Mathematik - Wiederholungsaufgaben 1

1. Gegeben ist der Term $T(a;b) = \frac{a+b}{a-b}$.

   (a) Berechne den Wert des Terms für $(a;b) = (-2;3)$.

   (b) Gib ein Zahlenpaar $(a;b)$ an, das nicht in den Term eingesetzt werden darf.

   (c) Gib ein Zahlenpaar $(a;b)$ an, das den Termwert 0 liefert.

   Bayerischer Mathematik Test für die 10. Klasse, 2007

Lösung: (a) $-\frac{1}{5}$, (b) z. B. $(0;0)$, (c) z. B. $(1;-1)$

2. (a) Berechne den Wert des Terms $(\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} - \frac{1}{3}) : 0,5$

   (b) Durch welche Zahl muss man die zahl $0,5$ ersetzen, damit man den doppelten Termwert erhält?

   Bayerischer Mathematik Test für die 8. Klasse, 2007

Lösung: (a) $\frac{4}{21}$
(b) $0,25$

3. Berechne zu den angegebenen Termen die zugehörigen Termwerte.

   (a) $T(x) = 2 \cdot x^3 - 52;\quad T(8)$

   (b) $T(x) = 10^2 + x^2;\quad T(24)$

   (c) $T(x) = 2x^2 - 535;\quad T(23)$

   (d) $T(x) = (x+1)^2 - 34;\quad T(5)$

   (e) $T(x) = x(x-1);\quad T(31)$

   (f) $T(x) = \frac{36(x^2+x)}{x-1};\quad T(2)$

   (g) $T(x) = x(6x-1) - x(x-1);\quad T(5)$

   Quelle: Kreuzzahlrätsel, Ulrike Schätz

Lösung: (a) 972 (b) 676 (c) 523 (d) 2
(e) 930 (f) 216 (g) 125

4. Berechne folgende Terme:

   (a) $(-12)^2 + (-94) + (-4)^3$ (b) $(-11)^2 + (-84) + (-3)^3$
   (c) $[(-18) : (+3)]^2 : (-\frac{1}{2})$ (d) $[(-8) : (+4)]^2 : (-\frac{1}{2})$
   (e) $\dfrac{-\frac{1}{2} - 2}{2 - \frac{3}{2}}$ (f) $(-2x)^2 - (-3y)^3 + 3 \cdot x^2 - 7y^3$

Lösung: (a) -14 (b) 10 (c) -72
(d) -8 (e) -5 (f) $7x^2+20y^3$

5. Berechne die Definitionsmengen folgender Terme:

   (a) $T_1(x)=\dfrac{x^2}{3-x}+\dfrac{2x-7}{3x-5},\quad G_1=\mathbb{N}$

   (b) $T_2(x)=\dfrac{x^2}{3-x}+\dfrac{2x-7}{3x-5},\quad G_2=\mathbb{Q}$

   (c) $T_3(x)=\dfrac{2x-7}{(2x+3)(5x-5)(8x+2)},\quad G_3=\mathbb{Q}$

Lösung: (a) $D_1=\mathbb{N}\backslash\{3\}$
(b) $D_2=\mathbb{Q}\backslash\left\{3,\frac{5}{3}\right\}$
(c) $D_3=\mathbb{Q}\backslash\left\{-\frac{3}{2},-\frac{1}{4},1\right\}$

6. Berechne die Definitionsmengen folgender Terme:

   (a) $T_1(x)=\dfrac{7}{x+|x|},\quad G_1=\mathbb{Q}$ (b) $T_2(x)=\dfrac{x}{x+|x|},\quad G_2=\mathbb{Z}$

   (c) $T_3(x)=\dfrac{-2}{x-|x|},\quad G_3=\mathbb{Q}$ (d) $T_4(x)=\dfrac{-x^2}{x-|x|},\quad G_4=\mathbb{N}$

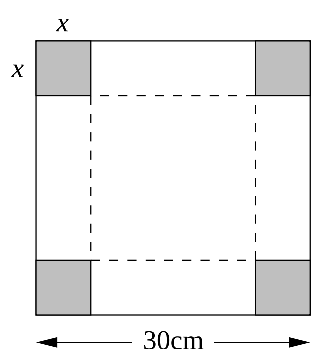
Lösung: (a) $x+|x|=\begin{cases}2x & \text{für } x>0\\ 0 & \text{für } x\leqq 0\end{cases}\qquad D_1=\mathbb{Q}^+=\{x|x>0\}$

(b) $D_2=\mathbb{N}$

(c) $x-|x|=\begin{cases}0 & \text{für } x\geqq 0\\ 2x & \text{für } x<0\end{cases}\qquad D_3=\mathbb{Q}^-=\{x|x<0\}$

(d) $D_4=\{\,\}$

7. Von einem quadratischen Stück Pappe mit der Seitenlänge 30 cm werden an den Ecken vier Quadrate mit der Seitenlänge x abgeschnitten. Die entstehenden Rechtecke werden entlang der gestrichelten Linien gefaltet, so dass eine quaderförmige Schachtel entsteht.

   (a) Stelle einen Term $V(x)$ für das Volumen der Schachtel auf.

   (b) Welche Definitionsmenge D_V ist für diesen Term sinnvoll? Begründe deine Wahl!

(c) Berechne den Wert des Terms $V(x)$ für $x = 0$, $x = 3\,\text{cm}$, $x = 6\,\text{cm}$, $x = 9\,\text{cm}$, $x = 12\,\text{cm}$ und $x = 15\,\text{cm}$. Veranschauliche diese Werte in einem Koordinatensystem mit einer waagrechten x-Achse ($x = 1\,\text{cm}$ entspricht einem Kästchen und $V = 100\,\text{cm}^3$ entspricht einem Käschen).

(d) Suche den x-Wert, für den $V(x)$ maximal wird. Wie groß ist das maximale Volumen der Schachtel? Ergänze das gezeichnete Diagramm mit diesem Wert.

Lösung:

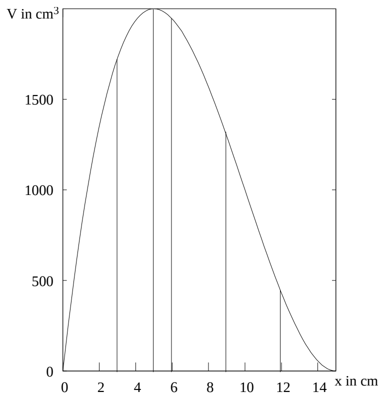
(a) $V(x) = (30\,\text{cm} - x)^2 \cdot x$

(b) $D_V = \{\, x \,|\, 0 \leqq x \leqq 15\,\text{cm}\}$

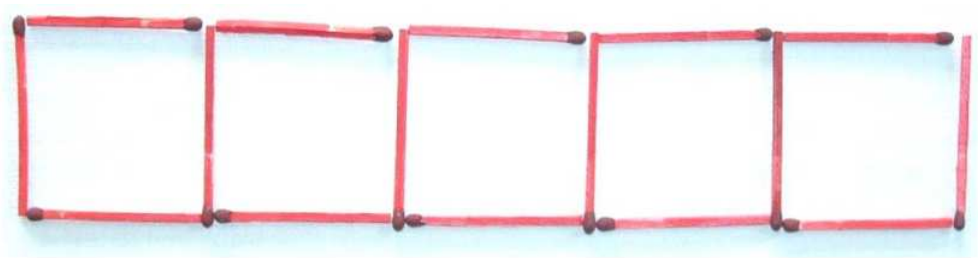
(c)

$\frac{x}{\text{cm}}$	0	3	6	9	12	15
$\frac{V(x)}{\text{cm}^3}$	0	1728	1944	1296	432	0

(d) maximaler Wert: $V(5\,\text{cm}) = 2000\,\text{cm}^3$



8. **Streichholzkette**
Mit Streichhölzern kann man Ketten mit Quadraten legen.



(a) Wie viele Streichhölzer benötigt man für 1, 2, 3, 4 bzw. 12 Quadrate?

(b) Gib eine Gleichung an, die den Zusammenhang zwischen der Anzahl k der Quadrate und der Anzahl s der benötigten Streichhölzer allgemein beschreibt.

Quelle: VERA C 2008

Lösung: (a) 4, 7, 10, 13 bzw. 37 Streichhölzer

(b) $s(k) = 4 + 3 \cdot (k - 1)$

9. Bestimme Definitions- und Lösungsmenge der Gleichung über $G = \mathbb{Q}$:

$$2 - \frac{2}{x} - \frac{4x}{2x+1} = 0$$

Lösung: $D = \mathbb{Q} \setminus \{0; -\frac{1}{2}\}$, $L = \{-1\}$

10. Löse die Gleichung $\left(p + \frac{a}{V^2}\right) \cdot (V - b) = n \cdot R \cdot T$ nach der Variablen a auf! Nenne auch die Bedingungen, unter denen dies nur möglich sein kann!

