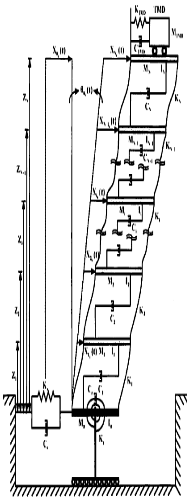
جامعة مولاي إسماعيل
UNIVERSITÉ MOULAY ISMAÏL
المدرسة الوطنية العليا للفنون و المهن
ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D'ARTS ET MÉTIERS

DYNAMIQUE DES SYSTEMES



Chapitre 3

Vibrations des systèmes mécaniques à NDDL

M. ABOUSSALEH
S. ZAKI

Le 19 décembre 2021

Sommaire:

I. INTRODUCTION

II. SYSTEMES LIBRES A PLUSIEURS DDL

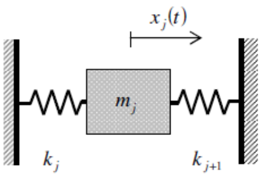
1. Equation de mouvement
2. Méthodes de Résolution
   - **A. Méthode directe**
   - **B. Méthode de la base modale**
   - **C. Méthode de Rayleigh et Ritz**

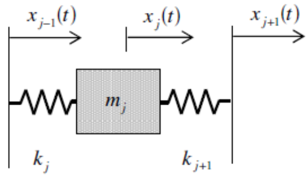
III. SYSTEMES CONSERVATIF FORCE A PLUSIEURS DDL

IV. SYSTÈMES LIBRE AVEC AMORTISSEMENT VISQUEUX

V. SYSTÈMES FORCES AVEC AMORTISSEMENT VISQUEUX

II. INTRODUCTION



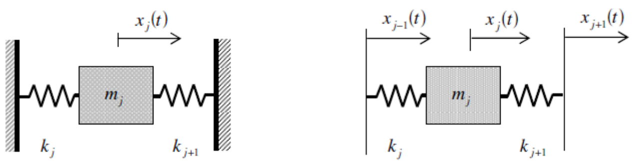


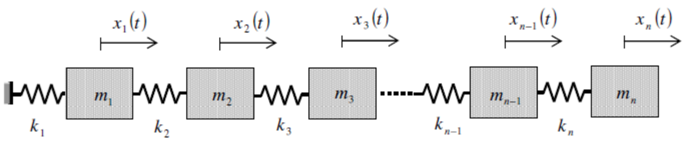
Le nombre de degrés de liberté dépend de la structure du système.

- Si le système est à N points matériels, les mouvements sont des translations et le nombre maximum de degrés de liberté sera égal à 3N.
- Si le système est constitué de N corps étendus, il faut ajouter les rotations et le nombre maximum de degrés de liberté sera égal à 6N.

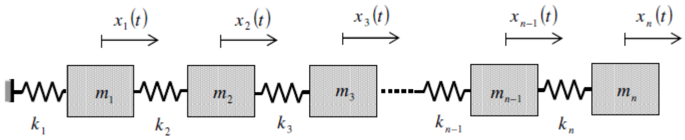
II. SYSTEMES LIBRES A PLUSIEURS DLL

Pour un système à *n degrés de liberté, le vecteur déplacement devient un vecteur colonne n ×1 et les matrices de masse et de raideur sont des matrices carrées n × n*





1. Equation de mouvement:



En considérant une masse *j , l'équation d'équilibre s'écrit*

$$m_j\ddot{x}_j = -k_j(x_j - x_{j-1}) + k_{j+1}(x_{j+1} - x_j) \quad j = 1,\dots,n$$

$$= k_j x_{j-1} - (k_j + k_{j+1})x_j + k_{j+1}x_{j+1}$$

Avec $\mathbf{x_0=0}$ et $\mathbf{k_{n+1}=0}$.

