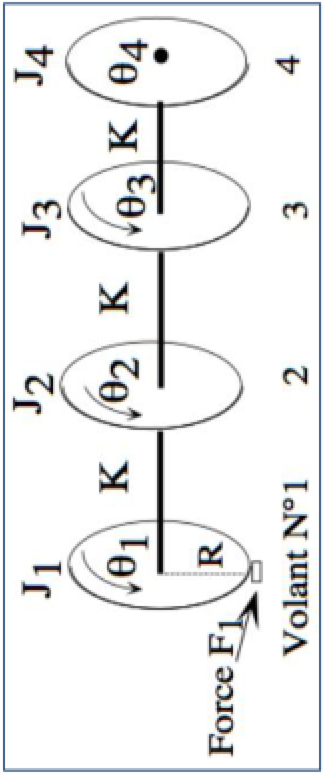
جامعة مولاي إسماعيل
UNIVERSITÉ MOULAY ISMAÏL

المدرسة الوطنية العليا للفنون و المهن
ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D'ARTS ET MÉTIERS



VIBRATION MECANIQUE

Chapitre 2

Vibrations des systèmes mécaniques à deux degrés de liberté

M. ABOUSSALEH
S. ZAKI

Le 25 décembre 2020

Sommaire:

I. Définition:

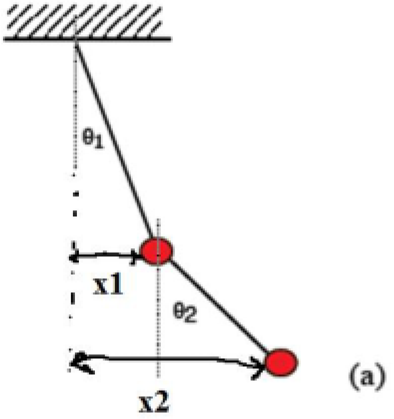
Un système en oscillation est à deux degrés de liberté (2DDL) si deux paramètres indépendants sont nécessaires et suffisants pour décrire son mouvement.

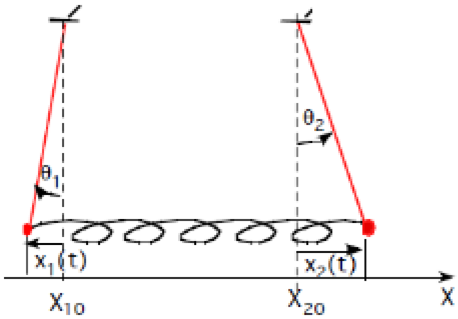
Il est important de remarquer que l'ensemble des degrés de liberté n'est pas en général unique.

Ci-contre, on peut choisir entre:

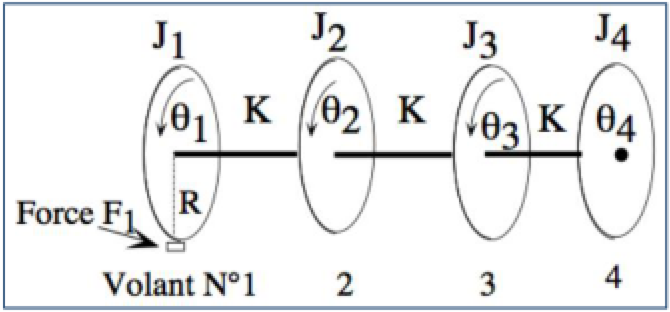
θ_1 et θ_2

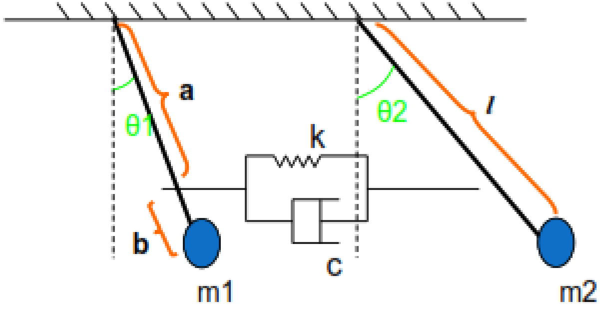
x_1 et x_2

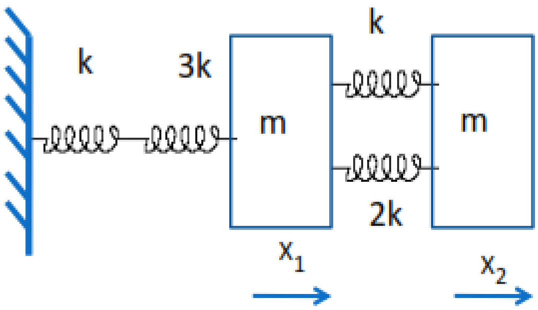


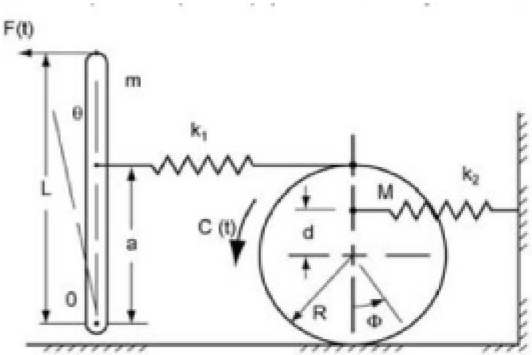


Exemples des systèmes mécaniques à n DDL

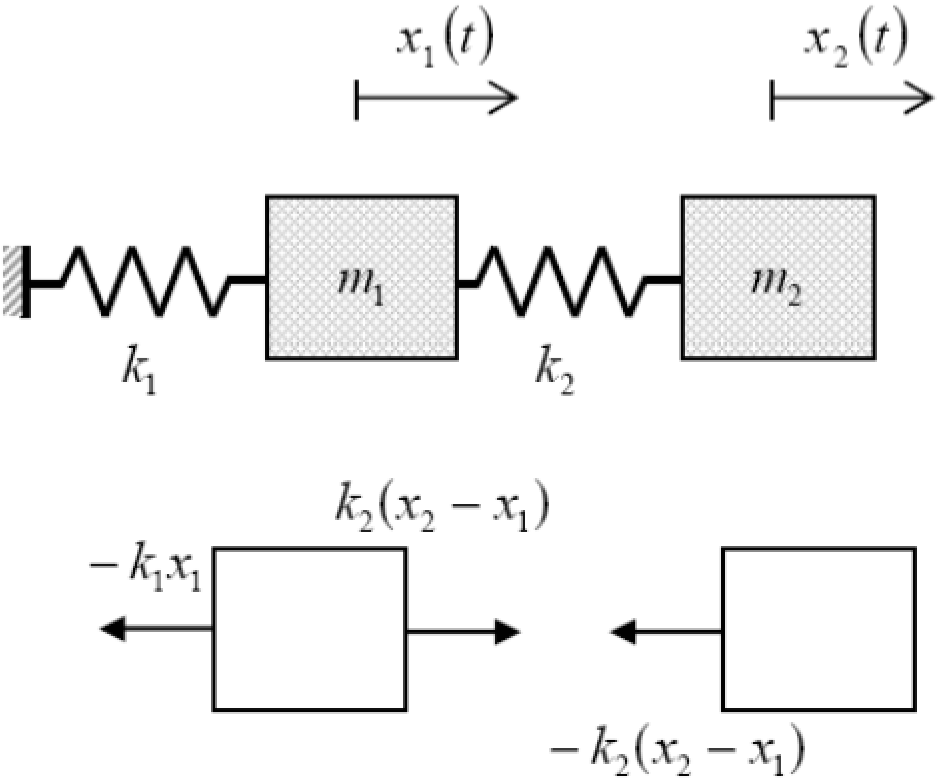




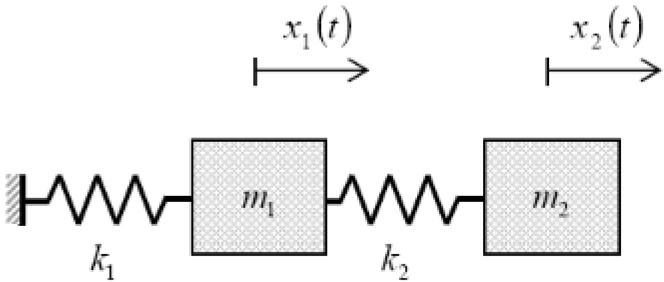


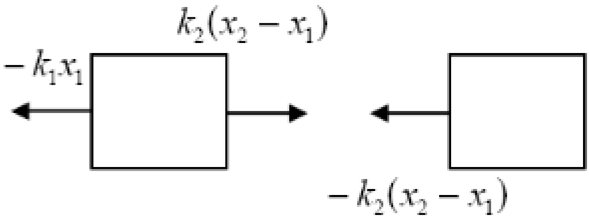


II. Système conservatif (non-amorti)



Principe fondamental de dynamique pour m_1 et m_2





$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - k_2\left(x_1 - x_2\right)$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -k_2\left(x_2 - x_1\right)$$

En écrivant les équations précédentes sous la forme différentielle avec COUPLAGE:

$$m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0$$

$$m_2\ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = 0$$

Conditions aux limites: $x_1(0)\ ;\ \dot{x}_1(0)\ ;\ x_2(0)\ ;\ \dot{x}_2(0)$

Forme matricielle:

$$\ddot{x} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} \text{ et } x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \text{ et } K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\}$$

$$M\ddot{x} + Kx = 0$$

M : matrice des masses

K **: matrice de Rigidité (des raideurs)**

x **: vecteur des déplacements**

$\ddot{x}$ **: vecteur des accélérations**

Les matrices des masses et des raideurs sont symétriques

M : matrice des masses

K : matrice de Rigidité (des raideurs)

x : vecteur des déplacements

$\ddot{x}$: vecteur des accélérations

Les matrices des masses et des raideurs sont symétriques

On considère l'équation caractéristique associée. C'est-à-dire on cherche la solution sous forme:

$$x_1 = A_1 e^{rt} \quad \text{et} \quad x_2 = A_2 e^{rt}$$

Ou A_1 et A_2 sont des constantes à déterminer par les conditions initiales

On obtient alors:

$$\begin{cases}\left(m_1 r^2+k_1+k_2\right)A_1-k_2A_2=0\\ -k_2A_1+\left(m_2r^2+k_2\right)A_2\quad=0\end{cases}\rightarrow\begin{pmatrix}m_1r^2+k_1+k_2 & -k_2\\ -k_2 & m_2r_2+k_2\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}A_1\\ A_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

Ce système n'admet de solution non nulle que si son déterminant est nul

$$\det D=\begin{vmatrix}m_1r^2+k_1+k_2 & -k_2\\ -k_2 & m_2r^2+k_2\end{vmatrix}=0$$

