \omega_0^2 = \frac{k\frac{l^2}{4}}{ml^2}$$

▪Pour un faible amortissement la solution s'écrit sous la forme :

$$\theta(t) = Ae^{-\xi t}\cos(\omega t + \varphi)$$

Avec les conditions initiales, on a

$$avec \quad \begin{array}{c} t = 0, \theta = 0, \dot{\theta} = \dot{\theta}_0 \\ \varphi = -\frac{\pi}{2}, A = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega} \end{array}$$

Alors, la solution générale s'écrit :

$$\theta(t) = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega}e^{-\xi t}\sin \omega t$$

<u>Problème 5:</u>

Soit une boule de masse *m* suspendue à une tige de longueur *l*, de masse négligeable et plongée dans un liquide. Cette masse est soumise à une force de frottement visqueuse dont le coefficient de frottement est α, comme le montre la figure (3.10).

▪Etablir le Lagrangien du système.

▪Déterminer l'équation du mouvement.

▪Résoudre dans le cas de faible amortissement l'équation différentielle.

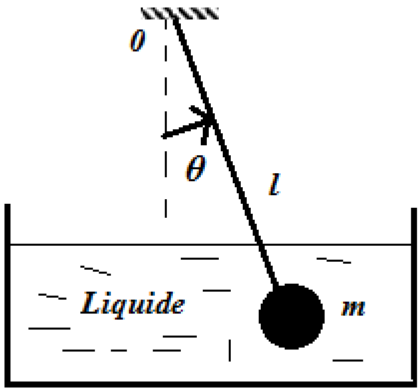


Figure 3.10: Mouvement oscillatoire amorti du pendule

▪***Application numérique*** :

Sachant on a*: m=1Kg, l=50cm, g=10m/s*. Calculer la valeur maximale que α ne doit pas atteindre pour que le système oscille.

▪On prend la valeur de α égale à *10N.s/m* :

Calculer le temps nécessaire τ pour que l'amplitude diminue à ¼ de sa valeur.

Solution:

▪Le Lagrangien du système ***:***

Le système est à un seul degré de liberté représenté par ***θ(t)***

✓L'énergie cinétique s'exprime :

$$E_c = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

✓Pour l'énergie potentielle on a :

$$E_p = -mgl\cos\theta$$

✓D'où le Lagrangien s'écrit comme suit :

$$L(\theta, \dot{\theta}) = E_c - E_p = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$

▪L'équation différentielle s'écrit comme suit:

$$\ddot{\theta} + 2\xi\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

Avec

$$2\xi = \frac{\alpha}{m}, \omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

▪La solution générale est de la forme :

$$\theta(t) = Ae^{-\xi t}\cos(\omega t + \varphi)$$

▪La valeur maximale de α_{max} :

$$\lambda^2 - \omega_0^2 \prec 0 \Rightarrow \alpha \prec 2m\sqrt{\frac{g}{l}} = \alpha_{max} \approx 8.94 N.s/m$$

▪Le temps τ :

$$Ae^{-\lambda(t+\tau)} = \frac{1}{4}e^{-\lambda t} \Rightarrow \tau = \frac{\ln 4}{\lambda} \approx 0.28s$$

Problème 6:

L'oscillateur, représenté sur la figure (3.11), est constitué d'une masse m attachée à deux ressorts de constante de raideur $\frac{k}{2}$. La masse se déplace sur un plan horizontal sur lequel la force de frottement R_f n'est pas négligeable.

A l'instant $t = 0s$ la masse est déplacée d'une distance X_0 puis abandonnée sans vitesse initiale.

1- Écrire l'équation différentielle du mouvement du système.

2-En déduire la solution générale du mouvement.

3-Tracer la courbe représentant la distance parcourue par la masse en fonction du temps.

4-Que peut-on conclure?

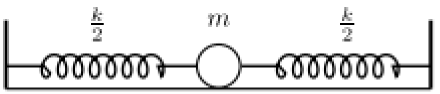


Figure 3.11: Mouvement oscillatoire amorti du pendule

Solution:

1- L'équation du mouvement du système s'écrit:

$$m\ddot{x} = -kx + \varepsilon R_f$$

avec $\varepsilon = -1$ si la masse se déplace dans le sens positif des x, et $\varepsilon = +1$ dans le cas contraire.

En introduisant $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$, on aura:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon \frac{R_f}{m}$$

2- La solution générale s'obtient en ajoutant à la solution de l'équation sans second membre (solution homogène):

$$x_h(t) = A\cos(\omega_0 t - \theta)$$

la solution particulière $x_p = C$ (car le second membre est constant). En remplaçant dans l'équation générale on trouve:

$$x_p = \varepsilon \frac{R_f}{k} = \varepsilon\xi$$

La solution générale s'écrit donc:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t - \theta) + \varepsilon\xi$$

A et θ seront définies par les conditions initiales.

3- A l'instant $t = 0$ la masse est déplacée d'une longueur X_0 puis abandonnée sans vitesse initiale.

1ère partie du mouvement : $0 < t \leq \dfrac{T}{2}$

La masse m se déplace dans le sens négatif des x: $\varepsilon = +1$, et l'équation du mouvement s'écrit:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t - \theta) + \xi$$

Avec les conditions initiales $x(0) = A_0 = X_0$ et $\dot{x}(0) = 0$ on a:

$$x(t) = (X_0 - \xi)\cos(\omega_0 t) + \xi$$

et

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 (X_0 - \xi)\sin(\omega_0 t)$$

qui s'annule à $t = \frac{T}{2}$, où $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

A l'instant $t = \frac{T}{4}$ l'élongation $x(t)$ est égale à ξ, alors que dans le cas de l'oscillateur non amorti on avait $x = 0m$.

A la fin de cette première partie $t = \frac{T}{2}$: $x(t) = X_1 = -X_0 + 2\xi$. L'amplitude a diminué de 2ξ.

2ème partie du mouvement : $\frac{T}{2} < t \leq T$

La masse se déplace à présent dans le sens positif, donc $\varepsilon = -1$, et l'équation du mouvement s'écrit:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t - \theta) - \xi$$

Avec les conditions initiales $x\left(\frac{T}{2}\right) = -X_0 + 2\xi$ et $\dot{x}\left(\frac{T}{2}\right) = 0$ on a:

$$x(t) = (X_0 - 3\xi)\cos(\omega_0 t) - \xi$$

Et

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 (X_0 - 3\xi)\sin(\omega_0 t)$$

qui s'annule à $t = T$.

A l'instant $t = T$ l'élongation $x(T) = A_1 = X_0 - 4\xi$.

Au bout d'une pseudo-période, l'amplitude a donc diminué de 4ξ, et ça sera le cas pour chaque pseudo-période.

La courbe qui représente le mouvement est formé d'arcs de sinusoïdales dont les sommets A_0, A_1, A_2,... se placent respectivement sur une droite.

Le système s'arrête lorsque la force de rappel devient plus faible que la force de frottement, c'est à dire: $\left| -kX_p \right| < R_f$.

On peut remarquer que, contrairement au cas d'un frottement de type visqueux où l'enveloppe de décroissance des amplitudes était exponentielle, la décroissance des amplitudes est dans ce cas linéaire. Aussi, la masse ne change pas de pulsation par rapport au cas libre.

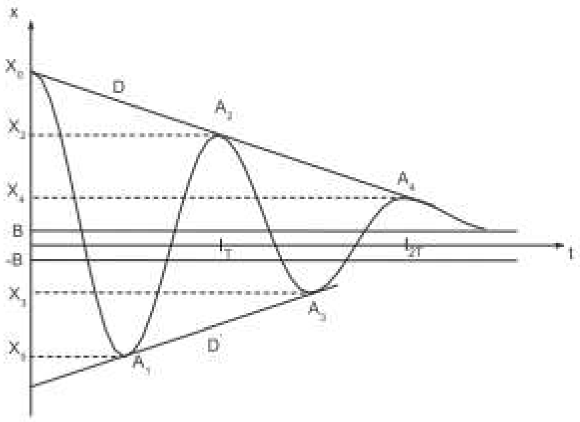


Figure 3.12: Mouvement oscillatoire amorti du pendule

Chapitre 4 :
Mouvement Oscillatoire forcé d’un système mécanique à un degré de liberté

Chapitre 4: Mouvement forcé à un degré de liberté

4.1 Définitions:

Les vibrations mécaniques sont à l'origine d'une grande partie des problèmes industriels. Ces vibrations sont symbolisées par un ensemble d'oscillateurs constitués de masse, de ressorts et d'amortisseurs. Une oscillation forcée concerne tout système en mouvement sous l'action d'une force extérieure. Pour un système mécanique le modèle physique est représenté sur la figure (4.1).

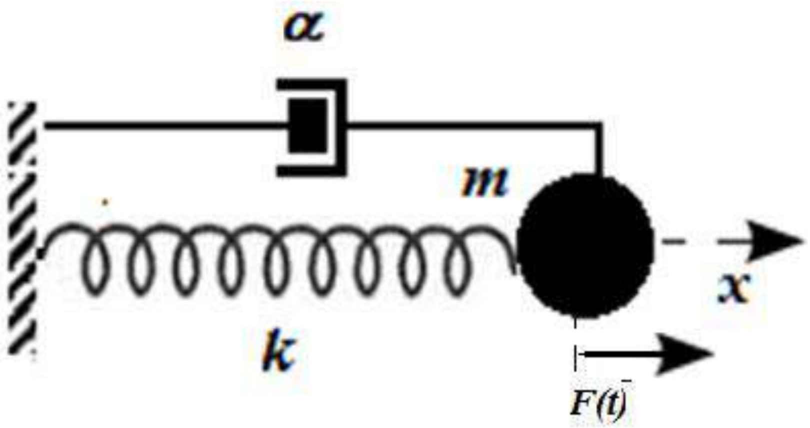


Figure 4.1: Schéma d'un mouvement forcé

L'équation de mouvement du système ci-dessus est donnée par :

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - \alpha\dot{x}(t) + F(t) \tag{4.1}$$

où $F_r = kx(t)$ est la force de rappel du ressort, $F_{fr} = \alpha\dot{x}(t)$ la force de frottement et $\vec{F}(t)$ force extérieure appliquée au système, respectivement. L'équation différentielle ci-dessus devient :

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F(t)}{m} \tag{4.2}$$

Avec

$$2\xi = \frac{\alpha}{m} \quad et \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Ceci est une équation différentielle linéaire du second ordre non homogène à équation à coefficients constants

.

4.2 Cas d'une force extérieure constante :

A l'instant $t=0$ l'oscillateur mécanique est soumis à une force constante F constante. La masse initialement au repos en $x=0$ et sans vitesse initiale se déplace sous l'action de la force F . L'équation différentielle du mouvement du système s'écrit donc:

$$\ddot{x}(t)+2\xi\dot{x}(t)+\omega_0^2 x(t)=\frac{F}{m} \tag{4.3}$$

La solution de cette équation est composée de deux termes: une solution sans second membre (homogène) $x_h(t)$ que nous avons déjà obtenue, et une solution particulière $x_p(t)$ qui a la même forme que le second membre de l'équation différentielle, c'est à dire une constante :

$$x(t)=x_g(t)+x_p(t) \tag{4.4}$$

La solution particulière s'obtient en remplaçant une constante $x_p(t)$ x_p dans l'équation différentielle ci-dessus, ce qui donne:

$$\omega_0^2 x_p=\frac{F}{m}\Rightarrow x_p=\frac{F}{k}$$

La solution générale s'écrit donc:

$$x(t)=x_g(t)+\frac{F}{k} \tag{4.5}$$

La solution sans second membre prend trois formes selon le degré d'amortissement appliqué sur le système :

4.2.1Cas d'un amortissment faible ($\xi<\omega_0$)

La solution de l'équation du mouvement s'écrit sous la forme :

$$x(t)=Ce^{-\xi t}\cos(\omega_a t-\theta)+\frac{F}{k} \tag{4.6}$$

En utilisant les conditions initiales suivantes :

$$x(0)=0 \qquad \text{et} \qquad \dot{x}(0)=0$$

On obtient

$$x(t)=x_p\left[1-\sqrt{1+\frac{\xi^2}{\omega_a^2}}e^{-\xi t}\cos(\omega_a t-\theta)\right] \tag{4.7}$$

avec

$$tg\theta = \frac{\xi}{\omega_a} \tag{4.8}$$

Le premier terme de la solution tend vers zéro et peut être considéré comme nul après un temps donné, et donc la solution générale elle-même tend vers $\frac{F}{k}$.

4.2.2 Cas d'un amortissment critique ($\xi = \omega_0$) :

L'équation de mouvement s'écrit

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\gamma t} + \frac{F}{k} \tag{4.9}$$

En appliquant les conditions initiales $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$, on trouve:

$$x(t) = x_p\left[1 - (1 + \gamma t)e^{-\gamma t}\right] \tag{4.10}$$

où la masse, sans oscillation et après un temps donné, s'immobilise à la position x_p.

4.2.3 Cas d'un amortissment fort ($\xi > \omega_0$) :

La solution de l'équation du mouvement s'écrit sous la forme :

$$x(t) = e^{-\xi t}\left[Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t}\right] + \frac{F}{k} \tag{4.11}$$

avec $\alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

En utilisant les conditions initiales suivantes : $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$, on obtient

$$x(t) = x_p\left[1 - \sqrt{1 + \frac{\xi^2}{\omega_a^2}}e^{-\xi t}\cos(\omega_a t - \theta)\right] \tag{4.12}$$

avec

$$tg\theta = \frac{\xi}{\omega_a} \tag{4.13}$$

Le premier terme de la solution tend vers zéro et peut être considéré comme nul après un temps donné, et donc la solution générale elle-même tend vers $\frac{F}{k}$.

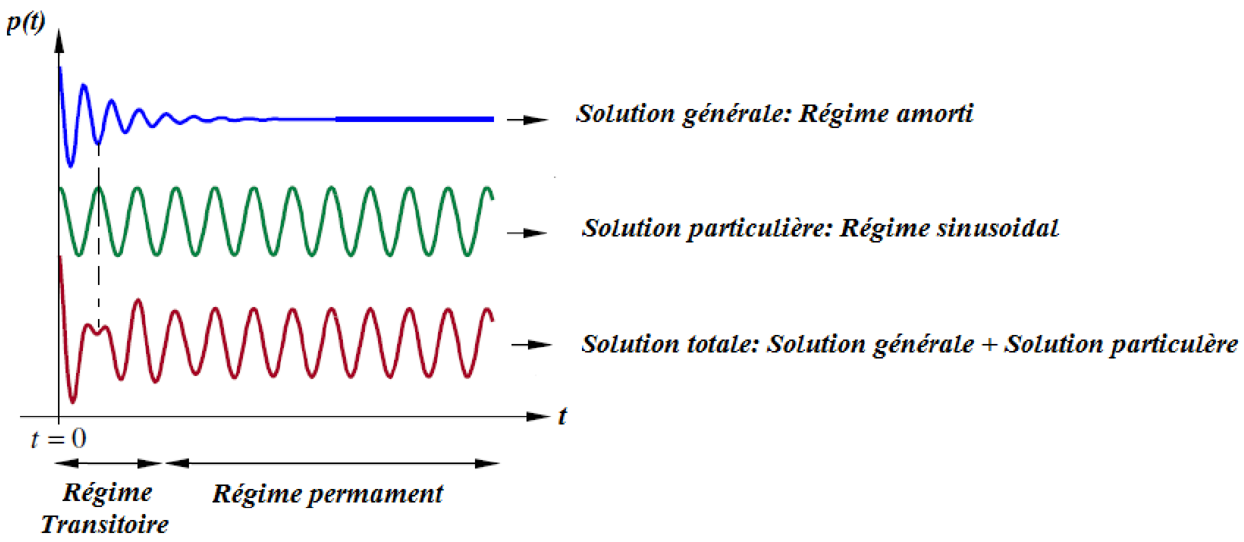


Figure 4.2: Superposition du régime transitoire et du régime permanent

4.3 Cas d'une force extérieure sinusoïdale:

Dans le cas où l'excitation est sinusoïdale de type :

$$F(t) = F_0 \cos \Omega t \tag{4.14}$$

L'équation du mouvement s'écrit sous la forme :

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t \tag{4.15}$$

La solution générale de l'équation différentielle est donnée par :

$$x(t) = x_{sssm}(t) + x_p(t) \tag{4.16}$$

où $x_{sssm}(t)$ est la solution sans second membre, déjà obtenue dans le cas d'un système amorti, alors que $x_p(t)$ est la solution particulière qui a la même forme que le second membre de l'équation différentielle ci-dessus. Dans le cas d'un faible amortissement, la solution sans second membre a la forme générale suivante

$$x_{sssm}(t) = Ce^{-\xi t} \cos(\omega_a t + \theta) \tag{4.17}$$

Alors que la solution particulière est donnée par :

$$x_p(t) = A\cos(\Omega t + \varphi) \tag{4.18}$$

où A est l'amplitude du mouvement de la masse en réponse à la force extérieure et φ le déphasage de la masse par rapport à la force extérieure.

Ces deux constantes ne peuvent être simplement obtenues par les conditions initiales. représente l'amplitude de la solution totale et le déphasage. Finalement la solution générale se met sous la forme :

$$x(t) = Ce^{-\xi t}\cos(\omega_a t + \theta) + A\cos(\Omega t + \varphi) \tag{4.19}$$

Selon cette expression, la masse exécute un mouvement complexe (qui n'est pas harmonique simple) avec deux pulsations : ω_a et Ω. Remarquons aussi que la solution sans second membre s'annule au bout d'un certain temps à cause de la présence du terme exponentiel. Avant que cela se passe, le système est dit dans le régime transitoire. Une fois cette solution s'annule, le mouvement de la masse devient sinusoïdal simple avec une amplitude constante A, avec la même pulsation Ω sque la force extérieure mais avec un déphasage φ. Le système est donc dans le régime permanent. Cette situation est indiquée sur la figure 5.2.