L'ensemble de ces équations peut se mettre sous la forme d'un système linéaire

$$M\ddot{X} + KX = 0$$

M : Matrice des masses nxn : $M = dig(m_i)$

K : Matrice des raideurs nxn

$$K = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & -k_3 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & -k_{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & -k_{n-1} & k_{n-1}+k_n & -k_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -k_n & k_n \end{bmatrix}$$

$M^t = M \quad et \quad K^t = K$ **Symétrique**

Dans le cas où la dernière masse est connectée par une raideur $\mathbf{k_{n+1}}$ à une partie fixe.

Le dernier élément sur la diagonale de la matrice de raideur devient $K_{nn} = \mathbf{k_n + k_{n+1}}$

2. Méthodes de Résolution

A. Méthode directe :

Equation du mouvement: $M\ddot{X} + KX = 0$

Déterminer les racines de: $\det\left(-\omega^2 M + K\right)=0$

D'où les valeurs propres $(\omega_i \;\; et \;\; \phi_i)$

Il faut noter que cette méthode n'est pas adaptée pour un nombre élevé de d.d.l.

B. Méthode de la base modale

$$Equation \;\; du \;\; mouvement \;\; \left[M\right]\left\{\ddot{x}\right\} + \left[K\right]\left\{x\right\} = \left\{0\right\}$$

On cherche la solution générale sous forme $\left\{x\right\} = \left\{X\right\}e^{j\omega t}$

$$\Rightarrow -w^2\left[M\right]\left\{X\right\} + \left[K\right]\left\{X\right\} = \left\{0\right\}$$

$$\Rightarrow \left(\left[K\right] - w^2\left[M\right]\right)\left\{X\right\} = \left\{0\right\}$$

$$\Rightarrow \det\left(\left[K\right] - w^2\left[M\right]\right) = 0$$

$\Rightarrow$ les pulsations propre $\omega_i \quad i = 1,\ldots n$

et $\left(\left[K\right] - w_i^2\left[M\right]\right)\left\{\phi_i\right\}=0 \Rightarrow$ les vecteurs propres ϕ_i

Orthogonalité des modes propres:

$\forall i$ et j on a

$$\left([K]-w_i^2[M]\right)\{\phi_i\}=\{0\}$$

$$\left([K]-w_j^2[M]\right)\{\phi_j\}=\{0\}$$

$\Rightarrow$ En multipliant la premiere par $\{\phi_j\}^t$ et l'autre par $\{\phi_i\}^t \Rightarrow$

$$\{\phi_j\}^t\left([K]-w_i^2[M]\right)\{\phi_i\}=\{0\}$$

$$\{\phi_i\}^t\left([K]-w_j^2[M]\right)\{\phi_j\}=\{0\}$$

Orthogonalité des modes propres:

$\Rightarrow$ En transopsant la premiere avec $[K]^t=[K]$ et $[M]^t=[M]$

$$\{\phi_i\}^t\left([K]-w_i^2[M]\right)^t\{\phi_j\}=\{\phi_i\}^t\left([K]-w_i^2[M]\right)\{\phi_j\}=\{0\}$$

$$\Rightarrow \{X_i\}^t\left([K]-w_i^2[M]\right)\{X_j\}-\{X_i\}^t\left([K]-w_j^2[M]\right)\{X_j\}=\{0\}$$

$$\Rightarrow \{\phi_i\}^t\left(w_i^2-w_j^2\right)[M]\{\phi_j\}=\{0\}\Rightarrow \text{si } \left(w_i^2-w_j^2\right)\neq 0 \quad (i\neq j)$$

$$\Rightarrow \{\phi_i\}^t[M]\{\phi_j\}=\{0\}\Rightarrow \text{ Les vecteurs propres sont M orthogonaux}$$

$$\Rightarrow \{\phi_i\}^t[K]\{\phi_j\}=\{0\}\Rightarrow \text{ Les vecteurs propres sont K orthogonaux}$$