D est appelée matrice dynamique du système

Les constantes A_1 et A_2 ne sont alors définies qu'à un facteur multiplicatif prés

$$\det D = \begin{vmatrix} m_1 r^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & m_2 r^2 + k_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$r^4 + \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \right) r^2 + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} = 0$$

Posons: $B = \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \right)$ et $C = \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}$

L'équation devient: $r^4 + Br^2 + C = 0$

retour

La solution est: $r^2 = \frac{1}{2}\left(-B \pm \sqrt{B^2 - 4C} \right)$

$$r^2 = \frac{1}{2}\left(-B \pm \sqrt{B^2 - 4C}\right)$$

Or B et C sont positifs, les deux solutions r^2 sont alors négatives si $B^2-4C>0$

Calculons B^2-4C

$$B^2 - 4C = \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right)^2 - 4\frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} = \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} - \frac{k_2}{m_2}\right)^2 + 4\frac{k_2^2}{m_1 m_2} \geq 0$$

Donc

$$r^2 = \frac{1}{2}\left(-B \pm \sqrt{B^2 - 4C}\right) \leq 0$$

Solution Complexe (imaginaire pure) pour r

Les solutions sont alors:

$$r^2 = \frac{1}{2}\left(-B \pm \sqrt{B^2 - 4C}\right) \leq 0 \Rightarrow r_1 = \pm j\omega_1 \ \text{ et } \ r_2 = \pm j\omega_2$$

Avec: $$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(B - \sqrt{B^2 - 4C}\right)} \ \text{ et } \ \omega_2 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(B + \sqrt{B^2 - 4C}\right)}$$

Les amplitude A_1 et A_2 ne sont définies qu'à un facteur multiplicateur prés car le système résolu est homogène

$$\begin{cases} \left(m_1 r^2 + k_1 + k_2\right) A_1 - k_2 A_2 = 0 \\ -k_2 A_1 + \left(m_2 r^2 + k_2\right) A_2 \quad = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{A_2}{A_1} = \dfrac{\left(m_1 r^2 + k_1 + k_2\right)}{k_2} \\ = \dfrac{k_2}{\left(m_2 r^2 + k_2\right)} = \beta_2 \end{cases}$$

Calculons alors le rapport des amplitudes:

$$\beta_2 = \frac{A_2}{A_1} = \frac{m_1 r^2 + k_1 + k_2}{k_2} = \frac{k_2}{m_2 r^2 + k_2}$$

En fonction des valeur de r, le rapport des amplitudes prend les valeurs suivantes:

Pour $r_1 = \pm j\omega_1$ on a:

$$\beta_{21} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{-m_1\omega_1^2 + k_1 + k_2}{k_2} = \frac{k_2}{-m_2\omega_1^2 + k_2} = \frac{A_{21}}{A_{11}}$$

Pour $r_2 = \pm j\omega_2$ on a:

$$\beta_{22} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{-m_1\omega_2^2 + k_1 + k_2}{k_2} = \frac{k_2}{-m_2\omega_2^2 + k_2} = \frac{A_{22}}{A_{12}}$$

Soient A_{11} , A_{12} et A_{21} , A_{22} les valeurs de A_1 et A_2 lorsque β_2 prend les valeurs β_{21} et β_{22}:

$$\beta_{21} = \frac{A_{21}}{A_{11}} \qquad\qquad \beta_{22} = \frac{A_{22}}{A_{12}}$$

Les solutions particulières pour $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont alors:

Pour $x_1(t)$:

$$A_{11}e^{j\omega_1 t} \;\; ; \;\; A_{11}e^{-j\omega_1 t} \;\; ; \;\; A_{12}e^{j\omega_2 t} \;\; ; \;\; A_{12}e^{-j\omega_2 t}$$

Pour $x_2(t)$:

$$A_{21}e^{j\omega_1 t} \;\; ; \;\; A_{21}e^{-j\omega_1 t} \;\; ; \;\; A_{22}e^{j\omega_2 t} \;\; ; \;\; A_{22}e^{-j\omega_2 t}$$

La solution est la combinaison de ces solutions particulières, soit:

$$x_1(t) = A_{11}\left(C_1 e^{j\omega_1 t} + D_1 e^{-j\omega_1 t}\right) + A_{12}\left(C_2 e^{j\omega_2 t} + D_2 e^{-j\omega_2 t}\right)$$

$$x_2(t) = A_{21}\left(C_1 e^{j\omega_1 t} + D_1 e^{-j\omega_1 t}\right) + A_{22}\left(C_2 e^{j\omega_2 t} + D_2 e^{-j\omega_2 t}\right)$$

Les constantes C_1, C_2, D_1 et D_2 sont arbitraires. On peut écrire la solution sous la forme suivante:

$$x_1 = X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2)$$

$$x_2 = \beta_{21} X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + \beta_{22} X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2)$$

$$x_1 = X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2)$$

$$x_2 = \underbrace{\beta_{21} X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1)}_{\text{1er Mode Propre}} + \underbrace{\beta_{22} X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2)}_{\text{2ème Mode Propre}}$$

Dans les équations précédentes, on a 4 constantes inconnues: X_1, X_2, φ_1 *et* φ_2 *qui sont déterminées par les conditions initiales:*

x_{10} , $\dot{x}_{10}$ pour la masse m_1

x_{20} , $\dot{x}_{20}$ pour la masse m_2

Un système à 2 degrés de liberté possède 2 modes propres (fréquences propres, pulsations propres)

La solution de x(*t*) *est donnée par l'expression finale suivante*

ou (X_1, X_2, φ_1 *et* φ_2) *sont données par les conditions initiales*

$$x_1(t) = X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2)$$
$$x_2(t) = \beta_{21} X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + \beta_{22} X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2)$$

Détermination des vecteurs propres ϕ:

$$-\omega_1^2 M + K \quad \phi_1 = 0$$
$$-\omega_2^2 M + K \quad \phi_2 = 0$$

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} X_1 \\ \beta_{21} X_1 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 1 \\ \beta_{21} \end{Bmatrix} \text{ pour } \omega_1$$
$$\phi_2 = \begin{Bmatrix} X_1 \\ \beta_{22} X_1 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 1 \\ \beta_{22} \end{Bmatrix} \text{ pour } \omega_2$$

Chaque masse oscille aux deux fréquences ω_1 et ω_2 appelées fréquences naturelles (propres) du système.

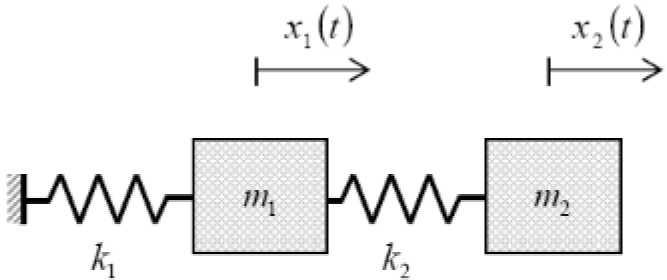
Si les conditions initiales sont choisies telles que $X_2 = 0$, les deux masses oscillent uniquement à ω_1 donc suivant le premier mode propre.

De même si $X_1 = 0$, le système oscillera suivant le deuxième mode propre.

Les fréquences propres du système couplé ne correspondent pas à celles des systèmes isolés

Exemple:

$$m_1 = 9 \text{ Kg} \quad m_2 = 1 \text{ Kg} \quad k_1 = 24 \text{ N/m} \quad k_2 = 3 \text{ N/m}$$



$$\det D = \begin{vmatrix} m_1 r^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & m_2 r^2 + k_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\det D = \begin{vmatrix} 9r^2 + 27 & -3 \\ -3 & r^2 + 3 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \left(r^2 + 2\right)\left(r^2 + 4\right) = 0$$

$$\longrightarrow \omega_1 = \sqrt{2} \text{ rd/s} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \sqrt{4} = 2 \text{ rd/s}$$

Calculons β_{21} et β_{22}

$$\beta_{21} = \frac{k_2}{-m_2\omega_1^2 + k_2} = \frac{3}{-2+3} = 3$$

$$\beta_{22} = \frac{k_2}{-m_2\omega_2^2 + k_2} = \frac{3}{-4+3} = -3$$

$$x_1 = X_1\cos(\omega_1 t - \varphi_1) + X_2\cos(\omega_2 t - \varphi_2)$$

$$x_2 = \beta_{21}X_1\cos(\omega_1 t - \varphi_1) + \beta_{22}X_2\cos(\omega_2 t - \varphi_2)$$

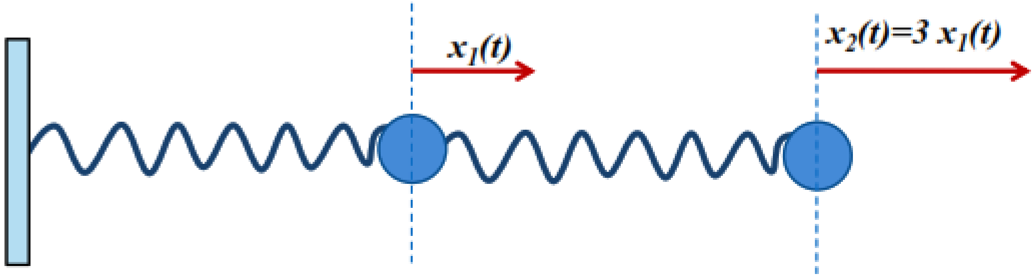
$$\Downarrow$$

$$x_1 = X_1\cos(\omega_1 t - \varphi_1) + X_2\cos(\omega_2 t - \varphi_2)$$

$$x_2 = 3X_1\cos(\omega_1 t - \varphi_1) - 3X_2\cos(\omega_2 t - \varphi_2)$$

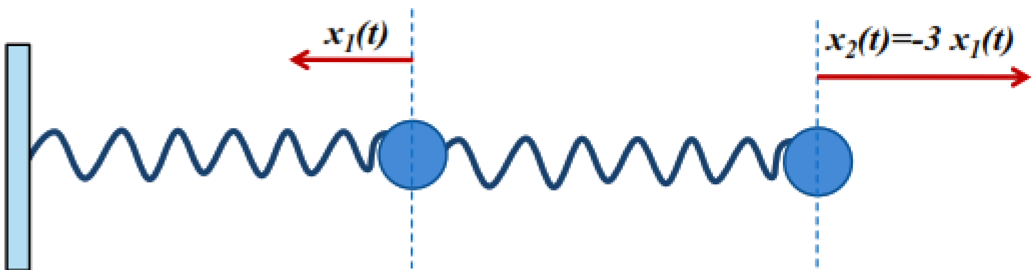
Oscillation suivant 1^er Mode Propre $X_2 = 0$

$$x_1 = X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) \quad \text{et} \quad x_2 = 3X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1)$$

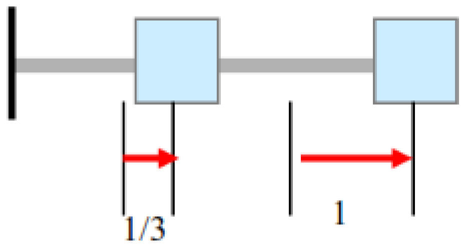


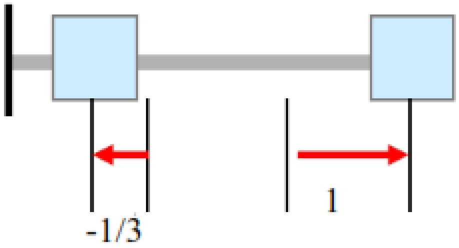
Oscillation suivant 2^ème Mode Propre $X_1 = 0$

$$x_1 = X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) \quad \text{et} \quad x_2 = -3X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2)$$



1^er Mode Propre *2^ème Mode*





$$x_1 = X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2)$$

Solution pour conditions initiales nulles: v(0)=0

$$x_2 = 3X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) - 3X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2)$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{x}_1(t) = -X_1\omega_1 \sin(\omega_1 t - \varphi_1) - X_2\omega_2 \sin(\omega_2 t - \varphi_2)$$

$$\dot{x}_2(t) = -3X_1\omega_1 \sin(\omega_1 t - \varphi_1) + 3X_2\omega_2 \sin(\omega_2 t - \varphi_2)$$

$$\dot{x}_1(t) = -X_1\omega_1 \sin(\omega_1 t - \varphi_1) - X_2\omega_2 \sin(\omega_2 t - \varphi_2)$$

$$\dot{x}_2(t) = -3X_1\omega_1 \sin(\omega_1 t - \varphi_1) + 3X_2\omega_2 \sin(\omega_2 t - \varphi_2)$$

Pour t = 0, v = 0

$$\longrightarrow \quad \begin{aligned} 0 &= X_1\omega_1 \sin(\varphi_1) + X_2\omega_2 \sin(\varphi_2) \\ 0 &= 3X_1\omega_1 \sin(\varphi_1) - 3X_2\omega_2 \sin(\varphi_2) \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$0 = 6X_1\omega_1 \sin(\varphi_1) = 0 \Rightarrow \sin(\varphi_1) = 0 \Rightarrow \varphi_1 = 0$$

$$0 = 6X_2\omega_2 \sin(\varphi_2) = 0 \Rightarrow \sin(\varphi_2) = 0 \Rightarrow \varphi_2 = 0$$

En tenant compte des positions initiales ***$x_1(0)$*** **et** ***$x_2(0)$*****,**

On détermine ***X_1 et X_2***

Soient: $x_1(0)=x_{10}$ **et** $x_2(0)=x_{20}$

$$x_1(t=0)=x_{10}=X_1\cos(0)+X_2\cos(0)=X_1+X_2$$

$$x_2(t=0)=x_{20}=3X_1\cos(0)-3X_2\cos(0)=3X_1-3X_2$$

$$\Downarrow$$

$$X_1=\frac{1}{6}\left(3x_{10}+x_{20}\right) \quad \text{et} \quad X_2=\frac{1}{6}\left(3x_{10}-x_{20}\right)$$

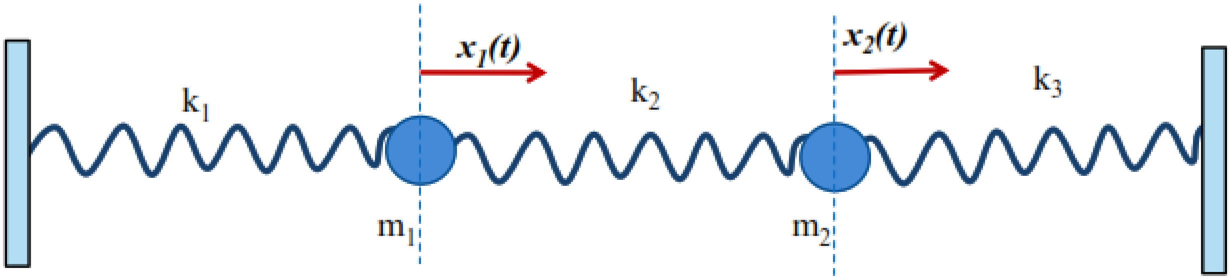
$$x_1(t)=X_1\cos(\sqrt{2}t)+X_2\cos(2t)$$

$$x_2(t)=3\left[X_1\cos(\sqrt{2}t)-X_2\cos(2t)\right]$$

Pour mettre en évidence le premier Mode propre, il faut que $X_2 = 0$ donc prendre à $t = 0$ $x_{20} = 3x_{10}$

De même $X_1 = 0$ donne le second mode propre pour $x_{20} = -3x_{10}$

Exemple 2



1. **Déterminer les matrices des masses, des raideurs et dynamique**
2. **Déterminer les modes propres si $m_2= m$; $m_1=3m$ et $k_1=k_2=k_3=k$**
3. **Quelle est la réponse du système**

PFD donne:

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2)$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) - k_3(x_2 - x_3)$$

Avec:

$$m_1 = 3m \text{ et } m_2 = m$$
$$k_1 = k_2 = k_3 = k$$
$$x_3 = 0$$
$$\Rightarrow 3m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k(x_1 - x_2)$$
$$m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) - kx_2$$

D'où:

$$3m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0$$

$$m\ddot{x}_2 + 2kx_2 - kx_1 = 0$$

Avec:

$$x_1 = X_1 e^{rt} \text{ et } x_2 = X_2 e^{rt}$$

$$\Rightarrow \; 3mr^2 + 2k \;\; X_1 - kX_2 = 0$$

$$-kX_1 + \;\; mr^2 + 2k \;\; X_2 = 0$$

Sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} 3mr^2 + 2k & -k \\ -k & mr^2 + 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow DX = 0$$

$$\rightarrow \det D = 0 \Rightarrow \; 3mr^2 + 2k \;\; mr^2 + 2k \;\; - k^2 = 0$$

$$\Rightarrow r_1^2 = -0.4514\frac{k}{m} \quad \text{et} \quad r_2^2 = -2.2150\frac{k}{m}$$

D'où:

$$r_1 = \pm j\omega_1 \quad \text{et} \quad r_2 = \pm j\omega_2$$

$$\omega_1 = 0.6719\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \omega_2 = 1.4880\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Calcul de β:

$$\beta_{21} = \frac{3mr_1^2\dfrac{k}{m} + 2k}{k} = \frac{k}{mr_1^2\dfrac{k}{m} + 2k} = 3r_1^2 + 2 = \frac{1}{r_1^2 + 2} = 0.6457$$

$$Avec\ r_1^2 = -0.4514\frac{k}{m}$$

$$\beta_{22} = \frac{3mr_2^2\dfrac{k}{m} + 2k}{k} = \frac{k}{mr_2^2\dfrac{k}{m} + 2k} = 3r_2^2 + 2 = \frac{1}{r_2^2 + 2} = -4.646$$

$$Avec\ r_2^2 = -2.215\frac{k}{m}$$

D'où les **Deux** Modes Propres:

$$\text{Pour } r_1^2 = -0.4514\frac{k}{m} \Rightarrow \omega_1 = 0.6719\sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } X_{21} = 0.6458X_{11}$$

$$\rightarrow \begin{Bmatrix} X_{11} \\ X_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{11} \\ 0.6458X_{11} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.6458 \end{Bmatrix} \text{ Vecteur propre}$$

$$\text{Pour } r_2^2 = -2.215\frac{k}{m} \Rightarrow \omega_2 = 1.488\sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } X_{22} = -4.646X_{12}$$

$$\rightarrow \begin{Bmatrix} X_{12} \\ X_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{12} \\ -4.646X_{12} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 1 \\ -4.646 \end{Bmatrix} \text{ Vecteur propre}$$

$$x_1(t) = X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2)$$

$$x_2(t) = \beta_{21} X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + \beta_{22} X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2)$$

Solution finale:

$$\Rightarrow$$

$$x_1(t) = X_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + X_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

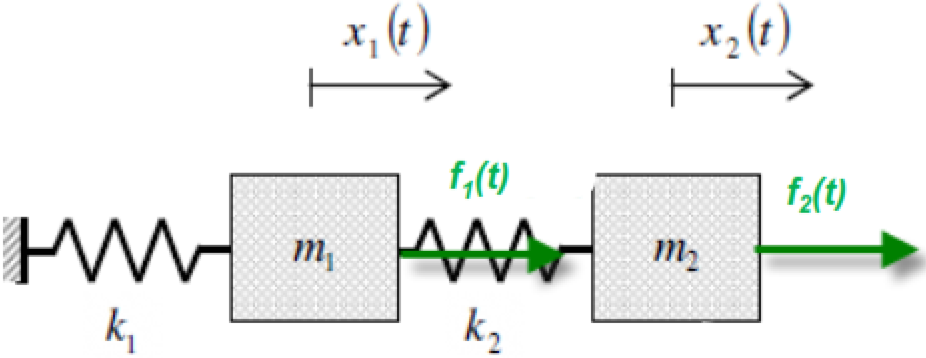
$$x_2(t) = 0.6458 X_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - 4.646 X_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Les constantes X_1, X_2, j_1 et j_2 sont déterminées par les conditions initiales

III. Système Conservatif Excité

Les forces d'excitation $f_1(t)$ et $f_2(t)$ sont appliquées aux deux masses. Le PFD donne:

$$M\ddot{x}(t) + Kx(t) = f(t) \quad \text{Avec } f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) & f_2(t) \end{bmatrix}^T$$



Le PFD donne:

$$[M]\ \ddot{x}\ + [K]\ x\ =\ f$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Passage à la notation complexe:

$f(t) = Fe^{j\omega t} = \begin{Bmatrix} F_1 e^{j\omega t} \\ F_2 e^{j\omega t} \end{Bmatrix}$ de même pour $x(t) = Xe^{j\omega t} = \begin{Bmatrix} X_1 e^{j\omega t} \\ X_2 e^{j\omega t} \end{Bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 m_1 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -\omega^2 m_2 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad \text{avec } [D]\{X\} = \{F\}$$

$$D = \begin{bmatrix} -\omega^2 m_1 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -\omega^2 m_2 + k_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Supposons } \det D \neq 0 \Rightarrow D^{-1} = \frac{1}{\det(D)} \begin{bmatrix} -\omega^2 m_2 + k_2 & k_2 \\ k_2 & -\omega^2 m_1 + k_1 + k_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = [D]^{-1} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

Les amplitudes X_1 et X_2 sont alors:

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} F_1 & -k_2 \\ F_2 & -\omega^2 m_2 + k_2 \end{vmatrix}}{\det(D)} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{\begin{vmatrix} -\omega^2 m_1 + k_1 + k_2 & F_1 \\ -k_2 & F_2 \end{vmatrix}}{\det(D)}$$

$$Avec \quad \det(D) = (k_2 - \omega^2 m_2)(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1) - k_2^2 \neq 0$$

$$Avec \quad \det(D) = (k_2 - \omega^2 m_2)(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1) - k_2^2 \neq 0$$

On peut mettre ce déterminant sous la forme:

$$\det(D) = a\omega^4 + b\omega^2 + c$$

On a déjà montré que cette équation admet deux racines en $\boldsymbol{\omega^2}$:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow \det D = (\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)$$

Les amplitudes X_1 et X_2 sont alors:

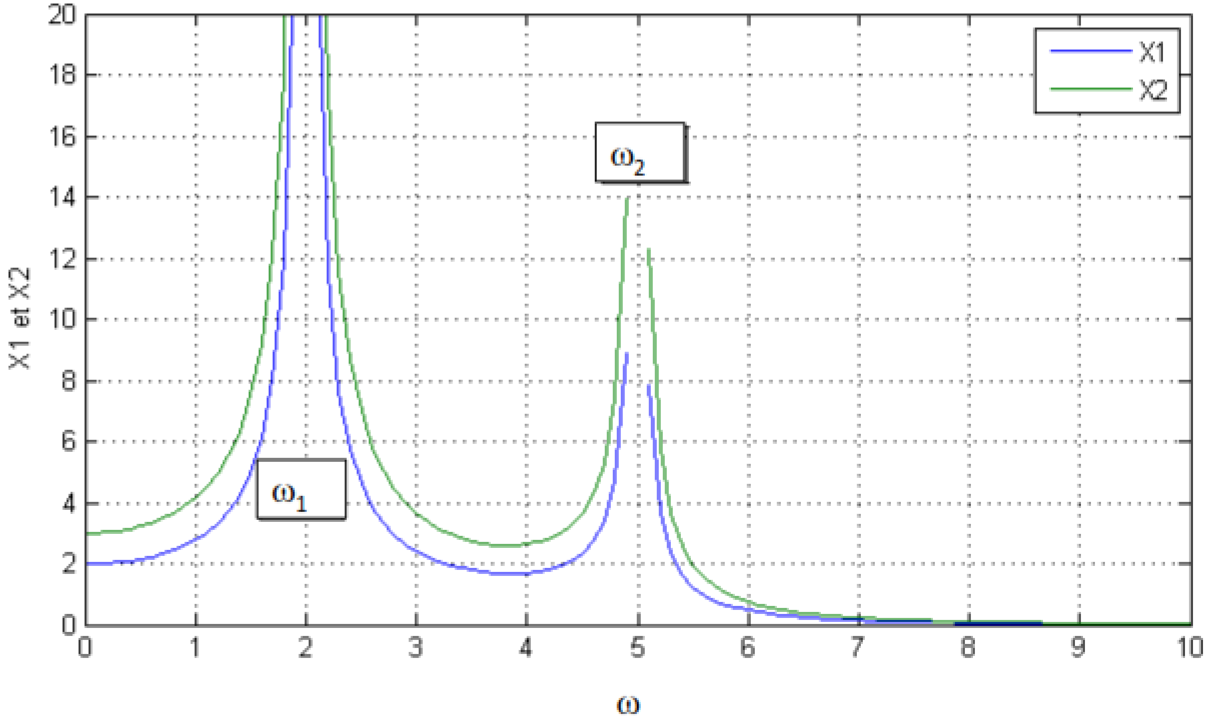
$$X_1 = \frac{(-\omega^2 m_2 + k_2)F_1 + k_2 F_2}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}$$

$$X_2 = \frac{k_2 F_1 + (-\omega^2 m_1 + k_1 + k_2)F_2}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}$$

$$\text{Si } \det D = 0 \Rightarrow \omega = \omega_1 \text{ ou } \omega = \omega_2$$

$$\Rightarrow X_1 \to \infty \text{ et } X_2 \to \infty \Rightarrow \text{Résonance}$$

ω_1 et ω_2 les Deux Pulsations Propres

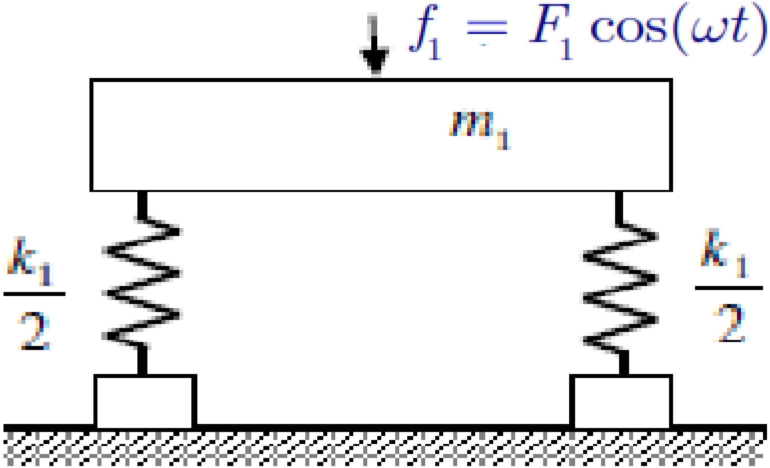


Système à 2 ddl: x(ω)

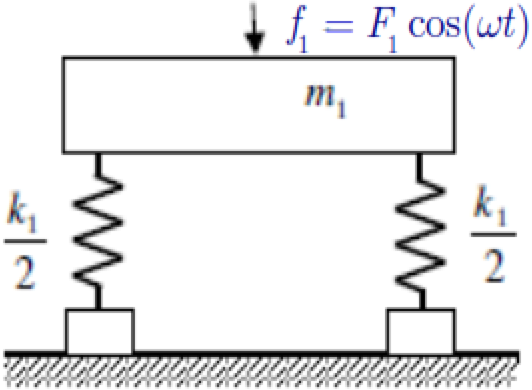
Application Industrielle: Absorbeur de vibration

Système employé pour réduire les vibrations.

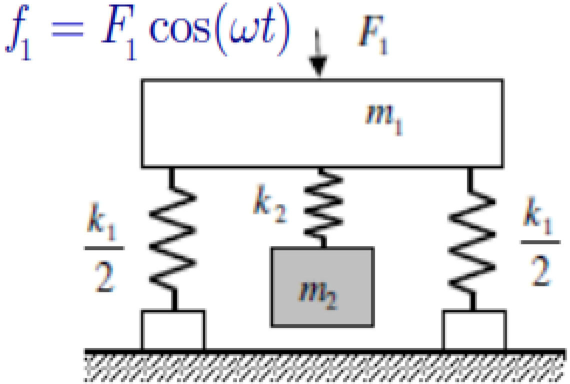
La résonance de ce système se produit lorsque $\Omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$



Problème pour $\omega=\Omega_1$



Problème pour $\omega=\Omega_1$



Ajout de l' absorbeur de vibration

Pour réduire l'amplitude des vibrations, une masse m_2 *est suspendue élastiquement par une raideur* k_2 au premier système (la machine) constituant ainsi un système à 2ddl.

D'après les résultats déjà trouvés, on a:

$$X_1 = \frac{(-\omega^2 m_2 + k_2)F_1 + k_2 F_2}{(k_2 - \omega^2 m_2)(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1) - k_2^2}$$

$$X_2 = \frac{k_2 F_1 + (-\omega^2 m_1 + k_1 + k_2)F_2}{(k_2 - \omega^2 m_2)(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1) - k_2^2}$$

Avec $F_2 = 0 \Rightarrow$

$$X_1 = \frac{(-\omega^2 m_2 + k_2)F_1}{(k_2 - \omega^2 m_2)(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1) - k_2^2}$$

$$X_2 = \frac{k_2 F_1}{(k_2 - \omega^2 m_2)(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1) - k_2^2}$$

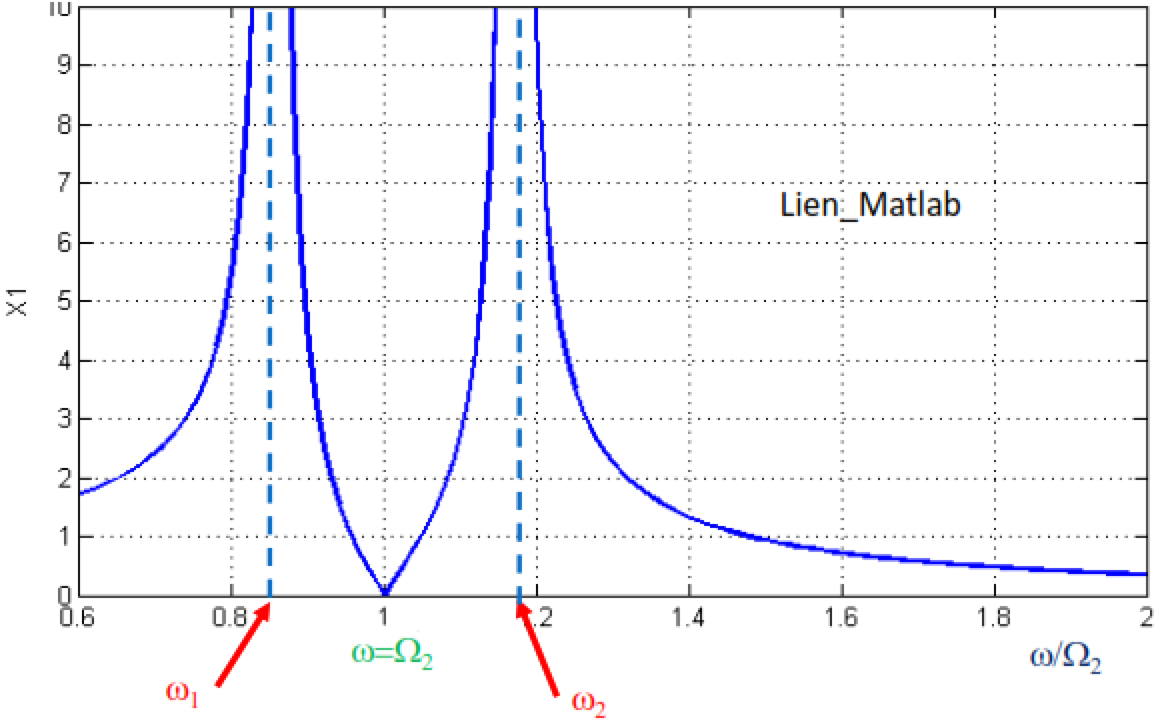
En posant $\Omega_1 = \sqrt{\dfrac{k_1}{m_1}}$ $\quad et \quad$ $\Omega_2 = \sqrt{\dfrac{k_2}{m_2}}$

pulsations propres des deux systèmes isolés

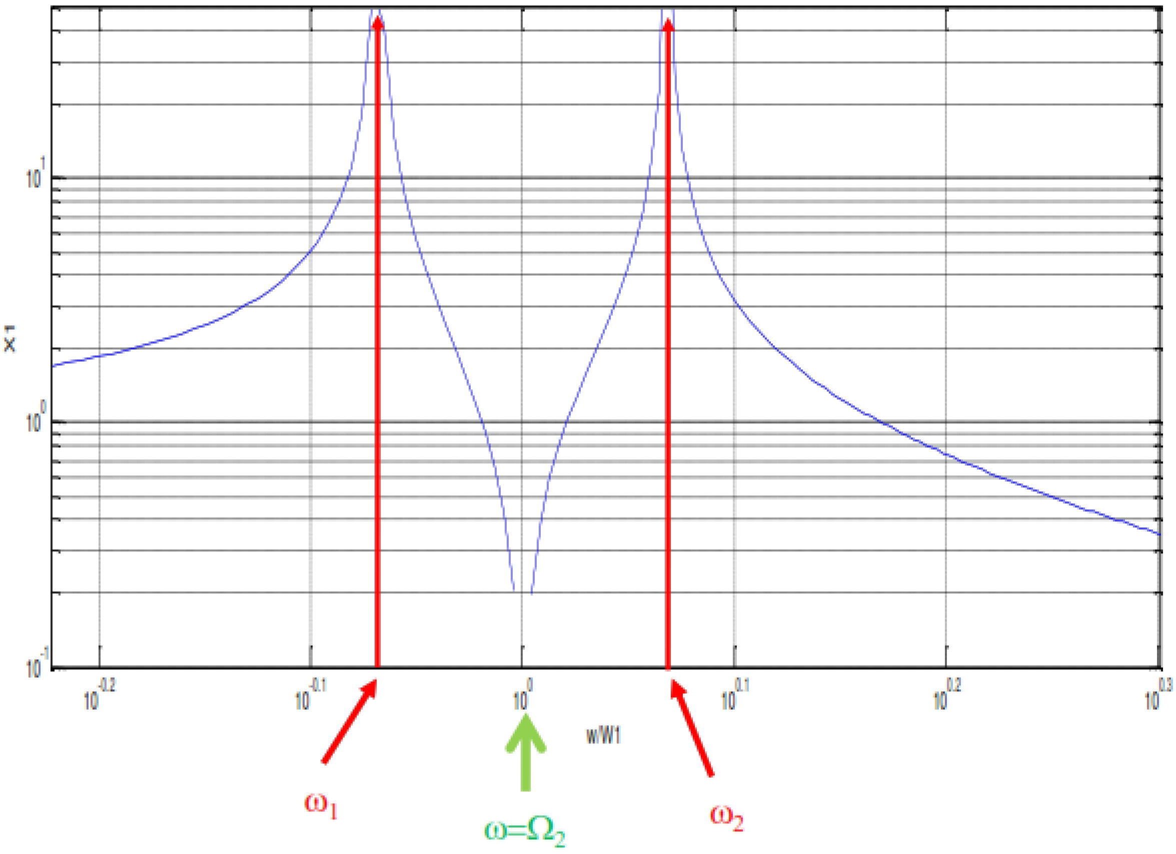
$$\Rightarrow X_1 = \frac{(1 - \dfrac{\omega^2}{\Omega_2^2})\dfrac{F_1}{k_1}}{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\Omega_2^2}\right)\left(1 + \dfrac{k_2}{k_1} - \dfrac{\omega^2}{\Omega_1^2}\right) - \dfrac{k_2}{k_1}}$$

$\Rightarrow$ Si $\Omega_2 \rightarrow \omega$ alors $X_1 \rightarrow 0$ (ω pulsation de l'excitation)

On a accordé Ω_2 sur la pulsation ω dont on veut annuler l'amplitude



Le système avec absorbeur a 2ddl, donc 2 résonances ω_1 et ω_2? Risque de tomber sur une d'elle si ω varie.



X1
10^{1}
10^{0}
10^{-1}
$10^{-0.2}$
$10^{-0.1}$
10^{0}
$10^{0.1}$
$10^{0.2}$
$10^{0.3}$
w/W1
ω_1
$\omega=\Omega_2$
ω_2

Récapitulatif:

$$X_1 = \frac{(-\omega^2 m_2 + k_2)F_1}{\det(D)} \quad et \quad X_2 = \frac{k_2 F_1}{\det(D)}$$

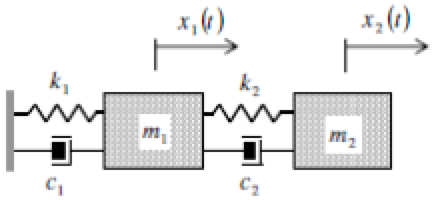
$$\det(D) = (k_2 - \omega^2 m_2)(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1) - k_2^2$$

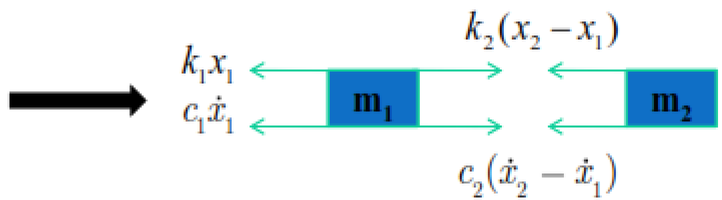
$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_1 = \sqrt{\dfrac{k_1}{m_1}} \quad et \quad \Omega_2 = \sqrt{\dfrac{k_2}{m_2}} \\ \text{pulsations propres/système isolé} \end{array} \right\} \neq \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \text{ et } \omega_2 \\ \rightarrow \text{pulsation de résonance} \\ \rightarrow \text{pulsation propre du système} \end{array} \right\}$$

$$\text{Lorsque } X_1 = 0 \Rightarrow \det D = -k_2^2 \Rightarrow X_2 = \frac{F_1}{k_2}$$

$$ce \ qui \ donne \ la \ Raideur \ de \ l'etouffeur$$

IV. Système libre avec amortissement visqueux:





Le PFD donne:

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_2(x_1 - x_2) - c_1\dot{x}_1 - c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = 0$$

M : Matrice des masses

C : Matrice de l'amortissement

K : Matrice des raideurs

Les solutions sont cherchées sous la forme:

$$x_1 = X_1 e^{rt} \quad \text{et} \quad x_2 = X_2 e^{rt}$$

$$\rightarrow X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{rt} = \bar{X} e^{rt} \rightarrow \bar{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}$$

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = 0$$

$$X = \bar{X}e^{rt} \Rightarrow Mr^2\bar{X}e^{rt} + Cr\bar{X}e^{rt} + K\bar{X}e^{rt} = 0$$

$$\Rightarrow \left(r^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{2é} \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow X_1 = X_2 = 0 \text{ inutile}$$

$$\text{ou bien } \det D = 0$$

$$D = r^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{2é} \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det D = 0$$

$$\Rightarrow a_1 r^4 + a_2 r^3 + a_3 r^2 + a_4 r + a_5 = 0$$

Avec en général les coefficients a_i différents de zéro

Comme les coefficients de l'équation caractéristique sont réels, les racines sont réelles ou complexes conjuguées.

Les racines toutes réelles

$$x_1(t) = X_{11}e^{r_1t} + X_{12}e^{r_2t} + X_{13}e^{r_3t} + X_{14}e^{r_4t}$$
$$x_2(t) = \beta_1 X_{11}e^{r_1t} + \beta_2 X_{12}e^{r_2t} + \beta_3 X_{13}e^{r_3t} + \beta_4 X_{14}e^{r_4t}$$
$$\text{Où l'on a } \beta_i = \left(\frac{X_2}{X_1}\right)_{r=r_i} = \frac{X_{2i}}{X_{1i}}$$

Deux racines réelles et deux autres complexes

r_1 et r_2 les racines réelles

$r_3 = p + j\Omega$ et $r_4 = p - j\Omega$

Solution qui peut encore se réécrire sous la forme équivalente:

$$x_1(t) = X_{11}e^{r_1t} + X_{12}e^{r_2t} + C_1e^{pt}\sin(\Omega t + \varphi_1)$$
$$x_2(t) = \beta_1 X_{11}e^{r_1t} + \beta_2 X_{12}e^{r_2t} + C_2e^{pt}\sin(\Omega t + \varphi_2)$$

Deux paires de racines complexes conjuguées

$$r_{1,2} = p_1 \pm j\Omega_1 \quad et \quad r_{3,4} = p_2 \pm j\Omega_2$$

La solution pourra s'exprimer en termes de fonctions harmoniques :

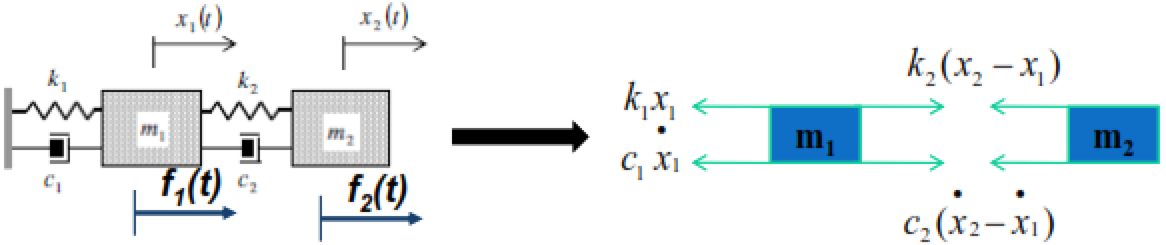
$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= e^{p_1 t}\left(X_{21}e^{j\Omega_1 t} + X_{22}e^{-j\Omega_1 t}\right) + e^{p_2 t}\left(X_{23}e^{j\Omega_2 t} + X_{24}e^{-j\Omega_2 t}\right) \\ x_2(t) &= e^{p_1 t}\left(\beta_1 X_{21}e^{j\Omega_1 t} + \beta_2 X_{22}e^{-j\Omega_1 t}\right) + e^{p_2 t}\left(\beta_3 X_{23}e^{j\Omega_2 t} + \beta_4 X_{24}e^{-j\Omega_2 t}\right) \end{aligned}}$$

Comme les déplacements sont réels il vient alors :

$$\boxed{\begin{aligned} x_1\ \ t\ &= D_{11}e^{p_1 t}\sin\ \ \Omega_1 t + \Phi_{11}\ \ + D_{12}e^{p_2 t}\sin\ \ \Omega_2 t + \Phi_{12} \\ x_2\ \ t\ &= D_{21}e^{p_1 t}\sin\ \ \Omega_1 t + \Phi_{21}\ \ + D_{22}e^{p_2 t}\sin\ \ \Omega_2 t + \Phi_{22} \end{aligned}}$$

C'est une solution harmonique amortie si p<0 (faible amortissement)

V. Système forcé avec amortissement visqueux:



Le PFD donne:

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) - c_1\dot{x}_1 - c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + f_1(t)$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + f_2(t)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F$$

On suppose les forces d'excitations harmoniques:

$$f_1 = F_1 e^{j(\omega t+\varphi_1)} \quad \text{et} \quad f_2 = F_2 e^{j(\omega t+\varphi_2)}$$

$$\Rightarrow f_1 = F_1 e^{j\varphi_1} e^{j\omega t} = \bar{F}_1 e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad f_2 = \bar{F}_2 e^{j\omega t}$$

$\bar{F}_1$ et $\bar{F}_2$ sont des amplitudes complexes

On cherche la solution permanente:

$$x_1 = \bar{X}_1 e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad x_2 = \bar{X}_2 e^{j\omega t}$$

$\bar{X}_1$ et $\bar{X}_2$ sont des amplitudes complexes

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F$$

$$\Rightarrow \left(-\omega^2 \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} + j\omega \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}\right) \begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{Bmatrix}$$

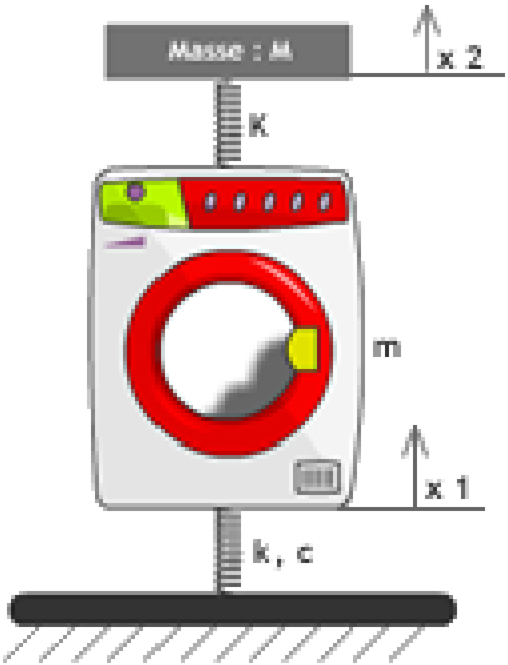
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} \\ \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{Bmatrix} \quad \text{Avec } Z(\omega) \text{ est la matrice d'impédance}$$

D’où on tire la solution:

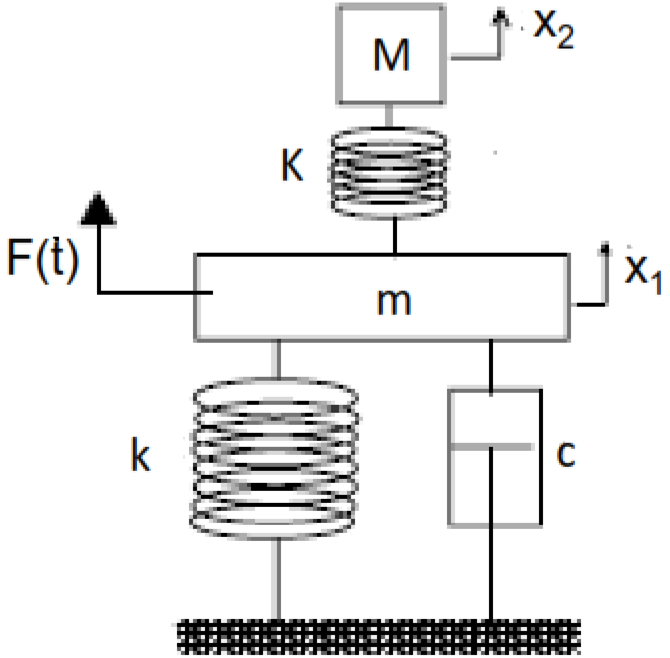
$$\begin{pmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} \\ \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} \\ \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{Bmatrix}$$

Exemple d'application:



Modélisation de la machine



Le PFD donne:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 - K(x_1 - x_2) - c\dot{x}_1 + 10w^2 r\cos(wt) \\ M\ddot{x}_2 = -K(x_2 - x_1) \end{cases}$$

r est le rayon interieur du tambour de la machine

la masse du linge exemple $= 10Kg$

x_1 et x_2 sont pris par rapport à l'équilibre

ω rotation de la machine

On cherche les solutions de x_1 et x_2 sous forme de complexes:

$$x_1 = \bar{X}_1 e^{jwt} \text{ et } x_2 = \bar{X}_2 e^{jwt}$$

D'où

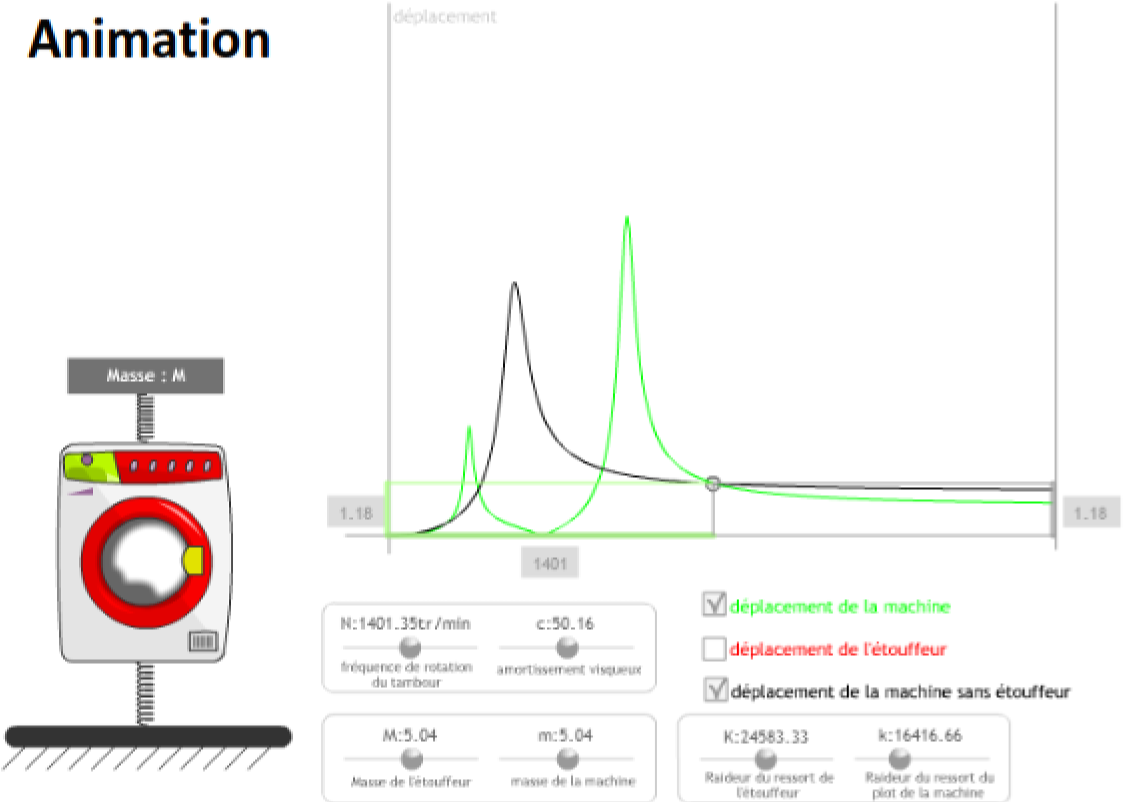
$$\bar{X}_1 = \frac{(10rw^2)(K - Mw^2)}{[(k - mw^2)(K - Mw^2) - KM\omega^2 + jc\omega(K - Mw^2)]}$$

$$\bar{X}_2 = \frac{K}{(K - Mw^2)} \bar{X}_1$$

$$\Rightarrow X_1 = \frac{(10rw^2)(K - Mw^2)}{\sqrt{(k - mw^2)(K - Mw^2) - KM\omega^2}^{\,2} + \; c\omega(K - Mw^2)^{\,2}}$$

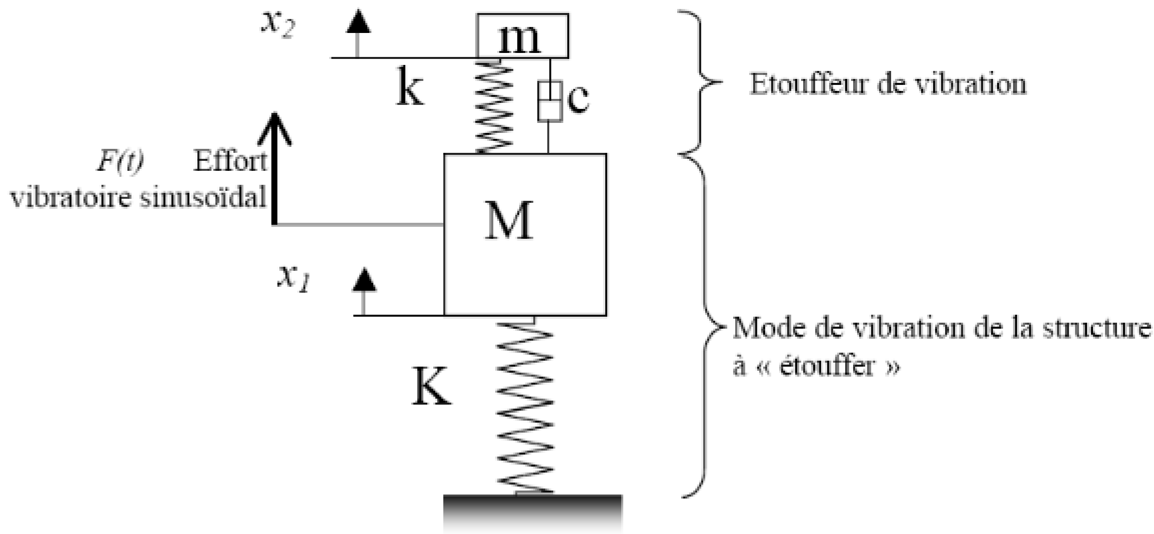
$$X_2 = \frac{K}{(K - Mw^2)} X_1$$

Animation



http://edumeca.free.fr/

Autre exemple de modélisation



Application Industrielle de l'étouffeur de vibration

Un Absorbeur de Vibrations (Tuned Mass Damper) est un système oscillant ajouté à une structure dans le but de réduire sa réponse à une excitation.

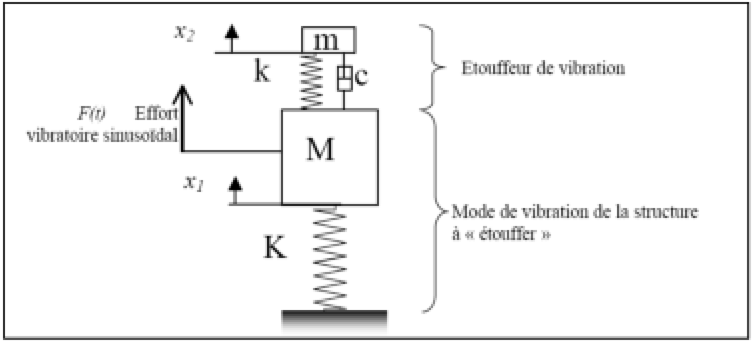
Ce système est efficace dans une bande étroite de fréquence.

Les éléments déterminants pour la mise en place d'un tel système sont:

- Le choix de sa fréquence propre;
- Le choix de sa position.

La fréquence propre de l'absorbeur de vibrations doit être choisie selon deux critères:

- En fonction du spectre de l'excitation;
- En fonction des fréquences propres de la structure à amortir.

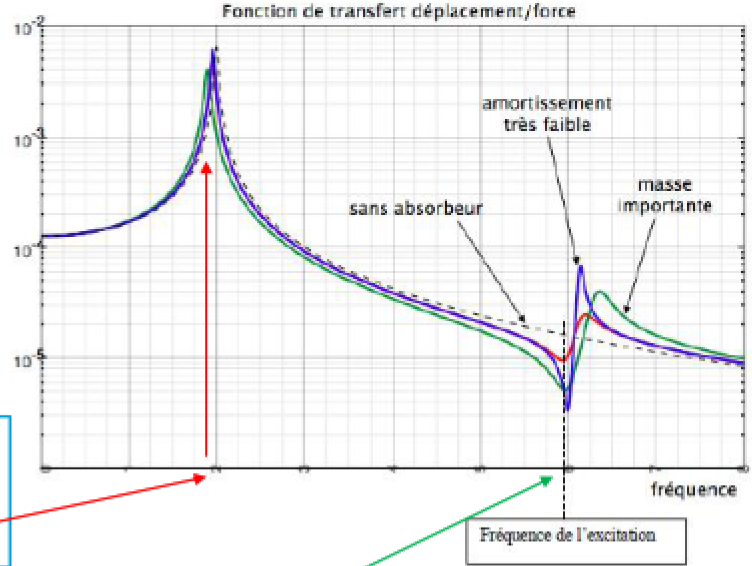


Application Industrielle: Etouffeur de vibration

1.Première Utilisation:

Atténuation de la fréquenc de l'excitation (fixe et connue)

Courbe_matlab2



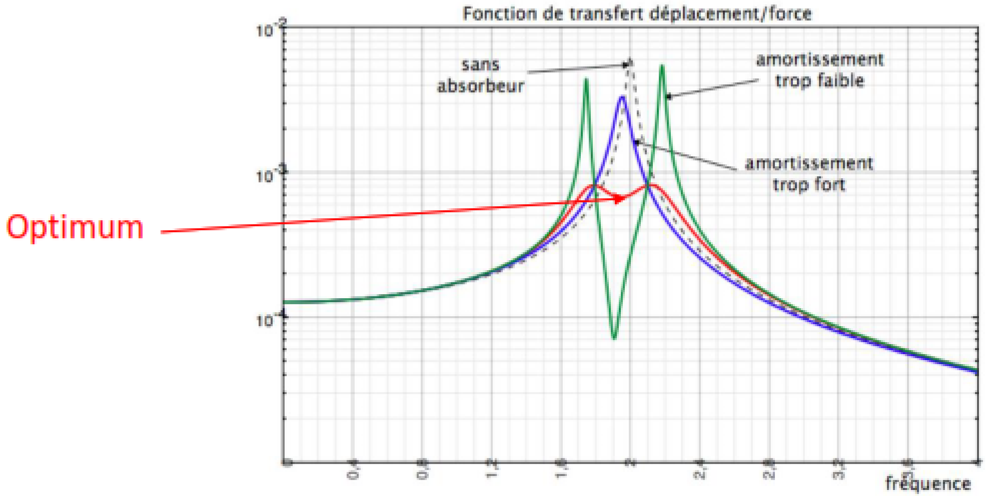
Cette première utilisation peut se révéler néfaste si la fréquence d'excitation est mal évaluée ou évolue au cours de la vie de la structure

la fréquence propre de l'absorbeur de vibrations peut être ajustée pour introduire une antirésonance à cette fréquence d'excitation.

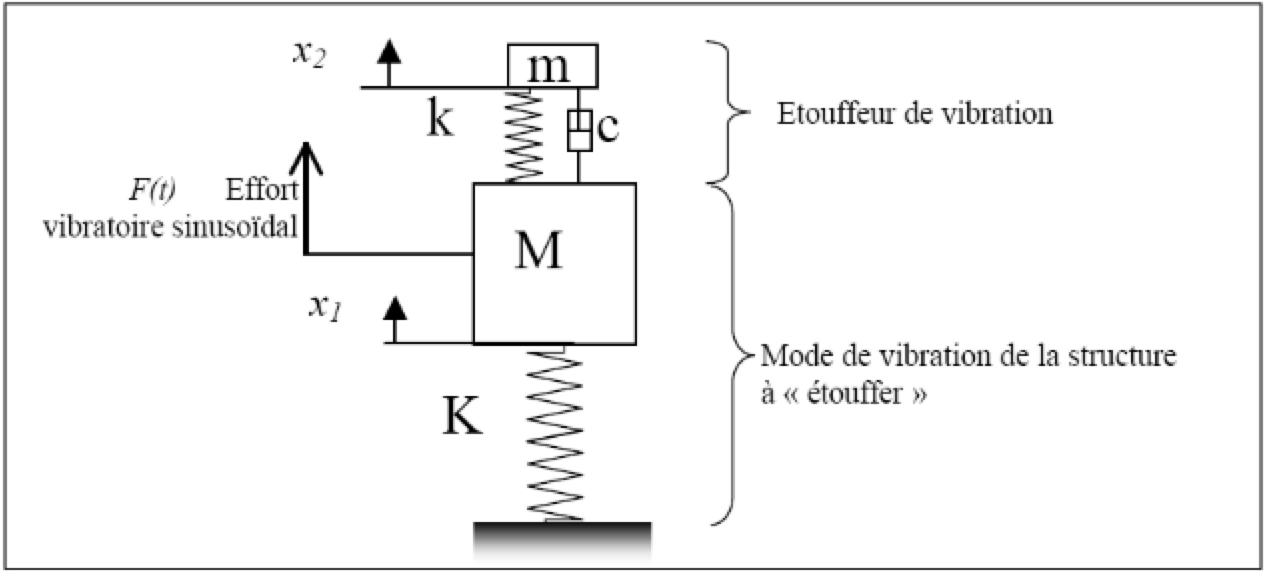
2. Deuxième Utilisation:

Atténuation d'une résonance de la structure (pour une excitation de fréquence variable)

On préfère atténuer la résonance principale de la structure (le premier mode en général)

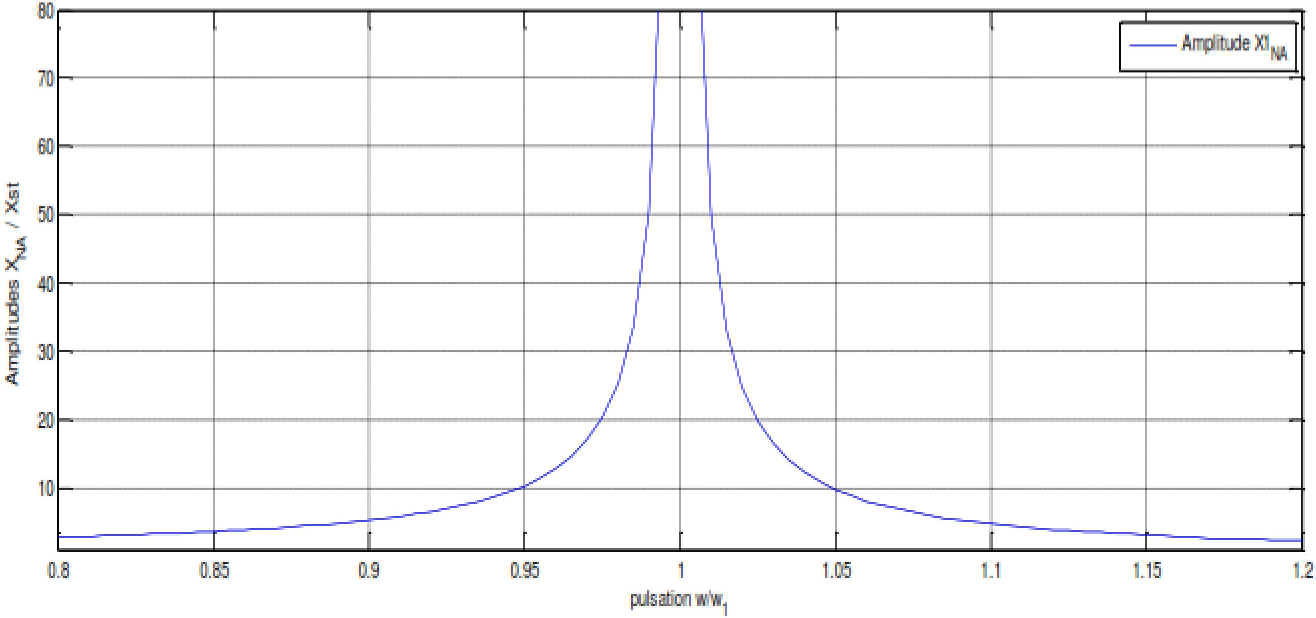


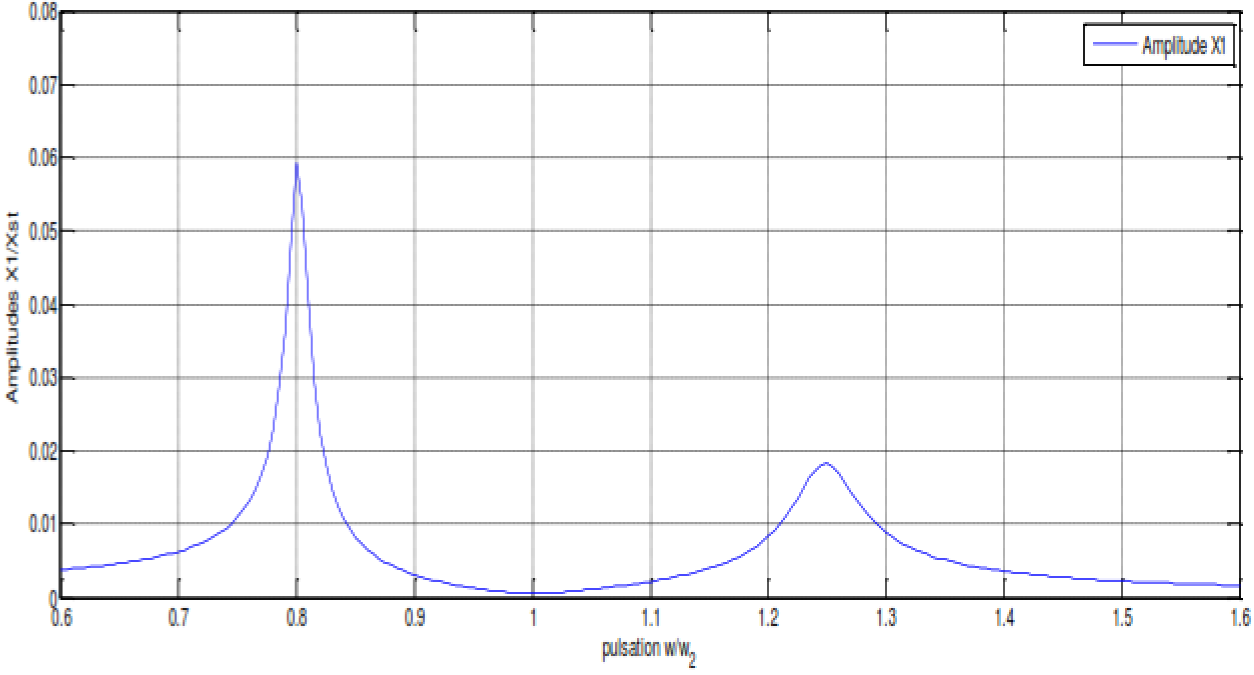
Application Industrielle: Etouffeur de vibration



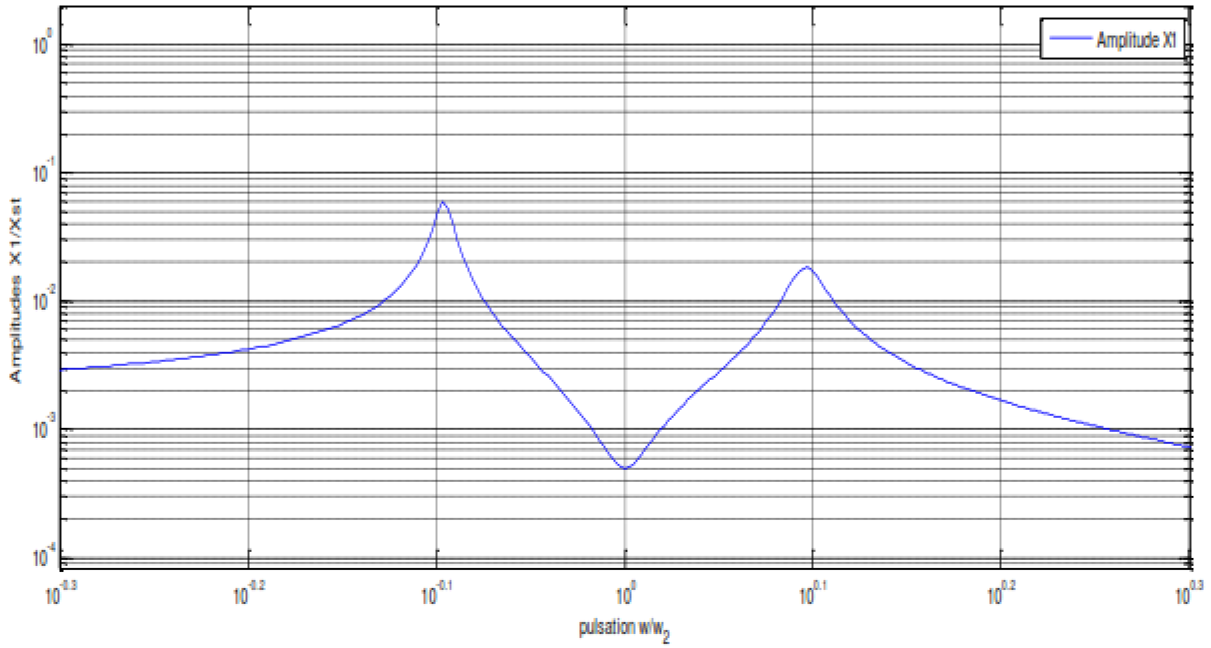
M = 50 Kg; K = 5000 N/m
m = 10 Kg; k = 1000 N/m ; c = 5 Ns/m

Sans étouffeur



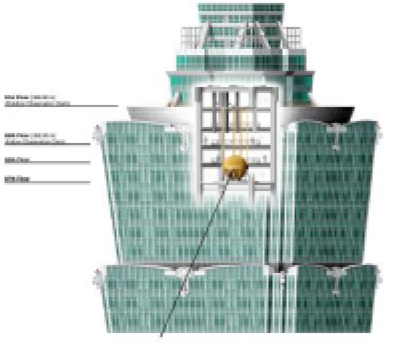


Avec étouffeur

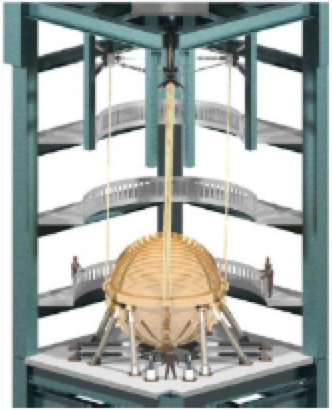


Avec étouffeur

Application Industrielle: Etouffeur de vibration « Exemple »



Etouffeur de vibration utilisé pour limiter les vibrations d'un building lors d'un séisme



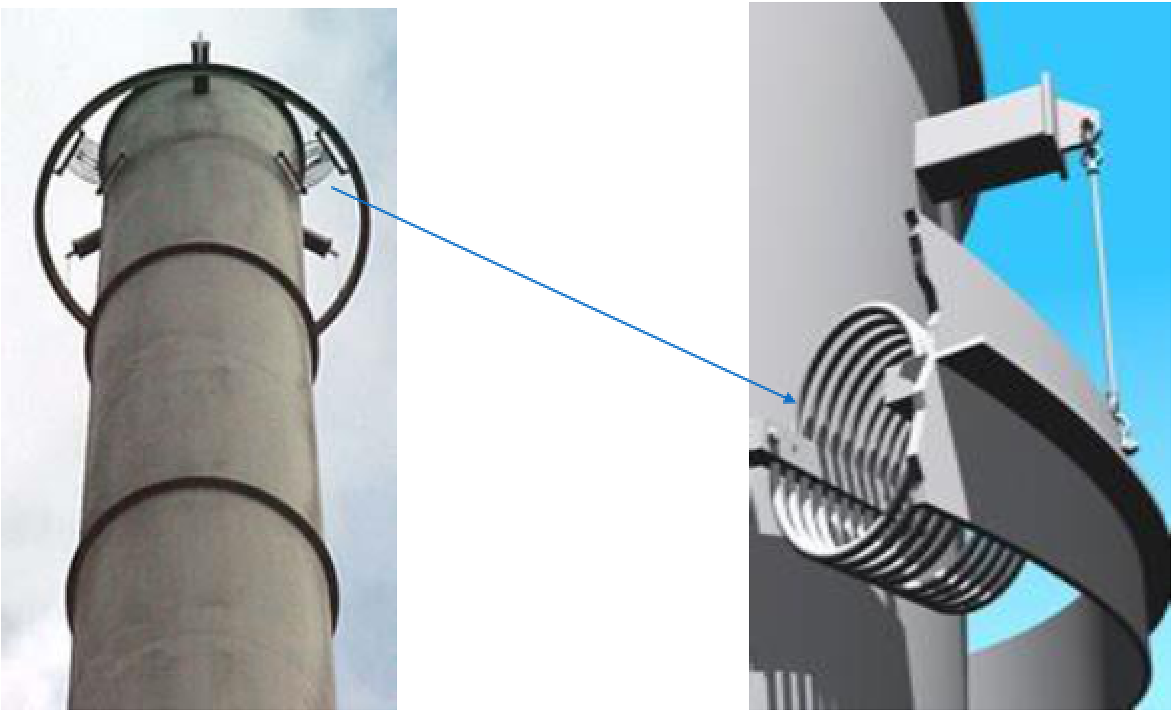
Etouffeur de vibration utilisé pour limiter les vibrations de la spatule d'un ski

Etouffeur de vibration utilisé pour atténuer les vibrations de la transmission

Etouffeur de vibration utilisé sur un bloc moteur

Projet d'étouffeur de vibration pour une F1

Etouffeur de vibration « Exemples »



Etouffeur de vibration « Exemples »

Etouffeur de vibration « Exemples »

Etouffeur de vibration « Exemples »

Amortisseur sous tablier d'un pont

Références Bibliographique

1. L.CHAMPANY , ***Vibration de systèmes continus,*** notes du cours , ENSMP-Paris, 2005.
2. Jean-Claude PASCAL, ***Vibrations et Acoustique 1&2,*** notes du cours , ENSIM-Le Mans, 2005.
3. R. KEITH MOBLEY, ***Root Cause Failure Analysis***, Butterworth–Heinemann-1999, ISBN 0-7506-7158-0
4. J.M. KRODKIEWSK, ***Mechanical Vibration***, Design and Print Center-University of Melbourne 2006
5. Rao V.DUKKIPATI, ***Solving Vibration Analysis Problems Using Matlab,*** New Age International (P) Ltd., Publishers ISBN : 978-81-224-2427-0 .
6. S.TIMOSHENKO, ***Vibration Problems in Engineering,*** New York D. Van Nostrand Company, INC. 1928