Pour obtenir les expressions de A et φ il serait utile de passer à la notation complexe de la solution proposée pour le régime permanent, à savoir :

$$\tilde{x}_p(t) = \tilde{A}e^{j\Omega t} \tag{4.20}$$

où $\tilde{A} = Ae^{\varphi}$, en supposant que le système est soumis à une force extérieure a la forme complexe suivante

$$F(t) = F_0 e^{j\Omega t} \tag{4.21}$$

En remplaçant cette solution dans l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{\tilde{x}}(t) + 2\xi\dot{\tilde{x}}(t) + \omega_0^2\tilde{x}(t) = \frac{F_0}{m}e^{j\Omega t} \tag{4.22}$$

on obtient

$$\left(-\Omega^2 + \omega_0^2 + 2j\Omega\xi\right)\tilde{A} = \frac{F_0}{m} \tag{4.23}$$

L'amplitude s'écrit donc sous la forme :

$$\tilde{A} = A(\Omega)e^{j\varphi} = \frac{F_0}{m}\frac{1}{-\Omega^2 + \omega_0^2 + 2\xi j\Omega} \tag{4.24}$$

dont le module a l'expression:

$$A(\Omega)=\frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\Omega^2-\omega_0^2)^2+4\xi^2\Omega^2}} \tag{4.25}$$

avec

$$\varphi = arctg\,\frac{2\xi\Omega}{\Omega^2-\omega_0^2} \tag{4.26}$$

La solution en régime permanent s'écrit donc comme suit :

$$\tilde{x}(t)=Ae^{j(\Omega t+\varphi)} \tag{4.27}$$

Mais la solution réelle qui correspond à un système mécanique soumis à une force réelle est donnée par

$$x(t)=\mathrm{Re}\{\tilde{x}(t)\}=A\cos(\Omega t+\varphi) \tag{4.28}$$

4.3.1 Etude de l'amplitude en fonction de Ω :

L'amplitude $A(\Omega)$ est maximale quand son dénominateur, ou plus encore son carré est minimum.
Étudions donc la fonction

$$h(\Omega)=(\Omega^2-\omega_0^2)^2+4\xi^2\Omega^2 \tag{4.29}$$

La variation de la fonction ci-dessus:

$$\frac{dh(\Omega)}{d\Omega}=4\Omega(\Omega^2-\omega_0^2)+8\xi^2\Omega=0 \tag{4.30}$$

On obtient ainsi deux solutions**:**

$$\begin{cases}\Omega_{01}=0\\ \Omega_{02}=\Omega_r=\sqrt{\omega_0^2-2\xi^2}\end{cases} \tag{4.31}$$

Ce sont là les extremums de la fonction *h(Ω)*. Le signe de la deuxième dérivée détermine le maximum et le minimum de cette même fonction, en l'occurence:

$$\left.\frac{d^2h(\Omega)}{d\Omega}\right|_{\Omega}=4(\Omega^2-\omega_0^2)+8\Omega^2+8\xi^2=12\Omega^2-4(\omega_0^2-2\xi^2)$$

Pour la première pulsation $\Omega=\Omega_{01}$ on a :

$$\left.\frac{d^2h}{d\Omega^2}\right|_{\Omega=\Omega_{01}}<0 \tag{4.32}$$

La pulsation $\Omega = \Omega_{01}$ présente donc un minimum pour l'amplitude A

Pour la deuxième pulsation $\Omega = \Omega_{02}$ on a :

$$\left.\frac{d^2h}{d\Omega^2}\right|_{\Omega=\Omega_{02}} > 0 \qquad (4.33)$$

La pulsation $\Omega = \Omega_{02}$ présente donc un maximum pour l'amplitude A

Donc pour la pulsation $\Omega = \Omega_{02} = \Omega_r$, la réponse du système est maximale. Ce phénomène **est appelé la résonnance**. Il est utile de noter qu'au voisinage de Ω_r on peut avoir de très grandes oscillations qui peuvent détériorer le système.

A la fréquence de résonnance l'amplitude est donnée par:

$$A_{max} = A(\Omega_r) = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\Omega_r^2 - \omega_0^2)^2 + 4\xi^2\Omega_r^2}} = \frac{F_0}{\alpha\sqrt{\omega_0^2 - \xi^2}} \qquad (4.34)$$

Pour de très faibles amortissements **(** $\xi << \omega_0$ **),** l'amplitude maximale est égale à :

$$A_{max} \approx \frac{F_0}{\alpha\omega_0} \qquad (4.35)$$

La figure 4.3 illustre la variation du rapport de l'amplitude en fonction du rapport de la fréquence pour différentes valeurs de $\boldsymbol{\xi}$.

On définit le déplacement efficace comme suit:

$$|x|_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x(t)^2\,dt} \quad \Rightarrow \quad |x|_{eff} = \frac{A_{max}}{\sqrt{2}} \qquad (4.36)$$

Lorsque la fréquence des oscillations amorties est égale à la fréquence des oscillations forcées on assiste à des phénomènes de résonance.

La figure (4.4) représente la variation la phase en fonction du rapport de la fréquence pour différents valeurs de ξ .

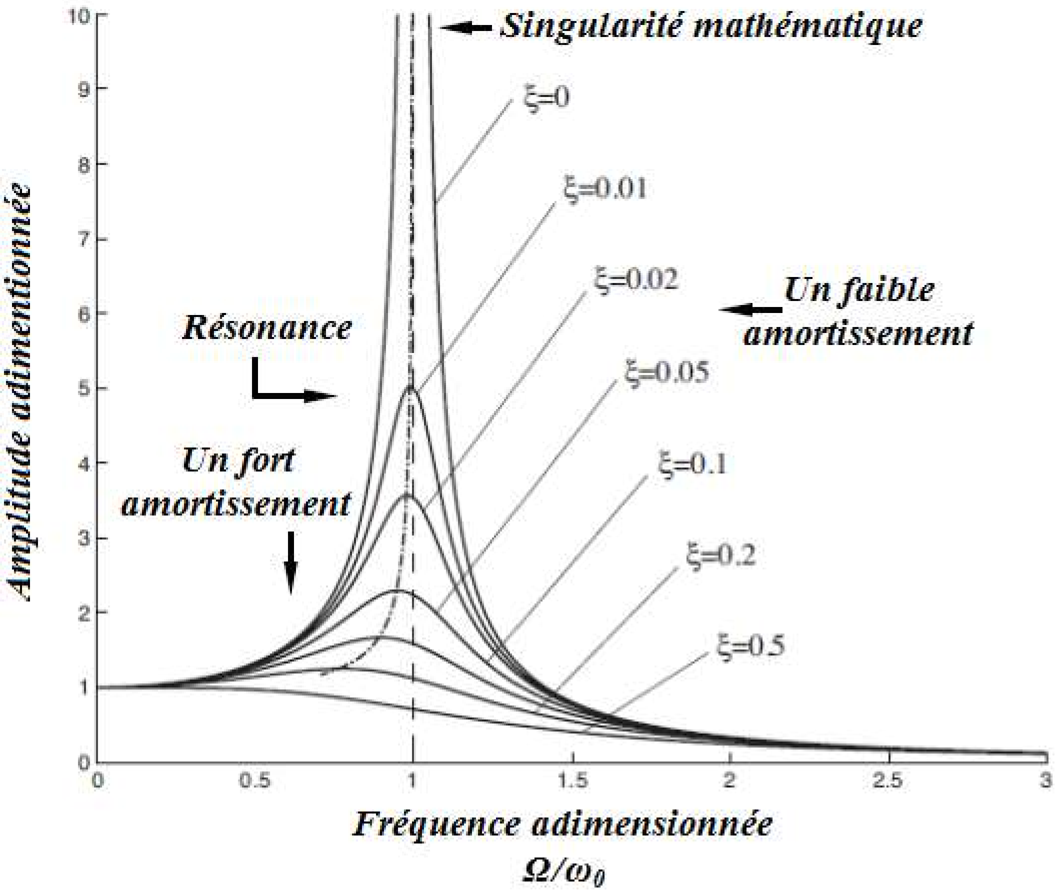


Figure 4.3 : L'amplitude du mouvement du système soumis à une force extérieure

4.3.1.a Dangers de la résonance :

Par l'accroissement considérable de l'amplitude des vitesses du résonateur, la résonance présente de graves inconvénients; en voici quelques exemples:

- les irrégularités de la route produisent secousses sur une voiture, à des intervalles concordant avec l'une de ses périodes d'oscillation propre sur ses ressorts d'où risques de rupture.
- Rupture d'arbres de machines: une machine mal équilibrée peut, en rotation, fonctionner comme système excitateur.
- Une pièce de machine ne doit pas vibrer à une fréquence trop proche de sa fréquence de résonance (sinon il peut y avoir rupture).

- L'effondrement du pont suspendu Tacome: un vent violent crée un ensemble complexe de forces qui engendrent des oscillations de torsion de fréquence correspondant à la fréquence de résonance du pont.
- Rupture du pont d'Angers en 1852 sous l'action d'une troupe au pas cadencé.

4.3.2 Étude de la phase en fonction de Ω :

En régime permanent l'oscillation présente une différence de phase $\varphi(\Omega)$ par rapport à la force excitatrice $F(t)$. En effet ,

$$tg(\varphi) = \frac{2\xi\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2} \tag{4.37}$$

En dérivant l'équation ci-dessus, on obtient

$$\frac{dtg(\varphi)}{d\Omega} = \frac{2\xi\left(\Omega^2 - \omega_0^2\right) - 2\xi\Omega(2\Omega)}{\left(\Omega^2 - \omega_0^2\right)^2} = -\frac{2\xi\left(\Omega^2 + \omega_0^2\right)}{\left(\Omega^2 - \omega_0^2\right)^2} \tag{4.38}$$

Mais on a aussi

$$\frac{dtg(\varphi)}{d\Omega} = \frac{dtg(\varphi)}{d\varphi}\frac{d\varphi}{d\Omega} \tag{4.39}$$

ou encore

$$\frac{d\varphi}{d\Omega} = \frac{\dfrac{dtg(\varphi)}{d\Omega}}{\dfrac{dtg(\varphi)}{d\varphi}} = -\frac{2\xi\left(\Omega^2 + \omega_0^2\right)}{\left(\Omega^2 - \omega_0^2\right)^2}\frac{1}{1 + tg^2(\varphi)} = -\frac{2\xi\left(\Omega^2 + \omega_0^2\right)}{\left(\Omega^2 - \omega_0^2\right)^2}\left(\frac{1}{1 + \dfrac{4\xi^2\Omega^2}{\left(\Omega^2 - \omega_0^2\right)^2}}\right) \tag{4.40}$$

Sur la figure (4.4), on trace la variation de la phase $\varphi(\Omega)$ opour différentes valeurs d'amortissement. On doit noter qu'à faibles pulsations extérieures la réponse est presque en phase avec la force extérieure, alors qu'elle augmente lorsque la pulsation augmente jusqu'à atteindre sa valeur maximale $\varphi = \pi$.

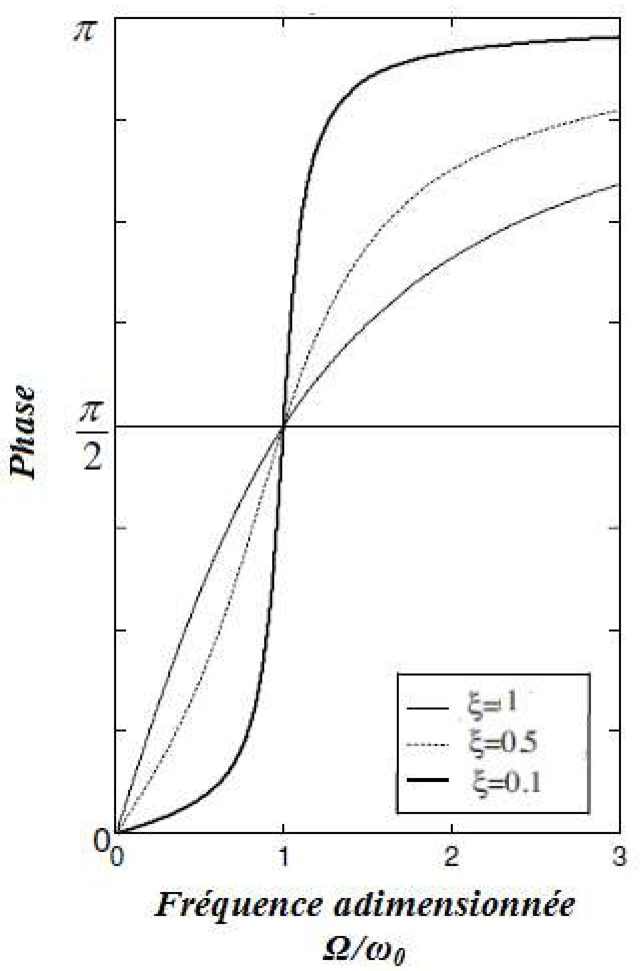


Figure 4.4 : La phase de la réponse par rapport à la force extérieure.

4.4 Bande passante:

On définit la largeur de la bande passante $\Delta\Omega$ comme suit:

$$\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 \tag{4.41}$$

où Ω_1 Ω_2 sont des pulsations correpondantes à une amplitude égale à:

$$\frac{A_{max}(\Omega_r)}{\sqrt{2}}$$

Le facteur de qualité Q pour un faible amortissement est donné par:

$$Q = \frac{\Omega_r}{\Omega_2 - \Omega_1} \tag{4.42}$$

4.5 Cas d'une force extérieure périodique non-sinusoidale:

Dans le cas d'une excitation *F(t)* quelconque mais périodique de période *T*, il est très utile d'utiliser le théorème de Fourier qui permet d'écrire toute fonction périodique satisfaisant à certaine conditions analytiques (pratiquement toujours réalisées en physique) sous la forme d'une série trigonométrique (ou série de Fourier) dont les termes ont des fréquences multiples de la fréquence de la fonction donnée, à savoir :

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t\right] \tag{4.43}$$

où $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ et les coefficients a_0, a_n et b_n sont déterminés comme suit :

$$\begin{cases} a_{,0} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T F(t)dt \\ a_{,n} = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T F(t)\cos n\Omega t dt \\ \quad et \\ b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_T^T F(t)\sin \Omega t dt \end{cases} \tag{4.44}$$

Si la fonction étudiée $F(t)$ n'est pas périodique, car, par exemple, définie juste sur un intervalle, on peut construire une fonction périodique $f(t)$ (faire un prolongement) définie dans l'intervalle $\left]-\infty,+\infty\right[$, et qui contient la partie repésentant $F(t)$.

La deuxième étape dans notre étude de la réponse d'un système mécanique (électrique) linéaire à une excitation non sinusoidale mais périodique est de faire recours au principe de superposition qui consiste à faire en sorte que la réponse d'un système linéaire à une somme d'excitations extérieures soit la somme des réponses du même système à chacune des excitations décomposant la force extérieure.

4.6 Énergies mises en jeu :

L'excitateur lors d'un déplacement dx fournit au système (masse+ressort) l'énergie:

$$dW = F(t).dx = F(t)\frac{dx}{dt}dt \tag{4.45}$$

où $P(t) = F(t).\dot{x}(t)$ est la puissance instantanée en régime permanent qui s'écrit :

$$P(t) = -F_0 \cos(\Omega t) A\Omega \sin(\Omega t - \varphi) \tag{4.46}$$

On calcule la moyenne temporelle de la puissance de la manière suivante :

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt = -\frac{F_0 A\Omega}{T}\int_0^T \cos(\Omega t)\sin(\Omega t - \varphi)dt = -\frac{F_0 A\Omega}{2}\sin\varphi \tag{4.47}$$

avec

$$T = \frac{2\pi}{\Omega}$$

D'autre part, on sait que

$$\sin\varphi = \frac{tg\varphi}{\sqrt{1+tg^2\varphi}}$$

et

$$tg\varphi = \frac{2\gamma\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}$$

Ce qui nous amène à écrire

$$\langle P(t) \rangle = -\frac{F_0 A\Omega}{2}\sin\varphi = \frac{F_0^2}{m}\frac{\gamma\Omega^2}{\left(\Omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\Omega^2\gamma^2} \tag{4.48}$$

On peut montrer que la puissance moyenne fournie par l'excitateur (ou puissance à l'entrée) est égale à la puissance perdue par frottement moyenne dans le temps. Pour cela on utilise à l'équation différentielle du système amorti forcé:

$$m\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) + kx(t) = F_0\cos(\Omega t) \tag{4.49}$$

multiplions les deux membres de l'équation par $\dot{x}(t)$:

$$m\dot{x}(t)\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t)\dot{x}(t) + k\dot{x}(t)x(t) = F_0 \cos(\Omega t)\dot{x}(t) \quad (4.50)$$

qui peut être écrite sous la forme:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) + \frac{1}{2}kx^2(t)\right] = F_0 \cos(\Omega t)\dot{x}(t) - \alpha\dot{x}^2(t) \quad (4.51)$$

où

$$E_T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) + \frac{1}{2}kx^2(t)$$

est l'énergie totale du système (l'énergie emmagasinée dans le système), pouvant s'écrire sous une forme plus explicite :

$$E_T = \frac{1}{2}m\Omega^2 A^2 \sin^2(\Omega t - \varphi) + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\Omega t - \varphi) \quad (4.52)$$

L'énergie totale n'est pas instantanément conservée.

Prenons la moyenne sur une période T de l'équation ci-dessus :

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{dE_T}{dt}dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[F_0 \cos(\Omega t)\dot{x}(t) - \alpha\dot{x}^2(t)\right]dt \quad (4.53)$$

Le premier membre de l'équation ci-dessus s'écrit

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{dE_T}{dt}dt = E_T(T) - E_T(0) = 0 \quad (4.54)$$

D'autre par

$$\frac{1}{T}\int_0^T \left[F_0 \cos(\Omega t)\dot{x}(t) - \alpha\dot{x}^2(t)\right]dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[-F_0\Omega A\cos(\Omega t)\sin(\Omega t - \varphi) - \alpha\Omega^2 A^2 \sin^2(\Omega t - \varphi)\right]dt$$

Le premier terme du second membre de l'équation ci-dessus représente la puissance moyenne fournie par l'excitateur, déjà calculée. Le second terme représente la puissance moyenne dissipée par le frottement. Le calcul mathématique nous permet de de vérifier que le second memebre est nul.

Donc **la puissance moyenne fournie par l'excitateur est égale à la puissance moyenne dissipée par frottement.** Alors que **la puissance instantanée fournie par l'excitateur est différente de la puissance instantanée dissipée par frottement** : l'énergie stockée par l'oscillateur n'est pas constante au cours du temps mais en faisant sa moyenne sur une période *T* on trouve qu'elle est constante.

4.7 Système électrique équivalent

Les deux systèmes d'oscillation :mécanique (masse+ ressort avec une force de frottement de type visqueux et soumis à une force extérieure sinusoidale) et électrique (RLC en série soumis à une tension sinusoidale) sont régis par deux équations différentilles de même nature (équation différentielle linéaire non homogène à coefficients constants). Cette similitude nous permet d'établir une analogie entre les éléments du système mécanique et celui du système électrique.

En effet, on considère le circuit oscillant R.L.C alimenté par une source de tension sinusoïdale *U(t)* telle que :

$$U(t) = U_0 e^{i\omega t} \tag{4.55}$$

La figure 4.5 illustre le schéma du circuit oscillant ***R.L.C*** en série alimenté par une source de tension extérieure ***U(t).***

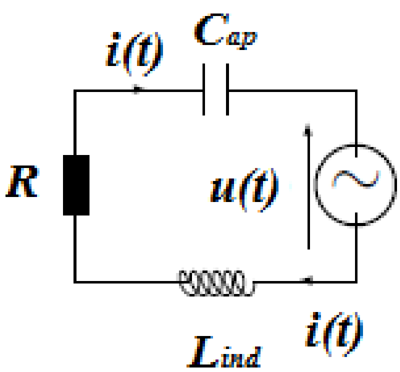


Figure 4.5 : Circuit oscillant R.L.C alimenté par une source de tension extérieure

Le bilan des tensions s'écrit :

$$L_{ind} \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C_{ap}} \int i(t)dt + Ri(t) = U(t) \tag{4.56}$$

Sachant que le courant *i(t)* pendant un temps *dt* apporte une charge telle que :

$$i(t)=\frac{dq(t)}{dt}$$

On obtient alors l'équation différentielle du mouvement comme suit :

$$L\ddot{q}(t)+R\dot{q}(t)+\frac{q(t)}{C}=U(t) \tag{4.57}$$

On remarque que cette équation est équivalente à l'équation d'un mouvement oscillatoire forcé, à savoir:

$$\ddot{q}(t)+\frac{R}{L}\dot{q}(t)+\frac{q(t)}{LC}=\frac{U(t)}{L} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x}(t)+\frac{\alpha}{m}\dot{x}(t)+\frac{k}{m}x(t)=\frac{F(t)}{m}$$

On peut conclure que l'analogie entre le système mécanique et le système électrique est de la forme suivante:

$$\begin{cases} L_{ind} & \Leftrightarrow & m \\ q(t) & \Leftrightarrow & x(t) \\ \dfrac{1}{c_{ap}} & \Leftrightarrow & k \end{cases} \quad et \quad \begin{matrix} R & \Leftrightarrow & \alpha \\ U(t) & \Leftrightarrow & F(t) \end{matrix}$$

4.8 Effet POGO

L'*effet POGO* est, en mécanique des structures, un phénomène oscillatoire longitudinal instable qui peut se produire dans les étages à ergols liquides d'un lanceur générant des chocs pouvant détruire le lanceur ou sa charge. Cet effet est provoqué par des fluctuations de poussée du moteur qui engendrent des vibrations de structure et des colonnes du carburant liquide qui, à leur tour, se répercutent sur l'alimentation du moteur. Lorsque ce cycle de perturbations entre en résonance, les oscillations augmentent et peuvent détruire les structures. Le nom provient du jeu appelé Pogo stick. Cet effet a été à l'origine de la destruction de plusieurs fusées et satellites,

Figure 6.4 : Le jouet POGO-Stick

Figure 7.4 : Mécanisme rencontré dans un réservoir de liquide
Soumis à des vibrations

Considérons le système mécanique suivant :

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$
$$x(0) = x_0 \qquad et \quad \dot{x}(0) = v_0$$

Sachant que *F(t)* représente l'excitation permanente et (x_0 ; v_0) représentent les conditions initiales en position et en vitesse.

Pour une excitation permanente de forme sinusoïdale, on a :

$$F(t) = F_0 \sin \Omega t$$

La solution de l'équation différentielle est de la forme:

$$x(t) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\left|\Omega^2 - \omega_0^2\right|} \sin \omega t$$

On remarque que la solution prend une valeur infinie lorsque $\Omega=\omega_0$ d'où l'apparition du phénomène de résonance de **POGO.**

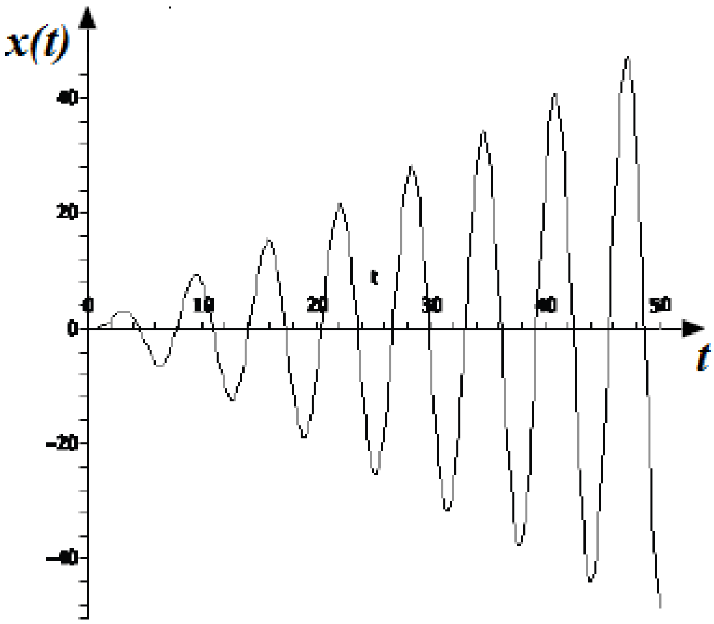


Figure 8.4 : Evolution temporelle de *x(t)*

On peut citer un autre exemple du phénomène de résonnance. Il s'agit d'un ventilateur accroché au plafond d'une pièce tournant à une vitesse de rotation ω_0. Il apparaitra dans ce cas le phénomène de résonance si le mode propre des vibrations du plafond est très proche de la pulsation ω_0 et se traduira par un bruit désagréable.

4.9 Système électrodynamique: le haut-parleur

Le haut-parleur est constitué d'une membrane qui, en vibrant, fait osciller les molécules d'air. C'est ainsi que le son est créé, se propage jusqu'à l'oreille et fait vibrer le tympan. Le coeur du haut parleur est constitué d'un aimant qui crée un champ magnétique et d'une bobine de fil conducteur électrique. Ainsi lorsque le courant passe dans la bobine celle-ci bouge et fait bouger la membrane du haut parleur.
Ainsi, si on branche le haut-parleur à une source d'énergie électrique, on observe un déplacement de la membrane sous l'action de la force (dite Force de Laplace). Cette force résulte de l'action du champ magnétique sur le courant électrique qui traverse la bobine.

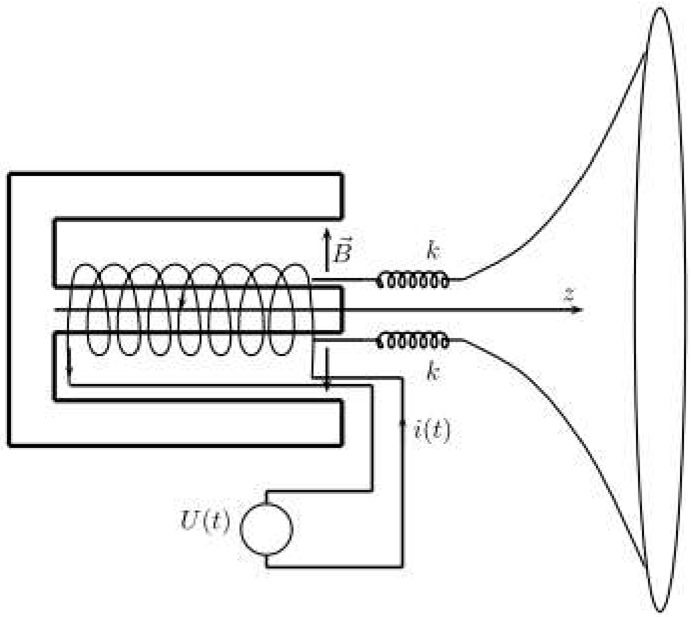


Figure 4.9 :Schéma d'un haut parleur

Dans la réalité c'est un courant alternatif qui est utilisé pour faire osciller la membrane et créer le son.
Le haut parleur est un dispositif électro-mécanique qui transforme un signal électrique en une vibration mécanique (vibration sonore). Il est appelé transducteur électromagnétique qui transforme une énergie mécanique en une énergie électrique ou inversement.

Le système comporte une bobine de masse $\boldsymbol{m}$, d'inductance propre $\boldsymbol{L}$, susceptible de se translater le long d'un axe $\boldsymbol{z}$. La bobine est insérée dans un circuit électrique (courant électrique i)pouvant comporter un générateur de tension de valeur $\boldsymbol{E(t)}$ et une résistance R (incluant la résistance de la bobine). D'un point de vue mécanique, la bobine, placée dans un champ d'induction magnétique radial $\vec{B}$, est reliée à la membrane du haut parleur. Elle subit de ce fait :

- une force motrice: $F_m = Bil$ où l est la longueur du fil électrique.
- une force de rappel: $F_r = -kx$ exercée par la membrane.
- une force de freinage: $F_f = -\beta\dot{x}$.

Le champ magnétique stationnaire uniforme créé dans l'entrefer d'un aimant annulaire possédant une symétrie de révolution autour de l'axe z : le champ créé est de la forme $\vec{B} = B\vec{u}_r$

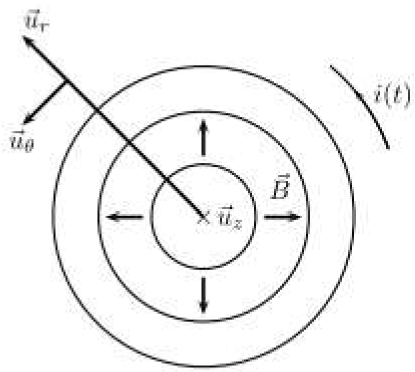


Figure 4.9 : Champ magnétique dans la bobine

Quand la bobine est alimentée par $E(t)$, le courant qui y circule lui fait subir une force de Laplace et la bobine se déplace engendrant alors un mouvement de la membrane, « excitée » par la seule bobine, et qui émet alors des ondes sonores: c'est le fonctionnement en haut-parleur. Inversement, en l'absence de générateur, une force exercée sur la membrane provoque le déplacement de la bobine et la création d'un courant par induction: c'est le fonctionnement en microphone.

La bobine subit une force de Laplace donnée par:

$$\vec{F}_L = \int i\left(d\vec{l} \wedge \vec{B}\right) = \int idlB\left(\vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_r\right) = -ilB\vec{u}_z \tag{4.58}$$

La longueur l représente la longueur totale du fil bobiné, soit $l = N2\pi a$, si la bobine comporte N spires de rayon a.

L'équation du mouvement de la partie mobile de masse m est donc:

$$m\ddot{z} + \beta\dot{z} + kz = -Bil$$

soit

$$m\ddot{z} + \beta\dot{z} + k\int v dt = -Bil \tag{4.59}$$

où v est la vitesse de la bobine.

D'autre part, la bobine est le siège d'une (f.e.m) donnée par:

$$e_i = \int_{bobine}\left(\vec{v} \wedge \vec{B}\right)d\vec{l} = \int_{bobine}\left(v\vec{u}_z \wedge B\vec{u}_r\right)dl\vec{u}_\theta = \int_{bobine} vBdl\left(\vec{u}_z \wedge \vec{u}_r\right).\vec{u}_\theta = vBl \tag{4.60}$$

La loi d'Ohm permet d'écrire:

$$U + e_i = L\frac{di}{dt} + Ri \tag{4.61}$$

U est la différence de potentiel aux bornes de la bobine et e_i la force électromotrice induite (f.e.m) par le déplacement d'un fil conducteur (bobine) dans un champ magnétique.

On peut voir la chose de la manière suivante: le flux coupé par un élément de longueur dl du fil au cours d'un déplacement dz de la partie mobile est $Bdldz$ et le flux total:

$$d\Phi = Bldz \tag{4.62}$$

Il en résulte une (f.e.m) induite:

$$e_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -Blv \tag{4.63}$$

L'équation de la somme des tensions dans le circuit fermé s'écrit donc:

$$U = -Blv + L\frac{di}{dt} + Ri$$

Soit

$$U + Blv = L\frac{di}{dt} + Ri \tag{4.64}$$

Les deux équations ci-dessus couplent les variables v et i du problème.

Si la d.d.p (différence de potentiel) est une fonction sinusoïdale du temps:

$$U(t) = U_0\sqrt{2}e^{j\omega t} \tag{4.65}$$

le courant s'écrit

$$i(t) = I_0\sqrt{2}e^{j(\omega t-\varphi)} = \bar{I}_0\sqrt{2}e^{j\omega t} \tag{4.66}$$

et la vitesse de la bobine:

$$v(t) = V_0\sqrt{2}e^{j(\omega t-\theta)} = \bar{V}_0\sqrt{2}e^{j\omega t} \tag{4.67}$$

En remplaçant v et i par leurs valeurs on obtient:

$$\left(jm\omega + \beta - j\frac{k}{m}\right)\bar{V}_0 = -Bl\bar{I}_0 \tag{4.68}$$

La représentation complexe a permis de mettre en évidence l'impédance mécanique:

$$\bar{Z}_m = \beta + j\left(m\omega - \frac{k}{m}\right) \tag{4.69}$$

On peut alors écrire:

$$\bar{V}_0 = -Bl\frac{\bar{I}_0}{\bar{Z}_m} \tag{4.70}$$

L'équation ci-dessus devient:

$$\bar{U} = -B^2l^2\frac{\bar{I}}{\bar{Z}_m} + (jL\omega + R)\bar{I} \tag{4.71}$$

$\bar{Z} = jL\omega + R$ est l'impédance électrique de la bobine. D'où

$$\bar{U} = \left(\frac{-B^2l^2}{\bar{Z}_m} + \bar{Z}\right)\bar{I} \tag{4.72}$$

Notons que $\bar{Z}_{mot} = \frac{-B^2 l^2}{\bar{Z}_m}$ a les dimensions d'une impédance électrique; c'est l'impédance motionnelle. On peut écrire

$$\bar{U} = \bar{Z}_e \bar{I} \tag{4.73}$$

$\bar{Z}_e$ est l'impédance d'entrée du haut parleur, égale à $R - \frac{B^2 l^2}{\bar{Z}_m} + jL\omega$ ou encore

$$\bar{Z}_e = R - \frac{B^2 l^2}{\beta + j\left(m\omega - \frac{k}{m}\right)} + jL\omega \tag{4.74}$$

Nous pouvons alors définir une « efficacité » du haut-parleur comme le quotient:

$$\frac{\bar{V}}{\bar{U}} = -\frac{Bl}{\bar{Z}_m \bar{Z}_e} \tag{4.75}$$

Cette efficacité dépend de la fréquence, ce qui indique que le haut -parleur ne restitue pas toutes les fréquences (donc tous les sons) de la même façon.

Il faut retenir que :

- L'oscillation forcée est régie par l'équation différentielle :

$$\ddot{p}(t) + 2\xi\dot{p}(t) + \omega_0^2\, p(t) = h(t)$$

- Il existe deux régimes :
  - ***Le régime transitoire*** *:*

    La solution totale du système est :

$$p(t) = p_g(t) + p_p(t)$$

Où $p_g(t)$ et $p_p(t)$ représentent respectivement la solution générale la solution particulière

  - ***Le régime permanent caractérisé par le phénomène :***

    « <u>La résonance</u> »

    la solution du système est de la forme :

$$p(t) = p_p(t)$$

  - Il faut signaler que la force extérieure absorbe les pertes du système due aux forces de frottements.

Travail pratique

Système amorti forcé : pendule de Pohl

Mots clés :

Fréquence angulaire, fréquence caractéristique, fréquence de résonance, pendule de torsion, vibrations de torsion, couple et le couple de rappel, oscillations libres amorties et non amorties, oscillations forcées, coefficient d'atténuation, décrément, constante d'amortissement, décrément logarithmique, cas apériodique, cas limite apériodique.

Principe de l'expérience:

Si on laisse un système oscillant osciller librement, on observe que la diminution des amplitudes maximales successives est fortement dépendante de l'amortissement. Si le système oscillant est excité par un couple extérieur périodique, on observe qu'à l'état d'équilibre l'amplitude dépend de la fréquence et de l'amplitude, du couple extérieur périodique et de l'amortissement. La fréquence caractéristique des oscillations libres ainsi que la courbe de résonance des oscillations forcées pour différentes valeurs d'amortissement seront déterminées.

Liste du matériel:

Pendule de torsion selon Pohl

Transformateur réglable 25V AC / 20V DC, 12A

Redresseur en pont, 30 V AC / 1 à cc

Multimètre numérique 2010

Chronomètre numérique, 1 / 100 s

Fil de connexion, 32 A, 750 mm, rouge

Fil de connexion, 32 A, 750 mm, bleu

Fil de connexion, 32 A, 250 mm, jaune

Figure 4.9 : montage du pendule de Pohl

Objectifs:

A. Oscillation libre amorties:

1- Déterminer la période d'oscillation et la fréquence caractéristique dans le cas d'oscillations non amorties.

2- Déterminer la période d'oscillation et la fréquence caractéristique correspondante pour différentes valeurs d'amortissement. Les amplitudes maximales successives et unidirectionnelles seront représentées graphiquement en fonction du temps. Le coefficient d'atténuation, la constante d'amortissement et le décrément logarithmique correspondants seront calculés.

3- Réaliser le cas apériodique et le cas limite apériodique.

B. Oscillation forcée:

1- Déterminer et représenter graphiquement les courbes de résonance à l'aide des valeurs d'amortissement de l'amplitude.

2- Déterminer les fréquences de résonance et les comparer avec les valeurs de la fréquence de résonance déjà calculées.

3- Observer le déphasage entre le pendule de torsion et le couple extérieur de stimulation pour une faible valeur d'amortissement, pour autant que, dans un premier cas, la fréquence de stimulation soit largement inférieure à la fréquence de résonance et que, dans un autre cas, elle soit largement supérieure.

Montage:

Un pendule de Pohl est constitué d'un:

1- disque en rotation autour de son centre.

2- ressort spiral, qui exerce un couple mécanique qui tend à ramener le disque vers sa position d'équilibre.

3- pointeur placé sur le disque qui permet de repérer les écarts angulaires.

4- moteur, relié au ressort spiral, qui force les oscillations à une fréquence ajustable par l'utilisateur.

5- frein électromagnétique, permettant de régler l'effet d'amortissement (par courants de Foucault).

L'unité d'alimentation en énergie est connectée à un moteur à courant continu. Le frein à courants de Foucault doit être également connecté à une tension continue. Pour cette raison, un redresseur est inséré entre la sortie de l'unité d'alimentation et l'entrée du frein à courants de Foucault. Le courant continu fourni au frein à courants de Foucault, I_B, est indiqué par l'ampèremètre.

Étude théorique:

A. **Oscillation libre amortie**:

Chapitre 4: Mouvement forcé à un degré de liberté

Le système est modélisé comme un système libre amorti, où un disque de moment d'inertie I_z par rapport à l'axe de rotation passant par son centre subit:

a- un couple mécanique d'un ressort spiral proportionnel à l'angle de rotation ϕ.

b- un couple de freinage électromagnétique proportionnel à la vitesse angulaire $\dot{\phi}$.

1- Montrer que l'équation différentielle de mouvement du disque s'écrit comme:

$$I_z\ddot{\phi} + D\dot{\phi} + C\phi = 0$$

où D est un coefficient de proportionnalité qui dépend du courant alimentant le freinage du disque et C le coefficient de torsion du ressort.

2- En définissant les quantités suivantes:

- facteur d'amortissement: $\gamma = \dfrac{D}{2I_z}$.
- pulsation propre du système non amorti: $\omega_0 = \dfrac{C}{I_z}$

montrer que l'équation de mouvement ci-dessus devient:

$$\ddot{\phi} + 2\gamma\dot{\phi} + \omega_0^2\phi = 0$$

3- Quels types de solutions cette équation admet-elle?

4- Montrer que la solution de l'équation ci-dessus s'écrit sous la forme ($\gamma < \omega_0$):

$$\phi(t) = \phi_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega_a t + \theta)$$

avec $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$.

5- Quel sens physique peut-on donner à: ω_a , ϕ_0 et θ.

6- Commenter le comportement du système.

7- Montrer que le rapport entre deux amplitudes consécutives est donné par:

$$K = \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} = e^{\gamma T_a}$$

où $T_a = \dfrac{2\pi}{\omega_a}$ est la pseudo-période et K. On définit le décrément logarithmique Λ comme:

$$\Lambda = \ln K = \ln \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} = \gamma T_a$$

B. oscillation forcée:

Le pendule est maintenant soumis à un couple périodique $M_a(t) = M_0 \cos(\Omega t)$.

1- Montrer que l'équation différentielle du mouvent s'écrit:

$$\ddot{\phi} + 2\gamma\dot{\phi} + \omega_0^2\phi = \frac{M_0}{I_z}\cos(\Omega t)$$

2- Montrer qu'en régime permanent la solution de cette équation s'écrit:

$$\phi_p(t) = A(\Omega)\cos(\Omega t - \varphi(\Omega))$$

avec

$$A(\Omega) = \frac{M_0}{I_z}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}$$

et

$$\varphi(\Omega) = arctg\left(\frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$$

Étude expérimentale:

1- Détermination de la fréquence propre du système

Pour déterminer la pulsation propre ω_0 du pendule de torsion sans amortissement I_B, le temps pendant une oscillation complète est mesuré à trois reprises pour trois différentes valeurs d'amplitudes (18, 14 et 10) et la valeur moyenne de la période T_0 est calculée.

N°				T_0^{Moy}	ΔT_0^{Moy}
$T_0(s)$					

1- Écrire la valeur de la pulsation propre sous la forme: $\omega_0 = (\quad \pm \quad)$ (unité).

2- La valeur mesurée de ω_0 représente-t-elle la valeur exacte de la pulsation propre du système? Expliquer.

3- La valeur de ω_0 est-elle la même pour les trois amplitudes? Que peut-on conclure?

2- Oscillation libre amortie :

De la même manière, les fréquences caractéristiques pour les oscillations amorties sont mesurées en utilisant les intensités suivantes pour le frein à courants de Foucault:

$$I_B \approx 0.25A, (U = 4V)$$

$$I_B \approx 0.55A, (U = 8V)$$

$$I_B \approx 0.90A, (U = 12V)$$

Pour déterminer les valeurs d'amortissement pour les cas mentionnés ci-dessus la baisse en amplitude (en unité de graduation) est mesurée en déviant à la main le pointeur du pendule à la valeur 18 tout en prélevant les valeurs des amplitudes successives de rotation ainsi que les temps de passage jusqu'à ce que le mouvement du disque s'évanouisse complètement.

Au départ, il faut veiller à ce que le pointeur du pendule au repos coïncide avec la position zéro de l'échelle. Ceci peut être réalisé en faisant tourner le disque excentrique du moteur.

1- Pour chaque valeur de l'intensité du courant, compléter le tableau suivant:

temps								
$\phi(t)$								

2- Tracer sur la même feuille millimétrée les amplitudes d'oscillations en fonction du temps pour chaque valeur d'intensité du courant électrique.

3- Que peut-on dire de la nature du mouvement exécuté par le système?

4- Vérifier si le dispositif à votre disposition peut permettre au disque d'exécuter un mouvement apériodique.

5- Proposer une méthode graphique qui permet de mesurer la valeur de γ en se basant sur les valeurs du tableau ci-dessus.

6- Compléter le tableau suivant:

$I_B(A)$	$T_a(s)$	K	$\gamma(s^{-1})$	ω_a	Λ
0.25					

0.55					
0.90					

3- Oscillation amortie forcée :

Pour l'étude de la réponse du système à une excitation externe, on utilise un moteur à courant continu qui va fournir un moment de force à une amplitude constante et une fréquence réglable. La tension U de l'unité d'alimentation en courant continu doit être réglée au maximum. La fréquence d'excitation Ω est augmentée au moyen d'un potentiomètre de calibres différents. La tension U_{mot} délivrée par le moteur est prise comme échelle de variation des fréquences du moteur.

\begin{enumerate}

1- Pour les valeurs d'intensité suivantes $I_B = 0.25, 0.40$ ampères, varier les valeurs des fréquences Ω du moteur et reporter les amplitudes de rotation du disque dans le tableau suivant:

$U_{mot}(V)$										
$\Omega(rad.s^{-1})$										
ϕ										

2- Vérifier que le disque met du temps avant de passer à un mouvement harmonique de pulsation égale à celle de la roue du moteur. Qu'appelle-t-on ce régime?

3- Tracer sur la même feuille millimétrée les amplitudes d'oscillations en fonction de Ω pour chaque valeur d'intensité I_B.

4- Définir pour chaque cas d'amortissement la valeur de Ω pour laquelle l'amplitude est maximale.

5- Qu'appelle-t-on cette pulsation?

6- Dans le cas d'un amortissement nul, faites exécuter au système un mouvement forcé à une pulsation égale à la pulsation propre du système. Que peut-on conclure?

7- Proposer une méthode pratique pour la mesure du déphasage entre l'excitation du moteur et la réponse du disque.

Applications

Problème 1:

Soit un immeuble A modélisé par le système physique représenté par une masse m et un ressort de raideur k subit à un mouvement sismique sinusoïdal d'amplitude A de la forme $x_s = A\cos\omega t$ représenté dans la figure 9.4 comme suit:

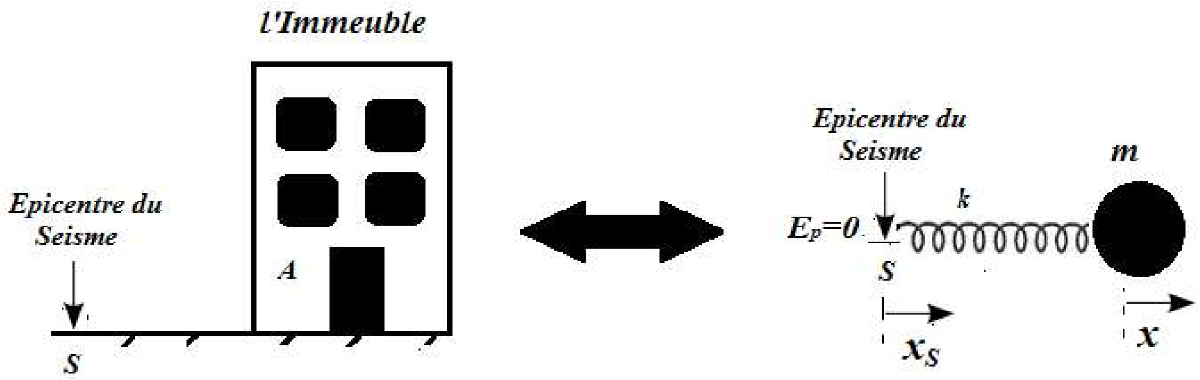


Figure 9.4 : Modélisation d'un mouvement sismique

- Déterminer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système.
- En déduire le Lagrangien du système.
- Etablir l'équation différentielle du système
- Quelle est dans ce cas la réponse du système. Justifier le résultat.

<u>Solution:</u>

- Le Lagrangien du système :
  - ✓ L'énergie cinétique s'écrit:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

  - ✓ L'énergie potentielle s'exprime:

$$E_p = \frac{1}{2}k(x - x_s)^2$$

  - ✓ Le Lagrangien du système s'écrit alors :

$$L(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k(x - x_s)^2$$

  - ✓ L'équation différentielle est de la forme :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \sum \overline{F}_{ext} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{A}{m}\cos\omega t$$

D'où :

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) == R_e\left\{\frac{A}{m}e^{j\omega t}\right\}$$

avec

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

- ✓ La solution de cette équation est de la forme :

$$x(t) = x_p(t) = X_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$$

En remplaçant dans l'équation de mouvement, on détermine l'amplitude de la réponse comme suit :

$$X_0(\omega) = \frac{\frac{a}{m}}{\left|\omega^2 - \omega_0^2\right|}$$

Le système présente une singularité au point $\omega = \omega_0$ comme le montre la figure (4.10):

$$X_0(\omega) \to \infty \quad lorsque \quad \omega \to \omega_0$$

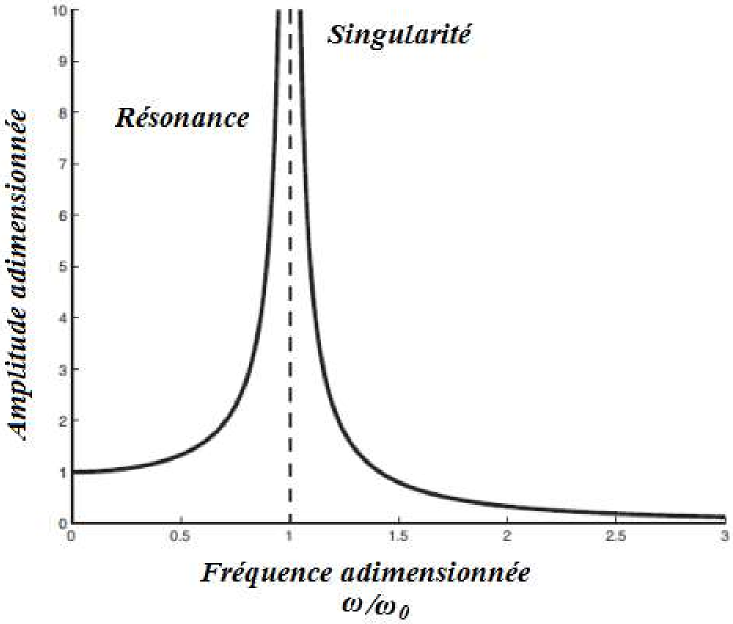
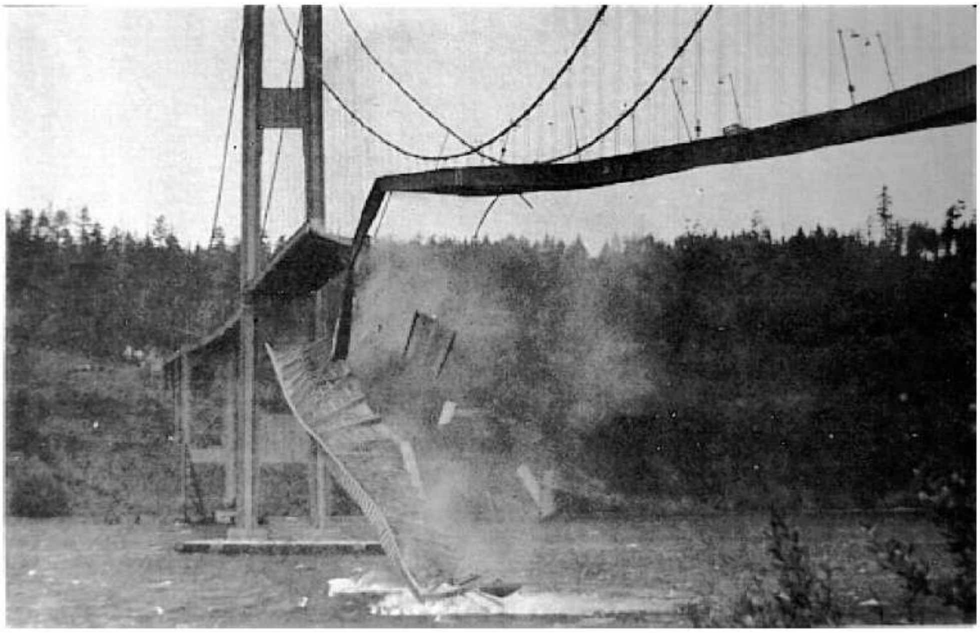


Figure 4.10: Phénomène de résonance.
Singularité à la fréquence propre du système

- ✓ L'immeuble va s'effondrer face au séisme car le système oscille à sa pulsation propre. On appelle ce phénomène la résonance. On se propose dans ce cas-là de mettre en place un moyen d'amortir les oscillations extérieures du système qui se traduit par une force de frottement visqueuse.
- ✓ Un exemple d'application est illustré dans la figure 4.11



✓ **Figure 4.11: Phénomène de résonance du pont de Tacoma aux U.S.A – Le 7 novembre 1940. « Effondrement du pont »**

Problème 2:

Soit le circuit forme par l'association parallèle R, L_{ind}, C_{ap} et alimente par une source de courant sinusoïdale délivrant un courant d'intensité $i(t) = i_0\sqrt{2}\cos\omega t$ comme le montre la figure 4.12 ci-dessous.

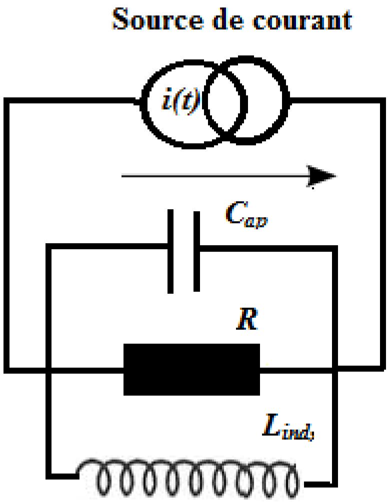


Figure 12.4 : Circuit R.L.C en parallèle

- Exprimer la tension complexe u aux bornes de l'association parallèle en fonction de ω, i_0, et des paramètres du circuit.

  On pose les constantes suivantes :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L_{ind}C_{ap}}, \; x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Et on définit le facteur de qualité du circuit comme suit :

$$Q = RC_{ap}\omega_0$$

- Exprimer le module de la tension u aux bornes de l'association parallèle en fonction de R, i_0, Q et x.
- Montrer que u passe par un maximum u_{max} pour une valeur de x à déterminer.
- Représenter sommairement $f(x) = \frac{u}{u_{max}}$ en fonction de x.
- Que retrouve t- on ?
- Calculer la largeur de la bande passante.

Solution :

- La tension complexe u du système est de forme :

$$u(t) = \tilde{Z}_{équi}i(t)$$

D'ou le courant est égale a **:**

$$i(t) = \frac{u(t)}{\tilde{Z}_{équi}}$$

Soit $\tilde{Z}_{équi}$ l'impédance complexe équivalente du circuit R.L.C en parallèle qui se calcule comme suit :

Avec :

$$\frac{1}{\tilde{Z}_{équi}} = \frac{1}{R} + jC_{ap}\omega + \frac{1}{jL_{ind}\omega}$$

D'où la tension est égale à :

$$u(t) = \frac{Ri(t)}{1 + jR(C_{ap}\omega - \frac{1}{L_{ind}\omega})}$$

- Le module de la tension s'écrit alors :

$$|u(t)| = \frac{Ri_0\sqrt{2}}{\sqrt{1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2}}$$

- On constate que :

$$u = u_{max} = Ri_0\sqrt{2} \quad lorsque \quad x = 1$$

- Le schéma de la fonction $f(x) = \dfrac{u}{u_{max}}$ est représenté dans la figure 4.9 comme suit :

$$f(x) = \frac{u}{u_{max}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2}}$$

On obtient la résonnance lorsque x=1, c'est-à-dire :

$$f(x) = 1 \quad si \quad x = 1 \Rightarrow \quad Résonance$$

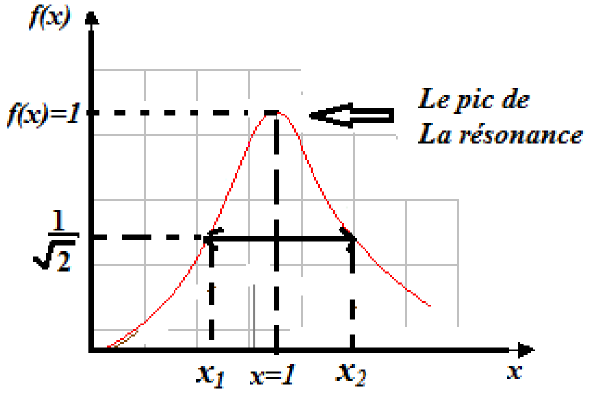


Figure 4.13: Phénomène de résonnance en tension dans le circuit R.L.C en parallèle

- La bande passante $\Delta\omega$ se calcule comme suit :

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

En résolvant l'équation paramétrique suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2}}$$

Après transformation on obtient la largeur réelle de la bande passante devient alors:

$$\Delta\omega = \omega_0 \Delta x \quad d'où \quad \Delta\omega = \frac{1}{RC}$$

Problème 3:

On considère un système de réception radio modélisé par un circuit R, L_{ind}, C_{ap} en série et alimenté par une source de tension sinusoïdale d'intensité $u(t) = u_0 \cos \omega t$ comme le montre la figure 14.4 ci-dessous.

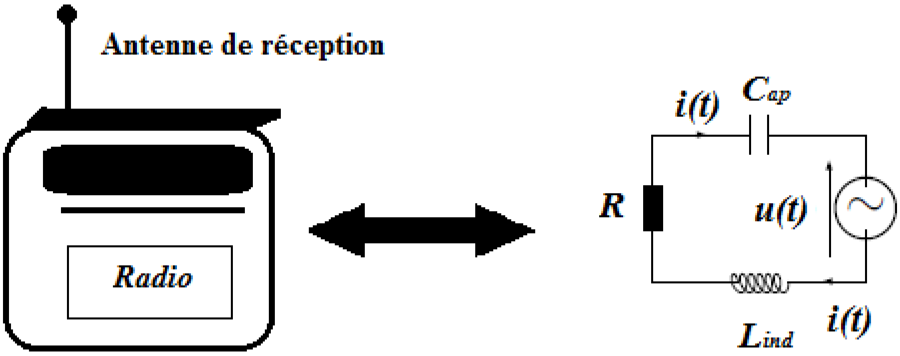


Figure 4.14: Circuit R.L.C en Série

- Déterminer l'impédance totale du système.
- En déduire le module du courant parcourue par le circuit en fonction des paramètres R, L_{ind}, C_{ap} et ω.
- Etudier les variations du module de courant en fonction de ω
- Trouver la fréquence de résonance. En déduire le courant maximum.
- Etablir la bande passante et le facteur de qualité en fonction des paramètres du circuit R, L_{ind} , C_{ap} et ω.
- Donner une explication du fonctionnement de ce système.

Solution:

- Le circuit est en série. On peut donc le schématiser comme suit :

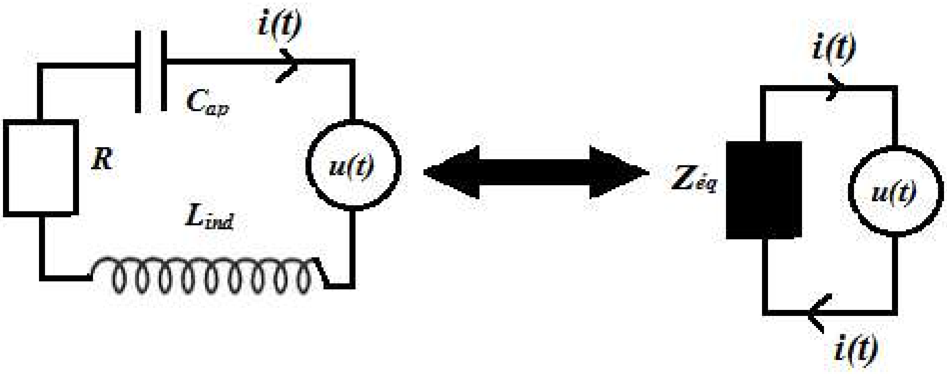


Figure 4.15: Circuit RLC en série équivalent

- ✓ L'impédance équivalente totale est égale à :

$$\tilde{Z}_{éq} = R + j(L_{ind}\omega - \frac{1}{C_{ap}\omega})$$

- Le module du courant s'écrit :

$$I_0(\omega) = \frac{|u(t)|}{|\tilde{Z}_{éq}|} = \frac{u_0}{\sqrt{R^2 + (L_{ind}\omega - \frac{1}{C_{ap}\omega})^2}}$$

- ✓ Les variations du module du courant sont :

le module du courant maximum est égale à :

$$I_{0\,max} = \frac{u_0}{R}$$

Lorsqu'on a le module du dénominateur est minimum, c'est-à-dire :

$$L_{ind}\omega - \frac{1}{C_{ap}\omega} = 0$$

- ✓ On obtient alors la valeur de Ω_r

$$\Omega_r = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_{ind}C_{ap}}}$$

Où Ω_r est appelée la pulsation de résonance qui ne dépend que de l'inductance et de la capacité.

- La figure (4.14) représente l'allure I_0 en fonction de ω :

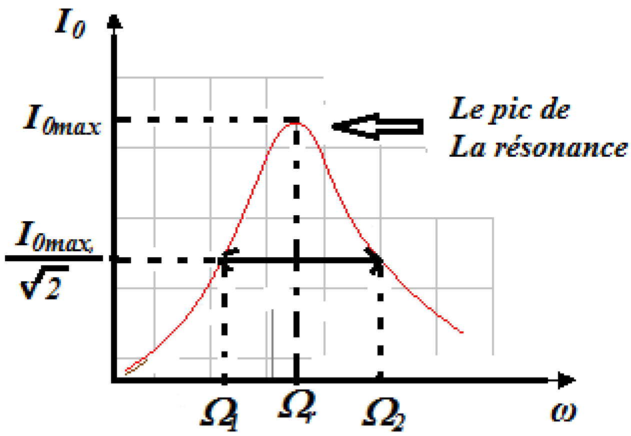


Figure 4.16: Phénomène de résonance en courant dans le circuit R.L.C en série

- La bande passante est définie comme:

$$\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$$

- ✓ En résolvant l'équation paramétrique suivante**:**

$$\frac{|I_{0\,max}|}{|\sqrt{2}|} = \frac{u_0}{\sqrt{R^2 + (L_{ind}\omega - \dfrac{1}{C_{ap}\omega})^2}}$$

- ✓ On obtient :

$$\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 = \frac{R}{L_{ind}}$$

- ✓ Le facteur de qualité s'écrit

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\Omega} = \frac{L_{ind}\omega_0}{R}$$

- L'application technique de ce phénomène est la sélection des fréquences de résonance pour différentes stations de radio.

Problème 4:

On définit le modèle d'un oscillateur harmonique, montré sur la figure 4.17, représentée par une masse *m* placée dans un potentiel élastique de type : $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ Cette masse est soumise à une force de frottement visqueuse et dont le coefficient de frottement est α.

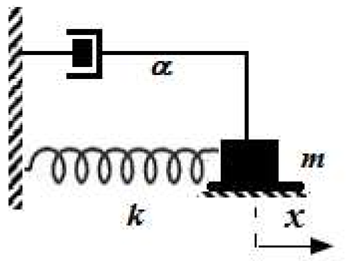


Figure 17.4 : Modèle physique d'un amortisseur

***Parti A :*:**

Dans le cas des oscillations libres

- Déterminer le Lagrangien du système.
- Etablir l'équation du mouvement.
- En déduire la solution générale avec les conditions initiales suivantes :

$$x(t=0)=0 \text{ et } \dot{x}(t=0)=v_0 .$$

Partie B:

On admet que les frottements existent, la masse *m* effectue des oscillations forcées sous l'effet d'une force sinusoïdale de la forme :

$$F(t)=F_0\cos\Omega t$$

On admet que la vitesse du mobile est de forme :

$$v(t)=v_0\cos(\Omega t-\varphi)$$

- Établir l'équation du mouvement.
- Résoudre l'équation différentielle en régime permanent.
- Déterminer l'impédance mécanique complexe définie comme le rapport entre la force appliquée et la vitesse du mobile.
- Comparer le résultat avec le système électrique.

Solution:

Mode libre :

- Le Lagrangien du système s'écrit :

✓ Pour l'énergie cinétique on a :

$$E_c = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$$

- ✓ Et pour l'énergie cinétique on a

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2$$

Alors, le Lagrangien du système s'écrit :

$$L(x,\dot{x}) = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2$$

- L'équation du mouvement :

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad avec \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

- La solution générale est de la forme :

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

Mode forcé :

- L'équation du mouvement s'écrit sous la forme:

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F(t)$$

D'où

$$\ddot{x} + 2\xi\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m} \quad avec \quad \begin{aligned} 2\xi &= \frac{\alpha}{m} \\ \omega_0^2 &= \frac{k}{m} \end{aligned}$$

C'est une équation différentielle inhomogène linéaire, d'un mouvement force.

- La résolution de cette équation différentielle en régime permanent est :

$$x(t) = x_p(t) = A\cos(\Omega t - \varphi) = R_e A e^{j(\Omega t - \varphi)}$$

Soient A l'amplitude de la solution et φ son argument.

- ✓ En remplaçant dans l'équation différentielle et après le calcul, on obtient

Le module d'amplitude suivant :

$$A(\Omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}}$$

Et la phase du mouvement comme suit :

$$\tan\varphi = \frac{-2\lambda\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}$$

- ✓ Les variations de $A(\Omega)$ sont déterminées par :

$$\frac{dA(\Omega)}{d\Omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega = \Omega_r = \sqrt{\omega_\circ^2 - 2\lambda^2}$$

Cette pulsation est appelée la pulsation de résonance.

- L'impédance complexe est définit comme suit :

$$\tilde{Z}_{mécani} = \frac{F(t)}{v(t)}$$

En remplaçant dans l'équation du mouvement, on obtient:

$$\tilde{Z}_{mécani} = \alpha + j(m\Omega - \frac{k}{\Omega})$$

- Pour le système électrique, le résultat est donné comme suit:

$$\tilde{Z}_{électri} = \frac{u(t)}{i(t)} \quad \Rightarrow \quad \tilde{Z}_{électri} = R + j(L_{ind}\Omega - \frac{1}{C_{ap}\Omega})$$

- On conclue donc les équivalences entre le système mécanique et le système électrique comme suit :

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \Leftrightarrow & R \\ m & \Leftrightarrow & L_{ind} \\ k & \Leftrightarrow & \dfrac{1}{C_{ap}} \end{array}$$

<u>Problème 5:</u>

Lorsqu'un moteur électrique fonctionne, il présente des vibrations naturelles qu'il est nécessaire d'amortir pour éviter de les transmettre a son châssis. On prévoit donc un système de suspension.

Le moteur est assimile au point matériel m de masse *m* pouvant se déplacer parallèlement à l'axe vertical *Oz*. La suspension le reliant au châssis est modélisée par un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur *k* en parallèle avec un amortisseur exerçant sur le moteur une force de freinage $\vec{f}_{fr} = -\alpha\dot{z}\vec{u}_z$

Le châssis reste fixe dans un référencier galiléen et on note le champ de pesanteur $\vec{g}$

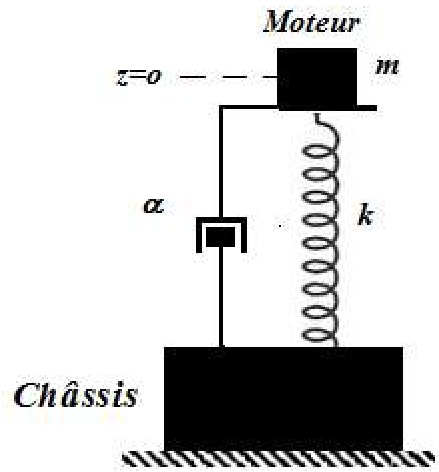


Figure 18.4 : Etude des vibrations d'un moteur

<u>Mode A :</u>

Le moteur ne fonctionne pas et il est immobile.

- Déterminer dans ce cas la longueur l du ressort. On prend la référence $z=0$ au point m.

<u>Mode B :</u>

Le moteur étant toujours arrêté, on l'écarte de sa position d'équilibre puis on le laisse évoluer librement.

- Déterminer le Lagrangien du système.
- Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par $z(t)$.

On pose les constantes suivantes :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \text{ et } \nu = \frac{\alpha}{2m\omega_0}$$

- Donner la forme de la solution générale $z(t)$ en fonction des paramètres ν et ω_0, on suppose que $\nu<1$.
- Comment appelle-t-on ce régime ?
- Écrire l'expression de l'énergie totale E_T en fonction de $z(t)$ et $\dfrac{dz(t)}{dt}$
- Que vaut-t-il la valeur de l'expression $\dfrac{dE_T}{dt}$. Le système est-il conservatif ?

<u>Mode C :</u>

Le moteur fonctionne, et tout se passe comme s'il apparaissait une force supplémentaire de forme : $\vec{F}(t) = \vec{F}_0 \cos \omega t \vec{u}_z$

- Établir la nouvelle équation du mouvement vérifiée par *z(t)*
- En régime permanent, on cherche des solutions de la forme

  $$z(t) = z_0 \cos(\omega t + \varphi) et V(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi)$$

  - Donner l'expression de la grandeur $V = V_0 e^{i\phi}$
- Exprimer l'amplitude V_0 en fonction de ω et des paramètres ν, ω_0 et F_0/m.
- Donner l'allure de $V_0(\omega)$.
- ***<u>Application numérique:</u>*** la pulsation ω vaut 628 rad/s, le moteur a une masse $m=10kg$. On dispose de deux ressorts de raideurs $k_1=4\ 10^6 n/m$ et $k_2=10^6 n/m$. lequel faut-il choisir pour réaliser la suspension ?

<u>Solution :</u>

Mode A :

Le système est en équilibre

- La longueur du ressort :

$$\sum_{i\geq 1} \vec{F}_i = \vec{0} \quad \Rightarrow l = l_0 - \frac{mg}{k}$$

Mode B :

Le système est en mouvement amorti

- Le Lagrangien du système :

$$L = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - \frac{1}{2}kz^2$$

- L'équation différentielle :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Rightarrow \qquad m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz = 0$$

D'ou :

$$\ddot{z} + 2\nu\omega_0\dot{z} + \omega_0^2 z = 0 \qquad Avec \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \nu = \frac{\alpha}{2m\omega_0}$$

- La résolution de l'équation du mouvement :

$$r^2 + 2\nu\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$$

$$\Delta' = (\nu\omega_0)^2 - \omega_0^2 = -\omega_0^2(1-\nu) = j^2\varpi^2 \prec 0 \quad \nu \prec 1$$

- ❖ Le système a un mouvement oscillatoire amorti.
- ❖ La solution est de la forme :

$$z(t) = Ae^{-\nu\omega_0 t} \cos(\varpi t + \varphi)$$

- l'énergie totale du système s'écrit sous la forme:

$$E_T(t) = \frac{1}{2}m(\frac{dz}{dt})^2 + \frac{1}{2}kz^2$$

A partir de l'équation du mouvement, on obtient **:**

$$\dot{z}[\,m\ddot{z} + kz = -\alpha\dot{z}\,] \quad \Rightarrow \frac{dE_T(t)}{dt} = -\alpha\dot{z}^2 \prec 0$$

- Le système n'est pas conservatif car il y a déperdition de l'énergie totale. Cette diminution est due au travail des forces de frottement.

Mode C :

Le système est en mouvement forcé

- L'équation du mouvement s'écrit :

$$m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz = F(t)$$

D'où :

$$\ddot{z} + 2\nu\omega_0\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F(t)}{m}$$

Avec :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \nu = \frac{\alpha}{2m\omega_0}$$

- La solution de l'équation différentielle est :

$$\dot{z}(t) = V(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi) = R_e V_0 e^{j(\omega t + \phi)}$$

$$Avec \quad z(t) = \frac{\dot{z}(t)}{j\omega} \quad \ddot{z}(t) = j\omega\dot{z}(t)$$

- ❖ En remplaçant dans l'équation du mouvement on obtient alors :

$$V(t) = \frac{\frac{F_0}{m}}{2\nu\omega_0 + j\omega(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2})} e^{j\omega t}$$

- Le module de la vitesse est de la forme :

$$V_0(\omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(2\nu\omega_0)^2 + \omega^2(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2})^2}}$$

- L'étude des variations du module de la vitesse :

$$\frac{dV_0(\omega)}{d\omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} V_0(\omega) = V_{max} \\ \omega = \omega_r = \omega_0 \end{array}$$

- ❖ Pour cette pulsation on a le phénomène de résonance.
- ❖ L'allure de la courbe $V_0(\omega)$ est de la forme :

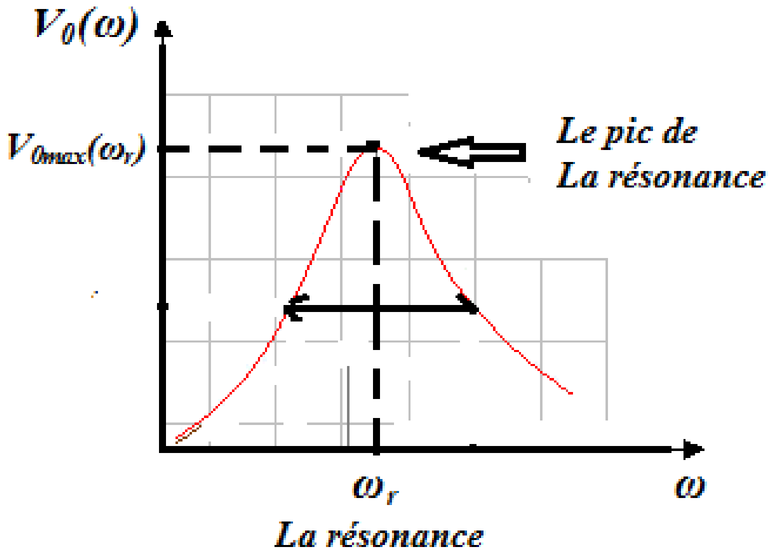


Figure 4.19: Phénomène de la résonance du moteur

- ***Application numérique*** :

$$\begin{array}{ll} \omega_{r1} = \omega_{01} = \sqrt{\frac{k_1}{m}} & V_{max1}(\omega_{01}) = \frac{F_0}{2m\nu\omega_{01}} \\ \omega_{r2} = \omega_{02} = \sqrt{\frac{k_2}{m}} & V_{max2}(\omega_{02}) = \frac{F_0}{2m\nu\omega_{02}} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \frac{V(\omega_{02})}{V(\omega_{01})} = \frac{\omega_{01}}{\omega_{02}}$$

Problèmes supplémentaires

Problème 6 :

La machine d'Atwood est schématisée par un disque de masse négligeable enroulé par un fil inextensible et non glissant, comme le montre la figure 20.4 ci-dessous :

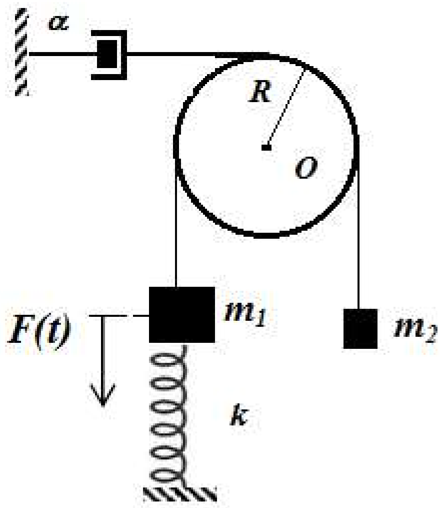


Figure 4.20: Mouvement forcé du disque

Mode libre :

Dans le cas des oscillations libres

- Déterminer le Lagrangien du système
- Etablir l'équation différentielle du mouvement.
- En déduire la pulsation propre
- Donner la solution générale avec les conditions suivantes :

$$\theta(t=0)=0,\dot{\theta}(t=0)=\dot{\theta}_0.$$

Mode forcé **:**

On admet que les frottements existent, la masse m_1 effectue des oscillations forcées sous l'effet d'une force sinusoïdale :

$$F(t) = F_0 \cos \Omega t$$

- Etablir la nouvelle équation du mouvement.
- Déterminer le module de la solution permanente de l'équation différentielle.
- Quelle est la fréquence pour que le module de l'amplitude soit maximum.
- Donner la bande passante et le facteur de qualité Q pour les faibles amortissements.
- ***Application numérique*** :

  On donne $m_1=2Kg$, $m_2=1Kg$, $k=10N/m$ et $\lambda=0.1N.s/m$. Calculer Q.

Problème 7:

Une machine mécanique tournante constitue des sources de vibrations très courantes. De petites irrégularités dans la distribution des masses des parties en rotation causent des niveaux vibratoires importants. On schématise une machine de masse m comportant une masse m_0 en rotation à une distance R de son centre. Un guidage sans friction autorise seulement un mouvement dans la direction x, comme le montre la figure 21.4.

On considère la vitesse de rotation ω_R constante. On a $x_R = R \sin \omega_R t$.

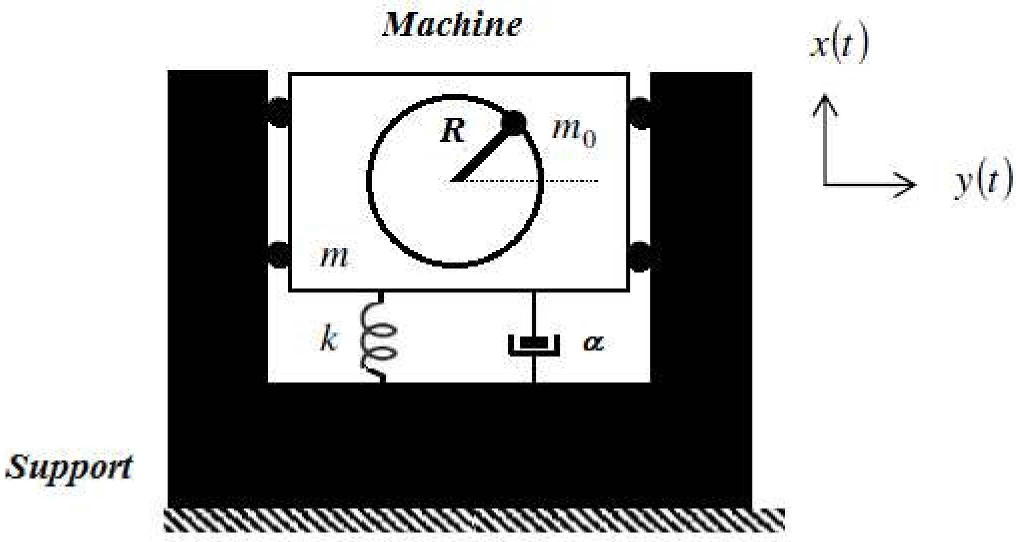


Figure 4.21: Excitation d'une machine suspendue par une masse en rotation

- Etablir le Lagrangien du système
- Ecrire l'équation différentielle du mouvement.
- On pose la variable :

$$r = \frac{\omega}{\omega_0}$$

On cherche des solutions de la forme :

$$x(t) = A\cos(\omega t - \phi)$$

- ❖ Déterminer l'amplitude du déplacement en fonction de *r*.
- ❖ Interpréter le résultat.

Problème 8 :

Un sismographe est un instrument de mesure équipé d'un capteur des mouvements du sol ; le sismomètre ; capable de les enregistrer sur un support visuel ; le sismogramme. Un sismographe simple est constitué d'un ressort de raideur k et de longueur naturelle l_0 ; d'un amortisseur de coefficient de frottement α et d'une masse m considérée comme ponctuelle. Le ressort et l'amortisseur sont fixés à un cadre C rigide et solidaire du sol S. l'amortisseur exerce sur la masse m une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse relative de m par rapport au cadre C. Un stylet reproduisant les déplacements verticaux de la masse m par rapport au cadre est fixé au niveau de la masse m. On considère que l'axe Oz vertical est un des axes du référentiel galiléen. La figure 4.20 illustre le dispositif du sismographe.

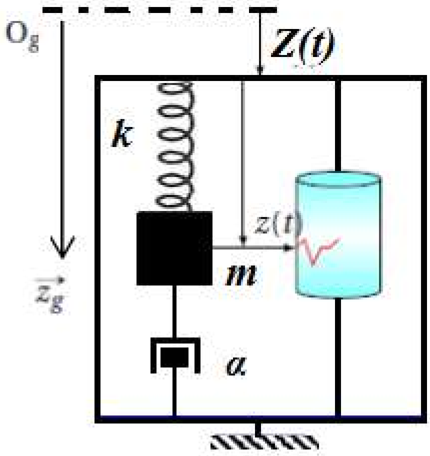


Figure 4.22: Sismographe

Sa secousse transmet au support un mouvement oscillatoire $Z(t) = A\cos\Omega t$ dans le référentiel terrestre. En l'absence de secousse Z=0.

- Etablir le Lagrangien du système.
- Déterminer l'équation différentielle que vérifie Z ; l'écart entre la longueur *l* du ressort à l'instant *t* et sa position d'équilibre.
- Déterminer en régime permanent l'expression de l'amplitude Z_m de Z(t).
- Étudier dans ce cas l'allure de la fonction de Z_m. Tracer le graphe Z_m en fonction de ω. Commenter le résultat.

Mini projet -1

Dans tous le problème, on considère une machine mécanique assimilée au point matériel m de masse m pouvant se déplacer parallèlement à l'axe vertical Ox. La suspension le reliant au support est modélisée par un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k en parallèle avec un amortisseur exerçant sur la machine une force de frottement $\vec{f}_{fr} = -\alpha\vec{v}$

Le support reste fixe dans un référencier galiléen et on note le champ de pesanteur $\vec{g}$

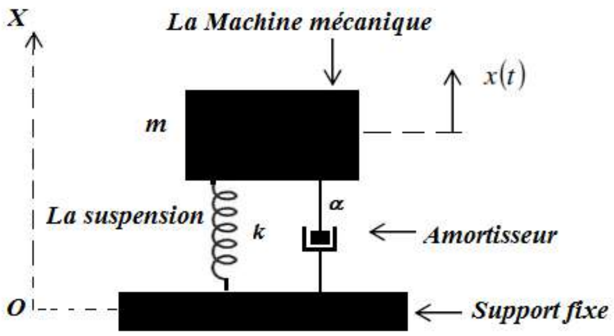


Figure 4.23: Modélisation mouvement de la machine

Partie 1 :

On écarte la machine de sa position d'équilibre et puis on la laisse évoluer librement.

- Déterminer le Lagrangien du système.
- On pose les constantes suivantes :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad et \quad 2\eta = \frac{\alpha}{m\omega_0}$$

Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par *x(t).*

- On suppose que $\eta \prec 1$. Donner la forme de la solution générale *x(t)* en fonction des paramètres η *et* ω_0 avec les conditions initiales suivantes :

$$x(t=0)=0 \qquad et \quad \dot{x}(t=0)=v_0$$

Comment appelle-t-on ce régime dans ce cas-là ?

- Calculer le décrément logarithmique $\boldsymbol{\delta}$
- Montrer que la diminution de l'énergie totale E_T du système est due au travail des forces de frottement

Partie 2 :

La machine mécanique maintenant *m* est excitée par l'intermédiaire des supports de suspension la montre la figure 24.4 :

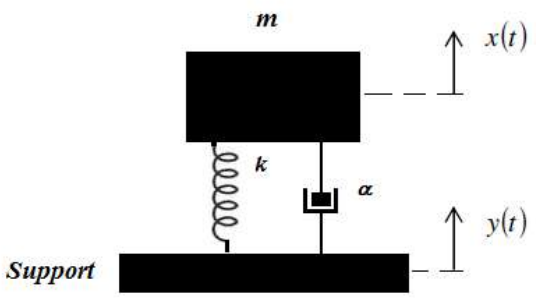


Figure 4.24: Excitation de la masse par le support vibrant

On suppose que le support possède un déplacement harmonique de forme :

$$y(t) = B\cos\omega t$$

- Déterminer le Lagrangien du système.
- Etablir l'équation différentielle du mouvement.
- On cherche une solution de la forme :

$$x(t) = A\cos(\omega t - \phi)$$

Déterminer le rapport des modules d'amplitudes $T = \left|\frac{A}{B}\right|$ en fonction des paramètres η , ω_0 et ω.

- On pose la variable suivante:

$$r = \frac{\omega}{\omega_0} .$$

Tracer la courbe $T(r)$ et interpréter les résultats.

Solutions :

Le mouvement du système est schématisé dans la figure 25.4 comme suit :

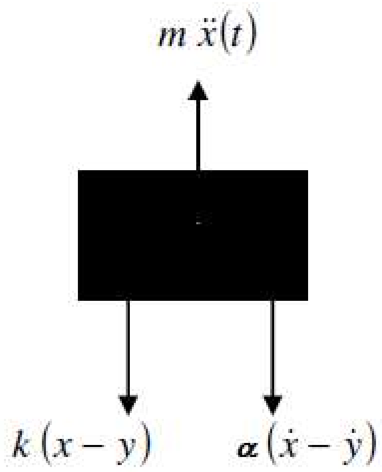


Figure 4.25: Mouvement forcé de l'ensemble (support + machine)

- Le Lagrangien du système s'écrit :

L'énergie cinétique s'exprime:

$$E_c = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$$

Pour L'énergie potentielle on a :

$$E_p = \frac{1}{2} k(x-y)^2$$

D'où le Lagrangien du système s'écrit :

$$L(\dot{x},x) = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} k(x-y)^2$$

- L'équation du mouvement s'écrit sous la forme :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \sum \overline{F}_{ext} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x}(t) + k[x(t) - y(t)] = -\alpha[\dot{x}(t) - \dot{y}(t)]$$

D'où :

$$m\ddot{x}(t)+\alpha\dot{x}(t)+kx(t)=\alpha\dot{y}(t)+ky(t)$$

C'est une équation différentielle non homogène.

- La solution de l'équation différentielle:

En posant les constantes suivantes :

$$\omega_0^2=\frac{k}{m} \quad et \quad 2\xi=\frac{\alpha}{m\omega_0}$$

L'équation du mouvement se réécrit avec les nouvelles constantes :

$$m\ddot{x}(t)+2\xi\omega_0\dot{x}(t)+\omega_0^2x(t)=2\xi\omega_0\dot{y}(t)+\omega_0^2y(t)$$

On considère que le support possède un déplacement sinusoïdal :

$$y(t)=B\cos\omega t=Re\left\{Be^{j\omega t}\right\}$$

On chercher des solutions de la forme :

$$x(t)=A\cos(\omega t-\phi)=Re\left\{Ae^{j(\omega t-\phi)}\right\}$$

L'équation du mouvement devient alors :

$$(-\omega^2+j2\xi\omega_0\omega+\omega_0^2)Ae^{-j\phi}=(j2\xi\omega_0\omega+\omega_0^2)B$$

Le rapport des modules des amplitudes s'écrit sous la forme:

$$T=\left|\frac{A}{B}\right|=\omega_0\left[\frac{(2\xi\omega)^2+\omega_0^2}{(-\omega^2+\omega_0^2)^2+(2\xi\omega_0\omega)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

- En posant la constante :

$$r=\frac{\omega}{\omega_0},$$

La courbe de la fonction *T(r)* est décrite comme suit:

$$T=\left|\frac{A}{B}\right|=\left[\frac{(2\xi r)^2+1}{(-r^2+1)^2+(2\xi r)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

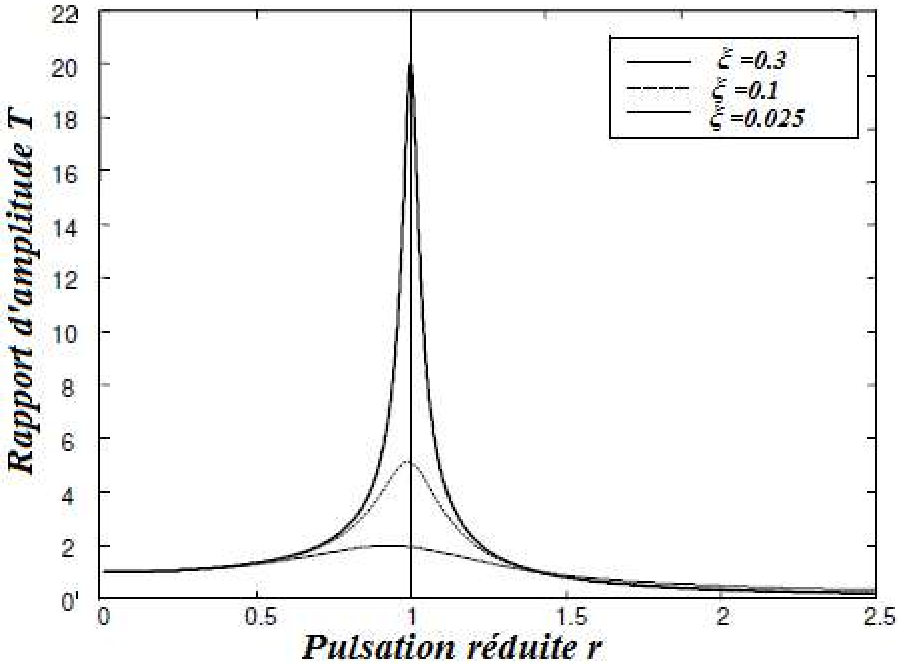


Figure 4.26: Rapport de transmissibilité en déplacement en fonction de la pulsation réduite

On a vu que la solution particulière pouvait représenter seule la solution stationnaire

Mini projet -2

On se propose d'étudier le comportement vibratoire de matériaux en caoutchouc afin de l'utiliser dans la construction, représenté dans la figure 4.27.

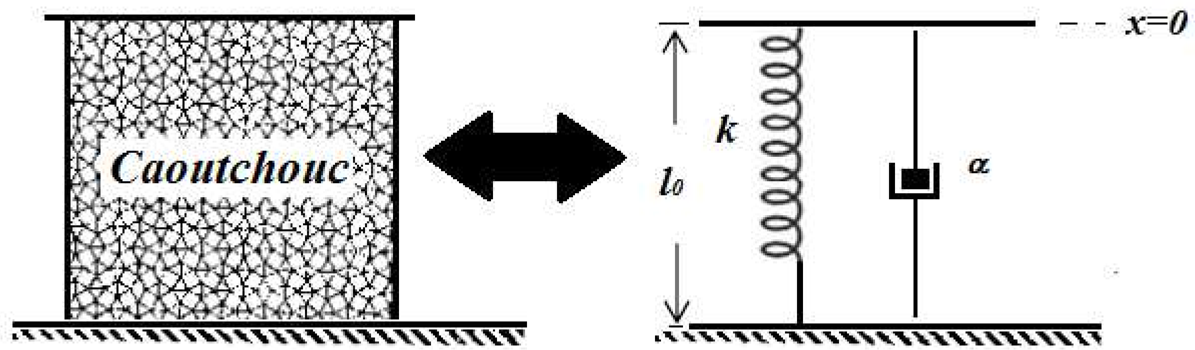


Figure 4.27: Modélisation physique du mouvement oscillatoire du caoutchouc

Nous assimilons l'élasticité du matériau à celle d'un ressort de raideur k, de longueur à vide l_0 et les pertes énergétiques par frottement à celle ayant lieu dans un amortisseur de coefficientα. Le ressort ainsi considérés sont associés en parallèle. On néglige le poids du caoutchouc devant les forces mise en jeu.

Chapitre 4: Mouvement forcé à un degré de liberté

Partie A :

On place un bloc de masse $m=1t$ sur le caoutchouc qui se comprime d'une distance d et prend une valeur de l. Après une compression supplémentaire, on relâche le système oscillé autour de sa position d'équilibre qu'on le repère par la coordonnée $x(t)$ comme le montre la figure 4.28.

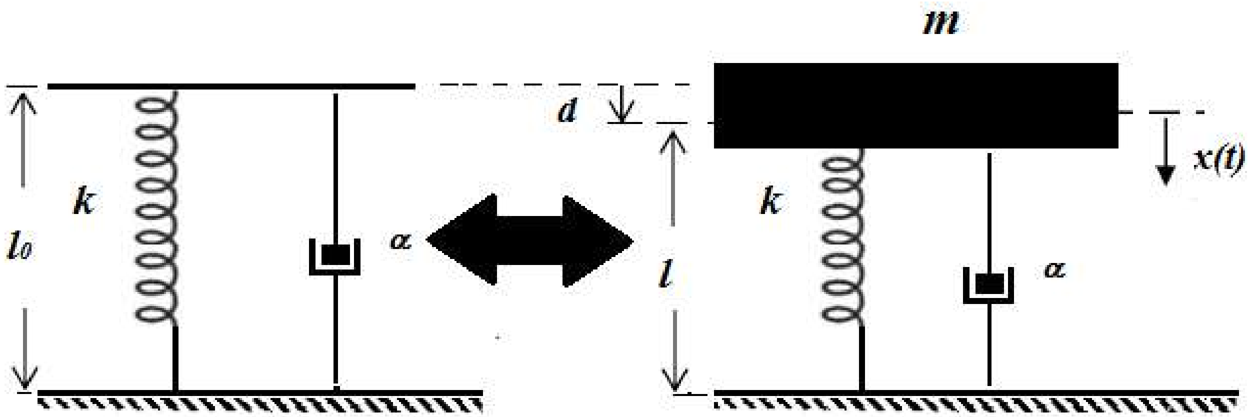


Figure 4.28: Mouvement oscillatoire du « caoutchouc +le bloc »

- Le système est en équilibre :
  - Déterminer l'énergie potentielle.
  - En déduire la compression $d=l-l_0$.
- Le système physique maintenant oscille.
  - Déterminer l'énergie cinétique.
  - En déduire le Lagrangien du système
- Etablir l'équation différentielle du mouvement de la masse m
- Donner la solution générale de la solution $x(t)$ sachant que le mouvement a un mouvement oscillatoire amorti.
- Donner l'expression du décrément logarithmique δ.

  L'intervalle de temps, $\Delta t=0.2s$ qui sépare le premier et le sixième maximum. Correspond à la diminution d'amplitude de 60%.

  Déterminer les valeurs de k et α.
- On refait la même expérience avec un autre caoutchouc. On trouve α'=4.510^{3}Kg/s. Au bout de combien de temps, $\Delta t'$, obtient-on la même diminution d'amplitude que dans l'expérience précédente ?

- Quel est le matériau le plus adéquat pour la construction ?

Partie B :

On prend dans cette partie un caoutchouc de caractéristiques physiques suivantes : $k=2510^6 N/m$ et $\alpha=10^4 Kg/s$ qui sera utilisé dans la construction d'un pont d'autoroute, de masse $m=12.5t$.

On assimile l'effet du passage des véhicules sur le pont à celui d'une force sinusoïdale $F(t)$ d'amplitude $F_0=10kN$ et de pulsation ω, appliquée perpendiculairement au pont comme le montre la figure 29.4

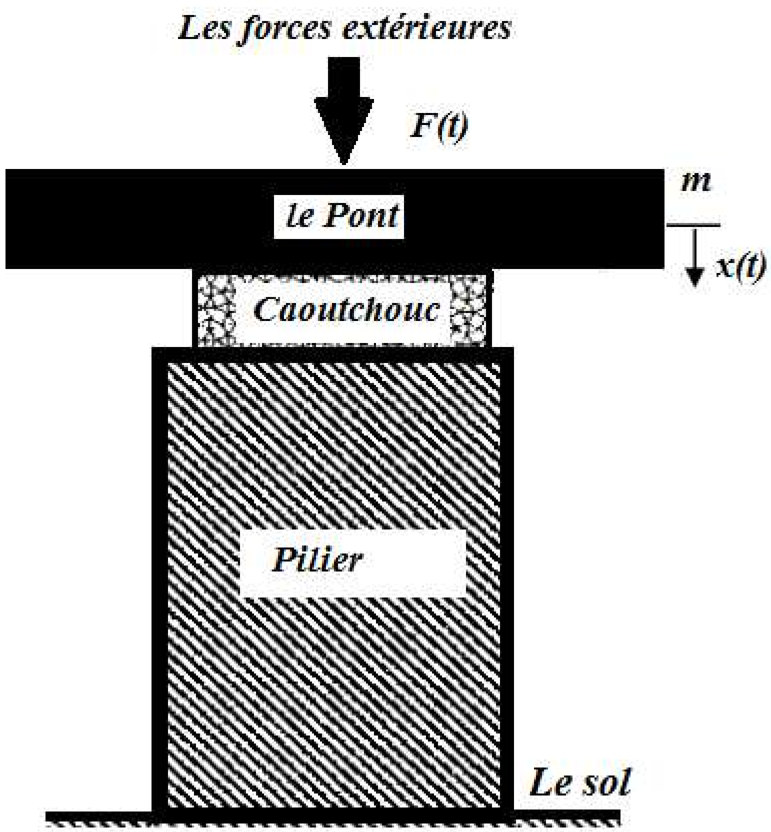


Figure 4.29: Modélisation physique du mouvement du pont

- Etablir le Lagrangien du système.
- Exprimer l'équation différentielle du mouvement du pont pour la coordonnée $x(t)$ donnant son déplacement par rapport à l'état d'équilibre.
- Déterminer l'expression de la solution $x(t)$ en régime permanent.
- Déterminer la fréquence de résonance f_r

- Donner l'expression de l'amplitude maximale à laquelle le pont peut vibrer.
- Quelle est la phase correspondante dans ce cas-là ?
- Calculer l'énergie communiquée au pont pendant un intervalle de temps égale à une période, lorsque le passage des véhicules le fait vibrer à la fréquence de résonance.
- Déterminer l'énergie dissipée par la force de frottement pend la même période. Interpréter le résultat.

Solution:

Partie A

- L'énergie potentielle s'écrit :

$$E_p = \frac{1}{2}k(d+x)^2 - mg(d+x)$$

En équilibre on a:

$$\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\right)_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad kd - mg = 0$$

D'où la compression est égale à :

$$d = \frac{mg}{k}$$

- Le système est en mouvement ; L'énergie cinétique devient:

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

D'où le Lagrangien s'écrit alors

$$L = E_c - E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k(d+x)^2 + mg(d+x)$$

- L'équation différentielle du mouvement est égale à :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\alpha\dot{x} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} + kx + \underbrace{kd - mg}_{=0} = -\alpha\dot{x}$$

D'où :

$$\ddot{x} + 2\xi\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Avec les constantes :

$$\xi = \frac{\alpha}{2m} \quad et \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

- Puisque le mouvement est de nature oscillatoire amorti ; la solution est de la forme :

$$x(t) = Ae^{-\xi t}\cos(\omega t + \varphi)$$

D'où la pulsation du mouvement est égale à :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \xi^2}$$

- Ainsi, le décrément logarithmique est calculé comme suit :

$$\delta = \ln\frac{x(t)}{x(t+T)} = \xi T$$

La décroissance après cinq périodes on a :

$$\ln\frac{x(t)}{x(t+5T)} = \ln\frac{1}{0.4} = 5\underbrace{\xi T}_{\delta} \quad \Rightarrow \quad \delta = -\frac{\ln 0.4}{5} = 0.183$$

La période T'après intervalle de temps Δt est égale à :

$$\Delta t = 5T = 0.2s \quad \Rightarrow \quad T = 0.04s$$

- Le coefficient d'amortissement α est déterminé à partir de δ :

$$\delta = \xi T = \frac{\alpha}{2m}T \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{2m\delta}{T} = 9.1510^3\,kgs^{-1}$$

- La constante de raideur k est obtenue à partir de la pulsation ω :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \xi^2} \quad \Rightarrow \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} = \sqrt{\omega^2 + \xi^2}$$

D'où :

$$\frac{k}{m} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{T^2} + \frac{\alpha}{4m^2}^2} \quad avec \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad et \quad \xi = \frac{\alpha}{2m}$$

Alors on a :

$$k = m\sqrt{\frac{4\pi^2}{T^2} + \frac{\alpha}{4m^2}^2} = 24.910^6\,Nm^{-1}$$

- Le rapport d'amplitude qui correspond à la même diminution est donné comme suit :

$$\ln\frac{Ae^{-\xi' t}}{Ae^{-\xi'(t+\Delta t')}} = \ln\frac{1}{0.4} = \xi'\Delta t' \quad \Rightarrow \quad \Delta t' = \frac{\ln 0.4}{\xi'}$$

Avec :

$$\xi^{'} = \frac{\alpha^{'}}{2m}$$

Alors le temps $\Delta t^{'}$ est égale à :

$$\Delta t^{'} = \frac{2m^{'}}{\alpha^{'}} \ln 0.4 = 0.407s$$

- Dans la deuxième expérience ; on obtient la même diminution d'amplitude au bout d'un temps deux fois plus long. Le premier matériau amortit plus les vibrations. Donc il est le mieux approprié pour la construction.

Partie B

- Le Lagrangien s'écrit comme suit :

$$L(x,\dot{x}) = E_c - E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k(d+x)^2 + mg(d+x)$$

- L'équation différentielle du mouvement s'écrit comme suit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\alpha\dot{x} + F(t) \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} + kx + \underbrace{kd - mg}_{=0} = -\alpha\dot{x} + F(t)$$

D'où :

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F(t) \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F(t)}{m}$$

C'est une équation différentielle linéaire nom homogène. Elle admet une solution générale et une solution particulière.

- La solution de l'équation différentielle :

En posant les constantes suivantes :

$$\xi = \frac{\alpha}{2m} \quad et \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

L'équation différentielle devient alors :

$$\ddot{x} + 2\xi\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

En supposant que la forme de f(t) est sinusoïdale :

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$$

- En régime permanent la solution particulière est de la forme suivante :

$$x(t) = A_0 \cos(\Omega t + \varphi) = R_e A_0 e^{i(\Omega t + \varphi)}$$

D'où

$$\dot{x}(t) = j\Omega A_0 e^{j(\Omega t+\varphi)}$$
$$\ddot{x}(t) = -\Omega^2 A_0 e^{j(\Omega t+\varphi)}$$

Alors l'amplitude s'écrit sous la forme :

$$A_0 e^{j\varphi}\left(-\Omega^2 + \omega_0^2 + 2\xi j\Omega\right) = \frac{F_0}{m}$$

❖ Le module s'écrit :

$$\left|A_0(\Omega)\right| = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2}}$$

❖ Et l'argument sous la forme :

$$\varphi = Artg\frac{2\xi\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}$$

- La fréquence de résonance est déterminée lorsque la réponse du système est maximum ; d'où :

$$\frac{d\left|A_0(\Omega)\right|}{d\Omega} = 0$$

Alors la fréquence de résonance s'exprime comme suit :

$$f_r = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\xi^2}}{2\pi} = 7.12 s^{-1}$$

- En remplaçant dans l'amplitude la pulsation de résonance, L'amplitude maximale s'écrit alors:

$$\left|A_0(\Omega_r)\right|_{\max} = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - 2\xi^2 - \omega_0^2)^2 + 4\xi^2(\omega_0^2 - 2\xi^2)}}$$

D'où :

$$\left|A_0(\Omega_r)\right|_{\max} \approx \frac{F_0}{2\alpha\omega_0} = 2.23cm \qquad avec \quad \xi \prec\prec \omega_0$$

- La phase correspondante dans ce cas-là est exprimée comme suit :

$$\varphi(\Omega_r) = Artg\frac{2\xi\Omega_r}{\Omega_r^2 - \omega_0^2} \quad \Rightarrow \quad \varphi(\Omega_r) = -Artg\frac{M\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\alpha}{2m^2}}^{\,2}}{\alpha} \approx -\frac{\pi}{2}$$

- La puissance fournie est exprimée comme suit :

$$P_f(t) = F(t)\dot{x}(t) \quad \Rightarrow \quad P(t) = -\omega_0\, AF_0 \cos\omega_0 t \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Ainsi que l'énergie communiquée est égale :

$$E_f = \int_0^T P_f(t)dt \quad \Rightarrow \quad E_f = -\omega_0 AF_0 \int_0^T \cos\omega_0 t \sin(\omega_0 t + \varphi)dt$$

D'où

$$E_f = -\omega_0 AF_0 \frac{\sin\varphi}{2} T_0 \quad \Rightarrow \quad E_f = \pi\omega_0 AF_0 \cong 700.6J$$

- Par contre la puissance dissipée se calcule comme suit :

$$P_d(t) = F_{fr}(t)\dot{x}(t) = -\alpha\dot{x}^2(t) \quad \Rightarrow \quad P_d(t) = -\alpha\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

- Ainsi l'énergie dissipée est égale à :

$$E_d = \int_0^T P_d(t)dt \quad \Rightarrow \quad E_d = -\alpha\omega_0^2 A^2 \int_0^T \sin^2(\omega_0 t + \varphi)dt$$

D'où :

$$E_d = -\frac{T_0}{2}\alpha\omega_0^2 A^2 \quad \Rightarrow \quad E_d = -\alpha\pi\omega_0 A^2 \approx 398.6$$

- On remarque que $|E_d| \approx |E_d|$

  On peut en conclure que l'énergie communiquée au pont pendant une période se dissipe complétement dans l'amortisseur.

Mini projet -3

On définit un sismomètre comme un système physique appelé capteur qui comprend un support et une masse *m* relié par un ressort et un amortisseur disposés en parallèle, la figure 30.4. La masse, de centre de gravité *G*, ne peut se déplacer que verticalement. Le support, le ressort et l'amortisseur ont une masse négligeable.

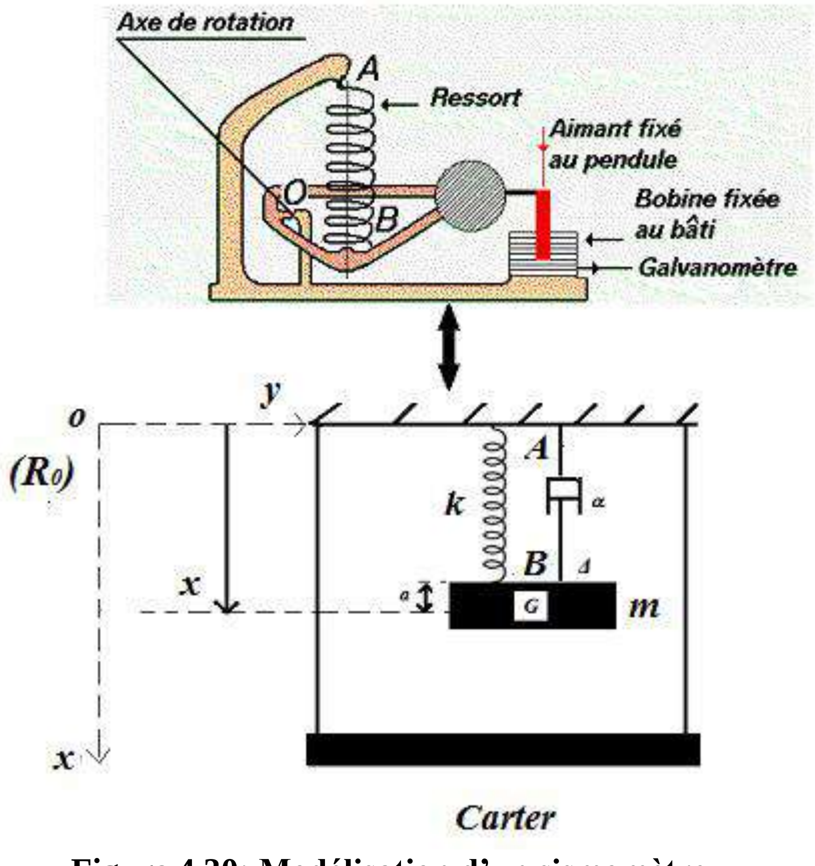


Figure 4.30: Modélisation d'un sismomètre

Le ressort a une longueur à vide *l* et une rigidité *k*. La constante de frottement est α. On précise que si, les extrémités *A* et *B* d'un amortisseur appartenant à un système mécanique, décrivent un axe *Δ* parallèle à l'axe Ox avec des vitesses respectives v_a et

v_b, l'amortisseur exercice sur le reste du système en point *A* une force $\alpha(v_b - v_a)\vec{i}$ et en point *B* une force $\alpha(v_a - v_a)\vec{i}$ où $\vec{i}$ est le vecteur unitaire.

Partie A :

Le support est immobile par rapport au repère (R_0).

- Calculer l'abscisse x_0 du centre d'inertie de la masse en équilibre.
- Ecrire l'équation différentielle du mouvement de la masse écarté de sa position d'équilibre.
- Que devient cette équation quand on pose $x=x_0+X$.

On pose les constantes suivantes :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \ \alpha = \lambda f_C \text{ avec } f_c^2 = 4km.$$

Montrer que l'équation différentielle s'écrit sous la forme suivante :

$$\ddot{x} + \alpha^* \dot{x} + \beta^* x = 0$$

- Calculer α^* et β^* en fonction de λ et ω_0.
- On donne $\lambda= 0.5$, $\omega_0=10\ rad/s$. A l'instant initial, $X=1\ cm$ et $\dot{X} = 0$.
  Déterminer X pour $t= 0.2s$.

Partie B :

On suppose maintenant que le support est solidaire du carter d'une machine animé d'un mouvement sinusoïdale verticale $x_1 = b \sin \omega t$ par rapport au repère (R_0), comme le montre la figure 4.31. On suppose que *b* est positif.

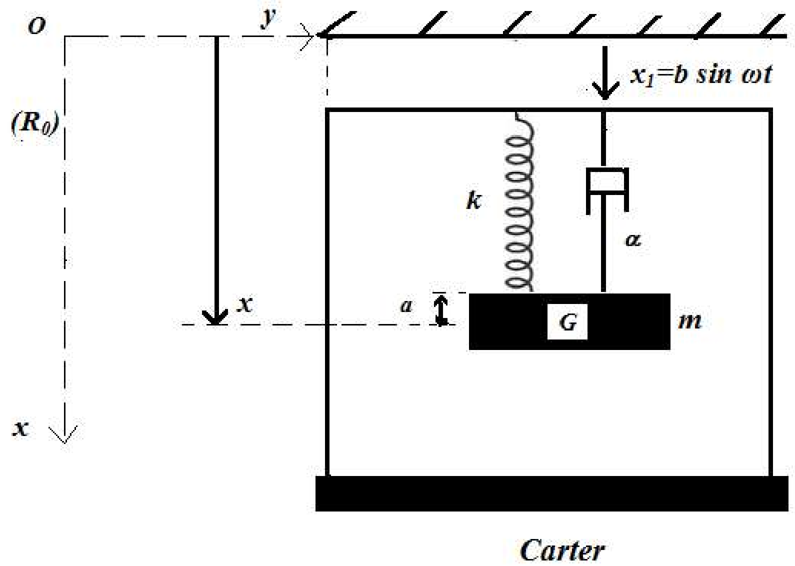


Figure 4.31: Système en mouvement forcé

- Ecrire l'équation de la masse par rapport à (R_0).
- Montrer que l'équation différentielle peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\ddot{x}+\alpha^*\dot{x}+\beta^* x = H\sin\omega t$$
$$Avec \quad x = X + C + b\sin\omega t$$

- Déterminer H et C, que représente X ?
- Etudier la solution en régime permanent

$$X(t) = B\sin(\omega t-\varphi)$$

Avec B positif.

- Calculer le rapport $\frac{B}{b}$ et $tan\varphi$ en fonction de λ et $\mu = \frac{\omega}{\omega_0}$.
- Tracer l'allure du graphe de B en fonction de μ tel que $B=f(\mu)$.
- On suppose que $\lambda=0.5$:

  Montrer que si μ est supérieur à une certaine valeur μ_1, $\frac{B}{b}-1$ est inférieur à 10^{-2}. Calculer dans ce cas μ_1.
- En déduire une condition pour que l'appareil puisse fonctionner en capteur d'amplitude.

Solution:

Partie A : Le support est immobile par rapport au repère *(R_0)*.

- A l'équilibre, l'abscisse x_0 s'écrit comme suit :

$$\sum_{i\geq 1}\vec{F}_i=\vec{0} \quad \Rightarrow \quad x_0=\frac{mg}{k}+(l+a)$$

- L'équation différentielle du mouvement est de forme :

  En appliquant la loi dynamique

$$m\ddot{x}=-k(x-(l+a))+mg-\alpha\dot{x}$$

D'ou

$$d'où \quad \dot{x}=\dot{X} \qquad \ddot{x}=\ddot{X}$$

Alors :

$$m\ddot{X}+\alpha\dot{X}+kX=0$$

- La nouvelle équation du mouvement s'écrit alors :

$$\ddot{X}+2\lambda\omega_0\dot{X}+\omega_0^2X=0$$
$$Avec \quad \alpha^*=2\lambda\omega_0 \quad \beta^*=\omega_0^2$$

- La résolution de cette équation différentielle :

$$r^2+2\lambda\omega_0 r+\omega_0^2=0$$
$$\Delta'=\omega_0^2(\lambda^2-1)$$
$$\lambda=0.5 \quad \Rightarrow \quad \Delta'=\omega_0\sqrt{1-\lambda^2}=-\Omega^2$$

  - La solution est de la forme :

$$X(t)=e^{-\lambda\omega_0 t}(A\cos\Omega t+B\sin\Omega t)$$
$$Avec \quad A=X_0 \quad B=\frac{\lambda X_0}{\sqrt{1-\lambda^2}}$$

  - Le système a un mouvement oscillatoire amorti.
  - La valeur de *X* est : $X=0.15m$

Partie B : Le support est mobile par rapport au repère *(R_0)*.

- La relation dynamique du mouvement :

$$m\ddot{x} = -k(x - x_1 - (l + a)) + mg - \alpha(\dot{x} - \dot{x}_1)$$
$$d'où \quad \dot{x} = \dot{X} + \dot{x}_1 \quad et\, \ddot{x} + \ddot{x}_1 = \ddot{X} - \omega^2 b \sin\omega t$$

L'équation du mouvement devient alors :

$$\ddot{X} + 2\lambda\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = \omega^2 b \sin\omega t$$
$$Avec \quad H = \omega^2 b$$

- La solution totale de l'équation différentielle en régime permanent est :

$$X(t) = X_p(t) = B\sin(\omega t - \varphi)$$

- ❖ En notation complexe on aura la forme suivante :

$$\tilde{X}(t) = \tilde{X}_p(t) = Be^{j(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2})}$$

- ❖ En remplaçant dans l'équation différentielle, on obtient alors :

$$B = \frac{b\mu^2}{\sqrt{(1-\mu^2)^2 + (2\lambda\mu)^2}} \qquad tan\varphi = \frac{2\lambda\mu}{1-\mu^2}$$
$$Avec \quad \mu = \frac{\omega}{\omega_0}$$

- ❖ Les variations de *B=f(μ)* :

$$\left.\frac{dB}{d\mu}\right|_{\mu=\mu_m} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = \mu_m = \overset{\mu=0}{\frac{1}{\sqrt{1-2\lambda^2}}} \qquad si \quad \lambda \prec \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ainsi, on peut distinguer deux cas :

- ❖ $\lambda \prec \frac{1}{\sqrt{2}}$ ⇒ Amortissement faible ⇒ Résonance
- ❖ $\lambda \succ \frac{1}{\sqrt{2}}$ ⇒ Amortissement important

- On peut en déduire que :

$$\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$
$$\mu \to \infty \quad \Rightarrow \quad B \to b$$

- Pour $\lambda=0.5$, on aura :

$$B = B_{max} = 1.15b \qquad pour \quad \mu_m = \sqrt{2}$$

$$\frac{B}{b} - 1 \leq 10^{-2} \qquad si \qquad \mu \geq \mu_1$$

$$\frac{\mu_1^2}{\sqrt{(1-\mu_1)^2 + \mu_1^2}} - 1 = 10^{-2} \quad d'où \quad \mu_1 = 7.05$$

- On peut conclure que l'appareil reproduit les oscillations du carter si la pulsation ω est importante. Il fonctionne alors en capteur d'amplitude.

Mini projet -4

Un véhicule est modélisé par un bloc de centre de gravité ***G*** et de masse $M = 1000\ kg$, reposant sur une roue de rayon R par l'intermédiaire de la suspension. Celle dernière peut être représentée par un ressort de raideur $k = 10^5\ N/m$ et d'une longueur à vide l_0, et un amortisseur de coefficient d'amortissement $\boldsymbol{\alpha}$ (voir figure 4.32)

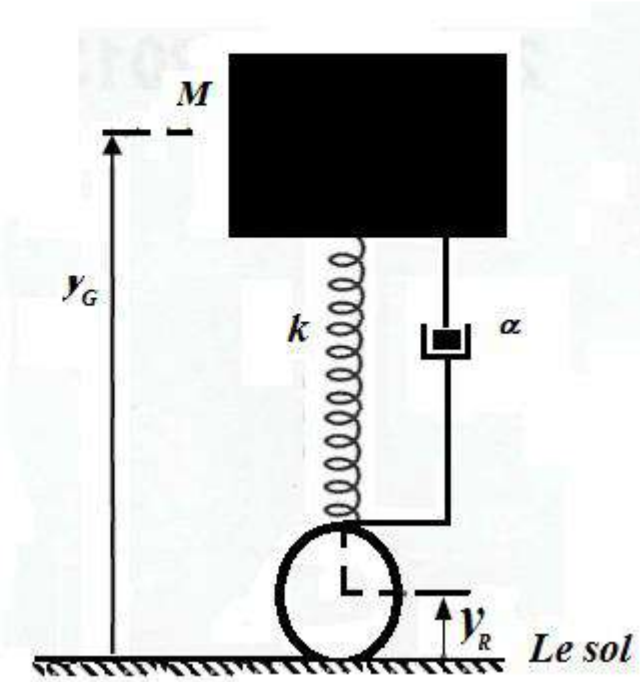


Figure 4.32: Modélisation physique d'un véhicule

Partie A : La position verticale du véhicule est repérée par y_G dans un référentiel ayant comme origine le point de contact de la roue avec le sol. On note y, la distance entre le centre de la roue et l'origine. On note que $\vec{g}$ est l'accélération de la pesanteur.

- Déterminer la position d'équilibre y_{Geq} de G lorsque le véhicule est au repos.

On cherche à établir l'équation différentielle du mouvement vertical amorti du véhicule. Pour cela, on suppose que l'amortissement est de type visqueux et que, suite à un choc soudain, le véhicule se met à osciller verticalement (on néglige les autres mouvements).

On étudie le mouvement par rapport à la position d'équilibre établie précédemment, en considérant $y = y_G - y_{Geq}$ comme une coordonnée généralisée suffisante à l'étude du mouvement vertical.

- Écrire l'expression de l'énergie cinétique du véhicule.
  En posant le zéro de l'énergie potentielle en y_{Geq}.
- Écrire l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur et l'expression de l'énergie potentielle élastique.
- En déduire le Lagrangien du système.

Partie B : On rappelle que la fonction de dissipation D est, dans ce cas, proportionnelle au coefficient d'amortissement ainsi qu'au carré de la différence de vitesses des deux extrémités de l'amortisseur. Écrire l'expression de la fonction de dissipation D.

- En déduire l'équation d'Euler-Lagrange appropriée.
- Montrer que l'équation différentielle du mouvement

$$M\ddot{y} + \alpha\dot{y} + ky = 0$$

- Quelle est l'unité de α ?
- Donner la valeur numérique de α pour laquelle le système aura un mouvement critique?
- Quel sens physique peut-on donner à cette valeur numérique de α **?**

Partie C : Le véhicule se déplace maintenant à une vitesse horizontale constante v sur une route ondulée (**voir la figure 4.33**). L'ondulation est représentée par une fonction sinusoïdale de période spatiale L et d'amplitude A. La distance y_r est calculée à partir d'un niveau moyen de la route et a comme expression :

$$y_r = R + A\cos\omega t$$

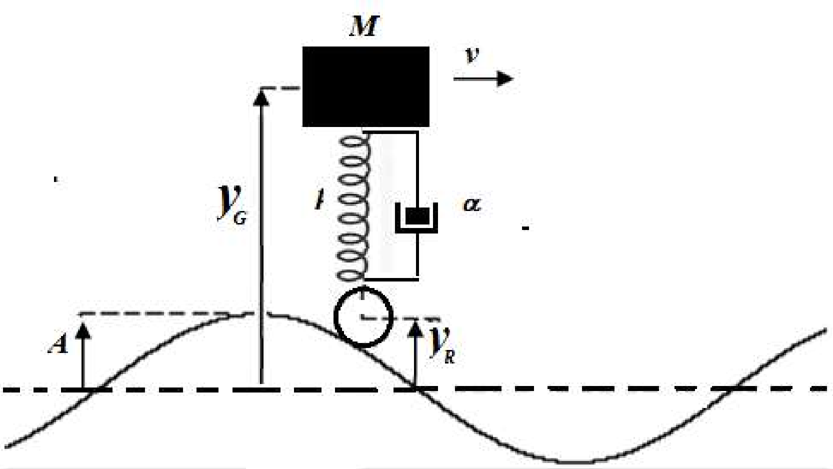


Figure 4.33: Mouvement oscillatoire du véhicule

Solutions :

Partie A :

- La position d'équilibre de G lorsque le véhicule est au repos, s'écrit comme

Première méthode:

- La masse est soumise à son poids dirigé vers le bas : $P = Mg$

  La Force de rappel exercée par le ressort dirigé vers le haut :

$$F = k(l - l_0)$$

  Avec $l = y_{Geq} - y_r$ est la longueur du ressort à l'équilibre.

- A l'équilibre les deux forces se compensent:

$$F = k(l - l_0) = k(l_0 - y_{Geq} + y_r) = Mg$$

  Ce qui donne :

$$y_{Geq} = l_0 + y_r - \frac{Mg}{k}$$

Deuxième méthode:

- À l'équilibre statique, la dérivée de l'énergie potentielle par rapport à la coordonnée généralisée y est nulle. L'expression de l'énergie potentielle est donnée par :

$$E_p = \frac{1}{2}k(y_G - y_r - l_0)^2 + Mgy + Cste$$

  Avec

$$y = y_G - y_{Geq}$$

  D'où :

$$E_p = \frac{1}{2}k(y + y_{Geq} - y_r - l_0)^2 + Mgy + Cste$$

- **Avec la condition d'équilibre**, on a :

$$\left.\frac{\partial E_p}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$$

  Après dérivation et on remplace la valeur de y par zéro, on trouve ainsi:

$$k(y_{Geq} - y_r - l_0) + Mg = 0$$

  Ce qui donne aussi:

$$y_{Geq} = l_0 + y_r - \frac{Mg}{k}$$

- L'énergie cinétique s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2}M\dot{y}_G^2 = \frac{1}{2}M(\dot{y}-\dot{y}_{Geq})^2 = \frac{1}{2}M\dot{y}^2$$

Car y_{GEq} est une constante.

- L'énergie potentielle de pesanteur est donnée comme suit:

$$E_{p1} = Mgy$$

Sachant que y_{Geq} est choisie comme la référence de l'énergie potentielle.

- L'énergie potentielle élastique se calcule comme suit :

$$E_{p2} = \frac{1}{2}k(y_G - y_r - l_0)^2 = \frac{1}{2}k(y_G - y_{Geq} + y_{Geq} - y_r - l_0)^2$$

Avec :

$$y_{Geq} = l_0 + y_r - \frac{Mg}{k} \text{ et } y = y_G - y_{Geq}$$

Ce qui donne:

$$E_{p2} = \frac{1}{2}k(y - \frac{Mg}{k})^2$$

- L'énergie potentielle totale s'écrit donc :

$$E_p = E_{p1} + E_{p2} = \frac{1}{2}k(y - \frac{Mg}{k})^2 + Mgy$$

- Le Lagrangien du système s'écrit :

$$L(\dot{y}, y) = E_c - E_p = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 - \frac{1}{2}ky^2$$

Le Lagrangien est donné à une constante près qui n'affecte pas le résultat final.

Partie B :

- La fonction de dissipation D est donnée dans le cas d'une force de frottement de type visqueuse sous la forme:

$$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{y}^2$$

L'extrémité inferieure de l'amortisseur étant fixe.

- L'équation d'Euler Lagrange est donnée dans le cas d'un système amorti par :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{y}}$$

Après dérivation on trouve l'équation différentielle du mouvement du système s'écrit:

$$M\ddot{y} + \alpha\dot{y} + ky = 0$$

On peut noter que le terme $\alpha\dot{y}$ a la dimension d'une force, c'est-à-dire, qu'il a l'unité $\frac{kg.m}{s^2}$, ce qui donne l'unité de α comme $\frac{kg.}{s}$.

- La solution de l'équation différentielle est de la forme e^{rt}**,** d'où l'équation caractéristique est obtenue comme suit :

$$r^2 + \frac{\alpha}{M}r + \frac{k}{M} = 0$$

Pour que cette équation ait une solution double (caractéristique du mouvement critique), il faudra que son discriminant Δ soit nul, d'où:

$$\Delta = (\frac{\alpha}{M})^2 - 4(\frac{k}{M})$$

Ce qui donne :

$$\alpha = 2\sqrt{kM} = 2.10^4\, kg/s$$

- Cette valeur numérique de α représente le degré d'amortissement pour lequel le système est sur le point de passer d'un mouvement oscillatoire vers un mouvement apériodique (pas d'oscillation) et vice versa. rappelons que pour cette valeur de α, le système n'oscille pas encore mais revient plus rapidement vers sa position d'équilibre.

<u>Partie C</u> :

- Le véhicule se déplace à une vitesse v constante. Le temps nécessaire pour que ce dernier se déplace sur une longueur L est: $T = \frac{L}{v}$ d'où la vitesse angulaire est donnée par :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\frac{v}{L}$$

- L'équation d'Euler-Lagrange de ce système amorti force:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{y}} + F_e(t)$$

Où $F_e(t)$ est la force généralisée, qui dans ce cas est donnée par :

$$F_e(t) = kA\cos(\omega t)$$

- Dans ce cas la fonction de dissipation D est donnée par :

$$D = \frac{1}{2}\alpha(\dot{y} - \dot{y}_r)^2$$

Avec

$$y_r = R + A\cos(\omega t)$$

- Le Lagrangien du système s'écrit toujours :,

$$L(\dot{y}, y) = E_c - E_p = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 - \frac{1}{2}ky^2$$

- Après dérivation, on trouve:

$$M\ddot{y} + \alpha\dot{y} + ky = \alpha\dot{y}_r + kA\cos(\omega t)$$

- Finalement l'équation différentielle du mouvement s'écrit alors :

$$M\ddot{y} + \alpha\dot{y} + ky = -\alpha\omega A\sin(\omega t) + kA\cos(\omega t)$$

- En notation complexe l'équation différentielle s'écrit sous la forme suivante :

$$M\ddot{\tilde{y}} + \alpha\dot{\tilde{y}} + k\tilde{y} = \alpha\frac{d}{dt}(Ae^{j\omega t}) + kAe^{j\omega t}$$

- Après simplification on obtient :

$$\ddot{\tilde{y}} + \frac{\alpha}{M}\dot{\tilde{y}} + \frac{k}{M}\tilde{y}(t) = \frac{\alpha}{M}j\omega Ae^{j\omega t} + \frac{k}{M}Ae^{j\omega t}$$

- Il faut noter que $\tilde{y}(t)$ n'est pas la solution de l'équation différentielle du système étudié, mais plutôt sa partie réelle
- On se propose de résoudre l'équation différentielle. On pose donc la solution sinusoïdale sous la forme suivante :

$$\tilde{y}(t) = \tilde{C}e^{j\omega t} \qquad Avec \quad \tilde{C} = Ce^{j\varphi}$$

Où C *et* φ sont respectivement l'amplitude de la solution et le déphasage entre la réponse et l'excitation, respectivement.

- En remplaçant la solution dans l'équation différentielle ci-dessus, on trouve :

$$(-\omega^2 + \frac{k}{M} + j\omega\frac{\alpha}{M})\tilde{C} = A(\frac{\alpha}{M}j\omega + \frac{k}{M})$$

- Ce qui nous donne **l'amplitude en notation complexe** comme suit:

$$\tilde{C} = A\frac{\frac{\alpha}{M}j\omega + \frac{k}{M}}{-\omega^2 + \frac{k}{M} + j\omega\frac{\alpha}{M}}$$

❖ Le **module de l'amplitude** serait :

$$\left|\tilde{C}\right| = A\frac{\sqrt{(\frac{\alpha}{M}\omega)^2 + (\frac{k}{M})^2}}{\sqrt{(-\omega^2 + \frac{k}{M})^2 + (\omega\frac{\alpha}{M})^2}}$$

❖ Le **déphasage entre la réponse et l'excitation**:

$$\varphi = arctg(\frac{\omega\alpha}{k}) - arctg(\frac{\alpha\omega}{k - M\omega^2})$$

- La solution finale mesurable de l'équation différentielle du mouvement du système est la partie réelle la solution complexe et s'écrit comme suit :

$$\tilde{y}(t) = \mathrm{Re}\left(\tilde{C}e^{j(\omega t+\varphi)}\right) = C\cos(\omega t + \varphi)$$