Coordonnées généralisées: *q*

Posons:

$\{x(t)\} = [\phi]\{q(t)\}$ avec $q(t)$ coordonnées généralisées

$[\phi]$ matrice modale (matrice des vecteurs propres par Colonne)

Par exemple pour 2 ddl

$$[\phi] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}$$

On a:

$$\{\phi_i\}^t [M]\{\phi_j\} = \{0\} \Rightarrow \text{Pour } i = j \rightarrow \{\phi_i\}^t [M]\{\phi_i\} = m_i$$

$$\{\phi_i\}^t [K]\{\phi_j\} = \{0\} \Rightarrow \text{Pour } i = j \rightarrow \{\phi_i\}^t [K]\{\phi_i\} = k_i$$

$$Avec\ \{\phi_i\}^t \left([K] - w_i^2 [M]\right)\{\phi_i\} = \{0\} \Rightarrow \omega_i^2 = \frac{k_i}{m_i}$$

D'où

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \Rightarrow$$

$$[M][\phi]\{\ddot{q}\} + [K][\phi]\{q\} = \{0\} \Rightarrow$$

$$[\phi]^t [M][\phi]\{\ddot{q}\} + [\phi]^t [K][\phi]\{q\} = \{0\}$$

Equations découplées $\Rightarrow \forall i$ on a $m_i \ddot{q}_i + k_i q_i = 0 \Rightarrow$

$$\ddot{q}_i + \frac{k_i}{m_i} q_i = 0 \Rightarrow \ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0$$

Equation du système à 1 ddl

$$\Rightarrow q_i = q_{i0} \cos(\omega_i t) + \frac{\dot{q}_{i0}}{\omega_i} \sin(\omega_i t)$$

Conditions initiales en fonction des q_i

On a: $$q_{i0} = [\phi]^{-1}\{x_{i0}\} \text{ et } \dot{q}_{i0} = [\phi]^{-1}\{\dot{x}_{i0}\}$$

$$\{\phi_i\}^t[M]\{\phi_i\} = m_i \Rightarrow [\phi]^t[M][\phi] = diag[m_i] \Rightarrow$$

$$[\phi]^t[M] = diag[m_i][\phi]^{-1} \Rightarrow [\phi]^{-1} = diag\left[\frac{1}{m_i}\right][\phi]^t[M]$$

$$\{q_0\} = diag\left[\frac{1}{m_i}\right][\phi]^t[M]\{x_0\} \text{ et } \{\dot{q}_0\} = diag\left[\frac{1}{m_i}\right][\phi]^t[M]\{\dot{x}_0\}$$

$$Avec\ diag\left[\frac{1}{m_i}\right] = \left(diag[m_i]\right)^{-1}$$

C. Méthode de Rayleigh et Ritz

La méthode de Rayleigh permet de déterminer une valeur approchée de la plus basse fréquence de résonance d'un Système (1DDL). Ritz a généralisé la méthode de Rayleigh pour réduire le nombre de d.d.l d'un système et estimer les plus basses fréquences.

$$\{x\} = [\gamma_1, \gamma_2, ...\gamma_N]\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ . \\ . \\ p_N \end{Bmatrix} \quad N < n \quad \text{Ou } n\text{: ddl du système}$$

Où γ_i est un vecteur de dimension n.

Les γ_i doivent vérifier les conditions aux limites.

