

Auszug aus dem Buch

Heinz Rapp, Mathematik - Grundlagen für die Fachschule Technik
2. überarbeitete Auflage, Vieweg Verlag, 1999

Vereinfachen Sie folgende Bruchterme durch Kürzen

$$28. \quad \frac{14ax}{7ay}$$

$$29. \quad \frac{48ax}{-12x}$$

$$30. \quad \frac{3a+3b}{6}$$

$$31. \quad \frac{2a+6b}{3a+9b}$$

$$32. \quad \frac{x-3}{2x-6}$$

$$33. \quad -\frac{a-1}{1-a}$$

$$34. \quad \frac{(-n-1)}{(2-n)(n+1)}$$

$$35. \quad \frac{(ab-ax)(a-b)x}{ax(2b-2a)}$$

$$36. \quad \frac{12b-2a-8}{-2}$$

$$37. \quad \frac{(3x-1)(2a+1)}{a \cdot (1+2a)(3x-1)}$$

$$38. \quad \frac{(x^2-1)(a-1)^2}{(x-1)(a^2-2a+1)}$$

$$39. \quad -\frac{n+\frac{m}{2}}{(-2n-m) \cdot 4}$$

$$40. \quad \frac{(5x-7y)(x-1)}{(25x^2-49y^2)(x-1)}$$

$$41. \quad \frac{4a^2+b^2-4ab}{-(2a-b)^2(a-2b)}$$

$$42. \quad \frac{\sin^2 x + \cos x - 1}{\cos x(\cos x + 1)}$$

$$43. \quad \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha + 1}$$

$$44. \quad \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \tan^2 \alpha}{\tan^2 \alpha - 1}$$

Erweitern von Bruchtermen

Erweitern Sie folgende Bruchterme auf den neuen Nenner.

$$45. \quad \frac{x}{x-2} = \frac{\quad}{x^2-4}$$

$$46. \quad \frac{7x}{13-a} = \frac{\quad}{a^2-169}$$

$$47. \quad \frac{x+1}{2x-1} = \frac{\quad}{1-4x+4x^2}$$

$$48. \quad \frac{2x+3}{x-2} = \frac{\quad}{2x^2-8x+8}$$

$$49. \quad \frac{2x}{1-a} = \frac{\quad}{x-ax-1+a}$$

$$50. \quad \frac{1-x}{2+x} = \frac{\quad}{2+x+2a+ax}$$

$$51. \quad \frac{x-1}{4a-x} = \frac{\quad}{4ax-x^2-4a+x}$$

$$52. \quad \frac{a}{x-1} = \frac{\quad}{2x^2-2}$$

zu 2.2.6.4 Addition und Subtraktion von Bruchtermen

Fassen Sie folgende Brüche durch Addieren bzw. Subtrahieren zusammen.

$$53. \frac{x-1}{a} + \frac{x+1}{a}$$

$$54. \frac{3x-2}{2x} - \frac{4x+2}{2x}$$

$$55. \frac{3a}{a+1} - \frac{2a-3}{a+1}$$

$$56. \frac{ax-3a}{x-4a} + \frac{5a-ax}{x-4a}$$

$$57. \frac{2a}{x-1} - \frac{-a}{1-x} + \frac{1}{1-x}$$

$$58. \frac{4}{2x+3} + \frac{2}{2x+2} - \frac{4}{x+1,5}$$

$$59. \frac{3a}{a^2-x^2} - \frac{a}{x^2-a^2}$$

$$60. \frac{8x}{x-y} - \frac{y}{x-y} - \frac{2x}{2y-2x}$$

$$61. \frac{3x}{x^2-1} - \frac{2x}{1-x^2} - \frac{5x}{x-1}$$

$$62. \frac{4x}{2a} - \frac{3a}{x-1}$$

$$63. \frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1}$$

$$64. \frac{5}{a+b} + \frac{5}{a-b} - \frac{10b}{a^2-b^2}$$

$$65. \frac{2x}{x-2} - \frac{3x}{x^2-4x+4}$$

$$66. \frac{x}{x+1} - \frac{x}{1-x^2} - \frac{3x}{2x-3}$$

$$67. \frac{a}{x+3} + \frac{3a}{x-5} + \frac{8a}{x^2-2x-15}$$

$$68. \frac{x}{a+1} - \frac{x}{a-1} + 2$$

$$69. \frac{2x}{5a-3} - \frac{2}{5a+3} + \frac{10a-6}{25a^2-9}$$

$$70. \frac{2}{a-1} + \frac{4}{a-2} - \frac{4a}{2a^2-6a+4}$$

Beispiel

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $\frac{x-3}{x-4} = 4 - \frac{x-5}{x-4} \quad (G = \mathbb{Q})$.

Lösung

1. Bestimmung der Definitionsmenge

$$D = \mathbb{Q} \setminus \{4\}$$

2. Termaddition des Bruches $\frac{x-5}{x-4}$

(Die beiden Bruchterme sind gleichnamig und lassen sich somit zusammenfassen.)

$$\frac{x-3}{x-4} + \frac{x-5}{x-4} = 4$$

3. Termersetzungen

$$\frac{2x-8}{x-4} = 4$$

4. Termumformungen

(Termmultiplikation, -addition und -subtraktion)

$$2x-8 = 4(x-4)$$

$$2x-8 = 4x-16$$

$$x = 4$$

5. Lösungsmenge

Da $x = 4$ nicht zur Definitionsmenge gehört, hat die Gleichung keine Lösung.

$$\underline{\underline{L = \{ \}}}$$

Beispiel

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $\frac{3}{x-7} - \frac{5}{x-3} = \frac{3}{x-2} - \frac{5}{x} \quad (G = \mathbb{Q})$.

Lösung

Definitionsmenge

$$D = \mathbb{Q} \setminus \{0; 2; 3; 7\}$$

$$\begin{array}{cccc} \frac{3}{x-7} & - & \frac{5}{x-3} & = & \frac{3}{x-2} & - & \frac{5}{x} \\ | & & | & & | & & | \\ 7 & & 3 & & 2 & & 0 \end{array}$$

$$\frac{3(x-2) - 3(x-7)}{(x-7)(x-2)} = \frac{5x - 5(x-3)}{x(x-3)}$$

$$\frac{3x-6-3x+21}{x^2-9x+14} = \frac{5x-5x+15}{x^2-3x}$$

$$\frac{15}{x^2-9x+14} = \frac{15}{x^2-3x}$$

$$x^2-9x+14 = x^2-3x$$

$$-9x+14 = -3x$$

$$6x = 14 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}$$

$$\underline{\underline{L = \left\{ \frac{7}{3} \right\}}}$$

In diesem Beispiel würde das Multiplizieren mit dem HN einen zu großen Rechenaufwand erfordern.

Wir wollen deshalb jede Gleichungsseite für sich zusammenfassen und die Gleichung anschließend bruchfrei machen.

Aufgaben

zu 3.4 Bruchgleichungen

1. $\frac{6}{x} - \frac{3}{2x} + \frac{4}{3x} = 17,5$
2. $\frac{7,5}{9x} - \frac{3}{2x} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6x} - \frac{11}{12x}$
3. $3 - \frac{2}{x} = \frac{6}{x} + 2$
4. $\frac{5x}{x-3} = 2$
5. $\frac{4}{2+x} = \frac{3}{x}$
6. $\frac{4}{x} + \frac{2}{5} = \frac{5}{x} + \frac{3}{4}$
7. $\frac{4}{x-3} = \frac{5}{2x-4}$
8. $\frac{3}{5-3x} - \frac{4}{4-5x} = 0$
9. $\frac{2}{x-2} = \frac{3}{x-1}$
10. $\frac{x+2}{x-2} = \frac{x-4}{x+1}$
11. $\frac{5-3x}{3x+5} = \frac{12-5x}{5x+1}$
12. $\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{9}{x^2-1}$
13. $\frac{2}{x+1} + \frac{1}{1-x} = \frac{1}{x}$
14. $\frac{3-x}{x+1} + \frac{x+2}{x-1} = \frac{6}{x^2-1}$
15. $\frac{5}{x-\frac{7}{4}} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2}$
16. $\frac{2x-1}{x-3} - 3 = \frac{2x-3}{x-3}$
17. $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x-3} + \frac{2x+1}{x^2-4x+3} = 0$
18. $\frac{2x-1}{x+3} + \frac{x+3}{x+2} = \frac{3x^2-2}{x^2+5x+6}$
19. $\frac{1,5}{x-2} - \frac{2}{x+2} = \frac{4,5}{(x-2)(x+2)}$
20. $\frac{6}{x+2} + \frac{1}{2x-6} = \frac{5}{6x-18} + \frac{4}{x+2}$
21. $\frac{9}{x-11} - \frac{4}{x-13} + \frac{4}{x-4} = \frac{9}{x-7}$
22. $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{3(x-1)} = \frac{11}{6}$
23. $\frac{1}{x-2} - \frac{2(x-1)}{(x-2)(x-4)} = \frac{3(x-1)}{(1-x)(x-4)}$
24. $\frac{2}{x-1} - \frac{3-x}{(2-x)(x-1)} = \frac{1}{2-x}$
25. $\frac{3x-2}{6x-6} - \frac{5x-1}{3x+3} = \frac{7(25-10x+x^2)}{6-6x^2}$
26. $\frac{5x^2-x}{3x^2-11x+6} = \frac{2x-1}{x-3} - \frac{x-4}{3x-2}$
27. $\frac{6}{x+1} + \frac{5(2x+3)}{2x-3} - 5 = \frac{3x-1}{2x^2-x-3}$
28. $\frac{3x+4}{3x-4} + \frac{4(3x^2-8)}{9x^2-16} = \frac{3x}{3x-4} + \frac{4x}{3x+4}$
29. $2 = \frac{35 - \frac{8}{x}}{15 + \frac{16}{x}}$
30. $\frac{\frac{3(3x-1)}{11}}{\frac{6x+1}{5}} = \frac{3}{5}$
31. $3 + \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{4}} = 6\frac{3}{7}$

3.5 Gleichungen mit Formvariablen

In der Technik haben wir es häufig mit *Formeln* zu tun, die die Zusammenhänge irgendwelcher physikalischer oder technischer Größen beschreiben. Es sind Gleichungen oder Aussageformen mit verschiedenen Variablen. Diejenige Variable, die in Abhängigkeit der übrigen Variablen berechnet werden soll, nennt man *Lösungsvariable*, die übrigen Variablen sind *Formvariable*. Grundsätzlich kann jede Variable Lösungsvariable werden.

Beispiel

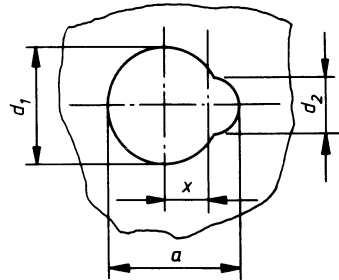
Der Bohrungsabstand x des dargestellten Langloches ist zu berechnen.

a) in allgemeiner Form

b) für $d_1 = 20 \text{ mm}$

$d_2 = 12 \text{ mm}$

$a = 26 \text{ mm}$

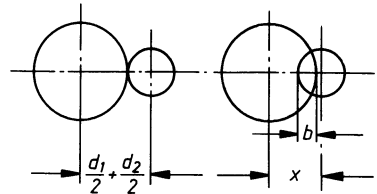


Lösung

a) Das Maß x läßt sich auf einfache Weise berechnen.

Die Gesamtstrecke a setzt sich aus den Einzelstrecken zusammen.

$$\text{Damit ist } a = \frac{d_1}{2} + x + \frac{d_2}{2}$$



Löst man diese Gleichung nach x auf, so ergibt sich

$$x = a - \left(\frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} \right)$$

b) Mit den Zahlenwerten ergibt sich:

$$x = \left(26 - \left(\frac{20}{2} + \frac{12}{2} \right) \right) \text{ mm}$$

$$\underline{\underline{x = 10 \text{ mm}}}$$

Um die Überdeckung b der beiden Kreise zu berechnen, setzen wir folgende Gleichung an:

$$x = \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} - b$$

Daraus erhält man, wenn man diese Gleichung nach b auflöst:

$$b = \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} - x \text{ oder}$$

$$b = \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} - \left(a - \left(\frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} \right) \right)$$

$$\underline{\underline{b = d_1 + d_2 - a}}$$

Beispiel

Für die Parallelschaltung zweier Widerstände gilt die Formel

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (R, R_1, R_2 \neq 0) . \text{ Berechnen Sie den Widerstand } R_2.$$

Lösung

Nach der gestellten Aufgabe ist R_2 die Lösungsvariable, die Widerstände R und R_1 sind damit Formvariable.

Die Gleichungs-Umformung erfolgt in folgenden Schritten:

1. Bestimmung des Hauptnenners
2. Termmultiplikation mit dem HN
(Bruchfreimachen der Gleichung)
3. R_2 -Terme auf linke Seite bringen
4. R_2 ausklammern
5. Termdivision durch $(R_1 - R_2)$
(Bedingung: $(R_1 - R_2) \neq 0$)

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\text{HN: } R \cdot R_1 \cdot R_2$$

$$R_1 \cdot R_2 = R \cdot R_2 + R \cdot R_1$$

$$R_1 \cdot R_2 - R \cdot R_2 = R \cdot R_1$$

$$R_2(R_1 - R) = R \cdot R_1$$

$$\underline{\underline{R_2 = \frac{RR_1}{R_1 - R}}}$$

Beispiel

Stellen Sie die Formel $A = \frac{a(b-s) + s \cdot h}{2}$ nach s um.

Lösung

$$A = \frac{a(b-s) + s \cdot h}{2}$$

Termmultiplikation

$$2A = a(b-s) + sh$$

Klammer ausmultiplizieren

$$2A = ab - as + sh$$

Termaddition und Termsubtraktion

$$as - sh = ab - 2A$$

s ausklammern

$$s(a-h) = ab - 2A$$

Termdivision durch $(a-h)$

$$\underline{\underline{s = \frac{ab - 2A}{a - h} \quad (a \neq h)}}$$

Beispiel

Bestimmen Sie d_1 aus $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{d_2 - d_1}{2(a_1 - a_2) - (d_1 - d_2)}$.

Lösung

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{d_2 - d_1}{2(a_1 - a_2) - (d_2 - d_1)}$$

Termmultiplikation mit dem Nenner
(Gleichung bruchfrei machen)

$$[2(a_1 - a_2) - (d_2 - d_1)] \sin \frac{\alpha}{2} = d_2 - d_1$$

Klammern ausmultiplizieren

$$(2a_1 - 2a_2 - d_2) \sin \frac{\alpha}{2} + d_1 \sin \frac{\alpha}{2} = d_2 - d_1$$

Terme mit d_1 nach links bringen,
Restterme nach rechts bringen
(Termaddition und -subtraktion)

$$d_1 + d_1 \sin \frac{\alpha}{2} = d_2 - (2a_1 - 2a_2 - d_2) \sin \frac{\alpha}{2}$$

d_1 ausklammern

$$d_1 \left(\sin \frac{\alpha}{2} + 1 \right) = d_2 - (2a_1 - 2a_2 - d_2) \sin \frac{\alpha}{2}$$

Termdivision durch $\sin \frac{\alpha}{2} + 1$

$$d_1 = \frac{d_2 - (2a_1 - 2a_2 - d_2) \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} + 1}$$

Termersetzung

$$d_1 = \frac{d_2 + (d_2 + 2a_2 - 2a_1) \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} + 1}$$

Beispiel

Lösen Sie die Gleichung $\frac{r-x}{x+r} + \frac{4x-r}{2r-2x} = \frac{3x(x-1)}{r^2-x^2}$ nach x auf

Lösung

Termmultiplikation mit dem Hauptnenner
 $2(r+x)(r-x)$

$$2(r-x)(r-x) + (r+x)(4x-r) = 2 \cdot 3x(x-1)$$

$$2r^2 - 4rx + 2x^2 + 3rx + 4x^2 - r^2 = 6x^2 - 6x$$

Termersetzungen und -umformungen
(Bedingungen: $x \neq r$, $x \neq -r$, $r \neq 6$)

$$r^2 - rx = -6x$$

$$x(6-r) = -r^2$$

$$x = \frac{-r^2}{6-r}$$

$$L = \left\{ \frac{r^2}{r-6} \right\}$$

Beispiel

Beim Auflichtlängenmeßsystem der inkrementalen Längenmessung wird der Modulationsgrad M durch die Formel $M = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Phi_2 + \Phi_1}$ bestimmt.

- a) Berechnen Sie den maximalen Lichtstrom Φ_2 in Abhängigkeit von den übrigen Größen.
- b) Um welchen Faktor ist der maximale Lichtstrom Φ_2 größer als der minimale Lichtstrom Φ_1 bei einem Modulationsgrad $M = 14,3 \%$?

Lösung

Nach der Aufgabe soll die obige Formel nach Φ_2 aufgelöst werden. Dazu sind folgende Schritte erforderlich

Termmultiplikation mit dem Nenner
(Bruchfreimachen der Gleichung)

Klammer ausmultiplizieren und Terme mit der Lösungsvariablen Φ_2 auf die linke Gleichungsseite bringen

Φ_2 ausklammern

Gleichung durch den Faktor $(M - 1)$ dividieren

Bruch mit (-1) erweitern und Lösung angeben (Bedingung $M \neq 1$)

Mit $M = 14,3 \% = 0,143$ erhält man

$$a) M = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Phi_2 + \Phi_1}$$

$$M(\Phi_2 + \Phi_1) = (\Phi_2 - \Phi_1)$$

$$M \cdot \Phi_2 + M \cdot \Phi_1 = \Phi_2 - \Phi_1$$

$$M \cdot \Phi_2 - \Phi_2 = -M \cdot \Phi_1 - \Phi_1$$

$$\Phi_2(M - 1) = \Phi_1(-M - 1)$$

$$\Phi_2 = \frac{-M - 1}{M - 1} \cdot \Phi_1$$

$$\Phi_2 = \frac{1+M}{1-M} \cdot \Phi_1$$

$$b) \Phi_2 = \frac{1 + 0,143}{1 - 0,143} \cdot \Phi_1 = \frac{1,143}{0,857} \cdot \Phi_1$$

$$\Phi_2 \approx 1,3337 \cdot \Phi_1$$

$$\Phi_2 \approx \underline{\underline{\frac{4}{3} \Phi_1}}$$

Aufgaben

zu 3.5 Gleichungen mit Formvariablen

Stellen Sie die folgenden Gleichungen nach allen Variablen um und geben Sie gegebenenfalls die Definitionsmenge an.

1. $ax = bx - a$ 3. $ab - 2x = cx$

5. $n_1 d_1 = n_2 d_2$

7. $d_k = d + 2m$

2. $a + b = \frac{x}{c}$ 4. $\frac{x}{b} - a = ax$

6. $I = I_0 (1 + \alpha \Delta \vartheta)$

8. $Q = c m (\vartheta_2 - \vartheta_1)$

Stellen Sie folgende Gleichungen bzw. Formeln nach den angegebenen Variablen um.

9. $C = \frac{D-d}{l}$ nach D, d
10. $Fx = F_1x_1 + F_2x_2$ nach x_2, F_1
11. $v = v_0 - gt$ nach v_0, t
12. $y = (D - m)\sin \beta - m$ nach m
13. $y = (d + m)\sin \beta + m$ nach m
14. $A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$ nach D, d
15. $v_R = \frac{D-d}{2} \cdot \frac{L}{l}$ nach D, d
16. $l = \frac{l_1 - 2a}{n-1}$ nach a, n, l_1
17. $t = \frac{2t_1t_2}{t_1 + t_2}$ nach t_1, t_2
18. $a = \frac{l_1 + l_2}{2} \cdot h$ nach l_2, h
19. $P_w = T(n_1 - n_s)$ nach n_1, n_s
20. $D = \frac{2y \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}$ nach $\sin \frac{\alpha}{2}$
21. $\frac{1}{a} + \frac{2}{\sin \gamma} = a$ nach $\sin \gamma$
22. $n_A i_{AB} n_B - (1 - i_{AB}) n_C = 0$ nach i_{AB}
23. $i = \frac{n_1 - n_s}{n_4 - n_s}$ nach n_s
24. $v = lbh_1 - l \cdot \frac{gh_2}{2}$ nach l, h_2
25. $M = 0,6 s_n \cdot 0,5 D k_s (b-a)$ nach a
26. $s = \frac{a}{2} \cdot t^2$ nach a, t
27. $i_n = \frac{1}{1 - i_0}$ nach i_0
28. $\tan \alpha = \frac{m v^2}{r m g}$ nach v
29. $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ nach R
30. $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$ nach f, b, g
31. $\eta_u = \frac{1}{i_u - \eta_0(i_u - 1)}$ nach i_u, η_0
32. $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$ nach C, C_1
33. $Q = \frac{m-k}{m-1} \cdot c_v(T_2 - T_1)$ nach m
34. $f = \frac{u+w}{u+v} \cdot v_0$ nach u, v
35. $E = \frac{m}{2} \cdot v^2$ nach m, v
36. $x = \frac{a(a+2b)}{2(a+b+c)}$ nach b, c
37. $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$ nach x_1
38. $A = \left(\frac{a+c}{2} \right) \cdot h$ nach c

$$39. \quad R = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \quad \text{nach } R_2$$

$$40. \quad A = \frac{r}{2}(b-s) + \frac{s}{2} \cdot h \quad \text{nach } s$$

$$41. \quad d = \frac{Mmv^2}{2(M+m)} \quad \text{nach } m, v$$

$$42. \quad \frac{1}{E_1} = \frac{3(m-2)}{Em} \quad \text{nach } m$$

$$43. \quad a = r \omega^2 \left(1 + \frac{r}{l} \right) \quad \text{nach } r, l$$

$$44. \quad R = R_1 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{nach } R_1, R_2$$

$$45. \quad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \quad \text{nach } R_1, R_2$$

$$46. \quad \frac{1}{2x} = \frac{D-d}{2l} \quad \text{nach } d$$

$$47. \quad a = \frac{z_1 + z_2}{2} \cdot m \quad \text{nach } z_2$$

$$48. \quad A = \frac{l_B \cdot r - l(r-b)}{2} \quad \text{nach } r$$

$$49. \quad F = G \cdot \frac{R-r}{2R} \quad \text{nach } r, R$$

$$50. \quad s = h \cdot \frac{2R}{R-r} \quad \text{nach } r, R$$

$$51. \quad i = \frac{U}{R + \frac{R}{n}} \quad \text{nach } R, n$$

$$52. \quad \varepsilon = \frac{V_h + V_c}{V_c} \quad \text{nach } V_c, V_h$$

$$53. \quad i = \frac{1}{1 + \frac{z_1}{z_3}} \quad \text{nach } z_1, z_3$$

$$54. \quad F_B = \frac{G \cdot l_1 - F_m \cdot l_3}{l_1 + l_3} \quad \text{nach } F_m, l_1$$

$$55. \quad \tan \beta = \frac{A \cdot \tan \alpha}{A + b \cdot \tan \beta} \quad \text{nach } A, \tan \alpha$$

$$56. \quad n = \frac{\frac{1}{f}}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} \quad \text{nach } r_1$$

$$57. \quad l = \frac{BH^3 - bh^3}{12} \quad \text{nach } b, h$$

$$58. \quad v = \frac{s}{t-a} + \frac{s}{t+a} \quad \text{nach } s, t$$

$$59. \quad \frac{\frac{a}{x} + a}{\frac{b}{x}} = \frac{1}{a} \quad \text{nach } x$$

$$60. \quad f_1 = \frac{f}{1 - \frac{v}{c}} \quad \text{nach } v$$

$$61. \quad V = \frac{u + x_{ac}}{x_{ab} + x_{ac} + x} \quad \text{nach } x_{ac}$$

$$62. \quad \lambda = \frac{b}{a_1 + \Delta a + \frac{\Omega k}{a_m}} \quad \text{nach } a_m$$

$$63. \quad U_1 = \frac{UR_1}{R_1 + R_2} - \frac{I}{R_1 + R_2} \cdot R_1 \cdot R_2 \quad \text{nach } R_1, R_2 \text{ und } U$$

$$64. \quad \frac{ux}{u+v} = u^2 + v^2 - \frac{vx}{u-v} \quad \text{nach } x$$

$$65. \quad \frac{x+6}{r+1} - \frac{x-2}{r-1} = \frac{6r-2}{r^2-1} \quad \text{nach } x$$

$$66. \quad E_1 - E_2 = (m_1 - m_2)c^2 \quad \text{nach } m_1, m_2$$

$$67. \quad E = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1^2 - v_2^2) \quad \text{nach } m_1, v_2$$

$$68. \quad v_k = \left(c_1 - \frac{c_2 \cdot a}{i \cdot \cos \varphi} \right) \frac{2A}{F} \sin \varphi \quad \text{nach } i$$

$$69. \quad \sigma = \frac{F}{4\pi h} \left[(1-\mu) \frac{x}{x^2 + y^2} - (1+\mu) \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right] \quad \text{nach } \mu$$

$$70. \quad C_1 \sin \alpha = C_2 \sin \beta - \frac{x}{2ab} \left(2a^2 \sin \gamma + \frac{x^2 \sin \gamma}{12} - c \right) \quad \text{nach } \sin \gamma, c$$

$$71. \quad A = \frac{1}{2} [a (y_1 - y_2) + b (y_2 - y_3) + c (y_3 - y_1)] \quad \text{nach } a, y_1$$

Aufgaben

zu 5 Systeme linearer Gleichungen

Bestimmen Sie rechnerisch und zeichnerisch die Lösungsmengen folgender Gleichungssysteme ($G = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$).

$$1. \quad \begin{cases} 3x + 5y = 11 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{cases} 8x - 5y = 4 \\ 3x + 2y = 17 \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{cases} 4x + 3y = 8 \\ 6x + 5y = 13 \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichungssysteme über der Grundmenge $G = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

$$4. \quad \begin{cases} 3x + 4y = 24 \\ 7x - 2y = 22 \end{cases}$$

$$5. \quad \begin{cases} 6x + 2y = 5 \\ 4x - 5y = 2,75 \end{cases}$$

$$6. \quad \begin{cases} 5x + 2y = 23 \\ x = 3y - 9 \end{cases}$$

$$7. \quad \begin{cases} 3x = 2y + 7 \\ 2x = 18 - 2y \end{cases}$$

$$8. \quad \begin{cases} 0,4x + 1,8y = 3 \\ 1,4x - 1,2y = 3 \end{cases}$$

$$9. \quad \begin{cases} 9x - 15y = 45 \\ 23,4x + 26y = 39 \end{cases}$$

$$10. \quad \begin{cases} 3,4x - 1,7y = 4,25 \\ 3,2x + 2,3y = 21,55 \end{cases}$$

$$11. \quad \begin{cases} ax + by = ab \\ x - y = b \end{cases}$$

$$12. \quad \begin{cases} ax + by = 2a \\ a^2x - b^2y = a^2 + b^2 \end{cases}$$

$$13. \quad \begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{5}{y} = \frac{8}{15} \\ \frac{5}{x} - \frac{3}{y} = \frac{1}{20} \end{cases}$$

$$14. \quad \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$15. \quad \begin{cases} \frac{4}{x} - \frac{5}{y} = 3 \\ \frac{7}{x} - \frac{1}{y} = 13 \end{cases}$$

$$16. \quad \begin{cases} y - x = 4 \\ \frac{7 - 2x}{5 - 3y} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$17. \quad \begin{cases} \frac{a}{x} = \frac{b}{y} - 3 \\ -\frac{2a}{x} - \frac{b}{y} = 5 \end{cases}$$

$$18. \quad \begin{cases} 4y + \frac{8}{x} = 14 \\ \frac{1}{x} - y = -2 \end{cases}$$

$$19. \quad \begin{cases} \frac{2x}{y + 0,5} = 6 \\ \frac{7}{2}y = \frac{19}{4} - x \end{cases}$$

$$20. \quad \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{5}{y} = \frac{13}{3} \\ \frac{x}{6} + \frac{10}{y} = \frac{8}{3} \end{cases}$$

$$21. \quad \begin{cases} \frac{15x - 5}{45 - y} = 8 \\ \frac{25 - 5y}{x - 10} = 25 \end{cases}$$

$$22. \quad \begin{cases} \frac{3x}{4} + \frac{7}{12} = 2 - \frac{2y}{9} \\ \frac{2y}{5} + \frac{3}{12} = 1 + \frac{9x}{20} \end{cases}$$

$$23. \quad \begin{cases} \frac{3 + 5x}{2y - 6} = \frac{7}{4} \\ \frac{x}{y} = \frac{7}{4} \end{cases}$$

$$24. \quad \begin{cases} \frac{4x - 3y}{2} - \frac{3y - 2x}{3} = y + 1 \\ \frac{5x - 3y}{3} - \frac{2y - 3x}{5} = x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll}
 42. \begin{vmatrix} 3x + 5y - z = b \\ -x + 3y + 5z = c \\ 5x - y + 3z = a \end{vmatrix} & 43. \begin{vmatrix} 1,5x + y + 2z = 145 \\ 2x + 1,5y + 2,5z = 190 \\ 5x + 4y + 7z = 510 \end{vmatrix} & 44. \begin{vmatrix} 3x - 4y - 2z = 8 \\ 2x + 2,5y - 3z = -4 \\ 4x - 6y + 8z = 38 \end{vmatrix}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 45. \begin{vmatrix} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{5}{2z} = 2 \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{4y} + \frac{5}{4z} = 1 \\ \frac{4}{x} + \frac{3}{y} - \frac{10}{3z} = \frac{4}{3} \end{vmatrix} & 46. \begin{vmatrix} \frac{3}{2x} - \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = -\frac{28}{15} \\ \frac{2}{x} + \frac{4}{y} - \frac{2}{z} = \frac{11}{15} \\ \frac{5}{x} - \frac{3}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \end{vmatrix} & 47. \begin{vmatrix} \frac{4}{x+2y} + \frac{5}{6y-3z} = 3 \\ \frac{7}{x+2y} - \frac{4}{3x+3y} = 2 \\ \frac{10}{x+y} + \frac{3}{2z-4y} = 1 \end{vmatrix}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 48. \begin{vmatrix} \frac{7}{x} + \frac{4}{3y} - \frac{6}{z} = -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{x} - \frac{4}{y} + \frac{8}{3z} = 2 \\ \frac{9}{4x} - \frac{4}{y} - \frac{3}{z} = -\frac{7}{4} \end{vmatrix} & 49. \begin{vmatrix} \frac{1}{x} + \frac{2,5}{y} - \frac{3}{z} = 0,5 \\ \frac{2}{x} - \frac{7}{3y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3} \\ -\frac{3}{x} + \frac{15}{3y} - \frac{4}{z} = -2 \end{vmatrix} & 50. \begin{vmatrix} 3x + 2y + 2u = 23 \\ 2y + 6z + 4u = 70 \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}z + u = 11 \\ \frac{2}{3}x + y + \frac{2}{3}z = 7 \end{vmatrix}
 \end{array}$$

Aus den statischen Gleichgewichtsbedingungen $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ und $\sum M = 0$ erhält man folgende Gleichungssysteme. Berechnen Sie die gesuchten Kräfte.

$$51. \begin{vmatrix} F_{Ax} - \mu \cdot F_N = 0 \\ F_{Ay} - F + F_N = 0 \\ F_N \cdot l_1 - F \cdot l - \mu \cdot F_N \cdot l_2 = 0 \end{vmatrix} \quad \text{Gesucht: } F_N, F_{Ax}, F_{Ay} \text{ und } F_A$$

$$52. \begin{vmatrix} F_{NB} - F_{NA} + F_N \cdot \cos \alpha = 0 \\ F_N \cdot \sin \alpha - F - \mu \cdot F_N - \mu \cdot F_{NB} = 0 \\ F_N(l_1 + l_2) \cdot \cos \alpha + F \cdot l_1 - F_{NA} \cdot l_2 = 0 \end{vmatrix} \quad \text{Gesucht: } F_N, F_{NA} \text{ und } F_{NB}$$

a) allgemein

b) für $F = 350 \text{ N}$, $\mu = 0,14$, $\alpha = 60^\circ$, $l_1 = 110 \text{ mm}$, $l_2 = 320 \text{ mm}$, $l_3 = 480 \text{ mm}$

Berechnen Sie den Wert folgender Determinanten.

$$\begin{array}{llll}
 53. \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} & 54. \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} & 55. \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} & 56. \begin{vmatrix} 13 & -1 & 1 \\ 14 & 2 & 2 \\ 17 & 1 & -1 \end{vmatrix}
 \end{array}$$

Anmerkung: Lösen Sie die angegebenen Gleichungssysteme auch mit Hilfe des Determinantenverfahrens.

Der Polarstern ist 271 Lichtjahre von der Erde entfernt.

$$1 \text{ Lichtsekunde} = 300\,000 \text{ km} = 3 \cdot 10^5 \text{ km} \text{ (= Weg, den ein Lichtstrahl in 1 s zurücklegt)}$$

$$1 \text{ Lichtjahr} = 9,5 \cdot 10^{12} \text{ km}$$

$$271 \text{ Lichtjahre} = 271 \cdot 9,5 \cdot 10^{12} \text{ km} = 2\,574\,500\,000\,000\,000 \text{ km} = 2,5745 \cdot 10^{15} \text{ km}$$

Nach DIN 1301 sind für große Maßeinheiten folgende Vorsilben eingeführt:

Deka-	= da	= 10^1	z.B. $10 \text{ N} = 1 \text{ daN}$
Hekto-	= h	= 10^2	$100 \text{ l} = 1 \text{ hl}$
Kilo-	= k	= 10^3	$1\,000 \text{ g} = 1 \text{ kg}$
Mega-	= M	= 10^6	$1\,000\,000 \text{ N} = 1\,000 \text{ kN} = 1 \text{ MN}$
Giga-	= G	= 10^9	$1\,000\,000\,000 \text{ g} = 1\,000\,000 \text{ kg} = 1\,000 \text{ t} = 1 \text{ Gg}$
Tera-	= T	= 10^{12}	

Kleine Zahlen als Zehnerpotenzen

Das Elektron hat eine Ruhemasse von

$$0,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,9\,107 \text{ g} = 9,107 \cdot 10^{-28} \text{ g}$$

Masse des Wasserstoffatoms:	$1,64 \cdot 10^{-24} \text{ g}$
Durchmesser des Wasserstoffatoms:	rund 10^{-8} cm
Durchmesser des Atomkerns:	rund 10^{-12} cm
Wellenlänge der gelben Spektralfarbe (Natriumlicht):	$589 \cdot 10^{-7} \text{ cm}$
Durchmesser der roten Blutkörperchen:	$0,7 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$
Länge der kleinsten Bakterien:	rund 10^{-3} mm

Nach DIN 1301 sind für kleine Maßeinheiten folgende Vorsilben eingeführt:

Pico-	= p	= 10^{-12}	z.B. $\frac{1}{1\,000\,000\,000} \text{ mm} = 10^{-12} \text{ m} = 1 \text{ pm}$
Nano-	= n	= 10^{-9}	$\frac{1}{1\,000\,000} \text{ mm} = 10^{-9} \text{ m} = 1 \text{ nm}$
Mikro-	= μ	= 10^{-6}	$\frac{1}{1000} \text{ mm} = 10^{-6} \text{ m} = 1 \mu\text{m}$ ¹
Milli-	= m	= 10^{-3}	
Zenti-	= c	= 10^{-2}	
Dezi-	= d	= 10^{-1}	

¹ gelesen: „mü-Meter“

Anwendungen in der Technik

Um die Bruchform zu umgehen, werden Einheiten vielfach als Potenzen geschrieben:

$$\text{Einheit der Drehzahl} \quad \frac{1}{\text{min}} = \text{min}^{-1}$$

$$\text{Einheit der Geschwindigkeit} \quad \frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{Einheit der Beschleunigung} \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$\text{Einheit der Dichte} \quad \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$$

Zusammenfassung:

1. Potenzbegriff
(Potenz = Produkt gleicher Faktoren)

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ Faktoren}}$$

Erweiterter Potenzbegriff

$$a^1 = a, \quad a^0 = 1, \quad a^{-1} = \frac{1}{a}, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

0^0 ist nicht definiert

2. Potenzgesetze

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Potenzen gleicher Grundzahl

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Potenzen gleicher Hochzahl

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Potenzen von Potenzen

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$a, b, m, n \in \mathbb{Z}$$

Aufgaben

zu 6.2 Potenzgesetze

Berechnen Sie den Potenzwert folgender Terme:

1. $16 \cdot 2^{-3}$

2. $(-3)^5$

3. $(-1)^{2n}$

4. $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}$

5. $(-0,01)^3$

6. $-1,01^2$

7. $(-1)^{2n+1}$

8. $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-3}$

Formen Sie folgende Terme in einfachere äquivalente Terme um:

9. $(-2)^5 \cdot (-2)^{-3}$

10. $10^6 \cdot 10^{-4}$

11. $3^0 \cdot 3^3$

12. $4 \cdot 0,2^{-3} \cdot 10^{-2}$

13. $2^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

14. $(-2)^{-4} \cdot (-2)^2$

15. $(-4)^{-2} \cdot 10^5 \cdot (25)^{-2}$

16. $(0,5)^n \cdot (0,5)^{-n-1}$

17. $a^{2-2n} \cdot (a^n)^2$

18. $x^{1-n} \cdot (x^2)^n \cdot x^{-n}$

19. $(a^2 + x^0)^0$

20. $\frac{1}{x} \cdot x^{n-1}$

21. $x^{2m-1} \cdot x^{-1}$

22. $(3 \cdot x^{-1}) \cdot \frac{x^2}{3}$

23. $\frac{(2+x)^0}{2^{-1}}$

24. $2^2 \cdot (x^2)^2 \cdot x^{-3}$

25. $(-2^{-1} \cdot x^{-1})^{-2}$

26. $\left(-\frac{1}{x}\right)^{-2} \cdot x^{a-2}$

27. $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \cdot 2^2 \cdot ab^{-1}$

28. $a^{-2} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{-2}$

29. $\frac{3a^0 \cdot b^{-2}}{(a^{-1} \cdot b^2)^{-1}}$

30. $\frac{a^{-2+x}}{a^{x-1}}$

31. $\frac{x \cdot x^{-2}}{(a^2 \cdot x)^{-1}}$

32. $\frac{(-x)^{-2}}{x^{-3}}$

33. $((x^{-2})^{-1}) \cdot x^{a-2}$

34. $-(x^{-2})^2 \cdot (-x^5)$

35. $(-x^{-2})^{-3}$

36. $\frac{a^{x-2} \cdot (a^{x-2})^{-2}}{a^{3(x-1)}}$

37. $\frac{x^{m-1} \cdot y^{n-1} \cdot y^3}{y^{2+n} \cdot x^{m+2}}$

38. $\frac{x(x^m + y^m) \cdot x^2}{x^{m+1} + y^m \cdot x}$

39. $\frac{(x^4 \cdot y^{-2})^{-3}}{(x^{-2} \cdot y^{-3})^5}$

40. $\frac{a^{-1} \cdot x^{-3} \cdot y^2}{a^{-3} \cdot b^{-1}} \cdot \frac{a^{-2} \cdot b^{-1}}{x^{-4} \cdot y}$

41. $\frac{x^{-1} \cdot y^4}{x^2} \cdot \frac{x^{n+3}}{y^{n+4}}$

6.5 Potenzen von Binomen

Die binomischen Formeln sind uns schon bei der Multiplikation von Klammertermen begegnet.

Potenziert man das Binom $(a + b)$, so erhält man

$$(a + b)^n = \underbrace{(a + b)(a + b) \dots (a + b)}_{n \text{ Faktoren}}$$

Die Berechnung solcher Produkte ist langwierig. Wir wollen dies mit der dritten Potenz des Binoms zeigen:

$$\begin{aligned} (a + b)^3 &= (a + b)(a + b)^2 \\ &= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ &= \underline{\underline{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}} \end{aligned}$$

Bei höheren Potenzen ist der Berechnungsaufwand noch erheblich größer. Vergleicht man jedoch die Ergebnisse, so erhält man folgende Gesetzmäßigkeit:

$n = 0$	$(a + b)^0 = 1$
$n = 1$	$(a + b)^1 = a + b$
$n = 2$	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$n = 3$	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$n = 4$	$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

1. Die Hochzahlen von a nehmen ab $a^4 \quad a^3 \quad a^2 \quad a^1 \quad a^0$
2. Die Hochzahlen von b nehmen zu $b^0 \quad b^1 \quad b^2 \quad b^3 \quad b^4$
3. Die Koeffizienten des zweiten und vorletzten Gliedes sind gleich wie die Hochzahl n .

Die Koeffizienten des ersten und letzten Gliedes sind gleich 1.

Die übrigen Koeffizienten sind einer Zahlenanordnung zu entnehmen, die auf den Mathematiker Pascal¹ zurückgeht und als „*Pascalsches Dreieck*“ bekannt geworden ist.

¹ Blaise Pascal (1623 – 1662), französischer Mathematiker und Philosoph

b) Multiplizieren, Dividieren und Potenzieren

$$5. \quad 3^{-1} \cdot \left(7\sqrt[7]{\frac{1}{3^{-2}}}\right)^7 = \frac{1}{3 \cdot 3^{-2}} = \frac{3^2}{3} = 3$$

$$6. \quad x^{-4} \cdot \left(\sqrt[3]{x^2}\right)^{12} = \frac{(x^3)^{12}}{x^4} = \frac{x^8}{x^4} = x^4$$

$$7. \quad \sqrt{7} \cdot (\sqrt[4]{7})^2 = 7^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{2}{4}} = 7^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} = 7$$

$$8. \quad \sqrt{a^2 b} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{\frac{a^2 b}{b}} = \sqrt{a^2} = a$$

$$9. \quad \sqrt{2} : \sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{2}} : 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$$

$$10. \quad \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2}$$

Um einen rationalen, d.h. wurzelfreien Nenner zu erhalten, ist der Bruch mit einem geeigneten Wurzelterm zu erweitern.

$$11. \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{1}{3} \sqrt{6}$$

$$12. \quad \frac{1}{a + \sqrt{b}} = \frac{a - \sqrt{b}}{(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b})} = \frac{a - \sqrt{b}}{a^2 - b}$$

$$13. \quad \frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{3(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})} = \frac{3}{5 - 2} (\sqrt{5} + \sqrt{2}) = \sqrt{5} + \sqrt{2}$$

$$14. \quad \frac{2}{2a + \sqrt{2}} = \frac{2(a - \sqrt{2})}{(2a + \sqrt{2})(2a - \sqrt{2})} = \frac{2(a - \sqrt{2})}{4a^2 - 2} = \frac{a - \sqrt{2}}{2a^2 - 1}$$

$$15. \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{a + \sqrt{ab}}{a - b}$$

$$16. \quad \frac{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{9}} - 1 = \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{9}} + \frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{9}} - 1 = \frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{9}} = \sqrt[3]{\frac{81}{9}} = \sqrt[3]{9}$$

$$17. \quad \frac{5 - x}{\sqrt{5} - \sqrt{x}} = \frac{(5 - x)(\sqrt{5} + \sqrt{x})}{(\sqrt{5} - \sqrt{x})(\sqrt{5} + \sqrt{x})} = \frac{(5 - x)(\sqrt{5} + \sqrt{x})}{5 - x} = \sqrt{5} + \sqrt{x}$$

$$18. \quad \frac{\left(\frac{1}{\cos \alpha}\right)^2}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}{\cos^2 \alpha \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} \cdot \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}{\cos^2 \alpha \cdot (1 + \tan^2 \alpha)}$$

$$= \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}{\cos^2 \alpha \left(1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}\right)} = \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}{\underbrace{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}_1} = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}$$

Fassen Sie zu einer Wurzel zusammen unter Anwendung der Potenz- oder Wurzelregeln:

$$17. \quad {}^3\sqrt{2} \cdot {}^3\sqrt{4} \quad 18. \quad {}^5\sqrt{a^2b} \cdot {}^5\sqrt{a^3b^4} \quad 19. \quad {}^3\sqrt{2} \cdot {}^3\sqrt{3} \quad 20. \quad {}^4\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot {}^4\sqrt{6}$$

$$21. \quad \sqrt{x^3} \cdot {}^4\sqrt{x^2} \quad 22. \quad \frac{x}{\sqrt[3]{x^2}} \quad 23. \quad \sqrt{\frac{1}{\frac{9}{2}}} : \sqrt{\frac{2}{3}} \quad 24. \quad \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a + b}}$$

$$25. \quad \sqrt[3]{\sqrt{x^{2a}}} \quad 26. \quad {}^{m+1}\sqrt{x^{2m}} : {}^{m+1}\sqrt{x^m} \quad 27. \quad \sqrt[4]{\sqrt[4]{\sqrt[4]{65\,536}}} \quad 28. \quad \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$$

Fassen Sie so weit wie möglich zusammen:

$$29. \quad \sqrt{20} - \sqrt{5} + 3\sqrt{5} \quad 30. \quad {}^3\sqrt{a} + 2 \cdot {}^3\sqrt{a} + 3 \cdot {}^3\sqrt{a} \quad 31. \quad {}^n\sqrt{a} + {}^{2n}\sqrt{a^2} + 4{}^n\sqrt{a}$$

$$32. \quad {}^4\sqrt{16x^2} - {}^6\sqrt{x^3} + \sqrt{4x} \quad 33. \quad {}^3\sqrt{8} + \sqrt{45} - 4 \cdot {}^5\sqrt{\frac{1}{32}} \quad 34. \quad a\sqrt{ab^2} + \frac{1}{b}\sqrt{a^3b^4}$$

$$35. \quad {}^{an+bn}\sqrt{(x+y)^{a+b}} + {}^{an-bn}\sqrt{(x+y)^{a-b}} \quad 36. \quad \frac{3}{\sqrt[3]{a}} + {}^5\sqrt{a^{-\frac{5}{3}}}$$

Machen Sie durch entsprechende Erweiterung den Nenner rational (wurzelfrei) und vereinfachen Sie so weit wie möglich:

$$37. \quad \frac{2a}{\sqrt{2a}} \quad 38. \quad \frac{a+b}{4\sqrt{a+b}} \quad 39. \quad \frac{2a}{5 \cdot \sqrt{a}} \quad 40. \quad \frac{2-x}{\sqrt{2-x}}$$

$$41. \quad \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} \quad 42. \quad \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + x} \quad 43. \quad \frac{(2y + 2x)^2}{(x+y)\sqrt{x+y}} \quad 44. \quad \frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{2} - 4\sqrt{3}}$$

$$45. \quad \frac{16a^2 - 3b}{4a + \sqrt{3b}} \quad 46. \quad \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \quad 47. \quad \frac{{}^3\sqrt{(x-1)^2}}{{}^3\sqrt{x-1}} \quad 48. \quad \frac{2}{\sqrt{a^2 + 2} - a}$$

Fassen Sie zusammen und vereinfachen Sie folgende Terme:

$$49. \quad (1-x^2)^{\frac{1}{2}} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} + (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$50. \quad \frac{3a}{a^2 + x^2} + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(a^2 - x^2)^2}{(a^2 + x^2)^2}}} \cdot \frac{(a^2 - x^2)(-2x) - (a^2 - x^2) \cdot 2x}{(a^2 + x^2)^2}$$

Aufgaben

zu 8 Quadratische Gleichungen

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichungen ($G = \mathbb{R}$).

1. $9x^2 = 72$

2. $81x^2 = 4$

3. $\frac{3x^2}{13} = \frac{2}{39}$

4. $\frac{3}{5x^2} = \frac{5}{3}$

5. $\frac{5}{3} = \frac{735}{x^2}$

6. $\frac{2x}{7} = \frac{6}{x}$

7. $\frac{x^2 - 2}{3} = 27$

8. $\frac{2}{11} = \frac{66}{x^2 + 2}$

9. $\frac{1}{9} = \frac{8 - x^2}{8}$

10. $\frac{10}{7} + 5x^2 = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}$

11. $x\left(2 - \frac{6}{x}\right) = 6\left(\frac{x}{3} - x^2\right)$

12. $(x - 12)(x + 2) = 0$

13. $(x - 5)^2 = 0$

14. $(x + 2)^2 = 169$

15. $(3x + 3)^2 = 81$

16. $\left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{5}\right) = 0$

17. $(x + 2)\left(x - \sqrt{2}\right) = 0$

18. $5x^2 + 10x = 0$

19. $5x^2 + 10x = 40$

20. $x^2 + x = 2$

21. $x^2 + 2x = 2$

22. $x^2 + 2x = 15$

23. $x^2 + 2x - 3 = 0$

24. $3x^2 + 9x - 12 = 0$

25. $x^2 - 4x - 21 = 0$

26. $6x^2 + x - 2 = 0$

27. $0,5x^2 - 3x + 4 = 0$

28. $2x^2 - 48x + 46 = 0$

29. $(x - 7)^2 = 4x - 7$

30. $x^2 - 4,26x + 0,5369 = 0$

31. $3,5x^2 = 8,91x^2 - 5,41x - 10,82$

32. $\frac{2+x}{2-x} = \frac{4-x}{2x-4}$

33. $\frac{7x}{13x-280} = \frac{35}{x-13}$

Gleichungen mit Formvariablen

34. $x^2 - 2ax + a^2 = 0$

35. $x^2 + bx = ax + ab$

36. $x^2 = 2bx - b^2$

37. $x^2 + ab = ax + bx$

38. $2x^2 - 3ax + a^2 = 0$

39. $6x^2 - 3bx - 2ax + ab = 0$

40. $(a - b)^2x^2 + b^2x - a^2x + ab = 0$

41. $2x^2 - 4ax + 2a^2 - 8 = 0$

42. $x^2 - 2ax + a^2 - 9 = 0$

Aufgaben

zu 14 Wurzelgleichungen

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge folgender Wurzelgleichungen ($G = \mathbb{R}$):

1. $\sqrt{x+5} = 5$

2. $2\sqrt{x-6} = 4$

3. $4\sqrt{3x-2} = -3$

4. $\sqrt{3x-2} = x-2$

5. $\sqrt{9+8\sqrt{2x-2}} = 5$

6. $\sqrt{4x-2} = \sqrt{3x+1}$

7. $\sqrt{x+b} = \sqrt{3b-x} \quad (b \in \mathbb{R})$

8. $\sqrt{x^2-x-6} = \sqrt{x-3}$

9. $\sqrt{x-10} = \sqrt{x-3} - 1$

10. $2 + \sqrt{2x-3} = \sqrt{3x+7}$

11. $\sqrt{x-12} = 8 - \sqrt{x+4}$

12. $2\sqrt{x} - \sqrt{x-5} = \sqrt{2x-2}$

13. $2\sqrt{x+8} = \sqrt{x-4} + 2\sqrt{2x-7}$

14. $\sqrt{4x-3} = \sqrt{25x-11} - \sqrt{9x-2}$

15. $\sqrt{x+9} + \sqrt{x-3} = \sqrt{5x+1}$

16. $\sqrt{x-3} - \sqrt{2x-8} = \sqrt{x-5}$

17. $\sqrt{5x+6} + \sqrt{2x+4} = \sqrt{13x+22}$

18. $3\sqrt{9x-2} - \sqrt{8x-7} = \sqrt{35x+11}$

19. $2\sqrt{13x-3} - \sqrt{12x+1} = \sqrt{16x-15}$

20. $\sqrt{2x-5} + \sqrt{5x+1} = \sqrt{8x+25}$

21. $\sqrt{x+4} - \sqrt{2x-6} = \sqrt{2x-1} - \sqrt{x-1}$

22. $\sqrt{2x+4} + \sqrt{x+3} = \sqrt{x+10} + \sqrt{2x-3}$

23. $\sqrt{x-3} + \sqrt{3x+4} = \sqrt{3x-8} + \sqrt{x+5}$

24. $\sqrt{3x+7} + \sqrt{5x+1} = \sqrt{3x-5} + \sqrt{5x+21}$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichungssysteme ($G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$):

25.
$$\begin{cases} 2\sqrt{3y+3} + 3\sqrt{4x-3} = 9 \\ 5\sqrt{3y+3} - 4\sqrt{4x-3} = 11 \end{cases}$$

27.
$$\begin{cases} 4\sqrt{x} - 12 = 3\sqrt{y} - 7 \\ 3\sqrt{x} + 4\sqrt{y} = 2\sqrt{x} - 5\sqrt{y} + 11 \end{cases}$$

26.
$$\begin{cases} 2\sqrt{2x-3} - \sqrt{4y+1} = 3 \\ y - x + 4 = 0 \end{cases}$$

28.
$$\begin{cases} \frac{8}{\sqrt{x+1}} - \frac{6}{\sqrt{y+4}} = 2 \\ \frac{4}{\sqrt{x+1}} + \frac{9}{\sqrt{y+4}} = 5 \end{cases}$$

Aufgaben

zu 10.2 Einfache lineare Ungleichungen

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Ungleichungen $G = \mathbb{Q}$.

1. $4(x - 3) < 5x + 7$

5. $3(x - 5) + 2 > 75 - 5(x - 5) - 13$

2. $2x - 4 - 5x > 13$

6. $(2x - 3)(2x + 3) < (2x - 3)^2$

3. $x - 1 > 3(x - 4)$

7. $(x - 4)(x + 2) - x^2 > 2x - 3$

4. $x - 0,5 < x(1,5 + 4)$

8. $4x - 3(x + 2) + 8 > 0$

Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Ungleichungen

9. $x + 6 > 4x - 12$ ($G = \mathbb{N}^*$)

13. $\frac{3-x}{5} > \frac{2x-3}{2}$ ($G = \mathbb{Q}$)

10. $-1 < 2x \wedge 1,5x \leq 6 + \frac{x}{2}$ ($G = \mathbb{Z}$)

14. $\frac{x-3}{2} < \frac{x-2}{-5}$ ($G = \mathbb{Q}$)

11. $5\frac{1}{3}x - 4\left(\frac{6}{5}x + 2\right) < 2x$ ($G = \mathbb{Q}$)

15. $\frac{7-2x}{2} + x > \frac{2-x}{-2}$ ($G = \mathbb{Q}$)

12. $-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} > \frac{2}{5}x - \frac{3}{4}x - \frac{2}{5}$ ($G = \mathbb{Q}$)

16. $\frac{7x-2}{7} - \frac{1}{7} < -\frac{4}{7} + \frac{3}{7}x$ ($G = \mathbb{Q}$)

zu 10.3 Bruchungleichungen

Bestimmen Sie für folgende Bruchungleichungen die Definitions- und Lösungsmengen mit $G = \mathbb{Q}$.

17. $\frac{1}{x+1} > 0$

24. $\frac{x+5}{x} > \frac{x}{x-5}$

18. $\frac{1}{x-2} > 2$

25. $\frac{5x^2}{(x-2)(x+5)} > 5$

19. $\frac{2}{x+4} > 0$

26. $\frac{2x-3}{x-1} < \frac{1}{2}$

20. $\frac{x+3}{x-3} < 5$

27. $\frac{3}{x+1} - \frac{5}{x} > 0$

21. $\frac{2x}{x-1} < 1$

28. $\frac{1}{x-2} < \frac{3}{x+3}$

22. $\frac{1}{x-1} \geq 1$

29. $\frac{3x}{x-1} - 1 > 0$

23. $\frac{7-x}{7+x} > 0$

30. $\frac{3x}{x+5} - 2 > 0$

3.5 Gleichungen mit Formvariablen

$$1. \quad x = \frac{a}{b-a}$$

$$2. \quad x = ac + bc$$

$$3. \quad x = \frac{ab}{c+2}$$

$$4. \quad x = \frac{ab}{1-ab}$$

$$5. \quad d_1 = d_2 \cdot \frac{n_2}{n_1}$$

$$6. \quad \Delta\vartheta = \frac{l-l_0}{\alpha \cdot l_0}$$

$$7. \quad m = \frac{d_k - d}{2}$$

$$8. \quad \vartheta_2 = \frac{Q}{c \cdot m} + \vartheta_1$$

$$9. \quad d = D - C \cdot l$$

$$10. \quad F_1 = \frac{F \cdot x - F_2 \cdot x_2}{x_1}$$

$$11. \quad v_o = v + g \cdot t$$

$$12. \quad m = \frac{D \cdot \sin \beta - y}{\sin \beta + 1}$$

$$13. \quad m = \frac{y - d \cdot \sin \beta}{1 + \sin \beta}$$

$$14. \quad D = \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi}} + d^2$$

$$15. \quad D = \frac{2 \cdot v_R \cdot l}{L} + d$$

$$16. \quad a = \frac{l_1 - l \cdot (n-1)}{2}$$

$$17. \quad t_1 = \frac{t \cdot t_2}{2t_2 - t}$$

$$18. \quad l_2 = \frac{2a}{h} - l_1$$

$$19. \quad n_1 = n_s + \frac{P_W}{T}$$

$$20. \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{D}{2y - D}$$

$$21. \quad \sin \gamma = \frac{2a}{a^2 - 1}$$

$$22. \quad i_{AB} = \frac{n_c}{n_c + n_A \cdot n_B}$$

$$23. \quad n_s = \frac{n_1 - i \cdot n_4}{1 - i}$$

$$24. \quad l = \frac{2v}{2bh_1 - gh_2}$$

$$25. \quad a = b - \frac{M}{0,3 \cdot s_n \cdot D \cdot k_s}$$

$$26. \quad t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

$$27. \quad i_o = \frac{i_n - 1}{i_n}$$

$$28. \quad v = \sqrt{r \cdot g \cdot \tan \alpha}$$

$$29. \quad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$30. \quad f = \frac{b \cdot g}{b + g}$$

$$31. \quad i_u = \frac{1 - \eta_u \cdot \eta_o}{\eta_u - \eta_u \cdot \eta_o}$$

$$32. \quad C = \frac{C_1 C_2 C_3}{C_2 C_3 + C_1 C_3 + C_1 C_2}$$

$$33. \quad m = \frac{Q - k \cdot c_v \cdot (T_2 - T_1)}{Q - c_v \cdot (T_2 - T_1)}$$

$$34. \quad u = \frac{v_o W - f \cdot v}{f - v_o}$$

$$35. \quad m = \frac{2E}{v^2}; v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

$$36. \quad b = \frac{a^2 - 2ax - 2cx}{2(x-a)}$$

$$37. \quad x_1 = \frac{x(y_2 - y_1) + x_2(y_1 - y)}{y_2 - y}$$

$$38. \quad c = \frac{2A - a \cdot h}{h}$$

$$39. \quad R_2 = \frac{R_1 R_3 - R R_3}{R - R_1 - R_3}$$

$$40. \quad s = \frac{2A - r \cdot b}{h - r}$$

$$41. \quad m = \frac{2dM}{Mv^2 - 2d}$$

$$42. \quad m = \frac{6E_1}{3E_1 - E}$$

$$43. \quad l = \frac{r^2 \cdot \omega^2}{a - r\omega}; r_1/2 = -\frac{l}{\omega} \pm \sqrt{\frac{l^2 - a \cdot l}{\omega}}$$

$$44. \quad R_1 = \frac{1}{2} \left[R - 2R_2 \pm \sqrt{R^2 + 4R_2^2} \right]$$

$$45. \quad R_1 = \frac{R \cdot (R_2 + R_3)}{R_2 - R}$$

$$46. \quad d = D - \frac{l}{x}$$

$$47. \quad z_2 = \frac{2a}{m} - z_1$$

$$48. \quad r = \frac{2A - l \cdot b}{l_B - l}$$

$$49. \quad r = R - \frac{2FR}{G}$$

$$50. \quad r = R - \frac{2Rh}{s}$$

$$51. \quad R = \frac{n \cdot U}{i \cdot (n+1)}$$

$$52. \quad V_c = \frac{V_h}{\varepsilon - 1}$$

$$53. \quad z_1 = \frac{1-i}{i} \cdot z_3$$

$$54. \quad l_1 = \frac{F_B + F_m}{G - F_B} \cdot l_3$$

$$55. \quad A = \frac{b \cdot \tan^2 \beta}{\tan \alpha - \tan \beta}$$

$$56. \quad r_1 = \frac{n \cdot f \cdot r_2}{r_2 - n \cdot f}$$

$$57. \quad b = \frac{BH^3 - 12 \cdot l}{h^3}$$

$$58. \quad s = \frac{v \cdot (t^2 - a^2)}{2 \cdot t}$$

$$59. \quad x = \frac{b - a^2}{a^2}$$

$$60. \quad v = \frac{f_1 \cdot c - f \cdot c}{f_1}$$

$$61. \quad x_{ac} = \frac{V \cdot (x_{ab} + x) - u}{1 - V}$$

$$62. \quad a_m = \frac{\lambda \cdot \Omega \cdot k}{b - \lambda \cdot (\alpha_1 + \Delta a)}$$

$$63. \quad R_1 = \frac{U_1 R_2}{U - IR_2 - U_1}$$

$$64. \quad x = u^2 - v^2$$

$$65. \quad x = r - 1$$

$$66. \quad m_1 = \frac{E_1 - E_2}{c^2} + m_2$$

$$67. \quad m_1 = \frac{2Em_2}{m_2 \cdot \left(v_1^2 - v_2^2 \right) - 2E}$$

$$68. \quad i = \frac{2 \cdot a \cdot c_2 \cdot A \cdot \sin \gamma}{\cos \varphi (2Ac_1 \cdot \sin \varphi - v_k \cdot F)}$$

$$69. \quad \mu = \frac{x^2 + y^2 - 2y}{x^2 + y^2 + 2y} - \frac{4\pi\hbar\sigma}{F} \cdot \frac{(x^2 + y^2)^2}{x(x^2 + y^2 + 2y)}$$

$$70. \quad \sin \gamma = \frac{24ab(C_2 \cdot \sin \beta - C_1 \cdot \sin \alpha)}{24a^2 \cdot x + x^3} + \frac{12c}{24a^2 + x^2}$$

$$71. \quad a = \frac{2A - b \cdot (y_2 - y_3) - c \cdot (y_3 - y_1)}{y_1 - y_2}$$

5 Systeme linearer Gleichungen

1. $\{(2; 1)\}$

2. $\{(3; 4)\}$

3. $\{(0,5; 2)\}$

4. $\{(4; 3)\}$

5. $\left\{\left(\frac{61}{76}; \frac{7}{76}\right)\right\}$

6. $\{(3; 4)\}$

7. $\{(5; 4)\}$

8. $\{(3; 1)\}$

9. $\{(3; -1,2)\}$

10. $\{(3,5; 4,5)\}$

11. $\{(b; 0)\}$

12. $\left\{\left(\frac{a+b}{a}; \frac{a-b}{b}\right)\right\}$

13. $\{(20; 15)\}$

14. $\{(3; 6)\}$

15. $\{(0,5; 1)\}$

16. $\{(-7; -3)\}$

17. $\left\{\left(-\frac{3}{8}a; 3b\right)\right\}$

18. $\{(2; 2,5)\}$

19. $\{(3; 0,5)\}$

20. $\{(12; 15)\}$

21. $\{(3; 40)\}$

22. $\{(1; 3)\}$

23. $\left\{\left(-\frac{9}{2}; -\frac{18}{7}\right)\right\}$

24. $\{(3; 2)\}$

25. $\left\{\left(\frac{8}{3}; \frac{7}{2}\right)\right\}$

26. $\left\{\left(0, -\frac{4}{3}\right)\right\}$

27. $\{(-7; 2)\}$

28. $\{(6; 4)\}$

29. $\{(2; 4)\}$

30. $\{(3; 2)\}$

31. $\{(-11; -2)\}$

32. $\{(7; 8)\}$

33. $\{(5; 7)\}$

34. $\left\{\left(\frac{3}{7}; 7\right)\right\}$

35. $\left\{\left(400 \frac{1}{\min}; 500 \frac{1}{\min}\right)\right\}$

36. $\{(3; -2; 4)\}$

37. $\{(7; 0; 2)\}$ 38. $\{(4; -3; -5)\}$ 39. $\{(2; 3; 6)\}$ 40. $\left\{\left(\frac{3}{2}; -\frac{2}{7}; -\frac{13}{14}\right)\right\}$
41. $\{(2; 3; 7)\}$ 42. $\left\{\left(\frac{2a+b-c}{14}; \frac{2b+c-a}{14}; \frac{2c+a-b}{14}\right)\right\}$ 43. $\{(30; 20; 40)\}$
44. $\{(3; -1; 2,5)\}$ 45. $\{(4; 3; 5)\}$ 46. $\{(5; 3; 2)\}$ 47. $\{(5; -1; -3)\}$
48. $\{(3; 4; 2)\}$ 49. $\{(1; 1; 1)\}$ 50. $\left\{\left(\frac{194}{23}; -\frac{27}{23}; \frac{111}{23}; \frac{102}{23}\right)\right\}$
51. $F_N = \frac{l}{l_1 - \mu \cdot l_2} \cdot F$; $F_{Ax} = \mu \cdot F_N = \frac{\mu \cdot l}{l_1 - \mu \cdot l_2} \cdot F$; $F_{Ay} = F - F_N = \left(\frac{l_1 - \mu \cdot l_2 - l}{l_1 - \mu \cdot l_2}\right) \cdot F$
 $F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2}$
52. $F_N = \frac{1 + \frac{\mu \cdot l_1}{l_2} \cdot F}{\sin \alpha - \mu \cdot \left[1 + \frac{l_2 + l_3}{l_2} \cdot \cos \alpha - \cos \alpha\right]}$; $F_N = 590,71 \text{ N}$; $F_{NA} = 858,7 \text{ N}$; $F_{NB} = 1154,06 \text{ N}$
53. $D = 1$ 54. $D = -13$ 55. $D = -8$ 56. $D = -120$

6.2 Potenzgesetze

1. 2 2. -243 3. 1 4. 16 5. -0,000 001
6. -1,0201 7. -1 8. -15,625 9. 4 10. 100
11. 27 12. 5 13. 2 14. $(-2)^{-2} = \frac{1}{4}$ 15. 10
16. 2 17. a^2 18. x 19. 1 20. $x^{n-2} = \frac{x^n}{x^2}$
21. x^{2m} 22. x 23. 2 24. 4x 25. $4x^2$
26. x^a 27. $\frac{b}{a}$ 28. 1 29. $\frac{3}{a}$ 30. $a^{-1} = \frac{1}{a}$
31. a^2 32. x 33. x^a 34. x 35. $-x^6$
36. $a^5 - 4x$ 37. $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ 38. x^2 39. $\frac{y^{21}}{x^2}$ 40. xy
41. $\frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$

7 Wurzeln

1. 2 2. 0,5 3. 0,5 4. 2 5. 30

- | | | | | |
|------------------------------|--------------------------|------------------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|
| 6. 0,4 | 7. $\frac{27}{8}$ | 8. 25 | 9. x^2 | 10. 2 |
| 11. ab | 12. x^2 | 13. $\frac{x^6 \cdot y^2}{z^6}$ | 14. x^2 | 15. x^6 |
| 16. $3 \cdot \sqrt[3]{b}$ | 17. 2 | 18. ab | 19. $\sqrt[3]{6}$ | 20. $\sqrt[4]{2}$ |
| 21. x^2 | 22. $\sqrt[3]{x}$ | 23. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ | 24. $\sqrt{a-b}$ | 25. $\sqrt[3]{x^a}$ |
| 26. $m+1\sqrt{xm}$ | 27. $\sqrt{2}$ | 28. $\sqrt[8]{2^7}$ | 29. $4 \cdot \sqrt{5} = \sqrt{80}$ | 30. $6 \cdot \sqrt[3]{a}$ |
| 31. $6 \cdot \sqrt[n]{a}$ | 32. $3 \cdot \sqrt{x}$ | 33. $3 \cdot \sqrt{5} = \sqrt{45}$ | 34. $2ab\sqrt{a}$ | 35. $2 \cdot \sqrt[n]{x+y}$ |
| 36. $\frac{4}{\sqrt[3]{a}}$ | 37. $\sqrt{2a}$ | 38. $\frac{\sqrt{a+b}}{4}$ | 39. $\frac{2}{5}\sqrt{a}$ | 40. $\sqrt{2-x}$ |
| 41. $\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$ | 42. $\frac{\sqrt{x}}{x}$ | 43. $4 \cdot \sqrt{x+y}$ | 44. $5+2\sqrt{6}$ | 45. $4a-\sqrt{3b}$ |
| 46. $3+2\sqrt{2}$ | 47. $\sqrt[3]{x-1}$ | 48. $\sqrt{a^2+2+a}$ | 49. $\frac{2-3x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ | 50. $\frac{a^2+2x^2}{a(a^2+x^2)}$ |

8 Quadratische Gleichungen

- | | | |
|---|--|---|
| 1. $\{2,83; -2,83\}$ | 11. $\{1; -1\}$ | 21. $\left\{-1+\sqrt{3}; -1-\sqrt{3}\right\}$ |
| 2. $\left\{\frac{2}{9}; -\frac{2}{9}\right\}$ | 12. $\{12; -2\}$ | 22. $\{3; -5\}$ |
| 3. $\left\{\frac{\sqrt{2}}{3}; -\frac{\sqrt{2}}{3}\right\}$ | 13. $\{5\}$ | 23. $\{1; -3\}$ |
| 4. $\left\{\frac{3}{5}; -\frac{3}{5}\right\}$ | 14. $\{11; -15\}$ | 24. $\{1; -4\}$ |
| 5. $\{21; -21\}$ | 15. $\{2; -4\}$ | 25. $\{-3; 7\}$ |
| 6. $\left\{\sqrt{21}; -\sqrt{21}\right\}$ | 16. $\left\{\sqrt{3}; -\sqrt{5}\right\}$ | 26. $\{-0,667; 0,5\}$ |
| 7. $\left\{\sqrt{83}; -\sqrt{83}\right\}$ | 17. $\left\{\sqrt{2}; -2\right\}$ | 27. $\{2; 4\}$ |
| 8. $\{19; -19\}$ | 18. $\{0; -2\}$ | 28. $\{1; 23\}$ |
| 9. $\left\{\frac{8}{3}; -\frac{8}{3}\right\}$ | 19. $\{2; -4\}$ | 29. $\{4; 14\}$ |
| 10. $\left\{\frac{1}{7}; -\frac{1}{7}\right\}$ | 20. $\{1; -2\}$ | 30. $\{0,13; 4,13\}$ |

31. $\{2; -1\}$

41. $\{a+2; a-2\}$

51. $a = \frac{3}{2} \pm \frac{7}{2}; \{5; -2\}$

32. $\{-8\}$

42. $\{a+3; a-3\}$

52. $d_{wk} = d_{wg} \pm \sqrt{4e \left(L_w - 2e - 1,57 (d_{wg} + d_{wv}) \right)}$

33. $\{28; 50\}$

43. $\left\{ \frac{a}{b}; \frac{b}{a} \right\}$

53. $\tan \chi = \frac{4 \cdot y_M}{u - 2T} \pm \sqrt{\frac{16y_M^2 + 4T^2 - u^2}{(u - 2T)^2}}$

34. $\{a\}$

44. $\{2a; 2b\}$

54. $\{-1; 1; -2; -2\}$

35. $\{a; -b\}$

45. $\left\{ \frac{u}{2v}; \frac{v}{2u} \right\}$

55. $\left\{ 1; -1; \sqrt{7}; -\sqrt{7} \right\}$

36. $\{b\}$

46. $\{6,05 a; -1,65 a\}$

56. $\left\{ 1; -1; \sqrt{5}; -\sqrt{5} \right\}$

37. $\{a; b\}$

47. $\{1+a; 49-a\}$

57. $\left\{ 1; -1; \sqrt{15}; -\sqrt{15} \right\}$

38. $\left\{ a; \frac{a}{2} \right\}$

48. $\left\{ \sqrt{a^2 + b^2}; -\sqrt{a^2 + b^2} \right\}$

58. $\{2; -2; 3; -3\}$

39. $\left\{ \frac{a}{3}; \frac{b}{2} \right\}$

49. $a = 1 \pm \sqrt{1 - \sin \gamma}$

59. $\left\{ \sqrt{2}; -\sqrt{2}; \sqrt{6}; -\sqrt{6} \right\}$

40. $\left\{ \frac{a}{a-b}; \frac{b}{a-b} \right\}$

50. $a = \pm \sqrt{d^2 + 4x(D-d) - D^2}$

8.6 Textaussagen, die auf quadratische Gleichungen führen

1. $h = 1,43 \text{ mm}$

2. $s = 1,89 \text{ mm}$

3. $a = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - b^2}$

4. $a = 152,17 \text{ mm}$

5. $x = 7,831 \Omega$

6. $f = 255,88 \text{ Hz}$

7. $R_1 = 18,74 \Omega; R_2 = 21,4 \Omega$

9 Wurzelgleichungen

1. $D = \{x | x \geq -5\}; L = \{20\}$

4. $D = \left\{ x \mid x \geq \frac{2}{3} \right\}; L = \{6\}$

7. $D = \{x | -b \leq x \leq 3b\}; L = \{b\}$

2. $D = \{x | x \geq 6\}; L = \{10\}$

5. $D = \{x | x \geq 1\}; L = \{3\}$

8. $D = \{x | x \geq 3\}; L = \{3\}$

3. $D = \left\{ x \mid x \geq \frac{2}{3} \right\}; L = \{ \}$

6. $D = \{x | x \geq 0,5\}; L = \{3\}$

9. $D = \{x | x \geq 10\}; L = \{19\}$

$$10. D = \{x | x \geq 1,5\}; L = \{6; 14\}$$

$$16. D = \{x | x \geq 5\}; L = \{5\}$$

$$22. D = \{x | x \geq 1,5\}; L = \{6\}$$

$$11. D = \{x | x \geq 12\}; L = \{21\}$$

$$17. D = \{x | x \geq 19\}; L = \{6\}$$

$$23. D = \{x | x \geq 3\}; L = \left\{4; \frac{19}{6}\right\}$$

$$12. D = \{x | x \geq 5\}; L = \{9\}$$

$$18. D = \left\{x | x \geq \frac{7}{8}\right\}; L = \left\{2; \frac{11}{9}\right\}$$

$$24. D = \left\{x | x \geq \frac{5}{3}\right\}; L = \{3\}$$

$$13. D = \{x | x \geq 4\}; L = \{8\}$$

$$19. D = \left\{x | x \geq \frac{15}{16}\right\}; L = \{4\}$$

$$25. L = \{(1; 2)\}$$

$$(u = \sqrt{3y+3}; v = \sqrt{4x-3})$$

$$14. D = \left\{x | x \geq \frac{3}{4}\right\}; L = \{3\}$$

$$20. D = \{x | x \geq 2,5\}; L = \{7\}$$

$$26. L = \{(6; 2)\}$$

$$15. D = \{x | x \geq 3\}; L = \left\{7; \frac{19}{5}\right\}$$

$$21. D = \{x | x \geq 3\}; L = \{5\}$$

$$27. L = \{(4; 1)\}$$

$$28. L = \{(3; 5)\}$$

10.2 Einfache lineare Ungleichungen

$$1. \{x | x > -19\}$$

$$7. \{x | x < -1,25\}$$

$$11. \left\{x | x < -\frac{60}{11}\right\}$$

$$2. \left\{x | x < -\frac{17}{3}\right\}$$

$$8. \{x | x > -2\}$$

$$12. \left\{x | x > -\frac{7}{3}\right\}$$

$$3. \{x | x < 5,5\}$$

$$9. \{x \in \mathbb{N}^* | x < 6\}$$

$$13. \left\{x | x < \frac{7}{4}\right\}$$

$$4. \left\{x | x > -\frac{1}{9}\right\}$$

$$= \{1; 2; 3; 4; 5\}$$

$$14. \left\{x | x < \frac{19}{7}\right\}$$

$$5. \{x | x > 12,5\}$$

$$10. \{x \in \mathbb{Z} | -0,5 < x \leq 6\}$$

$$15. \{x | x < 9\}$$

$$6. \{x | x < 1,5\}$$

$$= \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

$$16. \left\{x | x < -\frac{1}{4}\right\}$$

10.3 Bruchungleichungen

$$17. D = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}; L = \{x | x > -1\}$$

$$24. D = \mathbb{Q} \setminus \{0; 5\}; L = \{x | 0 < x < 5\}$$

$$18. D = \mathbb{Q} \setminus \{2\}; L = \{x | 2 < x < 2,5\}$$

$$25. D = \mathbb{Q} \setminus \{2; -5\}; L = \left\{x | x < -5 \vee 2 < x < \frac{10}{3}\right\}$$

$$19. D = \mathbb{Q} \setminus \{-4\}; L = \{x | x > -4\}$$

$$26. D = \mathbb{Q} \setminus \{1\}; L = \left\{x | 1 < x < \frac{5}{3}\right\}$$

$$20. D = \mathbb{Q} \setminus \{3\}; L = \{x | x < 3 \vee x > 4,5\}$$

$$27. D = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 0\}; L = \{x | x < -2,5 \vee -1 < x < 0\}$$

$$21. D = \mathbb{Q} \setminus \{1\}; L = \{x | -1 < x < 1\}$$

$$28. D = \mathbb{Q} \setminus \{-3; 2\}; L = \{x | -3 < x < 2 \vee x > 4,5\}$$

$$22. D = \mathbb{Q} \setminus \{1\}; L = \{x | 1 < x \leq 2\}$$

$$29. D = \mathbb{Q} \setminus \{1\}; L = \{x | x > 1 \vee x < -0,5\}$$

$$23. D = \mathbb{Q} \setminus \{-7\}; L = \{x | -7 < x < 7\}$$

$$30. D = \mathbb{Q} \setminus \{-5\}; L = \{x | x < -5 \vee x > 10\}$$