Lösung: $a = \frac{nRTV^2}{V-b} - pV^2$; $V \neq 0$; $V \neq b$

11. Löse nach der Variablen a auf:

$$\frac{a - c - ac}{ab + ac} = 1 + \frac{1}{a}$$

Lösung: $a = \dfrac{b + 2c}{1 - b - 2c}$

12. Bestimme jeweils Definitions- und Lösungsmenge:

   (a) $x - 2 - \dfrac{4}{x-2} = x \cdot \dfrac{x-4}{x-2}$

   (b) $\dfrac{-3x}{x+3} = \dfrac{-21}{x^2+3x} - \dfrac{3x-7}{x}$

   (c) $\dfrac{x}{2x+3} = \dfrac{x-3}{2x-1}$

Lösung: (a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$, $L = D$
(b) $D = \mathbb{Q} \setminus \{0; -3\}$, $L = \{\}$
(c) $D = \mathbb{Q} \setminus \{0,5; -1,5\}$, $L = \{-4,5\}$

13. Gegeben ist der Term:

$$\frac{(0{,}000\,000\,106\,5)^4 \;\cdot\; 0{,}000\,190\,0}{3\,560\,000}\,.$$

   (a) Stelle den Term mit Zehnerpotenzen dar (jeweils eine Stelle vor dem Komma)!

   (b) Berechne den Term mit dem Taschenrechner (Ergebnis mit zwei Stellen vor dem Komma und vier gültigen Ziffern)!

Lösung: (a): $\dfrac{1{,}065^4 \cdot 1{,}9}{3{,}56} \cdot 10^{-26}$
(b): $68{,}66 \cdot 10^{-28}$

14. Vereinfachen und schreiben Sie das Ergebnis ohne Bruchstrich:

$$\frac{0{,}8a^6b^{-5}c^3}{3^{-3}a^{-3}b^4} : \frac{9b^{-1}}{a^{-4}c^2}$$

Lösung: $2{,}4a^5b^{-8}c^5$

15. Vereinfachen Sie:

$$\frac{r^{3m+2}}{a^{m+3}} : \frac{r^{2m-2}}{a^{m+2}}$$

Lösung: $r^{m+4}a^{-1}$

16. Vereinfachen Sie möglichst weitgehend und schreiben Sie das Ergebnis ohne Verwendung von Klammern und Brüchen:

$$\left(\frac{r^{3n}s^{-7}}{5s^{-4}}\right)^{-2} : \left(\frac{r^{1-n}}{s^6}\right)^2$$

Lösung: $25r^{-4n-2}s^{18}$

17. Vereinfachen Sie möglichst weitgehend und schreiben Sie das Endergebnis ohne Bruchstrich:

$$\frac{(3u^4v^{-1})^2}{(9u^{-2}v^{-3})^{-1}} : \frac{(2u^{-6}v^3)^{-3}}{(2u^5v^{-2})^4}$$

Lösung: $2^7 \cdot 3^4 \cdot u^8 \cdot v^{-4}$

18. In einem Physikbuch findet man für die sogenannte Fermi-Energie folgende Formel (alle auftretenden Variablen sind positiv):

$$E = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Löse nach V auf und schreibe das vereinfachte Ergebnis in der Form

$$\text{Bruch} \cdot (\text{Bruch})^3 .$$

Das Volumen V ist der Rauminhalt eines Würfels mit der Kantenlänge a. Berechne einen Ausdruck für a.

Lösung: $\left(\dfrac{3N}{\pi V}\right)^{\frac{2}{3}} = \dfrac{8mE}{h^2} \implies \dfrac{3N}{\pi V} = \left(\dfrac{8mE}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} \implies V = \dfrac{3N}{\pi}\left(\dfrac{h^2}{8mE}\right)^{\frac{3}{2}} = \dfrac{3N}{\pi}\left(\dfrac{h}{\sqrt{8mE}}\right)^3$

$V = a^3 \quad \implies \quad a = V^{\frac{1}{3}} = \dfrac{h}{\sqrt{8mE}} \cdot \left(\dfrac{3N}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \dfrac{h}{\sqrt{8mE}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{3N}{\pi}}$

19. Vereinfachen Sie ($a \in \mathbb{R}^+$): (a) $\left(a^2\right)^{\sqrt{2}} \cdot a^{\sqrt{2}}$ (b) $\left(\sqrt{a}\right)^3 : \sqrt[3]{a^2}$
Berechnen Sie die Lösungsmenge
ohne Verwendung des Taschenrechners: (c) $x^8 = 16$ (d) $8^x = 16$

Lösung: (a) $a^{2\sqrt{2}+\sqrt{2}} = a^{3\sqrt{2}}$
(b) $a^{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}} = a^{\frac{5}{6}}$
(c) $x = \pm 16^{\frac{1}{8}} = \pm 2^{\frac{4}{8}} = \pm\sqrt{2}; \quad L = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$
(d) $2^{3x} = 2^4; \quad x = \dfrac{4}{3}$

20. Vereinfachen Sie folgenden Term:

$$\frac{a^{-\frac{7}{8}} \cdot b}{c^{-\frac{1}{2}}} : \frac{b^{\frac{1}{2}} \cdot c^{\frac{3}{4}}}{a}$$

Lösung: $a^{\frac{1}{8}} b^{\frac{1}{2}} c^{-\frac{1}{4}}$

21. Vereinfachen Sie so weit wie möglich und schreiben Sie das Ergebnis ohne negative Exponenten:

$$\left(\frac{4x^{-3}y^2}{z^5}\right)^{-\frac{2}{3}} : \left(\frac{16y^{-2}}{x^{-6}z^4}\right)^{\frac{1}{6}}$$

Lösung: $\dfrac{xz^4}{4y}$

22. Vereinfachen Sie so weit wie möglich und schreiben Sie das Ergebnis ohne Nenner ($a, b \in \mathbb{R}^+$):

$$\frac{\left(16a^{-\frac{5}{6}}b\right)^{\frac{3}{4}}}{\left(\frac{1}{8}a^{\frac{3}{8}}b^{-\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{2}{3}}}$$

Lösung: $2a^{-\frac{3}{8}}b^{\frac{1}{4}}$

23. Vereinfachen Sie so weit wie möglich und geben Sie das Ergebnis nennerfrei an ($u, x \in \mathbb{R}^+$):

$$\left(\frac{u}{x}\right)^{\frac{m}{n}} \cdot \left(\frac{x}{u}\right)^{-\frac{m}{n}} \cdot \left(\frac{1}{ux}\right)^{-2\frac{m}{n}}$$

Lösung: $u^{\frac{4m}{n}}$

24. Bringen Sie auf den kleinsten gemeinsamen Nenner und vereinfachen Sie:

$$\frac{y^{n-2}}{1-y} - \frac{y^{n-1}}{1+y} + \frac{y^n}{y^2-1}$$

Lösung: $\dfrac{y^{n-2}}{1-y^2}$

25. Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$\frac{2-b}{b^{-n}} + \frac{b^2+1}{b^{-n+1}} - \frac{b+b^2}{b^{-n+2}}$$

Lösung: b^n

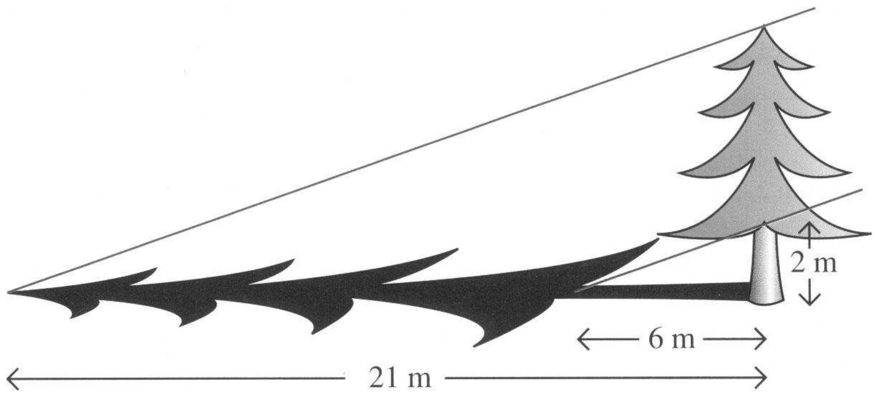
26. Bringen Sie auf einen gemeinsamen Nenner und vereinfachen Sie:

$$\frac{1}{x^{n-2}} - \frac{2x^{n+2}+5x^3}{x^{2n}} + \frac{3x^{n-1}+5}{x^{2n-3}}$$

Lösung: $2 \cdot x^{2-n}$

27. **Ein Baum und sein Schatten**

    Greta Grübel hat an einem Baum und an seinem Schatten Längen gemessen.
    Wie kann Greta die Höhe des Baumes berechnen?
    Funktioniert die Methode auch, wenn der Baum an einem (geraden) Hang steht? Begründe!



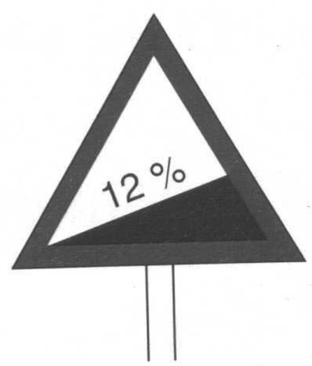
Quelle: Abakus 9, S.99

Lösung: $\frac{h}{2} = \frac{21}{6}$
$h = 7\,\mathrm{m}$

28. **Anwendungen der Strahlensätze**

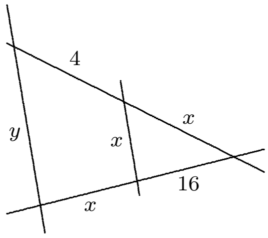
    Im Gebirge sieht man häufig Straßenschilder, die die Steigung bzw. das Gefälle einer Straße in Prozent angeben. 12% bedeutet z.B., dass die Straße auf 100 m horizontal gemessen um 12 m ansteigt.

    (a) Welchen Höhenunterschied überwindet die Straße auf 2, 3 km?
    (b) Was bedeutet 100% Steigung?
    (c) Was steht auf dem Schild, wenn eine Straße auf 3, 8 km einen Höhenunterschied von 285 m überwindet.



Lösung: $a = 276\,\mathrm{m}$; $c = 7,5\%$

29. Berechne x und y:



Lösung: $x = 8$, $y = 12$

30. Begründen Sie anhand einer Zeichnung:

$$(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$$

Lösung:

31. Begründen Sie anhand einer Zeichnung:

$$\cos(90^o - \alpha) = \sin\alpha$$

Lösung:

32. Vereinfachen Sie die folgenden trigonometrischen Ausdrücke so weit wie möglich:

    (a) $\frac{1}{\tan\alpha\cos\alpha}$

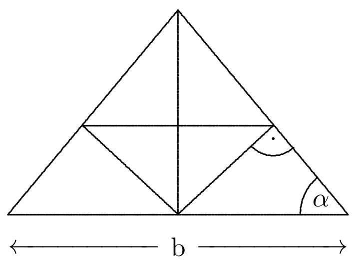
    (b) $\sin\alpha + \frac{\cos\alpha}{\tan\alpha}$

    (c) $\sqrt{1+\sin\alpha}\cdot\sqrt{1-\sin\alpha}$

    (d) $\dfrac{1}{1+(\tan\alpha)^2}$

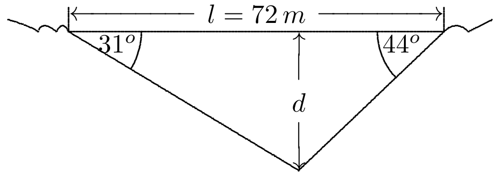
Lösung: (a) $\frac{1}{sin\alpha}$ (b) $\frac{1}{sin\alpha}$ (c) $|cos\alpha|$ (d) $(cos\alpha)^2$

33. Der Giebel eines Hauses soll mit einem symmetrischen Fachwerk verziert werden (vgl. Zeichnung). Alle eingezeichneten Strecken stellen Balken dar. Wieviel Meter Balken braucht man insgesamt, wenn die Giebelbreite $b = 6{,}40\,\text{m}$ und der Neigungswinkel $\alpha = 50^o$ beträgt?



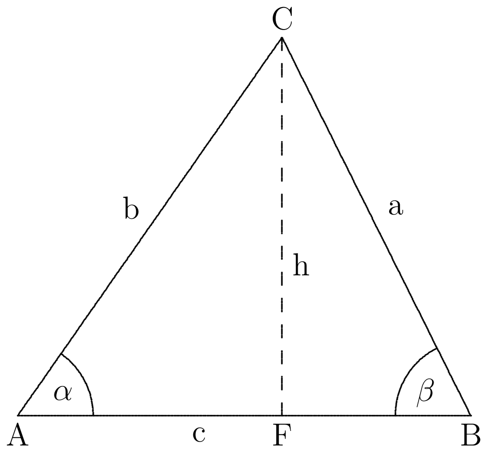
Lösung: 28,82 m

34. Über einen Kanal führt eine Brücke wie in der Skizze rechts dargestellt. Berechne aus der Brückenlänge und aus den beiden Neigungswinkeln die größte Tiefe d des Kanals.



Lösung: 26,7m

35. Von einem allgemeinen Dreieck ABC (siehe Figur!) ist bekannt:
$b = 7{,}0\,\text{cm}$; $c = 7{,}4\,\text{cm}$; $\alpha = 53°$.
Berechne ohne Verwendung des Satzes von Pythagoras:
   (a) die Länge der Höhe h
   (b) die Länge von [AF]
   (c) den Winkel β
   (d) die Länge der Seite a.

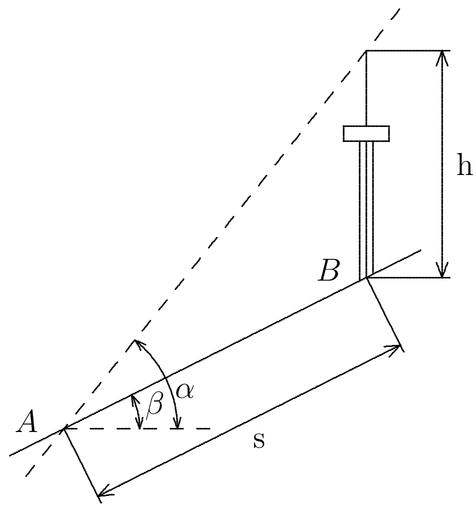


Lösung: (a): $5{,}6\,cm$ $(b):$ $4{,}2\,cm$ $(c):$ $60°$ $(d):$ $6{,}5\,cm$

36. Eine Leiter der Länge 4,7 m wird an eine Wand gelehnt. Zwischen welchen Werten darf sich ihr Neigungswinkel gegenüber der Wand bewegen, wenn der Fußpunkt der Leiter mindestens 1 m, aber nicht weiter als 2 m von der Wand entfernt sein soll? (3 geltende Ziffern)

Lösung: $12{,}3° \leqq \alpha \leqq 25{,}2°$

37. Ein Turm der Höhe $h = 25$ m steht auf einem Hang, der unter dem Winkel $\beta = 28^o$ gegen die Horizontale geneigt ist. Die Schattenlänge $s = \overline{AB}$ des Turms beträgt bei dem aus der Skizze ersichtlichen Sonnenstand 45 m. Berechnen Sie den Höhenwinkel α, unter dem die Sonne erscheint,auf Grad genau.



Lösung: $\tan\alpha = \dfrac{h + s\sin\beta}{s\cos\beta}$

liefert $\alpha = 49{,}3°$

38. Füllen Sie folgende Tabelle aus:

Winkel im Gradmaß	20^o	260^o		
Winkel im Bogenmaß			$\frac{7}{9}\pi$	$\frac{13}{8}\pi$

Lösung: $\frac{1}{9}\pi$; $\frac{13}{9}\pi$; 140^o; $292{,}5^o$

39. Gib folgende Winkel

(a) im Gradmaß auf 3 geltende Ziffern genau an: $\frac{3}{4}\pi$; 2,87

(b) im Bogenmaß als Vielfache von π und als Dezimalzahl mit 3 geltenden Ziffern an: 120°; 72°

Lösung: (a) 135°; 164° (b) $\frac{2}{3}\pi \approx 2{,}09$; $\frac{2}{5}\pi \approx 1{,}26$

40. Der Winkel π im Bogenmaß ist gleich dem Winkel 180° im Gradmaß, d.h.

$$\boxed{\pi = 180°}\ .$$

1° ist also nichts anderes als eine Abkürzung für die reelle Zahl $\dfrac{\pi}{180}$.

Jeder der folgenden Ausdrücke ist als Vielfaches von π und als Vielfaches von 1° anzugeben:

(a) $30°$ (b) $(30°)^2$ (c) $(30^2)°$

(d) $30 \cdot (1°)^2$ (e) $\dfrac{30}{1°}$ (f) $\dfrac{1}{30°}$

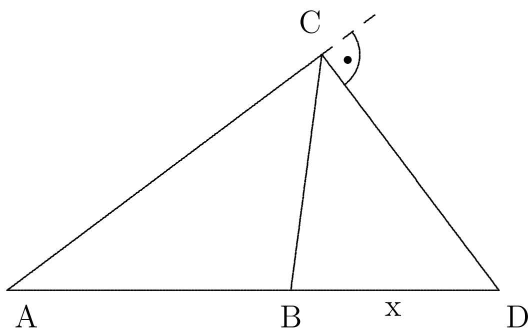
Lösung: (a) $30° = \frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi^2}{36} = 5\,\pi \cdot 1°$ (c) $5\,\pi = 900°$

(d) $\frac{\pi^2}{1080} = \frac{\pi}{6} \cdot 1°$ (e) $\frac{5400}{\pi^2} \cdot \pi = \frac{972000}{\pi^2} \cdot 1°$ (f) $\frac{6}{\pi^2} \cdot \pi = \frac{1080}{\pi^2} \cdot 1°$

41. Die Kräfte $\vec{F_1}$ und $\vec{F_2}$ bilden einen Winkel von 60^0. Es ist $F_1 = 100\,\mathrm{N}$ und $F_2 = 200\,\mathrm{N}$. Berechnen Sie die Größe der Resultierenden beider Kräfte sowie die Größe der Winkel, die diese mit den beiden Kräften bildet.

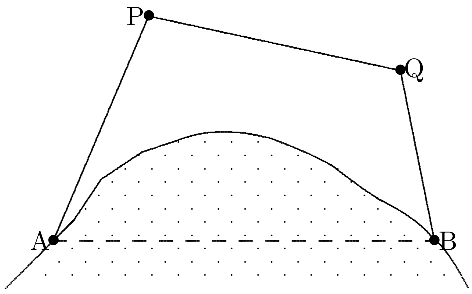
Lösung: $|\vec{F_1} + \vec{F_1}| = 265\,\mathrm{N}$, Winkel $19{,}1^0$ und $40{,}9^0$.

42. In der nebenstehenden, nicht maßstabgetreuen Figur sind gegeben:
$\overline{AB} = 5{,}22\,\mathrm{cm}$;
$\overline{AC} = 7{,}15\,\mathrm{cm}$;
$\overline{BC} = 3{,}20\,\mathrm{cm}$.
Man berechne ohne Verwendung des Satzes von Pythagoras die Länge x der Strecke $[BD]$!



Lösung: $x \approx 2{,}61\,cm$

43. Über einen Teich soll von A nach B eine Brücke gebaut werden.
Der Vermessungsingenieur misst:
$\overline{AP} = 287\,\mathrm{m}$
$\overline{PQ} = 326\,\mathrm{m}$
$\overline{QB} = 135\,\mathrm{m}$
$\sphericalangle APQ = 105^o$
$\sphericalangle PQB = 127^o$
Berechnen Sie die Länge der Brücke $\overline{AB}$!



Lösung: 510 m; Diagonale einzeichnen!

44. Bestimmen Sie die Lösungsmenge in der Grundmenge $[0°; 360°[$:

$$(1 + 2 \cdot \sin 2\varphi) \cdot (\tan \varphi - 1) = 0$$

Lösung: $L = \{45°; 105°; 165°; 225°; 285°; 345°\}$

45. Berechnen Sie die Lösungsmenge für die Grundmenge $[-5; 5]$:

$$2\cos x - x\cos x = 0$$

Lösung: $L = \{2; \pm\frac{\pi}{2}; \pm\frac{3\pi}{2}\}$

46. Bestimmen Sie die Lösungsmenge in der Grundmenge $[0; 2\pi[$:

$$4\sin^2 x - 2\sin x = 0$$

Lösung: $L = \{0;\ \frac{\pi}{6};\ \frac{5}{6}\pi;\ \pi\}$

47. Leiten Sie mit Hilfe des Additionstheorems $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$ die Gültigkeit der Beziehung

$$\cos 2\alpha = 2 \cdot \cos^2\alpha - 1$$

her! Lösen Sie nun unter Zuhilfenahme dieser Beziehung die Gleichung

$$\cos 2\alpha = \cos\alpha$$

im Bereich $[0°\ ;\ 360°]$!

Lösung: $L = \{0°, 120°, 240°, 360°\}$

Viel Erfolg