Énergie Cinétique: $E_c = \frac{1}{2}\{\dot{x}\}^t [M]\{\dot{x}\} = \frac{1}{2}\{\dot{p}\}^t [\gamma]^t [M][\gamma]\{\dot{p}\}$

Énergie Potentielle: $E_p = \frac{1}{2}\{x\}^t [K]\{x\} = \frac{1}{2}\{p\}^t [\gamma]^t [K][\gamma]\{p\}$

Équations de Lagrange : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial x} + \frac{\partial E_p}{\partial x} = 0$

$$\Rightarrow [\gamma]^t [M][\gamma]\{\ddot{p}\} + [\gamma]^t [K][\gamma]\{p\} = \{0\}$$

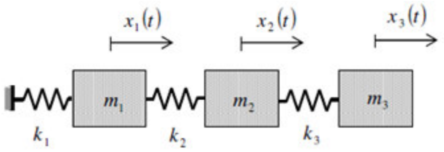
L'ordre de cette équation est très inférieur à l'équation du mouvement (initiale) car N<n donc les solutions ne sont pas exactes.

Remarque:

En pratique ce n'est pas facile de définir les γ_i, un choix raisonnable de γ_i est la solution statique du système soumis à des forces proportionnelles aux masses.

Applications N°1

Écrire les équations du système de la figure ci-dessous et déterminer les fréquences et modes par la méthode directe , Normer la première composante des modes à l'unité:



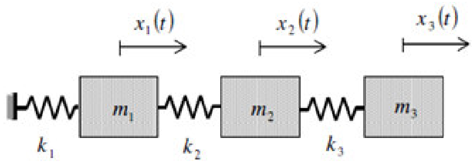
Avec: $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, $m_3 = 3m$ $k_1 = k_3 = k$; $k_2 = 2k_1$

Rép: $w_1 = 0.3243\sqrt{\frac{k}{m}}$; $w_2 = 0.8992\sqrt{\frac{k}{m}}$; $w_3 = 1.980\sqrt{\frac{k}{m}}$;

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.395 \\ 2.038 \end{Bmatrix} \quad \phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.6914 \\ -0.4849 \end{Bmatrix} \quad \phi_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2.4200 \\ 0.2249 \end{Bmatrix}$$

Applications N°2

Même Système que l'application N°1, calculer ω_1 par la méthode de Rayleigh et la méthode itérative , en prenant comme déformé celle obtenue en supposant les masses 1,2,3 soumises à des forces proportionnelles à leur masse et en normant la première composante des modes à l'unité:



III. SYSTEMES CONSERVATIF FORCE A PLUSIEURS DDL

$$[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=\{f(t)\}\Rightarrow$$

$$[M][\phi]\{\ddot{q}\}+[K][\phi]\{q\}=\{f(t)\}\Rightarrow$$

$$[\phi]^t[M][\phi]\{\ddot{q}\}+[\phi]^t[K][\phi]\{q\}=[\phi]^t\{f(t)\}$$

$\Rightarrow$ Equation découplée

$\Rightarrow \forall i$ on a $m_i\ddot{q}_i+k_iq_i=\{\phi_i\}^T\{f(t)\}\Rightarrow$

$$\ddot{q}_i+\frac{k_i}{m_i}q_i=\frac{\{\phi_i\}^t}{m_i}\{f(t)\}\Rightarrow \text{ Avec } \varphi_i(t)=\frac{\{\phi_i\}^t}{m_i}\{f(t)\}$$

$\ddot{q}_i+\omega_i^2q_i=\varphi_i(t)$ *Equation classique du cas à 1ddl*

φ_i: Force généralisée

On sait que la réponse impulsionnelle pour un système faiblement amorti $\zeta < 1$ est donnée par:

$$x(t) = \frac{1/m}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin\left[\left(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}\right)t\right] \Rightarrow$$

$$Pour\ \ \zeta = 0 \Rightarrow x(t) = \frac{1/m}{\omega_0}\sin\left[\omega_0 t\right]$$

D'où on tire la réponse pour un système conservatif ζ=0:

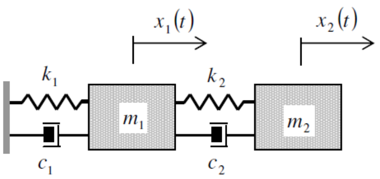
$$q_i(t) = q_{i0}\cos(\omega_i t) + \frac{\dot{q}_{i0}}{\omega_i}\sin(\omega_i t) + \int_0^t \frac{\varphi_i(t)\sin\left(\omega_i(t-\tau)\right)}{\omega_i}dt$$

$$Avec\ \ \varphi_i(t) = \frac{\left\{\phi_i\right\}^t}{m_i}\left\{f(t)\right\}$$

