Mathematik 1

VL - Slides

Simon Kirchgasser (ITS-B, WIN) und Günther Eibl (ITSB-B)

September 19, 2024

Anmerkungen

Farben innerhalb der Slides kennzeichnen Folgendes:

- GRÜN ... mathematische Definition oder Satz
- ROT ... sehr wichtige Aussage
- BLAU ... Hyperlinks zu externen Quellen

Logik

"Die Logik ist die Wissenschaft des Denkens, seiner Bestimmungen und Gesetze"

Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770 - 1831)

Logik

- Ziel:

  Die Logik lehrte ursprünglich das korrekte Argumentieren.
- Parallele:
  - Die Rhetorik lehrt das überzeugende Argumentieren.

- Ausgangspunkt der europäisch-westlichen Logik ist im Antiken Griechenland:

  $\rightarrow$ aristotelisch-scholastischen Logik
- Moderne bzw. mathematische Logik:

  $\rightarrow$ ab ca 1847 (Giuseppe Peano)

Logik

- Gegenstand der Logik wie sie in diesem Kurs behandelt werden sind Aussagen und deren Beziehungen

- Für Mathematik ganz wichtig:
  - logisch korrekte Schlussfolgerungen
  - genaues Herausarbeiten von Voraussetzungen für eine Schlussfolgerung

Warum ist Logik für die Technik wichtig?

- Modellierung von Wissen (Lösen von abstrakten Problemen durch logisches Schlussfolgern)
- Auswertung von Datenbankabfragen
- Kontrollfluss von Computerprogrammen (z.B. if-then-else Konstrukte)
- Logikbausteine in technischen Informatik (Hardware)
- Verifikation von
  - Schaltkreisen
  - Programmen
  - Protokollen (Kommunikation zwischen Systemen)
- ...

Literaturhinweise: Bibliothek

Dieses Kapitel basiert hauptsächlich auf folgender Quelle:

- Gerald und Susanne Teschl:
  Mathematik für Informatiker - *(Kapitel 1)*, Springer Vieweg
  http://permalink.obvsg.at/fsa/AC15133693

Aussagen

Aussage

- Eine Aussage A ist eine Behauptung, die (in einem gegebenen Kontext) entweder wahr (w oder 1 oder T) oder falsch (f oder 0 oder F) sein muss.
- Jede Aussage hat also einen Wahrheitswert

$$W(A) \in \{w, f\}$$

oder z.B.

$$W(A) \in \{1, 0\}.$$

Aussageformen

Aussageform

- Eine Aussageform enthält zumindest eine Variable x. Durch die Belegung der Variable(n) ergibt sich eine Aussage $A(x)$, in Abhängigkeit von der Belegung.

Beispiel:

- $A(x) : x < 100$ ist eine Aussageform
- besteht aus zwei Komponenten:
  a) Variable x
  b) < 100, dem Prädikat $\rightarrow$ Übergang zur Prädikatenlogik
  (Prädikatenlogik wird hier im Kurs nicht vertieft werden!)
- $\rightarrow A(1) : 1 < 100$ eine Aussage

Beispiele: Aussagen und Aussageformen

- Welche der folgenden Terme sind Aussagen oder Aussageformen? Welche sind wahr/falsch?
  1. Wien ist die Hauptstadt von Österreich.
  2. $1 + 5 = 6$.
  3. Ist heute Montag?
  4. Heute ist Freitag.
  5. x ist eine gerade Zahl.
  6. 5 ist kleiner als 3.
  7. Guten Abend!
  8. $x + 5 = 10$
  9. Dieser Satz ist falsch.
  10. Jede gerade Zahl, die größer als 2 ist, ist die Summe zweier Primzahlen.[1]

[1] Goldbach'sche Vermutung von 1742 - bisher nur für Zahlen bis $4 \cdot 10^{18}$ *gezeigt*

Erweiterung der Aussagenlogik

- Basiskonzept Aussagenlogik:

  In der Aussagenlogik werden zusammengesetzte Aussagen daraufhin untersucht, aus welchen einfacheren Aussagen sie zusammengesetzt sind.

  - Aussage P: der Fußboden ist blau
  - Aussage Q: die Decke ist grün
  - P und Q können nicht weiter "zerlegt" werden, daher bezeichnet man P und Q als atomare Aussagen.

  - $P \wedge Q$ liefert eine Zusammensetzung! Wie würde diese lauten?

- Limitierung:
  - Kompliziertere Aussagen können nur schwer formuliert werden, da jede Aussage mit "Wahr" oder "Falsch" beantwortet werden muss!

Erweiterung der Aussagenlogik

- Basiskonzept Prädikatenlogik:
  - Zerlege atomare Aussagen (stark vereinfacht dargestellt) in einzelne ”Eigenschaften” (Prädikate).
  - Mit Hilfe von Quantoren können die Prädikate einzelner ”Individuen” wieder miteinander verbunden werden. Dadurch können präzisere sowie allgemeinere Aussagen getroffen werden.

- Beispiele:
  - ”Alle Menschen sind sterblich.”

    $\rightarrow$ Ohne den Allquantor $\forall$ wäre diese Aussage nicht möglich.
  - ”Es gibt mindestens einen weißen Tiger.”

    $\rightarrow$ Ohne den Existenzquantor $\exists$ wäre diese Aussage nicht möglich.

Allaussagen

- $\forall$ macht aus einer Aussageform $A(x)$ eine Allaussage.
- Dies bedeutet, dass für alle Werte x, die Aussage $A(x)$ wahr ist:

$$\forall x : A(x) \quad \text{oder Alternativ} \quad \forall x : W(A(x)) = w$$

- Beispiele:
  - Alle Student:innen sind anwesend.
  - $\forall x \in \mathbb{N} : x \in \mathbb{Z}$

Existenzaussagen

- $\exists$ macht aus einer Aussageform $A(x)$ eine Existenzaussage.
- Dies bedeutet, dass es einen Wert x gibt, für den die Aussage $A(x)$ wahr ist:

$$\exists x : A(x) \quad \text{oder Alternativ} \quad \exists x : W(A(x)) = w$$

- Beispiele:
  - Eine Person wird gewinnen.
  - $\exists x \in \mathbb{N} : x \notin \mathbb{Z}$
- Anmerkung:
  - Bei Verneinungen wird $\forall$ zu $\exists$ und umgekehrt.

Logische Operationen

Seien P und Q Aussagen:

Bezeichnung	**symbolisch**	**gelesen:**
Negation:	$\bar{P}$ oder $\neg P$	"nicht P"
Konjunktion:	$P \wedge Q$	"P und Q" $\rightarrow$ "und" im Sinne von "sowohl als auch"
Disjunktion:	$P \vee Q$	"P oder Q" $\rightarrow$ "oder" NICHT im Sinne von "entweder oder"
Implikation:	$P \Rightarrow Q$	"aus P folgt Q" $\rightarrow$ "wenn P, so Q" oder "wenn P, dann Q"
Äquivalenz:	$P \Leftrightarrow Q$	"P genau dann, wenn Q" $\rightarrow$ "P dann und nur dann, wenn Q"

Logisches Verknüpfen von Aussagen - ”Konjunktion” $\wedge$

- Die Zahl sechs ist durch drei teilbar und die Zahl sechs ist durch zwei teilbar.
  - Sprachlich: beide Aussagen gelten gleichberechtigt
  - Mathematisch:
    - Aussage P: Zahl sechs ist durch drei teilbar
    - Aussage Q: Zahl sechs ist durch zwei teilbar
    - Verknüpfung: $P \wedge Q$

Logisches Verknüpfen von Aussagen - "Disjunktion" $\vee$

- Petra ist Professorin oder Studentin.
    - Sprachlich: Petra ist Professorin oder Studentin oder beides.
    - Mathematisch:
        - Aussage P: Petra ist Professorin
        - Aussage Q: Petra ist Studentin
        - Verknüpfung: $P \vee Q$
    - Wenn man "oder beides" ausschließen möchte (XOR) müsste man z.B. "Petra ist entweder Professorin oder Studentin." schreiben. Noch besser ist es, wenn man "Aber nicht beides." hinzufügt.

- "Um eine Prüfung zu bestehen, muss man viel lernen oder gut schummeln."

Logisches Verknüpfen von Aussagen - 1.Teil ”Negation” $\neg$

Gesucht ist die Verneinung von:

- ”Der Fußboden ist blau.”
  - Sprachlich: Der Fußboden ist nicht blau.
  - Mathematisch:
    - Aussage P wird formal zu $\neg P$

- Achtung: ”Der Fußboden ist gelb.” liefert keine Verneinung der Aussage.

Logisches Verknüpfen von Aussagen - 2.Teil "Negation" $\neg$

- "Der Fußboden ist blau und die Decke ist grün."
  - Sprachlich:
    - Der Fußboden ist nicht blau und die Decke ist nicht grün.
      $\rightarrow$ stimmt das wirklich??
  - Mathematisch:
    - Aussage P: der Fußboden ist blau
    - Aussage Q: die Decke ist grün
    - Formal: $P \wedge Q$
    - Verneinung:
      "Der Fußboden ist nicht blau oder die Decke ist nicht grün."
      Formal: $\neg P \vee \neg Q$

Logisches Verknüpfen von Aussagen - 2.Teil "Negation" $\neg$

- "Die Zahl 3 ist eine Primzahl oder die Zahl 4 ist eine Primzahl."
  - Sprachlich:
    - Die Zahl 3 ist keine Primzahl und die Zahl 4 ist keine Primzahl.
  - Mathematisch:
    - Aussage P: die Zahl 3 ist eine Primzahl
    - Aussage Q: die Zahl 4 ist eine Primzahl
    - Formal: $P \vee Q$
    - Verneinung (formal):
      $\neg P \wedge \neg Q$
      $\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$

Logisches Verknüpfen von Aussagen - 2.Teil "Negation" $\neg$

- Doppelte Negationen fallen weg!
  - Sprachlich:
    - Wale sind nicht keine Säugetiere.
      Wale sind Säugetiere.
  - Mathematisch:
    - Aussage P: Wale sind nicht keine Säugetiere.
    - Verneinung: $\neg(\neg P) = P$

Äquivalenz

- Äquivalenz bedeutet: $P \Leftrightarrow Q$
  - P gilt genau dann, wenn auch Q gilt.
  - P gilt dann und nur dann, wenn auch Q gilt.
  - P ist äquivalent zu P
  - Aus P folgt Q und aus Q folgt P
  - P ist notwendig und hinreichend für Q

Anmerkung:

- Jeder mathematische Satz hat im Prinzip die Gestalt einer Implikation $P \Rightarrow Q$ oder einer Äquivalenz $P \Leftrightarrow Q$.

Interpretation der Äquivalenz

- Eine quadratische Matrix A ist invertierbar $\Leftrightarrow det(C) \neq 0$

- Äquivalenzumformungen
  - Beispiele:
    1. $x + 3 = 7$ ... Lösung erhält man durch Subtraktion von drei auf beiden Seiten der Gleichung.
    2. $x^2 - 4 = 0$ ... Lösung erhält man durch Addition von vier auf beiden Seiten; gefolgt vom Ziehen der quadratischen Wurzel.

    3. Welche von den durchgeführten Umformungen stellt keine Äquivalenzumformung dar?

Implikation (Schlussfolgerung)

- Formal: $P \Rightarrow Q$
- In mathematischer Hinsicht vielleicht der "wichtigste Operator"!
- Die Aussage P stellt die Voraussetzung, die Prämisse dar.
- Die Aussage Q stellt die auf Basis der Prämisse aufgestellte Behauptung, die Konklusion dar.
  - Aus P folgt Q.
  - Wenn P gilt, so gilt auch Q.
  - P ist also hinreichend für Q.
  - Q ist notwendig für P.
  - P gilt nur dann, wenn auch Q gilt.

Beispiele: Implikation

1. Wenn du zu viel isst, wird dir schlecht.
2. Wenn es einen "overflow" gibt, stürzt das Programm ab.
3. $x > 3 \Rightarrow x > 1$
4. $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \{-2, 2\}$
5. $x + y = 2 \Rightarrow$ Die Lösungsmenge ist
   $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = (\tau, 2 - \tau), \tau \in \mathbb{R}, \quad \textit{beliebig}\}$

Anwendungen Implikation: Gleichungen

1. Fallunterscheidungen bei Gleichungen mit unbekannten Variablen:
   - z.B.: $x \cdot (2x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{2}$

2. Es seien a, b, c beliebige, unbekannte, reelle Zahlen. Suche eine reelle Zahl x, so dass die folgende Aussage ax + c = b wahr ist.
   - $ax + c = b \Rightarrow x = \frac{b-c}{a}$