IV. SYSTÈMES AVEC AMORTISSEMENT VISQUEUX

Les systèmes réels sont amortis mais on ne connaît pas bien dans la plupart des cas le modèle d'amortissement. Souvent, le modèle d'amortissement visqueux est utilisé pour des raisons de simplicité. La méthode consiste à considérer un **taux d'amortissement équivalent** ζ

Exemple pour un système à 2 ddl



Equation du mouvement: $M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0$

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{pmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{pmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Cette équation pose problème car la décomposition modale ne peut pas être réalisée par la procédure décrite précédemment car les coefficients d'amortissement créent un couplage supplémentaire entre les équations du mouvement. Plusieurs méthodes numériques sont utilisables pour résoudre ce problème. Cependant, dans bon nombre de cas, il sera possible d'approcher la matrice **C par une combinaison linéaire de matrices de masse et de raideur**

$$\boldsymbol{C = \alpha M+\beta K,\ \alpha\ et\ \ \beta\ constants.}$$

Cette forme d'amortissement est appelé **amortissement proportionnel**

$$M\ddot{x}+\left(\alpha M+\beta K\right)\dot{x}+Kx=0$$

En faisant les changements de variables pour se retrouver dans la base modale,

$$\ddot{q}_i+\left(\alpha+\beta\omega_i^2\right)\dot{q}_i+\omega_i^2 q_i=0$$

En rapprochant cette équation de celle utilisant le taux d'amortissement modal ζ_i, on obtient l'équivalence

$$2\zeta_i\omega_i=\left(\alpha+\beta\omega_i^2\right)\Rightarrow\zeta_i=\frac{\left(\alpha+\beta\omega_i^2\right)}{2\omega_i}$$

$$\Rightarrow\ddot{q}_i+2\zeta_i\dot{q}_i+\omega_i^2 q_i=0$$

C'est l'équation classique de 1 ddl

II. SYSTÈMES FORCES

Equation du mouvement: $M\ddot{x}+C\dot{x}+Kx=F$

F ***est le vecteur des forces appliquées à chaque masse***

$$F^t=\{f_1,f_2,....,f_n\}$$

En suivant toujours la même démarche, on se retrouve après changement de variables (base modale):

$$\ddot{q}_i+\left(\alpha+\beta\omega_i^2\right)\dot{q}_i+\omega_i^2 q=\varphi_i \text{ avec } \varphi_i=\frac{\phi_i^t F}{m_i}$$

$$avec\ \left(\alpha+\beta\omega_i^2\right)=2\zeta_i\omega_i$$

ζ_i amortissement équivalent

D'ou on retrouve l'équation classique de 1 ddl

$$\ddot{q}_i+2\zeta_i\omega_i\dot{q}_i+\omega_i^2 q=\varphi_i \text{ avec } \varphi_i=\frac{\phi_i^t F}{m_i}$$

RECAPITULATIF

Equation du mouvement: $M\ddot{x}+C\dot{x}+Kx=F$

Déterminer les modes propres: ω_i et ϕ_i

Coordonnée généralisé: $x=\phi q$ et $\varphi=\phi^t F$

D'ou équation de 1 ddl (Découplage):

$$\ddot{q}_i+2\zeta_i\omega_i\dot{q}_i+\omega_i^2 q=\varphi_i$$

Appliquer les résultats de 1ddl

Applications N°3

Appliquer l'ensemble des méthodes vu précédemment pour retrouver la réponse du Système ci-contre, en supposant que la dernière masse subie une excitation harmonique . Normer la première composante des modes à l'unité: