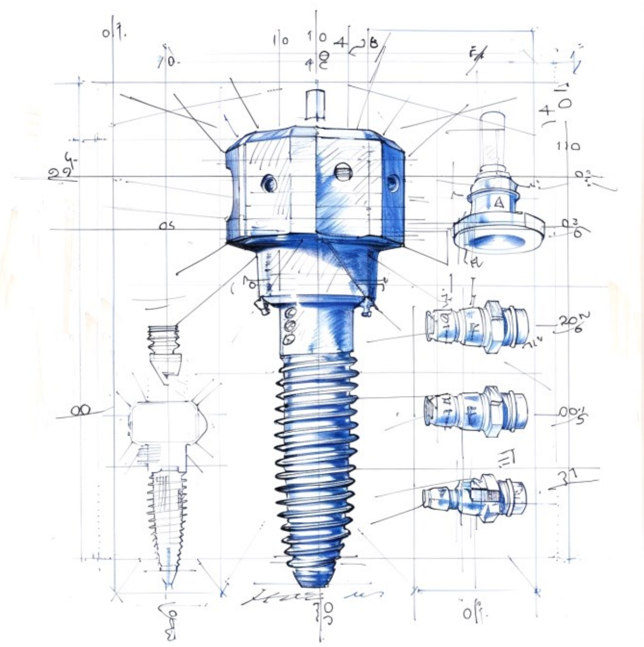


Mathematische Grundlagen

für

MINT – Fächer

(Ingenieurswissenschaften)

1. Studienjahr

Skript

von

Manfred Ambach

Auflage Herbst 2024

„In mathematics, the why is everything.“
Zia Haider Rahman
(*1971)

VORBEMERKUNGEN

© pixabay

„Ist der Typ noch zu retten?“

werden manche denken, wenn sie den Umfang dieses Skripts betrachten. So viele Seiten für so wenig Stunden!

Folgende Idee leitete mich: Beherrscht jemand ein Stoffgebiet oder einen Aspekt nicht in der nötigen Klarheit oder Tiefe, ist es von Vorteil, die Erläuterungen erfolgen in kleinen Schritten ohne Auslassungen, sodass man unabhängig vom jeweiligen Wissenstand mitkommen kann. Ist das betreffende Kapitel bekannt, braucht es keines oder nur eines flüchtigen Blickes. Meine Erfahrung lehrt mich, dass unabhängig von der Höhe der Schule Erklärungen nur dann Sinn machen, wenn sie allen Interessierten uneingeschränkt das nötige Verständnis vermitteln. Nicht nur im Moment des Erklärt Bekommens, sondern auch geraume Zeit später beim Nachlesen.

Gedanken- oder Rechengänge, die leicht zu Fehlern führen, sind mit dem links abgebildeten Warnschild versehen.

Aufgaben oder Überlegungen, die mit diesem Symbol gekennzeichnet sind, führen über den eigentlichen Stoff hinaus, erbringen jedoch ein tieferes Verständnis der Materie.

Video-Tipp

Bei der Durchsicht des Stoffes stieß ich auf so manch gute Übungsbeispiele oder passende Videos. In solchen Fällen fügte ich einen Link und einen entsprechenden QR-Code bei.
Manches Mal wählte ich ein Beispiel aus einem Video als Musteraufgabe, damit man es sowohl schriftlich als auch in den Bewegtbildern nachvollziehen kann.
Einige Videos entstammen meiner Hand.

Bei einigen Berechnungen ist eine mögliche mit Python® angeführt.
Bemerken möchte ich, dass dies nicht mit systematischen Programmierkenntnissen erfolgte, sondern interessehalber und sporadisch.

Die Bildnachweise sind bei der jeweiligen Darstellung angegeben. Das Titelbild entstammt einer lizenzfreien und kostenlosen Illustration von pixabay.

我现在站在那里，可怜的傻瓜，我和以前一样聪明！

Ich hoffe, meine Ausführungen sind derart gestaltet, dass sie klärend und nicht verwirrend wirken!

Für auftretende Fehler bitte ich um Entschuldigung! Ich habe keinen Lektor, wie in Verlagen üblich, der zusätzlich zu mir nochmals eine genaue Kontrolle durchführt.

Bei den im Inhaltsverzeichnis und den Überschriften grün hinterlegten Stoffgebieten handelt es sich um Grundlagen, bei denen es von Vorteil ist, werden sie zum Start des Studiums schon beherrscht.

Der Zugang zur Mathematik ist zu oft von einer Halde aus Desinteresse, Ablehnung und Angst umgeben.
Mit der Hoffnung, zumindest ein kleines Steinchen aus dem Weg räumen zu können, verfasste ich dieses Skript

Für Anregungen und Kritiken bin ich dankbar: manfred.ambach@pro-test.at

Im Folgenden noch ein Artikel aus der Frankfurter Allgemeinen Zeitung:

Die unendliche Mathe-Misere

Von Lisa Becker

Der wegen des Krieges nun noch drängendere Umbau der Energiewirtschaft, die Bewältigung des Klimawandels, die voranschreitende Digitalisierung – die Wirtschaft steht für lange Zeit vor gewaltigen Aufgaben. Zur ihrer Bewältigung braucht es Fachkräfte mit einer sehr guten Ausbildung in den Bereichen Mathematik, Informatik, Naturwissenschaften und Technik, kurz MINT. Doch stehen sie, auch langfristig, in genügender Zahl zur Verfügung?

Die Antwort hängt stark von der Güte der MINT-Bildung in den (Vor-)Schulen ab. Diese gilt an vielen Stellen als unzureichend; doch gibt es Bemühungen, sie zu verbessern: Die Bundesländer stärken die Fächer, die Wirtschaft hat unzählige MINT-Initiativen ins Leben gerufen. Das scheint zu fruchten. So entscheiden sich in Deutschland besonders viele junge Menschen für ein MINT-Studium, fast zwei Fünftel der Studienanfänger. Zudem steigt der Anteil der Frauen unter den Absolventen und beträgt inzwischen etwa ein Drittel, in Mathematik sogar rund die Hälfte.

Trotz dieser Erfolge – zu viel kommt seit Jahren und Jahrzehnten kaum vom Fleck. So verlässt auch in Zeiten der unaufhaltsamen Digitalisierung der weitaus größte Teil der Schüler die Schule ohne Grundkenntnisse in Informatik. Die duale MINT-Ausbildung steckt in der Krise: Die Zahl der Ausbildungsverträge sinkt; in manchen Technikberufen wird zudem mehr als ein Drittel wieder aufgelöst. In den MINT-Studiengängen ist die Abbruch- und Wechselquote mit rund 50 Prozent weiterhin viel zu hoch. Und die MINT-Initiativen für Mädchen fruchten in den wirtschaftlich so relevanten Bereichen Informatik und Technik nicht.

Die MINT-Kompetenzen müssen über die ganze Bildungskette deutlich stärker gefördert werden. In der Grundschule muss MINT eine angemessene Rolle im Sachunterricht bekommen, die Lehrkräfte müssen in Technik und Naturwissenschaften fortgebildet werden. Die Leistungen der deutschen Viertklässler sind nach der internationalen Vergleichsstudie Timss seit 2011 gesunken; die Gruppe der besonders leistungsschwachen ist auf ein gutes Viertel gewachsen. Deutschland liegt damit unter dem EU- und OECD-Durchschnitt.

Die Schule ist für die MINT-Bildung besonders wichtig; für die meisten Schüler findet sie fast ausschließlich dort statt, während sprachliche Fertigkeiten auch in vielen Elternhäusern gefördert werden, oft nebenbei. Eine Schlüsselrolle für den gesamten MINT-Bereich spielt das Fach Mathematik – leider ein jahrzehntealtes Sorgenkind. Wer in der Schule kein gutes Verhältnis zur Mathematik entwickelt, wird sich höchstwahrscheinlich nicht für eine Ausbildung oder ein Studium im technischen, informatischen oder naturwissenschaftlichen Bereich entscheiden. Während in manchen asiatischen Ländern die Gruppe der Mathematik-Asse beeindruckend groß ist, verharrt sie in Deutschland bei wenigen Prozent. Am anderen Ende der Skala findet sich hingegen etwa ein Fünftel Neuntklässler, das so wenig in Mathematik kann, dass eine MINT-Ausbildung unmöglich ist.

Es können nur wenige Mathematik studieren, aber in der Schule sollten die meisten gut mitkommen können; Intelligenz unterliegt der Normalverteilung. Leider ist Mathe für viele ein Angstfach, was nicht nur individuell leidvoll ist, sondern auch eine Verschwendung von Ressourcen. Der Schlüssel liegt in einer besseren Unterrichtsqualität. Forscher und gute Lehrkräfte wissen, was guter Mathe-Unterricht ist. Er muss die Schüler ins Denken bringen, damit sie den Stoff wirklich verstehen und nicht nur Formeln oberflächlich anwenden. Motivierend wirken Aufgaben aus ihrer Erfahrungswelt.

Die Kultusminister wissen um die in der Breite ungenügende Qualität des Mathe-Unterrichts, sonst hätten sie nicht Quamath ins Leben gerufen, ein Programm, das über Lehrernetzwerke und Fortbildungen die Qualität heben soll. Fachleute loben die gute wissenschaftliche Fundierung und Begleitung des Programms und bezeichnen es als Meilenstein.

Rasche Hilfe wird auch Quamath nicht bringen; es ist auf zehn Jahre angelegt und wird „nur“ ein Drittel der allgemeinbildenden Schulen erreichen. In der Zwischenzeit dürfte sich die Lage verschärfen. So hat der Unterrichtsausfall in der Corona-Pandemie die Mathematikleistungen stark geschwächt. Und ein weiteres Problem bekommt deutliche Konturen: In den MINT-Fächern ist der Lehrermangel besonders groß. Nach einer Prognose im Auftrag der Telekom-Stiftung für Nordrhein-Westfalen fehlen bis 2030 zwei Drittel der neu einzustellenden MINT-Lehrkräfte. Das Ergebnis ist auf ganz Deutschland übertragbar.

Frankfurter Allgemeine Zeitung (FAZ)
23.04.2022, S 17

Salzburg, im Herbst 2024 Manfred Ambach

„Was darf ich hoffen?
Was soll ich wissen?
Was kann ich tun?"
Immanuel KANT
(1724–1804)

INHALTSVERZEICHNIS

„In nichts zeigt sich der Mangel mathematischer Bildung mehr, als in einer übertrieben genauen Rechnung."
Carl Friedrich GAUß
(1777–1855)

I RECHNEN MIT ZAHLEN

1.1. Zahlenmengen

1.1.1. Natürliche Zahlen

© Martina MEVEN

Die **Menge der natürlichen Zahlen**, abgekürzt mit dem Symbol $\mathbb{N}$, bezeichnet die Zahlen des Zählens.

$$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\ldots \}$$

Auf einem **Zahlenstrahl**[1] besitzen die natürlichen Zahlen folgende Lage:

Die kleinste natürliche Zahl ist eins. Jeder Nachfolger ist um eins größer als der Vorgänger. Die natürlichen Zahlen enden nicht, sie führen ins Unendliche.

Zusatzbezeichnungen können natürliche Zahlen ein- oder ausschließen:

$\mathbb{N}_0 = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots \}$ Bemerkung: Manchmal meint auch $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$

$\mathbb{N}^g = \{ 2, 4, 6, 8, 10, \ldots \}$

$\mathbb{N}^u = \{ 1, 3, 5, 7, 9, \ldots \}$

Freilich lassen sich natürliche Zahlen auch anders darstellen, wenngleich es meistens vorteilhaft ist, die einfachste Schreibweise zu wählen:

Beispiele: $\frac{4}{2} = 2 \in \mathbb{N}$ oder $\frac{5+7}{4} = 3 \in \mathbb{N}$ oder $\sqrt[3]{64} = 4 \in \mathbb{N}$

[1] Ein **Zahlenstrahl** hat einen Anfang und **kein** Ende (denke an einen Sonnenstrahl).
Eine **Zahlengerade** hat ***weder Anfang noch Ende***, geht also vom Negativ-Unendlichen bis ins Positiv Unendliche.
Zahlenstrahl und Zahlengerade sind **unendlich lang**.

Bemerkungen: $\in$ ist das Symbol für **" ist Element von "** , im Sinne von " gehört zu … " ,
$\notin$ ist das Symbol für " ist **kein** Element von " , im Sinne von " gehört **nicht** zu … " .

Siehe auch 8.2.1., S 408 f

Der **Bruchstrich** steht für ein **Divisionszeichen**

Gewisse natürliche Zahlen sind sog. **Primzahlen**.

Primzahlen sind **natürliche Zahlen**,
die **nur durch 1 und sich selbst teilbar** sind.

Die ersten Primzahlen sind:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ...

Bemerkung: 1 ist keine Primzahl, weil das Produkt zweier Primzahlen keine Primzahl ergibt:
Es seien p und q Primzahlen. Dann ist ihr Produkt $p \cdot q$ durch p, q und 1 teilbar, also keine Primzahl.
Anders verhält es sich mit dem Produkt $1 \cdot p = p$. Da p eine Primzahl ist, ist dann das Produkt $1 \cdot p$ auch eine Primzahl, was der oberen Behauptung widerspricht. Also kann 1 keine Primzahl sein.

Die bisher größte Primzahl wurde im Rahmen des *GIMPS* (*Great Internet Mersenne Prime Search*) -Projekts am 07.12. 2018 von Patrick LAROCHE und anderen gefunden: $2^{82\,589\,933} - 1$. Eine Zahl mit fast 25 Millionen Ziffern.[2]
Würde man diese Zahl ausschreiben, füllte sie gut 5 000 Din-A4 Seiten.

Die ersten Primzahlen bis 100:

```
start = 1
end = 100

for i in range(start, end+1):
  if i>1:
    for j in range(2,i):
        if(i % j==0):
            break
    else:
        print(i)
```

```
2
3
5
7
11
13
17
19
23
29
31
37
41
43
47
53
59
61
67
71
73
79
83
89
97
```

[2] Quelle: Deutsche Mathematiker-Vereinigung, 10.12.2018
und:
https://www.mathematik.de/dmv-blog/2471-neue-gr%C3%B6%C3%9Fte-primzahl-entdeckt#:~:text=Bisher%20sind%2050%20Mersenne%2DPrimzahlen,77232917%3D277232917%E2%88%921.

© pixabay

Primzahlen haben in der Zahlentheorie eine fundamentale Bedeutung, Strukturen zu erkennen und festzulegen. So lässt sich nach dem ***Fundamentalsatz der Algebra*** jede natürliche Zahl als Produkt (Ergebnis einer Multiplikation) von Primzahlen darstellen. Heute finden Primzahlen unter anderem in der Verschlüsselungstechnik Verwendung, um z.B. den Datenaustausch via Internet sicherer zu gestalten.

Ältere Verfahren verwenden Zahlen mit 129 Dezimalstellen, die von modernen Rechnern in Kürze zu knacken sind.
Neue und sehr sichere Verschlüsselungsmethoden beruhen auf Zahlen mit 1 924 Stellen, die mit handelsüblichen Methoden nicht aufzuspüren sind. Allerdings sind derartige Zahlen für (Smart-) Phones der heutigen Generation zu groß!
Selbst heutige Großcomputer benötigen zur Entschlüsselung 10 000 Jahre, was Quantencomputer des momentanen Entwicklungsstandes in 200 Sekunden bewerkstelligen. Allerdings (noch) mit zu großer Fehlerrate.

Wie bedeutend dieser Zweig der Mathematik geworden ist zeigt, dass die *National Security Agency* (*NSA*), ein US-amerikanischer Geheimdienst, als größter Arbeitgeber für Mathematiker bzw. Informatiker gilt.

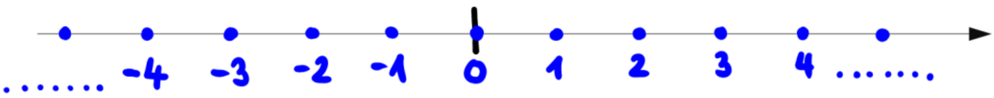
1.1.2. Ganze Zahlen


© Pixabay

Die **Menge der ganzen Zahlen**, symbolisiert durch $\mathbb{Z}$, meint **alle natürlichen Zahlen**, die Zahl **Null**, sowie **alle negativen ganzen Zahlen**.

$$\mathbb{Z} = \{\, .\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,,\ -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, .\,.\,.\,.\,.\,.\,. \,\}$$

Die ganzen Zahlen auf einer **Zahlengeraden**[3]:



Die ganzen Zahlen kommen aus dem Negativ-Unendlichen und reichen bis ins Positiv-Unendliche. Auch hier ist der Nachfolger stets um eins größer als der Vorgänger.

Zusatzbezeichnungen sind möglich und üblich:

$\mathbb{Z}^+ = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, .\,.\,.\,.\,. \} = \mathbb{N}$

$\mathbb{Z}^- = \{ .\,.\,.\,.\,., -5, -4, -3, -2, -1 \}$ $\mathbb{Z}_g^- = \{ .\,.\,.\,.\,., -8, -6, -4, -2 \}$ usw.

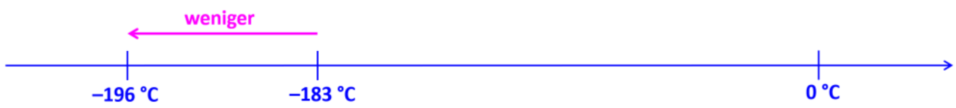
Beispiel: ***Verflüssigte Gase***


© pixabay

Stickstoff wird bei einer Temperatur von –196 Grad Celsius (°C) flüssig, Sauerstoff bei (gerundet) –183 °C.

Ermitteln Sie, um wie viel °C die Verflüssigungstemperatur von Sauerstoff verringert werden muss, damit auch Stickstoff flüssig wird.

[3] Eine Gerade besitzt keinen Anfang und kein Ende. Ein Teilabschnitt einer Geraden mit Anfangs- und Endpunkt heißt Strecke.



Plus heißt ***mehr***. Wenn die Temperatur **sinkt**, wird sie ***weniger***. Und ***weniger*** heißt ***minus***.

$-183 - x = -196 \;|\; +x$

$-183 = -196 + x \;|\; +196$

$13 = x$ → Die Temperatur muss um 13 °C ***weniger*** werden.

Der schwedische Physiker und Mathematiker Anders Celsius (1701–1744) legte den Gefrierpunkt von Wasser bei 100 °C fest, den Siedepunkt bei 0 °C. Carl von Linnè (1707–1778) , schwedischer Naturforscher) drehte 1745 die Skala um, so wie wir sie heute verwenden.

1.1.3. Rationale Zahlen

4 ← Zähler
— ← Bruchstrich
9 ← Nenner

Die **Menge der rationalen Zahlen**, abgekürzt mit $\mathbb{Q}$**,** beinhaltet alle Zahlen, die sich als **Brüche** darstellen lassen,
in deren Zähler und Nenner ganze Zahlen stehen (im Nenner ≠ 0).

$$\frac{4}{9} = 4:9$$

Bemerkung: Das Symbol $\mathbb{Q}$ rührt daher, dass man statt des Bruchstriches auch ein Divisionszeichen setzen kann und das *Ergebnis einer **Division Quotient*** genannt wird.

Einige **Beispiele** rationaler Zahlen:

$\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$, da $\frac{3\in\mathbb{Z}}{4\in\mathbb{Z}}$ $\quad 2 \in \mathbb{Q}$, da $2 = \frac{2\in\mathbb{Z}}{1\in\mathbb{Z}}$ $\quad -3 \in \mathbb{Q}$, da $-3 = \frac{-3\in\mathbb{Z}}{1\in\mathbb{Z}}$

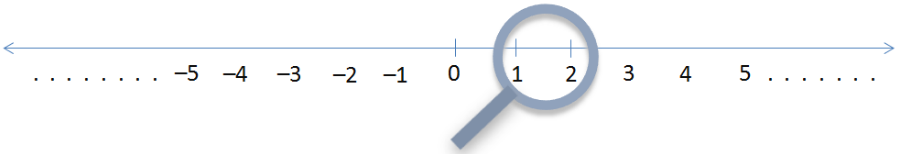
E z h

$1.25 \in \mathbb{Q}$, da $1.25 = \frac{125\in\mathbb{Z}}{100\in\mathbb{Z}}$ $\quad 0.\dot{4} \in \mathbb{Q}$, da $0.\dot{4} = 0{,}444444444444\ldots = \frac{4\in\mathbb{Z}}{9\in\mathbb{Z}}$

Um auf die Darstellung $\frac{4}{9} = 0.\dot{4}$ zu kommen, muss man allerdings $\frac{4}{9}$ als Division auffassen:
4 : 9 = 0.444 . . .
40
40
40
. . .

Rationale Zahlen sind demnach neben den **Bruchzahlen**, auch die **natürliche**n und **ganze**n Zahlen, ebenso alle **Dezimalzahlen mit endlich vielen Stellen** und **periodische Dezimalzahlen**, also Zahlen mit unendlich vielen Stellen, wobei sich die Ziffern regelmäßig wiederholen.

Die rationalen Zahlen liegen so dicht, dass sich der Nachfolger oder Vorgänger einer bestimmten Zahl nicht so leicht angeben lässt:



Obwohl die rationalen Zahlen so dicht liegen, gibt es dennoch Zahlen, die nicht zu den rationalen Zahlen gehören, sich also nicht als Brüche darstellen lassen, in deren Zähler und Nenner ganze Zahlen stehen:

Beispiele: $\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887\ ...$ Diese Wurzel, als Dezimalzahl dargestellt, besteht aus unendlich vielen Ziffern, die sich jedoch nicht, wie bei den periodischen Dezimalzahlen, regelmäßig wiederholen.

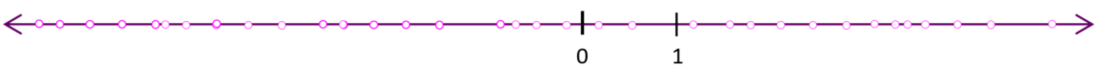
oder
die Kreiszahl $\pi = 3.14159265358979\,32\ ....$


Darstellung der Zahl pi (π) in der Wiener Opernpassage

Solche Zahlen nennt man **irrationale Zahlen**, wobei *irrational* nicht vernunftwidrig oder unsinnig meint, sondern unvorstellbar [*ratio* (lateinisch): u.a.: Denkart, Anschauung].

Die Berücksichtigung solcher Zahlen führt uns zur nächsten Zahlenmenge, den **reellen Zahlen** (Siehe 1.1.4., S 8 f).

Zunächst noch die rationalen Zahlen auf einer **Zahlengeraden**:



Trotz ihrer Dichte weisen die rationalen Zahlen immer noch Löcher auf, nämlich die irrationalen Zahlen.

Bemerkung: Zahlentheoretisch lässt sich zeigen, dass die rationalen Zahlen „dicht" sind.
Doch ist dieser Sachverhalt recht abstrakt zu verstehen.
Deshalb erlaube ich mir die oben dargestellte Veranschaulichung.

1.1.4. Reelle Zahlen

$\pi = 3.14159265358.....$

Die **Menge der reellen Zahlen** $\mathbb{R}$ besteht aus jenen Zahlen,
die sich als **Brüche** darstellen lassen,
in deren Zähler und Nenner Dezimalzahlen
mit endlich oder unendlich vielen Ziffern
(im Nenner ≠ 0) stehen können.

Damit sind alle bisher behandelten Zahlen auch reelle Zahlen:

Beispiele: $\frac{3}{4} \in \mathbb{R}$, da $\frac{3}{4} = \frac{3.0}{4.0}$ $\quad 2 \in \mathbb{R}$, da $2 = \frac{2.0}{1,.0}$ $\quad -3 \in \mathbb{R}$, da $-3 = \frac{-3.0}{1.0}$

$1.25 \in \mathbb{R}$, da $1.25 = \frac{1.25}{1.0}$ $\quad 0.\dot{4} \in \mathbb{R}$, da $0.\dot{4} = 0.44444\ldots = \frac{0.44444\ldots}{1.0}$

Aber auch: $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, da $\sqrt{2} = 1.414213562\ldots = \frac{1.414213562\ldots}{1.0}$

$\pi \in \mathbb{R}$, da $\pi = 3.141592654\ldots = \frac{3.141592654\ldots}{1.0}$

$1.0100100010000100000 1\ldots \in \mathbb{R}$

Beispiel:

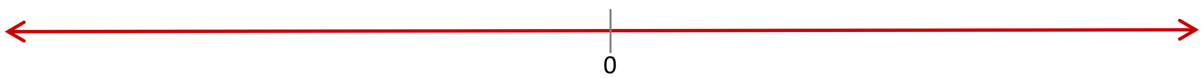
© pixabay

Die Zahl π beschreibt auch in etwa das Verhältnis der Länge unregulierter, mäandernder (kurvenreicher) Flüsse zur Länge der Luftlinie Quelle – Mündung.[4]

Nil: Länge: 6 671 km Luftlinie Quelle – Mündung: 2 120 km

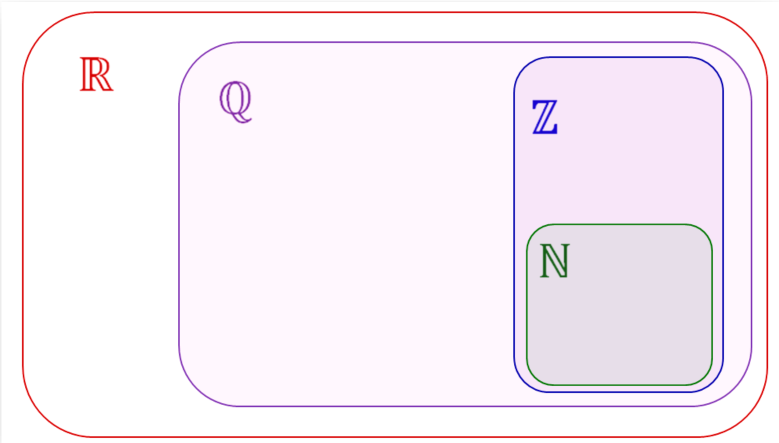
6 671 : 2 120 = 3,14 ≈ π

Die reellen Zahlen liegen so dicht, dass sie eine durchgehende Gerade bilden.



4 Video-Tipp Was haben Flüsse mit Pi (Kreiszahl 3,14...) zu tun? Interessantes aus der Mathematik - YouTube

Wir können uns die bisher behandelten Zahlenmengen folgendermaßen veranschaulichen:



Bemerkung: Bei der obigen Darstellung handelt es sich nur um eine grobe Illustration, bei der die Größenverhältnisse zwischen den Zahlenmengen nicht berücksichtigt sind.

1.1.5. Komplexe Zahlen

$\sqrt[2]{-1} = ?$

Trotz der völligen Dichte reeller Zahlen sind in dieser Menge noch immer nicht alle möglichen Zahlen enthalten.

Folgende Beispiele sollen den Bedarf einer zusätzlichen Zahlenmenge darlegen:

Beispiel:

$\sqrt{4} = \sqrt[2]{4} = 2$ Probe: $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$ ✓

$\sqrt{4} = \sqrt[2]{4} = -2$ Probe: $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$ ✓

Die Quadratwurzel aus einer positiven Zahl kann zwei Werte besitzen: Einen positiven und ihre negative Gegenzahl. Denn gleich, ob ich eine positive Zahl quadriere (also mit sich selbst multipliziere) oder ihre negative Gegenzahl, ich erhalte immer das gleiche positive Ergebnis.

Wie sieht das nun mit der **Quadratwurzel aus einer negativen Zahl** aus?

Beispiel:

$\sqrt[2]{-4} = 2$ Probe: $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$ und nicht -4 $\rightarrow$ $\sqrt[2]{-4} \neq 2$

$\sqrt[2]{-4} = -2$ Probe: $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$ und nicht -4 $\rightarrow$ $\sqrt[2]{-4} \neq -2$

https://www.youtube.com/watch?v=WAzGp8Wqxtk

Es existiert **keine reelle Zahl**, die **quadriert** eine **negativ**e Zahl ergibt.
Folglich kann die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl keinen Wert in den bisherigen Zahlenmengen besitzen.

Carl Friedrich GAUß[5] vereinheitlichte dieses Problem:

$$\sqrt[2]{-4} = \sqrt[2]{4\cdot(-1)} = \underbrace{\sqrt[2]{4}}_{\pm 2}\cdot\underbrace{\sqrt[2]{-1}}_{i} = \pm 2\cdot \boldsymbol{i}$$

Jede negative Zahl kann als Produkt aus der entsprechenden positiven Zahl und (-1) dargestellt werden:

Die $\sqrt[2]{-\mathbf{1}}$ **e**rgibt freilich auch keine reelle Zahl.
Für diesen Ausdruck verwendete GAUß den von Leonhard EULER im Jahre 1777 eingeführten Begriff **imaginäre Einheit $\boldsymbol{i}$**

Korrekt: $\boldsymbol{i}$ ist jene (neue) Zahl, welche die Gleichung $x^2 = -1$ löst. Das heißt, für die $\boldsymbol{i^2 = -1}$ gilt.

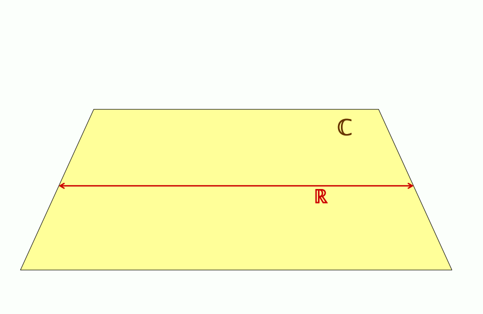
Man ist versucht, $i = \sqrt{-1}$ zu setzen. Es gibt aber einen guten Grund, diese Schreibweise zu vermeiden! Rechnet man mit diesem Wurzelsymbol wie in den reellen Zahlen, stößt man schnell auf einen Widerspruch:

$i = \sqrt{-1} \quad |()^2$ **aber:** $i = \sqrt{-1}$

$i^2 = -1$ $\quad i^2 = i\cdot i = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{-1\cdot(-1)} = \sqrt{1} = -1 \vee +1$

Diese Überlegungen führen zur **Menge der komplexen Zahlen**, abgekürzt mit $\mathbb{C}$.

In dieser Menge lassen sich auch Wurzeln mit geradem Exponenten (z.B. Quadrat-Wurzeln) aus negativen Zahlen bestimmen, was in den bisher besprochenen Zahlenmengen nicht möglich ist.



Die Menge der komplexen Zahlen ist eine ganze Dimension größer als die bisherigen Zahlenmengen. Während alle reellen Zahlen in einer (unendlich großen) Ebene nur eine (unendlich lange) Gerade ausfüllen, belegen die komplexen Zahlen die gesamte Ebene.

Fairerweise ist zu erwähnen, dass diese **Gaußsche Zahlenebene** bereits Caspar WESSEL, ein norwegisch-dänischer Mathematiker, im Jahr 1797 in die Mathematik einführte.

Carl Friedrich GAUß
(1777–1855)

Mit den im Jahre 1801 veröffentlichten *Disquistitiones Arithmeticae* (*Untersuchungen* [im Sinne von Analysen] *der Arithmetik*) begründete GAUß die moderne Zahlentheorie und präzisierte in diesem Zusammenhang auch den mathematischen Umgang mit komplexen Zahlen.
Neben seinen astronomischen Berechnungen und der Entwicklung exakter Landvermessung, die bis heute ihre Gültigkeit besitzen, lieferte GAUß zahlreiche Beweise grundlegender mathematischer Sachverhalte, was ihm schon zu seinen Lebzeiten den Titel *princeps mathematicorum* (Fürst der Mathematik) einbrachte.

[5] Der Ursprung der Theorie der komplexen Zahlen geht auf die italienischen Mathematiker Gerolamo CARDANO (*Ars magna*, Nürnberg 1545) und Rafael BOMBELLI (*L'Algebra*, Bologna 1572; wahrscheinlich zwischen 1557 und 1560 geschrieben) zurück. Die Einführung der imaginären Einheit i als neue Zahl wird Leonhard EULER zugeschrieben.

Leonhard EULER
(1707–1783)

Die bahnbrechenden Theorien bzw. Beweise stammen von Leonhard EULER, in Basel geboren, der vom damals als weltbester Mathematiker gesehene Baseler Johan BERNOULLI inspiriert wurde.
Leonhard EULER war zweifelsohne der produktivste Mathematiker aller Zeiten.
Er verfasste insgesamt 866 Abhandlungen und Bücher zu verschiedenen Teilbereichen der reinen und angewandten Mathematik, zur Physik und Astronomie, zur Geodäsie und Kartographie, aber auch zur Musik. Er schrieb nicht nur viel, sondern er brachte bei allen Themen, mit denen er sich beschäftigte, neuartige Ideen ein und eröffnete durch seine Beiträge sogar neue Teilbereiche der Mathematik. Die Wissenschaftswelt wurde auf seine außergewöhnliche Begabung aufmerksam, als dieser 1735 das sogenannte
BASLER-PROBLEM[6] löste, an dem bis dahin alle Mathematiker gescheitert waren.

Übung Eine komplexe Zahl lässt sich in folgender Form angeben: $z = x + y \cdot i$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

Siehe auch 1.3.1., S 16

Wie lautet die kartesische Form folgender Zahlen:

(i) 5 (ii) -1 (iii) $-3\,i$ (iv) $-i$ (v) i

Lösungen: (i) $z_1 = 5 + 0 \cdot i$

(ii) $z_2 = -1 + 0 \cdot i$

(iii) $z_3 = 0 - 3 \cdot i$

(iv) $z_4 = 0 - 1 \cdot i$

(v) $z_5 = 0 + 1 \cdot i$

[6] Behandelt die Summe reziproker Quadratzahlen: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$ Siehe auch 12.2.2., S 581 f

1.2. Rechnen mit reellen Zahlen

1.2.1. Kleines Einmaleins des Bruchrechnens

1.2.1.1. Addieren und Subtrahieren

Beachte:

NUR **Brüche addieren** bzw. **subtrahieren**, wenn sie den **gleichen Nenner** besitzen.

Beispiel: $\frac{5}{6}+\frac{3}{4}-\frac{7}{12}=$

Man bestimmt den **kleinsten gemeinsamen Nenner = kleinstes gemeinsames Vielfaches** (**kgV**).

Dazu werden

① die Nenner in ihre Primfaktoren zerlegt:

$N_1: 6 = 2 \cdot 3$

$N_2: 4 = 2 \cdot 2$

$N_3: 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$

② Für das **kgV** wird jeder Faktor gewählt, der in einer der Zerlegungen vorkommt und zwar so oft er in einer **einzelnen** Zerlegung **am häufigsten** vorkommt.

$N_1: 6 = 2 \cdot 3$

$N_2: 4 = 2 \cdot 2$

$N_3: 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ Wir hätten auch den Faktor 3 von N_3 wählen können.

kgV = 2 · 2 · 3

③ Jetzt bestimmen wir die **Erweiterungsfaktoren** (**Ef**). Das sind jene Faktoren, die dem einzelnen Nenner zum kgV fehlen.

	Ef
$N_1: 6 = 2 \cdot 3$	**2**
$N_2: 4 = 2 \cdot 2$	**3**
$N_3: 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$	

kgV = 2 · 2 · 3

④ a) In den **Nenner** schreibt man **kgV**
b) Die **Zähler** werden mit ihren **Ef** multipliziert
c) Der **Zähler** wird soweit wie möglich **berechnet**
d) Das **Ergebnis des Zählers** wird, wenn möglich, in Primfaktoren **zerlegt**
e) Das zerlegte **kgV** wird angeschrieben
f) Der **Bruch** wird, wenn möglich, **gekürzt**.

$$\frac{5\cdot\overset{\text{b)}}{\mathbf{2}}+3\cdot\overset{\text{b)}}{\mathbf{3}}-7}{\underset{\text{a)}}{\mathbf{kgV}}}=\frac{\overset{\text{c)}}{10+9-7}}{\underset{\text{a)}}{\mathbf{kgV}}}=\frac{12}{\underset{\text{a)}}{\mathbf{kgV}}}=\frac{\overset{\text{d)}}{2\cdot2\cdot3}}{\underset{\text{e)}}{\mathbf{2\cdot2\cdot3}}}\overset{\text{f)}}{=}1$$

Man darf einen **Bruch NUR dann kürzen**, wenn **im Zähler und Nenner KEINE Strichrechnung** vorkommt oder **diese in Klammern** steht.

Beispiel: $\frac{3+\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{2}_{\,1}} \neq \mathbf{5}$ falsch

aber im **Beispiel:** $\frac{\cancel{6}^{\,3}\cdot(3+4)}{\cancel{2}_{\,1}} = \mathbf{3\cdot(3+4)=3\cdot7=21}$

Übung Stellen Sie das Ergebnis als möglichst einfachen Bruch dar.

1) $\frac{5}{8}+\frac{3}{2}=$ 2) $\frac{5}{6}+\frac{2}{15}=$ 3) $\frac{3}{2}-\frac{3}{4}=$ 4) $\frac{1}{10}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=$ 5) $\frac{2}{3}+\frac{3}{2}-1=$

6) $\frac{39}{40}-\frac{49}{50}=$ 7) $\frac{18}{15}-\frac{9}{12}=$ 8) $\frac{6}{7}+\frac{7}{6}-\frac{78}{42}=$ 9) $\frac{1}{2}-0.25+\frac{2}{3}+0.75=$

10) $\frac{8}{3}+\frac{1}{6}-\frac{7}{12}-2.25=$

Lösungen: 1) $\frac{17}{8}$ 2) $\frac{29}{30}$ 3) $\frac{3}{4}$ 4) $\frac{2}{5}$ 5) $\frac{7}{6}$

6) $-\frac{1}{200}$ 7) $\frac{9}{20}$ 8) $\frac{1}{6}$ 9) $\frac{5}{3}$ 10) 0

1.2.1.2. Multiplizieren

Für die Multiplikation von Brüchen gilt:

$$\boxed{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{n}} \cdot \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{m}} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}}}$$

Beispiel: $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{10} = \frac{\overset{1}{\cancel{5}} \cdot \overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{2}{\cancel{6}} \cdot \underset{2}{\cancel{10}}} = \frac{1}{4}$

Beim **Multiplizieren** von Brüchen wird **kein** gemeinsamer Nenner benötigt.

Beispiel:

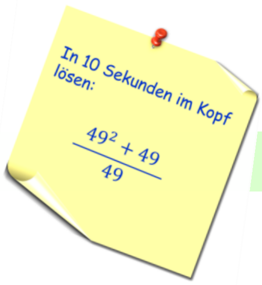
Will man das Ergebnis in Bruchform:

```
5/6*3/10
```

```
0.25
```

```
0.25 .as_integer_ratio()
```

```
(1, 4)
```



1.2.1.3. Dividieren

Für die Division von Brüchen gilt:

$$\boxed{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{n}} : \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{m}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{n}} \cdot \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{b}}}$$

Ein Bruch wird durch einen Bruch dividiert,
indem man den ersten Bruch mit dem **Kehrwert des zweiten Bruchs** multipliziert.

Beispiel: $\frac{3}{4} : \frac{9}{10} = \frac{3}{4} \cdot \frac{10}{9} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot \overset{5}{\cancel{10}}}{\underset{2}{\cancel{4}} \cdot \underset{3}{\cancel{9}}} = \frac{5}{6}$

Doppelbrüche: $\boxed{\dfrac{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{n}}}{\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{m}}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{n}} : \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{m}}}$

Beispiel: $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{4} : \frac{9}{10} = \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{4}_{2}} \cdot \frac{\cancel{10}^{5}}{\cancel{9}_{3}} = \frac{3 \cdot 10}{4 \cdot 9} = \frac{5}{6}$

jupyter

```
1 3/4/(9/10)
```

$\frac{5}{6}$

Nicht vergessen, den zweiten Bruch einzuklammern! Ansonsten erhält man ein falsches Ergebnis weil die Division nicht assoziativ, also nicht in beliebiger Reihenfolge durchführbar ist.

```
1 3/4/9/10
```

$\frac{1}{120}$

$3 : 4 : 9 : 10$ fassen Python und auch Taschenrechner so auf: $\frac{3}{4 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{3}{360} = \frac{1}{120} \neq \frac{5}{6}$

Kann ich's?

1) 9-9·9+99:9 = ? A: 11 B: −61 C: 12

2) $\frac{18-9}{9} = ?$ A: −7 B: 17 C: 1

3) $\frac{3-2}{2} - \frac{1}{3} = ?$ A: ⅔ B: 0 C: ⅙

Lösungen: 1) B 2) C 3) C

Übung

Berechnen und vereinfachen Sie das Ergebnis soweit wie möglich.

1) $\frac{4}{5} - \frac{8}{9} + \frac{1}{3} =$

2) $\frac{5}{7} \cdot (-14) =$

3) $\left(\frac{9}{5} + \frac{1}{20}\right) \cdot \frac{10}{37} =$

4) $\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{2}\right) =$

5) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}} =$

6) $\frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} =$

7) $\frac{\frac{2}{9}}{1 - \frac{7}{9}} : \frac{2^2 - 2}{2^2 + 2} =$

8) $\frac{1 - \sqrt[3]{-8}}{\frac{15}{6} - \frac{1}{2}} \cdot (1-2) \cdot (1+2) =$

9) $\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + 2}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 3} - \frac{3 \cdot \sin(90°)}{e^0} =$

10) $\frac{3-2}{3+2} - \frac{2+3}{2-3} =$

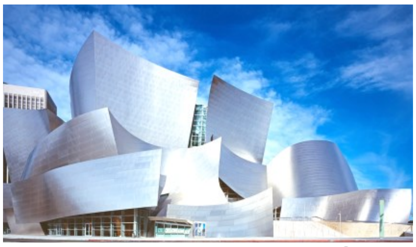
11) $-\frac{\pi^2}{2} : \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{2}{\pi}} =$

Lösungen: 1) $\frac{11}{45}$ 2) -10 3) $\frac{1}{2}$ 4) $\frac{1}{4}$ 5) $\frac{3}{2}$ 6) $\frac{1}{3}$ 7) 3 8) $-\frac{9}{2}$

9) $-\frac{7}{3}$ 10) $\frac{26}{5}$ 11) -2

1.3. Rechnen mit komplexen Zahlen

1.3.1. Kartesische Form (Algebraische Form)


Walt Disney Concert Hall, Los Angeles, © pixabay

Woher der Name ***komplexe Zahlen***?

Wie ein Gebäude*komplex* aus mehreren Häusern besteht, so setzt sich eine *komplexe* Zahl aus mehreren Gliedern (Ausdrücke, die mit $+$ oder $-$ verbunden sind) zusammen, die nicht addiert bzw. subtrahiert werden können.

complexus (lateinisch): umschlingend, umfassend

Beispiel einer komplexen Zahl $z = 4 + 3 . i$

Allgemein lässt sich eine **komplexe Zahl z** in sog. **KARTESISCHER-Form** (Algebraische Form oder Normal-Form) wie folgt darstellen:

$$\boxed{z = x + y \cdot i = x + i \cdot y}$$

mit $x, y \in \mathbb{R}$ (x und y sind reelle Zahlen)

***i* … imaginäre Einheit** mit $i^2 = -1$

Bemerkung 1: Wenn der Buchstabe i schon Verwendung findet, z.B. I für Stromstärke, dann verwendet man für die imaginäre Einheit **j**. Ebenso in

jupyter

```
4+3j
```

```
(4+3j)
```

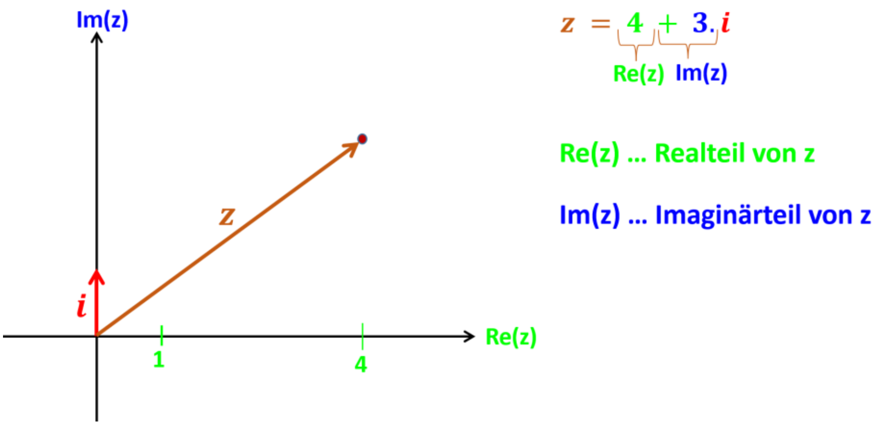
oder:

```
x=4
y=3
complex(x,y)
```

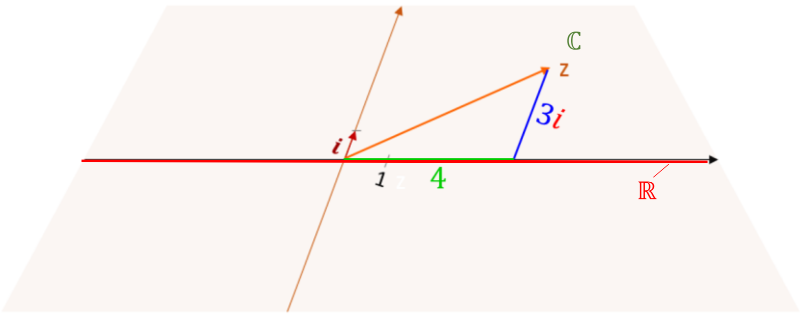
```
(4+3j)
```

Bemerkung 2: Die kartesische Form findet man auch so:

$z = a + b \cdot i$ mit $a, b \in \mathbb{R}$



Die **Menge der komplexen Zahlen** ℂ ist eine ganze Dimension größer als die anderen Zahlenmengen. Während alle **reellen Zahlen (ℝ)** in einer (unendlich großen) Ebene nur eine (unendlich lange) Gerade ausfüllen, belegen die komplexen Zahlen diese gesamte Ebene.



Diese **komplexe Zahl z** wird in einer Ebene (flach und unendlich groß) als **Pfeil** dargestellt, dessen Schaft im Koordinatenursprung liegt, wie bei Ortsvektoren (siehe 4.4.1., S 183) .
Auf der waagrechten Achse wird x = 4 aufgetragen, auf der nach hinten gehenden Achse $y.i = 3\,i$.

1.3.1.1. Addition in kartesischer Form

$z_1 = x_1 + i \cdot y_1$ und $z_2 = x_2 + i \cdot y_2$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + i \cdot y_1) + (x_2 + i \cdot y_2) = x_1 + i \cdot y_1 + x_2 + i \cdot y_2 = x_1 + x_2 + i \cdot y_1 + i \cdot y_2 = (x_1 + x_2) + i \cdot (y_1 + y_2)$$

$$\boxed{z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i \cdot (y_1 + y_2)}$$

Beispiel:

$z_1 = 4 + 3 \cdot i$ $\qquad z_2 = 5 - 2 \cdot i$

$z_1 + z_2 = 4 + 5 + i \cdot (3 - 2) = 9 + i$

```
import numpy as np
z1=complex(4, 3)
z2=complex(5, -2)
z1+z2
```

```
(9+1j)
```

Man kann auch leicht ohne die obere Formel addieren:

$z_1 + z_2 = 4 + 3 \cdot i + 5 - 2 \cdot i = 9 + i$

Graphisch werden komplexe Zahlen wie Vektorpfeile addiert bzw. subtrahiert (siehe 4.3.2.1., S 177 f).

1.3.1.2. Subtraktion in kartesischer Form

$z_1 = x_1 + i \cdot b_1$ und $z_2 = x_2 + i \cdot b_2$

$z_1 - z_2 = (x_1 + i \cdot y_1) - (x_2 + i \cdot y_2) = x_1 + i \cdot y_1 - x_2 - i \cdot y_2 = x_1 - x_2 + i \cdot y_1 - i \cdot y_2 = (a_1 - a_2) + i \cdot (y_1 - y_2)$

$$\boxed{z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i \cdot (y_1 - y_2)}$$

Beispiel:

$z_1 = 4 + 3 \cdot i$ $\qquad z_2 = 5 - 2 \cdot i$

$z_1 - z_2 = 4 - 5 + i \cdot [3 - (-2)] = -1 + i \cdot (3 + 2) = -1 + i \cdot 5 = -1 + 5\,i$

```
import numpy as np
z1=complex(4, 3)
z2=complex(5, -2)
z1-z2
```

```
(-1+5j)
```

Ohne Verwendung der Formel:

$z_1 - z_2 = 4 + 3 \cdot i - (5 - 2 \cdot i) = 4 + 3 \cdot i - 5 + 2 \cdot i = -1 + 5 \cdot i$

1.3.1.3. Multiplikation in kartesischer Form

$z_1 = x_1 + i \cdot y_1$ und $z_2 = x_2 + i \cdot y_2$

$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + i \cdot y_1) \cdot (x_2 + i \cdot y_2) = x_1 \cdot x_2 + i \cdot x_1 \cdot y_2 + i \cdot x_2 \cdot y_1 + y_1 \cdot y_2 \cdot i \cdot i =$

$= x_1 \cdot x_2 + i \cdot x_1 \cdot y_2 + i \cdot x_2 \cdot y_1 + y_1 \cdot y_2 \cdot i^2 = x_1 \cdot x_2 + i \cdot (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) + y_1 \cdot y_2 \cdot (-1) =$

$\mathbf{i^2 = -1}$

$= x_1 \cdot x_2 + i \cdot (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) - y_1 \cdot y_2 = x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 + i \cdot (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 + i \cdot (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)}$$

Beispiel:

$z_1 = 4 + 3 \cdot i$ $\quad$ $z_2 = 5 - 2 \cdot i$

$z_1 . z_2 = (4 + 3 \cdot i) . (5 - 2 \cdot i) = 4 \cdot 5 - 3 \cdot (-2) + i \cdot [4 \cdot (-2) + 5 \cdot 3] = 20 + 6 + i \cdot [-8 + 15] = 26 + 7 \cdot i$

Bemerkung: Es ist einfacher, die Multiplikation ohne Verwendung der Formel durchzuführen:

$z_1 \cdot z_2 = (4 + 3 \cdot i) \cdot (5 - 2 \cdot i) = 4 \cdot 5 - 4 \cdot 2 \cdot i + 3 \cdot 5 \cdot i - 3 \cdot i \cdot 2 \cdot i = 20 - 8 \cdot i + 15 \cdot i - 6 \cdot i^2 =$

$= 20 - 8 \cdot i + 15 \cdot i - 6 \cdot (-1) = 20 - 8 \cdot i + 15 \cdot i + 6 = 26 + 7 \cdot i$

```python
import numpy as np
z1=complex(4, 3)
z2=complex(5, -2)
z1*z2
```

```
(26+7j)
```

1.3.1.4. Höhere Potenzen von i

$i^0 = 1$ (Siehe 2.2.2, S 77)

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$

$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$

$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$

$i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$

Man sieht: $\mathbf{n \in \mathbb{N}_0}$: $\mathbf{i^{4\cdot n} = 1}$ $\mathbf{i^{4\cdot n+1} = i}$ $\mathbf{i^{4\cdot n+2} = -1}$ $\mathbf{i^{4\cdot n+3} = -i}$

Beispiel: $i^{2021} = i^1 = i$

$2021 : 4 = 505$
02
21
1 Rest

```python
import numpy as np
z=complex(0, 1)
z**2021
```

$1.0i$

Außerdem ist

$$i^{-1} \overset{*}{=} \frac{1}{i} = \frac{1 \cdot (-i)}{i \cdot (-i)} = \frac{-i}{-i^2} = \frac{-i}{-(-1)} = \frac{-i}{1} = -i$$ □ siehe folgende Seite

$*$ Siehe auch 2.2.2, S 77

$i^{-2} = (i^{-1})^2 = (-i)^2 = i^2 = -1$

$i^{-3} = (i^{-1})^3 = (-i)^2 \cdot (-i) = -1 \cdot (-i) = i$

$i^{-4} = (i^{-1})^4 = (-i)^2 \cdot (-i)^2 = -1 \cdot (-1) = 1$

Weiters gilt:

$(-i)^1 = -i$

$(-i)^2 = (-i) \cdot (-i) = i^2 = -1$

$(-i)^3 = (-i)^2 \cdot (-i) = -1 \cdot (-i) = i$

$(-i)^4 = (-i)^2 \cdot (-i)^2 = -1 \cdot (-1) = 1$

$$(-\mathrm{i})^{-1} = \frac{1}{(-\mathrm{i})^1} = \frac{1}{-\mathrm{i}} = -\frac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}^{-1} = (-\mathrm{i}) = \mathrm{i}$$

$$(-\mathrm{i})^{-2} = \frac{1}{(-\mathrm{i})^2} = \frac{1}{(-\mathrm{i})\cdot(-\mathrm{i})} = \frac{1}{\mathrm{i}^2} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$(-\mathrm{i})^{-3} = \frac{1}{(-\mathrm{i})^3} = \frac{1}{(-\mathrm{i})^2\cdot(-\mathrm{i})} = \frac{1}{-1\cdot(-\mathrm{i})} = \frac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$$

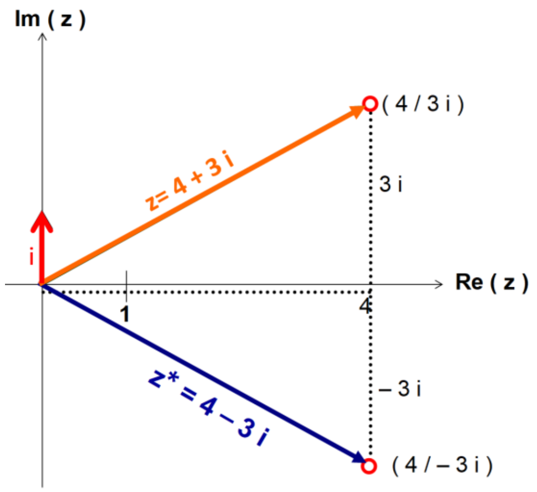
$$(-\mathrm{i})^{-4} = \frac{1}{(-\mathrm{i})^4} = \frac{1}{(-\mathrm{i})^2\cdot(-\mathrm{i})^2} = \frac{1}{-1\cdot(-1)} = \frac{1}{1} = 1$$

```
import numpy as np
z=complex(0, -1)
z**(-4)
```

1.0

1.3.1.5. Division in kartesischer Form

Für die Division in kartesischer (algebraischer) Form benötigen wir zunächst die sog. **komplex konjugierte Zahl z^***:



Die **komplex konjugierte Zahl z^***
der Zahl $\mathbf{z = x + y \cdot i}$ lautet:

$$\mathbf{z^* = x - y \cdot i}$$

Die konjugiert komplexe Zahl unterscheidet sich um das Vorzeichen vor dem Imaginärteil.

Graphisch erhält man die konjugiert komplexe Zahl z^* durch Spiegelung von $\mathbf{z}$ an der Re(z) - Achse.

Statt z^* findet sich auch die Schreibweise $\bar{z}$

Weil es einfacher ist, führen wir die Division ohne Verwendung einer Formel durch:

Beispiel:

$z_1 = 4 + 3 \cdot i \quad z_2 = 5 - 2 \cdot i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4+3\cdot i}{5-2\cdot i} = \frac{(4+3\cdot i)\cdot\mathbf{(5+2\cdot i)}}{(5-2\cdot i)\cdot\mathbf{(5+2\cdot i)}} = \frac{20+8\cdot i+15\cdot i+6\cdot i^2}{25+10\cdot i-10\cdot i-4\cdot i^2} = \frac{20+23\cdot i-6}{25+4} =$$

Zähler **und** Nenner werden mit der **konjugiert komplex konjugierten Zahl** des Nenners **multipliziert**.

$$= \frac{14+23\cdot i}{29} = \frac{14}{29} + \frac{23}{29}\cdot i \approx 0.48 + 0.79\cdot i$$

```python
import numpy as np
z1=complex(4, 3)
z2=complex(5, -2)
z1/z2
```

```
(0.48275862068965514+0.7931034482758 62j)
```

$$\mathbf{z\cdot z^*} = (x+i\cdot y)\cdot\mathbf{(x-i\cdot y)} = x^2 - i\cdot x\cdot y + i\cdot x\cdot y - i^2\cdot y^2 = x^2-(-1)\cdot y^2 = \mathbf{x^2+y^2}$$

$$\boldsymbol{z\cdot z^* = x^2+y^2}$$

Beispiel:

$z = 4 + 3\cdot i \rightarrow \quad z^* = 4 - 3\cdot i$

$z\cdot z^* = (4 + 3\cdot i)\cdot(4-3\cdot i) = 16-12\cdot i+12\cdot i-9\cdot i^2 = 16-9\cdot(-1) = 16+9 = 25$

```python
import numpy as np
z=complex(4, 3)
z.conjugate()
```

```
(4-3j)
```

```python
import numpy as np
z=complex(4, 3)
z*z.conjugate()
```

```
(25+0j)
```

1.3.1.6. Potenzieren in kartesischer Form

Beispiel:

$z_1 = 4 + 3\,i$

$(z_1)^2 = (4 + 3\,i)^2 = 16 + 24\,i + 9\,i^2 = 16 + 24\,i - 9 = 7 + 24\,i$

Binomische Formel: 2.2.5., S 87 f

```
import numpy as np
z=complex(4, 3)
z**2
```

```
(7+24j)
```

Für Exponenten $\geq$ **3** oder Bruchhochzahlen wird das Potenzieren in Binomialform auf **händische** Weise mühselig. Deshalb gibt es neben dieser Darstellung auch die **Polarform** komplexer Zahlen (S 24 f).

Radizieren (Wurzelziehen) ist händisch in **Binomialform nicht möglich**. Dazu benötigen wir die Polarform (siehe nächstes Kapitel).

Wohl in Python:

```
import cmath
z=complex(4, 3)
sqrt(z)
```

```
(2.1213203435596424+0.7071067811865476j)
```

oder:

```
import cmath
z=complex(4, 3)
z**(1/2)
```

```
(2.1213203435596424+0.7071067811865476j)
```

Übung

1) Ist folgende Aussage richtig? „Für alle komplexen Zahlen gilt: z = Re(z) + Im(z)."

2) Berechnen Sie $2i - \frac{5+2i}{1+i}$

3) Berechnen Sie für die komplexe Zahl $z = 1 + 3i$: a) z^2 b) $\frac{z \cdot z^*}{z+z^*}$ c) $\frac{z}{z^*} - \frac{z^*}{z}$

4) Gegeben sind die (komplexen) Zahlen $z_1 = 1 - i$ und $z_2 = -2\,i$

Berechnen Sie a) $\frac{z_1}{z_2}$ b) $z_1^2 \cdot z_2$ c) $\frac{z_1}{z_2^*}$ d) $(z_2 + 2\,z_1^*) \cdot z_2$ e) $-z_2 - (1 - z_1)^2$

5) Bestimmen Sie $\frac{1}{i}$

Lösungen:

1) Nein, weil z = Re(z) + Im(z) $\cdot$ ***i***

2) $-\frac{7}{2} + \frac{7}{2}\,i$

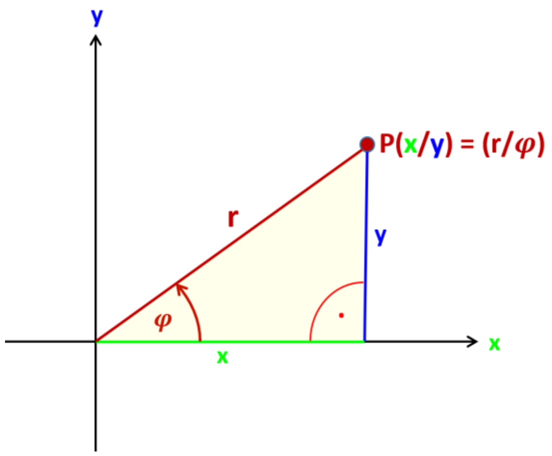
3) a) $-8 + 6\,i$ b) 5 c) $\frac{6}{5}\,i$

4) a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ b) -4 c) $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ d) $-4\,i$ e) $1 + 2\,i$ 5) $-i$

1.3.2. Polarform (Trigonometrische Form)

Sollte die Definition und Handhabung der Winkelfunktionen nicht mit gebotener Sicherheit beherrscht werden:
7.7., S 371 f.

1.3.2.1. Darstellung in Polarform



Wir befinden uns im *kartesischen* (rechtwinkeligen) und reellen Koordinatensystem:

Ich habe zwei Möglichkeiten, die Lage eines Punktes exakt zu beschreiben:

- Durch Angabe von x und y
- Durch Angabe der Entfernung **r** des Punktes vom Ursprung und des Winkels φ, den r mit der x-Achse einschließt.

x und **y** sind die **kartesischen Koordinaten**,

r und φ nennt man die **Polarkoordinaten**.

x, y, r und φ liegen in einem rechtwinkeligen Dreieck und dort gelten folgende Beziehungen:

Im rechtwinkeligen Dreieck können die Winkelfunktionen und der Lehrsatz des PYTHAGORAS' angewandt werden:

gegeben: x und y, gesucht: r und φ:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot z^*}$$ [7]

$$\tan(\varphi) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{y}{x} \rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Der **Arcustangens arctan** ist die **Umkehrfunktion** des **Tangens**.

Auf **Taschenrechnern** wird **arctan** meist durch das Symbol **tan $^{-1}$** angegeben.

gegeben: r und φ, gesucht: x und y:

$$\cos(\varphi) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{x}{r} \quad | \cdot r \quad \rightarrow r \cdot \cos(\varphi) = x$$

$$\sin(\varphi) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{y}{r} \quad | \cdot r \quad \rightarrow r \cdot \sin(\varphi) = y$$

[7] Siehe S 22

Fassen wir zusammen:

gegeben: x und y gesucht: r und φ	gegeben: r und φ gesucht: x und y
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	$x = r \cdot \cos(\varphi)$
$\tan(\varphi) = \frac{y}{x} \rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$	$y = r \cdot \sin(\varphi)$

Die **Polarform einer komplexen Zahl** ist ihre **Darstellung mit r und φ**:

$z = x + i \cdot y = r \cdot \cos\varphi + i \cdot r \cdot \sin\varphi = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$

$x = r \cdot \cos\varphi \quad y = r \cdot \sin\varphi$

Polarform einer komplexen Zahl: $\boxed{z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)}$

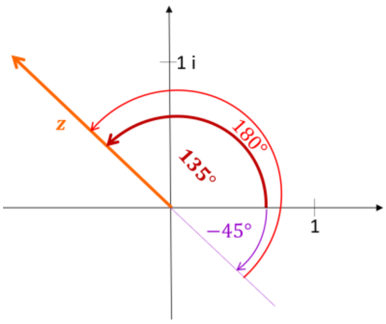
r … Radius, Betrag, Abstand
φ … Winkel, Argument im Bogenmaß (siehe 1.3.3., S 31)

Beispiel: $z = -1 + i$

$r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ Für den Radius (den Betrag) r kommt nur die positive Lösung der Wurzel infrage.

$\arctan\left(\frac{1}{-1}\right) = -45°$

Ob der errechnete Winkel der gegebenen komplexen Zahl entspricht, muss mit einer Skizze kontrolliert werden:



$180° - 45° = 135° \equiv \frac{3}{4}\pi$

$x = \frac{\varphi}{180°} \cdot \pi$ (siehe 1.3.3., S 31)

Damit lautet die Polarform von z: $z = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i \cdot \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right)$

```python
import cmath
x=-1
y=1
r = (x**2+y**2)**(1/2)
print(r)

z=complex(x, y)
print(cmath.phase(z))
```

```
sqrt(2)
2.356194490192345
```

$\leftarrow \sqrt{2}$

$\leftarrow \frac{3}{4}\pi$

Beispiel: $z = \sqrt{2} \cdot (cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot sin\left(\frac{\pi}{4}\right))$

$$x = r \cdot \cos(\varphi) = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$y = r \cdot \sin(\varphi) = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

α	0° bzw. 0	30° bzw. $\frac{\pi}{6}$	45° bzw. $\frac{\pi}{4}$	60° bzw. $\frac{\pi}{3}$	90° bzw. $\frac{\pi}{2}$
$\sin(\alpha)$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4}$
$\cos(\alpha)$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{0}$
$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	nicht definiert

Siehe auch 7.7.2., S 373 f

z in kartesischer Form: $z = 1 + i$

```python
import cmath
r = 2**(1/2)
phi = pi/4

x = r*cos(phi)
y = r*sin(phi)

print(x, y)
```

```
1 1
```

$\uparrow$ $\uparrow$

x y

Addition und Subtraktion sind in **Polarform nicht möglich**.

1.3.2.2. Multiplikation in Polarform

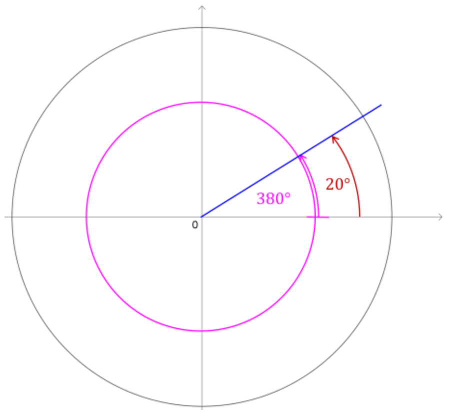
$\mathbf{z_1 = r_1 \cdot (\mathit{cos}(\varphi_1) + \mathit{i} \cdot \mathit{sin}(\varphi_1) = (r_1\,;\, \varphi_1)}$

$\mathbf{z_2 = r_2 \cdot (\mathit{cos}(\varphi_2) + \mathit{i} \cdot \mathit{sin}(\varphi_2) = (r_2\,;\, \varphi_2)}$

$$\boxed{\mathbf{z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2\,;\, \varphi_1 + \varphi_2)}}$$

Beispiel: $z_1 = (2\,;320°)$ $\quad z_2 = (\sqrt{2}\,;60°)$

$$z_1 \cdot z_2 = \left(2 \cdot \sqrt{2}\,;320° + 60°\right) = \left(2 \cdot \sqrt{2}\,;380°\right) = (2 \cdot \sqrt{2}\,;20°)$$

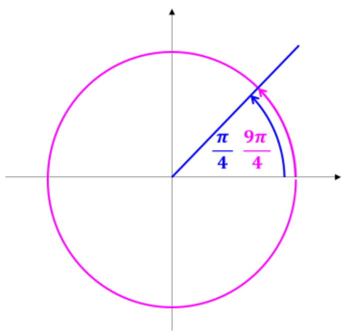


$\varphi_1 + \varphi_2 = 320° + 60° = 380°$

$380° - 360° = 20°$

Beispiel: $z_1 = (1\,;\frac{3\pi}{4})$ $\quad z_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\,\frac{3\,\pi}{2})$

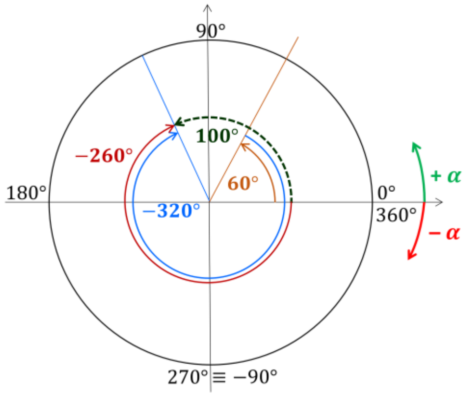
$$z_1 \cdot z_2 = \left(1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\,;\,\frac{3\pi}{4} + \frac{6\,\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\,\frac{9\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\,\frac{\pi}{4}\right)$$



1.3.2.3. Division in Polarform

$$\mathbf{z_1 = (r_1\,;\,\varphi_1)} \quad \mathbf{z_2 = (r_2\,;\,\varphi_2)} \qquad \boxed{\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\,;\,\varphi_1 - \varphi_2\right)}$$

Beispiel: $z_1 = (2\,;60°) \quad z_2 = (\sqrt{2}\,;320°)$



$$\varphi_1 - \varphi_2 = 60° - 320° = -260°$$

$$360° - 260° = 100°$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\,;\,60° - 320°\right) = \left(\sqrt{2}\,;\,-260°\right) = \left(\sqrt{2}\,;\,\underline{100°}\right) = \left(\sqrt{2}\,;\frac{5}{9}\,\pi\right)$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$ (Siehe 2.2.2., S 80)

$$\varphi = \frac{100°}{180°}\pi = \frac{5}{9}\,\pi$$

Übung

$z_1 = 1 + i \qquad z_2 = -2 - i\pi$

$z_3 = 2\cdot(\cos(-135°) + i\cdot\sin(-135°)) \qquad z_4 = 4\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

Berechnen Sie: 1) $z_1 - z_2$ 2) $z_4 + z_3$ 3) $z_1\cdot z_3$ 4) $\frac{z_1}{z_3}$ 5) ${z_1}^{10}$

Lösungen: 1) $z_1 - z_2 = 3 + i\cdot(1+\pi) = 3 + 4.14\cdot i$ 2) $z_4 + z_3 = \sqrt{2} + i\cdot\sqrt{2}$

3) $z_1\cdot z_4 = 2\sqrt{2}\cdot\left(cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\cdot sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\sqrt{2}\cdot i$ 4) $\frac{z_1}{z_3} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

5) ${z_1}^{10} = 32\cdot\left(cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + i\cdot sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)\right) = 32\cdot\left(cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\cdot sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 32\,i$

1.3.2.4. Potenzieren in Polarform

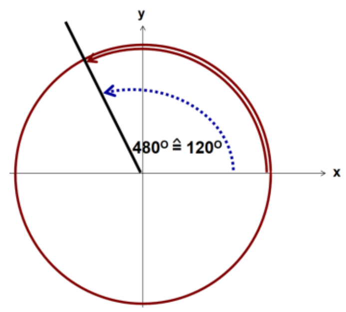
$\mathrm{z} = (\mathrm{r}; \varphi) \quad \rightarrow$ $\boxed{\mathbf{z^n = (r^n; n \cdot \varphi)}}$

Beispiel:

$z = 2 \cdot (\cos(120°) + i \cdot \sin(120°))$

$z^4 = 2^4 \cdot (\cos(4 \cdot 120°) + i \cdot \sin(4 \cdot 120°)) = 16 \cdot (\cos(480°) + i \cdot \sin(480°)) = 16 \cdot (\cos(120°) + i \cdot \sin(120°))$

$= 16 \cdot \left(cos\left(\frac{2}{3}\,\pi\right) + i \cdot sin\left(\frac{2}{3}\,\pi\right)\right)$



Die Winkelwerte werden üblicherweise im Bogenmaß (siehe 1.3.3., S 31) angegeben.

$180° = \pi \qquad 120° = \frac{2}{3} \cdot 180° = \frac{2}{3} \cdot \pi$

1.3.2.5. Radizieren in Polarform

Radizieren bedeutet **Wurzelziehen** [radix (lat:) die Wurzel]

Das Wurzelzeichen ist ein stilisiertes r: r → ▀⁻ → $\sqrt{}$

$\mathrm{z} = (\mathrm{r}; \varphi) \quad \rightarrow$ $\boxed{\mathbf{\sqrt[n]{z} = \left(\sqrt[n]{r}\,;\frac{\varphi}{n}\right)}}$

Beispiel:

$z = 32 \cdot (\cos(120°) + i \cdot \sin(120°)$

$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{32}\left(cos\left(\frac{120°}{4}\right) + i \cdot sin\left(\frac{120°}{4}\right)\right) = 2 \cdot \sqrt[4]{2}\,(cos(30°) + i \cdot sin(30°)) = \sqrt[4]{2}\left(cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \cdot sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

Das sind **NICHT** alle Werte der Wurzel, wie wir in Kapitel 1.3.3.3., S 40 f sehen werden.

1.3.3. Exponentialform (EULERsche Form)

Für alle weiteren Kapitel von 1.3.3. sind Kenntnisse der Rechenregeln für Potenzen (2.2.2., S 73 f) und der Winkelfunktionen (7.7., S 371 f) erforderlich.

Leonhard EULER
(1707–1783)

Der Schweizer Mathematiker Leonhard EULER, einer der größten seines Faches, stellte in der sog. ***EULERschen Formel*** [8] eine **Beziehung zwischen Winkelfunktionen und komplexen Zahlen** dar:

$$\boxed{e^{i\cdot\varphi} \;=\; \cos\varphi + i\,.\sin\varphi}$$

Warum diese Beziehung gilt, siehe S 32 und S 33.

Kartesische Form | **Polar**form | **Exponential**form

$$z = x + i\cdot y \quad = \quad r\cdot(\cos(\varphi) + i\cdot\sin(\varphi)) \quad = \quad r\cdot e^{i\cdot\varphi}$$

Exponentialform einer komplexen Zahl:

$$\boxed{z \;=\; r\,.\,e^{i\,\varphi}}$$

Mit dem Winkel φ im **Bogenmaß**

Für $\varphi = \pi$ erhält man $e^{i\cdot\pi} = \cos(\pi) + i\cdot\sin(\pi) = -1$

$\cos(\pi) = \cos(180°) = -1$
$\sin(\pi) = \sin(180°) = 0$ (Siehe Einheitskreis, 7.7.2., S 373 f)

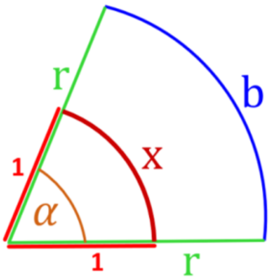
Die Gleichung $\boxed{e^{i\cdot\pi} = -1}$ bzw. $\boxed{e^{i\cdot\pi} + 1 = 0}$ ist als **EULERsche Identität** bekannt.

Beispiel: $\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} + i\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} + i\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} =$

α	$0°$ bzw. 0	$30°$ bzw. $\frac{\pi}{6}$	$45°$ bzw. $\frac{\pi}{4}$	$60°$ bzw. $\frac{\pi}{3}$	$90°$ bzw. $\frac{\pi}{2}$
$\sin(\alpha)$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4}$
$\cos(\alpha)$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{0}$
$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	nicht definiert

$= 1 + i$

[8] Die EULERsche Formel erschien erstmals 1748, damals noch unter der Einschränkung, dass die Winkelargumente reelle Zahlen sein müssten, was sich aber alsbald als unnötig herausstellte.



Zusammenhang zwischen

Gradmaß (α) und **Bogenmaß (x)**

$$\boxed{\frac{\alpha}{180°} \cdot \pi = x}$$

demnach ergibt sich z.B. für

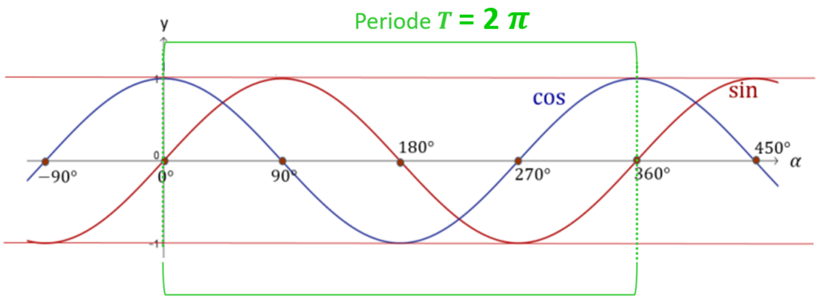
180°	$\frac{180°}{180°} \cdot \pi =$	**π**
360°	$\frac{360°}{180°} \cdot \pi =$	2 π
90°	$\frac{90°}{180°} \cdot \pi =$	$\frac{1}{2}$ π

Formel für die Länge
des Kreisbogens b

$$b = \frac{r\,\pi\,\alpha}{180°} = r \cdot \frac{\alpha}{180°} \cdot \pi$$

Im **Einheitskreis** ist $r = 1$

Da die **Winkelfunktionen** sin und cos **periodisch** sind (siehe 7.7.3.1., S 376 f),



Alle **360° = 2π** wiederholen sich
die Funktionswerte von sin und cos

Es gilt:

$$\cos(\varphi) + \mathrm{i} \cdot \sin(\varphi) = \cos(\varphi + \mathrm{k} \cdot 2\pi) + \mathrm{i} \cdot \sin(\varphi + \mathrm{k} \cdot 2\pi) \;\text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

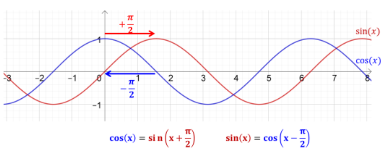
und somit

$$\boxed{z = r \cdot e^{i \cdot \varphi} = r \cdot e^{i \cdot (\varphi + k \cdot 2\pi)}}$$

Weiters gilt:

$$\boxed{\sin(\varphi) = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \qquad \cos(\varphi) = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}$$

Siehe 7.7.3.1., S 376 f



Die Addition und Subtraktion komplexer Zahlen in **Exponentialform** sind **nicht möglich**.

Am günstigsten lässt sich mit der **Exponentialform** die **Hochrechnung** durchführen.

Warum ist $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$?

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

Siehe 12.2.3.3.1., S 600 f

$$e^{i\cdot x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\cdot x)^n}{n!} = \frac{(i\cdot x)^0}{0!} + \frac{(i\cdot x)^1}{1!} + \frac{(i\cdot x)^2}{2!} + \frac{(i\cdot x)^3}{3!} + \frac{(i\cdot x)^4}{4!} + \frac{(i\cdot x)^5}{5!} + \frac{(i\cdot x)^6}{6!} + \ldots =$$

$$= \frac{i^0\cdot x^0}{0!} + \frac{i^1\cdot x^1}{1!} + \frac{i^2\cdot x^2}{2!} + \frac{i^3\cdot x^3}{3!} + \frac{i^4\cdot x^4}{4!} + \frac{i^5\cdot x^5}{5!} + \frac{i^6\cdot x^6}{6!} + \ldots =$$

$$= \frac{1\cdot x^0}{0!} + \frac{i\cdot x^1}{1!} + \frac{-1\cdot x^2}{2!} + \frac{-i\cdot x^3}{3!} + \frac{1\cdot x^4}{4!} + \frac{i\cdot x^5}{5!} + \frac{-1\cdot x^6}{6!} + \ldots$$

$i^0 = 1$ $i^1 = i$ $i^2 = -1$ $i^3 = -i$

$i^4 = 1$ $i^5 = i$ $i^6 = -1$ $i^7 = -i$ Siehe 1.3.1.4., S20

Wir ordnen die Glieder ohne und mit i:

$$e^{i\cdot x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\cdot x)^n}{n!} = \frac{1\cdot x^0}{0!} - \frac{1\cdot x^2}{2!} + \frac{1\cdot x^4}{4!} - \frac{1\cdot x^6}{6!} + \ldots + \frac{i\cdot x^1}{1!} - \frac{i\cdot x^3}{3!} + \frac{i\cdot x^5}{5!} + \ldots =$$

$$\left(\frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) \qquad + i\cdot\left(\frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right)$$

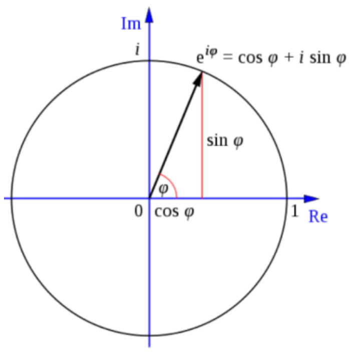
$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

Siehe 12.2.3.3.1., S 600 f

Siehe 12.2.3.3.1., S 600 f

$$e^{i\cdot x} = \cos(x) + i\cdot\sin(x) \quad \text{bzw.} \quad e^{i\cdot\varphi} = \cos(\varphi) + i\cdot\sin(\varphi)$$

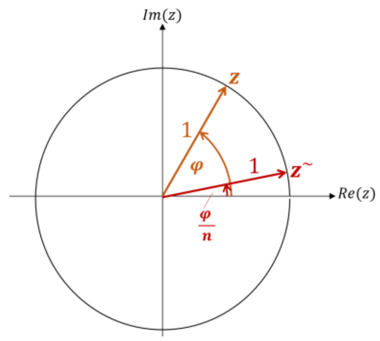


Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Eulersche_Formel

Daraus ergibt sich:

$$e^z = e^{x+i\cdot y} = e^x \cdot e^{i\cdot y} = e^x \cdot (\cos(y) + i\cdot\sin(y))$$

Eine andere, anschaulichere Herleitungsweise:

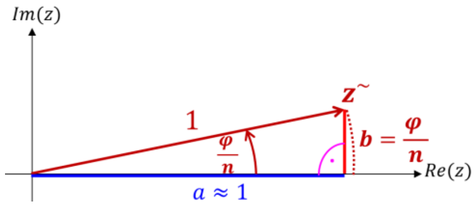


Nehmen wir an, wir wollen die links abgebildete **komplexe Zahl z** mit dem **Radius 1** und dem **Winkel φ** darstellen. In Polarform: $z = (1;\varphi)$

Dazu beschreiben wir zunächst die **komplexe Zahl $z^{\sim}$** mit dem **Radius 1** und dem **Winkel $\frac{\varphi}{n}$**. Wenn es auch nicht darstellbar ist, stellen wir uns für n eine große Zahl vor. Damit ist der Winkel $\frac{\varphi}{n}$ sehr klein.

$(z^{\sim})^n = z$ weil, wenn eine komplexe Zahl die Polarform $(r;\varphi)$ besitzt, $(r,\varphi)^n = (r^n, n\cdot\varphi)$.

Somit gilt für $(z^{\sim})^n = \left(1,\frac{\varphi}{n}\right)^n = \left(1^n, n\cdot\frac{\varphi}{n}\right) = (1,\varphi) = z$



Wie können wir nun $z^{\sim}$ darstellen?

$z^{\sim} = a + i\cdot b = 1 + \frac{\varphi}{n}$

Bei kleinem Winkel $\frac{\varphi}{n}$ ist $a \approx 1$

$b \approx$ Bogenlänge für die gilt: $b = \frac{r\cdot\pi\cdot\alpha}{180°}$

Mit den Bezeichnungen für $z^{\sim}$ gilt: $b = \frac{1\cdot\pi\cdot\frac{\varphi}{n}}{\pi} = \frac{\varphi}{n}$

! Winkel im Bogenmaß: 180° = π

Damit lautet $z^{\sim} = 1 + i\cdot\frac{\varphi}{n}$

Damit ist $z = \lim\limits_{n\to\infty}(z^{\sim})^n = \left(1 + i\frac{\varphi}{n}\right)^n$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x}$

Somit ist dann

$$z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i\,\varphi}{n}\right)^n = e^{i\,\varphi} = \cos(\varphi) + i\cdot\sin(\varphi)$$

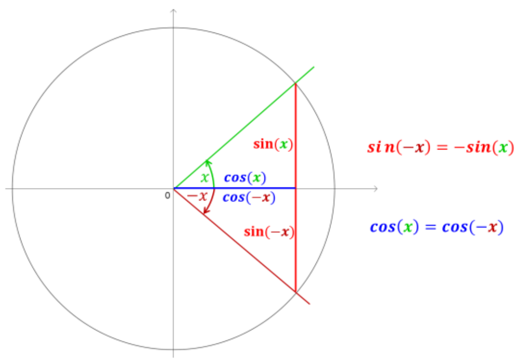
siehe Abb. S 32

Weiters gilt: $\boxed{\sin(x) = \frac{1}{2i}\cdot\left(e^{i\,x} - e^{-i\,x}\right) \qquad \cos(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(e^{i\,x} + e^{-i\,x}\right)}$

Weil $\frac{1}{2i}\cdot(e^{i\,x} - e^{-i\,x}) = \frac{1}{2i}\cdot[(\cos(x) + i\cdot\sin(x)) - (\cos(-x) + i\cdot\sin(-x))] =$

$= \frac{1}{2i}\cdot[\ (\cos(x) + i\cdot\sin(x)) - (\cos(x) - i\cdot\sin(-x)] = \frac{1}{2i}\cdot[\cos(x) + i\cdot\sin(x) - \cos(x) + i\cdot\sin(x)] =$

$= \frac{1}{2i}\cdot 2\cdot\ i\cdot\sin(x) = \sin\,(x)$



Siehe Einheitskreis: 7.7.2., S 373 f

Auf die gleiche Weise lässt sich zeigen, dass $\cos(x) = \frac{1}{2}\cdot(e^{i\,x} + e^{-i\,x})$

1.3.3.1. Multiplizieren und Dividieren in Exponentialform

$z_1 = r_1 \cdot e^{i\cdot\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 \cdot e^{i\cdot\varphi_2}$

$$\boxed{\mathbf{z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i\cdot(\varphi_1+\varphi_2)}} \qquad \mathbf{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i\cdot(\varphi_1-\varphi_2)}}}$$

Beispiel: $z_1 = 2 \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}} \qquad z_2 = \sqrt{2} \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{8}}$

$$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right)} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{i\cdot\left(\frac{2\pi}{8}+\frac{\pi}{8}\right)} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{i\cdot\frac{3}{8}\pi}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot e^{i\cdot\left(\frac{2\pi}{8}-\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{8}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{8}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{2} \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{8}} = \sqrt{2} \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{8}}$$

siehe 2.2.2., S 83

1.3.3.2. Potenzieren in Exponentialform

Beispiel: $z = 2 \cdot e^{\pi\cdot i}$

$$z^4 = (2 \cdot e^{\pi\cdot i})^4 = 2^4 \cdot (e^{\pi\cdot i})^4 = 16 \cdot e^{4\,\pi\,i} = 16 \cdot (\cos(4\pi) + i \cdot \sin(4\pi)) =$$

2.2.2., P 5, S 78

$$= 16 \cdot (\cos(0) + i \cdot \sin(0)) = 16 \cdot (1 + i \cdot 0) = 16$$ (Siehe Einheitskreis: 7.7.2., S 373 f)

Beispiel: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \mathrm{i}\right)^{2020} = \left(1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right)^{2020} = 1^{2020} \cdot \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right)^{2020} = 1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot 2020} = 1 \cdot \mathrm{e}^{-505\,\pi\cdot\mathrm{i}} =$

$$\mathrm{r} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = \arctan(-1) = -45° = -\frac{\pi}{4}$$ (Siehe Einheitskreis: 7.7.2., S 373 f)

α	$0°$ bzw. 0	$30°$ bzw. $\frac{\pi}{6}$	$45°$ bzw. $\frac{\pi}{4}$	$60°$ bzw. $\frac{\pi}{3}$	$90°$ bzw. $\frac{\pi}{2}$
$\sin(\alpha)$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4}$
$\cos(\alpha)$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{0}$
$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	nicht definiert

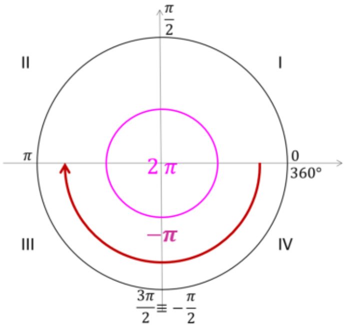
$$= 1 \cdot e^{-\pi \cdot i} = 1 \cdot (\cos(-\pi) + i \cdot \sin(-\pi)) = 1 \cdot (-1 + 0) = \mathbf{-1}$$

Siehe Einheitskreis: 7.7.2., S 373 f

Alle $2 \cdot \pi$ gelangen wir nach einer vollen Umdrehung wieder zum gleichen Winkel:

$-505\,\pi : (2\,\pi) = 252{,}5 \quad \rightarrow \quad 252 \text{ mal } -2\pi \text{ und } 0{,}5 \text{ mal } -2\pi = -\pi$

Demnach bleiben nach 252 mal -2π noch $-\pi$



Beispiel:

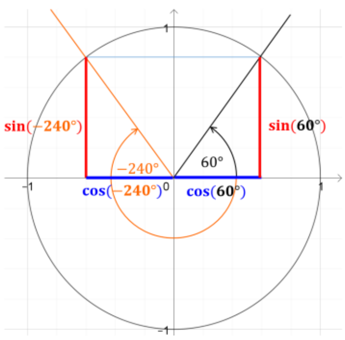
$$\left(\sqrt{3} - i\right)^8 = 2^8 \cdot \left(e^{-\frac{\pi}{6} i}\right)^8 = 256 \cdot e^{-\frac{\pi}{6} \cdot 8 \cdot i} = 256 \cdot e^{-\frac{4}{3}\pi\, i} = 256 \cdot \left(\cos\left(-\frac{4}{3}\,\pi\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{4}{3}\,\pi\right)\right) =$$

$$r = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\varphi = arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

α	0° bzw. 0	30° bzw. $\frac{\pi}{6}$	45° bzw. $\frac{\pi}{4}$	60° bzw. $\frac{\pi}{3}$	90° bzw. $\frac{\pi}{2}$
$\sin(\alpha)$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{0}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{4}$
$\cos(\alpha)$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{4}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{0}$
$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	nicht definiert

$$= 256 \cdot \left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -128 + 128\,\sqrt{3}\, i$$



$-\frac{4}{3}\,\pi = -240° \equiv$

$\sin(-240°) = \sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(-240°) = -\cos(60°) = -\frac{1}{2}$

Beispiel: $$\frac{3 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} \cdot (2 + 2 \cdot i)}{4 \cdot (\cos(45°) + i \cdot \sin(45°))}$$

Wir haben hier alle drei Formen der komplexen Zahlen:

Exponential- form **Binomial-** form

$$\frac{\boxed{3 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}} \cdot \overset{①}{\boxed{(2 + 2 \cdot i)}}}{\underset{②}{\boxed{4 \cdot (\cos(45°) + i \cdot \sin(45°))}}}$$

Polar- form

Man kann komplexe Zahlen nur in der gleichen Darstellung rechnerisch verknüpfen.

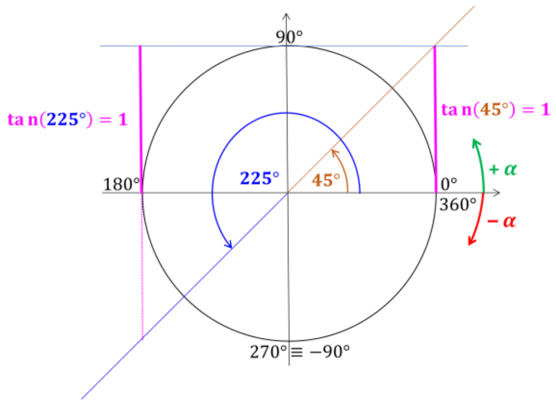
In welche Form sollen wir verwandeln?
Die drei Zahlen sind mit Punktrechnung verbunden. Für diese kommen Polar- bzw. Exponentialform infrage.
Man wählt jene Form, die häufiger vorkommt. Das ist bei diesem Beispiel bei keiner Form der Fall.
Da Potenzen leichter zu multiplizieren sind als Summen von Winkelfunktionen zu bilden, verwandeln wir alle Zahlen in Exponentialform:

①

$$2 + 2 \cdot i = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}$$

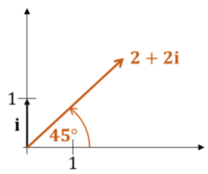
$$r = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2}$$

$$\arctan\left(\frac{2}{2}\right) \to \varphi = 45° = \frac{\pi}{4}$$



α°	tg α
45°	1.0000
225°	1.0000

Es gibt noch einen zweiten Winkel zwischen 0° und 360°, für den der Tangens den Wert 1 besitzt:
$225° = \frac{5}{4}\,\pi$



Wenn man die komplexe Zahl in der GAUßschen Zahlenebene darstellt, sieht man, dass $45° = \frac{\pi}{4}$ infrage kommt.

	I	II	III	IV
sin	+	+	−	−
cos	+	−	−	+
tan	+	−	+	−

$tan = \frac{sin}{cos}$

②: $$4 \cdot (\cos(45°) + i \cdot \sin(45°)) = 4 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 4 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}$$

α	$0°$ bzw. 0	$30°$ bzw. $\frac{\pi}{6}$	$45°$ bzw. $\frac{\pi}{4}$	$60°$ bzw. $\frac{\pi}{3}$	$90°$ bzw. $\frac{\pi}{2}$
$\sin(\alpha)$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{0}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{4}$
$\cos(\alpha)$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{4}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{0}$
$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	nicht definiert

Eingesetzt in die Angabe:

$$\frac{3\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}\cdot(2+2\cdot i)}{4\cdot(\cos(45°)+i\cdot\sin(45°))}=\frac{3\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}\cdot \overset{1}{\cancel{2}}\cdot\sqrt{2}\cdot \overset{1}{\cancel{e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}}}}{\underset{2}{\cancel{4}}\cdot \underset{1}{\cancel{e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}}}}=\frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}$$

Beispiel: Bestimmen Sie die kartesische Darstellung der Zahl $3\cdot e^{\frac{\pi}{2}i+1+i^{97}}=3\cdot e^{\frac{\pi}{2}i+1+i}=3\cdot e^{1+\frac{3\pi}{2}i}=$

$97:4=24$
17
$1\ \rightarrow\ i^{97}\equiv i^{1}=i$

$$=3\cdot e^{1}\cdot e^{i\cdot\frac{3\pi}{2}}=3\cdot e\cdot e^{i\cdot\frac{3\pi}{2}}=3\cdot e\cdot\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\cdot sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)=$$

Siehe 2.2.2., P1, S 73

$$=3\cdot e\cdot(0+i\cdot(-1))=-3\,e\cdot\ i=0-i\cdot 3\,e$$

Beispiel: Verwandeln Sie $2^{1+\frac{\pi}{2}i}$ in die exponentielle Form.

$$2^{1+\frac{\pi}{2}i}=2^{1}\cdot 2^{\frac{\pi}{2}i}=2\cdot\left(e^{\ln(2)}\right)^{\frac{\pi}{2}i}=2\cdot e^{\ln(2)\cdot\frac{\pi}{2}i}=2\cdot e^{i\cdot\ln(2)\cdot\frac{\pi}{2}}$$

Siehe 2.2.2., P1, S 73

$2=e^{\ln(2)}$
Siehe 7.6, S 367 f

Siehe 2.2.2. P5, S 78

Übung

1) Ermitteln Sie Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen:

(1) $e^{2+i\frac{\pi}{3}}$ (2) $e^{i\frac{\pi}{4}}$ (3) $1^{i\cdot\frac{\pi}{2}}$

2) Ermitteln Sie die Exponentialform folgender komplexer Zahlen: (1) $z = 4 + 3i$ (2) $z = -1 - i$

3) (1) Ermitteln Sie die konjugiert komplexe Zahl z^* von $z = 2^{i\frac{\pi}{2}}$

(2) Bestimmen Sie das Produkt $z \cdot z^*$

4) Berechnen Sie $e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} \cdot e^{i\pi} \cdot e^{i\frac{4\pi}{3}} \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$

5) Berechnen Sie die Normalform (kartesische Form) von $\overline{\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}}$ also von der konjugiert komplexen Zahl.

6) Ermitteln Sie $\left(\frac{-3-\sqrt{3}\,i}{\sqrt{3}\,i} \cdot \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^6$

Lösungen:

1) (1) Re(z) = $\frac{e^2}{2}$ Im(z) = $\frac{e^2\cdot\sqrt{3}}{2}$ (2) Re(z) = Im(z) = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) Ansatz: $1^{i\frac{\pi}{2}} = \left(e^{\ln(1)}\right)^{i\frac{\pi}{2}} = e^{\ln(1)\cdot i\frac{\pi}{2}} = e^{0\cdot i\frac{\pi}{2}} \ldots \quad \rightarrow \quad z = 1$

$e^{\ln(x)} = x, \ln(1) = 0$ (Siehe 7.6, S 367 f)

2) (1) $z = 5 \cdot e^{i\,0{,}2\,\pi}$ (2) $z = \sqrt{2} \cdot e^{i\,0{,}75\,\pi}$

3) 1) $z^* = 0{,}46 - i \cdot 0{,}89$ (2) $-0{,}58$

4) $e^{i\,4\pi}$ 5) $-1 + i$ 6) $e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i$

Ist $\boldsymbol{i}$ **positiv oder negativ**?

In $\mathbb{R}$ ist eine von Null verschiedene Zahl entweder positiv oder negativ.

Wie sieht das mit der imaginären Einheit i aus?

i ist sicherlich nicht Null, denn $0^2 = 0$ und $i^2 = -1$.

Demnach müsste doch $i > 0$ oder $i < 0$ gelten.

Angenommen es gelte $i > 0$:

$i > 0 \;|\cdot i$

$i \cdot i > 0 \cdot i$

$i^2 > 0 \cdot i$

Da wir hier $i > 0$ annehmen, muss das Ungleichheitszeichen nicht verändert werden (siehe 3.4.1., S 165 f).

$-1 > 0$ ist aber ein Widerspruch zum Rechnen in $\mathbb{R}$

Angenommen es gelte $i < 0$:

$i < 0 \;|\cdot i$

$i \cdot i > 0 \cdot i$

$i^2 > 0 \cdot i$

Da wir hier $i < 0$ annehmen, muss das Ungleichheitszeichen verändert werden (siehe 3.4.1., S 165 f).

$-1 > 0$ ist aber ein Widerspruch zum Rechnen in $\mathbb{R}$

Die Zahl $\boldsymbol{i}$ ist also **weder positiv noch negativ**.

1.3.3.3. Radizieren in Exponentialform

$z = r \cdot e^{i \cdot \varphi} = r \cdot e^{i \cdot (\varphi + 2\pi \cdot k)}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ Alle $\pm 360° = \pm 2\pi$ gelangen wir zum gleichen Winkel.

Siehe auch S 31

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r \cdot e^{i \cdot (\varphi + 2\pi \cdot k)}} = \left(r \cdot e^{i \cdot (\varphi + 2\pi \cdot k)}\right)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \cdot \left(e^{i \cdot (\varphi + 2\pi \cdot k)}\right)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i \cdot \frac{1}{n} \cdot (\varphi + 2\pi \cdot k)} = r^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot k\right)}$$

für $k = 0, 1, 2, \ . \ . \ ., n - 1$

Mit $r^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r^1} = \sqrt[n]{r}$ gilt:

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r \cdot e^{i \cdot (\varphi + 2\pi \cdot k)}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot k\right)} \quad k = 0, 1, 2, \ . \ . \ ., n - 1}$$

Beispiel: $z = \left(2; \frac{\pi}{2}\right)$ Gesucht: $\sqrt[3]{z}$

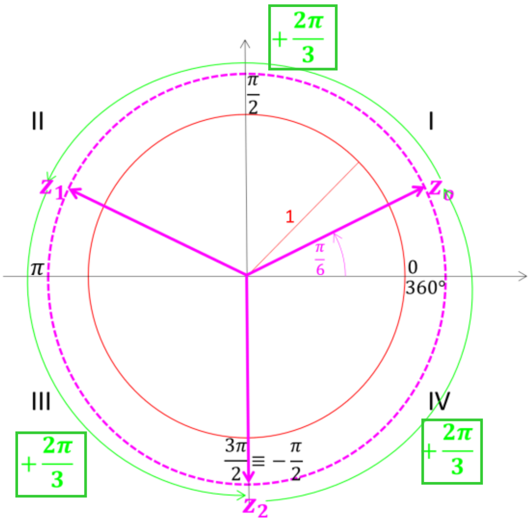
$z_0 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\frac{\pi}{2}}{3} + \boxed{\frac{2\pi}{3}} \cdot 0\right)} = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right)}$ … Hauptwert

Nebenwerte

$z_1 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\frac{\pi}{2}}{3} + \boxed{\frac{2\pi}{3}} \cdot 1\right)} = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i \cdot \frac{5\pi}{6}}$

$z_2 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\frac{\pi}{2}}{3} + \boxed{\frac{2\pi}{3}} \cdot 2\right)} = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right)} = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i \cdot \frac{3\pi}{2}}$

$z_3 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\frac{\pi}{2}}{3} + \boxed{\frac{2\pi}{3}} \cdot 3\right)} = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right)} = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right)} = z_0$



Der Graph zeigt: Die Lösungen der Wurzeln „teilen" sich den (Einheits-) Kreis **gleichmäßig** auf.

Beispiel: $\sqrt[4]{\frac{2\,i}{1-i} - e^{\ln(i)}} = \sqrt[4]{-1+i-i} = \sqrt[4]{-1}$

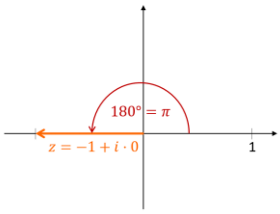
$$\frac{2\,i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{2\,i\cdot(1+i)}{(1-i)\cdot(1+i)} = \frac{2i+2\,i^2}{1+i-i-i^2} = \frac{2i+2\cdot(-1)}{1-(-1)} = \frac{2i-2}{1+1} = \frac{-2+2i}{2} = \frac{2\cdot(-1+i)}{2} = -1+i$$

(siehe 1.3.1.5., S 21)

$e^{\ln(i)} = i$ (siehe 7.6, S 367 f)

$$z = -1+0i = 1\cdot(\cos(\pi) + i\cdot\sin(\pi)) = 1\cdot e^{\pi}$$

$r = \sqrt{(-1)^2+0} = \sqrt{1} = 1 \qquad \varphi = \pi$



$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{1\cdot e^{\pi}} = \sqrt[4]{1}\cdot e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}\cdot 0\right)} = 1\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}} = z_0$$

$$= \sqrt[4]{1}\cdot e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}\cdot 1\right)} = 1\cdot e^{i\cdot\frac{3\pi}{4}} = z_1$$

$$= \sqrt[4]{1}\cdot e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}\cdot 2\right)} = 1\cdot e^{i\cdot\frac{5\pi}{4}} = z_2$$

$$= \sqrt[4]{1}\cdot e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}\cdot 3\right)} = 1\cdot e^{i\cdot\frac{7\pi}{4}} = z_3$$

Übung

1) $z = \sqrt{1+i\cdot\sqrt{3}}$ 2) $\sqrt[3]{8\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}}$ 3) $\sqrt[3]{1+i}$ 4) $\sqrt[4]{-1}$

5) $\sqrt[4]{e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}}$ 6) $\sqrt{(-1+j)^3}$

7) Verwandeln Sie folgende Zahlen in die kartesische Form:

a) $5\cdot e^{-3i^2}$ b) $2^{i\cdot\frac{\pi}{2}}$ c) 2^{3+4i} d) $2\cdot e^{3i-5+2i^2-5i^3+i^4-9i^{121}}$

8) Verwandeln Sie folgende Zahlen in die Exponentialform:

a) -22 b) $-6i$

9) $i^2\,\frac{1+i}{3-4i}\left(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^4$

10) Lösen Sie die Gleichung $1^x = -1$

Lösungen:

1) $z_0 = \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}}$ $\quad z_1 = \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \frac{7\pi}{6}}$

2) $z_0 = \sqrt[3]{8} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}}$ $\quad z_1 = \sqrt[3]{8} \cdot e^{i \cdot \frac{5\pi}{6}}$ $\quad z_2 = \sqrt[3]{8} \cdot e^{i \cdot \frac{3\pi}{2}}$

3) $z_0 = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{12}}$ $\quad z_1 = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \cdot \frac{3\pi}{4}}$ $\quad z_2 = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \cdot \frac{17\pi}{12}}$

4) $z_0 = 1 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}$ $\quad z_1 = e^{i \cdot \frac{3\pi}{4}}$ $\quad z_2 = e^{i \cdot \frac{5\pi}{4}}$ $\quad z_3 = e^{i \cdot \frac{7\pi}{4}}$

5) $z_0 = e^{i \cdot \frac{\pi}{12}}$ $\quad z_1 = e^{i \cdot \frac{\pi}{12}}$ $\quad z_2 = e^{i \cdot \frac{7\pi}{12}}$ $\quad z_3 = e^{i \cdot \frac{5\pi}{3}}$

6) $z_0 = \sqrt{8} \cdot e^{i \cdot \frac{9\pi}{8}}$ $\quad z_1 = \sqrt{8} \cdot e^{i \cdot \frac{17\pi}{8}} = \sqrt{8} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{8}}$ (graphisch darstellen!)

7) $a)\ 5 \cdot e^3 \approx 100.4$ $\quad b)\ 0.46 + 0.89\, i$ $\quad c)\ -7.46 + 2.89\, i$

$d)\ 0.003 - 0.004\, i$

8) $a)\ 22 \cdot e^{i\,\pi}$ $\quad b)\ 6 \cdot e^{i \cdot \frac{3\pi}{2}}$

9) $-\dfrac{4}{25} + \dfrac{28}{25} i$

10) In $\mathbb{R}$ besitzt diese Gleichung keine Lösung, weil 1 hoch jede reelle Zahl 1 und nicht –1 ergibt.

Anders in $\mathbb{C}$: Zunächst ist $x = i \cdot \pi$ eine Lösung, weil $1^{i \cdot \pi} = \underbrace{\cos(\pi)}_{-1} + i \cdot \underbrace{\sin(\pi)}_{0}$

Da die Winkelfunktionen periodisch sind und sich ihre Funktionswerte alle $360° = 2\pi$ wiederholen (siehe 7.7.3., S 376 f), gilt

$\boldsymbol{x} = \pi + n \cdot 2\pi = \boldsymbol{\pi} \cdot (\mathbf{1} + \mathbf{2}\boldsymbol{n})$ mit $n \in \mathbb{N}$

Kann ich's?

1) Es sei $z = 4 - 2i$ und $w = 2i$ $\qquad$ Berechnen Sie $\left|\frac{w}{z}\right|$

2) Ermitteln Sie das Ergebnis von $\left(-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{i}{4}\right)^3 \cdot \frac{4+4\sqrt{3}i}{2i}$

3) Mit welcher komplexen Zahl z muss eine beliebige komplexe Zahl w = s·e $^{i\psi}$ multipliziert werden, damit der Zeiger von w um 45° gedreht und seine Länge um den Faktor $\sqrt{2}$ gestreckt wird?
Geben Sie das Ergebnis auch in kartesischer Form an.

Lösungen: 1) $\sqrt{5}$ $\quad$ 2) $\frac{1}{2}\, e^{i\,\frac{4\pi}{3}}$ $\quad$ 3) $\sqrt{2}\, e^{i\,\frac{\pi}{4}} = 1 + i$

Aufgaben aus: https://n.ethz.ch/~hkrizic/more/komplzahlzusatz.pdf

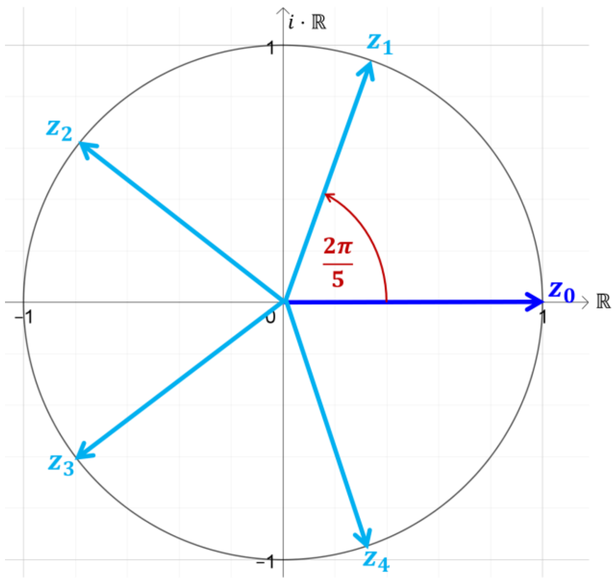
1.3.3.4. Einheitswurzeln

Einheitswurzeln stellen ein wichtiges Hilfsmittel bei der *Diskreten Fourier-Transformation* [9] dar, die wiederum bei der digitalen Signalverarbeitung von Bedeutung ist.

Von Einheitswurzeln spricht man bei den Lösungen von Gleichungen der Form $z^n = 1$ mit $z \in \mathbb{C}$.

Einheitswurzeln deshalb, weil die Beträge der Lösungen 1 sind.

Beispiel: $z^5 = 1$



Die erste Lösung (Wurzel) wird wohl 1 sein, denn $1^5 = 1$.

$1 = 1 + 0\,i$ Damit ist $r = 1$ und $\varphi = 0$.

Alle anderen Wurzeln verfügen auch über den Betrag 1 und ihre Argumente (Winkel) teilen sich den (Voll-) Kreis regelmäßig auf:

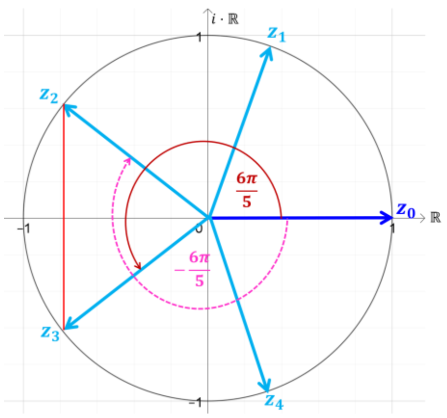
$$\frac{2\pi}{5}$$

Damit lauten die Einheitswurzeln der Gleichung $z^5 = 1$

$z_k = 1 .\, e^{i \cdot \frac{2\,k\,\pi}{5}}$ mit $k = 0, 1, 2, 3, 4$

Weiters gilt bei Einheitswurzeln: $z_k^{invers} = \frac{1}{z_k} = z_k^*$

Beispiel: $z_3^{invers} = \frac{1}{z_3} = \frac{1}{e^{i \cdot \frac{6\pi}{5}}} = e^{-i \cdot \frac{6\pi}{5}} = e^{i \cdot \left(-\frac{6\pi}{5}\right)} = z_2$ Siehe auch 1.3.1.5., S 21 f



Konjugiert komplexe Zahl siehe 1.3.1.5., S 21

[9] https://de.wikipedia.org/wiki/Diskrete_Fourier-Transformation

1.3.3.5. Logarithmieren

$z = r \cdot e^{i \cdot (\varphi + 2\pi \cdot k)} \quad | \ \ln$ (siehe 1.3.3.3., S 40)

$\ln(z) = \ln\left(r \cdot e^{i \cdot (\varphi + 2\pi \cdot k)}\right)$

$\ln(z) = \ln(r) + \ln\left(e^{i \cdot (\varphi + 2\pi \cdot k)}\right)$ ①

$\ln(z) = \ln(r) + i \cdot (\varphi + 2\pi \cdot k) \cdot \ln(e)$ ②

$\boxed{\ln(z) = \ln(r) + i \cdot (\varphi + 2\pi \cdot k)}$ ③

Einige Rechenregeln für Logarithmen:

① $\log_m(a \cdot b) = \log_m(a) + \log_m(b)$

② $\log_m(a^n) = n \cdot \log_m(a)$

③ $\ln(e) = \log_e(e) = 1$

Beispiel: $\ln(1+i) = \ln(\sqrt{2}) + i \cdot \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot k\right)$ mit $k \in \mathbb{Z}$

$r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \quad \arctan(1) = 45° = \frac{\pi}{4}$

Bei $k = 0$ spricht man vom **Hauptwert**: $\ln(1+i) = \ln(\sqrt{2}) + i \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)$

$k = 1: \quad \ln(\sqrt{2}) + i \cdot \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot 1\right) = \ln(2) + i \cdot \frac{9\pi}{4}$

$k = 2: \quad \ln(\sqrt{2}) + i \cdot \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot 2\right) = \ln(2) + i \cdot \frac{17\pi}{4}$

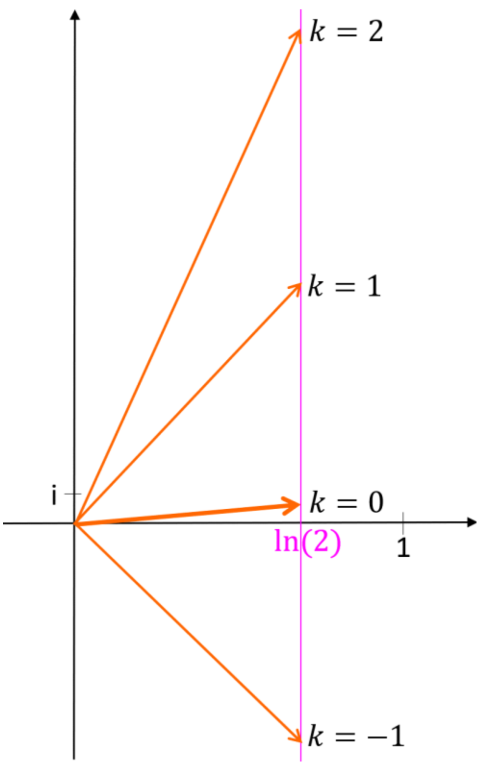
$k = 3: \quad \ln(\sqrt{2}) + i \cdot \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot 3\right) = \ln(2) + i \cdot \frac{25\pi}{4}$

. . . . .

$k = -1: \quad \ln(\sqrt{2}) + i \cdot \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot (-1)\right) = \ln(2) - i \cdot \frac{7\pi}{4}$

$k = -2: \quad \ln(\sqrt{2}) + i \cdot \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot (-2)\right) = \ln(2) - i \cdot \frac{15\pi}{4}$

. . . . .



Beim Logarithmieren komplexer Zahlen entstehen unendlich viele Nebenwerte.

Beispiel: $z = -25$ Der Logarithmus aus einer negativen (reellen) Zahl ergibt **keinen** Wert. (Siehe 7.6., S 367 f)

Aber: $z = -25 = 25 \cdot e^{i\pi}$ weil $e^{i\pi} = \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + i \cdot \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} = -1$

$$\ln(z) = \ln(25) + i \cdot (\pi + 2\pi \cdot k) = \ln(25) + i \cdot \pi \cdot (1 + 2 \cdot k)$$

Für Logarithmen anderer Basen (als e) gilt: $\log_a(z) = \frac{\ln(z)}{\ln(a)} = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \ln(z)$

Beispiel: $\log_4\left(3e^{\frac{\pi}{2}i}\right)$

$$\mathrm{Log}_4\left(3e^{\frac{\pi}{2}i}\right) = \frac{1}{\ln(4)} \cdot \ln\left(3e^{\frac{\pi}{2}i}\right) = \frac{1}{\ln(4)} \cdot \left[\ln(3) + i \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\ln(4)} \cdot \left[\ln(3) + i \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2} + 2k\right)\right]$$

$$3e^{\frac{\pi}{2}i} = 3 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = 3\,i$$

$r = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3 \quad \arctan\left(\frac{3}{0}\right) \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$ (graphisch darstellen!)

Zusammenfassend

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Kartesische Form: $x + i \cdot y$ $\quad$ **Polarform**: $r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$ $\longrightarrow$ **Exponentialform**: $r \cdot e^{i \cdot \varphi}$

$$x = r \cdot \cos(\varphi) \qquad y = r \cdot \sin(\varphi)$$

	Strichrechnung	Punktrechnung	Hochrechnung
Kartesische Form	✓	✓	✗
Polarform	✗	✓	✓
Exponentialform	✗	✓	✓

Übung Ermitteln Sie 1) $\ln(1 + i\sqrt{3})$ 2) $\log_{10}(i)$ 3) $\log_2(2)$ 4) $\ln(8e^{i\pi/2})$ 5) $\ln(-1 + i)$

Lösungen:

1) $\ln(2) + i \cdot \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k\right)$ mit $k \in \mathbb{Z}$

2) $\frac{1}{\ln(10)} \cdot \left[\ln(1) + i \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k\right)\right] = \frac{1}{\ln(10)} \cdot \left[0 + i \cdot \pi\left(\frac{1}{2} + 2 \cdot k\right)\right] = \frac{1}{\ln(10)} \cdot \left[i \cdot \pi\left(\frac{1}{2} + 2 \cdot k\right)\right]$ mit $k \in \mathbb{Z}$

3) $\frac{1}{\ln(10)} \cdot [\ln(2) + i \cdot (0 + 2\pi \cdot k)] = \frac{1}{\ln(10)} \cdot [\ln(2) + i \cdot 2\pi \cdot k]$ mit $k \in \mathbb{Z}$

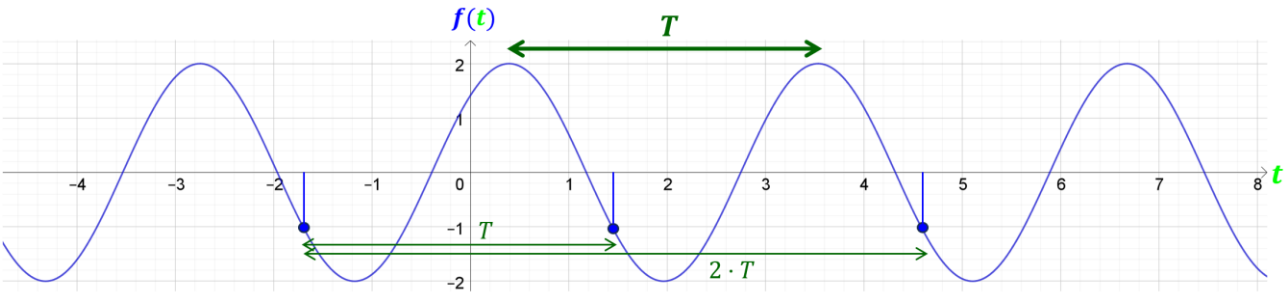
4) $\ln(8) + i \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2} + 2k\right)$ mit $k \in \mathbb{Z}$

5) $\ln(\sqrt{2}) + i \cdot \pi \cdot \left(\frac{3}{4} + 2k\right)$ mit $k \in \mathbb{Z}$

1.3.4. Überlagerung harmonischer Schwingungen

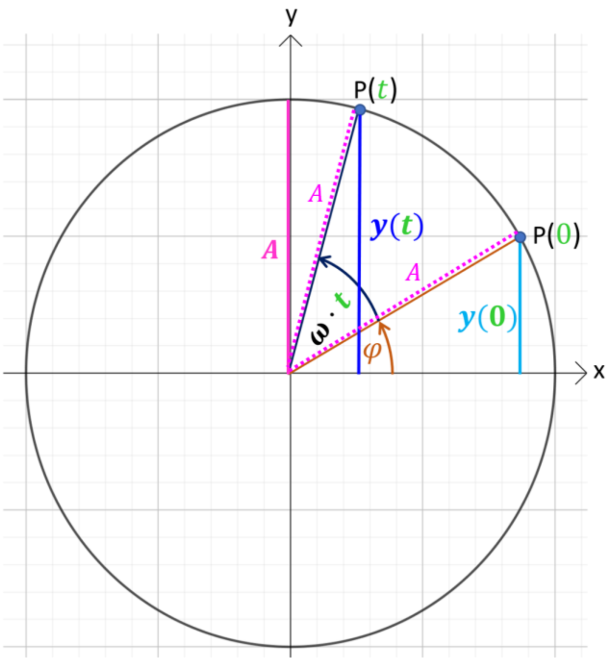
Die **Überlagerung** wird auch **Superposition** genannt.

Für **jede periodische Schwingung** gilt:



$$\boxed{f(t) = f(t + k \cdot T)}$$ $k \in \mathbb{Z}$, T ... **Periode**

Harmonische Schwingung:



Eine harmonische Schwingung entsteht, wenn man den Abstand (die Auslenkung eines entlang der Kreislinie bewegenden Punktes von der waagrechten Achse beschreiben möchte.
Zu Beginn der Bewegung ($t = 0$) besitzt der Punkt P(0) den Abstand $y(0)$ von der waagrechten Achse. Dieser Abstand lässt sich mit dem Sinus (sin) berechnen.

$$sin(\varphi) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

Bezogen auf $y(0)$: $\sin(\varphi) = \frac{y(0)}{A} \quad | \cdot A$

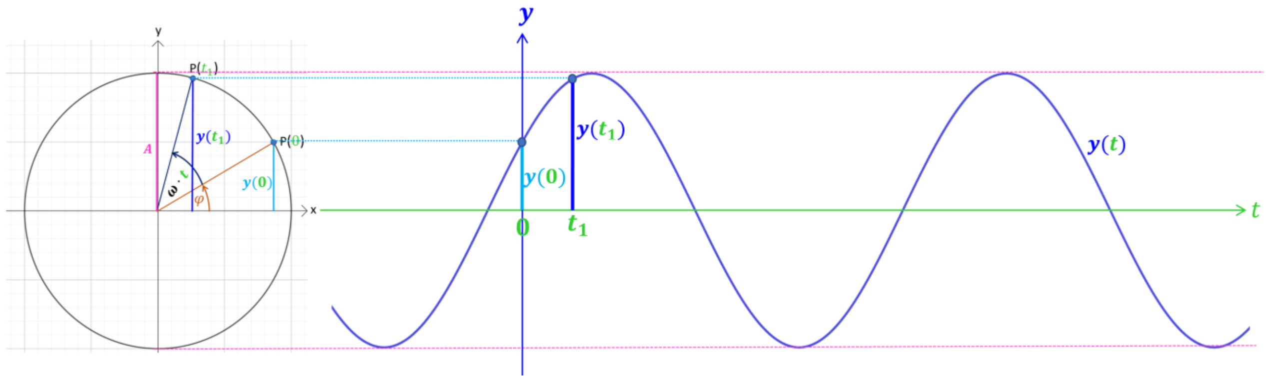
$$A \cdot \sin(\varphi) = y(0)$$

Nach der Zeitdauer t besitzt der Punkt P(t) den Abstand (die Auslenkung) $y(t)$ von der waagrechten Achse.

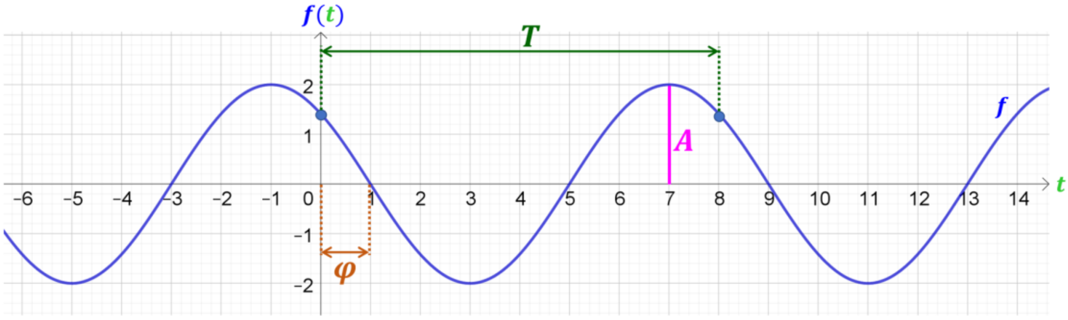
$$\sin(\varphi + \omega \cdot t) = \frac{y(t)}{A} \quad | \cdot A$$

$$A \cdot \sin(\varphi + \omega \cdot t) = y(t)$$

In zeitlicher Abhängigkeit beschreibt die Auslenkung $y(t)$ demnach eine Sinus-Funktion:



Mit $y(t) = f(t)$ gilt:



A ... Amplitude

T ... Periode (Schwingungsdauer)

φ ... Phase (Nullphasenwinkel)

ω ... Winkelgeschwindigkeit (Kreisfrequenz) $\quad \omega = 2\,\pi\,f$

f ... Frequenz $\quad f = \frac{1}{T}$

$\Phi = \frac{\varphi}{\omega}$ ... Phasenverschiebung

Harmonische Schwingung:

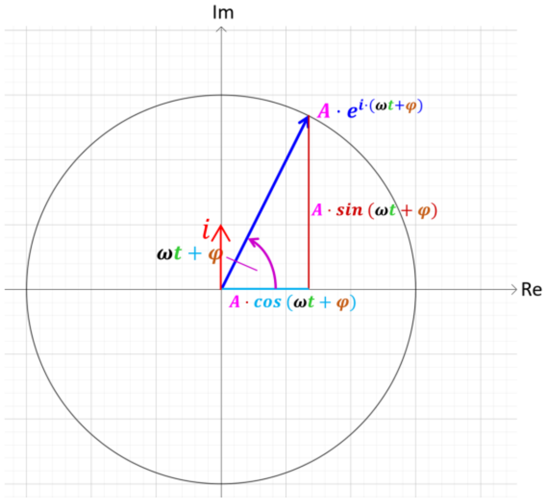
$$f(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

Warum möchte man Winkelfunktionen in komplexer Schreibweise anführen?

Weil bei Überlagerung von Schwingungen und damit der Addition von Winkelfunktionen diese in der Exponentialform wesentlich leichter zu berechnen sind.

Harmonische Schwingungen lassen sich mit Hilfe der Eulerschen Formel in eine **komplexe Funktionsgleichung** umformen, die am Ende wieder in eine reelle Funktion umgewandelt wird.

$$\boxed{\cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi) = e^{i\,\varphi}}$$



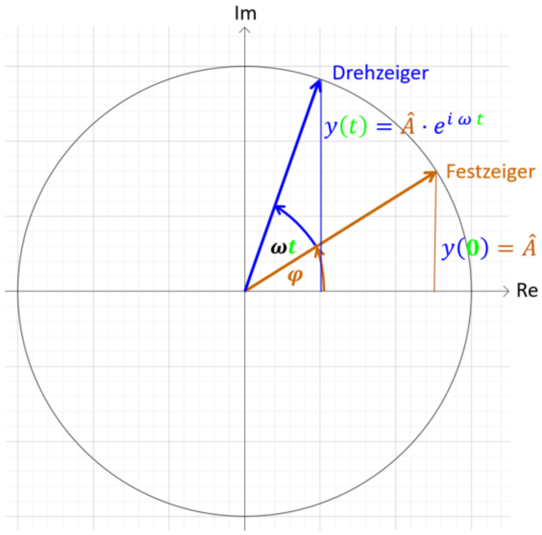
Dabei wird die Auslenkung durch den (hier blau gezeichneten) **Pfeil** dargestellt, wie bei komplexen Zahlen üblich.

Es gilt:

$$A \cdot cos\,(\omega t+\varphi) + i \cdot A \cdot sin(\omega t+\varphi) = A \cdot e^{i\cdot(\omega t+\varphi)}$$

$$A \cdot e^{i\cdot(\omega t+\varphi)} = A \cdot e^{i\cdot\omega t} \cdot e^{i\varphi} = \boldsymbol{A \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{i\cdot\omega t}}$$

2.2.2., P 1, S 73



$$\underbrace{\underbrace{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e^{i\varphi}}}_{\text{Festzeiger}} \cdot \boldsymbol{e^{i\cdot\omega t}}}_{\text{Drehzeiger}}$$

Festzeiger: komplexe Amplitude $\widehat{A} = \boldsymbol{A \cdot e^{i\varphi}} \cdot \underbrace{\boldsymbol{e^{i\cdot\omega\cdot 0}}}_{=1}$

… zeit**un**abhängig

Drehzeiger: $\boldsymbol{A \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{i\cdot\omega t} = \widehat{A} \cdot e^{i\,\omega\,t}}$

… zeit**ab**hängig

$$\boxed{\boldsymbol{f(t)} = A \cdot e^{i\cdot(\omega t+\varphi)} = \boldsymbol{A \cdot \big(cos\,(\omega t+\varphi) + i \cdot sin(\omega t+\varphi)\big) = A \cdot e^{i\cdot\varphi} \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t} = \widehat{A} \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}}}$$

Beispiel:

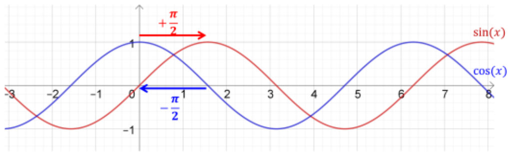
Gegeben sind die beiden gleichfrequenten Schwingungsfunktion $f_1(t) = 4 \cdot \sin(2t)$ und $f_2(t) = 3 \cdot \cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)$.
Gesucht ist die Überlagerung der beiden Schwingungen.

Die Überlagerung harmonischer Schwingungen ergibt nur dann wieder eine harmonische Schwingung, wenn die Kreisfrequenzen und die Schwingungsrichtung gleich sind!

① Wir stellen alle Schwingungen mit der gleichen Winkelfunktion (sin) dar:

$$f_2(t) = 3 \cdot \cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) = 3 \cdot \sin\left(2t - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cdot \sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$\cos x = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$



$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ $\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

Siehe auch 7.7., S 371 f

Wir könnten auch den Sinus durch den Cosinus darstellen.

② Darstellung in komplexer Exponentialform:

$$f_1(t) = 4 \cdot \sin(2t) \rightarrow \hat{f}_1(t) = 4 \cdot e^{i \cdot 2t}$$

$$f_2(t) = 3 \cdot \sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) \rightarrow \hat{f}_2(t) = 3 \cdot e^{i \cdot \left(2t + \frac{\pi}{6}\right)} = 3 \cdot e^{i \cdot 2t + i \cdot \frac{\pi}{6}} = 3 \cdot e^{i \cdot 2t} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}}$$

Potenzregel P1, 2.2.2., S 73

③ Addition der beiden Schwingungen in exponentieller Form:

$$\hat{f}_1(t) + \hat{f}_2(t) = 4 \cdot e^{i \cdot 2t} + 3 \cdot e^{i \cdot 2t} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}} = e^{i \cdot 2t} \cdot \left(4 + 3 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}}\right) = \left(4 + 3 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}}\right) \cdot e^{i \cdot 2t}$$

Herausheben des gemeinsamen Faktors

③ a) Addition der komplexen Amplituden:

$$4 + 3 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}} = 4 + 3 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 4 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} + i \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1}\right) = 4 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} + i \cdot \frac{1}{2}\right) =$$

α	0° bzw. 0	30° bzw. $\frac{\pi}{6}$	45° bzw. $\frac{\pi}{4}$	60° bzw. $\frac{\pi}{3}$	90° bzw. $\frac{\pi}{2}$
$\sin(\alpha)$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{0}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{4}$
$\cos(\alpha)$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{4}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{0}$

$$= 4 + \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} + i \cdot \frac{3}{2} = 6.60 + i \cdot 1.5 = x + i \cdot y$$

③ b) Komplexe Amplitude in Exponentialform:

$$A = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{6.60^2 + 1.5^2} \approx 6.77$$

$$\tan\varphi = \frac{y}{x} = \frac{1.5}{6.60} \rightarrow \varphi = arctan\left(\frac{1.5}{6.60}\right) = 0.22 = 0.07\,\pi$$

$: \pi$

$$\boxed{\hat{f}(t) = 6.77 \cdot e^{i\cdot 0{,}07\pi} \cdot e^{i\cdot 2t}} = 6.77 \cdot e^{i\cdot 0.07\pi + i\cdot 2t} = 6.77 \cdot e^{i\cdot(0.07\pi+2t)} = 6.77 \cdot e^{i\cdot(2\,t+0.07\,\pi)}$$

Potenzregel P1: 2.2.2., S 73

$$\boxed{A \cdot e^{i\cdot(\omega t+\varphi)} = A \cdot (\cos(\omega t + \varphi) + i \cdot \sin(\omega t + \varphi)) = \boxed{A \cdot e^{i\cdot\varphi} \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}}}$$

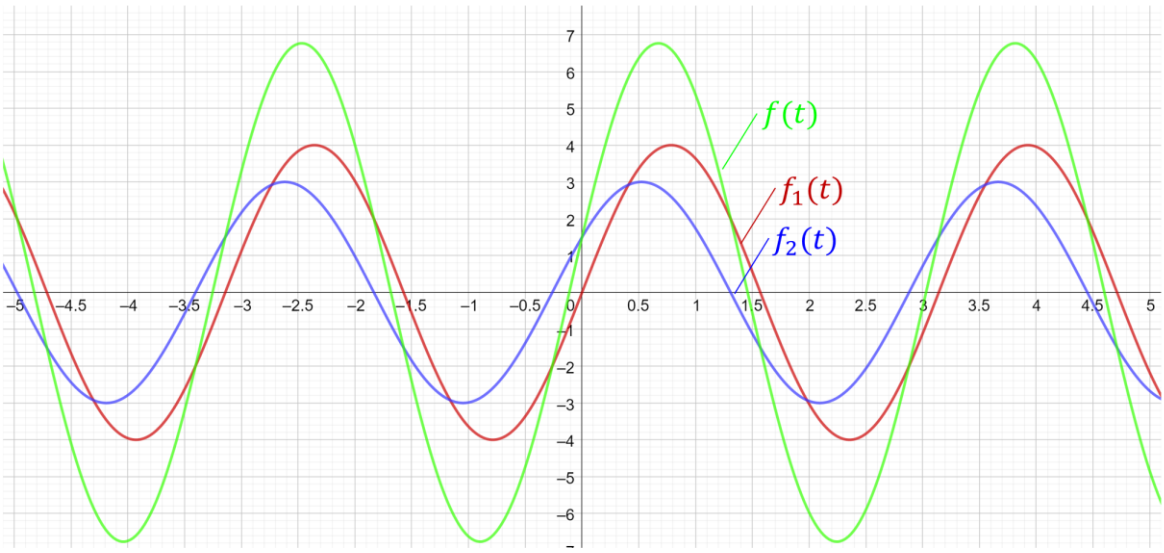
④ Übertragung ins Reelle: $\hat{f}(t) = 6.77 \cdot e^{i\cdot(2\,t+0.07\,\pi)} \rightarrow f(t) = Im\,\hat{f}(t) = 6.77 \cdot \sin(2t + 0.07\pi)$

$$\boxed{f(t) = 6.77 \cdot \sin(2t + 0.07\pi)}$$

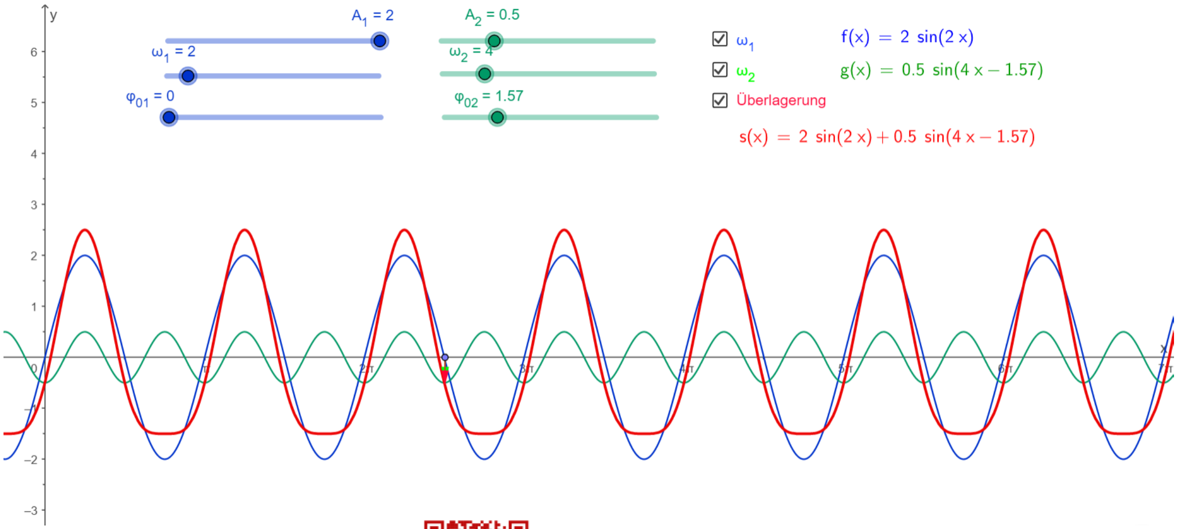
ω

Phase

Amplitude



Beispiel:



https://www.geogebra.org/m/XGzbhMmn

Warum ergänzt man eine reelle Schwingung noch mit einem Imaginärteil?

Weil sich in der Exponentialform die Überlagerung wesentlich einfacher berechnen lässt als in reeller Darstellungsweise. Am Ende bleibt der Imaginärteil unberücksichtigt.

Warum kann man mit sin rechnen, wenn sin Bestandteil des Imaginärteils ist und die Schwingung zunächst als reelle Funktion gegeben ist?

Man kann auch mit cos rechnen und erhält das gleiche Resultat:

$$f_1(t) = 4 \cdot \sin(2t) = 4 \cdot \cos\left(2t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ und } f_2(t) = 3 \cdot \cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\hat{f}_1(t) = 4 \cdot e^{i \cdot \left(2t - \frac{\pi}{2}\right)} \qquad \hat{f}_2(t) = 3 \cdot e^{i \cdot \left(2t - \frac{\pi}{3}\right)}$$

$$\hat{f}_1(t) + \hat{f}_2(t) = 4 \cdot e^{i \cdot \left(2t - \frac{\pi}{2}\right)} + 3 \cdot e^{i \cdot \left(2t - \frac{\pi}{3}\right)} = 4 \cdot e^{i \cdot 2t} \cdot e^{i \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right)} + 3 \cdot e^{i \cdot 2t} \cdot e^{i \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right)} =$$

$$= e^{i \cdot 2t} \cdot \left[4 \cdot e^{i \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right)} + 3 \cdot e^{i \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right)}\right]$$

$$4 \cdot e^{i \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right)} + 3 \cdot e^{i \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right)} = 4 \cdot \left[\underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + i \cdot \underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{=-1}\right] + 3 \cdot \left[\underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)}_{=\frac{1}{2}} + i \cdot \underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}_{=-\frac{1}{2}\sqrt{3}}\right] =$$

α	0° bzw. 0	30° bzw. $\frac{\pi}{6}$	45° bzw. $\frac{\pi}{4}$	60° bzw. $\frac{\pi}{3}$	90° bzw. $\frac{\pi}{2}$
$\sin(\alpha)$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4}$
$\cos(\alpha)$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{0}$

$$= 4 \cdot (-i) + 3 \cdot \left[\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\,\sqrt{3}\,i\right] = -4\,i + \tfrac{3}{2} - \tfrac{3}{2}\,\sqrt{3}\,i = 1.5 - 6.60\,i$$

$$A = r = \sqrt{1.5^2 + (-6.6)^2} = \sqrt{2.25 + 30.25} = \sqrt{45.81} = 6.77$$

$$\tan\varphi = \frac{y}{x} = \frac{1.5}{6.60} \rightarrow \ \varphi = arctan\left(\frac{1.5}{6.60}\right) = 0.22 = 0.07\,\pi$$

$$\hat{f}(t) = 6.77 \cdot e^{i\cdot 0{,}07\pi} \cdot e^{i\cdot 2t} = 6.77 \cdot e^{i\cdot 0.07\pi + i\cdot 2t} = 6.77 \cdot e^{i\cdot(0.07\pi + 2t)} = 6.77 \cdot e^{i\cdot(2\,t + 0.07\,\pi)}$$

$$\boldsymbol{f(t) = 6.77 \cdot \sin\,(2t + 0.07\pi)}$$

Man könnte auch mit vorgegebenen Formeln rechnen:

$$f_1(t) = A_1 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_1) \qquad f_2(t) = A_2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_2)$$

$$\boxed{\begin{gathered} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \\[1em] \varphi = arctan\left(\frac{A_1 \cdot \sin(\varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\varphi_2)}{A_1 \cdot \cos(\varphi_1) + A_2 \cdot \cos(\varphi_2)}\right) \end{gathered}}$$

Bemerkung: Die oberen Formeln gelten **auch** dann, wenn beide Schwingungen durch cos ausgedrückt sind.

Auf unser letztes **Beispiel** bezogen: $f_1(t) = 4 \cdot \sin(2t) \qquad f_2(t) = 3 \cdot \cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) = 3 \cdot \sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$

$$A = \sqrt{4^2 + 3^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos\left(\tfrac{\pi}{6} - 0\right)} = 6.77$$

$$\varphi = arctan\left(\frac{4 \cdot \sin(0) + 3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{A_1 \cdot \cos(0) + A_2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right) = 0.22 = 0.07\,\pi$$

Beide gleichfrequenten Schwingungen müssen beide durch den sin oder beide durch den cos ausgedrückt sein!

Beispiel: Zeigen Sie, dass $3 \cdot cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) + 2 \cdot cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) = A \cdot cos(\omega t + \varphi)$
mit $A \approx 4{,}96$ und $\varphi \approx \frac{\pi}{5}$ ist.

① Schon gegeben

② und ③ $3 \cdot e^{i \cdot \left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)} + 2 \cdot e^{i \cdot \left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)} = 3 \cdot e^{i \cdot \omega t} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}} + 2 \cdot e^{i \cdot \omega t} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}} = e^{i \cdot \omega t} \cdot \left(3 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}} + 2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}\right)$

④ $3 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}} + 2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}} = 3 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) + 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) =$

$$= 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} + i \cdot \frac{1}{2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} + i \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} + i \cdot \frac{3}{2} + \sqrt{2} + i \cdot \sqrt{2} =$$

α	0° bzw. 0	30° bzw. $\frac{\pi}{6}$	45° bzw. $\frac{\pi}{4}$	60° bzw. $\frac{\pi}{3}$	90° bzw. $\frac{\pi}{2}$
$\sin(\alpha)$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{0}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{4}$
$\cos(\alpha)$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{4}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{0}$

$$= 2.60 + i \cdot 1.5 + 1.41 + i \cdot 1.41 = 4.01 + i \cdot 2.91 = x + i \cdot y$$

⑤ $A = r = \sqrt{4.01^2 + 2.91^2} = 4{,}96$ $\qquad arctan(\varphi) = \frac{2.91}{4.01} \rightarrow \varphi = 35.97° = 0.20\,\pi = \frac{\pi}{5}$

$$\hat{f}(t) = 4.96 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{5}} \cdot e^{i \cdot \omega t} = e^{i \cdot \frac{\pi}{5} + i \cdot \omega t} = e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{5} + \omega t\right)} = e^{i \cdot \left(\omega t + \frac{\pi}{5}\right)}$$

⑥ $f(t) = 4.96 \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{5}\right)$

Bemerkung: sin und cos haben die gleiche Form, nur phasenverschoben.
Wählten wir den sin, erhielten wir eine andere Phase.

Beispiel: 1) Geben Sie eine Sinus-Schwingung mit $A = 2,\ \varphi = \frac{\pi}{2}$ und $T = \frac{1}{2}\,\pi$ an.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{\frac{1}{2\,\pi}} = \frac{2}{\pi} \rightarrow \ \omega = 2\,\pi\,f = 2\,\pi\,\frac{2}{\pi} = 4 \ \rightarrow \ f(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = 2 \cdot \sin\left(4 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Beispiel: 1) Bestimmen Sie Amplitude, Frequenz und Phase der folgenden Schwingung: $f(t) = e^{i7\pi t-\pi}$.

$$f(t) = e^{i7\pi t-\pi} = \frac{e^{i7\pi t}}{e^{\pi}} = \frac{1}{e^{\pi}} \cdot e^{i7\pi t} = \frac{1}{e^{\pi}} \cdot e^{i7\pi t + i\cdot 0} = \frac{1}{e^{\pi}} \cdot e^{i\cdot 0} \cdot e^{i7\pi t}$$

Siehe 2.2.2., P1, S 73

$$f(t) = A \cdot e^{i\,\varphi} \cdot e^{i\,\omega\, t}$$

$$\rightarrow\ A = \frac{1}{e^{\pi}} \cdot 1 = \frac{1}{e^{\pi}} \qquad \varphi = 0 \qquad \omega = 7\pi$$

$e^{i\cdot 0} = e^0 = 1$

Beispiel: Bestimmen Sie Amplitude, Frequenz und Phase der folgenden Schwingung:

$f(t) = e^{i\pi(t+1)-3t-1}$.

$$f(t) = e^{i\pi(t+1)-3t-1} = f(t) = e^{i\pi(t+1)-(3t+1)} = \frac{e^{i\pi(t+1)}}{e^{(3t+1)}} = \frac{1}{e^{(3t+1)}} \cdot e^{i\pi(t+1)} =$$

Siehe 2.2.2., P2, S 74

$$= \frac{1}{e^{(3t+1)}} \cdot e^{i(\pi t+\pi)} = \frac{1}{e^{(3t+1)}} \cdot e^{i\,\pi\, t} \cdot e^{i\,\pi} = \frac{1}{e^{(3t+1)}} \cdot e^{i\,\pi} \cdot e^{i\,\pi\, t}$$

$$f(t) = A \cdot e^{i\,\varphi} \cdot e^{i\,\omega\, t}$$

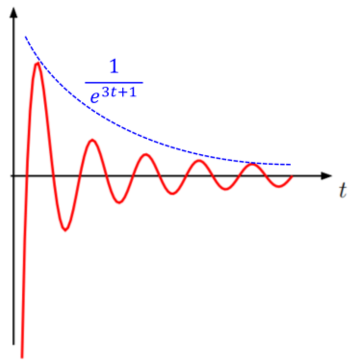
$$A = \frac{1}{e^{(3t+1)}} \qquad \varphi = \pi \qquad \omega = \pi$$

Da in der Amplitude die Variable t vorkommt, verändert sich die Amplitude mit dem t:

$A = \frac{1}{e^{3t+1}}$: e^{3t+1} wird mit wachsendem t immer größer. Damit wird der Bruch $\frac{1}{e^{3t+1}}$ immer kleiner.

Die Amplitude wird demnach immer kleiner (gedämpfte Schwingung).

Verlauf der Amplitude:



Beispiel: Bestimmen Sie Amplitude, Frequenz, Periode und Phasenverschiebung der folgenden Schwingung:

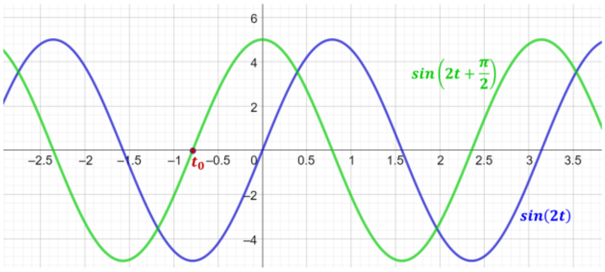
$$f(t) = 5 \cdot \sin\left(2 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$A = 5 \qquad \omega = 2 \rightarrow \; 2\,\pi\, f = 2 \rightarrow \; f = \frac{1}{\pi} \rightarrow \; T = \frac{1}{f} = \frac{1}{\frac{1}{\pi}} = \pi$$

Phasenverschiebung: $2 \cdot t + \frac{\pi}{2} = 0 \;\; | -\frac{\pi}{2}$

$2 \cdot t = -\frac{\pi}{2} \;\; | :2$

Phasenverschiebung $\quad t_0 = -\frac{\pi}{4}$



Wie überlagert man **Schwingungen mit ungleichen Frequenzen**?

Ein **Beispiel** dazu:

$$f(t) = \sin(4t) + 2\cos(2t - \pi)$$

$$\boxed{\sin(x) = \frac{1}{2i} \cdot \left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \qquad \cos(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{ix} + e^{-ix}\right)}$$

$$\sin(4t) = \frac{1}{2i}\left(e^{i4t} - e^{-i4t}\right) = -\frac{i}{2}\left(e^{i4t} - e^{-i4t}\right)$$

$$\frac{1}{2i} = \frac{1 \cdot (-2i)}{2i \cdot (-2i)} = \frac{-2i}{-4i^2} = \frac{-2i}{4} = -\frac{i}{2}$$

$$2\cos(2t - \pi) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(e^{i(2t-\pi)} + e^{-i(2t-\pi)}\right) = e^{i2t} \cdot e^{-i\pi} + e^{-i2t} \cdot e^{i\pi} =$$

Siehe 2.2.2, P1, S 73

$$= e^{i2t} \cdot [\cos(-\pi) + i \cdot \sin(-\pi)] + e^{-i2t} \cdot [\cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi)] = e^{i2t} \cdot [-1 + 0 \cdot i] + e^{-i2t} \cdot [-1 + i \cdot 0] =$$

$$= -e^{i2t} - e^{-i2t}$$

$$f(t) = -\frac{i}{2}\left(e^{i4t} - e^{-i4t}\right) - e^{i2t} - e^{-i2t}$$

Man kann die Funktion f(t) mit Hilfe der Additionstheoreme für Winkelfunktionen umformen bzw. durch eine Fourier-Reihe (12.2.3.5., S 620 f) darstellen.

Übung

1) (i) Stellen Sie die Gleichung der Überlagerungsfunktion auf.
(ii) Geben Sie Amplitude, Phasenverschiebung, Winkelgeschwindigkeit, Frequenz und Periode für die Überlagerung der beiden Schwingungen an.

a) $f_1(t) = 2 \cdot \sin(3t) \quad f_2(t) = \sin\left(3t - \frac{\pi}{2}\right)$ b) $f_1(t) = 2.5 \cdot \sin(t) \quad f_2(t) = 2.5 \cdot \sin(t + \pi)$

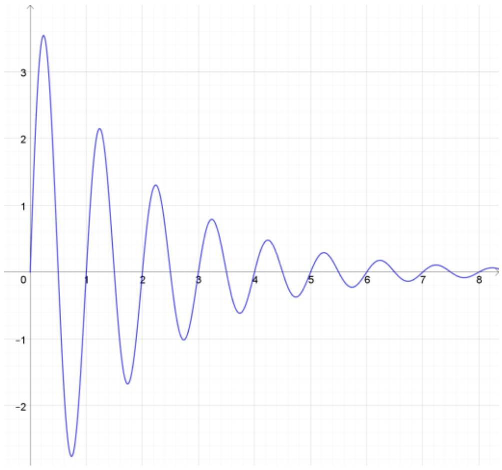
c) $f_1(t) = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{t}\right) \quad f_2(t) = \cos\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{t}\right)$

2) Eine Sinus-Schwingung besitzt die Amplitude $A = 0.5$, die Phase $\varphi = \frac{2}{3}\,\pi$ und die Periode $T = \frac{1}{4}$.
Stellen Sie die Gleichung dieser Schwingung in EULERscher Form auf.

3) Ermitteln Sie die Amplitude, die Frequenz und Phase folgender Funktionen:

a) $f(t) = 6 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right)}$ b) $f(t) = 2 \cdot e^{i5\pi(t-1)}$

4) Bestimmen Sie die Funktionsdarstellung der unten gezeichneten Schwingung.
Hinweis: Handelt es sich um eine Sinus- oder Cosinus-Schwingung mit der Phase 0?
Durch welche Funktion in Abhängigkeit von x könnte die Amplitude beschrieben werden?



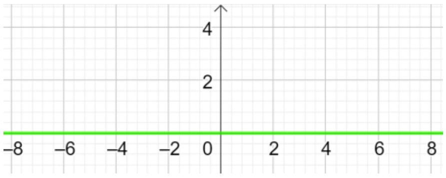
5) Ermitteln Sie die Gleichung der Überlagerung der beiden Schwingungen $f_1(t) = 2\cos\left(5t + \frac{\pi}{3}\right)$ und $f_2(t) = \sqrt{2}\cos\left(5t + \frac{3\pi}{4}\right)$

Lösungen: 1) a) (i) $f(t) = \sqrt{5} \cdot e^{i\cdot(3t-0.15\pi)} = \sqrt{5} \cdot e^{i\cdot 3\,t} \cdot e^{i\cdot(-0.15\pi)} = \sqrt{5} \cdot e^{i\cdot(-0.15\pi)} \cdot e^{i\cdot 3\,t}$

(ii) $A = \sqrt{5}$ $t_0 = 0.05\pi$ $\omega = 3$ $f = \frac{3}{2\pi}$ $T = \frac{2\pi}{3}$

b) (i) $f(t) = 0 \cdot e^{i\cdot\varphi} \cdot e^{i\,\omega\,t} = 0$ $\varphi = arctan\left(\frac{0}{0}\right)$ ist nicht definiert.

(ii) Da $f(t) = 0$ keine Schwingung beschreibt (sie beschreibt die Gleichung der t-Achse),



machen die Angaben keinen Sinn.

c) (i) $f(t) = \sqrt{5} \cdot e^{i\cdot\left(\frac{1}{2}t+0.15\pi\right)}$

(ii) $A = \sqrt{5}$ $t_0 = -0.3\pi$ $\omega = \frac{1}{2}$ $f = \frac{1}{4\pi}$ $T = 4\pi$

2) a) $f(t) = 0.5 \cdot \sin\left(8\pi t + \frac{2}{3}\pi\right) \rightarrow f(t) = 0.5 \cdot e^{-\frac{\pi}{3}i} \cdot e^{\,i\,8\,\pi\,t} = 0.5 \cdot e^{i\left(-\frac{\pi}{3}+8\,\pi\,t\right)}$

3) a) $A = 6$ $\varphi = \frac{\pi}{6}$ $\omega = \frac{\pi}{2}$ $f = \frac{1}{4}$ $T = 4$

b) $A = 2$ $\varphi = -5\pi$ $\omega = 5\pi$ $f = \frac{5}{2}$ $T = \frac{2}{5}$

4) Um eine Sinus-Schwingung (weil f(0) = 0)
Amplitude $\approx e^{-x}$ bzw. durch eine Exponentialfunktion mit negativem Exponenten

5) $f(t) = 2.73 \cdot cos\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$

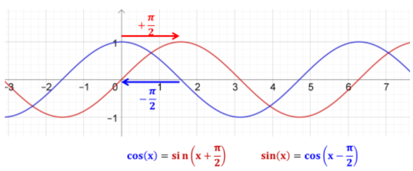
Kann ich's?

1) Warum darf man Schwingungen in reeller Schreibweise in eine komplexe Darstellung verwandeln, die ja einen reellen und imaginären Anteil besitzt?

2) Warum darf man die komplexe Darstellung einer Schwingung wieder in eine reelle Darstellung verwandeln, wenn die komplexe Darstellung einen reellen und imaginären Anteil besitzt?

Lösung: 1) und 2) Die imaginäre Darstellung beinhaltet sowohl den Realteil mit cos und den Imaginärteil mit sin.
Stellen wir die Schwingungen mit cos dar, so verenden wir am Ende nur den Realteil der Lösung .
Gleichgültig, ob wir sin oder cos verwenden, erhalten wir das gleiche Ergebnis.

Mit



können wir alle Schwingungen mit sin oder mit cos darstellen.

1.4. Zahlensysteme

1.4.1. Grundsätzliches

Wir rechnen üblicherweise im **dekadischen** System (**10-er** System).

Die Struktur dieses Zahlensystems ist folgende:

Beispiel:

H Z E

$$4\,2\,9 = 4 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 9 \cdot 1 = 4 \cdot 10^{2} + 2 \cdot 10^{1} + 9 \cdot 10^{0}$$

Eine Zahl im **2-er** System (**Binär**system bzw. **Dual**system) besitzt folgende Struktur:

Beispiel:

$$1\,0\,1 = 1 \cdot 2^{2} + 0 \cdot 2^{1} + 1 \cdot 2^{0}$$

Ein Zahlensystem benötigt immer so viele Ziffern wie seine Basis. Hier einige Beispiele:

System	Basis	Ziffern
10-er (dekadisch)	10	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
2-er (binär)	2	0 1
16-er (hexadezimal)	16	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F

Nicht Ziffern und Zahlen verwechseln!

Beispiel: Die Zahl 429 besteht aus den Ziffern 4 , 2 und 9

So wie ein Wort aus Buchstaben besteht, besteht eine Zahl aus Ziffern.

Wechselt man zwischen Zahlensystemen, so sind folgende Schreibweisen üblich:

$(429)_{10}$ meint das **dekadische** System

$(101)_{2}$ meint das **Binär**system

Beispiel: Verwandeln Sie die Zahl $(429)_{10}$ in das das Binärsystem.

$429 : 2 = 214 \;\rightarrow\; 214 : 2 = 107 \;\rightarrow\; 107 : 53 \;\rightarrow\; 53 : 2 = 26 \;\rightarrow\; 26 : 2 = 13$

Rest: **1** Rest: **0** Rest: **1** Rest: **1** Rest: **0**

$13 : 2 = 6 \;\rightarrow\; 6 : 2 = 3 \;\rightarrow\; 3 : 2 = 1 \;\rightarrow\; 1 : 2 = 0$

Rest: **1** Rest: **0** Rest: **1** Rest: **1**

```
temp = format(429, "b")

print(temp)
```

```
110101101
```

Damit gilt: $(429)_{10} = (110101101)_2$

Beispiel: Verwandeln Sie die Zahl $(705)_{16}$ in das das dekadische System.

```
0x705
```

```
1797
```

$7 \cdot 16^2 + 0 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0 = 7 \cdot 256 + 0 + 5 \cdot 1 = 1\,797$

Beispiel: Verwandeln Sie die Zahl $(28)_{16}$ in $(\quad)_8$.

Zuerst wird die gegebene Zahl ins dekadische System verwandelt und von dort ins 8-er System (Oktalsystem):

$(28)_{16} = 2 \cdot 16^1 + 8 \cdot 16^0 = 2 \cdot 16 + 1 \cdot 8 = (40)_{10}$

$40 : 8 = 5 \;\rightarrow\; 5 : 8 = 0 \qquad \rightarrow (28)_{16} = (50)_8$

Rest: **0** Rest: **5**

```
0x28
```

```
40
```

```
temp = format(40, "o")
print(temp)
```

```
50
```

1.4.2. Rechnen im Binärsystem

1.4.2.1. Addieren und Subtrahieren im Binärsystem

Beispiel:

$$\begin{array}{r} 1\,0\,1\,1 \\ +\quad 1\,1\,0 \\ {\scriptstyle 1\;1\;1} \\ \hline \mathbf{1\,0\,0\,0\,1} \end{array}$$

Wie gewohnt, rechnet man von rechts nach links.
0 + 1 = **1**
1 + 1 = 2 (2 im Binärsystem ist wie 10 im dekadischen)
Also schreiben wir nicht 2, sondern **0** und 1 gemerkt.
1 + 1 + 0 = 2 Wir schreiben wieder **0** und 1 gemerkt.
Schließlich rechnen wir noch 1 + 1 = 2 und schreiben wieder **0**. Die **1** gemerkt muss vorne auch noch angeschrieben werden.

Beispiel:

$$\begin{array}{r} 1\,0\,1\,1 \\ -\quad 1\,1\,0 \\ {\scriptstyle 1\quad\;\;} \\ \hline \mathbf{0\,1\,0\,1} \end{array}$$

Wie gewohnt, rechnet man von rechts nach links.
0 und wie viel ist 1 ? 0 + **1** = 1
1 und wie viel ist 1 ? 1 + **0** = 1
1 und wie viel ist 0 ? Die Null steht für 2, wie im 10-er System für 10! Also rechnen wir: 1 + **1** = 0 , 1 gemerkt
1 und wie viel ist 1 ? 1 + 0 = 1.

Da die Null links nicht geschrieben werden muss, lautet das Ergebnis **1 0 1**

Machen wir die **Probe**, indem wir die **Zahlen** vorher **ins Dezimalsystem** verwandeln:

$$\begin{array}{rll} 1\,0\,1\,1 & = 1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+1\cdot 2^1+1\cdot 2^0 = 1\cdot 8+1\cdot 2+1\cdot 1 & = 11 \\ -\;1\,1\,0 & = -\qquad 1\cdot 2^2+1\cdot 2^1+0\cdot 2^0 = 1\cdot 4+1\cdot 2 & = -6 \\ \hline & & \Downarrow \\ & \mathbf{5}:2=2 \quad 2:2=1 \quad 1:2=0 \;\Longleftarrow & \mathbf{5} \end{array}$$

$(\mathbf{1\,0\,1})_2 \;\Longleftarrow\;$ Rest: **1** Rest: **0** Rest: **1**

```python
a=int('1011', 2)
b=int('110', 2)
bin(a + b)
```

'0b10001'

```python
a=int('1011', 2)
b=int('110', 2)
bin(a - b)
```

'0b101'

1.4.2.2. Multiplizieren im Binärsystem

Beispiel:

Multipliziert wird in der Reihenfolge und Form des 10-er Systems.
Es ist recht einfach:

$$
\begin{array}{r}
1\,0\,1\,1 \cdot 1\,1\,0 \\
\hline
1\,0\,1\,1 \\
1\,0\,1\,1 \\
0\,0\,0\,0 \\
1\;1\;1\;1 \\
\hline
1\,0\,0\,0\,0\,1\,0
\end{array}
$$

Mit **1** **multipliziert** ändert sich nichts,
mit **0** multipliziert ergibt **0**

Am Ende wird addiert.

```
a=int('1011', 2)
b=int('110', 2)
bin(a * b)
```

'0b1000010'

1.4.2.3. Dividieren im Binärsystem

Beispiel:

$$
\begin{array}{l}
1111 : 101 = \mathbf{0011} \\
1 \\
-0 \\
\hline
11 \\
-0 \\
\hline
111 \\
-101 \\
\hline
0101 \\
-101 \\
\hline
0
\end{array}
$$

Prinzipiell dividiert man im Binärsystem so wie im Dezimalsystem:

$1 < 101 \rightarrow \mathbf{0}$

$11 < 101 \rightarrow \mathbf{0}$

$111 > 101 \rightarrow \mathbf{1}$

$0101 = 101 \rightarrow \mathbf{1}$

Das Ergebnis der Division lautet **11**

```
a=0b1111
b=0b101
a/b
```

3

```
temp = format(3, "b")
print(temp)
```

11

Übung

Verwandeln Sie folgende Zahlen in das angegebene Zahlensystem:

1) $(101)_{10} = (\ \ )_5$ 2) $(101)_2 = (\ \ )_{10}$

3) $(600)_8 = (\ \ )_{16}$ 4) $(1001)_3 = (\ \ )_2$

Berechnen Sie:

5) $1001 + 101 =$ 6) $1000 + 100010 + 110 =$

7) $1010 - 111 =$ 8) $1010100 - 10011 =$

9) $1010 \cdot 110 =$ 10) $1100 \cdot 1001 =$

11) $1100 : 100 =$ 12) $100100 : 1100 =$

Lösungen:

1) $(401)_5$ 2) $(5)_{10}$ 3) $(180)_{16}$ 4) $(11100)_2$

5) 1110 6) 110000 7) 11 8) 1000001

9) 111100 10) 1101100 11) 11 12) 11

(454) Komplexe Zahlen in Python, Gaußsche Zahlenebene, geometrische Interpretation der komplexen Addition - YouTube

1.4.3. Fließkommadarstellung

Die Fließkommadarstellung (Gleitkommadarstellung) von Zahlen findet vornehmlich in Naturwissenschaft und Technik bei großen und kleinen (nahe bei null liegenden) Zahlen Verwendung.

Beispiel einer **Zahl in normierter (normalisierter) Fließkommadarstellung**:

$$\underbrace{\overset{\overset{E}{\downarrow}}{4}.3652} \cdot 10^{3}$$

Die Mantisse vor der Zehnerpotenz wird immer so dargestellt, dass **der höchste Stellenwert Einer** (E) ist und damit dort **eine von Null verschiedene Ziffer** steht.

Wie groß ist diese Zahl eigentlich?

$$4.3652 \cdot 10^{3} = 4.3652 \cdot 1\,000 = 4\,365.2$$

$$10^{3} = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000$$

Weiteres **Beispiel:** $6.23 \cdot 10^{-4} = 6.23 \cdot 0.0001 = 0.000623$

$$10^{-4} = \frac{1}{10^{4}} = \frac{1}{10\,000} = 0.0001$$ (siehe auch 2.2.2., P4, S 77)

Aus den beiden obigen Beispielen lässt sich erkennen:

$1.234 \cdot 10^{n}$ $\Longrightarrow$

Ist die **Hochzahl** der Zehnerpotenz **positiv**, so wird das **Komma** um **n Stellen** nach **rechts** verschoben, soll die Zahl in die übliche Fixkomma-Darstellung verwandelt werden.

$\Longleftarrow$ $1.234 \cdot 10^{-n}$

Ist die **Hochzahl** der Zehnerpotenz **negativ**, so wird das **Komma** um **n Stellen** nach **links** verschoben, soll die Zahl in die übliche Fixkomma-Darstellung verwandelt werden.

Umgekehrt lassen sich Zahlen in Festkomma-Darstellung (der üblichen Komma-Darstellung) auch in die Fließkomma-Darstellung verwandeln:

Beispiel:

$1\,023\,648 = 1.023\,648 \cdot 1\,000\,000 = 1.023\,648 \cdot 10^{6}$

Um von 1 023 648 auf 1.023 648 zu kommen, müssen wir die Ausgangszahl durch $1\,000\,000 = 10^6$ dividieren.

Damit aber der Wert der Ausgangszahl erhalten bleibt, müssen wir die Zahl 1.023 648 zum Ausgleich mit $1\,000\,000 = 10^6$ multiplizieren.

Beispiel:

$0.000\,000\,002 = 2 : 1\,000\,000\,000 = 2 : 10^{9} = 2 \cdot 10^{-9}$ (siehe auch 2.2.2., P4, S 77)

Um von 0.000 000 002 auf 2.0 = 2 zu kommen, müssen wir die Ausgangszahl mit $1\,000\,000\,000 = 10^9$ multiplizieren.

Damit aber der Wert der Ausgangszahl erhalten bleibt, müssen wir die Zahl 2 zum Ausgleich durch $1\,000\,000\,000 = 10^9$ dividieren.

$\text{Zahl} : 10^9 = \frac{\text{Zahl}}{10^9} = \text{Zahl} \cdot 10^{-9}$ (siehe auch 2.2.2., P4, S 77)

Auch dafür lässt sich eine Regel ableiten:

$\underbrace{1,234\;...\;678,9}_{\text{Komma } n \text{ Stellen nach links}} = 1.234\,... \cdot 10^{n}$

$\underbrace{0,000\;...\;5678}_{\text{Komma } n \text{ Stellen nach rechts}} = 5.678 \cdot 10^{-n}$

Beispiel:

Die nächste Sonne (Fixstern) außerhalb unseres Sonnensystems, der Stern *Alpha Centauri*, ist 4.4 Lichtjahre (La) von der Erde entfernt.

1 La ist jene Entfernung, die das Licht in einem (Erden-) Jahr zurücklegt, das sind ca. 9.5 Billionen km.

Damit ist *Alpha Centauri* ca. 42 000 000 000 000 km von uns entfernt.

Liest man eine solche Zahl, wird man wohl damit beginnen, die Nullen abzuzählen. Auch wenn man diese Zahl benennen kann (42 Billionen km), so ist sie für uns nicht vorstellbar. Besser handhabbar wird sie in Gleitkommadarstellung:

$42\,000\,000\,000\,000 \text{ km} = 4.2 \cdot 10^{13} \text{ km}.$

Ist eine weitere Strecke z.B. $8 \cdot 10^{15}$ km , so kann ich feststellen, diese Länge ist $2 \cdot 4 \cdot \underbrace{10^{13} \cdot 10^{2}}_{10^{13} \cdot 10^{2} = 10^{15}}$ km = (2.2.2., P4, S 73)

$= 4 \cdot 10^{13} \cdot \underbrace{2 \cdot 10^{2}}_{2 \cdot 10^{2} = 2 \cdot 100 = 200}$ km, also in etwa 200-mal länger als die Entfernung Erde – *Alpha Centauri*.

Absolut sind solche Größen unvorstellbar, relativ können sie mittels Gleitkommadarstellung eher veranschaulicht werden.

Die normierte Fließkommadarstellung gibt es nicht nur für das dekadische System (10er System).

Beispiele normierter Fließkommadarstellung für das **Binärsystem**: $1.001 \cdot 2^{4}$ oder $1.101 \cdot 2^{-3}$

Weiteres siehe 1.4.4., S 67 f

Übung

1) Verwandeln Sie folgende Zahlen in normierte Fließkommadarstellung:

   a) 2 000 000 000 b) 7.6 Mio. c) 0.0000000005 d) $\frac{10}{1\,000\,000\,000}$ e) $0.1 \cdot 10^{0}$

2) Verwandeln Sie folgende Zahlen in die Festkommadarstellung:

   a) $4.5 \cdot 10^{7}$ b) $1.1 \cdot 10^{-5}$ c) $3.25 \cdot 10^{-1}$ d) $6.067 \cdot 10^{-4}$

3) Die nachstehende Gleichung beschreibt den Zusammenhang von Druck, Volumen und Temperatur von Gasen:

$$p \cdot V = n \cdot 8{,}314 \cdot T$$

   p … Druck in Pascal (Pa)
   V … Volumen in m^3
   n … Stoffmenge in Mol
   T … Temperatur in Kelvin (K)

   1 Mol Luft enthält rund $6.022 \cdot 10^{23}$ Teilchen. Zum Aufblasen eines Zeltes werden 4 m^3 Luft benötigt.

   Berechnen Sie, wie viele Teilchen in diesem Luftvolumen unter einem Druck von 303 000 Pa Temperatur von 293 K enthalten sind.

4) Um wie viel Mal ist ein Tbit größer als ein GB?

5) In der Physik gilt die These, dass die sogenannte PLANCK-Ära[10] zu Beginn des Urknalls 10^{-43} Sekunden dauerte. Danach vergingen noch etwa 380 000 Jahre, bis sich die ersten stabilen Atome bildeten. Ermitteln Sie, um viel Mal länger die Phase der Bildung erster stabiler Atome dauerte als die PLANCK-Ära.

Lösungen:

1) a) $2 \cdot 10^{9}$ b) $7.6 \cdot 10^{6}$ c) $5 \cdot 10^{-10}$ d) $1 \cdot 10^{-8}$ e) $1 \cdot 10^{-1}$

2) a) 45 000 000 b) 0.000011 c) 0.325 d) 0.0006067

3) $\approx 3.00 \cdot 10^{26}$ Teilchen 4) 125-mal 5) ca. $1.2 \cdot 10^{56}$-mal

[10] Max Karl Ernst Ludwig PLANCK (1858–1947). Deutscher Physiker. Er gilt als einer der Begründer der Quantenphysik.

1.4.4. Kommazahlen im Binärsystem

Im dekadischen System bedeutet $0.382 = 3 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3}$

Entsprechend gilt im Binärsystem: $(0.101)_2 = 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3}$

Damit lässt sich die Zahl $(0.101)_2$ wie folgt in das dekadische System umwandeln:

$$(0.101)_2 = 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} = (0.625)_{10}$$

Wie formt man eine **dekadische Kommazahl in** das **Binärsystem** um?

$(0.6875)_{10}$

$0.6875 \cdot 2 = \mathbf{1}.375$

-1

$0.375 \cdot 2 = \mathbf{0}.75$

-0

$0.75 \cdot 2 = \mathbf{1}.5$

-1

$0.5 \cdot 2 = \mathbf{1}.0$

-1

0.0

Damit ist $(0.6875)_{10} = (0.1011)_2$

Bei Zahlen der Form $(12.25)_{10}$ sind die Stellen **vor und nach dem Komma getrennt** zu bestimmen:

$(12)_{10}$: $12 : 2 = 6$ $6 : 2 = 3$ $3 : 2 = 1$ $1 : 2 = 0$

Rest 0 0 1 1 $(12)_{10} = (1100)_2$ Siehe auch 1.4.1., S 60

$(0.25)_{10}$: $0.25 \cdot 2 = 0.5$

-0

$0.5 \cdot 2 = 1.0$

-1

0.0 $(0.25)_{10} = (0.01)_2$

Damit lautet $(12.25)_{10} = (1100.01)_2$

„Gedanken ohne Inhalt sind leer,
Anschauungen ohne Begriffe sind blind.“
Immanuel Kant
(1724–1804)

II RECHNEN MIT TERMEN

2.1. Begriffe

Beispiele für Terme:

$(2 . 3 + 5) : 8$

$-4x^2 y$

$x . e^{x-1}$

Ein **Term** ist **jeder sinnvolle mathematische Ausdruck**, gleich, ob es sich um Zahlen oder Buchstaben handelt.

Einzig bei mathematisch nicht festgelegten Darstellungen handelt es sich um **keine** Terme:

Z.B.:

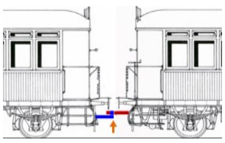
$8 : 0$ (Die Division durch Null ist nicht durchführbar)

$a^2 + 2a -$ (Es ist nicht geklärt, welcher Ausdruck noch zu subtrahieren ist)

Es folgen jene **Bezeichnungen**, die es zu unterscheiden gilt:

Glieder sind Ausdrücke, die **mit Strichrechnung (+ −) verbunden** sind.

Beispiel: $\overbrace{+3x}^{G}\overbrace{-5ab}^{G}\overbrace{+1}^{G}$ ist ein dreigliedriger Ausdruck (Die Glieder sind: $+3x$, $-5ab$ und $+1$)



Ein
Glied reicht von einer Strichrechnung bis vor die nächste.

So wie ein Eisenbahnwaggon von seiner vorderen Kupplung bis **vor** die Kupplung des nächsten Wagens reicht.

Monom: ein **1-gliedriger** Ausdruck **Beispiel:** x^2 oder $-5ab^3$

Binom: ein **2-gliedriger** Ausdruck **Beispiel:** $a + b$ oder $3x^2 - 5a^3 b$

Trinom: ein **3-gliedriger** Ausdruck **Beispiel:** $3e^{x-1} - 5U + 1$

Polynom: ein **mehr als 3-gliedriger** Ausdruck **Beispiel:** $-\frac{1}{8} \cdot t^4 + 0.005 \cdot t^3 . 1.25 \cdot t^2 - t + 1.2$

Faktoren sind Ausdrücke, die **mit Punktrechnung (. :) verbunden** sind.

Beispiel: $-2\,x\,y^2 = \underbrace{-2 \cdot x \cdot y^2}_{F}$ Dieser Term besteht aus drei Faktoren (aus -2 , aus x und aus y^2)

$$\overbrace{\underbrace{+2 \cdot x^2}_{F}}^{G}\;\overbrace{\underbrace{-3 \cdot x \cdot y}_{F}}^{G}\;\overbrace{+5}^{G}$$

Das erste **Glied** dieses dreigliedrigen Terms besteht aus zwei **Faktoren** ($+2$ und x^2),
das zweite **Glied** aus drei **Faktoren** (-3 , x und y).
Das letzte **Glied** $+5$ besteht aus ***keinem* Faktor**!

Wir sehen: **Glieder können aus Faktoren bestehen**.

$$\underbrace{-}_{\text{Vorzeichen}}\;\underbrace{4}_{\text{Vorzahl (Koeffizient)}}\;\underbrace{x^{3}}_{\text{Potenz}}$$

Eigentlich gibt es

keine Potenz ohne Vorzeichen und Vorzahl.

Streng genommen muss man zwischen Vorzeichen und Rechenzeichen unterscheiden.

Beispiele:

$-4\,x^3 = -4 \cdot x^3$

$4\,x^3 = +4 \cdot x^3$

$-x^3 = -1 \cdot x^3$

$x^3 = +1 \cdot x^3$

Viele **Taschenrechner** verwenden für das

Vorzeichen Minus Tasten wie $\boxed{(-)}$ und für das

Rechenzeichen Minus Tasten wie $\boxed{\;—\;}$

Weiters gilt:

$2x - 3y = +2x - 3y$ Steht **vor dem ersten Glied kein Vorzeichen**, so ist $+$ gemeint.

$3y = 3 \cdot y$

$xy = x \cdot y$

$25 = \cancel{2 \cdot 5}$

Steht **zwischen einer Zahl und einem Buchstaben** oder **zwischen zwei Buchstaben kein Rechenzeichen** geschrieben, so sind sie mit **mal** verbunden.

Beispiel: $cm = c \cdot m = 10^{-1} \cdot m = \frac{1}{100} \cdot m = \frac{1}{100} m$

Beachten Sie folgenden **Unterschied**:

$3 \cdot x = x + x + x$ aber: $x^3 = x \cdot x \cdot x$

Weiters trifft zu:

$0 \cdot 3 = 0$	$1 . 2 = 2$	$-1 \cdot 4 = -4$
$0 \cdot 7 = 0$	$1 \cdot 6 = 6$	$-1 \cdot 5 = -5$
$\mathbf{0 \cdot x = 0}$	$\mathbf{1 \cdot x = x}$	$\mathbf{-1 \cdot x = -x}$

Ist (mindestens) **ein Faktor Null**, so ist das Ergebnis der **Multiplikation** (das Produkt) **Null**.

Die Vorzahl 1 braucht nicht geschrieben zu werden, weil die Multiplikation mit 1 nichts verändert.


© Pixabay

Angenommen, jemand benötigt **3 m** Stoff. Dann wird man mit einem Maßband **drei Mal einen Meter** Stoff abmessen.

$3 \cdot 1\,m = 3 \cdot 1 \cdot m = 3 \cdot m = 3\,m$

Da die Multiplikation mit 1 nichts verändert und wir uns möglichst kurz ausdrücken wollen, sagen wir statt 3-mal ein Meter: 3 Meter.

Diese Sprechweise hat sich derart eingebürgert, dass im Gegensatz zu **3 m** (**ein** Stoffteil von 3 Meter Länge) **3-mal ein Meter** wohl heißt, drei Stoffteile von jeweils einem Meter abzumessen.

2.2. Potenzen

2.2.1. Einführung

Was ist eine **Potenz**?

Potenz → x^3

Hochzahl (Exponent)

Basis **(Grundzahl)**

Die **Potenz** besteht aus der **Basis** und der **Hochzahl**

$$x^3 = \underbrace{x \cdot x \cdot x}_{3\text{–mal}}$$

allgemein:

$$\mathbf{x}^n = \underbrace{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \cdot \ \ldots \ \cdot \mathbf{x}}_{n\text{–mal}}$$

Sofern die **Hochzahl** (der Exponent) eine **natürliche Zahl**, also $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7, \ldots,$ ist, **gibt** die **Hochzahl an**, **wie oft** die **Basis mit sich selbst multipliziert** wird.

Beispiele:

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ $\qquad x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$

Für die **Basen 0 und 1** gilt:

$0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$ $\qquad 1^4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

allgemein gilt:

$$\mathbf{0^n = 0} \qquad\qquad \mathbf{1^n = 1}$$

Bemerkung: Natürlich gilt dieser Sachverhalt nur für Potenzen mit der Basis 0 oder 1 .

Betrachten wir im Folgenden **Potenzen mit negativer Basis**:

Beispiele:

$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4 = +2^2$

$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +16 = +2^4$

$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8 = -2^3$

$(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32 = -2^5$

An diesen Beispielen lässt sich erkennen, dass

Potenzen mit negativer Basis und gerader Hochzahl aufgelöst ein **positives** Ergebnis liefern, während bei **ungerader Hochzahl** dieses Ergebnis **negativ** ausfällt.

$$(-x)^{\text{gerade Zahl}} = +x^{\text{gerade Zahl}} = +1 \cdot \boxed{x^{\text{gerade Zahl}}}$$

$$(-x)^{\text{UNgerade Zahl}} = -x^{\text{UNgerade Zahl}} = -1 \cdot \boxed{x^{\text{UNgerade Zahl}}}$$

In beiden Fällen, gleich ob die Hochzahl gerade oder ungerade, erhält die **Potenz mit negativer Basis** beim Auflösen der Klammer eine **positive Basis**!

Ist die **Hochzahl gerade**, so wird das **Vorzeichen** (der Vorzahl 1) **positiv**, ist die **Hochzahl UNgerade**, wird das **Vorzeichen** (der Vorzahl 1) **negativ**.

Beispiele: $(-x)^2 = +1 \cdot x^2 = +x^2 = x^2$

$(-x)^3 = -1 \cdot x^3 = -x^3$

$x^3 = x^3 \neq -x^3$ . . . Da die Basis dieser Potenz ***positiv*** ist.

(454) MAY 03 Potenzen Grundbegriffe - YouTube

2.2.2. Rechenregeln für Potenzen

Einführungsbeispiel für Potenzregel P1:

```
from sympy import *
x = symbols("x")
x**3*x**2
```

x^5

Beispiel: $x^3 \cdot x^2 = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^5 = x^{3+2}$

Daraus lässt sich folgende Regel verallgemeinern:

$$P1: \quad x^n \cdot x^m = x^{n+m}$$

. . . Regel P1 gilt für die **Multiplikation von Potenzen** mit **gleicher Basis**

Beispiele:

$x^4 \cdot x^3 = x^{4+3} = x^7$

$x^5 \cdot x = x^5 \cdot x^1 = x^6$

$x^4 \cdot x \cdot x^3 = x^4 \cdot x^1 \cdot x^3 = x^8$

Beachte $\mathbf{x} = \mathbf{x}^1 \neq x^0$

$a^2 \cdot a^2 = a^4$

$2x^3 \cdot 3x^4 = 2 \cdot x^3 \cdot 3 \cdot x^4 = \underbrace{2 \cdot 3}_{=6} \cdot \underbrace{x^3 \cdot x^4}_{=x^7} = 6\,x^7$

Da die **Multiplikation vertauschbar** ist *(z.B. ist $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 = 6$),* können wir die Faktoren beliebig reihen.

$(-x)^3 \cdot (-x)^2 = (-x)^5 = -1 \cdot x^5 = -x^5$

$(-x)^4 \cdot x^3 = 1 \cdot x^4 \cdot x^3 = x^7$

Bei diesem Beispiel müssen wir **zuerst** die **Potenzen auf gleiche Basis** bringen, damit wir Regel P 1 anwenden können.

$(-x)^4 = +1 \cdot x^4$

$x^{4a}\, x = x^{4a} \cdot x^1 = x^{4a+1}$

Man darf also $\boxed{\text{nur Potenzen mit gleichen Basen multiplizieren}}$

Einführungsbeispiel für Potenzregel P2:

```
from sympy import *
x = symbols("x")
x**5/x**2
```

x^3

Beispiel: $x^5 : x^3 = \frac{x^5}{x^3} = \frac{\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot x\cdot x}{\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}} = \frac{x\cdot x}{1} = x^2 = x^{5-3}$

Dieses Beispiel weist auf folgende Regel hin:

$$P2: \quad \frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

Regel P 2 gibt an, wie **zwei Potenzen** mit **gleicher Basis dividiert** werden.

Beachten Sie, dass die **Hochzahl** der Potenz **des Nenners von der Hochzahl** der Potenz **des Zählers** zu **subtrahieren** ist.

Beispiel: $\frac{x^6}{x^2} = x^{6-2} = x^4$

Weitere **Beispiele:** $\frac{a^4}{a} = \frac{a^4}{a^1} = a^3$

$$\frac{x^3}{x^2} = x^{3-2} = x^1 = x$$

$$\frac{a^2}{a^3} = a^{-1}$$

$$\frac{6\,a^4\,b^6}{3\,a^2\,b^3} = \frac{\overset{2}{\cancel{6}}\cdot a^4\cdot b^6}{\underset{1}{\cancel{3}}\cdot a^2\cdot b^3} = \frac{2\,a^2\,b^3}{1} = 2\,a^2\,b^3$$

$$\frac{(-x)^7}{x^3} = \frac{-1\cdot x^7}{x^3} = -\frac{x^7}{x^3} = x^4$$

Bei diesem Beispiel müssen wir zuerst die Potenzen auf gleiche Basis bringen, damit wir Regel P 2 anwenden können.

Beispiel: $-\frac{4\cdot m^3}{2\cdot(-m)^2} = -\frac{\overset{2}{\cancel{4}}\cdot m^3}{\underset{1}{\cancel{2}}\cdot m^2} = -2\cdot m^{3-2} = -2\cdot m = -2m$

ZUERST die Potenzen auf gleiche Basis bringen

Was bedeutet eigentlich einen **Bruch kürzen**: Zähler und Nenner durch den gleichen Term **dividieren**.

Beispiel: $\frac{8}{10} = \frac{8:2}{10:2} = \frac{4}{5}$

Beim Kürzen ändert sich der Wert des Bruches **nicht**! $\frac{8}{10} = \frac{4}{5} = 0.8$

Man könnte auch Potenzen auf diese Weise kürzen . . .

Beispiel: $\frac{x^4}{x^3} = \frac{\overset{1}{\cancel{x}}\cdot\overset{1}{\cancel{x}}\cdot\overset{1}{\cancel{x}}\cdot x}{\underset{1}{\cancel{x}}\cdot\underset{1}{\cancel{x}}\cdot\underset{1}{\cancel{x}}} = \frac{1\cdot x}{1} = x$

. . . doch bei einer Aufgabe wie $\frac{x^{1011}}{x^{77}}$ würde der Lösungsweg wie oben ziemlich länglich!

- Was ist größer? $\frac{1}{m}$ oder $\frac{1}{m+1}$? [11]
- Was ist falsch, wenn der Term $\frac{1}{n+1}$ so eingegeben wird: $1/n+1$

[11] Von E. WEITZ: In: https://www.youtube.com/watch?v=d0uV_Oia9AI

Einführungsbeispiel für Potenzregel P3:

Beispiel: $1 = \frac{x^3}{x^3} = x^{3-3} = x^0$

P2

```
from sympy import *
x = symbols("x")
x**3/x**3
```

1

Wollen wir nicht mit den Gesetzen der Division in Widerspruch kommen, lässt dieses Beispiel nur folgende Regel als sinnvoll erscheinen:

P3: $x^0 = 1$

Jeder Potenz (ausgenommen mit der Basis Null) **mit** der **Hochzahl 0** wird der **Wert 1** zugeordnet.

Beispiele: $a^0 = 1$

$8^0 = 1$

$1^0 = 1$

$(-x)^0 = 1$

$(-3x^2y)^0 = 1$

```
from sympy import *
x = symbols("x")
x**0
```

1

Einführungsbeispiel für Potenzregel P4:

Beispiel: $\frac{1}{x^3} = \frac{x^0}{x^3} = x^{0-3} = x^{-3}$

P 3 P 2

```
from sympy import *
x = symbols("x")
x**(-3)
```

$\frac{1}{x^3}$

Mit diesem Beispiel kann nachfolgende Regel formuliert werden:

$$P4: \quad \frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

Man spricht hier vom **Kehrwert einer Potenz**, wobei eigentlich der Kehrwert des Bruches gemeint ist.

Beispiel: Bringen Sie folgende Potenzen aus dem Nenner: $\frac{1}{x^4} = x^{-4}$

$$\frac{4}{3\,x^2} = \frac{4}{3}\,x^{-2}$$

$$\frac{4}{3\,x^2} \neq 4 \cdot 3 \cdot x^{-2}$$

Nur für die **Potenz** (hier x^2) gibt es die **Kehrwertregel**.
Nicht für nachrangige Faktoren.
Außerdem ist doch $\frac{4}{3} = 4 : 3 \neq 4 . 3$

Beispiel: Bringen Sie die Potenz x^{-1} in den Nenner:

$$x^{-1} = \frac{1}{x^1} = \frac{1}{x}$$

Übung

Berechnen Sie folgende Terme, vereinfachen Sie sie soweit wie möglich und stellen Sie im Ergebnis alle Potenzen mit positivem Exponenten dar.

1) $\frac{a^{x-2}\,a^{x+2}}{a^{\,x-1}} =$

2) $\frac{a^{-1}\,x^{-3}\,y^2}{a^{-3}\,b^{-1}} \cdot \frac{a^{-2}\,b^{-2}\,x^0}{x^{-4}\,y} =$

3) $\frac{x^{-1}\,y^4}{x^2} \cdot \frac{x^{n+3}}{y^{n+4}} =$

4) $\frac{u^{2a-b}\,v^{b-2a}}{v^{b-a}\,u} =$

5) $\frac{x^{-1} \cdot y^3 \cdot a^0}{y^2\,a^{-1}} : \frac{a\,y^4\,x}{y^5\,x^2} =$

Lösungen: 1) a^{x+1} 2) $\frac{x\,y}{b}$ 3) $\frac{x^n}{y^n}$ 4) $\frac{u^{2a-b-1}}{v^a}$ 5) y^2

Einführungsbeispiel für Potenzregel P5:

Beispiel: $(x^3)^2 = x^3 \cdot x^3 \overset{P1}{=} x^6 = x^{2\cdot 3}$

```
from sympy import *
x = symbols("x")
(x**3)**2
```

x^6

Leiten wir daraus ab:

$$\text{P5: } (x^n)^m = x^{n\cdot m}$$

Diese Regel gibt an, wie eine **Potenz potenziert** (hochgerechnet) wird.

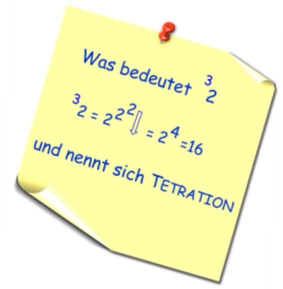
Beispiele: $(x^2)^2 = x^{2\cdot 2} = x^4$

$(a^3)^4 = a^{12}$

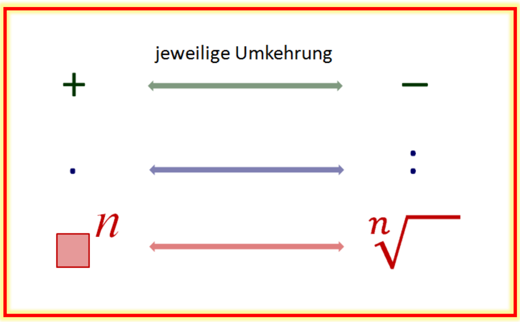
$(-x^3)^2 = +1 \cdot x^6 = +x^6 = x^6$

$(-x^2)^3 = -1 \cdot x^6 = -x^6$

$(-z^5)^0 = z^0 = 1$



$(x^3)^2 = x^{3\cdot 2} = x^6$ während $x^{3^2} = x^9$



Die **Umkehrung** des **Addieren**s ist das **Subtrahieren**,
die Umkehrung des Subtrahierens ist das Addieren.

Die **Umkehrung** des **Multiplizieren**s ist das **Dividieren**,
die Umkehrung des Dividierens ist das Multiplizieren.

Die **Umkehrung** des **Potenzieren**s ist das **Wurzelziehen**,
die Umkehrung des Wurzelziehens ist das Potenzieren.

Aus den obigen Überlegungen lässt sich (zumindest formal, wenn auch nicht anschaulich) die nächste Regel herleiten.

Einführungsbeispiel für Potenzregel P6:

```
from sympy import *
x = symbols("x")
x**(3/2)
```

$x^{\frac{3}{2}}$

```
sqrt(x**3)
```

$\sqrt{x^3}$

Beispiel: $(x^3)^2 = x^{3\cdot 2} \rightarrow \sqrt[2]{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$

Daraus folgern wir:

$$P6: \sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$$

P6 ist eine Regel für das **Wurzelziehen** (Radizieren) aus einer Potenz

radix (lateinisch): die Wurzel  *Radieschen*: kleine Wurzel

Deshalb wählte man für das Wurzelzeichen den stilisierten Buchstaben r: r → ▀ → $\sqrt{}$

Beispiel: Verwandeln Sie die Wurzel in eine Potenz: $\sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{4}{3}}$

Beispiel: Verwandeln Sie die Potenz in eine Wurzel: $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{x^1} = \sqrt{x}$

Beispiel: Stellen Sie folgenden Term als Wurzel dar: $2 \cdot x^{-\frac{1}{3}} \underset{P4}{=} \frac{2}{x^{\frac{1}{3}}} \underset{P6}{=} \frac{2}{\sqrt[3]{x^1}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$

Zuerst Potenzen mit negativen Exponenten nach P4 umwandeln.

Ansonsten: $2 \cdot x^{-\frac{1}{3}} = 2 \cdot \sqrt[-3]{x}$ oder $2 \cdot \sqrt[3]{x^{-1}}$

Beispiel: $\sqrt[5]{\sqrt[4]{x^{10}}} =$

Für die rechnerische Verbindung von Hochrechnungen haben wir „nur" Regeln für Potenzen.
Also verwandeln wir, von innen nach außen, die Wurzen in Potenzen:

$$\sqrt[5]{\sqrt[4]{x^{10}}} \underset{P6}{=} \sqrt[5]{x^{\frac{10}{4}}} \underset{P6}{=} \left(x^{\frac{10}{4}}\right)^{\frac{1}{5}} \underset{P5}{=} x^{\frac{10}{4}\cdot\frac{1}{5}} = x^{\frac{10}{20}} = x^{\frac{1}{2}} \underset{P6}{=} \sqrt[2]{x^1} = \sqrt{x}$$

Beispiel: $\sqrt[3]{x\cdot\sqrt{x^3}} = \sqrt[3]{x\cdot\sqrt[2]{x^3}} = \sqrt[3]{x^1\cdot x^{\frac{3}{2}}} = \sqrt[3]{x^{\frac{5}{2}}} = \left(x^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{3}} = x^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{x^5}$

Partiell (teilweise) Wurzelziehen:

Aus einem Teil der Faktoren wird die Wurzel gezogen.

Beispiel: $\sqrt{8} = \sqrt[2]{2^3} = \sqrt[2]{2^2\cdot 2} = \sqrt[2]{2^2}\cdot\sqrt[2]{2} = 2\cdot\sqrt{2}$

Beispiel: $\sqrt[3]{162} = \sqrt[3]{2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3} = \sqrt[3]{2\cdot 3\cdot 3^3} = \sqrt[3]{6}\,\sqrt[3]{3^3} = \sqrt[3]{6}\cdot 3 = 3\cdot\sqrt[3]{6}$

Beispiel: $\sqrt{4a^2b^3} = \sqrt{2^2\cdot a^2\cdot b^2\cdot b} = \sqrt{2^2}\cdot\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b^2}\cdot\sqrt{b} = 2\cdot a\cdot b\cdot\sqrt{b}$

Nenner rational (wurzelfrei) machen:

Beispiel: $\frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{5\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{5\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{25}} = \frac{\overset{1}{\cancel{5}}\cdot\sqrt{5}}{\underset{1}{\cancel{5}}} = \sqrt{5}$

Beispiel: $\frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}\cdot\frac{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x}} = \frac{x^2\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x}} = \frac{x^2\cdot\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{\overset{x}{\cancel{x^2}}\cdot\sqrt[3]{x^2}}{\underset{1}{\cancel{x}}} = x\cdot\sqrt[3]{x^2}$

Übung

1) Ziehen Sie partiell die Wurzel: a) $\sqrt[3]{54}$ b) $\sqrt{8x^2y^3}$ c) $\sqrt[4]{32a^4b^6}$ d) $\sqrt{\sqrt[3]{m^7}}$

2) Machen Sie den Nenner wurzelfrei (rational): a) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{3\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{5}}$ d) $\frac{i^2}{\sqrt{i^3}}$ mit i als imaginärer Einheit

Lösungen:

1) a) $3\sqrt[3]{2}$ b) $2xy\sqrt{2y}$ c) $2ab\sqrt[4]{2b^2}$ d) $m\cdot\sqrt[6]{m}$

2) a) $\sqrt{2}$ b) $\frac{3\sqrt[3]{12}}{2}$ c) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ d) $\sqrt{-i}$

Einführungsbeispiel für Potenzregel P7:

Beispiel: $(x \cdot y)^3 = (x \cdot y) \cdot (x \cdot y) \cdot (x \cdot y) = x \cdot y \cdot x \cdot y \cdot x \cdot y = \underbrace{x \cdot x \cdot x}_{= x^3} \cdot \underbrace{y \cdot y \cdot y}_{= y^3} = x^3 \cdot y^3$

Verallgemeinert gilt:

$$P7: \ (x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$$

Beispiele:

$(2x)^2 = (2 \cdot x)^2 = 2^2 \cdot x^2 = 4 \cdot x^2 = 4\,x^2$

$(3a^2)^3 = (3 \cdot a^2)^3 = 3^3 \cdot (a^2)^3 = 27\,a^6$

```
from sympy import *
x,y = symbols("x, y")
(-2*x*y**2)**2
```

$4x^2y^4$

$(-2xy^2)^2 = 4\,x^2y^4$

$9x^2 = 9 \cdot x^2 = 3^2 \cdot x^2 = (3 \cdot x)^2$

Einführungsbeispiel für Potenzregel P8:

Beispiel: $\left(\frac{x}{y}\right)^3 = \left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} = \frac{x \cdot x \cdot x}{y \cdot y \cdot y} = \frac{x^3}{y^3}$

Brüche werden **multipliziert**, indem man die **Zähler mit** den **Zählern** und die **Nenner mit** den **Nennern multipliziert**.

Davon abgeleitet ergibt sich:

$$P8: \ \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

Die Regeln P 7 und P 8 beschreiben, von links nach rechts gelesen, das **Auflösen einer Potenz, in deren Basis Faktoren** stehen.

Beispiele: $\left(\frac{x}{3}\right)^2 = \frac{x^2}{3^2} = \frac{x^2}{9}$

$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \neq \frac{3}{5}$

Manchmal wird das Kürzen eines Bruches, also das Dividieren des Zählers und Nenners durch den gleichen Ausdruck, mit dem Wurzelziehen verwechselt, denn nur

$$\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$$

Beispiel: $\left(-\frac{4\,a^2\,b}{3\,x\,y^3}\right)^2 = +1 \cdot \frac{4^2\,(a^2)^2\,b^2}{3^2\,x^2\,(y^3)^2} = \frac{16\,a^4\,b^2}{9\,x^2\,y^6}$

```python
from sympy import *
```

```python
a, b, x, y = symbols("a b x y")
```

```python
(-4*a**2*b/(3*x*y**3))**2
```

$$\frac{16a^4b^2}{9x^2y^6}$$

Man darf **nur faktorenweis (. :) getrennt hochrechnen oder Wurzel ziehen**,

nie gliedweise (+ −) !

Beispiele:

$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2 \qquad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \cancel{= a^2 + b^2} \qquad \sqrt{a+b} \cancel{= \sqrt{a} + \sqrt{b}}$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \cancel{= a^2 - b^2} \qquad \sqrt{a-b} \cancel{= \sqrt{a} - \sqrt{b}}$

!

Siehe auch 2.2.5, S 87 f

Zusammenfassend

Potenzen

P1	$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$	P5	$(x^n)^m = x^{n \cdot m}$
P2	$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$	P6	$\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$
P3	$x^0 = 1$	P7	$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$
P4	$\frac{1}{x^m} = x^{-m}$	P8	$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$

Übung

Berechnen und vereinfachen Sie folgende Terme.
Stellen Sie Potenzen mit positiver Hochzahl dar,
Potenzen mit rationaler Hochzahl als eine Wurzel und vereinfachen Sie das Ergebnis durch partielles Wurzelziehen bzw. rational Machen des Nenners.

1) $\frac{a^{x-2}\left(a^{x-2}\right)^{-2}}{a^{3(x+1)}} =$

2) $\frac{\left(x^4 y^{-2}\right)^{-3}}{(x^{-2}\, y^{-3})^5} =$

3) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^6}} =$

4) $\left(\sqrt{5} + \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{5}\,\sqrt{5}}\right)^2 =$

5) $\sqrt[n]{\frac{\sqrt[mn]{a^{m^2-n^2}}}{\sqrt[nm]{a^{m^2+n^2}}} : \frac{1}{\sqrt[m]{a^{3n}}}} =$

6) $\sqrt[ak]{3^{k(a+b)}} =$

7) $\sqrt{\sqrt{x^4\,\sqrt[3]{x^8}}} =$

8) $e^{1-2i} \cdot e^{2i-1} =$

9) $\frac{2a^{4-3x} \cdot \left(a^{x-3}\right)^2}{a^{x+3}} =$

10) $e^{2^i+2}\, e^{2^i-2} =$

11) $(a-b)^{2x-1} \cdot \frac{a^{2x}}{b} =$

12) $\sqrt[3]{a} \cdot a^2 =$

13) $2\sqrt{2^3}\; 4\sqrt[2]{4} =$

14) $\frac{-a^2\, a^2}{-a^{4-x}} =$

15) $\frac{-m^3}{(-m)^4} =$

16) $\sqrt[3]{\sqrt[2]{a^6}} =$

17) $4\sqrt{2\sqrt[2]{2}} =$

18) $\frac{a \cdot \sqrt{a \cdot \sqrt[3]{a}}}{2a\sqrt[3]{a}} =$

19) $\left(-\frac{3\sqrt[4]{x^3} - y^2}{4}\right)^0 =$

20) $e^{i5t} - e^{-i5t}$

Lösungen:

1) $\frac{1}{a^{4x+1}}$ 2) $\frac{y^{21}}{x^2}$ 3) $\sqrt{x}$ 4) 20 5) $\sqrt[m]{a}$

6) $\sqrt[a]{3^{a+b}}$ 7) $x\,\sqrt[3]{x^2}$ 8) 1 9) $\frac{2}{a^{2x+5}}$ 10) $e^{2.2^{i}}$

11) $(a-b)^{2x-1}\cdot\frac{a^{2x}}{b}$ 12) $a^2\sqrt[3]{a}$ 13) $2^5\sqrt{2} = 32\cdot\sqrt{2}$

14) a^x 15) $-\frac{1}{m}$ 16) a

17) $4\sqrt[4]{2^3}$ 18) $\frac{\sqrt[3]{a}}{2}$ 19) 1 20) $\frac{e^{i10t}-1}{e^{i5t}}$

P1 bis P8 liefern **Regeln für** die Verbindung von **Potenzen mit Hoch- und Punktrechnung**.

Gilt noch die Frage zu klären, ob bzw. unter welchen Bedingungen Potenzen addiert oder subtrahiert werden können.

Beispiel: $7a + 4b - 3a - 2b =$

Stellen wir uns für **a Äpfel** und für **b Birnen** vor, so wird es nur sinnvoll sein, Äpfel mit Äpfeln und Birnen mit Birnen zu vergleichen.

$$7a + 4b - 3a - 2b = 4a + 2b$$

Beispiel: $6a^2 + 5a - 2a^2 - 3a =$

Folgender Vergleich hilft:

Ein Obsthändler bietet zwei Apfelsorten an. Die Sorte a^2 *und die Sorte* a.

Zu Beginn des Tages besitzt er 6 (Kisten) der Sorte a^2 *und 5 (Kisten) der Sorte* a.

Im Laufe des Tages verkauft der Händler 2 (Kisten) der Sorte a^2 *und 3 (Kisten) der Sorte* a.

Entsprechende Nachbestellungen ordern zu können, muss wohl der Umsatz beider Apfelsorten getrennt berücksichtigt werden. Das führt uns auf folgende Rechnung:

$$6a^2 + 5a - 2a^2 - 3a = 4a^2 + 2a$$

Diese beiden Beispiele belegen:

> **Man darf nur Glieder (+ −) mit gleichen Potenzen addieren oder subtrahieren.**
>
> **Gleiche Potenzen** besitzen die **gleiche Basis UND** die **gleiche Hochzahl**.

Beispiel: $3\,a^2 b + 3\,a\,b^2 + 3\,a\,b - 3\,b\,a^2 - 3\,a\,b^2 + a\,b =$

Man sieht relativ leicht, dass das zweite und vorletzte Glied, sowie das dritte und letzte Glied jeweils gleiche Potenzen besitzen.
Doch auch das erste und vierte Glied besitzen die gleichen Potenzen a^2 und b .
Damit man nicht Glieder mit gleichen Potenzen übersieht, ist es vorteilhaft,
die Potenzen innerhalb eines Gliedes bezüglich der Basis alphabetisch zu ordnen.

$= 3\,a^2 b + 3\,a\,b^2 + 3\,a\,b - 3\,b\,a^2 - 3\,a\,b^2 + a\,b =$

$= \underline{3\,a^2 b} \underline{+3\,a\,b^2} \underline{+3\,a\,b} \underline{-3\,a^2 b} \underline{-3\,a\,b^2} \underline{+a\,b} = 4\,a\,b$

Ein weiterer Aspekt:

$+(-2\,x + 3\,y) = -2\,x + 3\,y$

Steht **vor einer Klammer** ein **+** , so **behalten die Glieder** in der Klammer beim Auflösen **ihr Vorzeichen**.

$-(-2\,x + 3\,y) = +2\,x - 3\,y$

Steht **vor einer Klammer** ein **−** , sind die **Vorzeichen der Glieder** in der Klammer beim Auflösen zu **ändern**.

Die Begründungen erfolgen in Kapitel 2.2.3., S 86.

Beispiel: $3\,x^2 - (2\,x^2 - 5) = 3\,x^2 - 2\,x^2 + 5 = x^2 + 5$

Beispiel: $-x^2 - [-x^2 - (-x^2 - 1)] = -x^2 - [-x^2 + x^2 + 1] = -x^2 - [+1] = -x^2 - 1$

```python
from sympy import *
x = symbols("x")
-x**2-(-x**2-(-x**2-1))
```

$-x^2 - 1$

(454) MAY 04 Rechenregeln für Potenzen - YouTube

2.2.3. Multiplikation von Monom und Klammer

Monom: ein **ein**gliedriger Ausdruck

Beispiel: $(2x^2 - 3) \cdot \underbrace{(-4x)}_{\text{Monom}} = -8x^3 + 12x$

1) Vorzeichen: $+ \cdot - = -$
2) Vorzahlen: $2 \cdot 4 = 8$
3) Potenzen: $x^2 \cdot x = x^3$

Jedes Glied der Klammer wird **mit dem Monom multipliziert**.

Wir könnten obiges Beispiel auch so anschreiben, da ja die Multiplikation vertauschbar ist:

$$-4x \cdot (2x^2 - 3) = -8x^3 + 12x$$

Welche der Schreibweisen wirkt einfacher?

Noch ein **Beispiel:** $4x \cdot (2x + 1) - 2x \cdot (2x - 1) = 8x^2 + 4x - 4x^2 + 2x = 4x^2 + 6x$

Warum bleiben die Vorzeichen unverändert, wenn vor einer Klammer ein **+** steht und warum sind bei einem **–** vor der Klammer die Vorzeichen zu ändern?

$+(-2x + 3y) = +1 \cdot (-2x + 3y) = -2x + 3y$

Das **+** vor der Klammer bedeutet eigentlich die Vorzahl **+ 1**, mit der die Klammer multipliziert wird.

$-(-2x + 3y) = -1 \cdot (-2x + 3y) = +2x - 3y$

Das **–** vor der Klammer bedeutet eigentlich die Vorzahl **– 1**, mit der die Klammer multipliziert wird.

2.2.4. Multiplikation von Klammern

Beispiel: $(3x - 2y) \cdot (2x + 5y) = 6x^2 + 15xy - 4xy - 10y^2 = 6x^2 + 11xy - 10y^2$

Jedes Glied der einen Klammer wird
mit jedem Glied der anderen Klammer multipliziert.

Beispiel: $(2x - 1) \cdot (2x + 1) - x(4x - 1)$

$= 4x^2 + 2x - 2x - 1 - 4x^2 + x = -1 + x$

Beachte: $-1 + x = x - 1$

```python
from sympy import *
x = symbols("x")
expand((2*x-1)*(2*x+1)-x*(4*x-1))
```

$x - 1$

2.2.5. Binomische Formeln

$$(A + B)^2 = A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2 \neq A^2 + B^2$$
$$(A - B)^2 = A^2 - 2 \cdot A \cdot B + B^2 \neq A^2 - B^2$$
$$(A - B) \cdot (A + B) = A^2 - B^2$$

Bemerkung: Die Binomischen Formeln gibt es auch für höhere Potenzen, also für $(A \pm B)^3$, $(A \pm B)^4$ u.s.w.

Beispiel: $(2x - 3y)^2 =$

$(\boxed{A} - \boxed{B})^2 = \boxed{A}^2 - 2 \cdot \boxed{A} \cdot \boxed{B} + \boxed{B}^2$

$(\boxed{2x} - \boxed{3y})^2 = (\boxed{2x})^2 - 2 \cdot \boxed{2x} \cdot \boxed{3y} + (\boxed{3y})^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$

Beispiel: $(2x - 1)^2 - (2x - 1) \cdot (2x + 1) = 4x^2 - 4x + 1 - (4x^2 - 1) = 4x^2 - 4x + 1 - 4x^2 + 1 =$

$= -4x + 2$

Beispiel: $(a^2 - a) \cdot (a + 1) - a \cdot (a - 1) \cdot (a + 1) = a^3 + a^2 - a^2 - a - a \cdot (a^2 - 1) = a^3 - a - a^3 + a = 0$

Beispiel: $(a + b - c)^2 = (a + b - c) \cdot (a + b - c) = a^2 + a \cdot b - a \cdot c + a \cdot b + b^2 - b \cdot c - a \cdot c - b \cdot c + c^2 =$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot a \cdot b - 2 \cdot a \cdot c - 2 \cdot b \cdot c$

```python
from sympy import *
a, b, c = symbols("a b c")
expand((a+b-c)**2)
```

$a^2 + 2ab - 2ac + b^2 - 2bc + c^2$

Will man die **Koeffizienten** (Vorzahlen) beim **Potenzieren von Binomen** „händisch“ ermitteln, bietet sich das **PASCALsche** [12] **Dreieck** an:

$(a + b)^0$ $\quad 1$

$(a + b)^1$ $\quad 1 \cdot a^1 \cdot b^0 + 1 \cdot a^0 \cdot b^1$

$(a + b)^2$ $\quad 1 \cdot a^2 \cdot b^0 + 2 \cdot a^1 \cdot b^1 + 1 \cdot a^0 \cdot b^2$

$(a + b)^3$ $\quad 1 \cdot a^3 \cdot b^0 + 3 \cdot a^2 \cdot b^1 + 3 \cdot a^1 \cdot b^2 + 1 \cdot a^0 \cdot b^3$

$(a + b)^4$ $\quad 1 \cdot a^4 \cdot b^0 + 4 \cdot a^3 \cdot b^1 + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot a^1 \cdot b^3 + 1 \cdot a^0 \cdot b^4$

u.s.w.

Mathematisch werden die Koeffizienten mit dem sogenannten **Binomialkoeffizienten** $\binom{n}{k}$ bestimmt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

mit $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ und $0! = 1$ und $1! = 1$

siehe S 89

und $k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

Allgemein lautet der Binomische Lehrsatz:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots\ldots + \binom{n}{n-1} \cdot a^1 \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot a^0 \cdot b^n$$

Beispiel: $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 10$

[12] Blaise PASCAL (1623 – 1662): französischer Mathematiker, Physiker, Literat und Philosoph

Beispiel: $(a-b)^3 = \binom{3}{0} \cdot a^3 \cdot b^0 - \binom{3}{1} \cdot a^2 \cdot b^1 + \binom{3}{2} \cdot a^1 \cdot b^2 - \binom{3}{3} \cdot a^0 \cdot b^3 =$

$= 1 \cdot a^3 \cdot 1 - 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 - 1 \cdot 1 \cdot b^3 =$

$= a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 - b^3$

Beispiel: [13] Der Binomische Lehrsatz lässt sich mittels Summenformel so darstellen: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$

Demnach ist $(1+x)^{20} = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} \cdot 1^k \cdot x^{20-k}$ Geben Sie den Koeffizienten vor x^{16} an.

$\binom{20}{4} \cdot 1^4 \cdot x^{20-4} = \mathbf{4\,845}\, x^{16}$

Warum sind 0! Und 1! = 1 ?

n! = n · (n–1) · (n–2) · (n–3) · … · 2 · 1 = n · (n–1)!

4! = 4 · 3 · 2 · 1 = 4 · 3!   3! = 3 · 2!   2! = 2 · 1!   1! = 1 · 0!

2 · 1 = 2 · 1!   1 = 1 · 0! | : 1

2 = 2 · 1! | : 2   **1 = 0!**

1 = 1!

Übung Berechnen und vereinfachen Sie soweit wie möglich:

1) $2a^2b + 2ab^2 - 2b^2a - 2a^2b =$ 2) $-a^2\left(1 - a^2 - (1 - a^2)\right) =$

3) $-x^2(x^2-1) - (1-x^2)(x^2+1) =$ 4) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 =$ 5) $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^2 =$

Lösungen: 1) 0   2) 0   3) $x^2 - 1$ 4) $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$ 5) $\frac{a^2}{b^2} - 2 + \frac{b^2}{a^2}$

Weitere Übungsmöglichkeiten:

http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/kurs/terme1.pdf

[13] E. WEITZ. In: https://www.youtube.com/watch?v=d0uV_Oia9AI

2.2.6. Zerlegen von Termen

2.2.6.1. Zerlegen EINgliedriger Terme

Beispiel: $36\,x^2y$

Zahlen werden in ihre **Primfaktoren** zerlegt, **Potenzen** in ihrer **ausführlichen Schreibweise** angeschrieben.

Primfaktoren: Mit mal verbundene Primzahlen (siehe 1.1.1., S 4)

Beispiel:

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Aus Gründen der Übersicht dividiert man die jeweilige Zahl durch die jeweils **kleinstmögliche** Primzahl

$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

$x^2 = x \cdot x$

$y = y$

Damit ist $36\,x^2y$ zerlegt $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot y$

2.2.6.2. Zerlegen MEHRgliedriger Terme

Gemeint sind **mehr als ein**gliedrige Terme.

2.2.6.2.1. Zerlegen durch Herausheben (Ausklammern)

Beispiel: $8\,x^3y^2 - 6xy^2$

Jene **Faktoren**, die **in jedem Glied** vorkommen, werden **herausgehoben** (**ausgeklammert**).

Als **Hilfe**, **NICHT als Zerlegung**, kann man jedes Glied für sich wie in 2.2.6.1. zerlegen:

$$8\,x^3y^2 - 6xy^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y - 2 \cdot 3 \cdot x \cdot y \cdot y = 2 \cdot x \cdot y \cdot y \cdot (2 \cdot 2 \cdot x \cdot x - 3) =$$

$$= 2 \cdot x \cdot y^2 \cdot (4\,x^2 - 3)$$

Probe: $2 \cdot x \cdot y^2 \cdot (4\,x^2 - 3) = 8\,x^3y^2 - 6\,x\,y^2$

Beispiel: $2\,a^2 + a = 2 \cdot a \cdot a + 1 \cdot a = a \cdot (2 \cdot a + 1)$

```
from sympy import *
a = symbols("a")
factor(2*a**2+a)
```

$a\,(2a + 1)$

2.2.6.2.2. Zerlegen mit Binomischen Formeln

Beispiel:

$$\boxed{\begin{matrix}16\,x^2\\ A^2\end{matrix}}\begin{matrix}-\,24\,x\,y\\ -\,2\cdot A\cdot B\end{matrix}\boxed{\begin{matrix}+\,9\,y^2\\ +\,B^2\end{matrix}}\begin{matrix}=\\=\end{matrix}\begin{matrix}(4\,x-3\,y)\cdot(4\,x-3\,y)\\ (A-B)^2=(A-B)\cdot(A-B)\end{matrix}$$

$\rightarrow A = 4\,x \qquad B = 3\,y$

Probe, ob es auch für das Mittelglied stimmt:

$$-2\cdot A\cdot B = -2\cdot 4\cdot x\cdot 3\,y = -24\,x\,y$$

```python
from sympy import *
x, y = symbols("x y")
factor(16*x**2-24*x*y+9*y**2)
```

$(4x-3y)^2$

Python schreibt als Resultat $(4x-3y)^2$ und nicht $(4x-3y)\,.\,(4x-3y)$

Beispiel:

$$\boxed{\begin{matrix}16\,x^2\\ A^2\end{matrix}}\begin{matrix}-\\-\end{matrix}\boxed{\begin{matrix}9\,y^2\\ B^2\end{matrix}}\begin{matrix}=(4\,x-3y)\cdot(4\,x+3\,y)\\ =(A\;-B\,)\cdot(A\;+B\,)\end{matrix}$$

$A = 4\,x \quad B = 3\,y$

```python
from sympy import *
x, y = symbols("x y")
factor(16*x**2-9*y**2)
```

$(4x-3y)(4x+3y)$

$A^2 + B^2$ ist **NICHT** zerlegbar!

2.2.6.2.2. Zerlegen durch Probieren

Beispiel: $x^2 + 2x - 15 =$

Überlegung:

Herausheben: *Nicht* möglich, weil keine gemeinsamen Faktoren vorhanden.

Binomischer Lehrsatz: *Nein*, weil $(-)15$ keine Quadratzahl ist.

$x^2 + 2x - 15 = (x \quad) \cdot (x \quad)$ In jeder Klammer muss der Faktor x vorkommen, weil im dreigliedrigen Term x^2 steht und nur $x \cdot x = x^2$

$-15 = -3 \cdot 5$ oder $-15 = 3 \cdot (-5)$

Setzen wir die beiden Varianten als zweites Glied in die Klammern und kontrollieren, welche den gegebenen Term ergibt:

$$x^2 + 2x - 15 = (\mathbf{x - 3}) \cdot (\mathbf{x + 5}) = x^2 + 5x - 3x - 15 = x^2 + 2x - 15 \checkmark$$

$$x^2 + 2x - 15 = (x + 3) \cdot (x - 5) = x^2 + 3x - 5x - 15 = x^2 - 2x - 15 \text{ falsch}$$

```
from sympy import *
x = symbols("x")
factor(x**2+2*x-15)
```

$(x - 3)(x + 5)$

Bemerkung: Man kann Polynome auch mit Hilfe der Wurzelsatzes von VIÈTA zerlegen (siehe 3.1.2.2., S 121).

Übung

Zerlegen Sie folgende Terme soweit wie möglich:

1) $6a^2b$ 2) $3x^2 - 6x$ 3) $ab - a$ 4) $12x^2y - 6xy + 4xy^2$

5) $a^2 - 4a + 4$ 6) $9x^2 + 12xy + 4y^2$ 7) $4m^2 - n^2$

8) $a^4 - 1$ 9) $x^2 + x - 12$ 10) $2x^2 + 3x - 2$

Lösungen:

1) $2 \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot b$ 2) $3x(x - 2)$ 3) $a(b - 1)$ 4) $2xy(6x - 3 + 2y)$

5) $(a - 2)^2$ 6) $(3x + 2y)^2$ 7) $(2m - n)(2m + n)$

8) $(a^2 - 1)(a^2 + 1)$ 9) $(x - 3)(x + 4)$ 10) $(2x - 1)(x + 2)$

2.3. Polynomdivision

Prinzipiell funktioniert das Dividieren mehrgliedriger Terme (Polynome) wie bei Zahlen:

Beispiel:

$$(x^3 - 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 6) : (x - 1) =$$

Die Glieder in den Polynomen müssen nach fallenden Potenzen geordnet sein.

$$(x^3 - 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 6) : (\boxed{x} - 1) = \mathbf{x^2 - x - 6}$$

$$\underline{\pm x^3 \mp 1 \cdot x^2}$$

$$0 \quad -1 \cdot x^2 - 5 \cdot x$$

$$\underline{\mp 1 \cdot x^2 \pm 1 \cdot x}$$

$$0 \quad -6 \cdot x + 6$$

$$\underline{\mp 6 \cdot x \pm 6}$$

$$0 \qquad 0$$

Man fragt:
Wie oft ist das Glied mit der höchsten Potenz des Divisors (x) im höchsten Glied des Dividenden (x^3) enthalten: Wohl x^2-mal, wie das Ausmultiplizieren zeigt. Dann werden die Glieder des Divisors mit x^2 multipliziert und von den entsprechenden Gliedern des Dividenden abgezogen (deshalb der Vorzeichenwechsel). Neben das dadurch erhaltene Ergebnis schreibt man das nächste Glied des Divisors.⇩

Jetzt fragt man, wie oft das Glied mit der höchsten Potenz des Divisors (x) im höchsten Glied des derzeitigen Ergebnisses enthalten ist und fährt so fort wie eben.

Die Division ist beendet, wenn kein Glied des Dividenden mehr herunterzuschreiben ist.

Übung

Führen Sie folgende Polynomdivisionen durch:

1) $(x^3 + x^2 - 9x + 7) : (x - 1) =$

2) $(x^3 - 12x^2 + 5x + 150) : (x - 5) =$

3) $(2x^4 - 6x^2 + 4) : (x^2 - 1) =$

Lösungen: 1) $x^2 + 2x - 7$ 2) $x^2 - 7x - 30$ 3) $2x^2 - 4$

Weitere Übungsmöglichkeiten: http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/kurs/terme2.pdf

2.4. Rechnen mit Bruchtermen

Bruchterme sind **Brüche**, bei denen **zumindest im Nenner** eine **Variable** steht.

Beispiele: $\frac{6}{x-5}$ $\frac{a^2-2ab}{a}$

Brüche und Bruchterme sind dann definiert, wenn im Nenner **NICHT** null steht.

2.4.1. Definitionsmenge

Brüche und Bruchterme sind dann definiert, wenn im Nenner **NICHT** Null steht.

Beispiele: $\frac{12}{4} = 3$ Probe: $3 \cdot 4 = 12$

$\frac{12}{\mathbf{0}} = 0$ Probe: $0 \cdot \mathbf{0} = 0 \neq 12$ Also kann $\frac{12}{\mathbf{0}}$ nicht 0 sein!

$\frac{12}{\mathbf{0}} = 12$ Probe: $12 \cdot \mathbf{0} = 0 \neq 12$ Also kann $\frac{12}{\mathbf{0}}$ nicht 12 sein!

Es sei z jede beliebige Zahl:

$\frac{12}{\mathbf{0}} = z$ Probe: $z \cdot \mathbf{0} = 0 \neq 12$

Also kann $\frac{12}{\mathbf{0}}$ keine Zahl (und auch nichts anderes!!) ergeben!

Man sagt: Ein Bruch mit dem Nenner Null ist nicht definiert (nicht festgelegt).

Auch der Bruch $\frac{0}{\mathbf{0}}$ ist NICHT definiert!

Würden wir annehmen, dass $\frac{0}{\mathbf{0}} = 1$, weil ja im Zähler und Nenner die gleiche Zahl steht, führte das zu folgendem Widerspruch:

$\frac{0}{\mathbf{0}} = 0$ Probe: $0 \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ $\frac{0}{\mathbf{0}} = 1$ Probe: $1 \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$

Es sei z jede beliebige Zahl:

$\frac{0}{\mathbf{0}} = z$ Probe: $z \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$

Wir können jede Zahl einsetzen und erhalten bei der Probe immer eine wahre (richtige) Aussage!

Demnach ist der Bruch $\frac{0}{\mathbf{0}}$ **un**bestimmt.

Ein Bruch mit dem Zähler Null und dem Nenner ungleich Null ist hingegen eindeutig bestimmt:

$\frac{0}{2} = 0$ Probe: $0 \cdot 2 = \mathbf{0}$

Denken Sie ans Wochenende:

Wenn man an einem Abend null Halbe (Krügerl, große, …) Bier trinkt, hat man exakt null Liter Bier konsumiert.

Beispiele: Für welche reelle Zahlen ist der Bruchterm $\frac{2 \cdot x}{x-1}$ mit $G = \mathbb{R}$ definiert?

Der Bruchterm ist für alle reellen Zahlen definiert, für die der Nenner NICHT Null ist.

Wir setzen den Nenner gleich Null und bestimmen somit jene reellen Zahlen, für die der Nenner NICHT definiert ist:

$x - 1 = 0 \quad | + 1$

$x = 1$

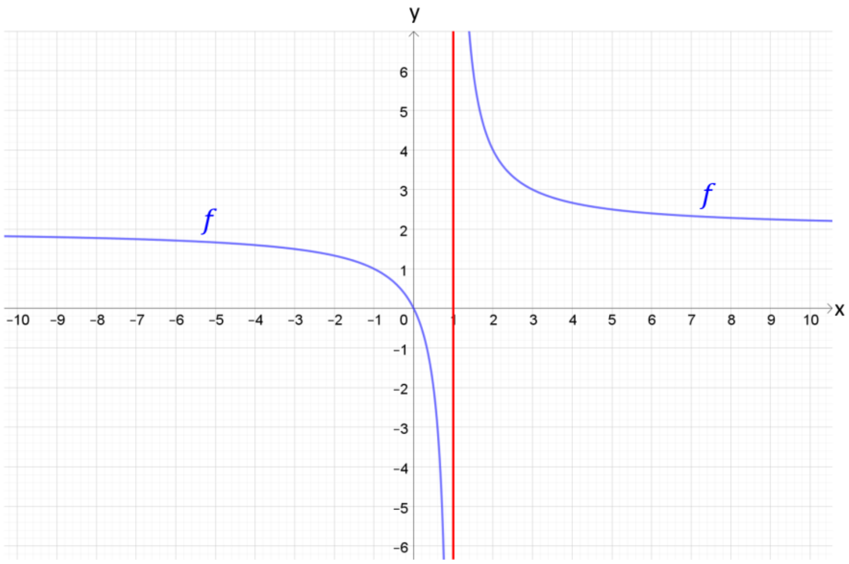
Da dieser Nenner für $x = 1$ Null wird, muss er aus der Grundmenge (hier $\mathbb{R}$) ausgeschlossen werden. Das liefert die Definitionsmenge D:

$D = \mathbb{R} \backslash \{\mathbf{1}\}$

Die Stelle, an der der Nenner null wird und der Bruchterm nicht definiert ist, nennt man **Polstelle**.

Siehe auch 7.8.1., S 383 f

Eine Voranzeige:



Die Definitionsmenge ist bei rationalen Funktionen (siehe 7.4., S 363 f) von Bedeutung.

An denjenigen Stellen (x-Werten), an denen die Funktion nicht definiert ist, gibt es keinen Funktionswert (y-Wert). Dort nähert sich der Graph der Funktion einer senkrechten Geraden (Asymptoten) an (sog. Pol).

Kann ich's?

Dieser kleine Test gibt hier Gelegenheit um zu überprüfen, ob grundlegendes Wissen über Bruchterme vorhanden ist.

Welche der folgenden Terme ist richtig umgeformt? Stellen Sie gegebenenfalls das Ergebnis mit Hilfe der Angabe (des linken Terms) richtig. [14]

1) $\frac{a+x}{b+x} = \frac{a}{b}$

2) $\frac{ax+by}{x+y} = a+b$

3) $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

4) $\frac{x}{y} + 1 = \frac{x+1}{y}$

5) $c\,\frac{a}{m} = \frac{ca}{cm}$

6) $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \frac{a+b}{xy}$

[14] Idee: Edmund Weitz, HAW Hamburg

Es ist keine der Umformungen richtig. 1) $\frac{a+x}{b+x}$ 2) $\frac{ax+by}{x+y}$ 3) $\frac{1}{x+y}$ 4) $\frac{x+y}{y}$ 5) $\frac{ca}{m}$ 6) $\frac{ay+bx}{xy}$

2.4.2. Addieren und Subtrahieren von Bruchtermen

Beispiel: $\frac{3}{2}+\frac{1}{4}=$

Man darf **Brüche nur addieren bzw. subtrahieren**, wenn sie **gleiche Nenner** besitzen.

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3\cdot 4+1\cdot 2}{2\cdot 4}=\frac{12+2}{2\cdot 4}=\frac{14}{2\cdot 4}=$$

Beachten Sie, dass jeder Zähler mit den Faktoren zu multiplizieren ist, die dem Einzelnenner zum gemeinsamen Nenner **fehlen**.

Am Ende kürzt man den Bruch, wenn möglich.

$$=\frac{\overset{7}{\cancel{14}}}{\underset{1}{\cancel{2}}\cdot 4}=\frac{7}{4}$$

Beispiel:

$$\frac{a}{ab+b^2}-\frac{b}{a^2+ab}-\frac{a-b}{2ab}=$$

① Die einzelnen Nenner werden entsprechend zerlegt.

② Mit den zerlegten Nennern wird der **kleinste gemeinsame Nenner N** bestimmt: das kleinste gemeinsame Vielfache der einzelnen Nenner. Dazu werden alle Faktoren gewählt, die in den einzelnen Zerlegungen vorkommen und zwar **so oft sie in einer einzelnen Zerlegung am häufigsten** auftreten.

③ Jetzt ermittelt man die Erweiterungsfaktoren (Ef), das sind jene Faktoren, die dem einzelnen Nenner zum N fehlen.

		Ef
①	$N_1:\ ab + b^2 = b \cdot (a+b)$	$2 \cdot a$
	$N_2:\ a^2 + ab = a \cdot (a+b)$	$2 \cdot b$
	$N_3:\ 2ab = 2 \cdot a \cdot b$	$(a+b)$
②	$\boldsymbol{N = 2 \cdot a \cdot b\,(a+b)}$	

! Beachten Sie, dass **Klammern als Ganzes Faktoren** sind.

④ In den Nenner schreibt man $\boldsymbol{N}$.

⑤ Mehrgliedrige Zähler einklammern.

⑥ Die Zähler werden mit ihren Ef multipliziert.

⑦ Der Zähler wird soweit wie möglich berechnet.

$$= \frac{a \cdot 2 \cdot a - b \cdot 2 \cdot b - (a-b) \cdot (a+b)}{\boldsymbol{N}} = \frac{2a^2 - 2b^2 - (a^2 - b^2)}{\boldsymbol{N}} = \frac{2a^2 - 2b^2 - a^2 + b^2}{\boldsymbol{N}} = \frac{a^2 - b^2}{\boldsymbol{N}} =$$

⑧ Das Ergebnis des Zählers wird, wenn möglich entsprechend zerlegt, der zerlegte N wird angeschrieben und der Bruch wird, wenn möglich, gekürzt.

$$= \frac{(a-b) \cdot \cancel{(a+b)}^{\,1}}{\boldsymbol{2 \cdot a \cdot b \cdot \cancel{(a+b)}}_{\,1}} = \frac{(a-b)}{2 \cdot a \cdot b}$$

```
from sympy import *
a, b = symbols("a b")
simplify(a/(a*b+b^2)-b/(a^2+a*b)-(a-b)/(2*a*b))
```

$$\frac{a-b}{2ab}$$

Man darf einen Bruch nur dann kürzen,
wenn im Zähler und Nenner alles mit mal verbunden ist.
Vorhandene Strichrechnung muss in Klammern stehen.

Beispiele:

Beispiel	$\frac{x+1}{x}$	$\frac{2\cdot(x+1)}{x}$	$\frac{x\cdot(x+1)}{x}$
DARF ich kürzen?	✗	✓	✓
KANN ich kürzen?	✗	✗	✓
			$\frac{\cancel{x}^{1}\cdot(x+1)}{\cancel{x}_{1}} = x+1$

Beispiel: $\frac{a}{x+3}+\frac{3a}{x-5}+\frac{8a}{x^2-2x-15}=$

	Ef
N_1: $x+3 = (x+3)$	$(x-5)$
N_2: $x-5 = (x-5)$	$(x+3)$
N_3: $x^2-2x-15 = (x+3)\cdot(x-5)$	—
N: $(x+3)\cdot(x-5)$	

$$= \frac{a\cdot(x-5)+3a\cdot(x+3)+8a}{N} = \frac{ax-5a+3ax+9a+8a}{N} = \frac{4ax+12a}{N} = \frac{4a\cdot\cancel{(x+3)}^{1}}{\cancel{(x+3)}_{1}\cdot(x-5)} = \frac{4a}{x-5}$$

Aufgaben aus einem Aufnahmetest einer *deutschen Technischen Universität*:

1) $\frac{(2x^3y^2)^4}{(4x^2y)^2}=$

2) $\frac{1-k^2}{k^8}+\frac{1+k}{k^6}-\frac{1}{k^5}=$

3) $\frac{a^m+a^n}{a^m-a^n}+\frac{a^m-a^n}{a^m+a^n}-\frac{a^{2m}+a^{2n}}{a^{2m}-a^{2n}}=$

Lösungen: 1) x^8y^6 2) $\frac{1}{k^8}$ 3) $\frac{a^{2m}+a^{2n}}{a^{2m}-a^{2n}}$ Tipp: $a^{2m}-a^{2n}=(a^m)^2-(a^n)^2$

2.4.3. Multiplizieren von Bruchtermen

Beispiel: $\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{9} =$

Brüche werden **multipliziert**,
indem man
die **Zähler mit den Zählern** und die **Nenner mit den Nennern multipliziert**.

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{n}} \cdot \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{m}} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{m}}}$$

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{9} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot \overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{2}{\cancel{8}} \cdot \underset{3}{\cancel{9}}} = \frac{1}{6}$$

Wenn möglich, **vor dem Ausmultiplizieren** kürzen.

Beispiel: $\frac{x^2 - x}{4\,x^2} \cdot \frac{2\,x}{x-1} =$

Zähler **und** Nenner werden vor dem Ausmultiplizieren zerlegt.

Z₁: $x^2 - x = x \cdot (x-1)$ Z₂: $2\,x = 2 \cdot x$

N₁: $4\,x^2 = 2 \cdot 2 \cdot x \cdot x$ N₂: $x - 1 = (x-1)$

$$= \frac{x \cdot (x-1)}{2 \cdot 2 \cdot x \cdot x} \cdot \frac{2\,x}{(x-1)} = \frac{x \cdot (x-1) \cdot 2 \cdot x}{2 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot (x-1)} = \frac{1}{2}$$

```
from sympy import *
x = symbols("x")
simplify((x^2-x)/(4*x^2)*2*x/(x-1))
```

$\frac{1}{2}$

2.4.4. Dividieren von Bruchtermen

Beispiel: $\frac{4}{9} : \frac{2}{3} =$

Brüche werden **dividiert**,
indem man
den **ersten Bruch mit dem Kehrwert des zweiten Bruches multipliziert**.

$$\boxed{\frac{a}{n} : \frac{b}{m} = \frac{a}{n} \cdot \frac{m}{b}}$$

$$\frac{4}{9} : \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{4 \cdot 3}{9 \cdot 2} = \frac{2}{3}$$

Beispiel: $\frac{\frac{x^2-x}{4\,x^2}}{\frac{x-1}{2\,x}} =$ Beachten Sie: $\frac{\square}{\square} = \square : \square$

$$= \frac{x^2 - x}{4\,x^2} : \frac{x-1}{2\,x} = \frac{x^2 - x}{4\,x^2} \cdot \frac{2\,x}{x-1} =$$

$$= \frac{x \cdot (x-1)}{2 \cdot 2 \cdot x \cdot x} \cdot \frac{2 \cdot x}{(x-1)} = \frac{x \cdot (x-1) \cdot 2 \cdot x}{2 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot (x-1)} = \frac{1}{2}$$

Beispiel:

$$\frac{\frac{m}{n}+2+\frac{n}{m}}{m+n} = \frac{\frac{m}{n}+\frac{2}{1}+\frac{n}{m}}{m+n} = \frac{\frac{m\cdot m+2\cdot n\cdot m+n\cdot n}{n\cdot m}}{m+n} = \frac{\frac{m^2+2\cdot n\cdot m+n^2}{n\cdot m}}{m+n} = \frac{\frac{(m+n)^2}{n\cdot m}}{m+n} = \frac{\frac{(m+n)^2}{n\cdot m}}{\frac{m+n}{1}} =$$

Doppelbruch erst dann auflösen, wenn in seinem Zähler und Nenner nur noch EIN Bruch steht.

$$= \frac{(m+n)^2}{n\cdot m}\cdot\frac{1}{m+n} = \frac{\overset{1}{\cancel{(m+n)}}\cdot(m+n)}{n\cdot m\cdot\underset{1}{\cancel{(m+n)}}} = \frac{m+n}{n\cdot m}$$

Beispiel: Vereinfachen Sie folgende Brüche soweit wie möglich:

$$\frac{4u-12v}{2u-6v} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\cdot\overset{1}{\cancel{(u-3v)}}}{\underset{1}{\cancel{2}}\cdot\underset{1}{\cancel{(u-3v)}}} = 2$$

Beispiel:

$$\frac{(5x-7y)\cdot(1-x)}{(25x^2-49y^2)\cdot(x-1)} = \frac{(5x-7y)\cdot(-1)\cdot(-1+x)}{(5x-7y)\cdot(5x+7y)\cdot(x-1)} = -\frac{\overset{1}{\cancel{(5x-7y)}}\cdot\overset{1}{\cancel{(x-1)}}}{\underset{1}{\cancel{(5x-7y)}}\cdot(5x+7y)\cdot\underset{1}{\cancel{(x-1)}}} = -\frac{1}{(5x-7y)}$$

Übung Berechnen und vereinfachen Sie:

1) $\frac{\frac{x+y}{a}}{\frac{x^2+2xy+y^2}{a^2}} =$

2) $\frac{\frac{1}{x}}{x} =$

3) $\frac{xy}{x+y}\cdot\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right) =$

4) $\left[\left(y-\frac{1}{x}\right):\left(y+\frac{1}{x}\right)\right]\cdot\left[\left(\frac{xy+1}{x}\right):\left(\frac{1}{2x}\right)\right] =$

5) $\frac{a+2}{-x-1} : \frac{(x+1)(4+a^2+4a)}{(a+2)(-1-x)} =$

6) $\frac{\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}}{1-\frac{a-b}{a+b}} =$

7) $\frac{\frac{\sqrt{2}+x}{x^2-4}}{\frac{2-x^2}{x-2}} =$

Lösungen: 1) $\frac{a}{x+y}$ 2) $\frac{1}{x^2}$ 3) $\frac{x-y}{x+y}$ 4) $(xy-1)\cdot 2$ 5) $\frac{1}{x+1}$ 6) $\frac{2a}{a-b}$

7) $\frac{1}{(x+2)\cdot(\sqrt{2}-x)}$

Weitere Übungsmöglichkeiten: ueb86.pdf (schulminator.com)

„Man hat mir gesagt,
dass jede Gleichung in dem Buch
die Verkaufszahlen halbiert."
Stephen HAWKING
(1942–2018)

III GLEICHUNGEN & UNGLEICHUNGEN

Beachten Sie, dass bei **Gleichungen**, im Gegensatz zu allen bisherigen Term-Rechnungen schon

in der Angabe links und rechts vom = etwas steht!

Gleichung: $\boxed{} = \boxed{}$

Beispiele: $5\,x = 20$ $\frac{x^2-4x}{2} - 1 = 0$

Mit Gleichungen lässt sich nämlich zum Teil anders rechnen als mit Umformungen.

3.1. Gleichungen mit einer Variablen

Die **Variable** ist die **Unbekannte**.

3.1.1. Gleichungen 1. Grades (lineare Gleichungen)

In **linearen Gleichungen** kommt die **Variable nur linear** vor, d.h. sie hat die **Hochzahl 1** und steht **nicht im Nenner**.

Beispiele: $3\,x^1 + 5 = 11$; $2\,(1 - 3\,x^1) + 8 = 9\,x^1 - 3\,(2 + x^1)$; $\frac{2\,x^1-1}{4} = -\frac{1}{2}$

3.1.1.1. Elementares

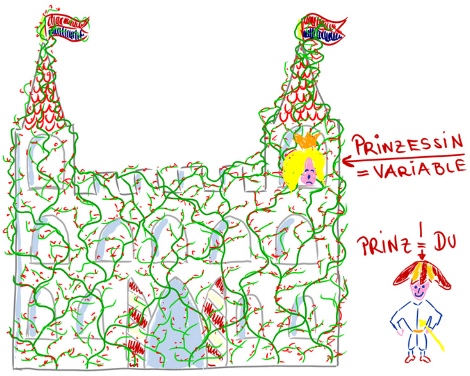
Lineare Gleichungen werden soweit **umgeformt**,
bis die Variable alleine auf nur einer Seite der Gleichung steht.

Beim Umformen von Gleichungen denke an

Dornröschen

&

eine Balkenwaage



Die Variable stellt in diesem Bild die Prinzessin  dar.

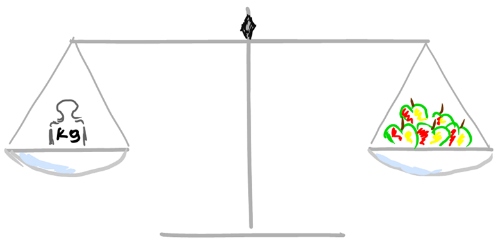
Wie die Königstochter während der gesamten Märchenhandlung im Schloss verweilt, soll auch die Variable beim Umformen der Gleichung in der Regel auf ihrem Platz verbleiben.

Die Person, die die Gleichung löst, ist der Prinz, der von außen kommt.

Verfügt der Prinz über keine märchenhaften Eigenschaften, so wird er die Hecke an ihrer dünnsten (leichtesten) Stelle zu durchdringen versuchen.
Umgesetzt auf die Gleichung: Zuerst bringt man jene Zahlen von der Variablen weg, die mit ihr am schwächsten verbunden sind, also die Strichrechnung. Erst danach widmet man sich der Punkt-, und, wenn vorhanden, anschließend der Hochrechnung. Klammern sind in diesem Bild Mauern.

Also:

Gehen Sie **beim Umformen der Gleichung in umgekehrter Reihenfolge zu den Vorrangregeln** vor.



Eine Balkenwaage besitzt zwei Waagschalen,
eine Gleichung zwei Seiten.

So wie beim Wägen immer Gleichgewicht herrschen soll,
so ist beim Umformen der Gleichung Bedacht zu nehmen,
dass auf beiden Seiten stets Balance herrscht (gleich viel steht).

Also:

Führen Sie **beim Umformen der Gleichung auf beiden Seiten die gleichen Rechenoperationen** durch.

Wem diese Bilder zu kindlich erscheinen:
Erstens sind Kinder eigentlich große Lehrmeister menschlichen Verhaltens, zweitens denken wir sehr oft in Bildern und drittens kann sich jede(r) eigene Bilder („Eselsbrücken“) bauen. Bedenken Sie: Je einfacher und anschaulicher mathematische Sachverhalte durch Bilder dargestellt werden können, so schwerwiegender sind Regelverstöße!

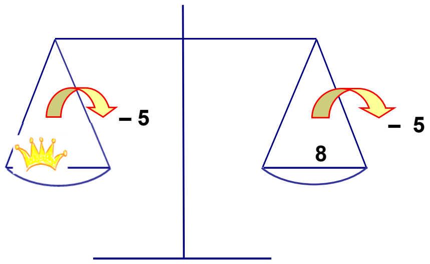
Beispiel:

$x + 5 = 8$

Die Variable stellt in unserem Bild die *Prinzessin* dar.

 $+ 5 = 8$

Wir bringen die Strichrechnung von der *Prinzessin* weg:
das Glied **+ 5** , indem wir auf beiden Seiten **– 5** subtrahieren:



 $+ 5 = 8 \quad \Big| \; \mathbf{-5}$

 $+5 \mathbf{- 5} = 8 \mathbf{- 5}$

 $= 3$

$\underline{x \quad = 3}$ Die **Gleichung** ist **fertig umgeformt**, da die **Variable alleine auf nur einer Seite** steht.

Stellt damit $x = 3$ *automatisch* die Lösung der Gleichung dar? Nein!

Ob der errechnete Wert auch Lösung der Gleichung ist, zeigt erst die **Probe**:
Wir **setzen** den **errechneten Wert für die Variable in die Ausgangsgleichung** ein:

$x + 5 = 8$

$\mathbf{3} + 5 \stackrel{?}{=} 8$

$\mathbf{8 = 8}$ **w. A.** $\longrightarrow$ $\mathbf{x = 3}$ ist eine **Lösung** dieser Gleichung.

w.A. steht für **wahre** (im Sinne von richtige) **Aussage**

Erhielten wir bei der Probe beispielsweise

$\mathbf{-4 = 8}$ also eine **f.A.** (**falsche Aussage**), so wäre der errechnete Wert **keine Lösung** der Gleichung.

Nur wenn wir **bei der Probe eine w.A.** erhalten (und uns nicht verrechnet haben), **ist** der **errechnete Wert Lösung der Gleichung**.

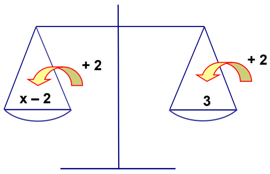
Beispiel:

$$x-2 = 3 \quad \Big| \; \color{red}{+2}$$

$$x-2\color{red}{+2} = 3 \color{red}{+2}$$

$$\underline{x = 5}$$

Wir bringen von der Variablen x die Zahl -2 weg, indem wir auf beiden Seiten $+2$ addieren.




```python
from sympy import *
x = symbols("x")
solve(x-2-3)
```

```
[5]
```

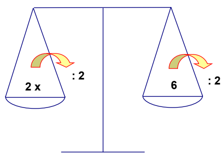
Beispiel:

$$2 \cdot x = 6 \quad | \; \color{red}{:2}$$

$$\frac{2 \cdot x}{\color{red}{2}} = \frac{6}{\color{red}{2}}$$

$$x = 3$$

Die Zahl 2 ist mit x mit mal verbunden, also dividieren wir beide Seiten der Gleichung durch 2.



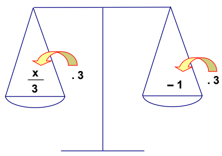
Beispiel:

$$\frac{x}{3} = -1 \quad | \; \color{red}{\cdot 3}$$

$$\frac{x}{3} \color{red}{\cdot 3} = -1 \color{red}{\cdot 3}$$

$$x = -3$$

Die Zahl 3 ist mit x mit dividiert verbunden, also multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung mit 3.



Beispiel:

$$2 \cdot x + 3 = 9 \quad | \; \color{red}{-3}$$

$$2 \cdot x + 3 \color{red}{-3} = 9 \color{red}{-3}$$

$$2 \cdot x = 6 \quad | \; \color{red}{:2}$$

$$x = 3$$

Beim Umformen einer Gleichung gehen wir **in entgegengesetzter Reihenfolge zu den Vorrangregeln** vor.

Zuerst bringen wir die Zahl $+3$ weg, da sie mit der Variablen x mit Strichrechnung verbunden ist.

Jetzt widmen wir uns der Zahl 2, die mit x mit mal verbunden ist.

Beispiel: $4 - x = 6$

$+4 - 1 \cdot x = 6 \quad | -4$

Die Zahl 4 ist mit x mit **+** verbunden, da + das **Vor**zeichen von 4 ist. Das Minus gehört als Vorzeichen zu x, eigentlich zu seiner Vorzahl -1.

$-1 \cdot x = 2 \quad | :(-1)$

$$\frac{\cancel{-1}^{\,1} \cdot x}{\cancel{-1}_{\,1}} = \frac{2}{-1}$$

$\underline{x = -2}$

oder

$-1 \cdot x = 2 \quad | \cdot(-1)$

$-1 \cdot x \cdot (-1) = 2 \cdot (-1)$

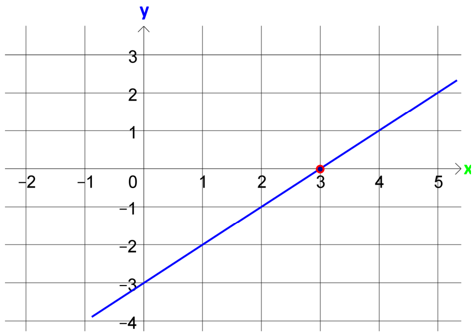
$-1 \cdot (-1) \cdot x = -2$

$1 \cdot x = -2$

$\underline{x = -2}$

Statt durch (–1) zu dividieren, können wir auch **mit (–1) multiplizieren**.

Veranschaulichung der Lösungen linearer Gleichungen in einer Variablen



Nehmen wir an, $G = \mathbb{R}$.
Eine lineare Gleichung entstammt einer linearen Funktion, bei der **y = 0** gesetzt wird.

Eine **lineare Funktion** ergibt gezeichnet eine Gerade.

Da wir **y = 0** setzen, suchen wir demnach Punkte der Geraden mit **y = 0**.
Das sind **Punkte** auf der **x-Achse**.
Solche Punkte nennt man **Nullpunkte**, die **x-Koordinaten** dieser Punkte **Nullstellen**.

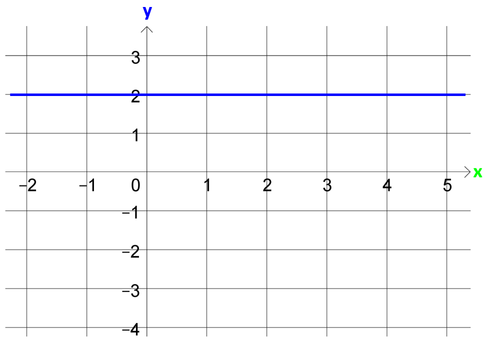
Z.B.: $y = x - 3$ . . . *lineare Funktion*

$0 = x - 3 \quad | +3$ . . . *lineare Gleichung* in der Variablen x

$3 = x$

Was wir derzeit noch nicht bestimmen können, ist der konkrete Verlauf der Geraden. Wir wissen nur, dass sie durch den **Nullpunkt (3 / 0)** geht.

Die Lösungsmenge lautet damit $L = \{\,(3/\,0)\,\}$



Nun kann es sein, dass eine **Gerade parallel zur x-Achse** verläuft und damit **keine Nullstelle** besitzt.

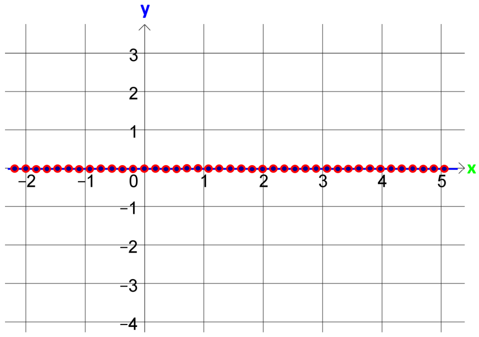
In einem solchen Fall verfügt die entsprechende lineare Gleichung über **keine Lösung**.

Beispiel: $y = 2$ . . . *lineare Funktion*

$0 = 2$ **f. A.** $\rightarrow$ **keine Lösung**

Bemerkung: Hier erhält man schon beim Umformen der Gleichung eine **f.A.** und **nicht** erst bei der Probe.

Die Lösungsmenge lautet damit $L = \{\ \}$



Oder die Gerade liegt **auf** der **x –Achse**.

Dann verfügen Gerade und **x-Achse** über alle und damit unendlich viele gemeinsame Punkte der Geraden.

Die **entsprechende lineare Gleichung** besitzt dann unendlich viele **Lösungen**, nämlich jede reelle Zahl.

Beispiel: **y = 0** . . . *lineare Funktion*

0 = 0 w.A. für alle (reellen) Zahlen

Bemerkung: Hier erhält man schon beim Umformen der Gleichung eine w.A. und **nicht** erst bei der Probe.

Die Lösungsmenge lautet damit

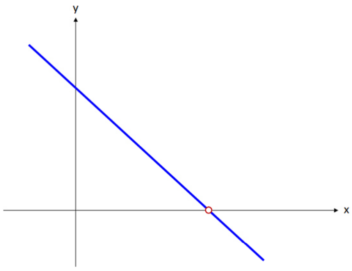
$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R} : y = 0\}$$ (Siehe 4.5.1.4., S 203 f)

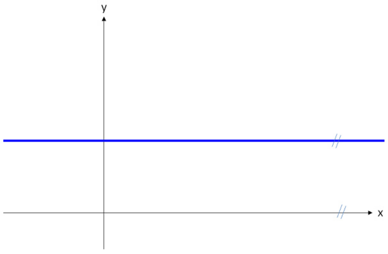
bzw. $L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ (Siehe 4.5.1.1., S 199 f)

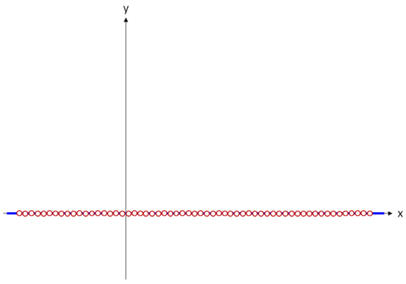
Zusammenfassend lässt sich sagen:

Eine **lineare Funktion** (eine **Gerade**) kann auf der **x-Achse**

einen Punkt haben,	**keinen Punkt** haben	**unendlich viele Punkte** haben







eine **lineare Gleichung** somit

eine Lösung	**keine Lösung**	**unendlich viele Lösungen**

3.1.1.2. Gleichungen mit Klammern

Beispiel:

$2x(3x-1) = (2x-2)(3x+1)$

$6x^2 - 2x = 6x^2 + 2x - 6x - 2$

$6x^2 - 2x = 6x^2 - 4x - 2 \quad | -6x^2 \ +4x$

$2x = -2 \quad | : 2$

$x = -1$

Steht die **Variable in Klammern**,
muss man **diese auflösen**.

Kommt die Variable in mehreren Gliedern (+ –) vor, so bringt man die Glieder mit der Variablen auf die eine Seite der Gleichung, die Glieder ohne Variable auf die andere Seite.

```
from sympy import *
```

```
x = symbols("x")
```

```
solve(2*x*(3*x-1)-(2*x-2)*(3*x+1))
```

```
[-1]
```

Beispiel:

$-[-(1-a)^2 + a^2] \cdot 2 = -(a-1) \cdot (a+1) - (-a^2)$

$-[-(1-2a+a^2) + a^2] \cdot 2 = -(a^2-1) - (-a^2)$

$-[-1+2a-a^2+a^2] \cdot 2 = -a^2 + 1 + a^2$

$-[-1+2a] \cdot 2 = 1$

$-2 \cdot [-1+2a] = 1$

$2 - 4a = 1 \ \ | -2$

$-4a = -1 \ \ | : (-4)$

$a = \frac{1}{4}$

Eigentlich müsste noch die Probe durchgeführt werden um festzustellen ob der errechnete Wert Lösung dieser Gleichung ist.

3.1.1.3. Gleichungen mit Bruchtermen

Bruchterme sind **Brüche**, bei denen die **Variable zumindest im Nenner** steht.

Steht die **Variable im Nenner**, so muss zunächst die **Gleichung bruchfrei** gemacht werden!

Beispiel: $\frac{3x+4}{3x-4}+\frac{4(3x^2-8)}{9x^2-16}=\frac{3x}{3x-4}+\frac{4x}{3x+4} \qquad G=\mathbb{R}$

① Zuerst bestimmen wir die Definitionsmenge , indem wir alle (reellen) Zahlen aus der Grundmenge G ausscheiden, die einen der Nenner Null werden lassen.

Dazu werden zunächst die Einzelnenner zerlegt und am besten schon mal der **kleinste gemeinsame Nenner N** ermittelt. (Siehe auch 2.4.2., S 98 f)

		Ef
N_1: $3x-4$	$=(3x-4)$	$(3x+4)$
N_2: $9x^2-16$	$=(3x-4)\cdot(3x+4)$	-------
N_3: $3x-4$	$=(3x-4)$	$(3x+4)$
N_4: $3x+4$	$=(3x+4)$	$(3x-4)$

$\boldsymbol{N}$: $\boldsymbol{(3x-4)\cdot(3x+4)}$

Definitionsmenge:

$\boldsymbol{(3x-4)\cdot(3x+4)=0}$

$3x-4=0 \;|+4 \quad \vee \quad 3x+4=0 \;|-4$

$3x=4 \;|:3 \quad \vee \quad 3x=-4 \;|:3$

$x=\frac{4}{3} \quad \vee \quad x=-\frac{4}{3}$

$D=\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right\}$

② Danach ermitteln wir die **Erweiterungsfaktoren** Ef (Siehe auch 2.4.2., S 98 f).

		Ef
N_1: $3x-4$	$=(3x-4)$	$(3x+4)$
N_2: $9x^2-16$	$=(3x-4)\cdot(3x+4)$	-------
N_3: $3x-4$	$=(3x-4)$	$(3x+4)$
N_4: $3x+4$	$=(3x+4)$	$(3x-4)$

$\boldsymbol{N}$: $\boldsymbol{(3x-4)\cdot(3x+4)}$

③ * In die Nenner schreibt man N
* Die Zähler werden mit ihren Ef multipliziert.
* Die Gleichung wird mit N multipliziert.

$$\frac{(3x+4)\cdot(3x+4)}{N}+\frac{4(3x^2-8)}{N}=\frac{3x\cdot(3x+4)}{N}+\frac{4x\cdot(3x-4)}{N}\quad|\cdot N$$

$$\frac{(3x+4)\cdot(3x+4)\cdot\cancelto{1}{N}}{\cancelto{1}{N}}+\frac{4(3x^2-8)\cdot\cancelto{1}{N}}{\cancelto{1}{N}}=\frac{3x\cdot(3x+4)\cdot\cancelto{1}{N}}{\cancelto{1}{N}}+\frac{4x\cdot(3x-4)\cdot\cancelto{1}{N}}{\cancelto{1}{N}}$$

$(3x+4)\cdot(3x+4)+4\cdot(3x^2-8)=3\cdot x\cdot(3x+4)+4\cdot x\cdot(3x-4)$

$9x^2+12x+12x+16+12x^2-32=9x^2+12x+12x^2-16x$

$21x^2+24x-16=21x^2-4x \quad |-21x^2+4x$

$28x-16=0 \quad |+16$

$28\cdot x=16 \quad |:28$

$x=\frac{16}{28}$

$x=\frac{4}{7}$

```
from sympy import *
x = symbols("x")
solve((3*x+4)/(3*x-4)+(4*(3*x**2-8)/(9*x**2-16)-3*x/(3*x-4)-4*x/(3*x+4)))
```

[4/7]

Probe: $\frac{3\cdot\frac{4}{7}+4}{3\cdot\frac{4}{7}-4}+\frac{4\left(3\cdot\left(\frac{4}{7}\right)^2-8\right)}{9\cdot\left(\frac{4}{7}\right)^2-16}=\frac{3\cdot\frac{4}{7}}{3\cdot\frac{4}{7}-4}+\frac{4\cdot\frac{4}{7}}{3\cdot\frac{4}{7}+4}$

$-\frac{7}{20}=-\frac{7}{20}$ **w.A.** und $x=\frac{4}{7}\in D$ also ist $x=\frac{4}{7}$ eine Lösung der angegebenen Gleichung.

$$L=\left\{\frac{4}{7}\right\}$$

- Was ist falsch gelaufen? [15]

$\frac{x+3}{x+5}=\frac{3}{5}\quad | : \frac{3}{5}$

$\frac{x+1}{x+1}=1\quad |\cdot(x+1)$

$x+1=x+1$ w.A. für alle $x\in\mathbb{R}$

[15] E. WEITZ. In: https://www.youtube.com/watch?v=d0uV_Oia9AI

(457) MAY 05 Lineare Gleichungen mit einer Variablen - YouTube

Übung Bestimmen Sie die jeweiligen Lösungsmengen L mit $G = \mathbb{R}$ (sofern nicht anders angegeben).

1) $\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{9}{x^2-1}$ 2) $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x-3} + \frac{2x+1}{x^2-4x+3} = 0$

3) $\frac{1,5}{x-2} - \frac{2}{x+2} = \frac{4,5}{x^2-4}$ 4) $2 = \frac{35-\frac{8}{x}}{15+\frac{16}{x}}$ 5) $\frac{\frac{x-1}{x+1}+1}{\frac{x-1}{x+1}-\frac{x+1}{x-1}} - 2 = 0$

6) $\frac{3x+2}{2x-4} - \frac{3x^2+1}{2x^2-8} = \frac{16x+114}{4x^2+8x}$ 7) $\frac{4}{x-2} - \frac{3}{x-1} = \frac{1}{x}$

8) $L = \left\{x \in \mathbb{Q} : \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - 6 - \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 = 2x-7\right\}$ 9) $L = \{x \in \mathbb{N} \ : \ 3(3x-4) = 2x-5\}$

Lösungen: 1) $L = \{2\}$ 2) $L = \{2\}$ 3) $L = \{5\}$ 4) $L = \{8\}$

5) $L = \{-3\}$ 6) $L = \{3\}$ 7) $L = \{\frac{2}{5}\}$

8) a) $L = \{0,5\}$ 9) $L = \{1\}$

Weitere Übungsmöglichkeiten: http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/kurs/lingl.pdf

Übung Geben Sie an, welche der folgenden Gleichungen wahre (richtige) Aussagen für alle $x, y \in \mathbb{R}$ sind:[16]

1) $2x - 2y = x - y$ 2) $2xy - xy = 1$ 3) $2 \cdot (x \cdot y) = 4xy$

4) $x \cdot (x+y) = x \cdot x + x \cdot y$ 5) $3x + x2 = 5x$ 6) $2y - y = 1$ 7) $-(-(-x)) = x$

8) $x + y \cdot 3 = (x+y) \cdot (x+3)$

Lösungen: w.A. … wahre Aussage f.A. … falsche Aussage

1) f.A. 2) f.A. 3) f.A. 4) w.A. 5) w.A. 7) f.A. 8) f.A.

[16] Idee: Edmund WEITZ: Natürliche Zahlen, Addition, Multiplikation (Vorkurs Mathematik) - Bing video

3.1.1.4. Formeln umformen

Jede **Formel** ist eine **Gleichung**, da sie ein **=** - Zeichen besitzt mit vorgegebener linker und rechter Seite. Deshalb behandeln wir

Formeln wie **Gleichungen**.

Es gibt **drei Grundformen**:

A: Die **gesuchte Größe** steht **nicht in Klammern** und **nicht im Nenner**

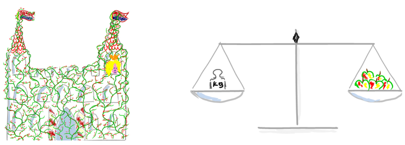
Beispiel:

$U = 2\,a + 2\,b \qquad a = ?$

$U = 2 \cdot a + 2 \cdot b \quad | - 2 \cdot b$

$U - 2 \cdot b = 2 \cdot a \quad | : 2$

$\frac{U - 2 \cdot b}{2} = a$



Die **gesuchte Größe** ist die **Variable**.
In unserem Beispiel a
Wir formen entsprechend die Gleichung um, bis a alleine auf nur einer Seite steht und gehen dabei wiederum in entgegengesetzter Reihenfolge zu den Vorrangregeln vor
(Siehe auch 3.1.1.1., S 105 f)

```
from sympy import *
u, a, b = symbols("U, a, b")
solve(u-2*a-2*b,a)
[U/2 - b]
```

Das Ergebnis in Python $\frac{U}{2} - b$ erhält man händisch, wenn man den Zähler durch den eingliedrigen Nenner gliedweise dividiert:

$\frac{U - 2b}{2} = \frac{U}{2} - \frac{2b}{2} = \frac{U}{2} - b$

B: Die **gesuchte Größe** steht **in Klammer(n)**

Beispiel:

$A = \frac{(a + c) \cdot h}{2} \qquad c = ?$

$A = \frac{(a + c) \cdot h}{2} \quad | \cdot 2$

$2 \cdot A = (a + c) \cdot h \quad | : h$

$\frac{2 \cdot A}{h} = a + c \quad | - a$

$\frac{2 \cdot A}{h} - a = c$

Steht die **gesuchte Größe in Klammern**, so muss man die **Klammern** zuerst **auflösen**.
(Siehe auch 3.1.1.2., S 109)

C: Die **gesuchte Größe** steht **im Nenner**

Beispiel:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad R_1 = ?$$

Steht die **gesuchte Größe im Nenner**, so muss die **Gleichung bruchfrei** gemacht werden.

(Siehe auch 3.1.1.3., S 111 f)

	Ef
N_1: R	$R_1 \cdot R_2$
N_2: R_1	$R \cdot R_2$
N_3: R_2	$R \cdot R_1$

$$N = R \cdot R_1 \cdot R_2$$

Zuerst sucht man den **gemeinsamen Nenner N** der Einzelnenner und die Erweiterungsfaktoren **Ef**.

Das sind jene Faktoren, die dem einzelnen Nenner zum gemeinsamen Nenner N fehlen.

$$\frac{1 \cdot R_1 \cdot R_2}{N} = \frac{1 \cdot R \cdot R_2}{N} + \frac{1 \cdot R \cdot R_1}{N} \quad | \cdot \mathbf{N}$$

Die Gleichung wird mit dem **N** multipliziert (Balkenwaage).

$$\frac{1 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot \overset{1}{\cancel{N}}}{\underset{1}{\cancel{N}}} = \frac{1 \cdot R \cdot R_2 \cdot \overset{1}{\cancel{N}}}{\underset{1}{\cancel{N}}} + \frac{1 \cdot R \cdot R_1 \cdot \overset{1}{\cancel{N}}}{\underset{1}{\cancel{N}}}$$

Wir können in jedem Bruch mit **N** kürzen (durch **N** dividieren).

$$R_1 \cdot R_2 = R \cdot R_2 + R \cdot R_1 \quad | \; - R \cdot R_1$$

Da die Multiplikation mit 1 und die Division durch 1 nichts verändert, kann die Gleichung, wie links, angeschrieben werden.

$$R_1 \cdot R_2 - R \cdot R_1 = R \cdot R_2$$

Die Glieder mit R_1 kommen auf die eine Seite, jene ohne R_1 auf die andere .

$$R_1 \cdot R_2 - R \cdot R_1 = R \cdot R_2$$

$$R_1 \cdot (R_2 - R) = R \cdot R_2$$

Jetzt können wir R_1 herausheben

$$R_1 \cdot (R_2 - R) = R \cdot R_2 \quad | \; : (R_2 - R)$$

Wir bringen die Klammer von R_1 durch Division weg, da sie mit R_1 mit mal verbunden ist.

$$R_1 = \frac{R \cdot R_2}{(R_2 - R)}$$

```
from sympy import *
```

```
R, R1, R2 = symbols("R,R1,R2")
```

```
solve(1/R-1/R1-1/R2,R1)
[-R*R2/(R - R2)]
```

Beachten Sie , dass $\frac{-R \cdot R_2}{R - R_2} = \frac{-R \cdot R_2}{-(-R + R_2)} = \frac{R \cdot R_2}{-R + R_2} = \frac{R \cdot R_2}{R_2 - R}$

Beispiel: $\mathrm{E} = \dfrac{m_1\, m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1^2 - v_2^2)$ gesucht: v_2

$$\mathrm{E} = \frac{m_1\, m_2}{2(m_1 + m_2)} \cdot \frac{(v_1^2 - v_2^2)}{1}$$

Wir stellen $(v_1^2 - v_2^2)$ als Bruch mit dem Nenner 1 dar.

$$\mathrm{E} = \frac{m_1\, m_2 \cdot (v_1^2 - v_2^2)}{2(m_1 + m_2)}$$

Beim Multiplizieren von Brüchen ist kein gemeinsamer Nenner nötig. (Siehe 2.4.3., S 101)

$$\frac{\mathrm{E}}{1} = \frac{m_1\, m_2 \cdot (v_1^2 - v_2^2)}{2(m_1 + m_2)}$$

Wir stellen E als Bruch mit dem Nenner 1 dar.

	Ef
N_1: 1	$2 \cdot (m_1 + m_2)$
N_2: $2 \cdot (m_1 + m_2)$	1
N: $\mathbf{2 \cdot (m_1 + m_2)}$	

$$\frac{\mathrm{E} \cdot 2 \cdot (m_1 + m_2)}{N} = \frac{m_1 \cdot\, m_2 \cdot (v_1^2 - v_2^2) \cdot 1}{N} \quad | \,.N$$

$$\mathrm{E} \cdot 2 \cdot (m_1 + m_2) = m_1 \cdot\, m_2 \cdot (v_1^2 - v_2^2)$$

Steht die gesuchte Größe in Klammern, werden diese aufgelöst. (Siehe 3.1.1.2., S 109)

$$\mathrm{E} \cdot 2 \cdot (m_1 + m_2) = m_1 \cdot m_2 \cdot v_1^2 - m_1 \cdot m_2 \cdot v_2^2 \quad | - m_1 m_2 v_1^2$$

$$\mathrm{E} \cdot 2 \cdot (m_1 + m_2) - m_1 m_2 v_1^2 = -m_1 m_2 v_2^2 \quad | : (-m_1 m_2)$$

$$\frac{\mathrm{E} \cdot 2 \cdot (m_1 + m_2) - m_1 m_2 v_1^2}{-m_1 m_2} = v_2^2$$

Wir bringen die Glieder mit der gesuchten Größe auf die eine Seite der Gleichung, die Glieder ohne gesuchte Größe auf die andere Seite.

$$\frac{m_1 m_2 v_1^2 - \mathrm{E} \cdot 2 \cdot (m_1 + m_2)}{m_1 m_2} = v_2^2 \quad | \sqrt{}$$

$$\pm\sqrt{\frac{m_1 m_2 v_1^2 - \mathrm{E} \cdot 2 \cdot (m_1 + m_2)}{m_1 m_2}} = v_2$$

Bedenken Sie:
z.B.: $\sqrt{4} = \sqrt[2]{4} \;\; \pm 2$
(1.1.5., S 9)
Da v die Größe einer Geschwindigkeit darstellt, ist das Minus belanglos.

(457) MAY 06 Formeln umformen - YouTube

Übung

1) $A = \frac{r}{2}(b - s) + \frac{s}{2} \cdot h \qquad s = ?$

2) $s = h \cdot \frac{2R}{R-r} \qquad r = ?$

3) $\frac{\frac{a}{x}+a}{\frac{b}{x}} = \frac{1}{a} \qquad x = ?$

4) $D = \frac{M\,m\,v^2}{2(M+m)} \qquad M = ?$

5) $T = \left(\frac{h}{v_1} + \frac{h}{v_2}\right) \cdot \frac{b}{s} \qquad v_2 = ?$

6) $A \cdot l = \frac{A \cdot R}{K-1}\,(T_1 - T_2) \qquad$ (1) $K = ?$ $\qquad$ (2) $T_2 = ?$

7) $M = \frac{P}{2}\left(\frac{1}{2} + \varphi\right) - P\varphi \qquad \varphi = ?$

8) $I = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12} \qquad H = ?$

Lösungen:

1) $s = \frac{2A-br}{h-r}$ $\qquad$ 2) $r = \frac{Rs-2hR}{s}$ $\qquad$ 3) $x = \frac{b-a^2}{a^2} = \frac{b}{a^2} - 1$

4) $M = \frac{2\,D\,m}{m\,v^2 - 2\,D}$ $\qquad$ 5) $v_2 = \frac{b\,h\,v_1}{T\,s\,v_1 - b\,h}$

6) (1) $K = \frac{R \cdot (T_1 - T_2)}{l}$ $\qquad$ (2) $T_2 = T_1 - \frac{l(K-1)}{R}$ $\qquad$ 7) $\varphi = \frac{4M-P}{2(1-2P)}$

8) $H = \sqrt[3]{\frac{12\,I + bh^3}{B}}$

Weitere Übungsmöglichkeiten: http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/kurs/lingl.pdf

3.1.2. Gleichungen 2. Grades (quadratische Gleichungen)

In **quadratischen Gleichungen** ist die **höchste Potenz der Variablen quadratisch**.

Beispiele: $m^2 = 4$ oder $4x^2 - 7x - 2 = 0$

3.1.2.1. Normalform

Die sog. **Normalform (allgemeine Form) einer quadratischen Gleichung** lautet:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

mit a, b, c $\in \mathbb{R}$ (also reellen **Zahlen**)

a ist die **Vorzahl von x^2**, b die **Vorzahl von x** und c steht für das **konstante Glied**, also jenes ohne Variable.

Solche Gleichungen lassen sich mit Formeln lösen, die hier angegeben sind:

Es gibt zwei Auflösungsformeln: (Herleitung siehe S 120)

Quadratische Gleichung:

$$1 \cdot x^2 + p \cdot x + q = 0$$

pq-Formel:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Da $\left(-\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2$, kann man die Formel auch so angeben:

$$\mathbf{x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Quadratische Gleichung:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

abc-Formel:

$$\mathbf{x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}}$$

Die **pq**-Formel kann verwendet werden, wenn die Vorzahl von x^2 1 ist, die **abc**-Formel in allen Fällen.

Für beide Formeln müssen auf der einen Seite die Glieder in fallenden Potenzen (mit der höchsten Potenz beginnend) geordnet sein, auf der anderen Seite darf nur null stehen.

Die ***a-b-c– Formel*** nennt man auch ***Mitternachtsformel***.

Mitternachtsformel deswegen, weil man sie in seligen Schulzeiten auch dann hersagen können sollte, würde man mitten in der Nacht geweckt (ein *Mörder-Brüller*!).

Beispiel:

$$x^2 - 2 \cdot x - 15 = 0$$

$$1 \cdot x^2 \underbrace{-\,2}_{p} \cdot x \underbrace{-\,15}_{q} = 0$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_{1/2} = -\frac{(-2)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{(-2)}{2}\right)^2 - (-15)}$$

$$x_{1/2} = -(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 + 15}$$

$$x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1 + 15}$$

$$x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{16}$$

$$x_{1/2} = 1 \pm 4$$

$$x_1 = 1 + 4 \qquad x_2 = 1 - 4$$

$$\mathbf{x_1 = 5} \qquad \mathbf{x_2 = -3}$$

```
from sympy import *
x = symbols("x")
solve(x**2-2*x-15)
[-3, 5]
```

Beispiel:

$$2 \cdot x^2 - 7 \cdot x + 3 = 0$$

$$\underbrace{2}_{a} \cdot x^2 \underbrace{-\,7}_{b} \cdot x \underbrace{+\,3}_{c} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_{1/2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2}$$

$$x_{1/2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2}$$

$$x_{1/2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4}$$

$$x_{1/2} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$x_{1/2} = \frac{7 \pm 5}{4}$$

$$x_1 = \frac{7 + 5}{4} \qquad x_2 = \frac{7 - 5}{4}$$

$$x_1 = \frac{12}{4} \qquad x_2 = \frac{2}{4}$$

$$\mathbf{x_1 = 3} \qquad \mathbf{x_2 = \frac{1}{2}}$$

Bemerkung: Es ist gleichgültig, welche Lösung mit x_1 oder x_2 bezeichnet wird.

Die Herleitungen der pq- und abc-Formel:

$x^2 + p \cdot x + q = 0 \quad | -q$

$x^2 + p \cdot x = -q \quad | + \left(\frac{p}{2}\right)^2$

$x^2 + p \cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$

$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \quad | \sqrt{\ }$

$x^2 + p \cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$

$\pm\sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$x_{1/2} + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad | -\frac{p}{2}$

$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \quad | -c$

$a \cdot x^2 + b \cdot x = -c \quad | \cdot 4 \cdot a$

$4 \cdot a^2 \cdot x^2 + 4 \cdot a \cdot b \cdot x = -4 \cdot a \cdot c \quad | + b^2$

$4 \cdot a^2 \cdot x^2 + 4 \cdot a \cdot b \cdot x + b^2 = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$4 \cdot a^2 \cdot x^2 + 4 \cdot a \cdot b \cdot x + b^2 = (2 \cdot a \cdot x)^2 + 2 \cdot 2 \cdot a \cdot x \cdot b + b^2$

$= (2 \cdot a \cdot x + b)^2$

$(2 \cdot a \cdot x + b)^2 = b^2 - 4 \cdot a \cdot c \quad | \sqrt{\ }$

$2 \cdot a \cdot x_{1/2} + b = \pm\sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c} \quad | -b$

$2 \cdot a \cdot x_{1/2} = -b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c} \quad | : (2 \cdot a)$

$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

```
x, a, b, c = symbols('x a b c')
```

```
solve(a*x**2+b*x+c,x)
```

```
[(-b + sqrt(-4*a*c + b**2))/(2*a), -(b + sqrt(-4*a*c + b**2))/(2*a)]
```

3.1.2.2. Wurzelsatz von VIÈTA

Der Wurzelsatz von VIÈTA [17] lautet: $x^2 + p \cdot x + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

mit x_1 und x_2 als den Lösungen (den sogenannten Wurzeln) der Gleichung.

Ohne Herleitung zwei Folgerungen : $\boldsymbol{x_1 + x_2 = -p}$ und $\boldsymbol{x_1 \cdot x_2 = q}$

Mit Hilfe des Wurzelsatzes kann man auch Polynome statt durch Probieren (2.2.6.2.3., S 93) in Linearfaktoren zerlegen:

Beispiel: $2x^2 - x - 3 =$

Zunächst fassen wir den Term als quadratische Gleichung auf, die wir lösen:

$$2x^2 - x - 3 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2}$$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4}$$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm 5}{4}$$

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = -\frac{3}{2}$$

Der Wurzelsatz von VIÈTA darf nur für Gleichungen der Form $1\,x^2 + p\,x + q = 0$ angewendet werden.

$$2x^2 - x - 3 = 2 \cdot \left(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right) = 2 \cdot (x - 1) \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right) = (x - 1) \cdot 2 \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right) = (x - 1) \cdot (2x + 3)$$

Bemerkung: Für ein Polynom n-ten Grades gilt dann entsprechend

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots\ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_0 \cdot x_0 = a_n \cdot (x - x_n) \cdot (x - x_{n-1}) \cdot \ldots\ldots \cdot (x - x_1)$$

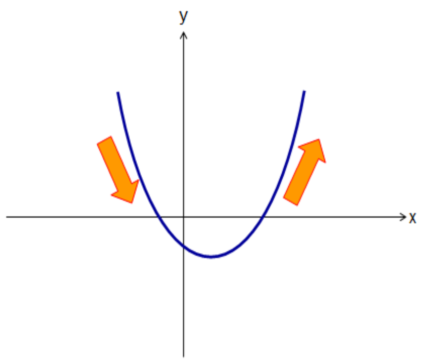
Das bedeutet NICHT, dass jede Gleichung n-ten Grades n Lösungen (Wurzeln) besitzt!
(Siehe folgendes Kapitel)

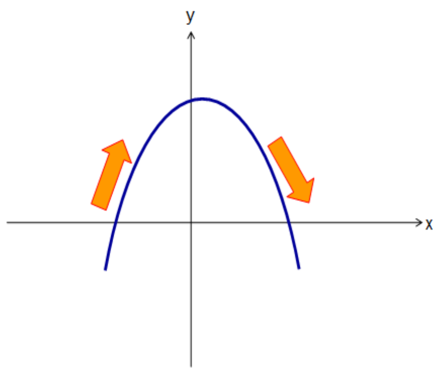
[17] François VIÈTE (1540 – 1603), französischer Advokat und Mathematiker

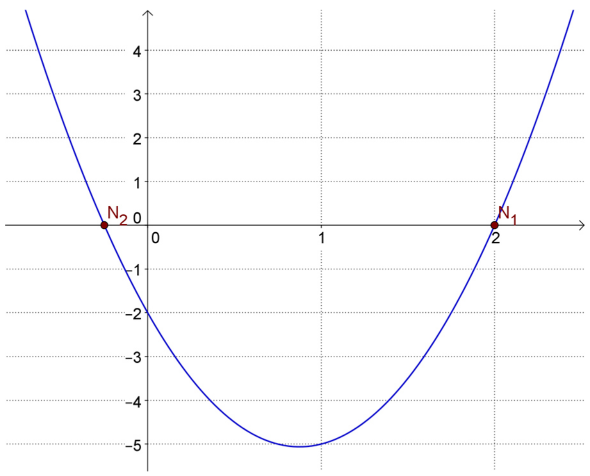
3.1.2.3. Veranschaulichung der Lösungen

Eine quadratische Gleichung der Normal-Form $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$

entstammt einer sog. quadratischen Funktion der allgemeinen Form $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = y$.







Lautet die quadratische *Funktion* z.B.

$$y = 4x^2 - 7x - 2$$

und wir setzen $y = 0$, so erhalten wir die

quadratische *Gleichung in* x: $0 = 4x^2 - 7x - 2$,

deren Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = -\frac{1}{4}$ lauten,

wir im letzten Beispiel bestimmten.

Da wir in der Funktionsgleichung $y = 0$ setzten,
ermitteln wir auch hier die Punkte der Kurve,
die auf der x-Achse liegen,
also die **Nullstellen**.

Nullstellen sind die **x-Koordinaten** der Nullpunkte.

Was wir derzeit noch nicht angeben können ist, ob die Kurve oben oder unten offen ist und wie weit sie in diesen Fällen nach unten bzw. oben reicht.

Wie viele Punkte kann eine quadratische Funktion auf der x-Achse haben?

Anders gefragt:

Wie viele Lösungen kann eine quadratische Gleichung besitzen?

Beispiel: $2\,x^2 + x - 6 = 0$ $\quad a = 2 \quad b = 1 \quad c = -6$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2}$$

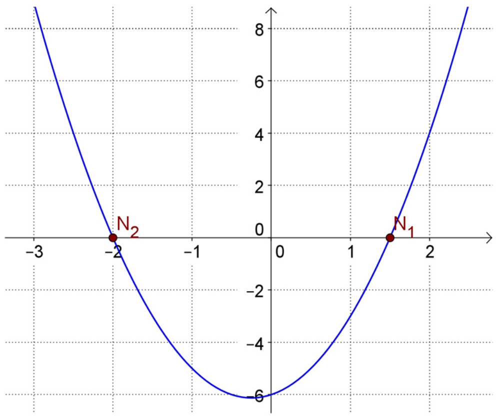
$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{4}$$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm 7}{4}$$

$$x_1 = \frac{3}{2} \qquad x_2 = -2$$

→ **zwei Lösungen (Nullstellen)** → **zwei Nullpunkte**

$N_1(\frac{3}{2}/0) \quad N_2(-2/0)$



Welcher der Nullpunkte mit N_1 bzw. N_2 bezeichnet wird, ist **unerheblich**.

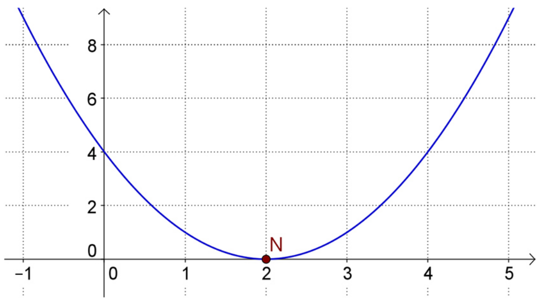
Beispiel: $x^2 - 4\,x + 4 = 0$ $\quad a = 1 \quad b = -4 \quad c = 4$

$$x_{1/2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x_{1/2} = \frac{4 \pm 0}{2}$$

$$x_{1/2} = 2$$



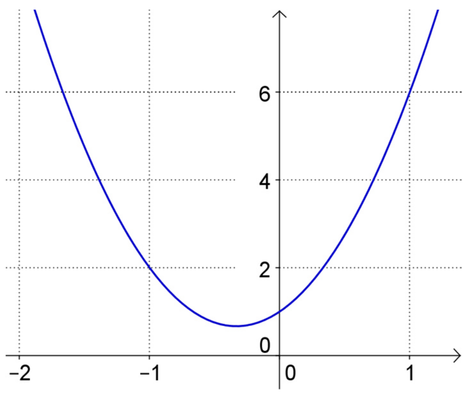
→ **eine Lösung (Nullstelle)** → **ein Nullpunkt**

$N(2/0)$

Beispiel: $3\,x^2 + 2\,x + 1 = 0$ $\quad a = 3 \quad b = 2 \quad c = 1$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3}$$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{6}$$



Da die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl keine reelle Zahl ergibt, besitzt die Gleichung **keine** reelle **Lösung**.

→ **keine Lösung (Nullstelle)** → **kein Nullpunkt**

Betrachten wir die letzten drei Beispiele, lässt sich folgendes erkennen:

Rechnerisch hängen die **Lösungsmöglichkeiten** einer quadratischen Gleichung vom **Wurzelinhalt** der Auflösungsformel ab:

Die allgemeine Norm(al)form einer quadratischen Gleichung lautet

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

und die dazugehörige **Auflösungsformel**

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Den **Wurzelinhalt**, also $b^2 - 4 \cdot a \cdot c$, nennt man **Diskriminante D**

discriminare (lateinisch): unterscheiden

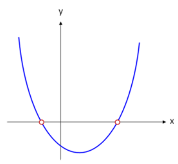
All unsere Berechnungen finden hier in den **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$ statt. Demnach gilt:

Ist $D > 0$, der Wurzelinhalt also positiv, besitzt die Gleichung **2** (reelle) Lösungen (Nullstellen),

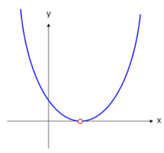
ist $D = 0$, der Wurzelinhalt also null, besitzt die Gleichung **1** (reelle) Lösung (Nullstelle),

ist $D < 0$, der Wurzelinhalt also negativ, besitzt die Gleichung **keine** (reelle) Lösung (Nullstelle).

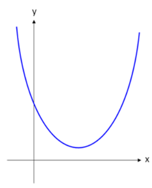
$\sqrt[2]{\text{positiv}} \rightarrow$ 2 Lösungen



$\sqrt[2]{\text{null}} \rightarrow$ 1 Lösung



$\sqrt[2]{\text{negativ}} \rightarrow$ keine Lösung



Beispiel: Bestimmen Sie in der Gleichung $2\,x^2 + 4\,x + c = 0$ den Koeffizienten (die Vorzahl) c so, dass diese Gleichung

* zwei (reelle) Lösungen (Nullstellen),
* eine (reelle) Lösung (Nullstelle),
* keine (reelle) Lösung (Nullstelle) besitzt.

Der Wurzelinhalt lautet hier $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot c = 16 - 8 \cdot c$

2 Lösungen:

$$D > 0 \;\rightarrow\; 16 - 8 \cdot c > 0 \qquad | -16$$
$$-8 \cdot c > -16 \quad | :(-8)$$
$$c < 2 \qquad\qquad (\#)$$

1 Lösungen:

$$D = 0 \;\rightarrow\; 16 - 8 \cdot c = 0 \qquad | -16$$
$$-8 \cdot c = -16 \quad | :(-8)$$
$$c = 2$$

keine Lösungen:

$$D < 0 \;\rightarrow\; 16 - 8 \cdot c < 0 \qquad | -16$$
$$-8 \cdot c < -16 \quad | :(-8)$$
$$c > 2 \qquad\qquad (\#)$$

(#) (Lineare) **Ungleichungen** werden im Prinzip **wie Gleichungen** behandelt.

2 **Ausnahmen**:

- Am Ende soll die Variable auf der linken Seite stehen.
- Wird eine **Ungleichung mit** einer **negativen Zahl multipliziert** oder durch eine **negative Zahl dividiert**, so ist das Ungleichheits-Zeichen zu ändern!

Beispiele:

$$4 < 8 \quad | \,.\,(-2) \qquad\qquad 9 > 6 \quad | :(-3)$$
$$-8 > -16 \qquad\qquad -3 < -2$$

Siehe auch 3.4.1., S 165 f

Übung

Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Gleichungen mit $G_1 = \mathbb{N}$, $G_2 = \mathbb{Z}$, $G_3 = \mathbb{R}$, $G_4 = \mathbb{C}$

1) $6x^2 + x - 2 = 0$ 2) $\frac{2}{11} = \frac{66}{x^2+2}$ 3) $x^2 + x = 2$ 4) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

5) $x^4 + x^2 - 2 = 0$

Bei den Gleichungen in 3) und 4) handelt es sich um sogenannte Biquadratische Gleichungen.
Lösungsansatz: $x^2 = u$, quadratische Gleichung in u lösen, am Ende die Werte für u gleich x^2 setzen und x bestimmen. (Siehe 3.1.3., S 130)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge mit $G = \mathbb{R}$, mit $a, b \neq 0$, wenn x die Variable darstellt:

6) $x^2 + bx = ax + ab$ 7) $x^2 + 1 = \frac{a^2+b^2}{ab} \cdot x$

8) $(a-x)^2 + (b-x)^2 = (a-b)^2$ 9) $x + \frac{1}{x} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ 10) $\frac{1}{x-a} + \frac{x-b}{ab} = \frac{2}{b}$

Lösungen:

1) $L_1 = \{\ \}$ $L_2 = \{\ \}$ $L_3 = \{-\frac{2}{3}; \frac{1}{2}\}$ $L_4 = \{-\frac{2}{3}; \frac{1}{2}\}$

2) $L_1 = \{19\}$ $L_2 = \{-19; 19\}$ $L_3 = \{-19; 19\}$ $L_4 = \{-19; 19\}$

3) $L_1 = \{1\}$ $L_2 = \{-2; 1\}$ $L_3 = \{-2; 1\}$ $L_4 = \{-2; 1\}$

4) $L_1 = \{2\}$ $L_2 = \{-2; 2\}$ $L_3 = \{-2; 2; -\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$ $L_3 = \{-2; 2; -\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$

5) $L_1 = \{1\}$ $L_2 = \{-1; 1\}$ $L_3 = \{-1; 1\}$ $L_4 = \{-1; 1; -\sqrt{2}\, i; \sqrt{2}\, i\}$

6) $L = \{a; -b\}$ 7) $L = \left\{\frac{a}{b}; \frac{b}{a}\right\}$ 8) 6) $L = \{a; b\}$ 9) 7) $L = \left\{\frac{a}{b}; \frac{b}{a}\right\}$

10) $L = a + b; 2a\}$

Weitere Übungsmöglichkeiten: http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/kurs/quadgl.pdf

Kann ich's?

1) Geben Sie die Lösungsmenge folgender Gleichungen mit $G = \mathbb{R}$ an:

a) $\frac{x-4}{2} = \frac{128}{x-4}$ b) $\frac{e^{i\pi(z^2-1)}}{z+1} \cdot z = 0$

2) Geben Sie folgende Gleichung in Normalform an: $8 + x^3 = (x^2 + 1)\, x + 5\, x^2$

Lösungen: 1) a) $L = \{-12; 20\}$ b) $L = \{0; 1\}$ 2) $x^2 - 4x - 1 = 0$

3.1.3. Gleichungen höheren (als 2.) Grades (HORNER-Schema)

Beispiele: $5\,x^3 - 8\,x^2 - 27\,x + 18 = 0$ oder $\frac{1}{16} \cdot x^4 = x^3$

HORNER – Schema: (Benannt nach William George HORNER (1786–1837), englischer Mathematiker)

Beispiel: $5\,x^3 - 8\,x^2 - 27\,x + 18 = 0 \qquad G = \mathbb{R}$

① Man schreibt die Koeffizienten der Glieder nach fallenden Potenzen als Schema in eine Zeile.

② Die erste Lösung x_1 muss durch Probieren gefunden werden.

Tipp: x_1 ist meistens ein Teiler des konstanten Gliedes (**18**).

Welche Zahlen teilen 18: 1, 2, 3, 6 und 18. Diese Teiler und ihre negativen Gegenzahlen werde der Reihe nach eingesetzt.
Beginnen wir mit $x_1 = 1$.

③ Die erste Vorzahl (**5**) wird nach unten schrieben und ④ mit x_1 multipliziert.

⑤ Das Ergebnis dieser Multiplikation (**+5**) wird zur zweiten Vorzahl (**–8**) addiert.

⑥ Das Ergebnis dieser Addition (**–3**) wird wiederum mit x_1 multipliziert.

⑦ Das Ergebnis dieser Multiplikation (**–3**) wird zur dritten Vorzahl (**–27**) addiert.

⑧ Das Ergebnis der Addition (–30) wird mit x_1 multipliziert und ⑨ dieses Produkt (**–30**) zur vierten Zahl (**+18**) addiert.

⑩ Ist dieses Ergebnis null, so ist das gewählte x_1 Lösung der Gleichung, andernfalls nicht.

Da $x_1 = 1$ keine Lösung der Gleichung darstellt, probieren wir als nächstes $x_1 = -1$:

$5\,x^3 - 8\,x^2 - 27\,x + 18 = 0$

①	5	−8	−27	+18	
② $x_1 = -1$:		−5	+13	+14	
	5 ③	−13	−14	+32 ⑩	$\neq 0$ -> $x_1 = -1$ ist KEINE Lösung

Da $x_1 = -1$ keine Lösung der Gleichung darstellt, probieren wir als nächstes $x_1 = 2$:

$5\,x^3 - 8\,x^2 - 27\,x + 18 = 0$

①	5	−8	−27	+18	
② $x_1 = 2$:		+10	+4	−46	
	5 ③	+2	−23	−28 ⑩	$\neq 0$ -> $x_1 = 2$ ist KEINE Lösung

Da $x_1 = 2$ keine Lösung der Gleichung darstellt, probieren wir als nächstes $x_1 = -2$:

$5\,x^3 - 8\,x^2 - 27\,x + 18 = 0$

①	5	−8	−27	+18	
② $x_1 = -2$:		−10	+36	−18	
	5 ③	−18	+9	0 ⑩	$= 0$ -> $x_1 = -2$ ist eine Lösung

Die in der unteren Zeile stehenden Zahlen liefern die Vorzahlen (Koeffizienten) einer um einen Grad niedrigeren Gleichung:

$$5\,x^2 - 18\,x + 9 = 0$$

$$x_{2/3} = \frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 9}}{2 \cdot 5}$$

$$x_{2/3} = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 180}}{10}$$

$$x_{2/3} = \frac{18 \pm \sqrt{144}}{10}$$

$$x_{2/3} = \frac{18 \pm 12}{10}$$

$$x_2 = \frac{18 + 12}{10} = 3 \qquad x_3 = \frac{18 - 12}{10} = \frac{3}{5} \qquad L = \left\{-2, 3, \frac{3}{5}\right\}$$

Manche Gleichungen lassen sich durch **Substitution** lösen:

Beispiel: $x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \qquad G = \mathbb{R}$

Diese Gleichung erinnert an eine quadratische Gleichung, nur dass die Variablen für sich nochmals quadriert sind. Man nennt sie deshalb **biquadratische Gleichung**.

Wir setzen für $\boldsymbol{x^2 = u}$ Damit ist $x^4 = (x^2)^2 = u^2$

Somit lautet die Gleichung $u^2 - 3\,u - 4 = 0$

$$u_{1/2} = -\frac{-3}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 4}$$

$$u_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4}$$

$$u_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}}$$

$$u_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$u_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$u_1 = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} \qquad u_2 = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}$$

$$u_1 = 4 \qquad u_2 = -1$$

$$x^2 = 4 \;|\sqrt{\ } \qquad x^2 = -1 \;|\;|\sqrt{\ }$$

$$x_{1/2} = \pm\sqrt{4} \qquad x_{3/4} = \pm\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$$

$$x_{1/2} = \pm 2 \qquad L = \{-2, 2\}$$

Übung

Geben Sie die Lösungsmenge folgender Gleichungen mit $G = \mathbb{R}$ an.

1) $x^3 + 6\,x^2 + 3\,x - 10 = 0$ 2) $x^3 - 6\,x^2 + 11\,x = 0$

3) $x^3 = x$ 3) $\frac{1}{4}\,x^4 = x^2$

Bei 3) und 4): NICHT durch die Variable dividieren! Ansonsten gehen Lösungen verloren.

Lösungen: 1) $L = \{-5, -2, 1\}$ 2) $L = \{0\}$ 3) $L = \{-1, 0, 1\}$ 4) $L = \{-2, 0, 2\}$

3.1.4. Exponential- und Logarithmische Gleichungen

3.1.4.1. Bezeichnungen

Folgende **Bezeichnungen** gelten:

Argument bzw. Logarithmand [18]

$$\log_a(b)$$

Basis

Bemerkung: Manchmal liest man *statt* $\log_a(b)$ auch die Schreibweise ${}^a\log(b)$

Der **Zusammenhang zwischen Exponential– und Logarithmusfunktion**:

$$\boxed{a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad \log_a(b) = x}$$

Beispiele:

$$2^3 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad \log_2(8) = 3$$

$$10^2 = 100 \quad \Leftrightarrow \quad \log_{10}(100) = 2$$

$$4^1 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \log_4(4) = 1$$

Allgemein gilt:

$\log_a(a) = 1$ **weil** $a^1 = a$

Beispiel: $\frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2} = \frac{1}{100} \quad \Leftrightarrow \quad \log_{10}\left(\frac{1}{100}\right) = -2 = \lg\left(\frac{1}{100}\right) = -2$

$$\log_{2.5}(2.5) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2.5^1 = 2.5$$

[18] Eigentlich: *numerus logarithmandus*, auf deutsch: die zu logarithmierende Zahl

Für **Logarithmen bestimmter Basen** gibt es eigene Abkürzungen:

Name	Schreibweise
dekadischer Logarithmus (**10**-er Logarithmus)	$\log_{10}(x) = \mathbf{lg}(x)$ [19]
natürlicher Logarithmus (*logarithmus naturalis*)	$\log_{e}(x) = \mathbf{ln}(x)$ **e** … EULERsche Zahl
binärer Logarithmus	$\log_{2}(x) = \mathbf{lb}(x)$

3.1.4.2. Rechenregeln für Logarithmen

Ohne Beweise die Rechenregeln:

$$\mathbf{L1:}\ \log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$$

$$\mathbf{L2:}\ \log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$$

$$\mathbf{L3:}\ \log_a(u^n) = n \cdot \log_a(u)$$

$$\mathbf{L4:}\ \log_a(\sqrt[m]{u}) = \frac{1}{m} \cdot \log_a(u)$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{L3}\\ \mathbf{L4}\end{array}\right\}\ \log_a(\sqrt[m]{u^n}) = \frac{n}{m} \cdot \log_a(u)$$

Beispiele: Zerlegen Sie folgende Terme soweit wie möglich:

a) $\log\left(\frac{4\cdot u}{v^3}\right)$ b) $\log\left(\frac{2\cdot x^3\cdot\sqrt[3]{x^2}}{a^2\cdot(a^2-b^2)}\right)$

a) $\log\left(\frac{4\cdot u}{v^3}\right) = \log(4\cdot u) - \log(v^3)$ $= \log(4) + \log(u) - 3\cdot\log(v)$

Im Logarithmand steht ein Bruch.
Deshalb wenden wir zunächst L2 an.

Im ersten Logarithmand steht ein Produkt -> L1
Im zweiten Logarithmand steht eine Potenz -> L3

$= 2\cdot\log(2) + \log(u) - 3\cdot\log(v)$

$4 = 2^2 \rightarrow \log(4) = \log(2^2) = 2\cdot\log(2)$

L3

b) $\log\left(\frac{2\cdot x^3\cdot\sqrt[3]{x^2}}{a^2\cdot(a^2-b^2)}\right) = \log\left(2\cdot x^3\cdot\sqrt[3]{x^2}\right) - \log\left(a^2\cdot(a^2-b^2)\right) =$

Im Logarithmand steht ein Bruch -> L2

$= \log(2) + \log(x^3) + \log\left(\sqrt[3]{x^2}\right) - \left(\log(a^2) + \log(a^2-b^2)\right) =$

In beiden Logarithmanden seht ein Produkt: L1
! Das Minus gilt für alle Logarithmen des ursprünglichen Nenners.

$= \log(2) + 3\cdot\log(x) + \frac{2}{3}\cdot\log(x) - 2\cdot\log(a) - \log(a-b) - \log(a+b)$

$(a^2-b^2) = (a-b)\cdot(a+b) \rightarrow \log(a^2-b^2) = \log\left((a-b)\cdot(a+b)\right) = \log(a-b) + \log(a+b)$

Bei den Potenzen wenden wir L3 an, bei der Wurzel die Kombination von L3 und L4

Beispiele: Stellen Sie als Logarithmus eines einzigen Logarithmanden (Terms) dar.

a) $2\cdot\log(x) + \frac{1}{2}\cdot\log(y) - 3\cdot\log(x) =$

b) $\frac{3}{4}\cdot\log(a) - \frac{1}{4}\cdot\log(b) + 4\cdot\log(c) =$

a) $2 \cdot \log(x) + \frac{1}{2} \cdot \log(y) - 3 \cdot \log(x) =$

$= \log(x^2) + \log\left(\sqrt[2]{x^1}\right) - \log(x^3)$

Hier wenden wir die Regeln von rechts nach links an

Zunächst müssen die Vorzahlen der Logarithmen verschwinden. Ganze Zahlen -> L3, Brüche -> L4

$= \log\left(x^2 \cdot \sqrt{x}\right) - \log(x^3) =$

Man kann immer nur paarweise die Glieder zusammenfassen. Plus -> L1, minus -> L2

$$= \log\left(\frac{\overset{1}{\cancel{x^2}} \cdot \sqrt{x}}{\underset{x}{\cancel{x^3}}}\right) = \log\left(\frac{\sqrt{x}}{x}\right)$$

b) $\frac{3}{4} \cdot \log(a) - \frac{1}{4} \cdot \log(b) + 4 \cdot \log(c) = \log\left(\sqrt[4]{a^3}\right) - \log\left(\sqrt[4]{b^1}\right) + \log(c^4) =$

Beim ersten Glied die Kombination aus L3 und L4

$= \log\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[4]{b}}\right) + \log(c^4)$

Die ersten beiden Glieder mit Minus verbunden -> L2

$= \log\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[4]{b}} \cdot c^4\right)$

Die Glieder sind mit Plus verbunden -> L1

$= \log\left(\sqrt[4]{\frac{a^3}{b}} \cdot c^4\right)$

P8 (2.2.2., P6 S 79)

Weiteres über Exponential- und Logarithmusfunktionen (siehe 7.6., S 367 f)

3.1.4.3. Exponentialgleichungen

Zur Erinnerung:

Rechenoperation	$\leftrightarrow$	Umkehrung
$+$	$\leftrightarrow$	$-$
$\cdot$	$\leftrightarrow$	$:$
$\square^n$	$\leftrightarrow$	$\sqrt[n]{\square}$
a^x	$\leftrightarrow$	$\log_a(x)$

Rechenoperationen und ihre Umkehrungen gelten wechselseitig!

Bei **Exponential**gleichungen steht die Variable im **Exponenten** (in der Hochzahl):

Beispiele: $3^x = 27$ $\qquad 2^{2\cdot x-2} = 5\cdot 2^{2\cdot x-7} + 3^{2\cdot x-4}$

① Exponentialgleichungen **OHNE Glieder** (außer im Exponenten), bei denen die **Konstante auf die gleiche Basis wie** die **Exponentialfunktion** gebracht werden kann:

Beispiel: $3^{x-2} = 27$ $\qquad 27 = 3\cdot 3\cdot 3 = 3^3$

$3^{x-2} = 3^3$

Es wird wohl nur dann links und rechts der gleiche Wert stehen, wenn (bei gleicher Basis) die Hochzahlen gleich sind.

$x - 2 = 3 \quad | +2$

$\mathbf{x = 5}$

```
from sympy import *
```

```
x = symbols("x")
```

```
solve(3**(x-2)-27)
[5]
```

Es wäre in jedem Fall die Probe durchzuführen um festzustellen, ob der errechnete Wert auch Lösung der Gleichung ist.

② Exponentialgleichungen **OHNE Glieder** (außer im Exponenten), bei denen **beide Seiten auf EINE Exponentialfunktionen mit gleicher Basis** gebracht werden können:

Beispiel: $\frac{2^{3\cdot x+7}}{8} = \frac{4}{2^{2\cdot x+3}}$ $8 = 2\cdot 2\cdot 2 = 2^3$ $4 = 2\cdot 2 = 2^2$

$$\frac{2^{3\cdot x+7}}{2^3} = \frac{2^2}{2^{2\cdot x+3}}$$

Wir wenden auf beiden Seiten P2 (2.2.2., S 74) an.

$$2^{3\cdot x+7-3} = 2^{2-(2\cdot x+3)}$$

$$2^{3\cdot x+4} = 2^{2-2\cdot x-3}$$

$$2^{3\cdot x+4} = 2^{-2\cdot x-1}$$

Es wird wohl nur dann links und rechts der gleiche Wert stehen, wenn (bei gleicher Basis) die Hochzahlen gleich sind.

$$3\cdot x+4 = -2\cdot x-1 \quad |+2\cdot x$$

$$5\cdot x+4 = -1 \quad |-4$$

$$5\cdot x = -5 \quad |:5$$

$$\mathbf{x = -1}$$

③ **Exponentialgleichungen OHNE Glieder** (außer im Exponenten) und keinerlei Besonderheiten:

Beispiel: $3^{2\cdot x-1} \cdot 2^x = 7 \cdot 5^{x+1}$ Wie **logarithmieren** die Gleichung.

$3^{2\cdot x-1} \cdot 2^x = 7 \cdot 5^{x+1} \quad | \ \mathbf{lg}$ **!** Beim Logarithmieren ist es egal welche Basis der Logarithmus besitzt.

$\mathbf{lg}\,(3^{2\cdot x-1} \cdot 2^x) = \mathbf{lg}\,(7 \cdot 5^{x+1})$ Nach den Rechenregeln für Logarithmen wird zerlegt.

$$\lg(3^{2\cdot x-1}) + \lg(2^x) = \lg(7) + \lg\,(5^{x+1})$$

$$(2 \cdot x - 1) \cdot \lg(3) + x \cdot \lg(2) = \lg(7) + (x+1) \cdot \lg\,(5)$$

Da die Variable in Klammern steht, lösen wir diese auf.

$$2 \cdot x \cdot \lg(3) - \lg(3) + x \cdot \lg(2) = \lg(7) + x \cdot \lg(5) + \lg\,(5)$$

Die Glieder mit der Variablen auf die eine Seite, die Glieder ohne Variable auf die andere Seite.

$$2 \cdot x \cdot \lg(3) + x \cdot \lg(2) - x \cdot \lg(5) = \lg(7) + \lg(5) + \lg\,(3)$$

Jetzt können wir die Variable herausheben:

$$x \cdot [2 \cdot \lg(3) + \lg(2) - \lg(5)] = \lg(7) + \lg(5) + \lg\,(3)$$

Zuletzt noch durch die eckige Klammer dividiert.

$$x = \frac{\lg\,(7)+\lg\,(5)+\lg\,(3)}{[2\cdot\lg(3)+\lg(2)-\lg(5)]}$$

Will man für die Variable einen Zahlenwert erhalten, benötigt man elektronische Hilfe.

$$x \approx 3{,}6333$$

Ob dieser Wert Lösung der Gleichung ist, wird durch die Probe geklärt:

$$3^{2\cdot 3{,}6333-1} \cdot 2^{3{,}6333} = 7 \cdot 5^{3{,}6333+1}$$

$12\,122{,}85 = 12\,122{,}85 \ \rightarrow$ **w.A.** $\rightarrow \ \mathbf{x = 3{,}6333}$ ist Lösung der Gleichung.

④ Exponentialgleichungen MIT Gliedern und Exponentialfunktionen mit ZWEI verschiedenen Basen:

Beispiel: $4 \cdot 2^{x-1} - 3^x + 13 \cdot 3^{x-1} = 6 \cdot 2^{x+1} - 10 \cdot 2^{x-2}$

Wir bringen die Glieder mit den gleichen Basen auf die gleiche Seite.

$$4 \cdot 2^{x-1} - 6 \cdot 2^{x+1} + 10 \cdot 2^{x-2} = 3^x - 13 \cdot 3^{x-1}$$

Auf beiden Seiten wird die Potenz mit dem **kleinsten** Exponenten herausgehoben.

$$2^{x-2} \cdot (4 \cdot 2^1 - 6 \cdot 2^3 + 10 \cdot 2^0) = 3^{x-1} \cdot (3^1 - 13 \cdot 3^0)$$

$2^{x-2} \cdot 2^1 = 2^{x-2+1} = 2^{x-1}$ $\quad$ $3^{x-1} \cdot 3^1 = 3^{x-1+1} = 3^x$

$2^{x-2} \cdot 2^3 = 2^{x-2+3} = 2^{x+1}$ $\quad$ $3^{x-1} \cdot 3^0 = 3^{x-1+0} = 3^x$

$2^{x-2} \cdot 2^0 = 2^{x-2+0} = 2^{x-2}$

$$2^{x-2} \cdot (-30) = 3^{x-1} \cdot (-10) \quad |:(-10)$$

$$2^{x-2} \cdot 3 = 3^{x-1}$$

Es geht weiter wie bei Typ ③

$$2^{x-2} \cdot 3 = 3^{x-1} \quad | \lg$$

$$\lg(2^{x-2} \cdot 3) = \lg(3^{x-1})$$

$$\lg(2^{x-2}) + \lg(3) = \lg(3^{x-1})$$

$$(x-2) \cdot \lg(2) + \lg(3) = (x-1) \cdot \lg(3)$$

$$x \cdot \lg(2) - 2 \cdot \lg(2) + \lg(3) = x \cdot \lg(3) - \lg(3)$$

$$-2 \cdot \lg(2) + \lg(3) + \lg(3) = x \cdot \lg(3) - x \cdot \lg(2)$$

$$-2 \cdot \lg(2) + 2 \cdot \lg(3) = x \cdot [\lg(3) - \lg(2)]$$

$$\frac{-2 \cdot \lg(2) + 2 \cdot \lg(3)}{[\lg(3) - \lg(2)]} = x$$

$$2 = x$$

(oder im konkreten Fall auch wie bei Typ ①)

$$2^{x-2} \cdot 3 = 3^{x-1} \quad |:3$$

$$2^{x-2} = \frac{3^{x-1}}{3^1}$$

$$2^{x-2} = 3^{x-1-1}$$

$$2^{x-2} = 3^{x-2}$$

Bei verschiedenen Basen und gleicher Hochzahl kann links und rechts nur dann die gleiche Zahl stehen, wenn die Hochzahl null ist, denn

$$2^0 = 3^0 \Leftrightarrow 1 = 1$$

Hochzahl gleich null gesetzt:

$x - 2 = 0 \quad | + 2$

$x = 2$

Probe: $4 \cdot 2^{2-1} - 3^2 + 13 \cdot 3^{2-1} = 6 \cdot 2^{2+1} - 10 \cdot 2^{2-2}$

$38 = 38 \rightarrow$ **w.A.** $\rightarrow$ $\mathbf{x = 2}$ ist Lösung

Beispiel: $\sqrt[x+8]{729^{x+1}} = \frac{1}{3}$

$729^{\frac{x+1}{x+8}} = \frac{1}{3}$ $\quad 729 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6 \quad \frac{1}{3} = \frac{1}{3^1} = 3^{-1}$

$(3^6)^{\frac{x+1}{x+8}} = 3^{-1}$

$3^{6 \cdot \frac{x+1}{x+8}} = 3^{-1} \quad | \log_3$

$\log_3\left(3^{6 \cdot \frac{x+1}{x+8}}\right) = \log_3(3^{-1})$

$6 \cdot \frac{x+1}{x+8} \cdot \log_3(3) = -1 \cdot \log_3(3)$

$6 \cdot \frac{x+1}{x+8} \cdot 1 = -1 \cdot 1$

$6 \cdot \frac{x+1}{x+8} = -1$ **

oder: Auf beiden Seiten kann nur dann das Gleiche stehen, wenn (bei gleicher Basis) die Hochzahlen gleich sind, also

$6 \cdot \frac{x+1}{x+8} = -1$ **

$\frac{6}{1} \cdot \frac{x+1}{x+8} = -1$

$\frac{6 \cdot (x+1)}{x+8} = -1 \quad | \cdot (x+8)$

$6 \cdot (x+1) = -1 \cdot (x+8)$

$6x + 6 = -x - 8 \quad | + x - 6$

$7x = -14 \quad |: 7$

$\mathbf{x = -2}$

Probe: $\sqrt[-2+8]{729^{-2+1}} = \frac{1}{3} \rightarrow \sqrt[6]{729^{-1}} = \frac{1}{3} \rightarrow \sqrt[6]{\frac{1}{729}} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{\sqrt[6]{3^6}} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ **w.A.**

$\mathbf{x = -2}$ ist Lösung der Gleichung.

Video-Tipp

https://www.youtube.com/watch?v=MJ-2q2hHho8

3.1.4.4. Logarithmische Gleichungen

Bei logarithmischen Gleichungen steht die Variable im Logarithmand (Numerus).

Beispiele: $\lg(x-2)-\lg(x)=\lg(x+3)-\lg(x+10)$ oder $\ln(5\cdot x^4)-3\cdot\ln(5\cdot x)=\ln(5)$

Beispiel: $\lg(x-2)-\lg(x)=\lg(x+3)-\lg(x+10)$

① **Beide Seiten** werden nach den Rechenregeln für Logarithmen (S 132) **als Logarithmus EINES Logarithmanden** dargestellt.

$$\lg\left(\frac{x-2}{x}\right)=\lg\left(\frac{x+3}{x+10}\right)$$

② Nun wird die **Gleichung „entlogarithmiert"** und entsprechend gelöst.

$$\frac{x-2}{x}=\frac{x+3}{x+10}$$

$$\begin{array}{lll} & & Ef \\ N_1: & x = x & (x+10) \\ N_2: & x+10=(x+10) & x \end{array}$$

Falls nicht mehr erinnerlich: 3.1.1.3., S 111 f

$$\mathbf{N: x\cdot(x+10)}$$

$$\frac{(x-2)\cdot(x+10)}{N}=\frac{(x+3)\cdot x}{N} \quad |\ .N$$

$$\frac{(x-2)\cdot(x+10)\cdot\overset{1}{\cancel{N}}}{\underset{1}{\cancel{N}}}=\frac{(x+3)\cdot x\cdot\overset{1}{\cancel{N}}}{\underset{1}{\cancel{N}}}$$

$$(x-2)\cdot(x+10)=(x+3)\cdot x$$

$$x^2+10\cdot x-2\cdot x-20=x^2+3\cdot x$$

$$x^2+8\cdot x-20=x^2+3\cdot x \quad |-x^2-8\cdot x$$

$$-20=-5\cdot x \quad |:(-5)$$

$$4=x$$

```
from sympy import *
```
```
x = symbols("x")
```
```
solve(log((x-2)/x)-log((x+3)/(x+10)))
```
[4]

Probe: $\lg(4-2)-\lg(4)=\lg(4+3)-\lg(4+10)$

$-0{,}3010=-0{,}3010 \;\rightarrow$ **w.A.** $\rightarrow\; \mathbf{x=4}$ ist Lösung

Zwei Bemerkungen:

1) Was bedeutet denn „entlogarithmieren“?

Zur Erinnerung:

Eine **Exponentialfunktion** und der **Logarithmus gleicher Basis** sind die jeweiligen Umkehrungen.

Damit gilt zum Beispiel $\mathbf{2^{\log_2(x)}=x}$, $\mathbf{10^{\log_{10}(x)}=x}$ oder $\mathbf{\log_5(5^x)=x}$

Die Gleichung des letzten Beispiels lautet vor dem „entlogarithmieren“

$$\lg\left(\frac{x-2}{x}\right)=\lg\left(\frac{x+3}{x+10}\right)$$

$$\log_{10}\left(\frac{x-2}{x}\right)=\log_{10}\left(\frac{x+3}{x+10}\right) \quad \mid 10$$

Jetzt setzen wir beide Seiten in den Exponenten der Basis 10:

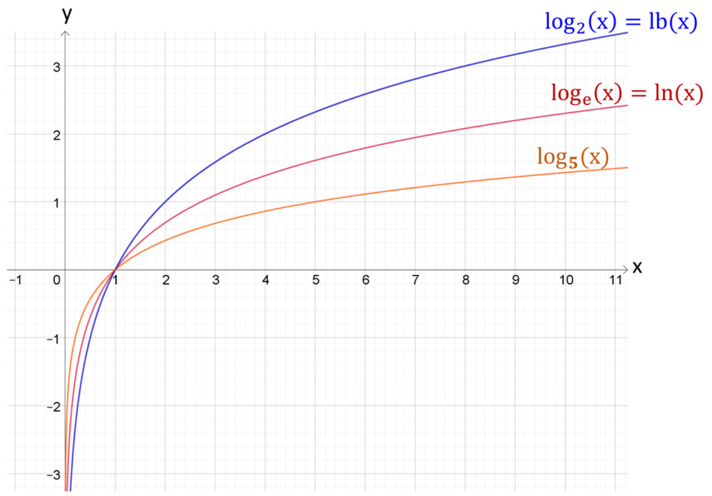
$$10^{\log_{10}\left(\frac{x-2}{x}\right)} = 10^{\log_{10}\left(\frac{x+3}{x+10}\right)}$$

$$10^{\text{linke Seite}} = 10^{\text{rechte Seite}}$$

$$\frac{x-2}{x} = \frac{x+3}{x+10}$$

Weiter wie gehabt.

2) Bei Logarithmen ist eine Definitionsmenge zu bilden, weil Logarithmen nur für **positive** Argumente (Logarithmanden) definiert sind:



Bei unserer Gleichung:

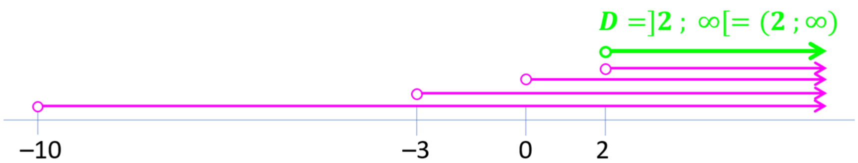
$$\lg(\underbrace{x-2}_{>0}) - \lg(\underbrace{x}_{>0}) = \lg(\underbrace{x+3}_{>0}) - \lg(\underbrace{x+10}_{>0})$$

$x - 2 > 0 \mid +2 \;\rightarrow\; x > 2$

$x > 0$

$x + 3 > 0 \mid -3 \;\rightarrow\; x > -3$

$x + 10 > 0 \mid -10 \;\rightarrow\; x > -10$



Für alle reellen Zahlen, die größer als 2 sind, sind alle gegebenen Logarithmanden positiv.

Da $\boldsymbol{x = 4}$ in der Definitionsmenge liegt, ist es eine Lösung, soferne die Probe eine wahre Aussage ergibt:

$\lg(\mathbf{4} - 2) - \lg(\mathbf{4}) = \lg(\mathbf{4} + 3) - \lg(\mathbf{4} + 10)$

$\lg(2) - \lg(4) = \lg(7) - \lg(14)$

$0{,}3011 - 0{,}6021 = 0{,}8451 - 1{,}1461$

$-0{,}301 = -0{,}301 \;\; \boldsymbol{w.A.}$

Bemerkung: Wird die Probe durchgeführt und man erhält eine wahre Aussage (w.A.), so kann man auch ohne Bildung der Definitionsmenge sicher sein, dass der errechnete Wert Lösung der Gleichung ist.

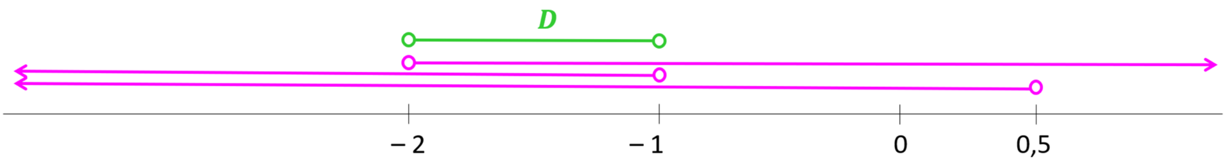
Beispiel: Ermitteln Sie die Definitionsmenge folgender Gleichung mit $G = \mathbb{R}$.

$$2 \cdot \log(1-2x) + \frac{1}{2} \cdot \log(2-x) = \log(x+2)$$

$1 - 2x > 0 \quad | -1$ $\qquad$ $2 - x > 0 \quad | -2$ $\qquad$ $x + 2 > 0 \quad | -2$

$-2x > -1 \quad |: (-2)$ $\qquad$ $-x > 1 \quad |.(-1)$ $\qquad$ $x > -2$

$\mathbf{x < 0,5}$ $\qquad$ $\mathbf{x < -1}$ $\qquad$ $\mathbf{x > -2}$



$$\boldsymbol{D = (-2\,;\,-1)}$$

Übung

Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Gleichungen mit $G = \mathbb{R}$.

1) $224 \cdot 4^x = 2^{x+6} \cdot 14$

2) $3^x + 3^{x+1} = 12$

3) $11 \cdot 7^{x-1} + 7 \cdot 11^{x-1} = 7^x + 11^x$

4) $\lg(x+1) = \lg 4$

5) $\lg x^5 - \lg x^2 = \lg 8$

6) $2\ln(x+3) - 3\ln(x+2) + \ln(x+1) = 0$

7) $\lg(2^{x-3} + 2^{x-2}) - x \cdot \lg(2) = \lg(2^x)$

8) $5^{4x-1} - 16 \cdot 5^{4x-3} = 9 \cdot 3^{4x-2} - 4 \cdot 3^{2(2x-1)}$

Lösungen: 1) $L = \{2\}$ 2) $L = \{1\}$ 3) $L = \{1\}$ 4) $L = \{3\}$ 5) $L = \{2\}$

6) $L = \{-0.38\}$ 7) $L = \{-1.42\}$ 8) $L = \{1\}$

Video-Tipp

https://www.youtube.com/watch?v=1JuK_R7oh4U

Folgende Gleichung war an der *University of Cambridge* zur Aufnahmeprüfung für Ingenieurwissenschaften zu lösen.
Es ist eine von 25 Aufgaben, für die insgesamt 75 Minuten Bearbeitung vorgesehen sind.

Bestimmen Sie die Summe der reellen Lösungen der Gleichung

$$3^x - \left(\sqrt{3}\right)^{x+4} + 20 = 0$$

Gebotene Alternativen:

A: 1	D: $\log_3 20$
B: 4	E: $2 \cdot \log_3 20$
C: 9	F: $4 \cdot \log_3 20$

$$3^x - \left(\sqrt{3}\right)^{x+4} + 20 = 0$$

$$3^x - \left(\sqrt{3}\right)^{x} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{4} + 20 = 0$$

P1, 2.2.2., S 73:

$$\left(\sqrt{3}\right)^4 = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^4 = 3^{\frac{1}{2}\cdot 4} = 3^2 = 9$$

P6, 2.2.2., S 79 P5, 2.2.2., S 78

$$3^x - \left(\sqrt{3}\right)^{x} \cdot 9 + 20 = 0$$

$$3^x - 9 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{x} + 20 = 0$$

$$3^x - 9 \cdot \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{x} + 20 = 0$$

P6, 2.2.2., S 79

$$3^x - 9 \cdot 3^{\frac{1}{2}\cdot x} + 20 = 0$$

P5, 2.2.2., S 78

$$3^{\frac{x}{2}\cdot 2} - 9 \cdot 3^{\frac{x}{2}} + 20 = 0$$

$$x = \frac{x}{2} \cdot 2$$

$$\left(3^{\frac{x}{2}}\right)^2 - 9 \cdot 3^{\frac{x}{2}} + 20 = 0$$

P5, 2.2.2., S 78

$$u^2 - 9 \cdot u + 20 = 0$$

Wir substituieren (setzen ein): $3^{\frac{x}{2}} = u$

$$u_{1/2} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 - 20}$$

$$u_{1/2} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$u_{1/2} = \frac{9}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$u_1 = 5 \quad \vee \quad u_2 = 4$

$3^{\frac{x}{2}} = 5 \ \mid \log_3 \quad \vee \quad 3^{\frac{x}{2}} = 4 \ \mid \log_3 \qquad 3^{\frac{x}{2}} = u$

$\log_3\left(3^{\frac{x}{2}}\right) = \log_3(5) \quad \vee \quad \log_3\left(3^{\frac{x}{2}}\right) = \log_3(4)$

$\frac{x}{2} \cdot \log_3(3) = \log_3(5) \quad \vee \quad \frac{x}{2} \cdot \log_3(3) = \log_3(4) \qquad \log_3(3) = 1$

$\frac{x}{2} = \log_3(5) \ \mid \cdot 2 \quad \vee \quad \frac{x}{2} = \log_3(4) \mid \cdot 2$

$x_1 = 2 \cdot \log_3(5) \quad \vee \quad x_2 = 2 \cdot \log_3(4)$

$x_1 + x_2 = 2 \cdot \log_3(5) + 2 \cdot \log_3(4) = 2 \cdot [\log_3(5) + \log_3(4)] = 2 \cdot \log_3(5 \cdot 4) = 2 \cdot \log_3(20) \rightarrow$ **E**

Übung

Ermitteln Sie die Lösungsmenge folgender Gleichungen mit $G = \mathbb{R}$.

1) $e^{2x} - 2\,e^{x} = 0$ 2) $x^{\lg(x)} = 1$

3) $8^{2x-1} - 3^{3x+2} = 3^{3x-2} - 8^{2x+1}$

4) $5^{2x} - 5^{x+1} = -4$

5) $2^{x+3} - 3^{x} = 0$

Lösungen:

1) Tipp: $e^{2x} = (e^{x})^2$ Substituiere $e^{x} = u$ $L = \{\ln(2)\}$

2) Tipp: Die Gleichung mit lg logarithmieren $L = \{\ 1\ \}$

3) $L = \{0{,}1327\}$

4) Tipp $5^{2x} = (5^{x})^2$ und $5^{x} = z$ setzen. $L = \{\ 0\ , 0.8613\}$

5) $L = \{\ 5.1285\}$

3.2. Lineare Gleichungssysteme

Zur Veranschaulichung der Lösungen linearer Gleichungssysteme benötigt man Kenntnisse der Vektorrechnung:
4.5.1., S 199 f, 4.5.2., S 204 f, 4.6., S 213 f

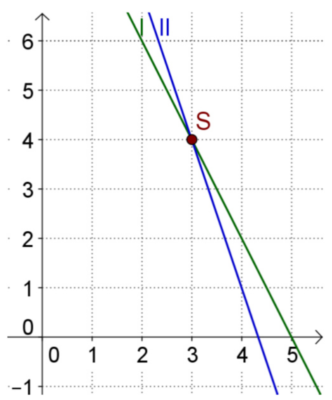
Gleichungs-System meint, es werden **Lösungen** gesucht, **die für alle Gleichungen gelten**.

Suchen wir **gemeinsame Lösungen** von **Gleichungen**,
sind das **geometrisch gemeinsame Punkte** von **Linien, Ebenen** oder **Räumen**.

Beispiel eines linearen Gleichungssystems mit zwei Variablen (Unbekannten):

I: $2x + y = 10$

II: $3x + y = 13$

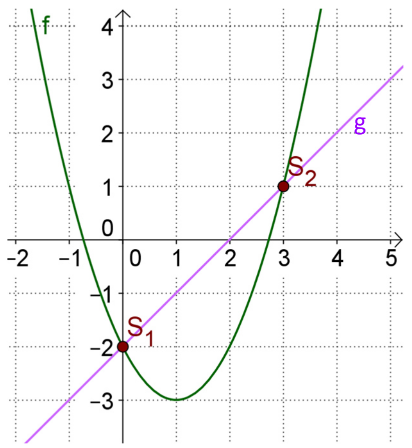


Wie wir sehen werden, stellt **eine lineare Gleichung mit zwei Variablen** geometrisch eine **Gerade** dar.
Der gemeinsame Punkt beider Geraden ist der **Schnittpunkt S**.

Beispiel eines **nicht**-linearen Gleichungssystems in zwei Variablen:

f: $y = x^2 - 2x - 2$

g: $y = x - 2$



f ist eine quadratische Funktion und g eine lineare Funktion.

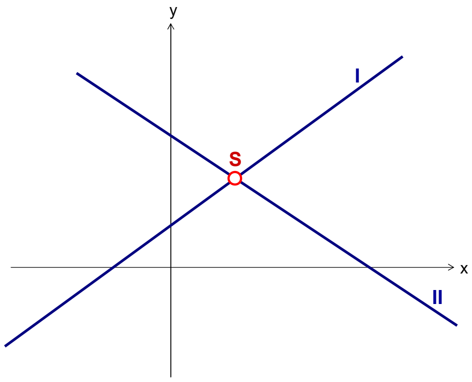
In diesem Fall haben die Linien zwei gemeinsame Punkte, die beiden Schnittpunkte S_1 und S_2 .

3.2.1. Lineare Gleichungssysteme in 2 Variablen

In linearen Gleichungssystemen kommen die Variablen nur linear vor, d.h. sie haben die Hochzahl 1 und stehen nicht im Nenner.

Bevor wir uns den Lösungsverfahren widmen, veranschaulichen wir die

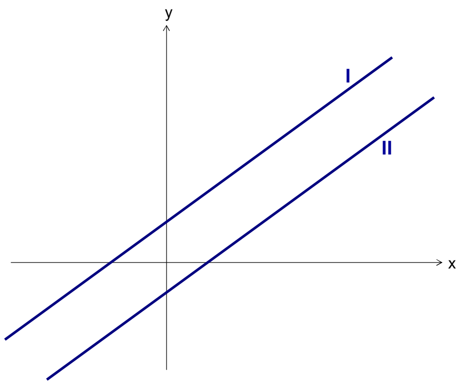
möglichen Lösungen linearer Gleichungssysteme in 2 Variablen



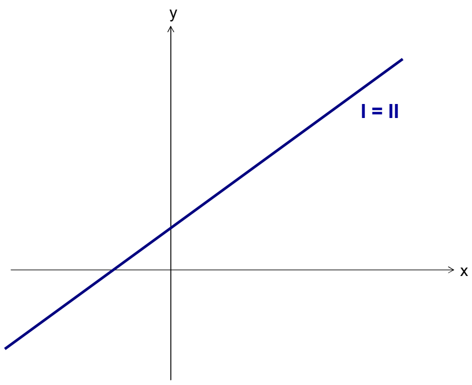
Lineare Gleichungen in **zwei Variablen** stellen **lineare Funktionen** dar, deren **Graphen Geraden** sind.

Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen können demnach

. . . **eine Lösung** – dh, **einen** Schnittpunkt – besitzen, wenn die **Geraden** zueinander **nicht parallel** liegen,



. . . über **keine Lösung** (**keine** gemeinsamen Punkte) verfügen, wenn die **Geraden** zueinander **parallel** sind,



. . . **unendlich viele Lösungen** (**unendlich viele** gemeinsame Punkte) besitzen, wenn die **Geraden identisch** sind, dh, beide Gleichungen dieselbe Gerade beschreiben.

Geraden sind unendlich lang!

3.2.1.1. Lösungsmethoden

3.2.1.1.1. Gleichsetzmethode

Beispiel:

I: $2x + 1y = 10 \quad | -2x$

II: $3x + 1y = 13 \quad | -3x$

Man **drückt aus beiden Gleichungen** die **gleiche Variable** aus und **setzt die Ausdrücke einander gleich**.

I: $y = 10 - 2x$

II: $y = 13 - 3x$

$10 - 2x = 13 - 3x \quad | +3x$

$10 + x = 13 \quad | -10$

$\underline{x = 3}$

I: $y = 10 - 2 \cdot 3$

$y = 10 - 6$

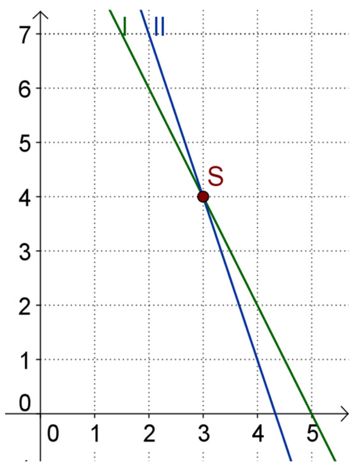
$\underline{y = 4}$

Die andere Variable berechnet man, indem man den errechneten Wert in einen der Ausdrücke einsetzt.

Man wird wohl den einfacheren Ausdruck auswählen.
Egal, welchen Ausdruck man wählt, man erhält für die noch zu berechnende Variable immer denselben Wert!

Der gemeinsame Punkt (der Schnittpunkt) beider Geraden hat die Koordinaten S (3 / 4).

Demnach lautet die Lösungsmenge $L = \{(3/\,4)\} = \{(3,4)\}$



Die Gleichsetzmethode ist dann günstig, wenn **eine** der Variablen in **beiden** Gleichungen die Vorzahlen 1 bzw. – 1 besitzt.

3.2.1.1.2. Einsetzsetzmethode (Substitutionsmethode)

Beispiel: I: $4x + 5y = 23$

II: $x - 2y = -4 \quad | + 2y$

II: $x = -4 + 2y$

Man **drückt aus einer Gleichung eine Variable aus** und **setzt** diesen **Ausdruck in die andere Gleichung ein**.

I: $4 \cdot (\overbrace{-4 + 2y}^{x}) + 5y = 23$

$-16 + 8y + 5y = 23$

$-16 + 13y = 23 \quad | + 16$

$13y = 39 \quad | : 13$

$\underline{y = 3}$

II: $x = -4 + 2 \cdot 3$

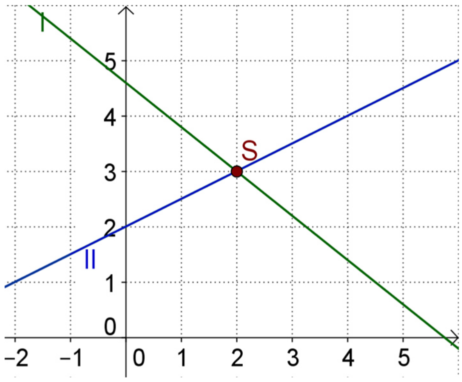
$x = -4 + 6$

$\underline{x = 2}$

Die andere Variable berechnet man, indem man den errechneten Wert in den Ausdruck einsetzt.

Der gemeinsame Punkt (der Schnittpunkt) beider Geraden besitzt die Koordinaten S (2 / 3).

Demnach lautet die Lösungsmenge $L = \{(2,3)\}$



Die Einsetzmethode ist dann günstig, wenn **eine** der Variablen in **einer** der Gleichungen die Vorzahl 1 oder − 1 besitzt.

```python
from sympy import *
```

```python
from sympy.solvers.solveset import linsolve
```

```python
x, y = symbols("x, y")
```

```python
linsolve([4*x+5*y-23, x-2*y+4], (x, y))
```

{(2, 3)}

3.2.1.1.3. Additionsmethode (GAUßsche Eliminationsmethode)

Beispiel:
I: $6x + 3y = 12$
II: $9x - 4y = 1$

Man **multipliziert eine oder beide Gleichungen** mit jeweils solchen Zahlen, dass **eine der Variablen gegengleiche Vorzahlen** erhält.

I: $6x + 3y = 12 \quad | \cdot 4$
II: $9x - 4y = 1 \quad | \cdot 3$

Gegengleiche Zahlen sind z.B. $+9$ und -9

I: $24x + 12y = 48$
II: $27x - 12y = 3$ $\quad +$

Dann **addiert** man die Gleichungen.

$51x = 51 \quad | : 51$
$\underline{x = 1}$

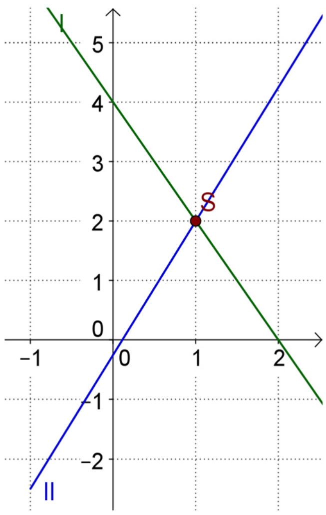
Bemerkung: Prinzipiell ist es gleichgültig, ob die Variable x oder y eliminiert (zum Verschwinden gebracht) wird. Im eigenen Interesse sollte man jedoch jene Variable wählen, bei der man mit einfacheren Berechnungen das Auslangen findet.

II: $9 . 1 - 4y = 1$
$9 - 4y = 1 \quad | -9$
$-4y = -8 \quad | : (-4)$
$\underline{y = 2}$

Die andere Variable berechnet man, indem man den errechneten Wert in eine der Ausgangsgleichung einsetzt.

Somit lauten die Koordinaten des Schnittpunktes S (1 / 2).

Demnach lautet die Lösungsmenge $L = \{(1,2)\}$



Wie man die Eliminationsmethode systematisch anwendet, behandeln wir in Kapitel 3.2.2.1.; S 153 f

3.2.1.1.4. Homogene Gleichungssysteme

Gleichungen homogener Gleichungssysteme besitzen als Konstanten (konstante Glieder) nur null.

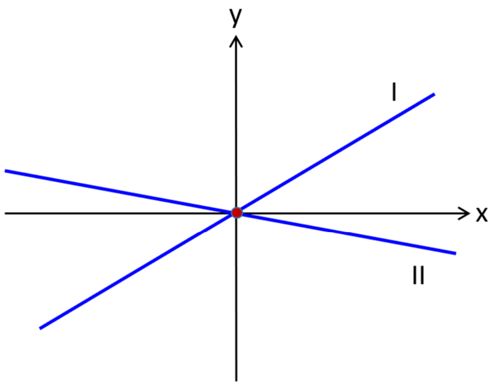
Beispiel: I: $2x + 3y = 0$ $G = \mathbb{R}x\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

II: $x - 2y = 0$

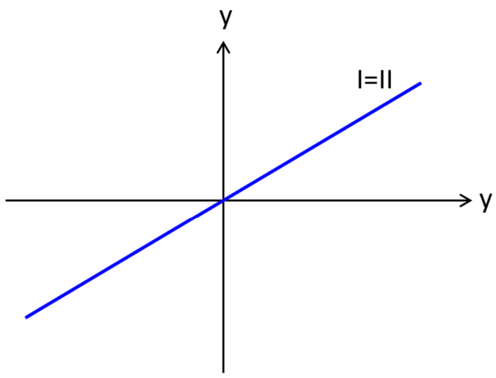
$x = 0$ $y = 0$ $L = \{(0,0)\}$

Homogene lineare Gleichungssysteme in zwei Variablen besitzen zumindest die Lösungsmenge $L = \{(0\,,0)\}$

Anschauliche Begründung: Bei jeder der Gleichungen handelt es sich um Geraden, die durch den Koordinatenursprung gehen:



$L = \{(0,0)\}$



$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}x\mathbb{R} :\ (x, y) \in$ I bzw. II$\}$

Bemerkung 1: Statt $(x/\,y)$ kann man auch (x, y) schreiben.

Bemerkung 2: $\mathbb{R}x\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ … 2-dimensional $\mathbb{R}x\mathbb{R}x\mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ … 3-dimensional

Entsprechendes gilt auch für homogene lineare Gleichungssysteme in mehr als zwei Variablen:

Beispiel: I: $2x + 3y + z = 0$ $G = \mathbb{R}x\mathbb{R}x\mathbb{R} = \mathbb{R}^3$

II: $x - 2y - z = 0$

III: $x + y + z = 0$

$x = 0$ $y = 0$ $z = 0$ $L = \{(0, 0, 0)\}$ (Siehe auch 3.2.2., S 153 f)

Übung

Ermitteln Sie die Lösungsmengen folgender Gleichungssysteme mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

1) $3x + 5y = 26$
$4x - y = 4$

2) $5x - 8y = 6$
$10x - 16y = 12$

3) $y = 4$
$6 - 5y = 0$

4) $\frac{3x-y}{5} = x - \frac{3x+y+3}{7}$
$\frac{x-3}{6} = \frac{x}{5} - \frac{y}{15}$

In den folgenden Gleichungssystemen sind x und y die Variablen.

5) $ax + by = 2ab$
$x + y = a+b$

6) $\frac{2x}{ab} + \frac{3y}{a+b} = 5$
$\frac{5x}{b} - 3y = 2a - 3b$

7) Welche der folgenden Gleichungssysteme sind lineare Gleichungssysteme?

a) $\pi \cdot x - \sqrt[4]{4} \cdot y = 2$
$\frac{x}{\pi} + y = 0$

b) $\frac{3x}{4} + \frac{y}{\sqrt{2}} = 0$
$2x - y = 0$

c) $x \cdot y + 3 = 0$
$x + 2 = 0$

d) $x_1 - \frac{x_1}{x_2} - 1 = 0$
$2x_1 - 2 = 0$

8) Welche der Gleichungssysteme von Aufgabe 8 sind homogen?

Weitere Übungsmöglichkeiten:

http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/kurs/glsyst.pdf

Lösungen: 1) $L = \{(2; 4)\}$ I und II schneiden einander

2) $L = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}\text{x}\mathbb{R} : 5x - 8y = 6\} = \{(x, y)\ \in \mathbb{R}\text{x}\mathbb{R} : 10x - 16y = 12\}$ I und II sind ident

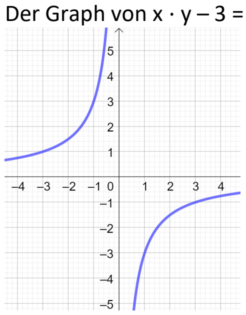
3) $L = \{\ \}$ I und II sind parallel

4) $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}\text{x}\mathbb{R}\ : x - 2y = -15\}$ I und II sind ident

5) $L = \{(b, a)\}$ 6) $L = \{(a\,b, a + b)\}$

7) $a)$ und $b)$ ja, c) nicht, weil dort die Variablen mit mal verbunden sind

Der Graph von x · y – 3 = 0:



d) nicht, weil in Gleichung I, nachdem sie bruchfrei ist, die Variablen mit mal verbunden sind

8) nur b) Bei c) und d) gibt es konstante Glieder ungleich null, die auf der linken Seite stehen.

3.2.2. Lineare Gleichungssysteme in mehr als 2 Variablen

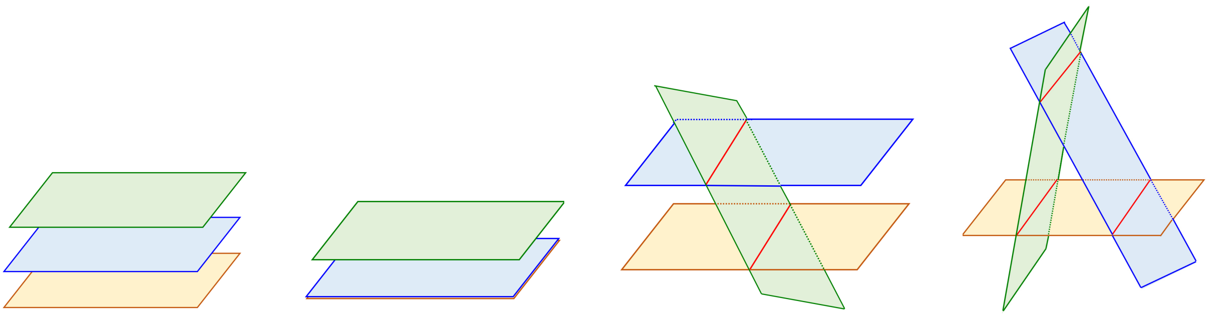
3.2.2.1. Lineare Gleichungssysteme in 3 Variablen

Auch hier betrachten wir zunächst die Veranschaulichung:

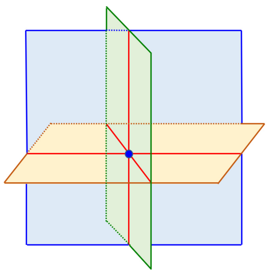
Eine **lineare Gleichung in drei Variablen** stellt geometrisch eine **Ebene** dar. (Siehe auch 4.6., S 213 f)
Eine Ebene ist eine nicht gekrümmte, unendlich große Fläche.

So bieten sich für **3 lineare Gleichungen in 3 Variablen** und damit für 3 Ebenen folgende **Lösungsmöglichkeiten**:

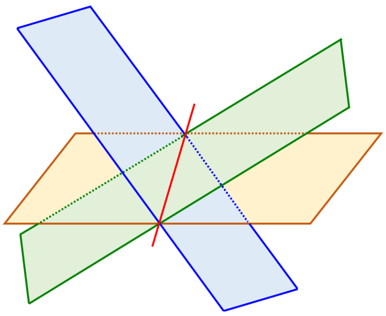
① 3 Ebenen haben **keinen** Punkt gemeinsam, d.h., die 3 linearen Gleichungen haben **keine** Lösung:



② 3 Ebenen schneiden einander in **einem Punkt**, d.h., die 3 linearen Gleichungen haben genau **eine** Lösung:



③ 3 Ebenen schneiden einander in einer **gemeinsamen Geraden** d.h., die 3 linearen Gleichungen haben **unendlich viele** Lösungen: alle Punkte der gemeinsamen Geraden.



④ 3 Ebenen fallen in eine Ebene zusammen d.h., die 3 linearen Gleichungen haben **unendlich viele** Lösungen: alle Punkte der Ebene:

3.2.2.2. GAUẞscher Algorithmus [19]

Ab drei linearen Gleichungen ist es ratsam, den **GAUẞschen Algorithmus** (das Gaußsche Eliminationsverfahren) strikt anzuwenden.

Beispiel:

$$3 \cdot x + 6 \cdot y - 2 \cdot z = -4 \qquad G = \mathbb{R}x\mathbb{R}x\mathbb{R} = \mathbb{R}^3$$
$$3 \cdot x + 2 \cdot y + 1 \cdot z = 0$$
$$1.5 \cdot x + 5 \cdot y - 5 \cdot z = -9$$

Betrachten wir einmal die Vorzahlen und das jeweilige konstante Glied und schreiben nur diese heraus:

$3 \cdot x + 6 \cdot y - 2 \cdot z = -4 \quad \Rightarrow \quad +3 \quad +6 \quad -2 \quad -4$

$3 \cdot x + 2 \cdot y + 1 \cdot z = 0 \quad \Rightarrow \quad +3 \quad +2 \quad +1 \quad 0$

$1.5 \cdot x + 5 \cdot y - 5 \cdot z = -9 \quad \Rightarrow \quad +1.5 \quad +5 \quad -5 \quad -9$

Ziel ist es, folgendes „Muster“ zu erhalten:

Dieses „Muster“ nennt man

Zeilen-Stufen-Form

Gleichung I				
Gleichung II	**0**			
Gleichung III	**0**	**0**		

Die Kästchen stehen für Zahlen, die auch $\neq 0$ sein können. Warum das Sinn macht, sehen wir später.

① Wir legen für jede Variable und für die konstanten Glieder eine Spalte an:

x	y	z	

② In die Spalten werden die entsprechenden Vorzahlen (Koeffizienten) und die konstanten Glieder eingetragen.

x	y	z	
3	6	-2	-4
3	2	1	0
1.5	5	-5	-9

[19] GAUẞ entdeckte dieses Verfahren faktisch wieder, denn es wurde bereits vor über 2000 Jahren in chinesischen Büchern veröffentlicht. Doch das wusste zu Zeiten GAUẞ‘ niemand in Europa.

③ Zunächst werden mittels **Additionsmethode** die Koeffizienten von x der Gleichungen II und III auf Null gebracht, wobei immer mit der 1. Gleichung gerechnet wird. Die **Koeffizienten** der **1. Gleichung** bleiben **immer unverändert**.

x	y	z		
3	6	-2	-4	I − II
3	2	1	0	
1.5	5	-5	-9	
3	6	-2	-4	I − 2·III
0	4	-3	-4	
1.5	5	-5	-9	
3	6	-2	-4	
0	4	-3	-4	II + III
0	-4	8	14	

$$\begin{aligned} I:&\; 3\,x+6\,y-2\,z = -4 \\ II:&\; 3\,x+2\,y+1\,z = 0 \\ &\; 0\,x+4\,y-3\,z = -4 \end{aligned} \quad \boxed{\text{I} - \text{II}}$$

$$\begin{aligned} I:&\; 3\,x+6\,y-2\,z = -4 \\ III:&\; 1.5\,x+5\,y-5\,z = -9 \\ &\; 0\,x-4\,y+8\,z = 14 \end{aligned} \quad \boxed{\text{I} - 2.\text{III}}$$

④ Jetzt wird mit den Gleichungen II und III der Koeffizient von y in der Gleichung III auf Null gebracht, wobei die Koeffizienten der 2. Gleichung unverändert bleiben.

x	y	z		
3	6	-2	-4	
0	4	-3	-4	II + III
0	0	5	10	
3	6	-2	-4	
0	4	-3	-4	
0	**0**	5	10	

$$\begin{aligned} II:&\; 0\,x+4\,y-3\,z = -4 \\ III:&\; 0\,x-4\,y+8\,z = 14 \\ &\; 0\,x+0\,y+5\,z = 10 \end{aligned} \quad \boxed{\text{II} + \text{III}}$$

⑤ Damit haben wir die Zeilen-Stufenform erreicht und können nun mit Gleichung III den Wert für z bestimmen:

III: $0\,x+0\,y+5\,z=10 \;\; |:5 \qquad \boldsymbol{z=2}$

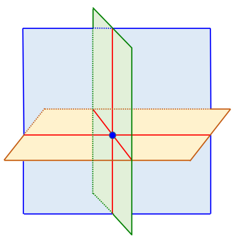
⑥ Den Wert für z in Gleichung II eingesetzt, liefert y:

II: $0\,x+4\,y-3\cdot 2 = -4 \qquad 4\;y-6=-4\;\;|+6 \qquad 4y=2\;\;|:4 \qquad \boldsymbol{y=0.5}$

⑦ Abschließend die Werte für z und y in Gleichung I eingesetzt, liefert x:

I: $3\,x+6\cdot 0.5-2\cdot 2=-4 \qquad 3\,x+3-4=-4 \qquad 3\,x-1=-4\;\;|+1 \qquad 3\,x=-3\;\;|:3 \qquad \boldsymbol{x=-1}$

Die Lösungsmenge lautet $\boldsymbol{L}=\{\,(\boldsymbol{-1}\,,\boldsymbol{0.5}\,,\boldsymbol{2})\}$



Man darf die Gleichungen vertauschen!

x	y	z	
3	6	− 2	− 4
3	2	1	0
1.5	5	− 5	− 9

x	y	z	
3	2	1	− 4
3	6	− 2	0
1.5	5	− 5	− 9

Warum darf man?

Weil sich an der Lage der Ebenen nichts verändert, wenn ich eine Ebenengleichung zum Beispiel statt in die1 Zeile in die 2. Zeile schreibe.

Beispiel:

$2 \cdot x + 3 \cdot y - 2 \cdot z = -1$ $\quad G = \mathbb{R}x\mathbb{R}x\mathbb{R} = \mathbb{R}^3$

$2 \cdot x - 2 \cdot y + z = 0$

$x - y + 0.5 \cdot z = 0$

x	y	z		
2	3	− 2	− 1	
2	− 2	1	0	I − II; I − 2·II
1	− 1	0.5	0	
2	3	− 2	− 1	
0	5	− 3	− 1	
0	5	− 3	− 1	II − III
2	3	− 2	− 1	
0	5	− 3	− 1	
0	0	0	0	

Gleichung III liefert in diesem Fall die **w.A.**

$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0$

$\mathbf{0 = 0}$

Somit kann z jede beliebige Zahl annehmen, denn wir erhalten in jedem Fall die w.A. $0 = 0$

Wir setzen $\boldsymbol{z = \lambda}$ In Gleichung II eingesetzt: $0 \cdot x + 5 \cdot y - 3 \cdot \lambda = -1$ und nach y umgeformt:

$$5 \cdot y - 3 \cdot \lambda = -1 \ | + 3 \cdot \lambda$$
$$5 \cdot y = -1 + 3 \cdot \lambda \ | : 5$$
$$y = -0.2 + 0.6 \cdot \lambda$$

Jetzt setzen wir die Ausdrücke für y und z in Gleichung I ein und formen auf x um:

$$2 \cdot x + 3 \cdot (-0.2 + 0.6 \cdot \lambda) - 2 \cdot \lambda = -1$$
$$2 \cdot x - 0.6 + 1.8 \cdot \lambda - 2 \cdot \lambda = -1$$
$$2 \cdot x - 0.6 - 0.2 \cdot \lambda = -1 \ | + 0.6 + 0.2 \cdot \lambda$$
$$2 \cdot x = -0.4 \ + 0.2 \cdot \lambda \ | : 2$$
$$x = -0.2 \ + 0.1 \cdot \lambda$$

Damit verfügen wir über die Ausdrücke

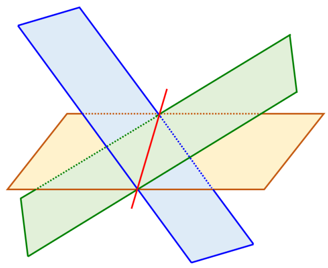
$$x = -0.2 \; + 0.1 \cdot \lambda$$
$$y = -0.2 \; + 0.6 \cdot \lambda$$
$$z = \; 0 \; + 1 \cdot \lambda$$

was uns auf folgende Gleichung führt: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2 \\ -0.2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.6 \\ 1 \end{pmatrix}$

Und die Lösungsmenge lautet: $L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2 \\ -0.2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.6 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Geradengleichung (in Parameterform) im } \mathbb{R}^3} \right\}$

Geradengleichung (in Parameterform) im $\mathbb{R}^3$ (4.5.1.1., S 199 f)

Diese 3 Ebenen haben also eine Schnittgerade gemeinsam.



Beispiel:

$$\begin{aligned} I&: \quad x + y + z = 1 \\ II&: \quad 2x + 2y + 2z = 2 \\ III&: \quad 4x + 4y + 4z = 4 \end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen beschreiben ein und dieselbe Ebene.
Das kann man daran erkenne, dass Koeffizienten und konstante Glieder jeweils Vielfache voneinander sind.

	x	y	z	
I:	1	1	1	1
II:	2	2	2	2
III:	4	4	4	4
I:	1	1	1	1
II:	0	**0**	0	0
III:	0	0	**0**	0

2·I – II

4·I – III

Die Gleichungen II und III liefern in diesem Fall die **w.A.**

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0$$
$$\mathbf{0 = 0}$$

Damit haben wir die Freiheit, für z **und** für y jede beliebige Zahl zu wählen: $\boldsymbol{z = \lambda}$ und $\boldsymbol{y = \mu}$.

Diese Ausdrücke setzen wir in Gleichung I ein und formen sie auf x um: $1 \cdot x + 1 \cdot \lambda + 1 \cdot \mu = 1 \;\; | -\lambda - \mu$

$$x = 1 - \lambda - \mu$$

Damit verfügen wir über die Ausdrücke

$$x = 1 - 1 \cdot \lambda - 1 \cdot \mu$$
$$y = 0 + 0 \cdot \lambda + 1 \cdot \mu$$
$$z = 0 + 1 \cdot \lambda + 0 \cdot \mu$$

was uns auf folgende Gleichung führt: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Und die Lösungsmenge lautet: $L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Ebenengleichung (in Parameterform) im } \mathbb{R}^3} \right\}$

Ebenengleichung (in Parameterform) im $\mathbb{R}^3$ (4.6.1., S 213 f)

Die Lösungsmenge ist die Ebene, die durch alle drei Gleichungen beschrieben wird.

Beispiel:

$$\begin{aligned} I&: \quad x + y + z = 1 \\ II&: \quad -x + 2y + 3z = 0 \\ III&: \quad 2x - 4y - 6z = 2 \end{aligned}$$

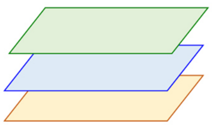
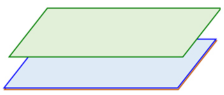
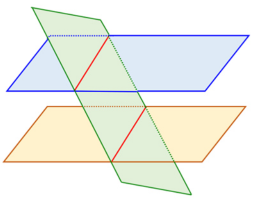
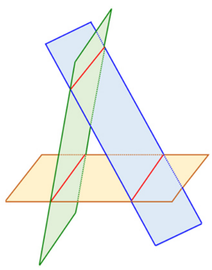
x	y	z		
1	1	1	1	I + II
−1	2	3	0	2·I – II
2	−4	−6	2	
1	1	1	1	
0	3	4	1	2·II – III
0	6	8	0	
1	1	1	1	
0	3	4	1	
0	0	**0**	1	

Hier liefert Gleichung III die **f.A.**

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 1$$
$$\mathbf{0 = 1}$$

Damit gibt es keine Zahl, die diese Gleichung erfüllt und die Lösungsmenge ist leer: $L = \{\ \}$

Welche der möglichen Fälle konkret auftritt lässt sich erst mit weiteren begriffen der Vektorrechnung klären.

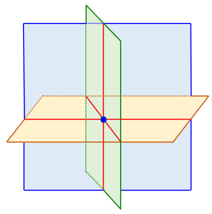
   

Fassen wir zusammen:

x	y	z	
□	□	□	□
0	□	□	□
0	0	□	□

Eindeutige Lösung

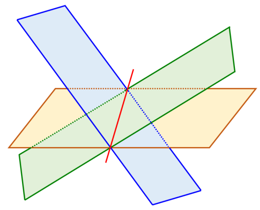
Schnittpunkt



x	y	z	
□	□	□	□
0	□	□	□
0	0	0	0

Einparametrige Lösung

Schnittgerade



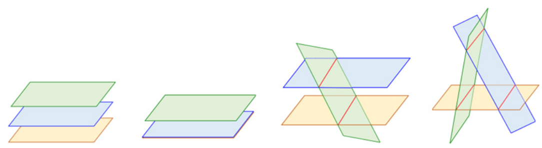
x	y	z	
□	□	□	□
0	0	0	0
0	0	0	0

Zweiparametrige Lösung

Ebene

x	y	z	
□	□	□	□
0	□	□	□
0	0	0	□

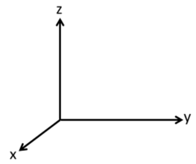
Keine Lösung



Übung

Ermitteln Sie die Lösungsmengen folgender Gleichungssysteme mit $G = \mathbb{R}x\mathbb{R}x\mathbb{R} = \mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3$ bedeutet, dass wir und im Dreidimensionalen befinden.



1) $\begin{aligned} x - 2y - 3z &= -5 \\ 2x + y - z &= 0 \\ 3x + 3y + z &= 6 \end{aligned}$

2) $\begin{aligned} 5x - 9y + 4z &= 0 \\ 4x + y - 7z &= -2 \\ 2x + 2y - 3z &= 1 \end{aligned}$

3) $\begin{aligned} x - y + 1 &= 0 \\ x + z - 6 &= 0 \\ y + z - 7 &= 0 \end{aligned}$

4) $\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$

5) $\begin{aligned} x_1 + 4x_3 + 2 &= 0 \\ 2x_1 + 8x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 12x_3 - 4 &= 0 \end{aligned}$

6) $\begin{aligned} 5x - 2y &= 1 \\ 3x + 7z &= 24 \\ 8y - z &= 13 \end{aligned}$

7) Welche der Gleichungssysteme in 1) bis 6) sind homogen?

8) $\begin{aligned} x + z &= 5 \\ 2x + y &= 8 - 3z \\ y + 3x + 4z &= 12 \end{aligned}$

9) $\begin{aligned} 3x + y + 5z &= 0 \\ 2x + y - 2z &= 6 \\ 9z - y = x &= -12 \end{aligned}$

10) $\begin{aligned} 0 &= 5 + z \\ 2x - 2y &= 3 - z \\ 4x - 4y + 3z &= \end{aligned}$

Lösungen:

1) $L = \{(2, -1, 3)\}$ 2) $L = \{(1, 1, 1)\}$

3) $L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ 4) $L = \{(0,0,0)\}$

5) $L = \{\ \}$ 6) $L = \{(1, 2, 3)\}$ 7) Nur das in Aufgabe 4)

7) $L = \{\ \}$ 8) $L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

10) $L = \{\ \}$

Weitere Übungsmöglichkeiten: http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/kurs/glsyst.pdf

Video-Tipp https://www.youtube.com/watch?v=ac8r-E5h9FI

3.3. Unter- und überbestimmte Gleichungssysteme

3.3.1. Unterbestimmte Gleichungssysteme

Unterbestimmte Gleichungssysteme haben **mehr** Variablen als Gleichungen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \text{I:}\quad & x + 3y - 5z = 4 \\ \text{II:}\quad & 3x + 4y - 2z = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{I:}\quad & x + 3y - 5z = 4 \\ \text{II:}\quad & 3x + 4y - 2z = 7 \\ \text{III:}\quad & 0x + 0y + 0z = 0 \end{aligned}$$

… Wir dürfen uns die 3. Gleichung wie links ergänzen.

	x	y	z	
I:	1	3	–5	4
II:	3	4	–2	7
III:	0	0	0	0

3·I–II

I:	1	3	– 5	4
II:	0	5	–13	5
III:	0	0	**0**	0

$$z = \lambda$$

$$\text{II:}\quad 5y - 13\cdot\lambda = 5 \quad |+13\cdot\lambda$$

$$5y = 5 + 13\lambda \quad |:5$$

$$y = 1 + \frac{13}{5}\lambda$$

$$\text{I:}\quad x + 3\,.\,(1 + \frac{13}{5}\lambda) - 5\lambda = 4$$

$$x + 3 + \frac{39}{5}\cdot\lambda - 5\lambda = 4$$

$$x + 3 + \frac{14}{5}\lambda = 4 \quad | -3 - \frac{14}{5}\lambda$$

$$x = 1 - \frac{14}{5}\lambda$$

Somit lautet die Lösungsmenge:

$$x = 1 - \frac{14}{5}\lambda$$

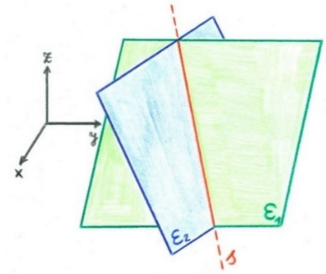
$$y = 1 + \frac{13}{5}\lambda$$

$$z = 0 + 1\cdot\lambda$$

$$L = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} : \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-\frac{14}{5}\\ \frac{13}{5}\\ 1\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} : \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-14\\ 13\\ 5\end{pmatrix}\right\}$$

Siehe 4.6.1., S 213 f

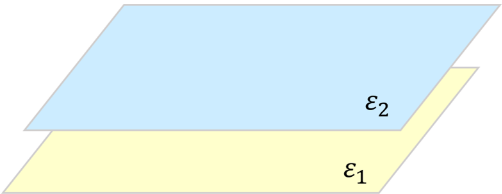
Geometrische Deutung:



Jede der gegebenen Gleichungen für sich beschreibt eine Ebene (Siehe 4.6., S 213 f).

Gemeinsame Lösungen der Gleichungen bedeutet gemeinsame Punkte der Ebene.
In diesem Fall liegen sie auf einer Geraden.

Es gibt auch die Fälle



Die 2 Ebenen sind parallel.

Hier gibt es keine gemeinsamen Punkte und damit keine gemeinsame Lösung.

$$L = \{\ \}$$

Die 2 Ebenen sind identisch.

Alle Punkte der einen Ebene sind auch Punkte der anderen Ebene.

$$L = \text{Ebenengleichung}$$

Beispiele von Lösungsmengen:

Siehe 4.6.1., S 213 f

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \ (x, y, z \in \mathbb{R}) \ \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

oder:

Siehe 4.6.2., S 218 und 4.6.3., S 219 f

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \ (x, y, z \in \mathbb{R}) \ \wedge (3x - 2y + z = -3) \right\}$$

3.3.2. Überbestimmte Gleichungssysteme

Überbestimmte Gleichungssysteme haben **weniger** Variablen als Gleichungen.

Man bestimmt mit so vielen Gleichungen wie Variablen die Werte und setzt diese in die nicht verwendete(n) Gleichung(en) ein. Erhält man dabei w.A., so sind die Werte Lösungen des Gleichungssystems, andernfalls ist es die leere Menge.

Beispiel:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I:} & x + y & = & 10 \\ \text{II:} & x + 2y & = & 16 \\ \text{III:} & 3x - 5y & = & -18 \end{array} \quad \boxed{\text{II–I}}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{I:} & x + y & = & 10 \\ \text{II:} & + \mathbf{y} & = & \mathbf{6} \end{array} \qquad x + 6 = 10 \mid -6 \qquad \mathbf{x = 4}$$

III: $3.4 - 5.6 = -18$

$12 - 30 = -18$

$-18 = -18$ **w.A.** $\rightarrow$ $x = 4$ und $y = 6$ sind Lösungen: $L = \{(4/6)\}$. Ansonsten ist $L = \{\ \}$

Übung

Bestimmen Sie die Lösungsmengen und die Dimension folgender linearer Gleichungssysteme.

1) $$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 &= 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 14 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} 2x - 6y + 5z &= 7 \\ -3x + 9y - z &= 9 \end{aligned}$$

3) $x_1 + x_2 - x_3 = 1$

4) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= -1 \\ x_2 - 2x_1 &= -2 \end{aligned}$$

5) $$\begin{aligned} x &= y \\ 2x - 2y &= 0 \\ -y &= -x \end{aligned}$$

6) $$\begin{aligned} 3y - 3x + 2 &= 0 \\ x + 4y &= 1 \\ 2x - 1 &= 3y \\ 2 &= x - y \end{aligned}$$

7) $x - y + z = 0$

8) $$\begin{aligned} x_1 + x_5 &= 0 \\ -1 + 2x_3 - x_5 &= -x_2 \\ x_1 - x_5 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

9) $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 &= 16 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \end{aligned}$$

10) $x_3 = 1$

Lösungen:

1) $D = \{(1,2,3)\}$ Dimension = 0

2) $L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ Dimension = 1

3) $L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ Dimension = 2

4) $L = \{\ \}$ Dimension =

5) $L = \{\, (x, y) |\, x = y\}$ bzw. $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) = (0,0) + \lambda \cdot (1,1)\}$ Dimension = 1

6) $L = \{\, \left(\frac{9}{5}, -\frac{1}{5}\right)\}$ Dimension = 0

7) $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) = (0,0,0) + \mu \cdot (1,1,0) + \lambda \cdot (-1,0,1)\}$ Dimension = 2

8) $L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ Dimension = 2

9) $L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ Dimension = 2

10) $L = \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Dimension = 2

Aus China stammt folgende Aufgabe, die als „Problem der 100 Vögel" um 475 n.Chr. beschrieben wurde:

„Ein Hahn kostet 5 sapek, eine Henne 3 sapek und drei Küken 1 sapek. Wenn wir nun für 100 sapek 100 dieser Tiere kaufen. Wie viele sind es dann von jeder Sorte?"

Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, das die Angaben entsprechend wiedergibt.

Aus: https://ethz.ch/content/dam/ethz/special-interest/dual/educeth-dam/documents/Unterrichtsmaterialien/mathematik/Lineare%20Gleichungssysteme%20(Leitprogramm)/lingl.pdf

Lösung:

$$x + y + z = 100$$
$$5x + 3y + \frac{z}{3} = 100$$

3.4 Ungleichungen

Wir behandeln hier nur Ungleichungen in **einer** Variablen.

3.4.1. Lineare Ungleichungen

In **linearen** Ungleichungen kommt die **Variable nur linear** vor, das heißt, sie hat die **Hochzahl 1** und steht **nicht im Nenner**.

Beispiele: $4 \cdot x - 1 < -5$ $\qquad \frac{1-x}{3} \geq 0$

Prinzipiell werden **lineare Ungleichungen wie lineare Gleichungen** behandelt.

2 Ausnahmen:

- Aus Gründen der leichteren Deutung der Lösungsmenge sollte am Ende der Umformung die Variable immer auf der linken Seite stehen.
- Wird eine Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert oder durch eine negative Zahl dividiert, so ist das Ungleichheitszeichen zu **ändern**.

  Warum? **Beispiel:** $-3 < 5 \quad | \cdot (-2)$ $\qquad 8 > 4 \quad | : (-2)$

  $6 > -10$ $\qquad -4 < -2$

  Was hier leicht ersichtlich ist, gilt es bei Variablen zu berücksichtigen!

Beispiel: $4 - 2x < x + 13$ $\qquad$ mit $G_1 = \mathbb{N} \quad G_2 = \mathbb{Z} \quad G_3 = \mathbb{R}$

$$4 - 2x < x + 13 \quad | -x - 4$$
$$-3x < 9 \quad | : (-3)$$
$$x > -3$$

Lösungsmenge L_1 bezüglich der Grundmenge $G_1 = \mathbb{N}$: Welche natürlichen Zahlen sind größer als -3?

Alle natürlichen Zahlen sind größer als -3. Entsprechend ist $\mathrm{L}_1 = \mathbb{N}$.

Lösungsmenge L_2 bezüglich der Grundmenge $G_2 = \mathbb{Z}$: Welche ganzen Zahlen sind größer als -3?

Die ganzen Zahlen ab -2. Entsprechend ist $L_2 = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, . . . \} = \{x \in \mathbb{Z} : x \geq -2\} =$

$= \{x \in \mathbb{Z} : x > -3\}$

Lösungsmenge L_3 bezüglich der Grundmenge $G_3 = \mathbb{R}$: Welche reellen Zahlen sind größer als -3?

Die reellen Zahlen, die größer als -3 sind.

Entsprechend ist $L_3 = \{x \in \mathbb{R} : x > -3\} =]-3\,;\,\infty[= (-3\,;\,\infty)$.

```
from sympy import *
x, y = symbols("x, y")
solve(4-2*x<x+13)
```

$-3 < x \wedge x < \infty$

Beachten Sie, dass lineare Ungleichungen in der Regel unendlich viele Lösungen haben können.

Beispiel: $\frac{2x-1}{x+1} > 0$ mit $G = \mathbb{R}$

Zunächst müssen jene reelle Zahlen aus der Grundmenge $G = \mathbb{R}$ ausgeschlossen werden, die den Nenner null werden lassen. Das liefert die Definitionsmenge D.

$x + 1 = 0 \quad | -1$

$x = -1 \qquad D = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$

Wir wollen die Gleichung bruchfrei machen. Das geschieht, indem wir mit dem gemeinsamen Nenner multiplizieren. Doch sind hier **Fallunterscheidungen** nötig:

Angenommen **Nenner > 0** (positiv): Das Ungleichheitszeichen **bleibt**.

Angenommen **Nenner < 0** (negativ): Das Ungleichheitszeichen ist zu **ändern**

$x + 1 > 0$: $\frac{2x-1}{x+1} > 0 \quad |.(x+1)$

$2x - 1 > 0 \cdot (x+1)$

$2x - 1 > 0 \quad |+1 \quad |:2$

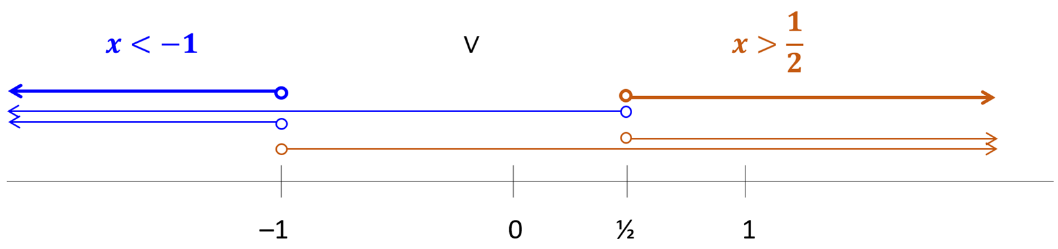
$x + 1 < 0$: $\frac{2x-1}{x+1} > 0 \quad |.(x+1)$

$2x - 1 < 0 \cdot (x+1)$

$2x - 1 < 0 \quad |+1 \quad |:2$

$x + 1 > 0 \,|-1 \;\wedge\; \boldsymbol{x > 0.5} \qquad \vee \qquad x + 1 < 0 \,|-1 \;\wedge\; \boldsymbol{x < 0.5}$

$x > -1 \;\wedge\; \boldsymbol{x > 0.5} \qquad \vee \qquad x < -1 \;\wedge\; \boldsymbol{x < 0.5}$



$$\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} : (x < -1) \vee \left(x > \frac{1}{2}\right)\right\} =]-\infty, -1[\cup]\frac{1}{2}, \infty[= (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$$

```
from sympy import *
```

```
x = symbols("x")
```

```
solve((2*x-1)/(x+1)>0)
```

$(-\infty < x \wedge x < -1) \vee \left(\frac{1}{2} < x \wedge x < \infty\right)$

Übung Bestimmen Sie die jeweiligen Lösungsmengen mit $G_1 = \mathbb{N}, G_2 = \mathbb{Z}$ und $G_3 = \mathbb{R}$

1) $14x - 12 < 13x - 5$ 2) $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} > 2(x - 11)$ 3) $2x - 3 > 3x + 1 - x$

4) $\frac{x+1}{x-1} - 1 \geq 0$ 5) $m - \frac{m}{4} \leq m - 1$

Lösungen:

1) $L_1 = \{1,2,3,4,5,6\} = \{x \in \mathbb{N} \,|x < 7\} = \{x \in \mathbb{N} \,|x \leq 6\}$

$L_2 = \{\ldots, -3, -2, -1,0,1,2,3,4,5,6\} = \{x \in \mathbb{Z} \,|x < 7\} = \{x \in \mathbb{Z} \,|x \leq 6\}$

$L_3 = \{x \in \mathbb{R} \,|x < 7\} =]-\infty\,; 7[= (-\infty\,; 7)$

2) $L_1 = \{1,2,3, \ldots, 14\} = \{x \in \mathbb{N} \,|x < 15\} = \{x \in \mathbb{N} \,|x \leq 14\}$

$L_2 = \{\ldots, -3, -2, -1,0,1,2, \ldots, 14\} = \{x \in \mathbb{Z} \,|x < 15\} = \{x \in \mathbb{Z} \,|x \leq 14\}$

$L_3 = \{x \in \mathbb{R} \,|x < 15\} =]-\infty\,; 15[= (-\infty\,; 15)$

3) $L_1 = L_2 = L_3 = \{\ \}$

4) $L_1 = L_2 = L_3 = \{\ \}$ Nicht vergessen: Definitionsmenge bilden!

5) $L_1 = \{4,5,6, \ldots\} = \{m \in \mathbb{N} \,|m \geq 4\}$

$L_2 = \{4,5,6, \ldots\} = \{m \in \mathbb{Z} \,|m \geq 4\}$

$L_3 = \{m \in \mathbb{R} \,|m \geq 4\} = [4\,; \infty[= [4\,; \infty)$

3.4.2. Quadratische Ungleichungen

In quadratischen Ungleichungen ist die höchste Potenz, in der die Variable vorkommt, quadratisch.

Beispiele: $4 \cdot x^2 - x < 0$ $\qquad x^2 - 2x + 1 \geq 0$

Beispiel: $3x - 2 > x^2$ mit $G = \mathbb{R}$

① Bringen wir die Ungleichung zunächst auf Normalform.

$$3x - 2 > x^2 \quad | - x^2$$

$$-x^2 + 3x - 2 > 0 \quad | \,.(-1)$$

$$x^2 - 3x + 2 < 0$$

② Jetzt lösen wir die entsprechende quadratische Gleichung:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x_{1/2} = -\frac{(-3)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{(-3)}{2}\right)^2 - 2}$$

$$x_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2}$$

$$x_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}}$$

$$x_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$x_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

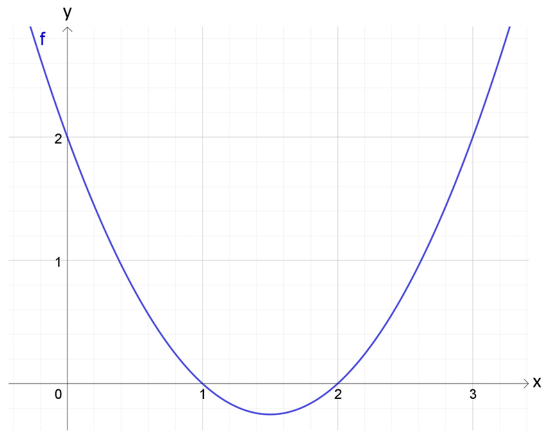
$$x_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

③ ENTWEDER

fassen wir den linken Teil der Ungleichung (in Normalform) als Funktion auf: $f(x) = x^2 - 3x + 2$

Deren Graph ist unterhalb dargestellt



Die Ungleichung lautet

$$x^2 - 3x + 2 < 0$$

Wir suchen also x-Werte, für die $f(x) < 0$ ist.

In der grafischen Darstellung erkennt man, dass für die x-Werte zwischen (ausschließlich) 1 und (ausschließlich) 2 die Funktionswerte negativ (< 0) sind.

Somit lautet die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = (1\,;2)$$

ODER:

Nach dem **Wurzelsatz von VIÈTA** (3.1.2.2., S 121) gilt: $x^2 + p \cdot x + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

mit x_1 und x_2 als den Lösungen (Wurzeln) der Gleichung.

Übertragen auf unsere quadratische Gleichung: $x^2 - 3x + 2 = (x - 1) \cdot (x - 2)$

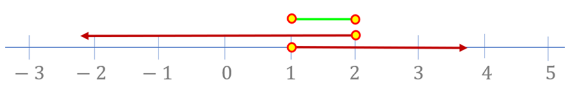
Somit gilt für die Ungleichung (in Normalform): $(x - 1) \cdot (x - 2) < 0$

Wir erinnern: Ein Produkt (das Ergebnis einer Multiplikation) ist negativ bei $+ \cdot -$ oder $- \cdot +$

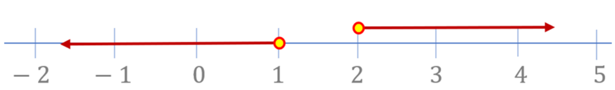
Das bedeutet $[\ (x-1) > 0 \quad \wedge \quad (x-2) < 0\ ] \ \vee \ [\ (x-1) < 0 \quad \wedge \quad (x-2) > 0\ ]$

$$x - 1 > 0 \ | +1 \qquad x - 2 < 0 \ | +2 \qquad\qquad x - 1 < 0 \ | +1 \qquad x - 2 > 0 \ | +2$$

$$[\ x > 1 \qquad \wedge \qquad x < 2\ ] \qquad \vee \qquad [\ x < 1 \qquad \wedge \qquad x > 2\ ]$$



Hier ist die gemeinsame Menge $(1\,,2)$



Hier gibt es keine gemeinsame Menge

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ ist die Vereinigungsmenge der jeweils gemeinsamen Mengen, hier also
$\mathbb{L} = (1\,,2)$ bzw. $\mathbb{L} =]1\,,2[= (1\,,2)$

```
x, y = symbols('x y')
```

```
solve(3*x-2>x**2)
```

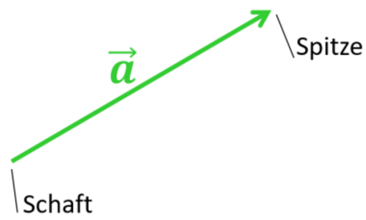
$1 < x \wedge x < 2$

„Größe heißt: Richtung geben."
Friedrich NIETZSCHE
(1844–1900)

IV VEKTOREN

Die Kapitel 4.1 bis 4.4.4. gelten im $\mathbb{R}^2$ (der xy-Ebene), im $\mathbb{R}^3$ (im Raum) und im $\mathbb{R}^n$, außer es wird extra erwähnt.

4.1. Grundbegriffe



Ein **Vektor** ist eine **gerichtete Größe**.

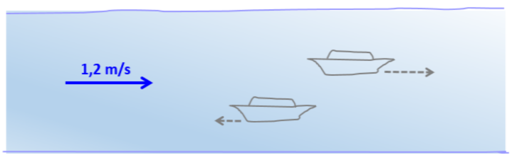
Das bedeutet, ein **Vektor** besitzt **zwei Informationen**:
eine **Richtung und** eine **Größe** .

Ein **Vektor** wird durch einen **Pfeil** dargestellt.
Der Pfeil ist aber nur ein Symbol und **nicht** der eigentliche Vektor.

Ein **Vektor** wird in der Regel **mit** einem **Kleinbuchstaben bezeichnet**, **über dem** ein **nach rechts zeigender Pfeil** gezeichnet ist, gleich, in welche Richtung der Vektor-Pfeil zeigt.

Beispiele für Vektoren:

Die ***Fließrichtung*** eines Flusses



Bei der Fließgeschwindigkeit eines Flusses sind wohl beide Informationen von Bedeutung:
In welche **Richtung** das Wasser fließt **und** mit welcher **Geschwindigkeit** (Größe).

Ein Schiff, das in Fließrichtung (stromabwärts) fährt, benötigt für eine bestimmte Strecke weniger Zeit als ein Schiff für diese Strecke beansprucht, das sich gegen die Fließrichtung (stromaufwärts) bewegt.

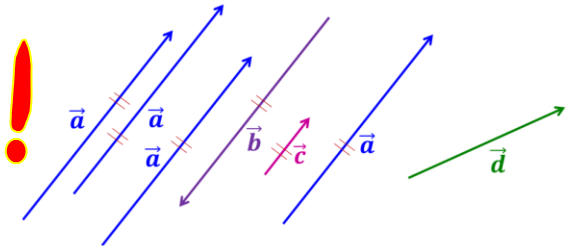
Wegweiser

Um von *Tittmoning* nach *München* zu kommen, muss ich **beide** Eigenschaften des Vektors erfüllen:

Ich muss die richtige **Richtung** wählen **und** die vorgeschriebene **Länge** (Größe) zurücklegen.

Erfülle ich nur eine der Eigenschaften, wird's mit *München* nicht klappen!
Wähle ich die richtige Richtung, lege aber nur eine Länge von 40 km zurück, so lande ich in *Wasserbug am Inn*.
Fahre ich 90 km, aber statt nach Westen in Richtung Osten, so werde ich der Stadt *Wels* einen Besuch abstatten.

Eine **wichtige Vereinbarung**:



Alle Pfeile, die

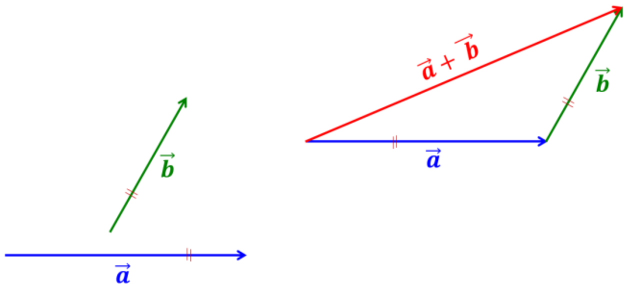
- **parallel**
- **gleich lang** und
- **gleich gerichtet**

sind, beschreiben den **gleichen Vektor**.

Es gibt demnach **unendlich viele Pfeile**, die **den gleichen Vektor beschreiben** können, nämlich **alle Pfeile**, die durch **parallel verschieben** entstehen.

4.2. Grafische Verbindungen von Vektoren

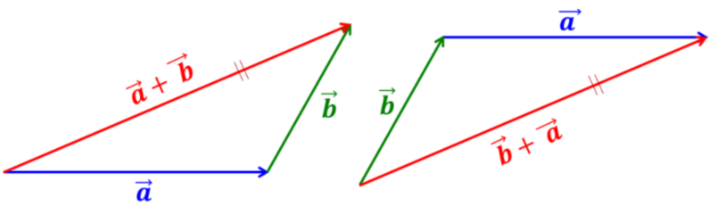
4.2.1. Grafische Addition



Die **Pfeile zweier Vektoren** werden **addiert**, indem man sie so parallel verschiebt, dass der **Schaft** des **zweiten Pfeils** in der **Spitze** des **ersten Pfeils** liegt.

Der Pfeil des **Summenvektors** hat seinen **Schaft** im **Schaft** des **ersten Pfeils** und seine **Spitze** in der **Spitze** des **zweiten Pfeils**.

Bemerkung: Da der Pfeil des Summenvektors in der Regel weder parallel zu einem der Ausgangs-Vektoren ist, noch deren Länge besitzt, könnte man ihn auch ganz anders als $\vec{a}+\vec{b}$ nennen, zum Beispiel $\vec{c}$. Man nennt ihn deshalb $\vec{a}+\vec{b}$, weil er der Summenvektor von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist



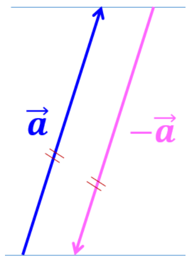
Da der **Pfeil des Vektors** $\vec{a}+\vec{b}$ **parallel** zum Pfeil des Vektors $\vec{b}+\vec{a}$ ist und auch **gleich lang** und **gleich gerichtet**, **beschreiben** doch **beide Pfeile den gleichen Vektor**.

Demnach gilt:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

Hier gibt es eine Analogie zu den Zahlen. Doch das ist bei Vektoren nicht immer so!

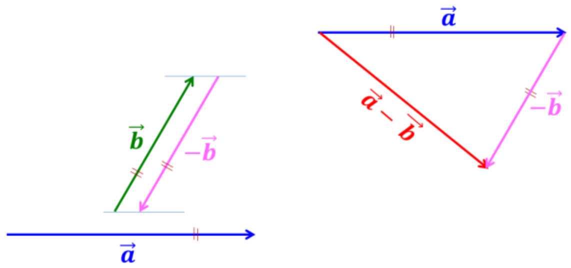
4.2.2. Inverser Vektor eines Vektors



Der **inverse Vektor** $-\vec{a}$ eines **Vektors** $\vec{a}$

- ist **parallel** zum Pfeil des Vektors $\vec{a}$
- **gleich lang** wie dieser und
- **entgegengesetzt gerichtet**

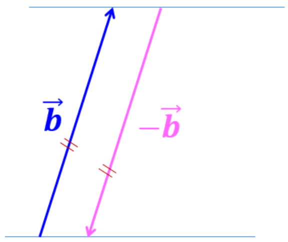
4.2.3. Grafische Subtraktion

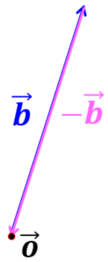


Die **Pfeile zweier Vektoren** werden **subtrahiert**, indem man den **Pfeil des ersten Vektors** mit dem **Pfeil des Gegenvektors** (**inversen Vektors**) **addiert**:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

Was ergibt $\vec{b}-\vec{b}$?





Eigentlich bestimmen wir $\vec{b}+(-\vec{b})$.

Der Schaft des Pfeils des Vektors $-\vec{b}$ liegt laut Additionsregel in der Spitze des Pfeils des Vektors $\vec{b}$.

Der Pfeil des „Summen“-Vektors hat seinen Schaft im Schaft von $\vec{b}$ und seine Spitze in der Spitze von $-\vec{b}$.

Da der Schaft von $\vec{b}$ und die Spitze von $-\vec{b}$ im selben Punkt liegen, hat der „Summen“-Vektor in diesem Fall die **Länge null**.

Ein **Vektor mit der Länge null** heißt **Nullvektor** und wird mit $\vec{o}$ bezeichnet.

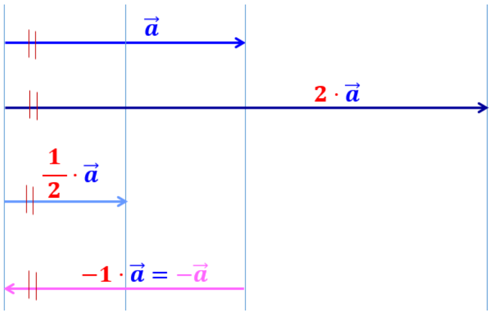
Worin liegt denn der Unterschied zwischen der Zahl null und dem Nullvektor?

Denken wir uns den Nullvektor folgendermaßen:
Jemand fährt zunächst eine bestimmte Strecke nach Norden und anschließend die gleiche Strecke zurück, also entgegengesetzt. Dann landet man genau dort, wo man gestartet bist.

Vektor-mäßig ist es das Gleiche, wie wenn man sich vom Ausgangsort **null** Meter wegbewegt hätte, wobei in diesem Fall die Richtung gleichgültig ist.

Weiterer Unterscheid der Zahl null und des Nullvektors (Siehe auch 4.3.2.3, S 181).

4.2.4. Grafische Multiplikation einer Zahl mit einem Vektor



Die **Multiplikation** eines **Vektors mit** einer **Zahl verändert nur** seine **Länge** (Größe).

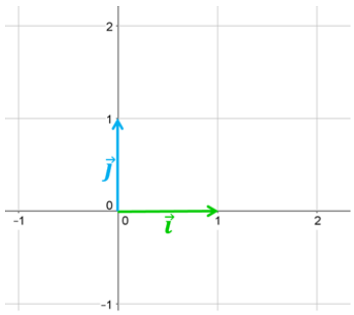
Ist die **Zahl negativ**, erhält der Vektor zusätzlich die **entgegengesetzte Richtung**.

Was die Multiplikation zweier Vektoren bedeutet, erfahren wir in Kapitel 4.4.6., S 191 f

4.3. Rechnerische Verbindungen von Vektoren

4.3.1. Koordinaten eines Vektors

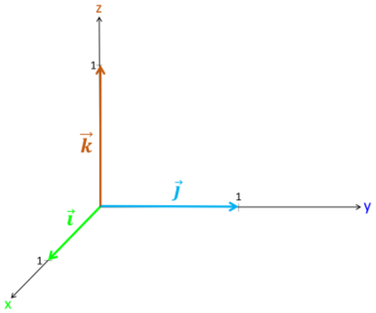
Für den $\mathbb{R}^2$ gilt:



Basisvektor $\vec{i}$ bzw. $\vec{e_1}$: zeigt **eine Einheit** in die **positive x-Richtung**

Basisvektor $\vec{j}$ bzw. $\vec{e_2}$: zeigt **eine Einheit** in die **positive y-Richtung**

Für den $\mathbb{R}^3$ gilt:

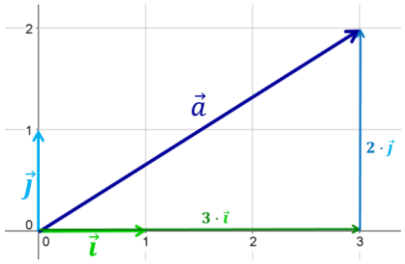


Basisvektor $\vec{i}$ bzw. $\vec{e_1}$: zeigt **eine Einheit** in die **positive x-Richtung**

Basisvektor $\vec{j}$ bzw. $\vec{e_2}$: zeigt **eine Einheit** in die **positive y-Richtung**

Basisvektor $\vec{k}$ bzw. $\vec{e_3}$: zeigt **eine Einheit** in die **positive z-Richtung**

Beispiel:



Addieren wir zum 3-fachen des Basisvektors $\vec{\imath}$ das 2-fache des Basisvektors $\vec{j}$, erhalten wir den Vektor $\vec{a}$.

Es gilt demnach:

$$\vec{a} = 3 \cdot \vec{\imath} + 2 \cdot \vec{j}$$

Deshalb kann ein Vektor durch Angabe der Vielfachen der Basisvektoren eindeutig angegeben werden:

$$\vec{a} = 3 \cdot \vec{\imath} + 2 \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Man nennt **diese Vielfachen** auch **Koordinaten des Vektors**.

3 ist seine **x-Koordinate** 2 ist seine **y-Koordinate**

Allgemein lässt sich für den $\mathbb{R}^2$ schreiben:

$$\boxed{\underbrace{\vec{a} = a_1 \cdot \vec{\imath} + a_2 \cdot \vec{j}}_{\text{Komponenten-Schreibweise}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}_{\text{Koordinaten-Schreibweise}}}$$

a_1 ... **x-Koordinate** des Vektors $\vec{a}$ a_2 ... **y-Koordinate** des Vektors $\vec{a}$

$a_1 \cdot \vec{\imath} = a_1 \cdot \vec{e_1}$ ... **x-Komponente** des Vektors $\vec{a}$ $a_2 \cdot \vec{j} = a_2 \cdot \vec{e_2}$ ... **y-Komponente** des Vektors $\vec{a}$

Entsprechend gilt für den $\mathbb{R}^3$:

$$\boxed{\underbrace{\vec{a} = a_1 \cdot \vec{\imath} + a_2 \cdot \vec{j} + a_3 \cdot \vec{k}}_{\text{Komponenten-Schreibweise}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}}_{\text{Koordinaten-Schreibweise}}}$$

a_1 ... **x-Koordinate** des Vektors $\vec{a}$ $a_1 \cdot \vec{\imath} = a_1 \cdot \vec{e_1}$ ... **x-Komponente** des Vektors $\vec{a}$

a_2 ... **y-Koordinate** des Vektors $\vec{a}$ $a_2 \cdot \vec{j} = a_2 \cdot \vec{e_2}$ ... **y-Komponente** des Vektors $\vec{a}$

a_3 ... **z-Koordinate** des Vektors $\vec{a}$ $a_3 \cdot \vec{k} = a_3 \cdot \vec{e_3}$ ... **z-Komponente** des Vektors $\vec{a}$

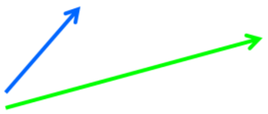
Bemerkung: Statt a_1 liest man auch a_x , statt a_2 liest man auch a_y und statt a_3 liest man auch a_z.
Nur lässt sich diese Schreibweise bei mehr als drei Dimensionen nicht aufrechterhalten.

Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}$

Alle (unendlich vielen) **Vektoren im** (2 bzw. 3-dimensionalen) **Koordinatensystem lassen sich durch Addition bzw. Subtraktion von Vielfachen dieser Basisvektoren darstellen**.

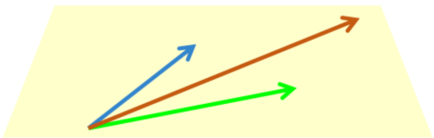
2 Vektoren sind

linear abhängig
wenn sie **kollinear** (**parallel**) sind



linear UNabhängig
wenn sie **NICHT** kollinear sind

3 Vektoren sind



linear abhängig
wenn sie **komplanar** sind (in einer Ebene liegen)

linear UNabhängig
wenn sie **NICHT** komplanar sind

Vektoren sind also dann **linear abhängig**, wenn sie sich **durch Vielfache der anderen Vektoren darstellen** lassen.

Demnach sind alle Vektoren im $\mathbb{R}^2$ bezüglich der Basisvektoren $\vec{i}$ und $\vec{j}$ linear abhängig und

im $\mathbb{R}^3$ sind alle Vektoren bezüglich der Basisvektoren $\vec{i}$, $\vec{j}$ und $\vec{k}$ linear abhängig.

Man kann auch schreiben: $\forall\ (\vec{v}\ \in \mathbb{R}^2: \vec{v} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j} = \ a_1 \cdot \vec{e_1} + a_2 \cdot \vec{e_2} = \sum_{i=1}^{2} a_i \cdot \vec{e_i}\ )$

und im $\mathbb{R}^3$: $\forall\ (\vec{v}\ \in \mathbb{R}^3: \vec{v} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j} + a_3 \cdot \vec{k} = \ a_1 \cdot \vec{e_1} + a_2 \cdot \vec{e_2} + a_3 \cdot \vec{e_3} = \sum_{i=1}^{3} a_i \cdot \vec{e_i}\ )$

Siehe auch 4.7.1., S 233 f

Beispiel: $\vec{u} = \sum_{i=1}^{2} c_i \cdot \vec{v_i} \quad = c_1 \cdot \vec{v_1} + c_2 \cdot \vec{v_2}$

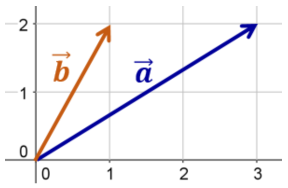
Ermitteln Sie $\vec{u}$ mit $c_1 = 2,\ c_2 = -1,\ \vec{v_1} = \binom{1}{0},\ \vec{v_2} = \binom{0}{1}$

$\vec{u} = 2 \cdot \binom{1}{0} - 1 \cdot \binom{0}{1} = \binom{2}{0} - \binom{0}{1} = \binom{2-0}{0-1} = \binom{2}{-1}$

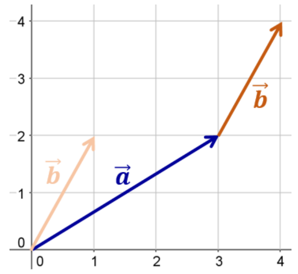
4.3.2. Rechnen mit Vektoren

Grafisch, weil leichter dargestellt, werden die Rechenoperationen im $\mathbb{R}^2$ dargestellt. Analoges gilt auch für den $\mathbb{R}^3$

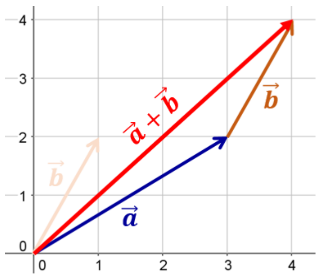
4.3.2.1. Addition



Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

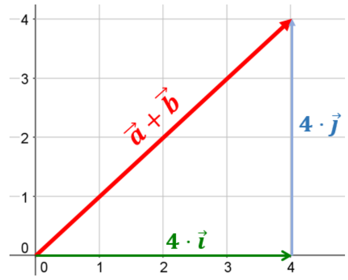


Addieren wir zunächst die Pfeile der beiden Vektoren grafisch.



Die Koordinaten des Summenvektors abgelesen:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$



Demnach gilt offensichtlich:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 \\ 2+2 \end{pmatrix}$$

```python
import numpy as np
x = np.array([3,2])
y = np.array([1,2])
x+y
```

```
array([4, 4], dtype=object)
```

Allgemein:

$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$
$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$	$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$

Entsprechend verläuft die Vektoraddition im $\mathbb{R}^n$: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$

Beispiel: Addieren Sie folgende Vektoren:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

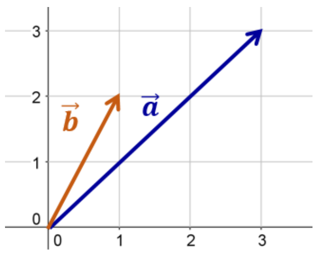
a) $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 + (-3) \\ -1 + (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 3 \\ -1 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$

b) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 4 + (-2) + 0 \\ 0 + (-3) + (-1) \\ -5 + (-4) + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 2 + 0 \\ 0 - 3 - 1 \\ -5 - 4 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}$

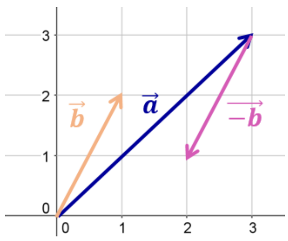
c) $\vec{m} + \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + (-1) \\ 3 + 0 \\ 2 + 2 \\ 4 + (-1) \\ 1 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Man sieht: Man kann nur Vektoren mit gleicher Dimension (gleich vielen Koordinaten) addieren und auch subtrahieren.

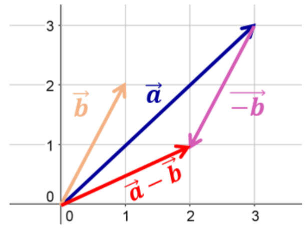
4.3.2.2. Subtraktion



Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

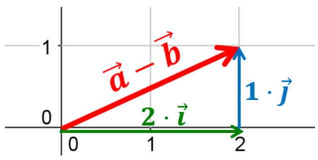


Wir subtrahieren die Pfeile der beiden Vektoren grafisch, indem wir zum Pfeil des Vektors $\vec{a}$ den Pfeil des Gegenvektors von $\vec{b}$ addieren, also $-\vec{b}$.



Die Koordinaten des Vektors $\vec{a}-\vec{b}$ sind offenbar

$$\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$



Demnach gilt:

$$\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-1\\3-2\end{pmatrix}$$

```
import numpy as np
x = np.array([3,3])
y = np.array([1,2])
x-y
```

```
array([2, 1], dtype=object)
```

Allgemein:

$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$
$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1-b_1\\a_2-b_2\end{pmatrix}$	$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1-b_1\\a_2-b_2\\a_3-b_3\end{pmatrix}$

Entsprechend verläuft die Vektorsubtraktion im $\mathbb{R}^n$: $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\\dots\\a_n\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\\dots\\b_n\end{pmatrix}$ $\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1-b_1\\a_2-b_2\\a_3-b_3\\\dots\\a_n-b_n\end{pmatrix}$

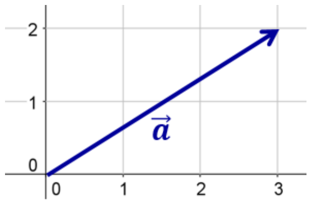
Beispiel: Subtrahieren Sie folgende Vektoren:

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$ b) $\vec{u}=\begin{pmatrix}4\\0\\-5\\1\end{pmatrix}$ $\vec{v}=\begin{pmatrix}-2\\-3\\-4\\0\end{pmatrix}$

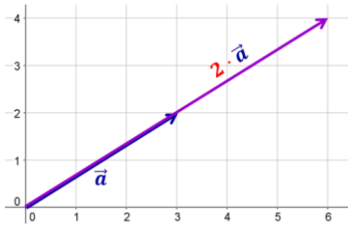
a) $\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}2-(-3)\\-1-(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+3\\-1+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ b) $\vec{u}-\vec{v}=\begin{pmatrix}4-(-2)\\0-(-3)\\-5-(-4)\\1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+2\\0+3\\-5+4\\1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\3\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\vec{a}-\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2\\-1-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ... Nullvektor (Siehe auch 4.3.2.3, S 181)

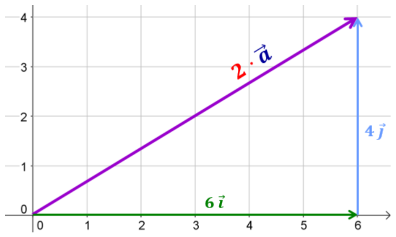
4.3.2.3. Multiplikation einer Zahl mit einem Vektor



Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$



Der Pfeil des Vektors $2 \cdot \vec{a}$ hat die **gleiche Richtung** wie der Pfeil des Vektors $\vec{a}$, ist **parallel** und **zweimal so lang**



Der Vektor $2 \cdot \vec{a}$ besitzt offenbar die Koordinaten

$$2 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Demnach gilt:

$$2 \cdot \vec{a} = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 \end{pmatrix}$$

```
import numpy as np
x = np.array([3,2])
2*x
```

```
array([6, 4], dtype=object)
```

https://www.youtube.com/watch?v=Q15JN8COHbs

Allgemein

$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$
$\lambda \in \mathbb{R} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \end{pmatrix}$	$\lambda \in \mathbb{R} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix}$

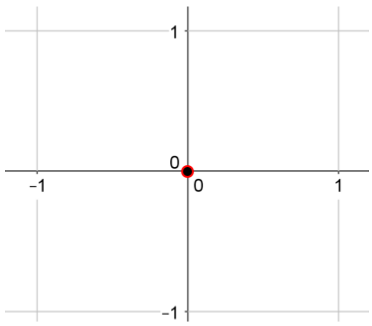
Entsprechend gilt im $\mathbb{R}^n$: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$ $\lambda \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \\ \dots \\ \lambda \cdot a_n \end{pmatrix}$

Beispiel: Berechnen Sie:

a) $0.5 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) $-3 \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

a) $0.5 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 0.5 \cdot 2 \\ 0.5 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \end{pmatrix}$ b) $-3 \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \cdot 4 \\ -3 \cdot 0 \\ -3 \cdot (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$

Nullvektor im Koordinatensystem:



Der **Nullvektor** besitzt die Länge **null**.
Man kann ihn also als **Punkt im Koordinatensystem** darstellen.

Demnach muss gelten:

$\mathbb{R}^2: \vec{o} = 0 \cdot \vec{e_1} + 0 \cdot \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^3: \vec{o} = 0 \cdot \vec{e_1} + 0 \cdot \vec{e_2} + 0 \cdot \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^n: \vec{o} = 0 \cdot \vec{e_1} + 0 \cdot \vec{e_2} + 0 \cdot \vec{e_3} + \dots + 0 \cdot \vec{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$

Beispiel: Berechnen Sie: a) $-3 \cdot \vec{u} + 4 \cdot \vec{v}$ für $\vec{u} = (-1, 0.5)$ und $\vec{v} = \left(-\frac{5}{8}, -\frac{3}{4}\right)$

b) $6 \cdot \vec{v} - 2 \cdot \vec{w}$ für $\vec{v} = 0.2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0.5 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $4\vec{v} - \sqrt{2}\,\vec{w}$ für $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.25 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

Bemerkung: Man kann die **Koordinaten von Vektoren auch waagrecht** angeben und **statt** des **Dezimalkommas** einen **Dezimalpunkt** setzen.

a) $-3\cdot\vec{u}+4\cdot\vec{v}=-3\cdot\begin{pmatrix}-1\\0.5\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}-\frac{5}{8}\\-\frac{3}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\cdot(-1)\\-3\cdot 0.5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\cdot\left(-\frac{5}{8}\right)\\4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1.5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2.5\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5\\-4.5\end{pmatrix}$

Auch in der Vektorrechnung gelten die Vorrangregeln!

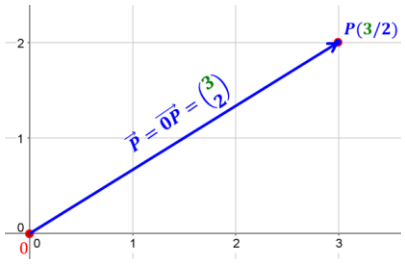
b) $6\cdot\vec{v}-2\cdot\vec{w}=6\cdot\left[0.2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right]-2\cdot\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-0.5\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right]=6\cdot\left[\begin{pmatrix}0.2\\0\\0.2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right]-2\cdot\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-0.5\\-0.5\\-0.5\end{pmatrix}\right]=$

$=6\cdot\begin{pmatrix}-0.8\\1\\0.2\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}1.5\\1.5\\1.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4.8\\6\\1.2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7.8\\3\\-1.8\end{pmatrix}$

c) $4\vec{v}-\sqrt{2}\,\vec{w}=4\cdot\begin{pmatrix}0.5\\-0.25\\-1\end{pmatrix}-\sqrt{2}\cdot\begin{pmatrix}0\\\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\\-4\end{pmatrix}$

4.4. Weitere Eigenschaften von Vektoren

4.4.1. Ortsvektor

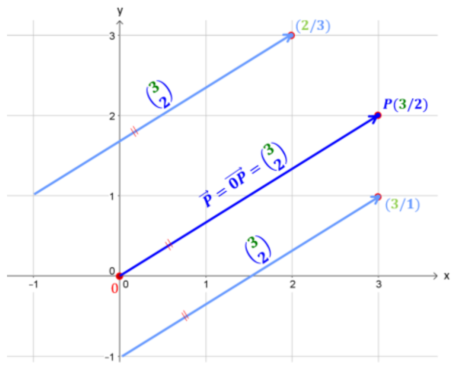


Ein **Ortsvektor** ist ein Vektor, dessen Pfeil-**Schaft** im **Koordinatenursprung** liegt.

Als **Ortsvektor stimmen Vektorkoordinaten und Koordinaten** des **Punktes** an der Pfeil-**Spitze überein**.

Der **Ortsvektor** wir meistens **so bezeichnet wie** der **Punkt an seiner Spitze**.

Heißt der Punkt an der Spitze $\boldsymbol{P}$, so nennt man den **Ortsvektor** $\vec{P}$ bzw. $\overrightarrow{0P}$, weil er im Ursprung 0 seinen Schaft hat und bis zum Punkt $\boldsymbol{P}$ reicht.



Man **kann aus jedem Vektor** durch Parallelverschieben seines Pfeiles einen **Ortsvektor machen**, indem man den Schaft des Pfeiles in den Ursprung schiebt.

Aber **nur in der Lage als Ortsvektor stimmen** die **Koordinaten des Punktes** an der Spitze mit den **Vektor-Koordinaten** überein.

Beispiel:

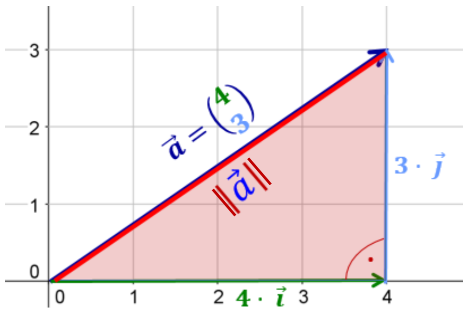
Wie lauten die Koordinaten des Ortsvektors, an dessen Spitze der Punkt $\mathbf{A(-3/2)}$ liegt? $\vec{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Beispiel:

Wie lauten die Koordinaten des Punktes an der Spitze des Ortsvektors $\vec{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$? $\mathbf{M(4/-1)}$

Bemerkung: Auf diese Weise lassen sich mit Vektoren die Koordinaten von Punkten bestimmen:
Man ermittelt den Ortsvektor zum gesuchten Punkt. Der Ortsvektor besitzt dann die gleichen Koordinaten wie der Punkt an seiner Pfeil-Spitze.

4.4.2. Betrag eines Vektors



Den **Betrag** eines **Vektors** $\vec{a}$, **bezeichnet** mit $|\vec{a}|$ bzw. $\|\vec{a}\|$, kann folgendermaßen ermittelt werden:

Im abgebildeten Beispiel ist der Basisvektor $\vec{e_1} = \vec{i}$ 4 Einheiten lang und der Basisvektor $\vec{e_2} = \vec{j}$ 3 Einheiten. Die **Länge** des Vektors, $\|\vec{a}\|$, und die Längen der Basisvektoren ergeben ein rechtwinkeliges Dreieck. Dort gilt der ***Lehrsatz des Pythagoras***:

$$\|\vec{a}\|^2 = 4^2 + 3^2 \quad | \sqrt{\ }$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

Allgemein:

$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$
$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \|\vec{a}\| = \sqrt[2]{a_1^2 + a_2^2}$	$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \|\vec{a}\| = \sqrt[3]{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Entsprechend im $\mathbb{R}^n$: $\|\vec{a}\| = \sqrt[n]{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2}$

Beispiel: Ermitteln Sie die Beträge der Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

Zwar ist $\sqrt{169} = \pm 13$ doch kommt beim Betrag nur das positive Ergebnis zum Tragen.

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 16 + 1 + 4} = \sqrt{25} = 5$$

```python
import numpy as np
```

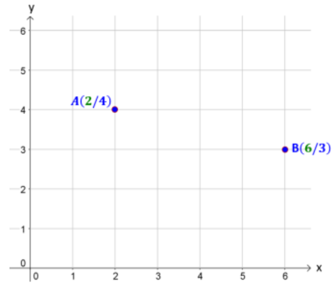
```python
x = np.array([4,3])
```

```python
np.sqrt((x**2).sum(axis=0))
```

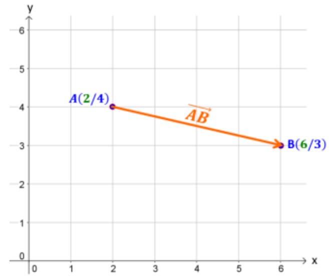
```
5.0
```

4.4.3. Gegeben: 2 Punkte A und B . . .

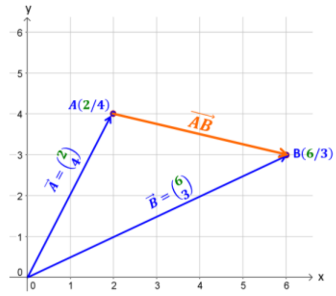
4.4.3.1. . . . gesucht: der Vektor von A nach B: $\overrightarrow{AB}$



Die beiden Punkte $A(2/4)$ und $B(6/3)$ seien gegeben.

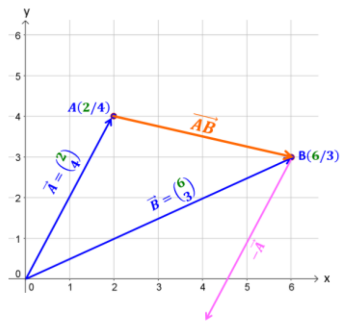


Wir wollen die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{AB}$, also vom Punkt A zum Punkt B bestimmen.

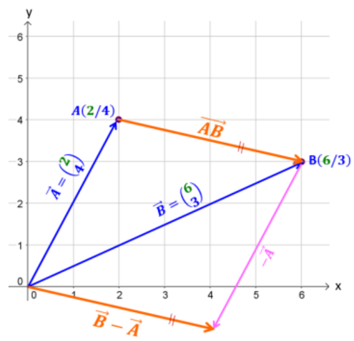


Da wir die die Koordinaten der Punkte A und B kennen, können wir sofort die Koordinaten

der Ortsvektoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$ zu diesen Punkten angeben. Sie besitzen die gleichen Koordinaten wie die Punkte an ihrer Pfeil-Spitze



Nun bilden wir den inversen Vektor von $\vec{A}$,
den Vektor $-\vec{A}$



Der Vektor $\vec{B}$ mit $-\vec{A}$ addiert, ergibt den Vektor $\vec{B}-\vec{A}$.

Da der Pfeil des Vektors $\vec{B}-\vec{A}$

- parallel,
- gleich gerichtet und
- gleich lang

wie der Pfeil des Vektors $\overrightarrow{AB}$ ist, gilt $\boxed{\overrightarrow{AB}=\vec{B}-\vec{A}}$

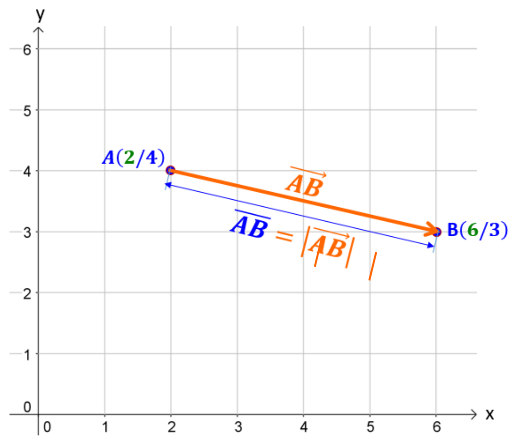
Beispiel: Gegeben sind die Punkte $A(2/4)$ und $B(6/3)$. Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \binom{6}{3} - \binom{2}{4} = \binom{4}{-1}$$

Beispiel: Gegeben sind die Punkte $U(2/4/-1{,}5)$ und $W(6/-3/-2{,}5)$. Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{WU}$

$$\overrightarrow{WU} = \vec{U} - \vec{W} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.4.3.2. . . . gesucht: die Länge der Strecke AB, $\overline{AB}$



Offensichtlich ist die **Strecke AB gleich lang** wie der **Vektor $\overrightarrow{AB}$**.

$$\boxed{\overline{AB} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$$

Bemerkung: Die Strecke heißt AB.
Ihre Länge wird mit $\overline{AB}$ bezeichnet,
der Vektor von A nach B mit $\overrightarrow{AB}$

Beispiel: Gegeben sind die Punkte $A(2/4)$ und $B(6/3)$.

Bestimmen Sie die Länge der Strecke AB.

$$\overrightarrow{AB} = \binom{4}{-1} \quad \rightarrow \quad \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17} = 4{,}12\ E$$

```
1  import numpy as np
1  x = np.array([4,-1])
1  np.sqrt((x**2).sum(axis=0))
4.123105625617661
```

Bemerkung: Statt ‖ ‖ für den Betrag ist auch die Schreibweise | | möglich.

Beispiel: Ermitteln Sie den Abstand folgender Punkte:

a) $A(-1.25, 0, -3.5) \quad B(1.75, -1, -1.5)$

Beim Abstand der beiden Punkte ist es gleichgültig, ob der Vektor $\overrightarrow{AB}$ oder der Vektor $\overrightarrow{BA}$ gewählt wird, weil beide Vektoren über den gleichen Betrag (die gleiche Länge) verfügen.

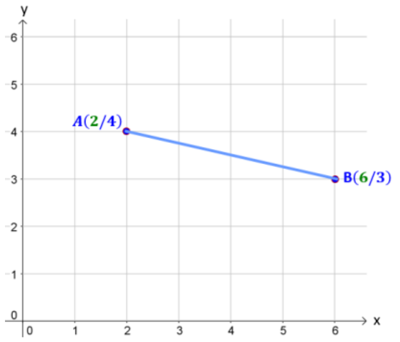
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1.75 \\ -1 \\ -1.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1.25 \\ 0 \\ -3.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$

b) $U\left(-\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, 2, \frac{1}{2}, 1\right) \quad W\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{3}, -1, \frac{3}{2}, -1\right)$

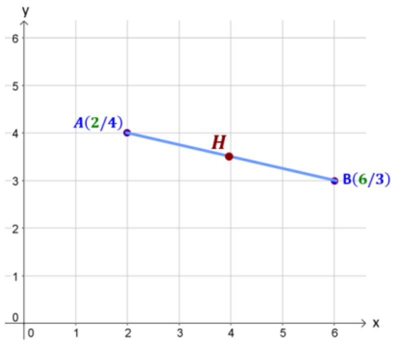
$$\overrightarrow{UW} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{3} \\ -1 \\ \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} \\ 2 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow \|\overrightarrow{UW}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-3)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{16} = 4$$

4.4.3.3. . . . gesucht: Mittelpunkt der Strecke AB

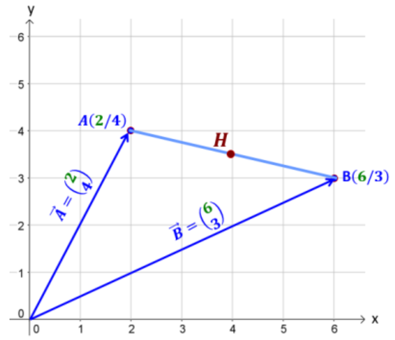
Den **Mittelpunkt** kann man auch **Halbierungspunkt** nennen.



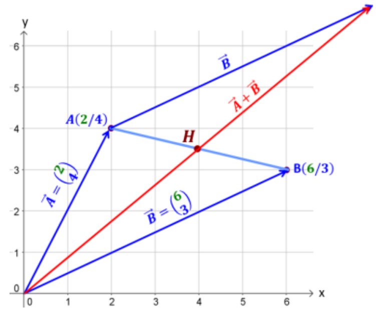
Wir kennen die Koordinaten der Punkte A und B.
Die Strecke AB ist hier hellblau eingezeichnet.



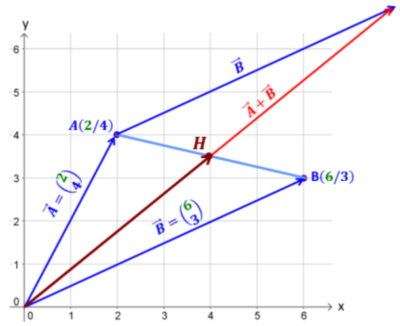
Der Halbierungspunkt H der Strecke AB liegt genau in der Mitte zwischen A und B.



Da wir die die Koordinaten der Punkte $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ kennen, können wir sofort die Koordinaten der Ortsvektoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$ zu diesen Punkten angeben.
Sie besitzen die gleichen Koordinaten wie die Punkte an ihrer Pfeil-Spitze.

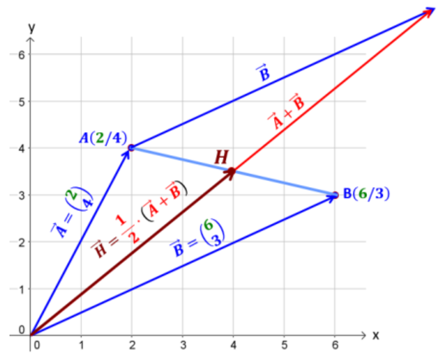


Wir addieren die Ortsvektoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$ und erhalten den Vektor $\vec{A}+\vec{B}$.



Die Koordinaten des Halbierungspunktes $\boldsymbol{H}$ bestimmen wir, indem wir den Ortsvektor $\vec{H}$ berechnen.

(Ortsvektor und Punkt an seiner Pfeil-Spitze haben die gleichen Koordinaten.)



Der Pfeil des Ortsvektors $\vec{H}$ ist offensichtlich

- **parallel**,
- **gleich gerichtet** wie der Pfeil des Vektors $\vec{A}+\vec{B}$ und
- **halb so lang**

Deshalb gilt:

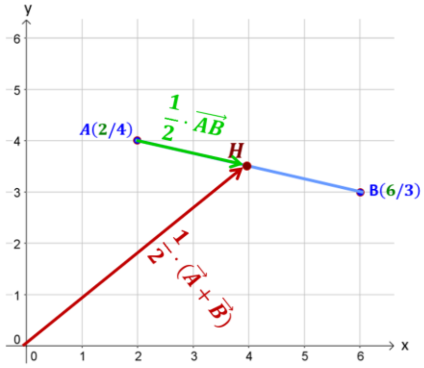
$$\boxed{\vec{H}=\frac{1}{2}\cdot\left(\vec{A}+\vec{B}\right)}$$

Beispiel: Gegeben sind die Punkte $\mathrm{A}(2/4)$ und $\mathrm{B}(6/3)$.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Halbierungspunktes (Mittelpunktes) H.

$$\vec{H}=\frac{1}{2}\cdot\left[\binom{2}{4}+\binom{6}{3}\right]=\frac{1}{2}\cdot\binom{8}{7}=\binom{4}{3.5}\rightarrow H(4/3.5)$$

Bemerkung: Da die Addition kommutativ (vertauschbar) ist, könnte man statt $\vec{A}+\vec{B}$ auch $\vec{B}+\vec{A}$ wählen



Formeln, wie $\vec{H} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{A} + \vec{B})$ NICHT ohne geometrische Veranschaulichung auswendig lernen!

Ansonsten können Verwechslungen, wie links abgebildet und unten beschrieben, passieren, weil

$\vec{H} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{A} + \vec{B})$ und $\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$

ein halb mal $\vec{A} + \vec{B}$ und ein halb mal $\overrightarrow{AB}$

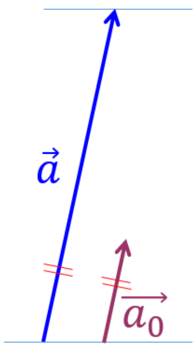
akustisch ähnlich klingen, doch geometrisch völlig anderes darstellen!

Beispiel: Gegeben sind die Punkte $P(1.5, 3.25, -2, 0)$ und $Q(-1.5, -0.25, 0, -1)$.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M.

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1.5 \\ 3.25 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1.5 \\ -0.25 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.5 \\ -1 \\ -0.5 \end{pmatrix} \rightarrow M(0/1.5/-1/-0{,}5) = M(0{,}1.5, -1, -0.5)$$

4.4.4. Einheitsvektor eines Vektors (Normierung)



Der Einheitsvektor $\vec{a_0}$ eines Vektors $\vec{a}$ ist

- **parallel**,
- **gleichgerichtet** wie der Pfeil des Vektors $\vec{a}$ und hat
- die **Länge 1** (E inheit)

Dividieren wir einen Vektor durch seinen Betrag (seine Länge), so erhält der Vektor den Betrag (die Länge) 1.

$$\boxed{\vec{a_0} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \cdot \vec{a}}$$

Beispiel: Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

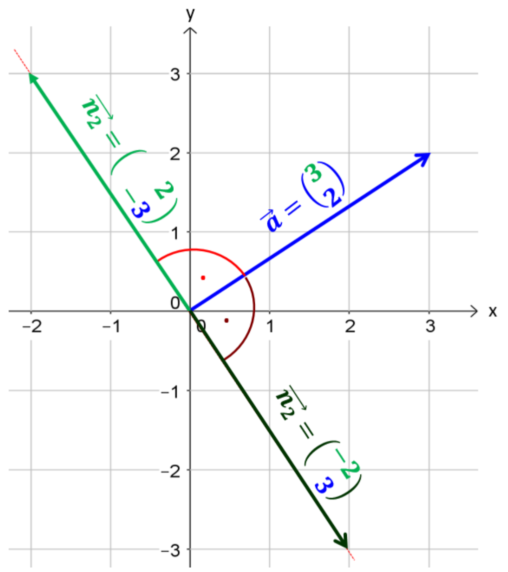
Ermitteln Sie den Einheitsvektor dieses Vektors.

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \rightarrow \vec{a_0} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ -0.8 \end{pmatrix}$$

```python
import numpy as np

vector=np.array([3,-4])

unit_vector = vector / np.linalg.norm(vector)
print(unit_vector)
```

```
[ 0.6 -0.8]
```

4.4.5. Normalvektoren eines Vektors im $\mathbb{R}^2$



Die Normalvektoren $\vec{n_1}$ bzw. $\vec{n_2}$ eines Vektors $\vec{a}$ sind

- **gleich lang** wie der Pfeil des Vektors $\vec{a}$ und
- **schließen mit $\vec{a}$** einen **rechten Winkel** ein

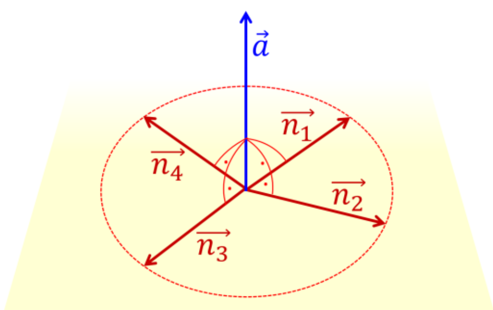
Wie nebenstehende Skizze zeigt, gibt es zwei Normalvektoren mit den Koordinaten

$$\boxed{\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \rightarrow \vec{n_1} = \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix} \quad \vec{n_2} = \begin{pmatrix} a_y \\ -a_x \end{pmatrix}}$$

Bemerkung: Wer $\vec{n_1}$ oder $\vec{n_2}$ ist, ist **un**erheblich.

Man kann **nur im $\mathbb{R}^2$ Normalvektoren zu EINEM Vektor** angeben!

Im $\mathbb{R}^3$ gibt es zu einem Vektor unendlich viele Normalvektoren. Deshalb sind im Raum Normalvektoren bezüglich ***eines*** Vektors nicht eindeutig bestimmbar.



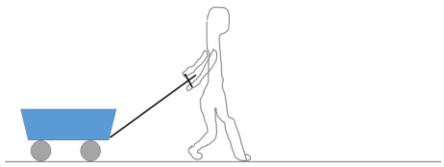
Im $\mathbb{R}^3$ lassen sich nur zu zwei nicht parallelen Vektoren eindeutige Normalvektoren angeben.

Siehe auch Kapitel 4.4.7., S 196 f und 4.6.2, S 218.

Beispiel: Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Geben Sie zwei mögliche Normalvektoren von $\vec{a}$ an.

$$\vec{n_1} = \begin{pmatrix} -(-1) \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \vec{n_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

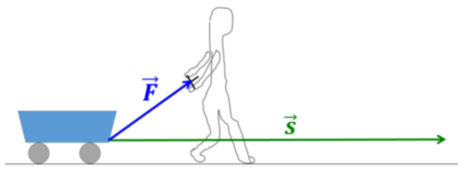
4.4.6. Skalarprodukt zweier Vektoren



Eine **skalare Größe** (ein **Skalar**) meint eine **Zahl**.

Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren **ergibt** demnach (nur) eine **Zahl** und **keinen Vektor**, wie wir sehen werden.

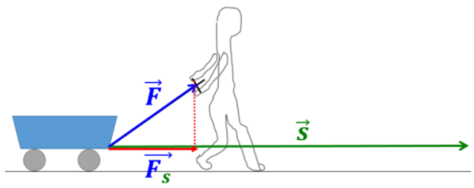
Um die Formel des Skalarproduktes ein wenig zu verstehen, benötigen wir zunächst den physikalischen Begriff der **Arbeit**:



In der Physik ist Arbeit wie folgt festgelegt:

Arbeit = Weg mal Kraft

Also das Produkt aus dem zurückgelegten Weg mal der dafür aufgewendeten Kraft.



Der zurückgelegte Weg ist in der Skizze durch den Vektor $\vec{s}$ gekennzeichnet, die aufgewendete Kraft durch den Vektor $\vec{F}$

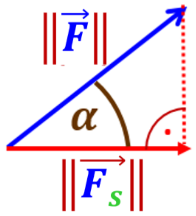
Allerdings ist nur jener Teil der Kraft für die geleistete Arbeit von Bedeutung, die in Bewegungsrichtung erfolgt, hier durch den Vektor $\vec{F_s}$ dargestellt.

Da die gleiche Arbeit geleistet wird, wenn der Wagen die gleiche Strecke mit der gleich großen Kraft **zurück**geschoben wird, ist nicht die Richtung der geleisteten Arbeit von Bedeutung, sondern alleine ihre Größe:

$$\textbf{Arbeit} = \|\vec{s}\| \cdot \left\|\vec{F_s}\right\|$$

Im Englischen heißt **Arbeit** ***work*** (W), **Kraft** ***force*** (F) und **Strecke** ***stretch*** (s) . Deshalb schreibt man

$$W = \|\vec{s}\| \cdot \left\|\vec{F_s}\right\|$$



Wie können wir nun die Größe der in Bewegungsrichtung wirkenden Kraft $\left\|\vec{F_s}\right\|$ berechnen, wenn wir die Vektoren $\vec{s}$ und $\vec{F}$ kennen?

Im rechtwinkeligen Dreieck ist $\left\|\vec{F}\right\|$ die Hypotenuse und $\left\|\vec{F_s}\right\|$ die Ankathete des Winkels α, den die beiden Vektoren miteinander einschließen.

Damit können wir mit dem Cosinus rechnen:

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

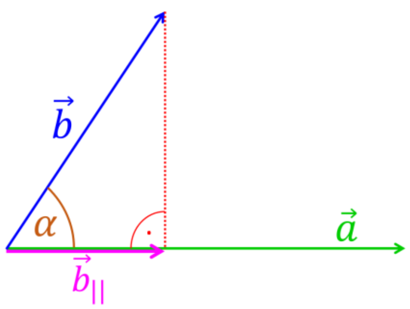
$$\cos(\alpha) = \frac{\left\|\vec{F_s}\right\|}{\left\|\vec{F}\right\|} \quad \Big| \cdot \left\|\vec{F}\right\|$$

$$\left\|\vec{F}\right\| \cdot \cos(\alpha) = \left\|\vec{F_s}\right\|$$

Diesen Ausdruck für $\left\|\vec{F_s}\right\|$ in die Formel für W eingesetzt, und wir erhalten

$$W = \|\vec{s}\| \cdot \left\|\vec{F}\right\| \cdot \cos(\alpha)$$

Verallgemeinern wir nun diese Erkenntnisse:



Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Das **Skalarprodukt** $\vec{a} \cdot \vec{b}$ dieser Vektoren:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b_{||}}\right\|$$

$\vec{b_{||}}$ … Orthogonale[20] Projektion des Vektors $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$

Bemerkung: Das Symbol $\|$ parallel bei $\vec{b_{||}}$ wird deshalb verendet, weil die orthogonale Projektion des Vektors $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$ parallel zu $\vec{a}$ ist.

[20] orthogonal: *orthos* (griechisch) … recht, richtig *gonia* … Ecke, Winkel → orthogonal … rechtwinkelig
So bedeutet Orthografie: Rechtschreibung *graphein* (griechisch) … schreiben

Da $cos(\alpha) = \frac{\|\vec{b}_{||}\|}{\|\vec{b}\|} \;\; | \cdot \|\vec{b}\| \;\rightarrow\; \|\vec{b}\| \cdot cos(\alpha) = \|\vec{b}_{||}\| \quad \rightarrow$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\alpha)}$$

Die bisherigen Überlegungen grenzten an einen Schildbürgerstreich [21], könnte man das Skalarprodukt nicht auch auf andere Weise ermitteln. Wenn wir den Winkel zwischen den Vektoren nicht kennen, werden wir auch das Skalarprodukt mit den bisherigen Formeln nicht ermitteln können. Deshalb

Ohne Herleitung noch eine Formel wie das Skalarprodukt zweier Vektoren mit Hilfe der Koordinaten bestimmt werden kann:

$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$
$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$	$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

Entsprechend im $\mathbb{R}^n$: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n$

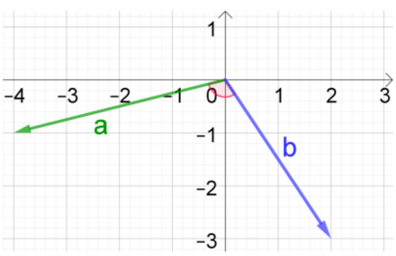
Beispiel: Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$
Berechnen Sie das Skalarprodukt dieser beiden Vektoren.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = -4 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) = -8 + 3 = -5$

```
import numpy as np
x = np.array([-4,-1])
y = np.array([2,-3])
np.dot(x,y)
```

−5

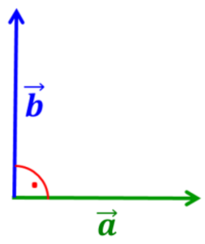
Beispiel: Lesen Sie den Winkel ab, den die eingezeichneten Vektoren miteinander einschließen.



$\approx \mathbf{110°}$

[21] Nach einer Erzählung vergaß man in SCHILDA beim Bau des Rathauses auf die Fenster. Um Licht in das Gebäude zu bringen, wollten die Bürger Licht mit einem Scheffel (Bottich) einfangen und ins Rathaus leeren.

Weiters gilt für das Skalarprodukt:



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\cdot\left\|\vec{b}\right\|\cdot\underbrace{\cos(90°)}_{=0}$$

$$\vec{a}\perp\vec{b} \rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

Zwei Vektoren,

- die einen Winkel von 90° bilden
- aufeinander senkrecht stehen
- normal aufeinander stehen
- orthogonal sind, [22]

deren Skalarprodukt ist **null**.

Verwechseln Sie nicht

Skalare Multiplikation
eines Vektors

$3\cdot\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ Ergebnis: **Vektor**

mit dem Skalarprodukt
zweier Vektoren

$\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ Ergebnis: **Zahl**

Beispiel: a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix}4\\8\\4\end{pmatrix}$ orthogonal sind.

$$\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\8\\4\end{pmatrix} = 3\cdot 4 + (-2).8 + 1\cdot 4 = 12 - 16 + 4 = 0$$

Damit ist auch der zu $\begin{pmatrix}4\\8\\4\end{pmatrix}$ parallele Vektor $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ orthogonal mit $\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = 3\cdot 1 + (-2)\cdot 2 + 1\cdot 1 = 3 - 4 + 1 = 0$$

b) Wie muss die Koordinate b_2 des Vektors $\vec{b} = \begin{pmatrix}-3\\b_2\end{pmatrix}$ gewählt werden ,damit er mit dem Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ einen rechten Winkel einschließt?

$$\begin{pmatrix}-3\\b_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = 0$$

$$-3\ \cdot\ 2 + \ b_2\ \cdot(-1) = 0\ \rightarrow\ -6 - b_2 = 0\ \mid + b_2\ \rightarrow\ \boldsymbol{-6 = b_2}$$

[22] Verschiedene Bezeichnungen für denselben Sachverhalt.

Übung

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = (0, -1)$, $\vec{c} = (0.707, 0.707)$,

$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{f} = (0,1,0)$, $\vec{u} = (1,1,0,0)$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie

die Punkte A(2/–1), B(4/3), C(1/1/0/1) und D(0/0/1/–1).

Ermitteln Sie: 1) $-\vec{a} - 2\,\vec{b}$ 2) $\vec{c}_0$ 3) Mittelpunkt der Strecke AB

4) Ist $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \in \text{span}(\,a, b)$?

5) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ orthogonal sind.

6) Berechnen Sie Winkel, den die Vektoren $\vec{d}$ und $\vec{f}$ miteinander einschließen.

7) $\sqrt{2} \cdot \vec{a_0} + 2 \cdot \vec{b_0}$

8) Normalvektor von $\overrightarrow{BA}$

9) Die orthogonale Projektion von $\vec{u}$ auf $\vec{v}$.

10) $\overline{CD}$

Lösungen: 1) $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 2) $\vec{c_0} = \vec{c}$ 3) (3/1)

4) Ja, weil $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 + 1 + 0 + 0 = 0$

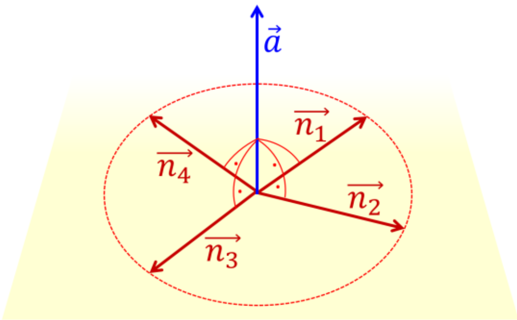
5) 90° 6) 90° 7) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

9) Nullvektor $\vec{o}$ 10) $\sqrt[4]{7} \approx 1.63$

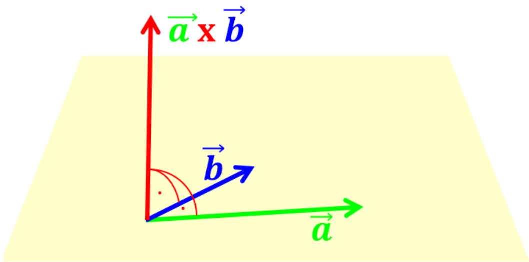
4.4.7. Vektorprodukt (Kreuzprodukt) zweier Vektoren

Man kann **nur im $\mathbb{R}^2$ Normalvektoren zu EINEM Vektor** angeben!

Im $\mathbb{R}^3$ gibt es zu einem Vektor unendlich viele Normalvektoren. Deshalb sind im Raum Normalvektoren bezüglich ***eines*** Vektors nicht eindeutig bestimmbar.



Im $\mathbb{R}^3$ lassen sich nur zu zwei nicht parallelen (linear unabhängigen) Vektoren eindeutige Normalvektoren angeben.



Der Vektor $\vec{a}\times\vec{b}$ steht auf die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ **normal**, und damit auch auf die Ebene, die die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ „aufspannen“

Die Berechnung:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ -(a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1) \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

Wie funktioniert dieses Schema?

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Für die x-Koordinate des Kreuzproduktes werden die x-Koordinaten der beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ abgedeckt. Dann werden die verbliebenen Koordinaten von links oben nach rechts unten multipliziert, sowie von rechts unten nach links oben, und das zweite Produkt vom ersten subtrahiert.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ -(a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1) \\ \\ \end{pmatrix}$$

Für die y-Koordinate verfährt man auf gleiche Weise.

VOR die Berechnungen ist hier ein MINUS zu setzen.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ -(a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1) \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

Für die z-Koordinate des Kreuzproduktes geht man wieder auf gleiche Weise wie bei der x-Koordinate vor.

Diese Regel rührt aus der Determinantenrechnung her.

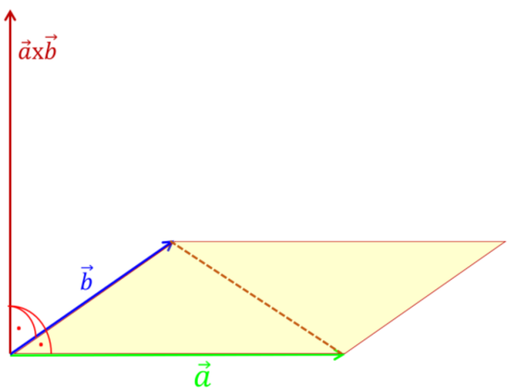
Beispiel:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 \\ -(3 \cdot (-1) - 2 \cdot 4) \\ 3 \cdot 0 - (-1) \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 0 \\ -(-3 - 8) \\ 0 - (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}$$

```python
import numpy as np
x = np.array([3,-1,2])
y = np.array([4,0,-1])
np.cross(x,y)
```

```
array([1, 11, 4], dtype=object)
```

Mit dem Vektorprodukt lässt sich auch der Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms bestimmen:



$$A_{Parallelogramm} = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$$

Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}$ Siehe obiges Beispiel.

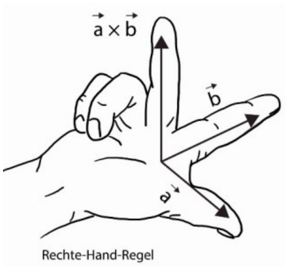
$$A_{Parallelogramm} = \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{1^2 + 11^2 + 4^2} =$$

$$= \sqrt{138} \approx 11.75$$

Der Flächeninhalt eines Dreiecks mit den Seitenlängen $\|\vec{a}\|$ und $\|\vec{b}\|$: $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot \|\vec{a} \times \vec{b}\|$

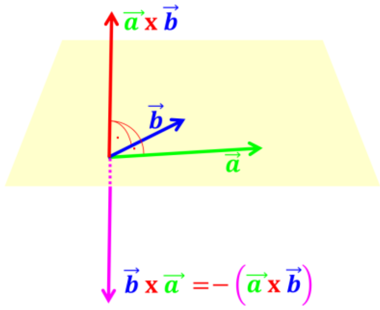
Bei einem Vektor ist auch seine Richtung von Bedeutung:

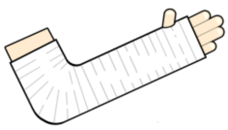
Die Richtung des Kreuzproduktes kann mit Hilfe der **Rechten-Hand-Regel** festgestellt werden:



Der Daumen der rechten Hand zeigt in Richtung des ersten Vektors, der Zeigefinger in Richtung des zweiten Vektors.

Der Vektor des Kreuzproduktes zeigt dann in Richtung Mittelfinger.





Die Richtung des Kreuz-Vektors ergibt sich, indem man die Finger ohne Überdehnung in die jeweils passende Richtung zeigen lässt.

Beispiel:

Gegeben sind die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) Bestimmen Sie das Kreuzprodukt dieser Vektoren.

b) Zeigen Sie, dass das Kreuzprodukt auf die beiden gegebenen Vektoren normal steht.

a) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot (-1) - 0 \cdot 0 \\ -(1 \cdot (-1) - 0 \cdot 1) \\ 1 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Wenn zwei Vektoren aufeinander normal stehen, ist ihr Skalarprodukt null:

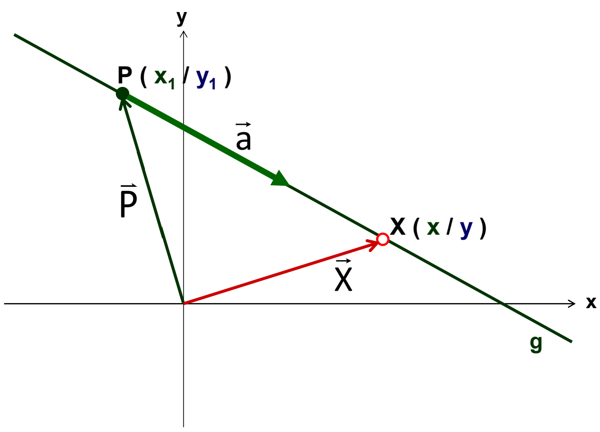
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1 - 1 + 0 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 1 + 0 - 1 = 0$$

4.5. Gleichungen einer Geraden

4.5.1. Gleichungen einer Geraden im $\mathbb{R}^2$

4.5.1.1. Parameterform



Stellen wir uns eine Gerade g, sie ist unendlich lang, aus unendlich vielen Punkten zusammengesetzt vor. Einer dieser unendlichen vielen Punkte ist der Punkt X (x/y).

Bekannt sind ein **Punkt P(x_1/y_1)**, der **auf der Geraden** g liegt, und ein **Vektor** $\vec{a}$, der **auf der Geraden** liegt.

Zu P können wir den Ortsvektor $\vec{P}$ aufstellen.

Wie können wir mit den Vektoren $\vec{P}$ und $\vec{a}$ den Punkt X ermitteln?

Indem wir den Ortsvektor $\vec{X}$ bestimmen. Dazu müssen wir zum Vektor $\vec{P}$ das (ca.) 1.5-fache des Vektors $\vec{a}$ addieren.

Demnach wäre $\vec{X} = \vec{P} + 1.5 \cdot \vec{a}$

Wir erhalten also (theoretisch) jeden Punkt der Geraden, indem wir zum Ortsvektor des bekannten Punktes P das entsprechende Vielfache des sog. Richtungsvektors $\vec{a}$ addieren.

Deshalb lautet die **Geradengleichung in Parameterform**: $\boxed{\vec{\mathbf{X}} = \vec{\mathbf{P}} + \mathbf{t} \cdot \vec{\mathbf{a}}}$

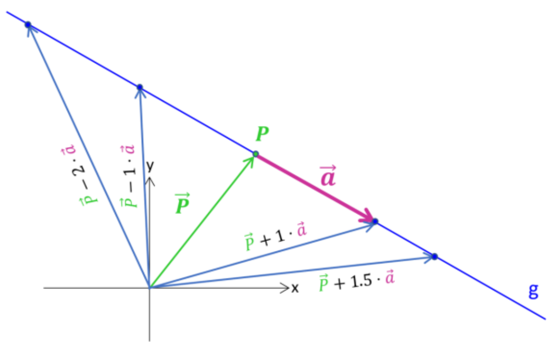
mit: $\vec{X}$ . . . Ortsvektor zu jedem beliebigen Punkt X(x/y) der Geraden

$\vec{P}$ . . . Ortsvektor zu einem gegebenen Punkt P(x_1/y_1) der Geraden

$t \in \mathbb{R}$ Parameter: die entsprechende Zahl, mit der $\vec{a}$ multipliziert werden muss, um einen gewünschten Punkt der Geraden zu berechnen

$\vec{a}$ . . . Richtungsvektor: jeder Vektor, der auf der Geraden liegt bzw. parallel zu ihr ist

Eine Gerade ist also dann gegeben, wenn der Ortsvektor zu einem bekannten Punkt der Geraden und ein Richtungsvektor bekannt sind.

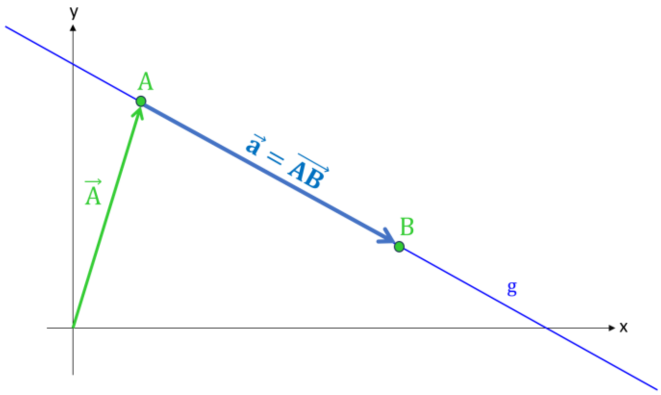


Je nachdem, welche Zahl wir für den **Parameter *t*** einsetzen, erreichen wir mit der Vektoraddition $\vec{P} + t \cdot \vec{a}$ einen bestimmten Punkt der Geraden.

Da ***t*** jede **reelle Zahl** sein kann, können wir somit (prinzipiell) jeden Punkt der Geraden bestimmen.

Beispiel: Gegeben sind die Punkte A (– 1 / 4) und B (3 / 2).

Gesucht: Die Gerade g , die durch A und B geht



Als Ortsvektor zu einem bekannten Punkt der Geraden können wir $\vec{A}$ oder $\vec{B}$ wählen.

Als Richtungsvektor benötigen wir einen Vektor, der auf g liegt oder parallel zu ihr ist.

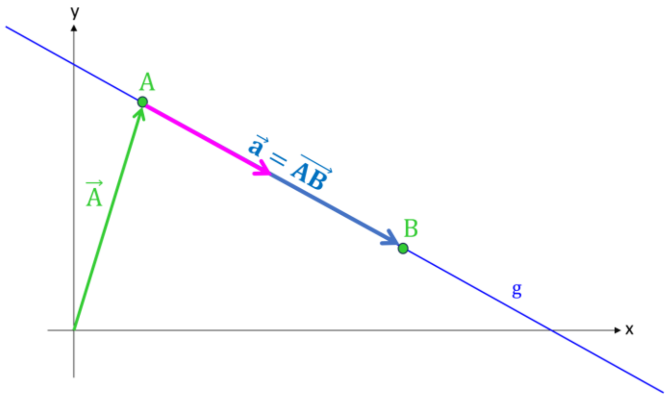
Hier bietet sich z.B.

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \binom{3}{2} - \binom{-1}{4} = \binom{4}{-2} = \vec{a}$$

Damit lautet eine Geradengleichung mit

$$g: \vec{X} = \vec{A} + t \cdot \vec{a}$$

$$g: \vec{X} = \binom{-1}{4} + t \cdot \binom{4}{-2}$$



Da der Vektor $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \binom{\mathbf{4}}{\mathbf{-2}}$ ein **Richtung**svektor ist, benötigen wir von ihm nur die **Richtung**.
Diese bleibt erhalten, wenn wir von diesem Vektor nur die halbe Länge wählen:

$$\frac{1}{2} \cdot \binom{\mathbf{4}}{\mathbf{-2}} = \binom{\mathbf{2}}{\mathbf{-1}}$$

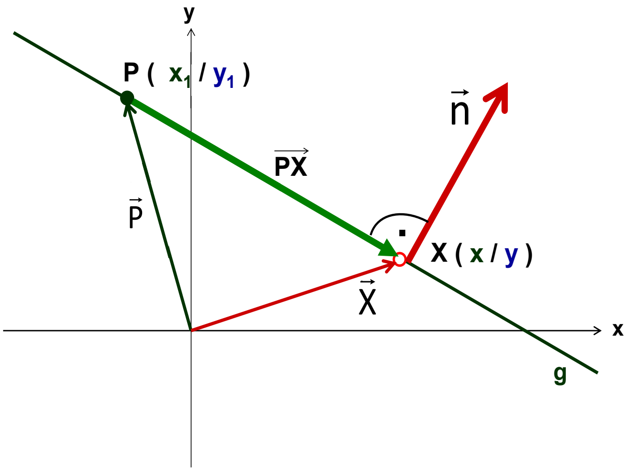
So kann eine (vereinfachte) Geradengleichung so lauten:

$$g: \vec{X} = \binom{-1}{4} + t \cdot \binom{\mathbf{2}}{\mathbf{-1}}$$

Setzen wir beispielsweise $\boldsymbol{t = 2}$, so erhalten wir als konkreten Ortsvektor

$g: \overrightarrow{X_1} = \binom{-1}{4} + \mathbf{2} \cdot \binom{\mathbf{2}}{\mathbf{-1}} = \binom{-1}{4} + \binom{4}{-2} = \binom{3}{2}$ und damit den Punkt X_1 (3 / 2) auf dieser Geraden.

4.5.1.2. Normalvektorform



Jeder Vektor $\overrightarrow{PX}$ vom gegebenen Punkt P der Geraden zu einem beliebigen Punkt X dieser Geraden liegt aus offensichtlichen Gründen **auf** dieser Geraden.

Damit steht jeder dieser Vektoren $\overrightarrow{PX}$ normal auf einem Normalvektor $\vec{n}$ dieser Geraden.

Somit gilt: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{PX} = 0$

$\overrightarrow{PX} = \vec{X} - \vec{P} \rightarrow \ \vec{n} \cdot (\vec{X} - \vec{P}) = 0$

$\vec{n} \cdot \vec{X} - \vec{n} \cdot \vec{P} = 0 \ | + \vec{n} \cdot \vec{P}$

Normalvektorform: $\boxed{\vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{X}} = \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{P}}}$

Beispiel: Gegeben ist die Gerade $g: \vec{X} = \binom{-1}{4} + t \cdot \binom{2}{-1}$ (in Parameterform).

Wie lautet die Normalvektorform dieser Gleichung?

Der bekannte Punkt der Geraden: $P(-1\ |4)$

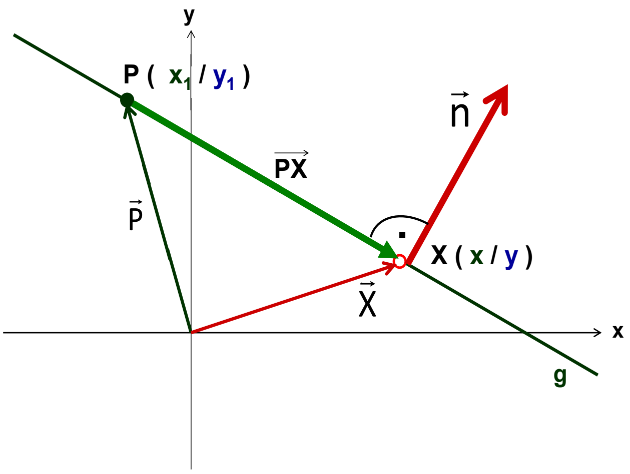
Der Richtungsvektor: $\vec{a} = \binom{2}{-1}$ Ein Normalvektor: $\vec{n} = \binom{1}{2}$

Die Normalvektorform: $g: \binom{1}{2} \cdot \vec{X} = \binom{1}{2} \cdot \binom{-1}{4}$

$g: \binom{1}{2} \cdot \vec{X} = 1\,.(-1) + 2\,.4$

$g: \binom{1}{2} \cdot \vec{X} = 7$

4.5.1.3. Parameterfreie Form (Normalform)



Normalvektorform:

$\vec{n} \cdot \vec{X} = \vec{n} \cdot \vec{P}$

$$\binom{a}{b} \cdot \binom{x}{y} = \underbrace{\binom{a}{b} \cdot \binom{x_1}{y_1}}_{c}$$

Die **parameterfreie Form** einer Geraden lautet:

$$\boxed{\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{c}}$$

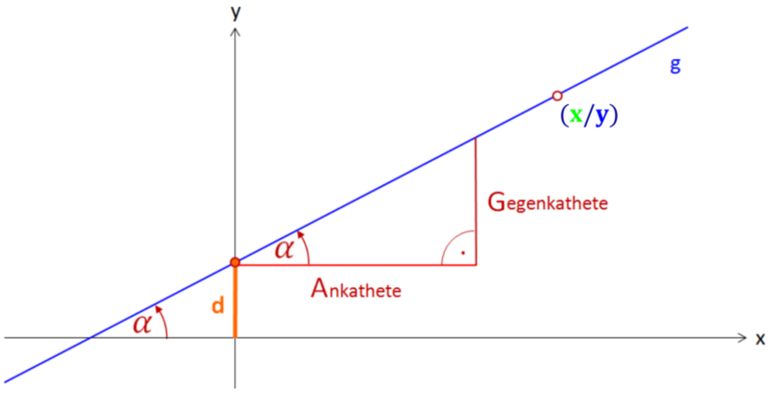
Beispiel: g: $\binom{1}{2} \cdot \vec{X} = 7$

g: $\binom{1}{2} \cdot \binom{x}{y} = 7$

g: $1 \cdot x + 2 \cdot y = 7$

Die Vorzahlen **a = 1** und **b = 2** sind offensichtlich die **Koordinaten eines Normalvektors** der Geraden g.

4.5.1.4. Hauptform



Die **Hauptform einer Geraden** ist die Gleichung einer linearen Funktion und lautet:

$$\boxed{y = k \cdot x + d}$$

Wenn wir in der parameterfreien Form y ausdrücken, erhalten wir die Hauptform:

Beispiel: g: $x + 2.y = 7 \mid -x$

g: $2.y = -x + 7 \mid :2$

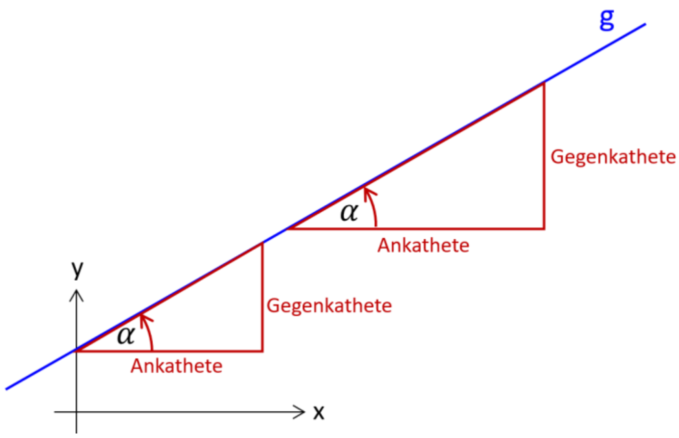
g: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \mid :2$

Die Steigung dieser Geraden g ist

$k = \frac{1}{2}$ und $d = \frac{7}{2}$

Bemerkung: **Zum Aufstellen** sind die **Vektorgleichungen** (Parameterform, Normalvektorform) einer Geraden **besser geeignet**, weil anschaulicher.

Zur Erinnerung:

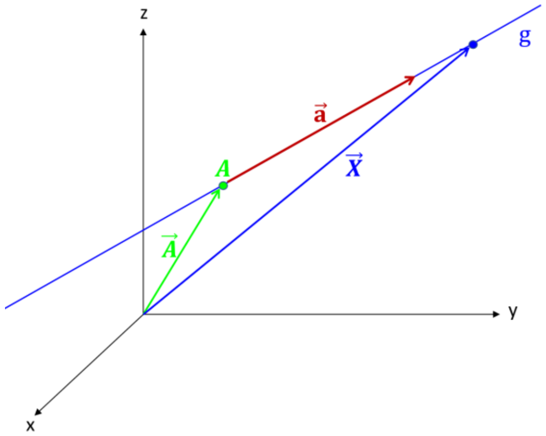


$$\boxed{\text{Steigung } k = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \tan(\alpha)}$$

Beachten Sie: **Positive** Winkel werden **gegen** den Uhrzeigersinn angegeben

4.5.2. Gleichung einer Geraden im $\mathbb{R}^3$ (Parameterform)

Im $\mathbb{R}^3$ gibt es für die Gerade nur die Parameterform, da sich hier kein Vektor finden lässt, der auf EINEM Vektor, dem Richtungsvektor, normal steht.



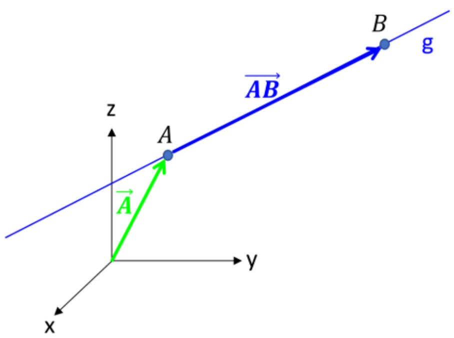
$$g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{a}$$

Bezeichnungen siehe 4.5.1.1., S 199

Beispiel: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^3$ lässt sich von EINEM (Richtungs-) Vektor KEIN Normalvektor angeben! Siehe 4.4.5., S 190 f

Beispiel: Stellen Sie die Gleichung einer Geraden g auf, die durch die Punkte $A(2/-1/0)$ und $B(4/3/-4)$ geht.



Als Ortsvektor zu einem bekannten Punkt der Geraden können wir $\vec{A}$ oder $\vec{B}$ wählen.
Ein Richtungsvektor der Geraden ist $\overrightarrow{AB}$ oder $\overrightarrow{BA}$.

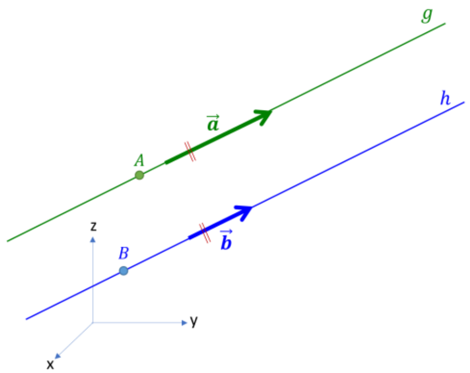
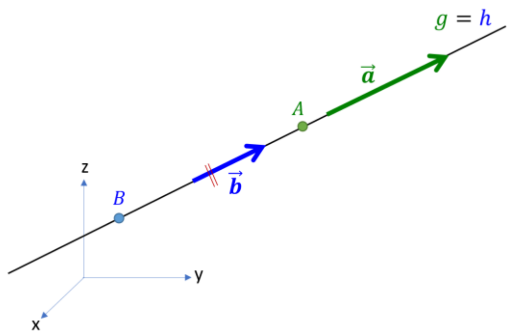
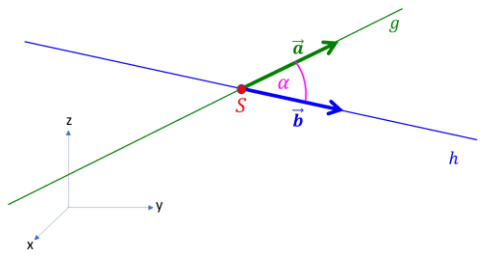
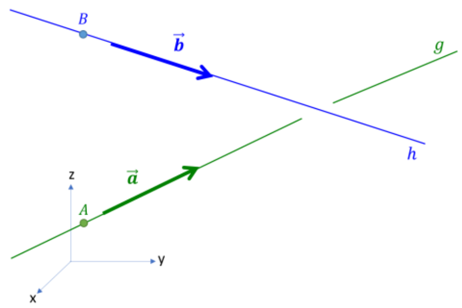
$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Damit lautet eine Gleichung der Geraden

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

4.5.2.1. Gegenseitige Lage zweier Geraden

Sehen wir und die Möglichkeiten an, wie die **gegenseitige Lage zweier Geraden** im $\mathbb{R}^3$ sein kann:

g und h sind **parallel**	g und h sind **ident**	g und h **schneiden** einander	g und h sind **windschief**
			
• Richtungsvektoren parallel und damit Vielfache voneinander: $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$	• Richtungsvektoren parallel und damit Vielfache voneinander: $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$	• Richtungsvektoren nicht parallel und damit keine Vielfachen voneinander: $\vec{a} \neq \lambda \cdot \vec{b}$	• Richtungsvektoren nicht parallel und damit keine Vielfachen voneinander: $\vec{a} \neq \lambda \cdot \vec{b}$
• Der Punkt A liegt nicht auf h bzw. der Punkt B liegt nicht auf g: $A \notin h$ bzw. $B \notin g$	• Der Punkt A liegt auch auf h bzw. der Punkt B liegt auch auf g: $A \in h$ bzw. $B \in g$		
• $g \cap h = \{\ \}$	• $g \cap h = \{g\} = \{h\}$	• $g \cap h = \{S\}$	• $g \cap h = \{\ \}$

Im $\mathbb{R}^2$ gibt es die ersten drei Fälle.

Beispiel: Sind die folgenden Geraden **parallel** bzw. **ident**?

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{h}: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sind die Richtungsvektoren parallel, also Vielfache voneinander? Wenn ja, ist $\vec{a} = t \cdot \vec{b}$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 2 = -1 \cdot t \rightarrow & t = -2 \\ -4 = 2t \quad \rightarrow & t = -2 \\ -2 = 1 \cdot t \quad \rightarrow & t = -2 \end{matrix}$$

Demnach ist $\vec{a} = -2 \cdot \vec{b}$ und somit $\vec{a} \,||\, \vec{b}$

Wenn beide Gleichungen eine **idente** Gerade beschrieben, dann müssen die gegebenen Punkte auch die jeweils ***andere*** Gleichung erfüllen:
Der bekannte Punkt der Geraden h liegt dann auch auf g bzw. der bekannte Punkt von g liegt dann auch auf h.

$$g: \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 2 = -5 + 2 \cdot \lambda \rightarrow & \lambda = 3.5 \\ 3 = 5 - 4 \cdot \lambda \quad \rightarrow & \lambda = 0.5 \\ 4 = -4 - 2\lambda \quad \rightarrow & \lambda = -4 \end{matrix}$$

Da wir verschiedene Werte für λ erhalten, liegt der bekannte Punkt der Geraden h nicht auf g.
Somit sind die beiden Geraden nicht ident, sondern (nur) **parallel**.

Beispiel: **Schneiden einander** die gegebenen Geraden bzw. sind sie **windschief**:

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{h}: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{X_g} = \overrightarrow{X_h}$$

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir setzen die Ausdrücke für $\overrightarrow{X_g}$ und $\overrightarrow{X_h}$ einander gleich, weil wir ja einen Punkt (den Schnittpunkt) suchen, der sich auf beiden Geraden befindet.

$$\begin{aligned} \text{I:} \quad & -5 + 3\lambda = 2 - \mu \quad | + \mu + 5 \\ \text{II:} \quad & 5 - 2\lambda = 3 + 2\mu \quad | - 2\mu - 5 \\ \text{III:} \quad & -4 + 2\lambda = 4 + \mu \end{aligned}$$

Damit erhalten wir 3 Gleichungen mit den Größen λ und μ.

$$\begin{aligned} \text{I:} \quad & 3\lambda + \mu = 7 \\ \text{II:} \quad & -2\lambda - 2\mu = -2 \quad | : (-2) \end{aligned}$$

Mit 2 der 3 Gleichungen berechnen wir die Werte für λ und μ.

$$\begin{aligned} \text{I:} \quad & 3\lambda + \mu = 7 \\ \text{II:} \quad & \lambda + \mu = 1 \quad | \cdot (-1) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{I:} \quad & 3\lambda + \mu = 7 \\ \text{II:} \quad & -\lambda - \mu = -1 \end{aligned}\right\} +$$

$$2\lambda = 6 \quad | : 2$$
$$\boldsymbol{\lambda = 3}$$

$$\text{II:} \lambda + \mu = 1 \rightarrow 3 + \mu = 1 \quad | - 3 \rightarrow \boldsymbol{\mu = -2}$$

III: $-4+2\cdot\mathbf{3}=4+(\mathbf{-2})$
$-4+6=4-2$
$2=2\;\; w.A.$

Abschließend werden diese Werte in die noch nicht verwendete Gleichung eingesetzt.

Erhalten wir eine **w.A.**, so **schneiden** die Geraden einander, erhalten wir eine **f.A.** , so sind die Geraden **windschief**.

Da wir eine **w.A**. erhielten bestimmen wir noch die **Koordinaten des Schnittpunktes**, indem wir entweder den Wert für λ in die Geradengleichung von g oder den Wert für μ in die Geradengleichung von h einsetzten:

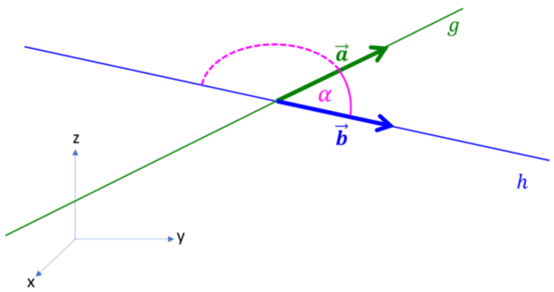
$$g:\vec{X}=\begin{pmatrix}-5\\5\\-4\end{pmatrix}+\mathbf{3}\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\5\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9\\-6\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}$$

Damit lautet der Schnittpunkt S(4/ –1/ 2).

Lautete der Schnittpunkt z.B. (4/ –2/ 2), so dürften die Koordinaten NICHT gekürzt werden, weil es sich hier um den Ortsvektor handelt, der genau zu diesem Punkt führt.

4.5.2.2. Schnittwinkel zweier Geraden

Beispiel: Bestimmen Sie den **Schnittwinkel** der Geraden $g:\vec{X}=\begin{pmatrix}-5\\5\\-4\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}$ und $\mathrm{h}:\vec{X}=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$



Schneidende Geraden schließen denselben Winkel ein wie ihre Richtungsvektoren.

Zuerst ist zu zeigen, dass die Geraden einander schneiden.

Diese Geraden schneiden einander, wie das obere Beispiel zeigt.

Die
Mit der Cosinusformel aus dem Skalarprodukt (4.4.6., S 191 f) lässt sich der Schnittwinkel berechnen:

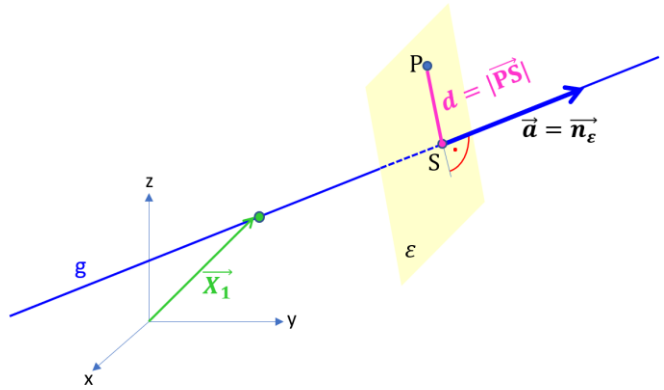
$$\cos(\alpha)=\frac{\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{(-3)^2+(-2)^2+2^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}}=\frac{3\cdot(-1)+(-2)\cdot2+2\cdot1}{\sqrt{9+4+4}\cdot\sqrt{1+4+1}}=\frac{-3-4+2}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{6}}=\frac{-5}{\sqrt{102}}$$

$$\alpha=\arccos\left(\frac{-5}{\sqrt{102}}\right)$$

$$\alpha=119{,}67°$$

Ein zweiter Schnittwinkel ist $180°-119{,}67°=60{,}32°$ (siehe obere nicht maßstabsgetreue Skizze Skizze).

4.5.2.3. Abstand Punkt – Gerade



Wir stellen die Gleichung einer Ebene ε auf, die senkrecht auf der Geraden g steht und auf der der Punkt P liegt.

Diese Ebene schneiden wir mit der Geraden und erhalten den Schnittpunkt S.

Der Abstand PS ist der Normal-Abstand des Punktes P von der Geraden g.

Beispiel: $P\ (2,7,3) \qquad g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

Ebenengleichung in Normalvektorform: $\varepsilon\colon \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\varepsilon: 4x + 3y + 6z = 8 + 21 + 18$$

$$\varepsilon: 4x + 3y + 6z = 47$$

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x = -8 + 4t \\ y = -2 + 3t \\ z = \ \ \ 4 + 6t \end{matrix}$$

$$\varepsilon\colon\ 4(-8 + 4t) + 3(-2 + 3t) + 6(4 + 6t) = 47$$

$$-32 + 16t - 6 + 9t + 24 + 36t = 47$$

$$-14 + 61t = 47 \ \ | + 14$$

$$61t = 61 \ \ | : 61$$

$$\boldsymbol{t = 1}$$

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mathbf{1} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

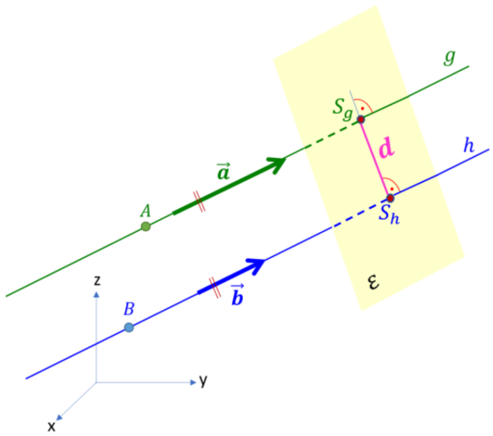
$$d = |\overrightarrow{PS}| = \left| \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2 + 7^2} = \sqrt{121} = \mathbf{11}$$

4.5.2.4. Abstand zweier Geraden

Es macht wohl nur Sinn, den Abstand zweier paralleler oder windschiefer Geraden zu bestimmen.

Unter Abstand ist immer der **kürzeste Abstand** gemeint. Dieser ist bei identischen wie bei schneidenden Geraden null.

Abstand zweier paralleler Geraden



Der kürzeste Abstand zweier paralleler Geraden wird bestimmt, indem man die Gleichung einer Ebene aufstellt, die auf beiden Geraden normal steht und diese Geraden mit der Ebene schneidet. Der Abstand der beiden Schnittpunkte ist der kürzeste Abstand der parallelen Geraden.

Beispiel: $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{h}: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dass die beiden Geraden parallel sind, wurde bereits in Beispiel 1 auf S 206 gezeigt.

Da die Ebene normal auf die beiden Geraden stehen soll, sind die jeweiligen Richtungsvektoren Normalvektoren der Ebene. Deshalb verwenden wir zum Aufstellen der Ebenengleichung die Normalvektorform (siehe 4.6.2., S 218).

$\varepsilon: \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ … Der bekannte Punkt der Geraden h, den wir in die Ebenengleichung einsetzen, ist dann schon der Punkt S_h.
Entsprechendes gelte, setzen wir den bekannten Punkt der geraden g ein: Er wäre dann S_g.

$\varepsilon: -x + 2y + z = -2 + 6 + 4$

$\varepsilon: -x + 2y + z = 8$

Wir schneiden die Ebene mit der Geraden, deren Punkt wir NICHT wählten (hier also g):

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x = -5 + 2\lambda \\ y = 5 - 4\lambda \\ z = -4 - 2\lambda \end{matrix}$$

$$\varepsilon:\ -(-5 + 2\lambda) + 2(5 - 4\lambda) + (-4 - 2\lambda) = 8$$

$$5 - 2\lambda + 10 - 8\lambda - 4 - 2\lambda = 8$$

$$1 - 12\lambda = 8 \ \mid -1$$

$$-12\lambda = 7 \ \mid : (-12)$$

$$\lambda = -\frac{7}{12}$$

$$x = -5 + 2\left(-\frac{7}{12}\right) = -5 - \frac{14}{12} = -\frac{37}{6}$$

$$y = 5 - 4\left(-\frac{7}{12}\right) = 5 + \frac{28}{12} = \frac{22}{3}$$

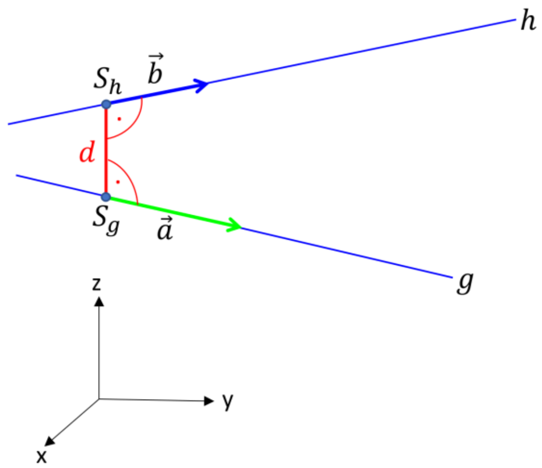
$$z = -4 - 2\left(-\frac{7}{12}\right) = -4 + \frac{14}{12} = -\frac{17}{6}$$

$$S_g = \left(-\frac{37}{6} \mid \frac{22}{3} \mid -\frac{17}{6}\right)$$

$$d = \left|\overrightarrow{S_g P}\right| = \sqrt{\left(\frac{49}{6}\right)^2 + \left(-\frac{13}{3}\right)^2 + \left(\frac{7}{6}\right)^2} = \mathbf{9.31}$$

$$\overrightarrow{S_g P} = \vec{P} - \vec{S_g} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{37}{6} \\ \frac{22}{3} \\ -\frac{17}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{49}{6} \\ -\frac{13}{3} \\ \frac{7}{6} \end{pmatrix}$$

Abstand zweier windschiefer Geraden



Der kürzeste Abstand zweier windschiefer Geraden steht normal auf beide Geraden.

$g: \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad h: \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

Sind die Geraden windschief? $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad \begin{matrix}2 = t\\0 = t\\1 = 0\end{matrix}$

Die Richtungsvektoren sind nicht parallel.

$$\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}0 = r\\-1 = r\\1 = 0\end{matrix}$$

Der gegebene Punkt von h liegt nicht auf g.

$$\overrightarrow{X_g} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+r\\1+r\\1\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{X_h} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+2s\\0\\2+s\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{X_g X_h} = \begin{pmatrix}2+2s\\0\\2+s\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2+r\\1+r\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2s-r\\-1-r\\1+s\end{pmatrix}$$

Dieser Verbindungsvektor ist dann am kürzesten, wenn er auf beiden Richtungsvektoren der geraden normal steht.

$$\begin{pmatrix}2s-r\\-1-r\\1+s\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix}2s-r\\-1-r\\1+s\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = 0$$

$2s - r - 1 - r = 0 \qquad 4s - 2r + 1 + s = 0$

I: $2s - 2r = 1 \qquad$ II: $5s - 2r = -1$

$$\left.\begin{matrix}2s - 2r = 1 \; | \cdot (-1)\\ 5s - 2r = -1\end{matrix}\right\} +$$

$3s = -2 \;|\; : 3$

$\boldsymbol{s = -\frac{2}{3}}$

I: $2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 2r = -1$

$-\frac{4}{3} - 2r = -1 \;| + \frac{4}{3}$ -> $-2r = \frac{1}{3} \;| : (-2)$ -> $\boldsymbol{r = -\frac{1}{6}}$

Eingesetzt in die Geradengleichungen: $g: \overrightarrow{S_g} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \mathbf{\frac{1}{6}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} \\ \frac{5}{6} \\ 1 \end{pmatrix}$

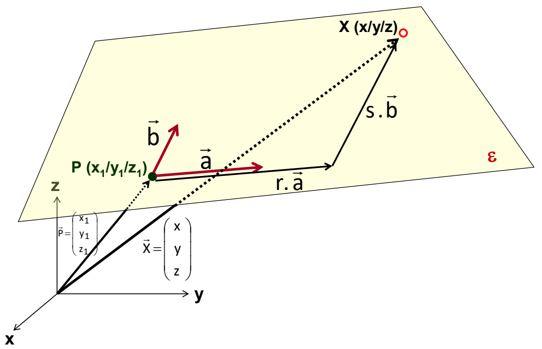
$$h: \overrightarrow{S_h} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \mathbf{\frac{2}{3}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{6} \\ 0 \\ \frac{8}{6} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{S_g} - \overrightarrow{S_h} = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} \\ \frac{5}{6} \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{4}{6} \\ 0 \\ \frac{8}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad d = \left| \begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \right| = \sqrt[2]{\left(\frac{7}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} \approx \mathbf{1.47}$$

4.6. Gleichungen einer Ebene

Eine Ebene ist eine unendlich große Fläche, die nicht gekrümmt ist. Ebenengleichungen gibt es, bis auf die xy-Ebene, nur im $\mathbb{R}^3$

4.6.1. Parameterform



Eine Ebene ε besteht aus unendlich vielen Punkten. Einer dieser unendlichen vielen Punkte ist der Punkt X (x/y/z).

Gegeben sind ein Punkt $P(x_1/y_1/z_1)$, der in der Ebene liegt und zwei linear **un**abhängige (nicht parallele) Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die beide in der Ebene liegen oder parallel zur Ebene sind.

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ nennt man Richtungsvektoren von ε.

Zu P können wir den Ortsvektor $\vec{P}$ aufstellen.

Wie können wir mit $\vec{P}$, $\vec{a}$ und $\vec{b}$ den Punkt X ermitteln?

Indem wir den Ortsvektor $\vec{X}$ bestimmen. Dazu müssen wir zum Vektor $\vec{P}$ das (ca.) 1,5-fache des Vektors $\vec{a}$ und das (ca.) 2-fache des Vektors $\vec{b}$ addieren.

Demnach wäre $\vec{X} = \vec{P} + 1.5 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b}$

Wir erhalten also (theoretisch) jeden Punkt der Ebene, indem wir zum Ortsvektor des bekannten Punktes P die entsprechenden Vielfachen der sog. Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ addieren.

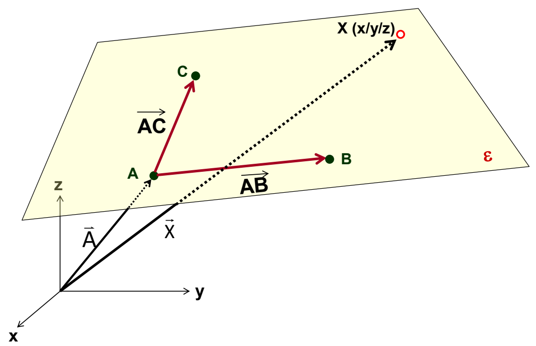
Ebenengleichung in Parameterform: $$\boxed{\vec{\mathbf{X}} = \vec{\mathbf{P}} + \mathbf{r} \cdot \vec{\mathbf{a}} + \mathbf{s} \cdot \vec{\mathbf{b}}}$$

mit:
- $\vec{X}$ ... Ortsvektor zu jedem beliebigen Punkt X(x/y/z) der Ebene
- $\vec{P}$ ... Ortsvektor zu einem gegebenen Punkt $P(x_1/y_1/z_1)$ der Ebene
- $r, s \in \mathbb{R}$ ... Parameter: die entsprechenden reellen Zahlen, mit denen die Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ multipliziert werden müssen, um einen bestimmten Punkt der Ebene zu berechnen
- $\vec{a}, \vec{b}$ ... Richtungsvektoren der Ebene: jeder Vektor, der in der Ebene liegt bzw. parallel zur Ebene ist, wobei $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zueinander **nicht** parallel (nicht kollinear bzw. nicht linear abhängig) sein dürfen

Beispiel: $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Im Folgenden wollen wir uns überlegen, welche Möglichkeiten sich bieten, zu einer Ebenengleichung zu gelangen.

a) gegeben drei Punkte A, B und C (die nicht auf einer Geraden liegen)



Mit den drei bekannten Punkten A, B und C lassen sich leicht die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ aufstellen. Da die Punkte A,B und C in der aufzustellenden Ebene liegen sollen, tun dies auch die beiden Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ und fungieren somit als Richtungsvektoren.

Als Ortsvektor zu einem bekannten Punkt der Ebene wählen wir beispielsweise $\vec{A}$.

Somit lautet eine mögliche Gleichung der Ebene:

$$\varepsilon\colon\ \vec{A} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$$

Beispiel: Gegeben sind die Punkte A (– 2 / 1 / 4), B (2 / 3 / 4) und C (0 / – 1 / 2).
Gesucht: Eine Gleichung der Ebene ε, in der die Punkte A, B und C liegen.

Zunächst zeigen wir, dass die drei gegebenen Punkte nicht auf einer Geraden liegen:
Wir stellen mit zwei der Punkte eine Geradengleichung auf und überprüfen, ob der dritte Punkt auch auf dieser Geraden liegt.

$$g(A,B)\colon \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB}\colon\quad \vec{X} = \begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix} \,||\, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} 0 &= -2 + 2\lambda \to \ \lambda = 1 \\ -1 &= 1 + \ \lambda \ \ \to \ \lambda = -2 \\ 2 &= 4 + 0\lambda \ \to \ 2 = 4 \ \ f.A. \end{aligned}$$

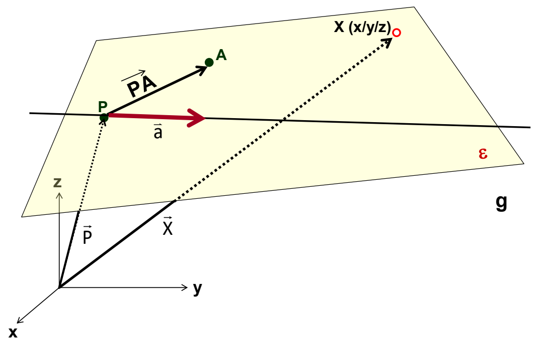
Da die Werte für λ nicht gleich sind bzw. eine $f.A.$ ergeben, liegt der dritte Punkt nicht auf der Geraden und damit liegen die drei Punkte auf keiner gemeinsamen Geraden.

Jetzt stellen wir die Gleichung der gesuchten Ebene auf:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \qquad \to \ \varepsilon\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix} + r.\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + s.\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

Bemerkung: Für die Richtungsvektoren ist nur die Richtung, jedoch nicht die Länge des Vektors von Belang.

b) gegeben ein Punkt A und eine Gerade g und A liegt nicht auf g



Wir kennen die Gleichung der Geraden

g: $\vec{X} = \vec{P} + t \cdot \vec{a}$ und den Punkt A, der nicht auf der Geraden liegt.

Als bekannten Punkt der Ebene können wir den Punkt P der Geraden g und als einen Richtungsvektor ihren Richtungsvektor $\vec{a}$ wählen.
Als zweiter Richtungsvektor der Ebene bietet sich der Vektor $\overrightarrow{PA}$ an, sodass eine mögliche Gleichung der gesuchten Ebene lauten kann:

ε: $\vec{X} = \vec{P} + r \cdot \vec{a} + s \cdot \overrightarrow{PA}$

Beispiel: Gegeben sind der Punkt A (– 2 / 1 / 4) und die Gerade $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t. \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Gesucht: Eine Gleichung der Ebene ε, in der der Punkt A und die Gerade g liegen.

Zunächst zeigen wir, dass der Punkt A nicht auf der Geraden g liegt:

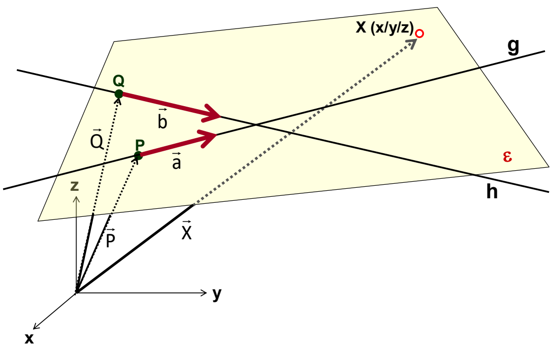
$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} -2 = 3 + 2t \rightarrow \quad t = -2.5 \\ 1 = 0 + 4t \rightarrow \quad t = 0.25 \end{array}$$

Wir müssen die z-Koordinate nicht mehr überprüfen, da ja t für **alle** Koordinaten den gleichen Wert ergeben müsste, so der Punkt A auf der Geraden läge.

Aufstellen der Ebenengleichung:

$$\overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \varepsilon: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c) gegeben zwei einander schneidende Geraden g und h



Wir kennen die Gleichungen der Geraden

$g: \vec{X} = \vec{P} + t \cdot \vec{a}$ und $h: \vec{X} = \vec{Q} + t \cdot \vec{b}$

Als bekannten Punkt der Ebene können wir z.B. den Punkt P wählen und als einen Richtungsvektor der Ebene den Richtungsvektor $\vec{a}$ der Geraden g.

Als zweiter Richtungsvektor der Ebene bietet sich der Richtungsvektor $\vec{b}$ der Geraden h an, da die beiden Geraden ja einander schneiden und somit nicht parallel sind.

So lautet eine mögliche Gleichung der gesuchten Ebene

$$\varepsilon: \vec{X} = \vec{P} + r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$$

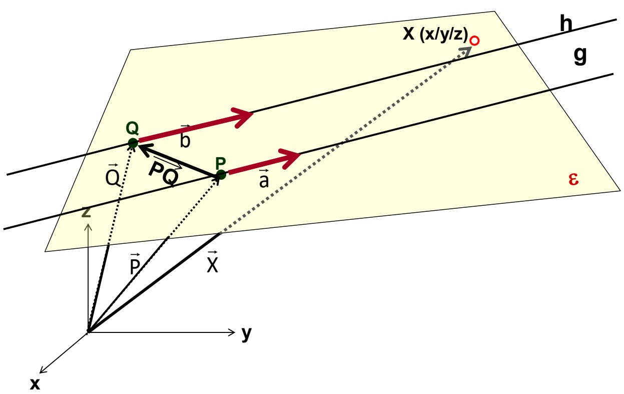
Beispiel: Gegeben sind die Geraden und $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gesucht: Eine Gleichung der Ebene ε, in der die Geraden g und h liegen.

Zunächst ist zu zeigen, ob bzw. dass die Geraden einander schneiden. Da hier die Geraden des zweiten Beispiels auf S 209 gewählt wurden, ist das bereits geschehen.

Eine Gleichung der Ebene lautet: $\varepsilon: \vec{X} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) gegeben zwei parallele Geraden g und h



Wir kennen die Gleichungen der Geraden

$g: \vec{X} = \vec{P} + t \cdot \vec{a}$ und $h: \vec{X} = \vec{Q} + t \cdot \vec{b}$

Als bekannten Punkt der Ebene können wir z.B. den Punkt P wählen und als einen Richtungsvektor der Ebene den Richtungsvektor $\vec{a}$ der Geraden g.

Als zweiter Richtungsvektor der Ebene bietet sich der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ an. $\vec{b}$ der Geraden h kann nicht als Richtungsvektor verwendet werden, da die beiden Geraden parallel liegen.

Eine mögliche Gleichung der gesuchten Ebene:

$$\varepsilon: \vec{X} = \vec{P} + r \cdot \vec{a} + s \cdot \overrightarrow{PQ}$$

Beispiel: Gegeben sind die Geraden $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$

Gesucht: Eine Gleichung der Ebene E, in der die Geraden g und h liegen.

Woran erkennt man, dass die beiden Geraden parallel sind?
Ihre Richtungsvektoren sind gegenseitige Vielfache:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Diese Geradengleichungen könnten aber auch eine idente (dieselbe) Gerade beschreiben.
Zur Überprüfung müssen wir entweder den bekannten Punkt der Geraden g in die Gleichung von h einsetzten oder den bekannten Punkt von h in g:

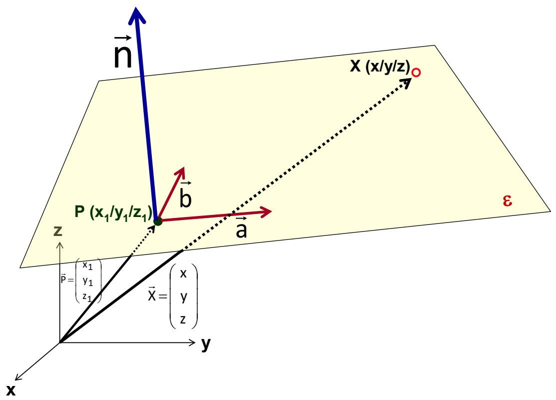
$$g: \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} 1 = 3 + 2t \rightarrow \quad t = -1 \\ 5 = 0 + 1t \rightarrow \quad t = \quad 5 \end{array}$$

Da die Parameterwerte **nicht** gleich sind, liegt der bekannte Punkt der Geraden h nicht auf der Geraden g.

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Somit lautet eine Gleichung der Ebene $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

4.6.2. Normalvektorform



Auf gleiche Art wie bei der Geraden im $\mathbb{R}^2$ lässt sich für den $\mathbb{R}^3$ die **Normalvektorform der Ebene** bilden:

$$\boxed{\vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{X}} = \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{P}}}$$

Beispiel:

$$E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

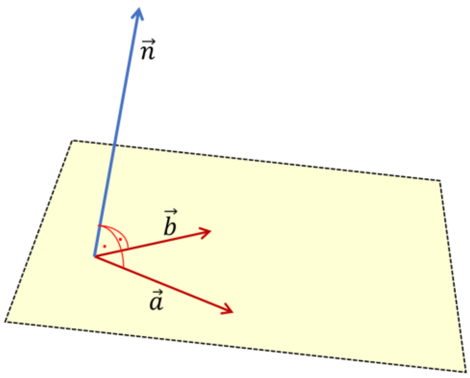
Wir bilden einen Normalvektor der Ebene: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) - 4 \cdot 0 \\ -(2 \cdot (-1) - 4 \cdot (-2)) \\ 2 \cdot 0 - 1 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{n}$

$$E: \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E: \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{X} = -1 \cdot 3 + (-6) \cdot 0 + 2 \cdot 2$$

$$E: \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{X} = 1 \quad \text{… Normalvektorform}$$

4.6.3. Parameterfreie Form (Normalform)



$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon}\text{:}\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{z}=\mathbf{d}}$$

mit $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ als ein Normalvektor der Ebene

Herleitung siehe 4.5.1.2., S 201 f

Beispiel:

$$\text{E: } \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{X} = 1$$

$$\text{E: } \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1$$

$\text{E: } -x - 6\,y + 2\,z = 1$ … parameterfreie Form

Man sieht: Die Vorzahlen a, b und c in parameterfreier Form sind die Koordinaten eines Normalvektors der Ebene.

Zum Aufstellen der Ebenengleichung sind die Parameterform bzw. Normalvektorform günstig, weil anschaulich,
zum Rechen ist die parameterfreie Form gelegener.

Hier die Gleichungen einiger **Ebenen in besonderer Lage**:

Gleichung der **xy-Ebene**: **z = 0** (alle Punkte in der xy-Ebene haben die z-Koordinate null)

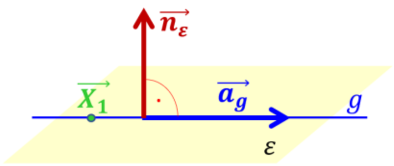
Gleichung der **xz-Ebene**: **y = 0** (alle Punkte in der xz-Ebene haben die y-Koordinate null)

Gleichung der **yz-Ebene**: **x = 0** (alle Punkte in der yz-Ebene haben die x-Koordinate null)

4.6.4. Gegenseitige Lage von Geraden und Ebene

Zunächst die Lagemöglichkeiten:

Gerade **liegt in** Ebene



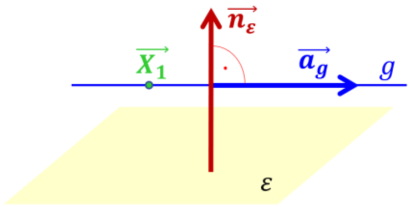
$\vec{n_\varepsilon} \cdot \vec{a_g} = 0$

und

$\vec{X_1} \in \varepsilon$

$L = \{\, g \,\}$

Gerade ist **parallel** zur Ebene



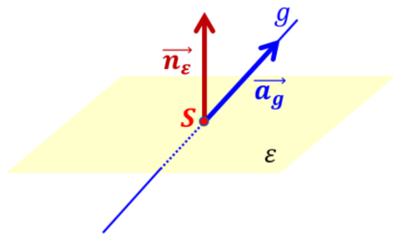
$\vec{n_\varepsilon} \cdot \vec{a_g} = 0$

und

$\vec{X_1} \notin \varepsilon$

$L = \{\ \}$

Gerade ist **schneidet** Ebene



$\vec{n_\varepsilon} \cdot \vec{a_g} \neq 0$

$L = \{\, S \,\}$

Beispiel: $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\qquad \varepsilon: 3\,x + y + z = 4$

Zunächst überprüfen wir, ob der Richtungsvektor der Geraden und der Normalvektor der Ebene aufeinander normal stehen:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot 3 + 5 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = \ -3 + 5 - 2 = 0 \rightarrow\ \vec{a_g} \perp \vec{n_\varepsilon}$$

Damit wissen wir, die Grade ist entweder parallel zur Ebene oder liegt in der Ebene.

Nun setzen wir die Koordinaten des gegebenen Punktes der Geraden in die Ebene ein:

$\varepsilon: 3 \cdot 3 + 0 + 1 = 4$

$9 = 4\ \ f.A. \rightarrow$ Die Gerade ist **parallel** zur Ebene.

Beispiel zum Schneiden von Geraden und Ebene siehe 4.6.5., S 221 f.

4.6.5. Schneiden einer Geraden mit einer Ebene

E: $-\mathrm{x}+2\,\mathrm{y}+\mathrm{z}=8$ g: $\begin{pmatrix}\mathrm{x}\\\mathrm{y}\\\mathrm{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\5\\-4\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\-4\\-2\end{pmatrix}$

Die Koordinaten der Geraden aufspalten: $\begin{aligned}x &= -5+2\cdot\lambda\\ y &= 5-4\cdot\lambda\\ z &= -4-2\cdot\lambda\end{aligned}$

Diese Ausdrücke für x, y und z in die Ebenengleichung **einsetzen**:

E: $-(-5+2\cdot\lambda)+2(5-4\cdot\lambda)+(-4-2\lambda)=8$ liefert eine Gleichung λ, die gelöst wird.

$5-2\lambda+10-8\lambda-4-2\lambda=8$

$11-12\lambda=8 \mid -11$

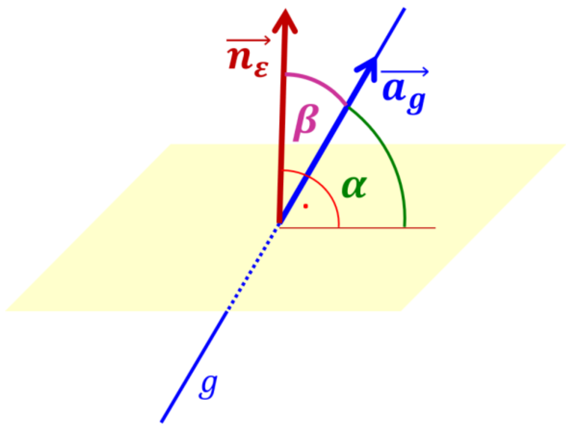
$-12\lambda=-3 \mid :(-12)$

$\boldsymbol{\lambda=0.25}$

Eingesetzt in g, erhalten wir den Schnittpunkt von g mit ε:

$$g: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\5\\-4\end{pmatrix}+\mathbf{0.25}\cdot\begin{pmatrix}2\\-4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\5\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0{,}5\\-1\\-0{,}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-4.5}\\\mathbf{4}\\\mathbf{-4.5}\end{pmatrix}=\overrightarrow{\boldsymbol{S_g}}$$

4.6.6. Schnittwinkel von Gerade und Ebene



Wir können nur den Winkel β zwischen dem Richtungsvektor der Geraden und dem Normalvektor der Ebene berechnen.

Der Schnittwinkel α zwischen Gerade und Ebene ist die Ergänzung auf 90°.

$$\alpha = 90° - \beta$$

Beispiel: Bestimmen Sie den Schnittwinkel der Geraden $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der Ebene

$E: -x + 2y + z = 8$

Zunächst wäre zu zeigen, dass Gerade und Ebene einander schneiden. Siehe 4.6.5., S 221

$$\cos(\beta) = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2}}$$

$$\cos(\beta) = \frac{0 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1}{\sqrt{0 + 4 + 1} \cdot \sqrt{1 + 4 + 1}}$$

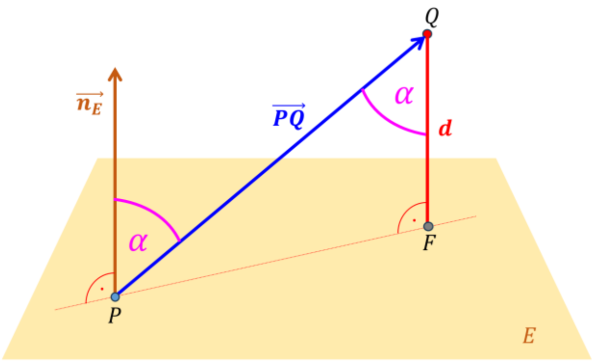
$$\cos(\beta) = \frac{5}{\sqrt{5 \cdot 6}}$$

$$\beta = arccos\left(\frac{5}{\sqrt{5 \cdot 6}}\right)$$

$$\beta = 24.09°$$

Schnittwinkel $\alpha = 90° - \beta = \mathbf{65.91}°$

4.6.7. Abstand Punkt – Ebene



Um den **Abstand eines Punktes Q von einer Ebene E** zu bestimmen, stellen wir folgende Überlegungen an:

Im rechtwinkeligen Dreieck PFQ gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{d}{|\overrightarrow{PQ}|}$$

Andererseits gilt (4.4.6., S 191 f)

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = |\overrightarrow{PQ}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos(\alpha) \ | : \ (|\overrightarrow{PQ}| \cdot |\vec{n}|)$$

$$\frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{PQ}| \cdot |\vec{n}|} = \cos(\alpha)$$

Setzen wir jetzt die beiden Ausdrücke für $\cos(\alpha)$ gleich:

$$\frac{d}{|\overrightarrow{PQ}|} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{PQ}| \cdot |\vec{n}|} \quad | \cdot |\overrightarrow{PQ}|$$

$$d = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}$$

Mit $\overrightarrow{n_0} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ (4.4.4., S 189) gilt:

$$\boxed{d = |\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{n_0}|}$$

Bemerkung: Der Betrag ist deshalb notwendig, weil nur ein nicht-negativer Abstand geometrisch sinnvoll nur ist.

Beispiel: Welchen Abstand besitzt der Punkt Q (1 | 2 | 2) von der Ebene E: 2 x + 2 y + z = 4 ?

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |\vec{n}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3 \ \rightarrow \ \overrightarrow{n_0} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ein möglicher Punkt der Ebene ist P(0 | 0 | 4), denn in E eingesetzt erhalten wir 2·0+2·0+4 = 4 -> 4 = 4 w.A.

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$d = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{1}{3} \cdot (1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1) \right| = \frac{1}{3} \cdot 4 = \frac{4}{3}$$

Beispiel: Bestimmen Sie eine Ebene E, die zwischen den Ebenen E_1 : x−2y+z−2 = 0 und E_2 : x−2y+z−6 = 0 liegt und den Abstand zwischen den beiden Ebenen im Verhältnis 1 : 3 teilt.

Zunächst bestimmen wir den Abstand der beiden gegebene Ebenen E_1 : x−2y+z−2 = 0 und E_2 : x−2y+z−6 = 0 .

Wir wählen als Punkt der Ebene E_1 den Punkt P(0 |0 |2) und für die Ebene E_2 den Punkt Q(0 |0 |6).

Durch Einsetzen der Punktkoordinaten in ihre Ebenengleichungen kann man sich leicht überzeugen, dass die Punkte tatsächlich in der jeweiligen Ebene liegen:

P(0 |0 |2) in E_1 : 0−2·0+2−2 = 0 -> 0 = 0 w.A. Q(0 |0 |6) in E_2 : 0−2·0+6−6 = 0 -> 0 = 0 w.A.

$$d = |\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{n_0}| = \left|\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (0 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + 4 \cdot 1)\right| = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot 4 = \frac{4}{\sqrt{6}}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \quad |\vec{n}| = \sqrt{6} \quad \overrightarrow{n_0} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

Die gesuchte Ebene E_g soll den Abstand der Ebenen E_1 und E_2 im Verhältnis 1 : 3 teilen:

1 Teil + 3 Teile = $\frac{4}{\sqrt{6}}$ -> 4 Teile = $\frac{4}{\sqrt{6}}$ | : 4 -> 1 Teil = $\frac{1}{\sqrt{6}}$

E_g soll demnach von E_1 den Abstand $d = \frac{1}{\sqrt{6}}$ besitzen.

E_g: x−2y+z+c = 0 Somit kann ein Punkt der Ebene E_g lauten: Q_{Eg} (0 | 0 | −c) , denn in E_g eingesetzt, erhalten wir

0−2.0−**c**+c = 0 -> 0 = 0 w.A.

Somit lautet $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}0\\0\\c\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\c-2\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{n_0} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

Eingesetzt in $d = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{n_0}$: $\frac{1}{\sqrt{6}} = \begin{pmatrix}0\\0\\c-2\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \quad | : \frac{1}{\sqrt{6}}$

$$1 = \begin{pmatrix}0\\0\\c-2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$1 = 0.1 + 0.(-2) + (c-2).1$$

$$1 = c - 2 \quad | + 2$$

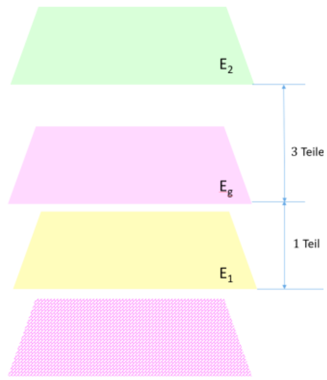
$3 = \mathrm{c}$ und die Gleichung von E_g lautet: x−2y+z+3 = 0

Das gleiche Ergebnis erhält man, wählt man die Ebene in der Form E_g: x−2y+z = c |−c -> E_g: x−2y+z−c = 0 darstellt.

Bemerkung: Streng genommen gibt es zwei Lösungen, weil $d = \left|\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{n_0}\right|$ was aufgelöst bedeutet:

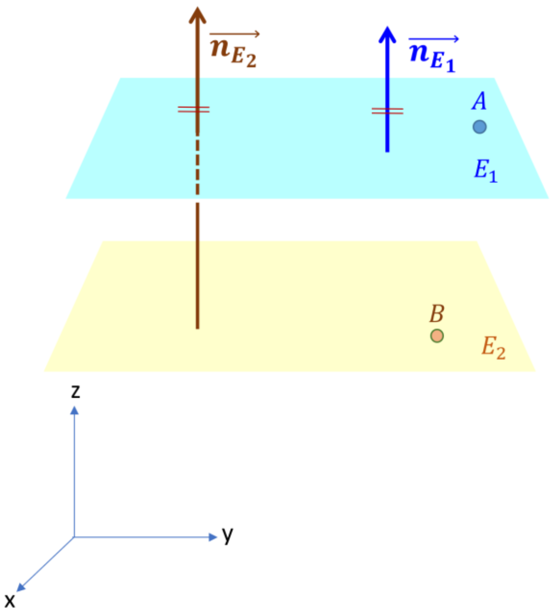
$$(d = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{n_0}) \quad \vee \; (-d = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{n_0})$$

Dann müsste noch gezeigt werden, welche der beiden Ebenen den Abstand der Ebene E_1 und E_2 im Verhältnis 1 : 3 teilt.



4.6.8. Gegenseitige Lage zweier Ebenen

E_1 und E_2 sind **parallel**



- Normalvektoren parallel und damit Vielfache voneinander:

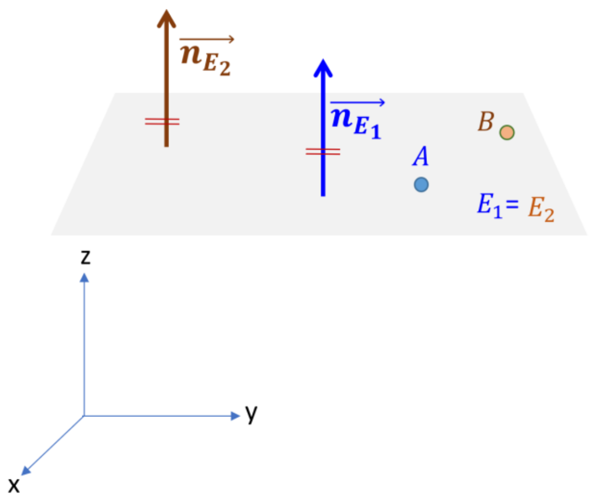
$$\overrightarrow{n_{E_1}} = \lambda \cdot \overrightarrow{n_{E_2}}$$

- Der Punkt A liegt nicht auf E_2 bzw. der Punkt B liegt nicht auf E_1:

$$A \notin E_2 \text{ bzw. } B \notin E_1$$

- $E_1 \cap E_2 = \{\ \}$

E_1 und E_2 sind **ident**



- Normalvektoren parallel und damit Vielfache voneinander:

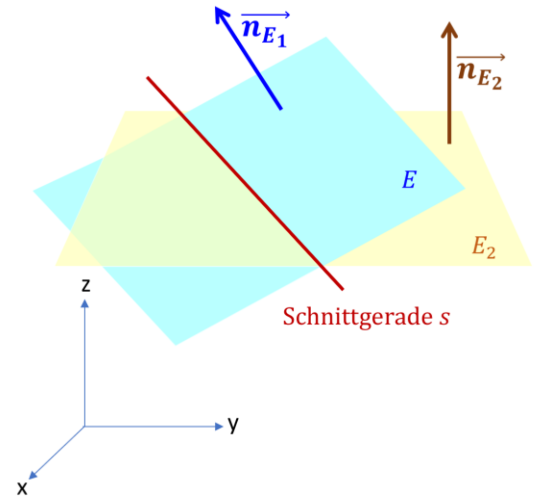
$$\overrightarrow{n_{E_1}} = \lambda \cdot \overrightarrow{n_{E_2}}$$

- Der Punkt A liegt auch auf E_2 bzw. der Punkt B liegt auch auf E_1:

$$A \in E_2 \text{ bzw. } B \in E_1$$

- $E_1 \cap E_2 = \{ E_1 \} = \{ E_2 \}$

E_1 und E_2 **schneiden** einander



- Richtungsvektoren nicht parallel und damit keine Vielfachen voneinander:

$$\overrightarrow{n_{E_1}} \neq \lambda \cdot \overrightarrow{n_{E_2}}$$

- $E_1 \cap E_2 = \{ s \}$

Beispiel: Bestimmen Sie die Schnittmenge der Ebenen $E_1: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $E_2: -x + 3y + 8z = 12.$

Wir verwandeln E_1 in die parameterfreie Form: $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \text{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ Siehe 4.4.7., S 196 f

$$E_1: \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E_1: 5x - y - 5z = -4 \ | \cdot (-1)$$

$$E_1: -5x + y + 5z = 4$$

Die Schnittmenge berechnen wir mit dem Gaußschen Algorithmus: (Siehe 3.2.2.2. S 154 f)

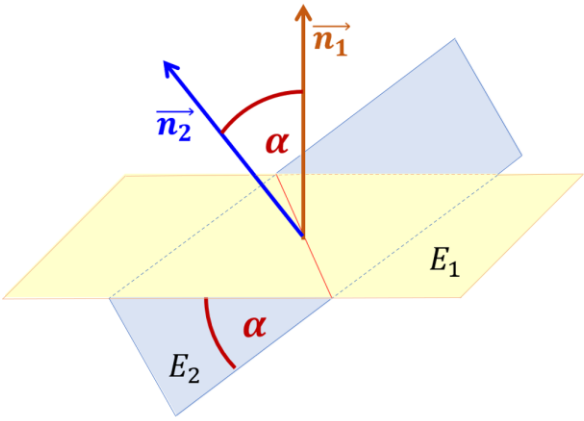
$$\begin{array}{l|rrr|l}
 & x & y & z & \\
\hline
E_1: & -5 & 1 & 5 & 4 \\
E_2: & -1 & 3 & 8 & 12 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array} \quad E_1 - 5 \cdot E_2$$

$$\begin{array}{lrrr|rl}
E_1: & -5 & 1 & 5 & 4 & \rightarrow -5x + 4 - 2.5\,\lambda + 5\lambda = 4 \rightarrow \ x = 0.5\,\lambda \\
E_2: & 0 & -14 & -35 & -56 & \rightarrow \ -14y - 35\,\lambda = -56 \rightarrow \ y = 4 - 2.5\,\lambda \\
 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & \quad z = \lambda
\end{array}$$

$$\begin{aligned} x &= 0 + 0.5\,\lambda \\ y &= 4 - 2.5\,\lambda \\ z &= 0 + 1\ \ \lambda \end{aligned} \qquad \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ -2.5 \\ 1 \end{pmatrix} || \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Schnittmenge beider Ebenen ist die Schnittgerade s: $\left\{ \vec{X} \epsilon \mathbb{R}^3 : \left(\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \wedge \ (\lambda \epsilon \mathbb{R}) \right\}$

4.6.9. Schnittwinkel zweier Ebenen



Hier schließen die beiden Normalvektoren den gleichen Winkel ein, wie die Ebenen.

Beispiel: Berechnen Sie den Schnittwinkel der Ebenen $E_1: 5\,x - y - 5\,z = -4$ und $E_2: -x + 3\,y + 8\,z = 12$.

Zunächst wäre zu zeigen, dass die beiden Ebenen einander schneiden.

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}}{\sqrt{5^2 + 1^2 + 5^2} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2 + 8^2}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{5 \cdot (-1) - 1 \cdot 3 - 5 \cdot 8}{\sqrt{51} \cdot \sqrt{74}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{-48}{\sqrt{51 \cdot 74}}$$

$$\alpha = arccos\left(\frac{-48}{\sqrt{51 \cdot 74}}\right)$$

$$\boldsymbol{\alpha = 141.38°}$$

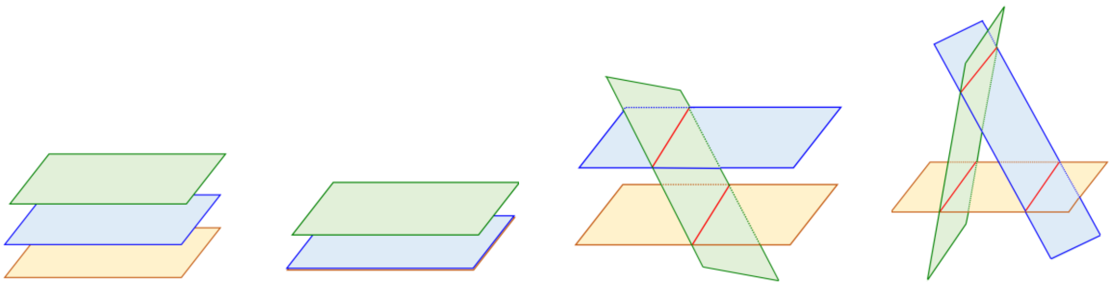
4.6.10. Gegenseitige Lage dreier Ebenen

Auch hier betrachten wir zunächst die Veranschaulichung:

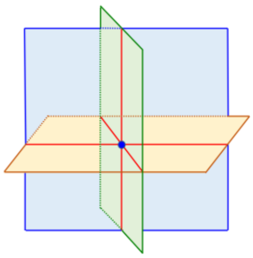
Eine **lineare Gleichung in drei Variablen** stellt geometrisch eine **Ebene** dar.
(Siehe auch 4.6., S 213 f und 3.2.2.1., 153 f)

So bieten sich für 3 lineare Gleichungen in 3 Variablen und damit für 3 Ebenen folgende Lösungsmöglichkeiten:

① 3 Ebenen haben **keinen** Punkt gemeinsam, d.h., die 3 linearen Gleichungen haben **keine** Lösung:

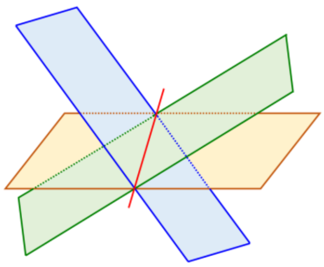


② 3 Ebenen schneiden einander in **einem Punkt**, d.h., die 3 linearen Gleichungen haben genau **eine** Lösung:



③ 3 Ebenen schneiden einander in einer **gemeinsamen Geraden**

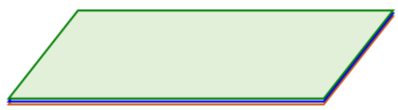
d.h., die 3 linearen Gleichungen haben **unendlich viele** Lösungen: alle Punkte der gemeinsamen Geraden.



Berechnungen siehe 3.2.2.2, S 154 f

④ 3 Ebenen fallen in eine Ebene zusammen

d.h., die 3 linearen Gleichungen haben **unendlich viele** Lösungen: alle Punkte der Ebene:



Beispiel: Die Gerade g sei durch den Punkt P(1/ 1/ 2) und den Vektor $\vec{v} = (0, -2{,}3)^T$ definiert.
Die Ebene E sei gegeben durch die Gleichung $6x + 3y + 2z = 6$.

Bemerkung: $(0, -2{,}3)^T$ bedeutet $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (Siehe auch 5.2.4., S 265)

a) Ermitteln Sie die drei Achsenschnittpunkte (Schnittpunkte von E mit der x-, y- und z-Achse) und eine Parameterform der Ebene E.

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

x-Achse: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

y-Achse: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

z-Achse: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \nu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

x-Achse: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{matrix}$ $\quad E: 6 \cdot \lambda + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 6 \to \boldsymbol{\lambda = 1}$

$\mathbf{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \boldsymbol{S_x(1\,/\,0\,/0)}$

y-Achse: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} x = 0 \\ y = \mu \\ z = 0 \end{matrix}$ $\quad$ E: $6 \cdot 0 + 3 \cdot \mu + 2 \cdot 0 = 6 \to \boldsymbol{\mu = 2}$

$\mathbf{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \boldsymbol{S_y(0\,/2\,/0)}$

z-Achse: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \nu \end{pmatrix} \to \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \nu \end{matrix}$ $\quad$ E: $6 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot \nu = 6 \to \boldsymbol{\mu = 3}$

$3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \boldsymbol{S_z(0\,/0\,/3)}$

Eine Ebene ist durch 3 Punkte eindeutig bestimmt (4.6.1, S 213). Wir suchen 3 Punkte, die auf dieser Ebene liegen.
Das klappt einfach, wenn wir jeweils 2 der drei Koordinaten null setzen:

E: $6\,.\,x + 3\,.\,0 + 2\,.\,0 = 6 \;\rightarrow\; 6x = 6 \rightarrow\; x = 1 \rightarrow\; A(1\,/0\,/0)$

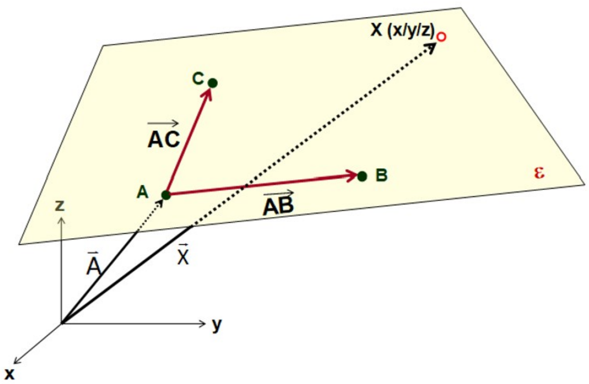
E: $6\,.\,0 + 3\,.\,y + 2\,.\,0 = 6 \;\rightarrow\; 3y = 6 \rightarrow\; y = 2 \rightarrow\; B(0\,/2\,/0)$

E: $6\,.\,0 + 3\,.\,0 + 2\,.\,z = 6 \;\rightarrow\; 2z = 6 \rightarrow\; z = 3 \rightarrow\; C(0\,/0\,/3)$

Bemerkung 1: In diesem Beispiel können wir die Schnittpunkte der Ebene mit den Achsen wählen.

Bemerkung 2: Verkürzt lassen sich die Achsenschnittpunkte so wie oben berechnen.

Bemerkung 3: Ich wählte auf der vorherigen Seite einen ausführlicheren Rechengang, den man benötigt, wenn die Gerade, mit der die Ebene geschnitten werden soll, nicht eine der Achsen ist.



4.6.1, S 214

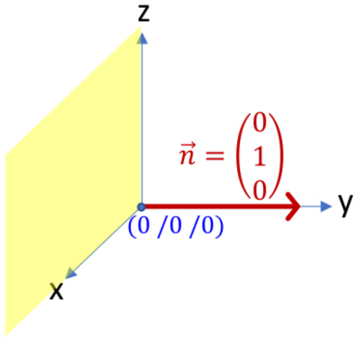
E: $\vec{X} = \vec{A} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{C} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}: \vec{\boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \boldsymbol{r} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \boldsymbol{s} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

b) Ermitteln Sie den Schnittpunkt der Geraden g mit der xz-Ebene.



xz-Ebene in Normalform: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

xz-Ebene in parameterfreier Form: $0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z = 0$
$\boldsymbol{y = 0}$

Bemerkung: Diese Ebenengleichung lässt sich auch durch Überlegen aufstellen: Alle Punkte der xz-Ebene haben $y = 0$.

Entsprechendes gilt für die **xy-Ebene:** $\boldsymbol{z = 0}$ und die **yz-Ebene:** $\boldsymbol{x = 0}$.

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x = 1 + 0 \cdot \lambda \\ y = 1 - 2 \cdot \lambda \\ z = 2 + 3 \cdot \lambda \end{matrix}$$

xz-Ebene: $y = 0 \rightarrow \; 1 - 2 \cdot \lambda = 0 \rightarrow \; \boldsymbol{\lambda = 0.5}$

$$\begin{matrix} x = 1 + 0 \cdot \mathbf{0.5} = 1 \\ y = 1 - 2 \cdot \mathbf{0.5} = 0 \\ z = 2 + 3 \cdot \mathbf{0.5} = 3.5 \end{matrix} \qquad \boldsymbol{S(1\,/0\,/3.5)}$$

Übung

1) a) Ermitteln Sie die Schnittgerade durch die Ebene E_1: $6x + 3y + 2z = 6$ und die Ebene

$$E_2: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) Bestimmen Sie den Schnittwinkel der Geraden $g: \vec{X} = r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und der Ebene E_1.

2) Berechnen Sie den kürzesten Abstand der Geraden $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Tipp: Zuerst die gegenseitige Lage der geraden bestimmen.

3) Zeigen Sie, dass die Ebenen $\varepsilon_1: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \rho \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und

Ebene ε_2 enthält die Geraden $g_1: \vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $g_2: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösungen: 1) a) $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) 29.35°

2) ≈ 1.56 3) ≈ 1.78

4.7. Linearkombination Basis ON-Basen

4.7.1. Linearkombination

Unter einer **Linearkombination (LK)** versteht man einen Vektor, der sich durch gegebene Vektoren unter Verwendung der Vektoraddition und der skalaren Multiplikation ausdrücken lässt.

Beispiel: $\vec{u} = \binom{2}{1}$ $\vec{v} = \binom{-1}{3}$

Der Vektor $\vec{a} = \binom{5}{-1}$ ist eine Linearkombination (LK) der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$, weil

$$\binom{5}{-1} = 2 \cdot \binom{2}{1} - 1 \cdot \binom{-1}{3}$$

Ein Vektor $\vec{a}$ ist die Linearkombination (LK) der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$, wenn sich $\vec{a}$ als die Summe entsprechender Vielfachen der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ darstellen lässt. Man sagt dann auch der Vektor $\vec{a}$ ist linear **ab**hängig von den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

Ist der Vektor $\vec{a}$ linear **ab**hängig von den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$, dann ist auch der Vektor $\vec{u}$ linear **ab**hängig von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{v}$ (also darstellbar durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{v}$) bzw. der Vektor $\vec{v}$ linear **ab**hängig von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{u}$ (also darstellbar durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{u}$).

Beispiel: $\vec{a} = \binom{5}{-1}$ $\vec{u} = \binom{2}{1}$ $\vec{v} = \binom{-1}{3}$

$$\vec{u} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{v}$$

$$\binom{2}{1} = r \cdot \binom{5}{-1} + s \cdot \binom{-1}{3}$$

$$2 = 5\,r - 1\,s$$
$$1 = -1\,r + 3\,s$$

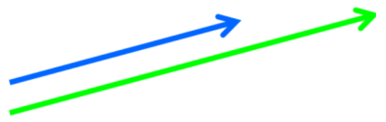
r	s	
5	− 1	2
−1	3	1

I+5·II

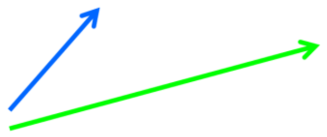
5	− 1	2	$\rightarrow\ 5r - \frac{1}{2} = 2 \ \left|+\frac{1}{2} \rightarrow\ 5r = \frac{5}{2}\right| :5 \rightarrow\ r = \frac{1}{2}$
0	14	7	$\rightarrow\ 14\,s = 7 \,|\, : 14 \rightarrow\ s = \frac{1}{2}$

$\vec{u} = \frac{1}{2} \cdot \vec{a} + \frac{1}{2} \cdot \vec{v}$ Entsprechend kann man feststellen, dass $\vec{v} = -1 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{u}$ ist.

2 Vektoren sind

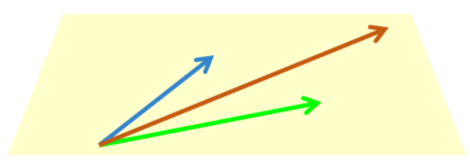


linear abhängig
wenn sie **kollinear** (**parallel**) sind

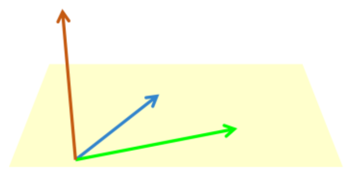


linear UNabhängig
wenn sie **NICHT** kollinear sind

3 Vektoren sind



linear abhängig
wenn sie **komplanar** sind (in einer Ebene liegen)



linear UNabhängig
wenn sie **NICHT** komplanar sind

Vektoren sind also dann **linear abhängig**, wenn sie sich **durch die Summe von Vielfachen der anderen Vektoren darstellen** lassen.

Demnach sind alle Vektoren im $\mathbb{R}^2$ von den Basisvektoren $\vec{\boldsymbol{i}} = \overrightarrow{\boldsymbol{e_1}}$ und $\vec{\boldsymbol{j}} = \overrightarrow{\boldsymbol{e_2}}$ linear **ab**hängig und

im $\mathbb{R}^3$ sind alle Vektoren von den Basisvektoren $\vec{\boldsymbol{i}} = \overrightarrow{\boldsymbol{e_1}}$, $\vec{\boldsymbol{j}} = \overrightarrow{\boldsymbol{e_2}}$ und $\vec{\boldsymbol{k}} = \overrightarrow{\boldsymbol{e_3}}$ linear **ab**hängig. (Siehe 4.3.1., S 174 f)

Verallgemeinert:

Ein Vektor $\vec{v}$ ist eine Linearkombination (LK) der Vektoren $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \ . \ . \ . \ , \overrightarrow{v_n}$, wennn

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \overrightarrow{v_i}$$

mit $c_1, c_2, c_3, \ . \ . \ ., c_n \in \mathbb{R}$

Beispiel: a) Bestimmen Sie die LK $\sum_{i=1}^{3} c_i \cdot \overrightarrow{w_i}$

$$\text{für } c_1 = -2,\ c_2 = 3, c_3 = -1,\ \overrightarrow{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{w_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{w_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{3} c_i \cdot \overrightarrow{w_i} = c_1 \cdot \overrightarrow{w_1} + c_2 \cdot \overrightarrow{w_2} + c_3 \cdot \overrightarrow{w_3} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -10 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b) Gibt es einen Vektor, den Sie sicher **nicht** als LK dieser drei Vektoren anschreiben können?

Z.B.: $$r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die zweite Koordinate des Vektors $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist durch keine Werte für r, s und t zu erhalten, weil:

$0 \cdot r + 0 \cdot s + 0 \cdot t = 0 \neq 1$ ist. Damit kann der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht als Linearkombination der anderen Vektoren dargestellt werden.

c) Bestimmen Sie, wenn möglich, die LK $\sum_{i=1}^{3} c_i \cdot \overrightarrow{w_i}$, die den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ergibt.

Ich setze statt $c_1$den Buchstaben r, statt c_2 s und statt c_3 t:

$$r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lcl}
1\,r - 1\,s + 0\,t = 2 & \rightarrow & r - s = 2 \\
0\,r + 0\,s + 0\,t = 0 & \rightarrow & 0 = 0 \\
3\,r - 1\,s + 1\,t = 1 & \rightarrow & 3\,r - s + t = 1 \\
5\,r + 2\,s + 1\,t = 1 & \rightarrow & 5\,r + 2\,s + t = 1 \\
-1\,r + 1\,s + 1\,t = -1 & \rightarrow & -r + s + t = -1
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c}
r & s & t & \\
\hline
3 & -1 & 1 & 1 \\
5 & 2 & 1 & 1 \\
-1 & 1 & 1 & -1 \\
\hline
3 & -1 & 1 & 1 \\
0 & -11 & 2 & 2 \\
0 & 2 & 4 & -2 \\
\hline
\end{array}$$

$5 \cdot \mathrm{I} + 3.\mathrm{II}$

$\mathrm{I} + 3 \cdot \mathrm{III}$

$2 \cdot \mathrm{I} - \mathrm{II}$

$$\begin{array}{ccc|cl}
3 & -1 & 1 & 1 & r = \frac{3}{8} \\
0 & -11 & 2 & 2 & s = -\frac{1}{4} \\
0 & 0 & 48 & -18 & \rightarrow \quad t = -\frac{3}{8}
\end{array}$$

Eingesetzt in die Gleichung $r - s = 2 \rightarrow \frac{3}{8} - \left(-\frac{1}{4}\right) = 2 \rightarrow \frac{5}{8} = 2$ f.A. $\rightarrow r, s$ keine Lösungen

Damit ist der Vektor $\vec{v}$ keine LK der Vektoren $\vec{w_i}$.

Bezeichnungen:

$< \vec{v_1}, \vec{v_2} >$ Menge **aller** Linearkombinationen, die sich mit den Vektoren $\vec{v_1}$ und $\vec{v_2}$ bilden lassen.

$$< \vec{v_1}, \vec{v_2} >= \{ \vec{v} = c_1 \cdot \vec{v_1} + c_2 \cdot \vec{v_2} : \ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \}$$

$< \vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots\dots\dots, \vec{v_n} >$ Menge **aller** Linearkombinationen, die sich mit den Vektoren $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots\dots, \vec{v_n}$ bilden lassen.

$$< \vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots\dots\dots, \vec{v_n} >= \{ \vec{v} = c_1 \cdot \vec{v_1} + c_2 \cdot \vec{v_2} + \cdots + c_n \cdot \vec{v_n} : c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R} \}$$

Bemerkung: Man findet auch für das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{v_1}$ und $\vec{v_2}$ die Bezeichnung $< \vec{v_1}, \vec{v_2} >$.

4.7.2. Lineare Hülle (span)

span [23] … lineare Hülle: Die lineare Hülle besteht aus **allen** möglichen Linearkombinationen, die mit gegebenen Vektoren gebildet werden können.

oder: Menge **aller** Linearkombinationen, die sich mit den Vektoren $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots\ldots, \vec{v_n}$ bilden lassen.

$$\text{span}(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \;\ldots, \vec{v_n}) = \,<\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots\ldots, \vec{v_n}>$$

$$= \{c_1 \cdot \vec{v_1} + c_2 \cdot \vec{v_2} + c_3 \cdot \vec{v_3} + \ldots + c_n \cdot \vec{v_n} \;:\; c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n \in \mathbb{R}\}$$

Beispiel: Mit dem Vektor $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ lassen sich alle zu diesem Vektor parallelen Vektoren, die Vielfache des gegebenen Vektors sind, darstellen. Diese Menge an Vektoren bilden die Lineare Hülle:

$$\text{Span}(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}) = \,<\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}>\, = \left\{c \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} : c \in \mathbb{R}\right\}$$

#

Beispiel: Ist $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \in \text{span}(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix})$?

Wenn $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ aus dem gegebenen span ist, dann muss $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ gelten.

$$-1 = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot (-1)$$
$$1 = c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot (-1)$$

$$1 \cdot c_1 - 1 \cdot c_2 = -1$$
$$2 \cdot c_1 - 1 \cdot c_2 = 1$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{array} \quad \boxed{2 \cdot \text{I} - \text{II}}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} 1 \cdot c_1 - 1 \cdot 3 = -1 \\ -1 \cdot c_2 = -3 \;|\; : (-1) \end{array} \qquad \begin{array}{l} \boldsymbol{c_1 = 2} \\ \boldsymbol{c_2 = 3} \end{array}$$

Demnach ist $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \mathbf{2} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \mathbf{3} \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ und damit ist $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \in \text{span}(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix})$.

[23] to span (englisch): aufspannen. Im Deutschen: Spann

4.7.3. Basis & Dimension eines Vektorraumes

$<\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}> = \text{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ des Vektorraums $\mathbb{R}^3$, denn mit diesen Vektoren lassen sich alle Vektoren des $\mathbb{R}^3$ als entsprechende LK darstellen.

Beispiel: $\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix} = -2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Allgemein: Für $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ mit $x, y, z \in \mathbb{R}$ ist $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = x\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + z\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Man sagt, $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ ist ein Erzeugenden-System (ES) des Vektorraums $\mathbb{R}^3$, weil mit diesen drei Vektoren **alle** Vektoren des $\mathbb{R}^3$ durch entsprechende LK erzeugt werden können.

Verallgemeinernd lässt sich formulieren:

$\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \ . \ . \ . \ \overrightarrow{v_m}$ ist ein Erzeugenden-System (ES) $:\Leftrightarrow$ span$(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \ . \ . \ . \ \overrightarrow{v_m}) = \mathbb{R}^n$

… wenn der span **alle** Vektoren des Vektorraumes $\mathbb{R}^n$ erzeugt.

oder: Eine Menge von Vektoren heißt Erzeugendensystem (ES), wenn man mit ihnen **alle** Vektoren eines Vektorraumes durch Linearkombination erzeugen kann.

Beispiel: Ist $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$ auch ein Erzeugenden-System (ES) des $\mathbb{R}^3$?

Ja, denn wenn sich schon mit den ersten drei Vektoren jeder Vektor im $\mathbb{R}^3$ erzeugen lässt, dann doch auch mit vier Vektoren.

Beispiel: Ist $\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ auch ein Erzeugenden-System (ES) des $\mathbb{R}^3$?

Ja, denn für $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ mit $x, y, z \in \mathbb{R}$ ist $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{x}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + z\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Wie man sich vorstellen kann, gibt es unzählige ES für den $\mathbb{R}^3$.

Aber: Während es mit dem Erzeugenden-System (ES) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ jeweils genau ***eine*** LK gibt, mit der ein Vektor des $\mathbb{R}^3$ darstellbar ist,

gibt es mit dem ES $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$ ***mehr als eine*** LK:

Beispiel: $\begin{pmatrix}-4\\3\\1\end{pmatrix} = -4\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

oder: $\begin{pmatrix}-4\\3\\1\end{pmatrix} = -2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 7\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 7\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

. . . .

Somit ist (z.B.) der Vektor $\begin{pmatrix}-4\\3\\1\end{pmatrix}$ **nicht** durch eine **ein**deutige LK darstellbar.

Mit dem ES $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ ist deshalb jeder Vektor des $\mathbb{R}^3$ eindeutig darstellbar, weil die Vektoren

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ selbst linear **un**abhängig, also gegenseitig nicht durch Linearkombinationen darstellbar sind.

Wenn Vektoren ein Erzeugenden-System (ES) darstellen **und** linear **un**abhängig sind, spricht man von einer Basis.

Die Basis ist das kleinstmögliche ES. Sie besteht aus so vielen linear **un**abhängigen Vektoren, wie mindestens notwendig sind, um den gesamten Vektorraum aufzuspannen (zu erzeugen).

Das formale

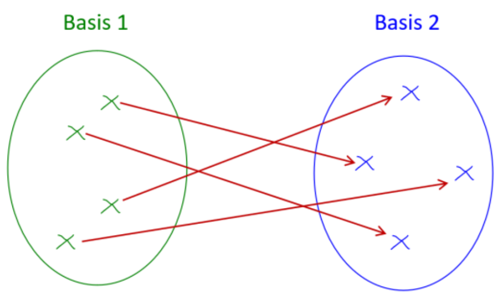
Kriterium für eine Basis: $$\boxed{(m = n) \wedge \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \vec{v_i} = \vec{o} \implies c_1 = c_2 = \ldots\ c_n = 0\right)}$$

Das bedeutet: Die LK der Vektoren $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \ \ldots\ , \vec{v_n}$ kann nur dann den Nullvektor $\vec{o}$ ergeben, wenn die Koeffizienten der Vektoren alle Null sind. Das ist eine Eigenschaft linear **un**abhängiger Vektoren.

Wenn einer Basis ein weiterer Vektor hinzugefügt wird, so bleibt es weiterhin ein ES, ist aber keine Basis mehr.

Ohne Beweis sei angeführt:

- Jeder Vektorraum besitzt mindestens eine Basis.
- Besitzt ein Vektorraum zwei Basen, so lässt sich zwischen diesen eine Bijektion (eine bijektive Abbildung – (siehe 7.2.4.1., S 334 f) herstellen.



Das bedeutet, dass jede Basis gleich viele Basis-Vektoren besitzen muss.

Die Standardbasis (Kanonische Basis) für den $\mathbb{R}^3$ lautet: $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

und für den $\mathbb{R}^n$: $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\\dots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\\dots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\\dots\\0\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\\dots\\1\end{pmatrix}\right\}$ mit n Vektoren und n Spalten

Die Anzahl der Basisvektoren ist gleich der Dimension $\dim(V)$ des Vektorraums V.

$\dim(\mathbb{R}^{\mathbf{3}}) = \mathbf{3}$ Die Dimension $\mathbf{3}$ bedeutet, dass die Basis aus $\mathbf{3}$ linear **un**abhängigen Vektoren besteht.

$\dim(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}) = \boldsymbol{n}$ Die Dimension $\boldsymbol{n}$ bedeutet, dass die Basis aus $\boldsymbol{n}$ linear **un**abhängigen Elementen besteht.

Beispiel im $\mathbb{R}^2$: Ein mögliches ES = $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right)$

Mit diesen 3 Vektoren lassen sich alle Vektoren des $\mathbb{R}^2$ darstellen. Diese Vektoren sind paarweise linear unabhängig. Sie stellen also eine lineare Hülle (span) für den $\mathbb{R}^2$ dar.

$$\text{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right) = \{ c_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \}$$

Man kann also mit dieser linearen Hülle **alle** Vektoren im $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$ darstellen, nötig sind aber nur **2** linear **un**abhängige Vektoren, z.B. $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Das ist dann die Basis und die beiden Vektoren die sogenannten Basisvektoren. Die Dimension dieses Vektorraums ist somit $\dim(V) = \mathbf{2}$

Überprüfung mit dem Kriterium $\quad (m = n) \wedge \left(\sum^{n} c_i \cdot \vec{v_i} = 0 \implies c_1 = c_2 = \ldots \; c_n = 0 \right)$

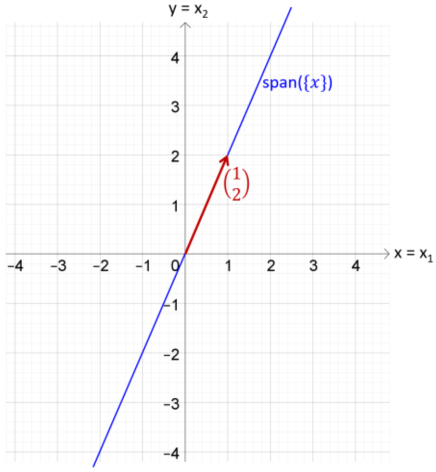
$$c_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{array}{lllll} 1\,c_1 & + & 0\,c_2 & = 0 \;\rightarrow & c_1 = 0 \\ 0\,c_1 & + & 1\,c_2 & = 0 \;\rightarrow & c_2 = 0 \end{array}$$

Die Basis besteht immer aus $\boldsymbol{n}$ Vektoren, wenn die Dimension $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ ist, das ES kann aus m Vektoren bestehen, wobei $\boldsymbol{m} > \boldsymbol{n}$ ist.

Beispiel im $\mathbb{R}^2$:

Es sei $x = (1,2)^T \in \mathbb{R}^2$. $\{x\}$ ist dann eine Teilmenge des Vektorraums $\mathbb{R}^2$.



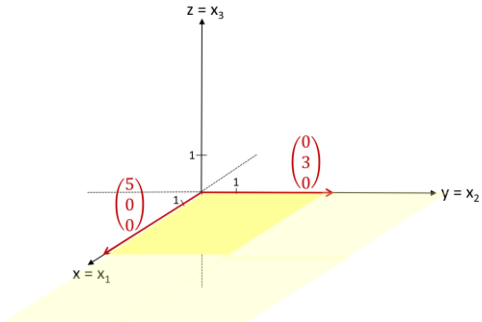
span($\{x\}$) = span$\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}\right) = \left\{r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} : r \in \mathbb{R}\right\}$

Diese lineare Hülle ist eine Gerade durch den Koordinatenursprung mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

Dieser span ist kein ES des $\mathbb{R}^2$, weil sich mit dem Vektor $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ nicht alle Vektoren des $\mathbb{R}^2$ durch LK darstellen lassen, sondern nur jene entlang der Geraden $r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

Beispiel im $\mathbb{R}^2$:

Es seien $(5,0,0)^T$ und $(0,3,0)^T$ zwei Vektoren des Vektorraums $\mathbb{R}^3$.

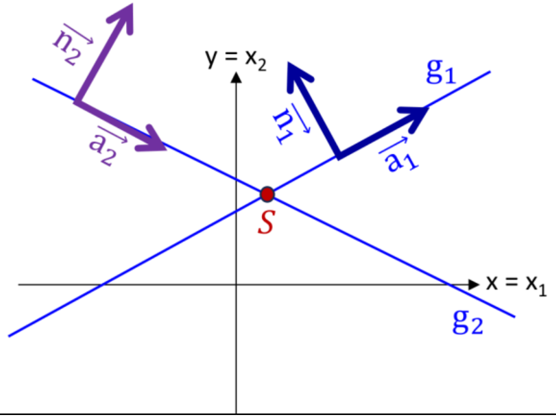
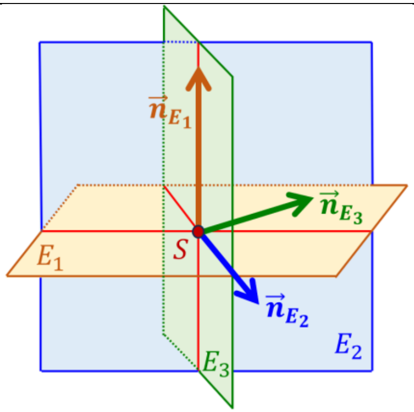


$$\text{span}\left(\left\{\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}\right\}\right) = \left\{\lambda\cdot\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} : \lambda,\mu \in \mathbb{R}\right\}$$

Diese lineare Hülle beschreibt die xy-Ebene und ist kein ES des $\mathbb{R}^3$, weil damit alle Vektoren des $\mathbb{R}^3$ erzeugt werden können, sondern nur jene in der xy-Ebene $\lambda\cdot\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$ oder anders dargestellt

$\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ oder anders dargestellt: $z = 0$.

Zusammenhang zwischen **Linearer Unabhängigkeit**, **Lösungsmengen** und **Rang von Matrizen** anhand von $\mathbb{R}^2$- und $\mathbb{R}^3$-Beispielen:

Vektorraum	Grafisches Beispiel	Lineare (Un-) Abhängigkeit	Lösungsmenge	Matrix-Ränge (siehe 5.2.7., S 276 f)
$\mathbb{R}^2$		Die **Richtungsvektoren** bzw. **Normalvektoren** der Geraden sind **linear unabhängig**, weil gegenseitig nicht darstellbar.	**eindeutig** (Koordinaten des Schnittpunktes)	**Rg(A) = Rg(a|b) = 2**
$\mathbb{R}^3$		Die **Normalvektoren** der Ebenen sind **linear unabhängig**, weil gegenseitig nicht darstellbar.	**eindeutig** (Koordinaten des Schnittpunktes)	**Rg(A) = Rg(A|b) = 3**

Beispiel: 1) Sind folgende Vektoren linear unabhängig?
2) Bilden Sie ein ES von $\mathbb{R}^3$?
3) Bilden Sie eine Basis von $\mathbb{R}^3$?
4) Falls sie ein ES bilden, aber keine Basis, wählen Sie eine Basis von $\mathbb{R}^3$aus.
5) Geben Sie die Dimension diese Vektorraums an.
6) Schreiben Sie die Koordinaten des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Linearkombination dieser Vektoren an, falls möglich.

$$\vec{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{w_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{w_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1) 2) 3) Basis-Kriterium:

$$c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1\,c_1 + 1\,c_2 + 0\,c_3 &= 0 \quad \to c_1 + c_2 = 0 \\ 0\,c_1 + 1\,c_2 + 1\,c_3 &= 0 \quad \to c_2 + c_3 = 0 \\ 1\,c_1 + 0\,c_2 + 1\,c_3 &= 0 \quad \to c_1 + c_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & c_3 & \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \quad \boxed{\mathrm{I} - \mathrm{III}}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \quad \boxed{\mathrm{II} - \mathrm{III}}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & \to & c_1 = \mathbf{0} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \to & c_2 = \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \to & c_3 = \mathbf{0} \end{array}$$

Die Vektoren $\vec{w_1}$, $\vec{w_2}$, $\vec{w_3}$ stellen eine **Basis** von $\mathbb{R}^3$ dar. Somit sind die Kriterien von 1) ,2), 3) und 4) erfüllt.

5) Die Dimension des Vektorraums ist $\dim(V) = \mathbf{3}$ ... die Anzahl der basis-vektoren

6) $$c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & c_3 & \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \boxed{\mathrm{I} - \mathrm{III}} \to \begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & c_3 & \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \boxed{\mathrm{II} - \mathrm{III}} \to \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 3 & \to & c_1 = 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \to & c_2 = 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \to & c_3 = 0 \end{array}$$

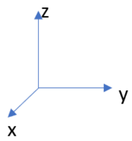
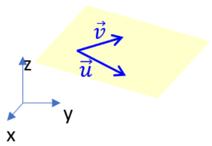
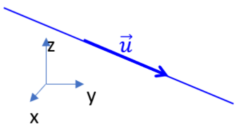
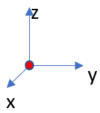
$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Welche Dimension besitzt der Vektorraum, der nur aus dem Nullvektor besteht? $V = \left\{ \vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\dim(\vec{o}) = \mathbf{0}$, weil der Nullvektor **nicht** linear **un**abhängig ist. $\vec{o}$ ist nämlich durch alle beliebige Vielfache von sich selbst darstellbar und somit linear abhängig. Damit ist die Basis $= \{\ \}$.

$V = \{\vec{o}\}$ ist der einzige Vektorraum mit der Dimension null.

Hier eine kleine Übersicht:

Vektorraum	Beispiel	Basis	Dimension
$\mathbb{R}^3$ 		$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$	3
Ebene 	$\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$	2
Gerade 	$\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$	1
Nullvektor 	$\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\{\ \}$	0

Übung

Ermitteln Sie von folgenden Vektorräumen
(a) eine Basis
(b) die Dimension

1) $\vec{X} = \binom{2}{1} + t \cdot \binom{1}{2}$

2) $\vec{X} = \binom{2}{1} + t \cdot \binom{1}{2} + s \cdot \binom{2}{-1}$

3) $\vec{X} = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

4) $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

5) $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösungen: 1) Eine Gerade im $\mathbb{R}^2$, die durch den Richtungsvektor erzeugt wird. (a) $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$ (b) 1

2) Eine Gerade im $\mathbb{R}^2$, die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ sind linear **un**abhängig

(a) $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\right\}$

(b) 2

3) Eine Gerade im $\mathbb{R}^3$, die durch den Richtungsvektor $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ erzeugt wird. (a) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ (b) 1

4) Eine Ebene im $\mathbb{R}^3$. Es sind nur zwei der Richtungsvektoren notwendig. (a) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$ (b) 2

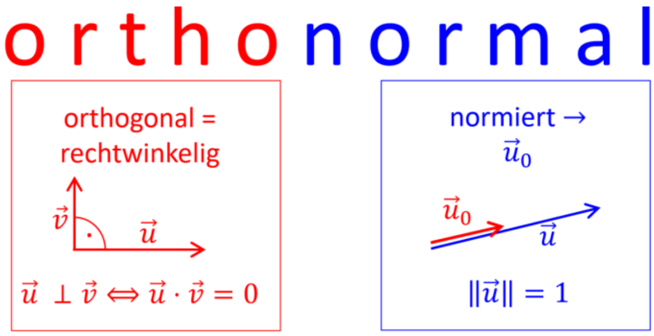
5) Nullvektor. Siehe Tabelle oben.

Fassen wir zusammen:

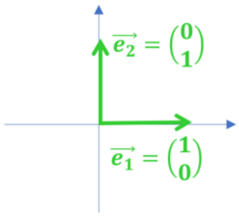
Span (lineare Hülle):	**Alle möglichen LK**, die sich aus gegebenen Vektoren bilden lassen.
Erzeugendensystem (ES):	Wenn alle möglichen LK, die sich aus gegebenen Vektoren bilden lassen, **alle** Vektoren des Vektorraums erzeugen. Also ein span, der **alle** Vektoren eines Vektorraums erzeugt.
Basis:	Ein ES, das nur aus linear **un**abhängigen Vektoren besteht.
Dimension:	Die Anzahl der Basisvektoren.

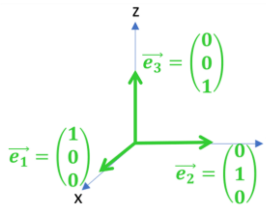
4.7.4. Orthonormal-Basen (ONB)

Eine Orthonormal – Basis (ONB) besteht aus Basisvektoren, die orthogonal zueinander sind und normiert.



Klassische ONB sind die Standard-Basen (Kanonische Basen) des $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$.





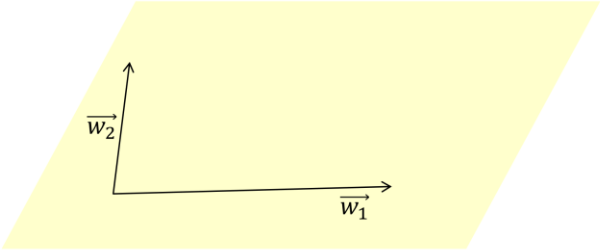
Beispiel: Stellen Sie mit den Vektoren $\overrightarrow{w_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{w_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine ONB auf.

Zunächst gilt es zu überprüfen, ob $\overrightarrow{w_1}$ und $\overrightarrow{w_2}$ eine Basis bilden, ob also $\overrightarrow{w_1}$ und $\overrightarrow{w_2}$ linear **un**abhängig sind.

$$\overrightarrow{w_1} = t \cdot \overrightarrow{w_2}: \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} 3 &= 2t \rightarrow \quad t = 1.5 \\ 1 &= 2t \rightarrow \quad t = 0.5 \\ 2 &= 2t \rightarrow \quad t = \ \ 1 \end{aligned}$$

Da die Werte für t nicht gleich sind, sind die Vektoren keine Vielfachen voneinander und damit linear unabhängig.

$\overrightarrow{w_1}$ und $\overrightarrow{w_2}$ bilden somit eine Basis.

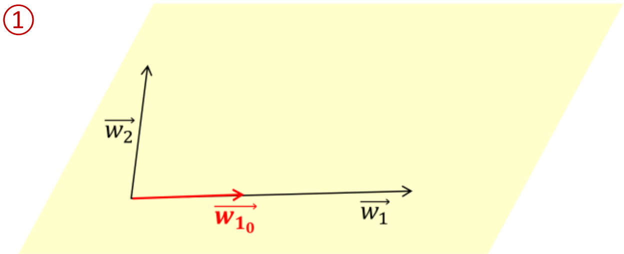


Derzeit stehen die Vektoren $\overrightarrow{w_1}$ und $\overrightarrow{w_2}$ weder aufeinander normal, noch besitzen sie den Betrag 1:

$$\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = 3\cdot 2+1\cdot 2+2\cdot 2 = 12 \neq 0$$

$$\|\overrightarrow{w_1}\| = \sqrt{3^2+1^2+2^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$
$$\|\overrightarrow{w_2}\| = \sqrt{2^2+2^2+2^2} = \sqrt{12}$$

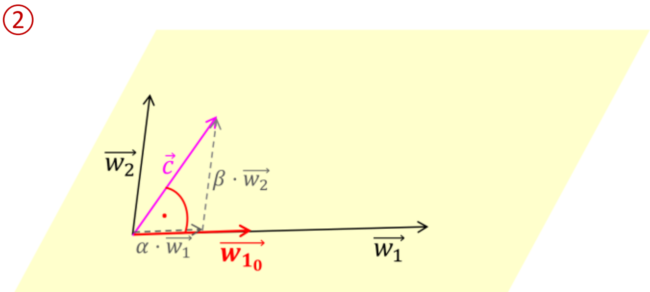
①



Bilden wir zunächst den normierten Vektor (den Einheitsvektor) von $\overrightarrow{w_1}$:

$$\overrightarrow{w_{1_0}} = \frac{1}{\|\overrightarrow{w_1}\|}\cdot\overrightarrow{w_1} = \frac{1}{\sqrt{14}}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$$

②



Wir benötigen noch einen Vektor $\vec{c}$, der wiederum in der Ebene liegt, den die Basisvektoren $\overrightarrow{w_1}$ und $\overrightarrow{w_2}$ aufspannen (1) und der auf $\overrightarrow{w_1}$ (und damit auch auf $\overrightarrow{w_{1_0}}$) normal steht (2).

(1) Wenn $\vec{c}$ auch in der Ebene von $\overrightarrow{w_1}$ und $\overrightarrow{w_2}$ liegen soll, dann kann er als Linearkombination von $\overrightarrow{w_1}$ und $\overrightarrow{w_2}$ dargestellt werden:

$$\boldsymbol{\vec{c} = \alpha\cdot\overrightarrow{w_1} + \beta\cdot\overrightarrow{w_2}}$$

(2) Wenn $\vec{c}$ auf $\overrightarrow{w_1}$ normal stehen soll, dann muss ihr Skalarprodukt null sein: $\vec{c}\cdot\overrightarrow{w_1} = \mathbf{0}$

Für $\vec{c}$ den Ausdruck von (1) eingesetzt: $(\boldsymbol{\alpha}\cdot\overrightarrow{w_1}+\boldsymbol{\beta}\cdot\overrightarrow{w_2})\cdot\overrightarrow{w_1} = 0$

$$\alpha\cdot\overrightarrow{w_1}\cdot\overrightarrow{w_1}+\beta\cdot\overrightarrow{w_2}\cdot\overrightarrow{w_1} = 0$$

$$\alpha\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} = 0$$

$$\alpha\cdot 14+\beta\cdot 12 = 0 \quad |-14\,\alpha$$

$$12\,\beta = -14\,\alpha \quad |:12$$

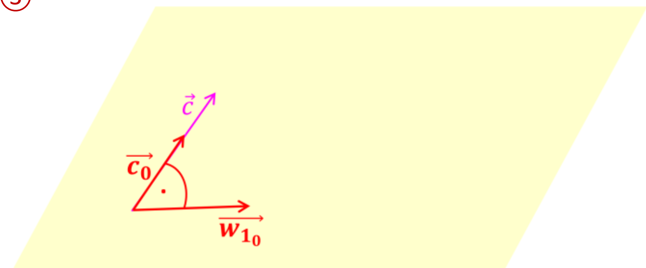
$$\beta = -\frac{7}{6}\,\alpha$$

Diese Gleichung besitzt unendlich viele Lösungen, nämlich alle reellen Zahlen für α. Zum Beispiel $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{6}$ (das lässt sich gut kürzen). Damit ergibt sich für $\boldsymbol{\beta} = -\frac{7}{6}\cdot\ 6 = -\mathbf{7}$

$\vec{c}$ berechnet sich dann so:

$$\vec{c} = \boldsymbol{\alpha}\cdot\overrightarrow{w_1}+\boldsymbol{\beta}\cdot\overrightarrow{w_2} = \mathbf{6}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}-\mathbf{7}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}18\\6\\12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}14\\14\\14\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{4}\\\mathbf{-8}\\\mathbf{-2}\end{pmatrix}$$

3



Abschließend benötigen wir noch den Einheitsvektor von $\vec{c}$ zu bilden:

$$\|\vec{c}\| = \sqrt{4^2 + (-8)^2 + (-2)^2} = \sqrt{84} = 2 \cdot \sqrt{21}$$

(2.2.2, S 80)

$$\vec{c_0} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{21}} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Somit lautet eine ONB der Vektoren $\vec{w_1}$ und $\vec{w_2}$ $\left\{ \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{2 \cdot \sqrt{21}} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

Hier wurde das Gram – Schmidt – Verfahren[24] verwendet:

1 Vektor $\vec{w_1}$ normalisieren

2 Vektor $\vec{w_2}$ orthogonalisieren

3 Vektor $\vec{w_2}$ normalisieren

Beispiel: Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{b_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ und $\vec{b_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ eine ONB von $\mathbb{R}^2$ bilden.

1) orthogonal? $\vec{b_1} \cdot \vec{b_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

normiert? $\|\vec{b_1}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$

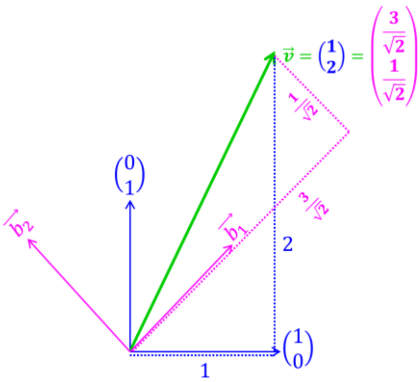
$$\|\vec{b_2}\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

[24] Jørgen Pedersen GRAM (1850 – 1916), dänischer Mathematiker, Erhard SCHMIDT (1876 – 1959), deutscher Mathematiker

Geben Sie die Koordinaten des Vektors $\vec{v} = \binom{1}{2}$ bezüglich dieser ONB an.

$$\boldsymbol{v_1} = \vec{v} \cdot \overrightarrow{b_1} = \binom{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\boldsymbol{v_2} = \vec{v} \cdot \overrightarrow{b_2} = \binom{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = -1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



Warum rechnet man so?

Das zeigt sich leicht im ONB $\left\{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\right\}$ zeigen: $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$: $v_1 = \binom{1}{2} \cdot \binom{1}{0} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 1$

$$v_2 = \binom{1}{2} \cdot \binom{0}{1} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2$$

Beispiel: Stellen Sie mit den Vektoren $\overrightarrow{w_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{w_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{w_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine ONB auf.

Dabei werden die ortho**gon**albasierten Vektoren wie folgt bestimmt:

$$\boxed{\overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{w_n} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\overrightarrow{v_i} \cdot \overrightarrow{w_n}}{\overrightarrow{v_i} \cdot \overrightarrow{v_i}} \cdot \overrightarrow{v_i}}$$

orthogonal bedeutet, dass wir zunächst die Vektoren bestimmen, die im rechten Winkel aufeinander stehen.
Im Anschluss sind die Vektoren dann noch zu normieren.

Die Anwendung der oberen Formel sieht komplizierter aus, als es ist:

$$\boldsymbol{\vec{v_1}} = \vec{w_1} = \begin{pmatrix}\mathbf{3}\\ \mathbf{4}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\vec{v_2}} = \vec{w_2} - \frac{\vec{v_1}\cdot\vec{w_2}}{\vec{v_1}\cdot\vec{v_1}}\cdot\vec{v_1} = \begin{pmatrix}-3\\-4\\2\end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\-4\\2\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-4\\2\end{pmatrix} - \frac{-25}{25}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-4\\2\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-3\\-4\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} = 3\cdot(-3) +\cdot 4\cdot(-4) + 0\cdot 2 = -25$$

$$\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} = 3\cdot 3 + 4\cdot 4 + 0\cdot 0 = 25$$

$$\boldsymbol{\vec{v_3}} = \vec{w_3} - \frac{\vec{v_1}\cdot\vec{w_3}}{\vec{v_1}\cdot\vec{v_1}}\cdot\vec{v_1} - \frac{\vec{v_2}\cdot\vec{w_3}}{\vec{v_2}\cdot\vec{v_2}}\cdot\vec{v_2} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{7}{25}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} - \frac{2}{4}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{21}{25}\\ \frac{28}{25}\\ 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{\frac{4}{25}}\\ -\mathbf{\frac{3}{25}}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 3\cdot 1 +\cdot 4\cdot 1 + 0\cdot 1 = 7 \qquad \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0\cdot 1 +\cdot 0\cdot 1 + 2\cdot 1 = 2$$

$$\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} = 3\cdot 3 + 4\cdot 4 + 0\cdot 0 = 25 \qquad \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} = 0\cdot 0 +\cdot 0\cdot 0 + 2\cdot 2 = 4$$

Damit lautet ein Orthogonalsystem $\left\{\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{4}{25}\\ -\frac{3}{25}\\ 0\end{pmatrix}\right\}$

Bleibt noch, diese Vektoren zu normieren (aus ihnen Einheitsvektoren zu machen).

$$\overrightarrow{u_1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{u_2} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{u_3} = 5 \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{25} \\ -\frac{3}{25} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ -0.6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|\overrightarrow{u_1}\| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = 5 \qquad \|\overrightarrow{u_2}\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2} = 2 \qquad \|\overrightarrow{u_3}\| = \sqrt{\left(\frac{4}{25}\right)^2 + \left(\frac{-3}{25}\right)^2 + 0^2} = \frac{1}{5}$$

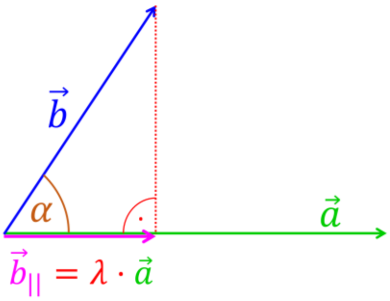
Die **ONB** lautet $\left\{ \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.8 \\ -0.6 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

https://www.youtube.com/watch?v=oJkqxWrQM88

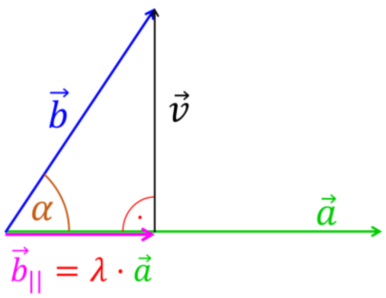
4.7.5. Orthogonale Projektion [25]

4.7.5.1. Orthogonale Projektion eines Vektors auf einen Vektor

Wie lässt sich die orthogonale Projektion $\overrightarrow{b_{||}}$ eines Vektors $\vec{b}$ auf einen Vektor $\vec{a}$ berechnen?



Der Vektor $\overrightarrow{b_{||}}$ ist ein Vielfaches (ein λ-faches) des Vektors $\vec{a}$.

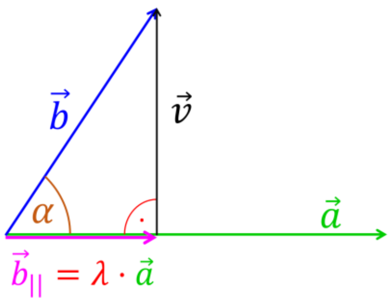


Zeichnen wir den Vektor $\vec{v}$ wie dargestellt ein.

Laut Vektoraddition gilt: $\overrightarrow{b_{||}} + \vec{v} = \vec{b}$

$$\lambda \cdot \vec{a} + \vec{v} = \vec{b} \quad | -\lambda \cdot \vec{a}$$

$$\vec{v} = \vec{b} - \lambda \cdot \vec{a}$$



Weiters muss das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{v}$ gleich Null sein, weil diese Vektoren orthogonal sind.

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} - \lambda \cdot \vec{a}) = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} - \lambda \cdot \vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \quad | - \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$-\lambda \cdot \vec{a} \cdot \vec{a} = -\vec{a} \cdot \vec{b}$$

Allgemein gilt:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_2 + \ldots + a_n \cdot a_n = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = \|\vec{a}\|^2$$

[25] Orthogonalprojektionen besitzen vielfältige Einsatzbereiche innerhalb der Mathematik, beispielsweise in der Darstellenden Geometrie, der FOURIER-Analysis oder der Bestapproximation. Sie besitzen Anwendungen unter anderem in der Kartografie, der Architektur, der Computergrafik und der Physik.

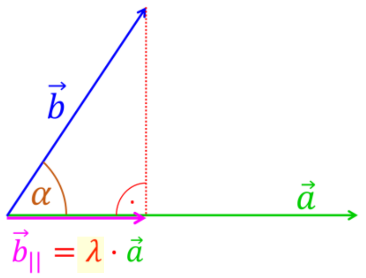
Denn $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} \quad |\,^2$

$$\|\vec{a}\|^2 = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2$$

$$-\lambda \cdot \|\vec{a}\|^2 = -\vec{a} \cdot \vec{b} \quad | : \|\vec{a}\|^2$$

$$-\lambda = \frac{-\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2} \quad | \cdot (-1)$$

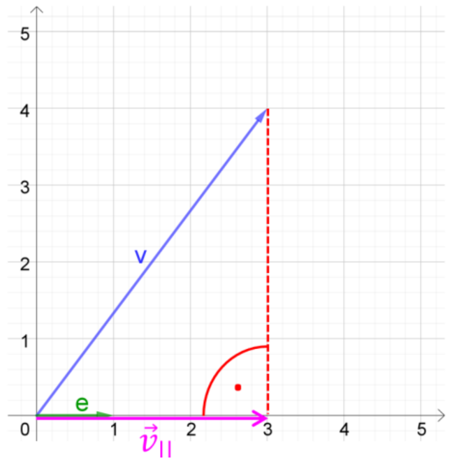
$$\lambda = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2}$$



$$\boxed{\overrightarrow{b_{||}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2} \cdot \vec{a}}$$

Die orthogonale Projektion des Vektors $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$ wird auch als Komponente des Vektors $\vec{b}$ in Richtung des Vektors $\vec{a}$ bezeichnet.

Beispiel: Bestimmen Sie die orthogonale Projektion $\overrightarrow{v_{||}}$ des Vektors $\vec{v} = \binom{3}{4}$ in Richtung des Vektors $\vec{e} = \binom{1}{0}$



Dem Diagramm entnommen, ist $\overrightarrow{v_{||}} = \binom{3}{0}$

Die Berechnung: $\overrightarrow{v_{||}} = \frac{\vec{e} \cdot \vec{v}}{\|\vec{e}\|^2} \cdot \vec{e}$

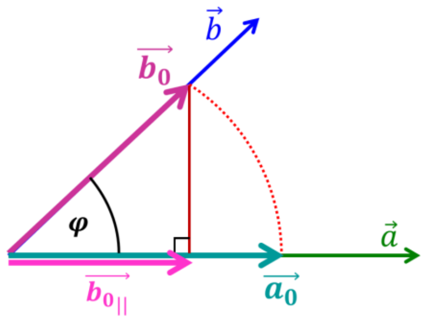
$$\overrightarrow{v_{||}} = \frac{\binom{1}{0} \cdot \binom{3}{4}}{1^2 + 0^2} \cdot \binom{1}{0}$$

$$\overrightarrow{v_{||}} = \frac{3+0}{1} \cdot \binom{1}{0} = 3 \cdot \binom{1}{0} = \binom{3}{0}$$

Beispiel: Bestimmen Sie die orthogonale Projektion $\overrightarrow{\boldsymbol{w}_{||}}$ des Vektors $\vec{w} = (-7,2,1,-6)$ in Richtung des Vektors $\vec{u} = (-2,1,2,0)$

$$\overrightarrow{w_{||}} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\|\vec{u}\|^2}\cdot\vec{u} = \frac{-2\cdot(-7)+1\cdot2+2\cdot1+0\cdot(-6)}{(-2)^2+1^2+2^2+0^2}\cdot\vec{u} = \frac{-14+2+2+0}{4+1+4+0}\cdot\vec{u} = \frac{-10}{9}\cdot\vec{u} = -\frac{10}{9}\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{20}{9}\\-\frac{10}{9}\\-\frac{20}{9}\\0\end{pmatrix}$$

Wird ein Einheitsvektor auf einen Einheitsvektor projiziert, dann gilt:



Das Skalarprodukt ist unter anderem definiert als

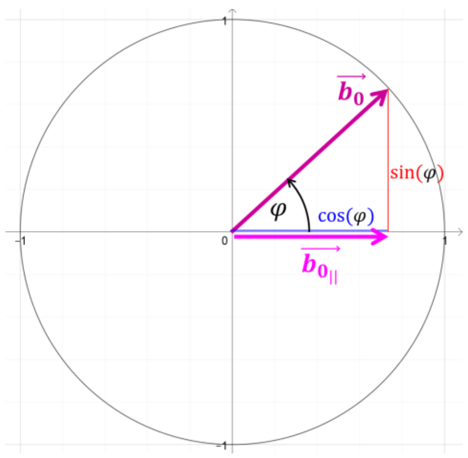
$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\left\|\overrightarrow{v_{||}}\right\| = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos(\varphi)$ (4.4.6., S 191 f)

Somit gilt hier

$$\overrightarrow{a_0}\cdot\overrightarrow{b_0} = \underbrace{\|\overrightarrow{a_0}\|}_{=1}\cdot\left\|\overrightarrow{b_{0_{||}}}\right\| = \underbrace{\|\overrightarrow{a_0}\|}_{=1}\cdot\underbrace{\|\overrightarrow{b_0}\|}_{=1}\cdot\cos(\varphi)$$

Also ist $\left\|\overrightarrow{b_{0_{||}}}\right\| = \cos(\varphi)$ und $\overrightarrow{\boldsymbol{b}_{0_{||}}} = \boldsymbol{\cos(\varphi)\cdot\overrightarrow{a_0}}$

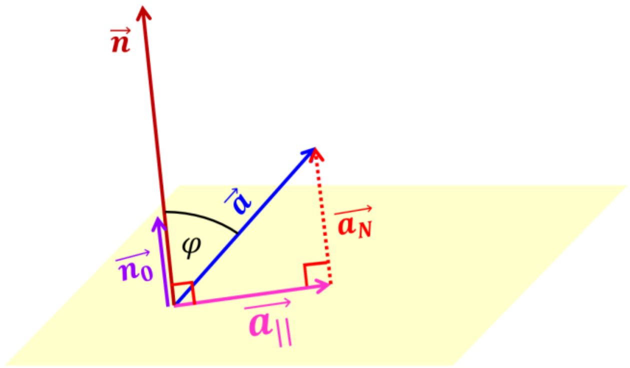
Man kann's auch so erklären:



Da $\overrightarrow{b_0}$ ein Einheitsvektor ist, besitzt er den Betrag 1.

Damit befinden wir uns im Einheitskreis und $\overrightarrow{b_{0_{||}}}$ ist der cos, den $\overrightarrow{b_0}$ und $\overrightarrow{a_0}$ miteinander einschließen.

4.7.5.2. Orthogonale Projektion eines Vektors auf eine Ebene

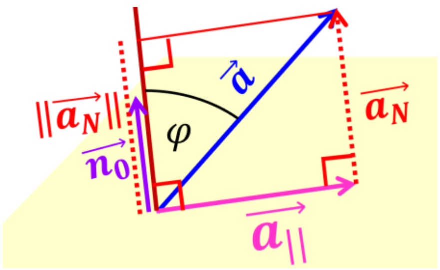


Überlegungen:

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_{||}} + \overrightarrow{a_N}$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_{||}} + \overrightarrow{a_N} \mid -\overrightarrow{a_N}$$

$$\vec{a} - \overrightarrow{a_N} = \overrightarrow{a_{||}}$$



$$\vec{a} \cdot \overrightarrow{n_0} = \|\vec{a}\| \cdot \|\overrightarrow{n_0}\| \cdot \cos(\varphi) = \underbrace{\|\overrightarrow{n_0}\|}_{=1} \cdot \|\vec{a}\| \cdot \cos(\varphi) = \|\overrightarrow{a_N}\|$$

Im rechtwinkeligen Dreieck gilt: $\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$

Auf das Beispiel übertragen: $\cos(\varphi) = \frac{\|\overrightarrow{a_N}\|}{\|\vec{a}\|} \mid \cdot \|\vec{a}\|$

$$\|\vec{a}\| \cdot \cos(\varphi) = \|\overrightarrow{a_N}\|$$

$\|\overrightarrow{a_N}\| = \|\vec{a}\| \cdot \cos(\varphi)$ Siehe 4.4.6., S 191 f

$$\overrightarrow{a_N} = \|\overrightarrow{a_N}\| \cdot \overrightarrow{n_0} = \|\vec{a}\| \cdot \cos(\varphi) \cdot \overrightarrow{n_0}$$

Außerdem ist

$\vec{a} \cdot \vec{n} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{n}\| \cdot \cos(\varphi) \mid : (\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{n}\|)$ Siehe 4.4.6., S 191 f

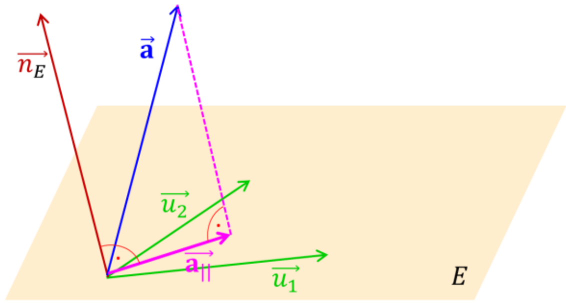
$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{n}\|} = \cos(\varphi)$$

$$\overrightarrow{a_N} = \|\vec{a}\| \cdot \cos(\varphi) \cdot \overrightarrow{n_0} = \overset{=1}{\cancel{\|\vec{a}\|}} \cdot \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{\underset{=1}{\cancel{\|\vec{a}\|}} \cdot \|\vec{n}\|} \cdot \overrightarrow{n_0} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|} \cdot \overrightarrow{n_0} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|} \cdot \frac{1}{\|\vec{n}\|} \cdot \vec{n} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}$$

$$\overrightarrow{a_{||}} = \vec{a} - \overrightarrow{a_N}$$

$$\boxed{\overrightarrow{a_{||}} = \vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \vec{n}}$$

Beispiel: Bestimmen Sie die orthogonale Projektion $\overrightarrow{a_{||}}$ des Vektors $\vec{a} = (3, -1{,}4)$ auf die Ebene, die von den Vektoren $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{u_2} =\cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ aufgespannt wird.



$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \text{x} \begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\cdot(-1) - 1\cdot(-2)\\ -(1\cdot(-1) - 1\cdot 1)\\ 1\cdot(-2) - 0\cdot 1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{a_{||}} = \begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}}{1^2+1^2+(-1)^2}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix} - \frac{3-1\ -4}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{11}{3}\\ -\frac{1}{3}\\ \frac{10}{3}\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}11\\-1\\10\end{pmatrix} = \overrightarrow{a_{||}}$$

4.7.6. Orthogonales Komplement

Das **orthogonale Komplement $U^{\perp}$** ist die Menge aller Vektoren , die zu einem (Unter-) Vektorraum U normal stehen, also orthogonal sind.

Formal: U ist ein Untervektorraum des Vektorraumes V also $U \subset V$.

Das **orthogonale Komplement von U**, $\boldsymbol{U^{\perp} = \{ \vec{v} \in V : \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0, \forall \vec{u} \in U \}}$

Eigenschaften des orthogonalen Komplements:

V ... Vektorraum U ... Untervektorraum $U^{\perp}$ ... orthogonales Komplement von U

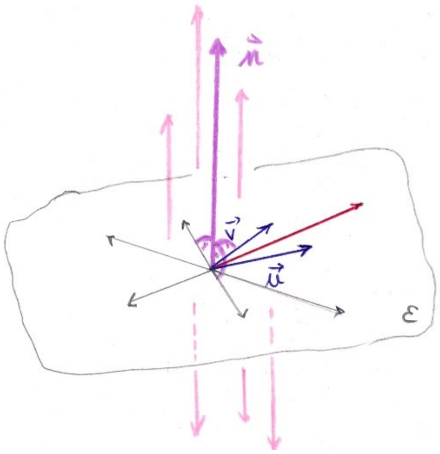
$$U \cap U^{\perp} = \{ \vec{o} \}$$

$$U \oplus U^{\perp} = V = \{ \vec{u} + \vec{v} \mid (\vec{u} \in U) \wedge (\vec{v} \in U^{\perp}) \}$$

$$\dim V = \dim U + \dim U^{\perp}$$

Die Gleichung mit den Dimensionen lässt sich gut veranschaulichen:

$\dim \mathbb{R}^3 = 3$



Das **orthogonale Komplement aller Vektoren in der Ebene**, die **durch $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannt** werden (Dimension **2**) sind der **Vektor $\vec{n}$ und seine LK** (Dimension **1**).

Das **orthogonale Komplement** des **Vektors $\vec{n}$ und seiner LK** (Dimension **1**) sind **alle Vektoren der Ebene** (Dimension **2**), auf der $\vec{n}$ und seine LK normal stehen.

Beispiel: Es sei $U = span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$. Zu berechnen ist $U^\perp$.

Für die Vektoren $\vec{x} \in U^\perp$ muss gelten: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \cdot c \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = 0$

Denn es müssen alle Vektoren von $U^\perp$ auf dem Vektor $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ und seinen LK normal stehen.

$$c \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = c \cdot (x + 2y + 3z) = 0$$

Ist $c = 0$, so erhalten wir den Nullvektor, der $U^\perp$ zu jedem (Unter-) Vektorraum ist.

Es kann aber auch $x + 2y + 3z = 0$ sein.

Diese Gleichung beschreibt eine Ebene, auf der der Koordinatenursprung liegt, im $\mathbb{R}^3$ (4.6.3., S 219), die in der Parameterform (4.6.1., S 21321 f) über zwei Parameter verfügt. Damit besitzt der Lösungsraum die Dimension 2 (4.7.3., S 238 f) und wir benötigen als Basis zwei linear **un**abhängige Vektoren:

Wählen wir z.B. $y = 1$ und $z = 0$, so erhalten wir $x + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 0 \rightarrow \ x = -2 \rightarrow \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$

Wählen wir z.B. $y = 0$ und $z = 1$, so erhalten wir $x + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 0 \rightarrow \ x = -3 \rightarrow \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$

Diese beiden Vektoren sind linear **un**abhängig: $\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} = \mu \cdot \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$ $\quad \begin{matrix}-2 = -3\mu \rightarrow \ \mu = \frac{2}{3}\\ 1 = 0 \ f.\boldsymbol{A}\end{matrix}$

Damit lautet das $U^\perp = \left\{\vec{X} \in \mathbb{R}^3 : \ c_1 \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}, \ c_1, c_2 \ \in \ \mathbb{R}\right\}$

Das orthogonale Komplement ist eine Ebene, die den Koordinatenursprung beinhaltet, und normal auf alle Vielfachen des Vektors $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ steht.

Deshalb ist $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ **ein** Normalvektor dieser Ebene: $\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

Übung (1) Gegeben ist $U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}\right\}$

(a) Geben Sie eine Basis von U an.
(b) Wie groß ist die Dimension von U?
(c) Liegt $(4,-1,6)$ in U?

(2) Bilden Sie mit den Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$ eine ONB.

(3) Bestimmen Sie ein orthogonales Komplement von U.

Lösungen: (1) (a) Bilden die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ eine Basis?

$$\begin{array}{ccc|cl}
c_1 & c_2 & c_3 & & \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & \\
2 & 1 & 1 & 0 & \boxed{2\cdot\text{I} -} \\
0 & 3 & -3 & 0 & \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & \\
0 & -1 & 1 & 0 & \\
0 & 3 & -3 & 0 & \boxed{3\cdot\text{II} + \text{III}} \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & \\
0 & -1 & 1 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \rightarrow\ c_3 = t \in \mathbb{R}
\end{array}$$

Dieses Gleichungssystem ist **nicht** eindeutig lösbar, also bilden die gegebenen Vektoren keine Basis, sie sind linear **ab**hängig.
Wir können demnach einen der drei Vektoren weglassen:

Eine Basis ist z.B. $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\right\}$

(b) Die Dimension dieses Vektorraums ist **2**.

(c) Wenn $(4,-1,6)$ in U liegt, so muss $(4,-1,6)$ als Linearkombination der Basisvektoren darstellbar sein:

$$c_1\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+c_2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-1\\6\end{pmatrix}\rightarrow\begin{array}{ccccl} c_1 & c_2 & & & \\ 1 & 0 & 4 & \rightarrow & c_1 = 4 \\ 2 & 1 & -1 & \rightarrow & c_2 = -9 \end{array}$$

In die dritte Gleichung eingesetzt: $0\cdot 4 + 3\cdot(-9) = -27 \neq 6$ **f.A.**

$(4,-1,6)$ ist keine Linearkombination der Basisvektoren und somit liegt $(4,-1,6)$ nicht in U.

(2) ON-Basis $\left\{\begin{pmatrix} 0.45 \\ 0.89 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.13 \\ 0.07 \\ 0.99 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,13 \\ -0.07 \\ -0.99 \end{pmatrix}\right\}$

(3) $\dim \mathbb{R}^3 = 3 \quad \dim(U) = 2 \rightarrow \dim U^{\perp} = 1$

Wir suchen demnach **einen** Vektor mit seinen LK:

Auf den Vektoren der Basis steht der Kreuzvektor normal: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$U^{\perp} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} : \ t \in \ \mathbb{R} \right\}$$

„Die Matrix ist die Welt, die über deine Augen gestülpt wurde, damit du blind für die Wahrheit bist.“

Zitat aus dem Film „Matrix“ (1999)

V MATRIZEN

5.1. Grundbegriffe

Eine **Matrix** ist eine rechteckige Anordnung von Elementen in Zeilen und Spalten.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & & \text{Spalte} & \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{Zeile} \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Matrix wird mit **Großbuchstaben** bezeichnet

a_{23}

Das **Element** steht in der **2. Zeile** und **3. Spalte**
(Zeilenindex) (Spaltenindex)

$\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$ ein sog. Zeilenvektor

$\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ ein sog. Spaltenvektor

Die obere **Matrix** A ist eine **3** x **4** Matrix, weil sie **3** Zeilen und **4** Spalten besitzt.

Quadratische Matrix: Anzahl der Zeilen und Spalten gleich.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

(Haupt-) Diagonale

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

5.2. Rechnen mit Matrizen

5.2. 1. Addieren und Subtrahieren von Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & a_{13} \pm b_{13} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & a_{23} \pm b_{23} \\ a_{31} \pm b_{31} & a_{32} \pm b_{32} & a_{33} \pm b_{33} \end{pmatrix}$$

Das bedeutet, man kann **Matrizen nur addieren** bzw. **subtrahieren**, wenn sie **aus jeweils gleich vielen Zeilen und Spalten** bestehen.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 5 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 3+(-1) & -2+3 & 1+(-1) \\ -1+5 & 0+6 & 2+0 \\ 2+1 & -1+(-1) & 4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 3-(-1) & -2-(+3) & 1-(-1) \\ -1-(+5) & 0-(+6) & 2-(+0) \\ 2-(+1) & -1-(-1) & 4-(+0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ -6 & -6 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

```
x = np.array( ((3,-2,1), (-1,0,2), (2,-1,4)) )
y = np.array( ((-1,3,-1), (5,6,0), (1,-1,0)) )
x + y
```

```
array([[2, 1, 0],
       [4, 6, 2],
       [3, -2, 4]], dtype=object)
```

```
x = np.array( ((3,-2,1), (-1,0,2), (2,-1,4)) )
y = np.array( ((-1,3,-1), (5,6,0), (1,-1,0)) )
x - y
```

```
array([[4, -5, 2],
       [-6, -6, 2],
       [1, 0, 4]], dtype=object)
```

5.2. 2. Skalare Multiplikation einer Matrix

Man meint die Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \lambda \cdot a_{13} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \lambda \cdot a_{23} \\ \lambda \cdot a_{31} & \lambda \cdot a_{32} & \lambda \cdot a_{33} \end{pmatrix}$$

Jedes Element der Matrix wird **mit der Zahl multipliziert**.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$3 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 8 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 6 & 9 \\ 24 & 3 & 12 \end{pmatrix}$$

```
import numpy as np
A = np.matrix([[5,2,3],
               [8,1,4]])
B= 3*A
print(B)
```

```
[[15  6  9]
 [24  3 12]]
```

5.2.3. Multiplikation von Matrizen

Voraussetzungen: **Spaltenanzahl 1.** Matrix = **Zeilenanzahl 2.** Matrix

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

2 x 3 – Matrix 3 x 2 – Matrix

=

Die **Produktmatrix** $A \cdot B$ wird eine 2 x 2 -Matrix.

Die **Elemente der Produktmatrix** erhalten wir, in dem wir den jeweiligen **Zeilenvektor** der **1. Matrix** mit dem entsprechenden **Spaltenvektor** der **2.** Matrix **skalar** multiplizieren.

Die Multiplikation von Matrizen erfolgt einfach mit Hilfe des sog. FALK – Schemas:

c_{ij} sind die Elemente der Produktmatrix $A \cdot B$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & 7 & 1 \\ & & & 3 & 6 \\ & & & 4 & 5 \\ \hline 5 & 2 & 3 & c_{11} & c_{12} \\ 8 & 1 & 4 & c_{21} & c_{22} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & 7 & 1 \\ & & & 3 & 6 \\ & & & 4 & 5 \\ \hline 5 & 2 & 3 & c_{11} & c_{12} \\ 8 & 1 & 4 & c_{21} & c_{22} \end{array}$$

$$c_{11} = 5 \cdot 7 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 53$$

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & 7 & 1 \\ & & & 3 & 6 \\ & & & 4 & 5 \\ \hline 5 & 2 & 3 & c_{11} & c_{12} \\ 8 & 1 & 4 & c_{21} & c_{22} \end{array}$$

$$c_{12} = 5 \cdot 1 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 = 32$$

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & 7 & 1 \\ & & & 3 & 6 \\ & & & 4 & 5 \\ \hline 5 & 2 & 3 & c_{11} & c_{12} \\ 8 & 1 & 4 & c_{21} & c_{22} \end{array}$$

$$c_{21} = 8 \cdot 7 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 75$$

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & 7 & 1 \\ & & & 3 & 6 \\ & & & 4 & 5 \\ \hline 5 & 2 & 3 & c_{11} & c_{12} \\ 8 & 1 & 4 & c_{21} & c_{22} \end{array}$$

$$c_{22} = 8 \cdot 1 + 1 \cdot 6 + 4 \cdot 5 = 34$$

Damit lautet die Produktmatrix $A \cdot B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 53 & 32 \\ 75 & 34 \end{pmatrix}$

Video-Tipp https://www.youtube.com/watch?v=OphPlrzeqng

Mit etwas Übung geht's auch so:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 \cdot 7 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 & 5 \cdot 1 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \\ 8 \cdot 7 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 4 & 8 \cdot 1 + 1 \cdot 6 + 4 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 + 6 + 12 & 5 + 12 + 15 \\ 56 + 3 + 16 & 8 + 6 + 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 53 & 32 \\ 75 & 34 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Statt $A \cdot B$ findet man auch die Schreibweise $A \text{ x } B$

5.2. 4. Transponierte Matrix

Die **Transponierte Matrix A^T** einer Matrix $\boldsymbol{A}$ erhält man,
indem man **aus den Zeilen** entsprechende **Spalten** formt.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} \boxed{2 \;\; 1 \;\; 0} \\ \boxed{1 \;\; 3 \;\; 2} \\ \boxed{2 \;\; 1 \;\; 1} \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$(A^T)^T = \begin{pmatrix} \boxed{2 \;\; 1 \;\; 2} \\ \boxed{1 \;\; 3 \;\; 1} \\ \boxed{0 \;\; 2 \;\; 1} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Man sieht: $(A^T)^T = A$

Folgende Eigenschaften gelten:

- Eine quadratische Matrix A heißt orthogonal, wenn das Matrizenprodukt aus A und ihrer transponierten Matrix A^T die Einheitsmatrix I ergibt:

$$A \cdot A^T = I$$

- Die Determinante einer orthogonalen Matrix besitzt den Wert 1 oder -1 (6.1., S 306 f)

$$detA = 1 \quad \text{oder} \quad detA = -1$$

- Bei einer orthogonalen Matrix A sind die transponierte Matrix A^T und die inverse Matrix A^{-1} identisch.

$$A^T = A^{-1}$$

- Das Produkt orthogonaler Matrizen ist wiederum eine orthogonale Matrix.

Übung Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ermitteln Sie 1) $A - B$ 2) $A \cdot B$ 3) $A^2 = A \cdot A$ 4) B^T 5) $C \cdot D$

Lösungen: 1) $A - B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ 3) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

4) $B^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 5) $C \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

5.2.5. Inverse Matrix

Einheitsmatrix und **Inverse Matrix** gibt es nur von **quadratischen** **Matrizen**.

Zunächst der Begriff der Einheitsmatrix (Identitätsmatrix) $\boldsymbol{I_n}$.

Beispiele von Einheitsmatrizen: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ oder $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

In **Einheitsmatrizen** stehen **in** der **Hauptdiagonale nur Einsen**, **ansonsten** nur **Nullen**.

Für die **inverse Matrix $\boldsymbol{A^{-1}}$** einer Matrix $\boldsymbol{A}$ gilt: $\boldsymbol{A \cdot A^{-1} = I}$

Beispiel: Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ und wir wollen ihre inverse Matrix A^{-1} bestimmen.

Günstig ist, das folgende Schema anzuwenden, wobei der **Gaußsche Algorithmus** (3.2.2.2., S 154 f) zum Tragen kommt.

Bemerkung: In folgendem Schema wurden wegen der übersichtlicheren Darstellung statt runder eckige Klammern gewählt.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Als erstes erweitern wir die gegebene Matrix A um die Einheitsmatrix E.

Wir wenden auf die Matrix A solange den Gaußschen Algorithmus an, bis in der linken Hälfte dieser „erweiterten“ Matrix die Einheitsmatrix steht.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{I–II}$$

In unserem Fall können wir von Zeile I die Zeile II subtrahieren, denn dann erhalten wir in der neuen Zeile 2 zu Beginn eine Null.
Die **erste Zeile bleibt unverändert**.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Nicht vergessen, auch die entsprechenden Zeilen der ursprünglichen Einheitsmatrix mit zu berücksichtigen.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{I–III}$$

Damit auch Zeile III mit einer Null beginnt, subtrahieren wir von Zeile I die Zeile III.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \quad 2\cdot\text{II}+\text{III}$$

Damit wir in Zeile III auch an zweiter Stelle eine Null erhalten, multiplizieren wir Zeile II mit 2 und addieren das Ergebnis mit Zeile III

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \end{array} \;|\; .\,2 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{cccccc} 0 & 2 & -4 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & -5 & 3 & -2 & -1 \end{array} \; +$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Dieses Ergebnis ist nun die neue Zeile III

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Jetzt haben wir in der **unteren Ecke** die erforderlichen Nullen.
Das nennt sich **obere** Dreiecksmatrix.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Wir brauchen aber auch in der **oberen Ecke** lauter Nullen, denn wir wollen ja rechts die Einheitsmatrix.

Dazu wenden wir den **Gaußschen Algorithmus von unten nach oben** an. ⇑

Jetzt bleibt Zeile III unverändert.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right] \quad -5\cdot\text{II}+2\cdot\text{III}$$

Multiplizieren wir Zeile II mit (–5) und Zeile III mit 2:

$$\begin{array}{cccccc|l} 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & \cdot(-5) \\ 0 & 0 & -5 & 3 & -2 & -1 & \cdot 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 0 & -5 & 10 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 6 & -4 & -2 \\ \hline 0 & -5 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{array} \; +$$

Jetzt addieren wir diese Zeilen.

Das ist die neue Zeile II

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right] \quad 5\cdot \mathrm{I}+\mathrm{III}$$

Multiplizieren wir jetzt Zeile I mit 5 und addieren mit Zeile III

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 10 & 0 & 8 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

1 2 1 1 0 0 | · 5 -> 5 10 5 5 0 0
0 0 -5 3 -2 -1 +
5 10 0 8 -2 -1 ... das ist die neue Zeile I

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 10 & 0 & 8 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right] \quad \mathrm{I}+2.\mathrm{II}$$

Jetzt noch Zeile II mit 2 multipliziert und anschließend mit Zeile I addiert.

5 10 0 8 -2 -1
0 -5 0 1 1 -2 | .2

5 10 0 8 -2 -1
0 -10 0 2 2 -4 +
5 0 0 10 0 -5 ... das ist die aktualisierte Zeile I

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 10 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Diese Matrix nennt man **untere** Dreiecksmatrix.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{5} & 0 & 0 & 10 & 0 & -5 \\ 0 & \mathbf{-5} & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \mathbf{-5} & 3 & -2 & -1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} |\ :\mathbf{5} \\ |\ :(\mathbf{-5}) \\ |\ :(\mathbf{-5}) \end{array}$$

Um abschließend in der linken Hälfte die Einheitsmatrix zu erhalten, gehen wir hier wie links gezeigt vor.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -0.2 & -0.2 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1 & -0.6 & 0.4 & 0.2 \end{array}\right]$$

Damit ist $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -0.2 & -0.2 & 0.4 \\ -0.6 & 0.4 & 0.2 \end{bmatrix}$

Es bedarf schon einiger Übung, damit man die inverse Matrix ohne viele Zwischenschritte ermitteln kann.

```python
import numpy as np

A = np.array([[1, 2, 1],
              [1, 1, 3],
              [1, 4, 2],])

# Calculating the inverse of the matrix
print(np.linalg.inv(A))
```

```
[[ 2.   0.  -1. ]
 [-0.2 -0.2  0.4]
 [-0.6  0.4  0.2]]
```

Eine andere Möglichkeit, die inverse Matrix A^{-1} einer Matrix A zu bestimmen, besteht mit der **Adjunkten Matrix** $\boldsymbol{adj(A)}$

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A)}$$

Wie die adjunkte Matrix gebildet wird, betrachten wir am Beispiel von vorhin: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Zunächst berechnen wir die **Determinante** dieser Matrix (siehe 6.1., S 306 f):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{matrix} = 1\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 3\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 4 - (1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 3\cdot 4 + 2\cdot 1\cdot 2) = 12 - 17 = -5$$

Jetzt bilden wir die sogenannte Cofaktor-Matrix $Cof(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$

$$c_{11} = (-1)^{1+1}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^2\cdot (1\cdot 2 - 4\cdot 3) = 1 \cdot (-10) = -10$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (1\cdot 2 - 1\cdot 3) = -1 \cdot (-1) = 1$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (1\cdot 4 - 1\cdot 1) = 1 \cdot (3) = 3$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (2\cdot 2 - 4\cdot 1) = -1 \cdot (0) = 0$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (1\cdot 2 - 1\cdot 1) = 1 \cdot (1) = 1$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot (1\cdot 4 - 1\cdot 2) = -1 \cdot (2) = -2$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (2\cdot 3 - 1\cdot 1) = 1 \cdot (5) = 5$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot (1\cdot 3 - 1\cdot 1) = -1 \cdot (2) = -2$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^6 \cdot (1\cdot 1 - 1\cdot 2) = 1 \cdot (-1) = -1$$

$$Cof(A) = \begin{pmatrix} -10 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{adj(A) = Cof(A)^T} = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{A^{-1} = \frac{1}{-5} \cdot \begin{pmatrix} -10 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -0.2 & -0.2 & 0.4 \\ -0.6 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 1: Man kann die inverse Matrix auch in dieser Form angeben.

Bemerkung 2: Man spricht bei den grün hinterlegten Teilen der Determinante von Unterdeterminanten.

Eine **quadratische** Matrix, die eine **inverse** Matrix besitzt, nennt man **reguläre** Matrix, **andernfalls singuläre** Matrix.

Zwei weitere Bezeichnungen:

Obere Dreiecksmatrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$

Untere Dreiecksmatrix: $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

Mit Inversen Matrizen lassen sich auch Gleichungssysteme lösen:

Beispiel: I: $2x + 4y = 8$
II: $-3x + 8y = 2$

Wir können dieses Gleichungssystem mit Hilfe einer Matrix und Vektoren angeben:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$ Siehe auch 5.2.3., S 264

Wir können NICHT durch die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$ **dividieren**, weil die Division durch eine Matrix nicht festgelegt ist.

Video-Tipp Inverse Matrix bestimmen (Simultanverfahren,3x3-Matrix) | Mathe by Daniel Jung - YouTube

Allgemein gilt:

$$\boldsymbol{A} \cdot \vec{\boldsymbol{X}} = \vec{\boldsymbol{b}}$$

$$\vec{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \vec{\boldsymbol{b}}$$

mit $\boldsymbol{A}^{-1}$ als **inverser Matrix** von $\boldsymbol{A}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad 3\cdot I+2\cdot II$$

. . . um in der 2. Zeile vorne eine Null zu erhalten

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 28 & 3 & 2 \end{array}\right] \quad II-7\cdot I$$

. . . um in der 1. Zeile an zweiter Stelle eine Null zu erhalten

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -14 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 28 & 3 & 2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} :(-14) \\ :28 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{3}{28} & \frac{1}{14} \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{28} & \frac{1}{14} \end{bmatrix}$$

$$\vec{X} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

$$\binom{x}{y} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{28} & \frac{1}{14} \end{bmatrix} \cdot \binom{8}{2}$$

$x = \frac{2}{7} \cdot 8 - \frac{1}{7} \cdot 2 = 2$ $\qquad$ $y = \frac{3}{28} \cdot 8 + \frac{1}{14} \cdot 2 = 1$ … Matrizenmultiplikation

$$L = \{(2,1)\}$$

```
from sympy import *
```

```
M = Matrix(([2, 4, 8], [-3, 8, 2]))
```

```
M.rref()
```

```
[1 0 2] ← x
[0 1 1] ← y
```

Beispiel: Schreiben Sie das folgende Gleichungssystem mit Matrizen und Vektoren an und lösen Sie es mittels Matrizenrechnung.

$-x_1 + 4 = x_2 + x_3 - 2$

$-x_3 - 3x_2 = x_1$

$4x_1 = -2x_2$

Wir müssen dieses Gleichungssystem zunächst auf die **genormte** Form bringen:

Links die **Glieder mit** den **Variablen**, **rechts** das **konstante Glied**.

$-x_1 + 4 = x_2 + x_3 - 2 \quad |-x_2 - x_3 - 4 \quad \rightarrow \quad -x_1 - x_2 - x_3 = -6 \quad |.(-1) \rightarrow \mathbf{x_1 + x_2 + x_3 = 6}$

$-x_3 - 3x_2 = x_1 \quad |-x_1 \quad \rightarrow \quad -x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \quad |.(-1) \quad \rightarrow \quad \mathbf{x_1 + 3x_2 + x_3 = 0}$

$4x_1 = -2x_2 \quad |+2x_2 \quad \rightarrow \quad 4x_1 + 2x_2 = 0 \quad |:2 \quad \rightarrow \quad \mathbf{2x_1 + x_2 = 0}$

$1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 6$

$1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 0$

$2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}: \quad \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{matrix} = +(1 \cdot 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1) - (1 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 0)$$

$$\det(A) = 2 + 1 - (6 + 1) = -4$$

$Cof(A):$ $\quad c_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (3 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = 1 \cdot (-1) = -1$

$c_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (1 \cdot 0 - 2 \cdot 1) = -1 \cdot (-2) = 2$

$c_{13} = (-1)^{1+3} \cdot (1 \cdot 1 - 2 \cdot 3) = 1 \cdot (-5) = -5$

$c_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (1 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = -1 \cdot (-1) = 1$

$c_{22} = (-1)^{2+2} \cdot (1 \cdot 0 - 2 \cdot 1) = 1 \cdot (-2) = -2$

$c_{23} = (-1)^{2+3} \cdot (1 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = -1 \cdot 0 = 0$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} \cdot (1 \cdot 1 - 3 \cdot 1) = 1 \cdot (-2) = -2$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2} \cdot (1 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = -1 \cdot 0 = 0$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3} \cdot (1 \cdot 3 - 1 \cdot 1) = 1 \cdot 2 = 2$$

$$Cof(A) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad adj(A) = [cof(A)]^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 & -0.25 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0 \\ 1.25 & 0 & -0.5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{X} = A^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 0.25 & -0.25 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0 \\ 1.25 & 0 & -0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x = 0.25 \cdot 6 - 0.25 \cdot 0 + 0.5 \cdot 0 = 1.5$$
$$y = -0.5 \cdot 6 + 0.5 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = -3$$
$$z = 1.25 \cdot 6 + 0 \cdot 0 - 0.5 \cdot 0 = 7.5$$

$$L = \{(1.5, -3, 7.5)\}$$

Beispiel: [26] Gegeben sind die Matrix $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ und der Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

Ermitteln Sie, für welche Werte von a das entsprechende Gleichungssystem
- genau eine Lösung
- keine Lösung besitzt.

$$det(A) = +(a \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 2) - (0 \cdot 0 \cdot 1 + a \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \cdot 0) = 1 - 2\,a$$

$$cof(A){:}\quad \begin{array}{lll} c_{11} = -2 & c_{12} = \ \ 1 & c_{13} = 0 \\ c_{21} = \ \ 0 & c_{22} = \ \ 0 & c_{23} = -2\,a + 1 \\ c_{31} = \ \ 1 & c_{32} = -a & c_{33} = 0 \end{array}$$

$$cof(A) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2\,a+1 \\ 1 & -a & 0 \end{pmatrix} \qquad adj(A) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -a \\ 0 & -2\,a+1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1-2\,a} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -a \\ 1 & -2\,a+1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{2\,a-1} & 0 & \frac{-1}{2\,a-1} \\ \frac{-1}{2\,a-1} & 0 & \frac{a}{2\,a-1} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[26] aus: Wi20_Farkas_Pruefung.pdf

$$\vec{X} = A^{-1} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} \frac{2}{2\,a-1} & 0 & \frac{-1}{2\,a-1} \\ \frac{-1}{2\,a-1} & 0 & \frac{a}{2\,a-1} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{2}{2\,a-1} \cdot 1 + 0 \cdot a + \frac{-1}{2\,a-1} \cdot 1 = \frac{2}{2\,a-1} - \frac{1}{2\,a-1}$$

$$x_2 = \frac{-1}{2\,a-1} \cdot 1 + 0 \cdot a + \frac{a}{2\,a-1} \cdot 1 = -\frac{1}{2\,a-1} + \frac{a}{2\,a-1}$$

$$x_3 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot a + 0 \cdot 1 = a$$

Man erhält nur dann Lösungen, wenn die Nenner NICHT Null sind, denn Brüche mit dem Nenner Null sind nicht definiert:

$2\,a - 1 = 0 \;\; | +1$

$2\,a = 1 \;\; | : 2$

$a = 0.5$ … für $a = 0.5$ besitzt dieses Gleichungssystem keine Lösung.

Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0.5\}$ erhält man die eindeutige Lösung:

$$x_1 = \frac{2}{2\,a-1} - \frac{1}{2\,a-1} = \frac{1}{2\,a-1}$$

$$x_2 = -\frac{1}{2\,a-1} + \frac{a}{2\,a-1} = \frac{-1+a}{2\,a-1} = \frac{a-1}{2\,a-1}$$

$$x_3 = a$$

$$L = \left\{ \left(\frac{1}{2\,a-1}, \frac{a-1}{2\,a-1}, a \right) \right\}$$

Weiteres über Matrizen siehe auch Abschnitt VI DETERMINANTEN, S 306 f.

Übung

Lösen Sie folgende lineare Gleichungssysteme mit Hilfe der inversen Matrix.

1) $2\,x + 4\,y = 8$
$2\,x - 5\,y = 35$

2) $x_1 + 7 = x_2$
$x_1 = 5\,x_2 - 23$

3) $2\,x_1 - x_2 + x_3 = 3$
$x_1 + 2\,x_3 = 7$
$2\,x_1 - x_3 = -1$

Lösungen:

1) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{18} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 35 \end{pmatrix}$ $\quad x = 10 \quad y = -3$

2) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{49} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -23 \end{pmatrix}$ $\quad x_1 = -3 \quad x_2 = 4$

3) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -1 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad x_1 = 1 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 3$

5.2.6. Matrizengleichungen

Ein kurzer Einblick in weitere Matrizengleichungen:

Zunächst weitere Rechenregeln für das Rechnen mit Matrizen

- $\boldsymbol{A+B=B+A}$! $\boldsymbol{A\cdot B\neq B\cdot A}$
- $\boldsymbol{A+I=I+A=A}$ $\boldsymbol{A\cdot I=I\cdot A=A}$
- $\boldsymbol{A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B\cdot C)}$
- $\boldsymbol{A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C}$
- $\boldsymbol{(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}}$
- $\boldsymbol{(A\cdot B)^{T}=B^{T}\cdot A^{T}}$
- $\boldsymbol{(A+B)^{T}=A^{T}+B^{T}}$

! $\boldsymbol{(A+B)^{-1}}$ **ist nicht zerlegbar!**

Beispiel: $2\cdot A\cdot X+3\cdot B=4\cdot(X-A)$ Steht die Variable (X) in Klammern, diese ausmultiplizieren.

$2\cdot A\cdot X+3\cdot B=4\cdot X-4\cdot A$ Die Glieder mit X auf die eine Seite, die ohne X auf die andere.

$2\cdot A\cdot X-4\cdot X=-4\cdot A-3\cdot B$ Aus den Gliedern mit X die Variable X herausheben.

$(2\cdot A-4)\cdot X=-4\cdot A-3\cdot B$ Da X als rechter Faktor steht, muss X auch so herausgehoben werden, weil die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist!

$(2\cdot A-4\cdot I)\cdot X=-4\cdot A-3\cdot B$ Man kann von einer Matrix, wie hier $2\cdot A$, keine Zahl abziehen. Deshalb müssen wir die Zahl 4 mit der Einheitsmatrix I multiplizieren. Das verändert „matrizenmäßig“ nichts, weil I das neutrale Element der Multiplikation ist (siehe obige Regeln)

Da wir nicht durch Matrizen dividieren können, multiplizieren wir mit der inversen Matrix

$X=(2\cdot A-4\cdot I)^{-1}\cdot(-4\cdot A-3\cdot B)$ Da die Matrix $(2\cdot A-4\cdot I)$ **links** von X steht, muss auch ihre inverse Matrix links stehen.

5.2.7. Rang einer Matrix

Der Rang einer Matrix, englisch Rank, abgekürzt Rg oder Rk, ist die Anzahl der Zeilen- bzw. Spaltenvektoren, die kein Nullvektor sind.

Oder: Der Rang einer Matrix ist gleich der Anzahl der linear **un**abhängigen (gegenseitig nicht darstellbaren) Zeilen- bzw. Spaltenvektoren.

Dazu verwandeln wir die Matrix mit Hilfe des **Gaußschen Algorithmus** in die Zeilen-Stufen-Form (Treppenmodell).

$$\begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ 0 & \square & \square \\ 0 & 0 & \square \end{pmatrix}$$

Unterhalb der Stufe dürfen nur Nullen stehen.

Dafür wird die Matrix in eine obere Dreiecksmatrix (siehe S 270) verwandelt:

Beispiele: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 10 & 2 \end{pmatrix}$ -2.II+III $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ rg(A) = **3**

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ II – 2.III $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ rg(B) = **2**

Zusammenhang zwischen
dem Rang einer Matrix und
den Lösungen eines Linearen Gleichungssystems:

n … Anzahl der Variablen

- rg(A) = **n** : **ein**deutige Lösung
- rg(A) < n $\wedge$ rg(A) $\neq$ rg(A | b) : **keine** Lösung
- rg(A) = rg(A | b) < n : **unendlich** viele Lösungen

Beispiele:

n … Anzahl der Variablen: **n = 3**

$\left(\begin{array}{ccc\|c} 2 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 2 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$
Rg(A) = 3 = n	Rg(A) = 2 < n	Rg(A) = 2
	Rg(A|b) = 3	Rg(A|b) = 2
	Rg(A) <n ∧ Rg(A) ≠Rg(A|b)	Rg(A) = Rg(A|b) < n
eindeutige Lösung	**keine** Lösung	**unendlich viele** Lösungen
$L = \{(1,0,2)\}$	$L = \{\ \}$	$L = \{X \in \mathbb{R}^3 \| X = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}\}$

Bemerkung: **(A|b)** ist die um die konstanten Koeffizienten **erweiterte** Matrix A.

Beispiel:

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 10 \\ 7x - 5y + 6z &= 25 \\ 3x - 3y + 4z &= 15 \end{aligned} \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 10 \\ 7 & -5 & 6 & 25 \\ 3 & -3 & 4 & 15 \end{array}\right) 7 \cdot I - II \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 10 \\ 0 & -9 & 15 & 45 \\ 3 & -3 & 4 & 15 \end{array}\right) 3 \cdot I - III \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 10 \\ 0 & -9 & 15 & 45 \\ 0 & -3 & 5 & 15 \end{array}\right) II - 3 \cdot III \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 10 \\ 0 & -9 & 15 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Rg(A) = 2

Rg(A|b) = 2

Rg(A) = Rg(A|b) < n ⟹ unendlich viele Lösungen

Video-Tipp https://www.youtube.com/watch?v=4SYRA4Ff3RM

Die Lösungsmenge:

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & -2 & 3 & 10 \\ 0 & -9 & 15 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$x-2\left(-5+\frac{5}{3}\lambda\right)+3\lambda=10 \quad *$$

$$-9y+15\lambda=45 \;\;|-15\lambda\;|:(-9) \;\;\rightarrow y=-5+\frac{5}{3}\lambda$$

$$z=\lambda$$

$$* \quad x+10-\frac{10}{3}\,\lambda+3\,\lambda=10$$

$$x+10-\frac{1}{3}\,\lambda=10 \;\;|\;-10+\frac{1}{3}\,\lambda$$

$$x=\frac{1}{3}\,\lambda$$

$$\begin{aligned} x &= \;\;\;0+\tfrac{1}{3}\lambda \\ y &= -5+\tfrac{5}{3}\,\lambda \\ z &= \;\;\;0+1\,\lambda \end{aligned} \quad \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \Bigg\| \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \;L=\left\{\;(x,y,z)\,\middle|\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$$

… Parameterform einer Geraden im $\mathbb{R}^3$

Siehe 4.5.2., S 204

Wollen wir uns die möglichen Lösungsmengen auch anhand der Vektorrechnung veranschaulichen:

Beispiel:

$$\begin{aligned} x+\;\;y+\;z&=1 \\ x+2y+\;z&=2 \\ 2x-\;\;y+\;z&=3 \end{aligned}$$

Keine Gleichung ist Vielfaches einer anderen . . .

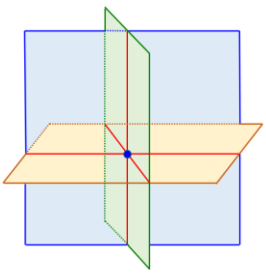
$$\begin{array}{cccc} x & y & z & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}$$

$$\begin{aligned} &x+1-4=1 \rightarrow x=4 \\ &-y=-1 \;\rightarrow y=1 \\ &z=-4 \end{aligned} \qquad \mathbb{L}=\{(4/1/-4)\}$$

. . . und eine eindeutige Lösung



Beispiel:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x + 2y + 2z &= 2 \\ 2x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

2 Gleichungen (I und II) Vielfache voneinander . . . .

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

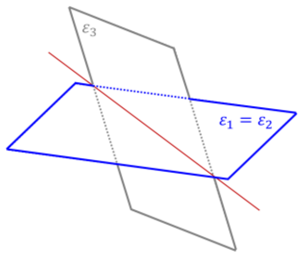
2.I – II, 2.I – III

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 \end{array}$$

Da wir mit der 2. und 3. Zeile keine zweite Null in der 3. Zeile erhalten können, vertauschen wir die 2. Und 3. Zeile.

$z = \lambda$



In die 2. Zeile eingesetzt: $y + \lambda = 1 \ \rightarrow y = 1 - \lambda$

In die 1. Zeile : $x + (1 - \lambda) + \lambda = 1 \ \rightarrow x = 0$

$$\begin{aligned} x &= 0 + 0\lambda \\ y &= 1 - 1\lambda \\ z &= 0 + 1\lambda \end{aligned}$$

$$\mathbb{L} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

… Geradengleichung in Parameterform (4.5.2., S 204)

Beispiel:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x + 2y + 2z &= 2 \\ 3x + 3y + 3z &= 3 \end{aligned}$$

Da offensichtlich alle Gleichungen Vielfache voneinander sind, beschreibt jede Gleichung dieselbe Ebene (siehe 3.2.2.1., S 153 f).

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

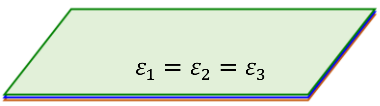
$z = \lambda \qquad y = \mu$

In die 1. Zeile eingesetzt: $1x + \mu + \lambda = 1 \ \rightarrow x = 1 - \mu - \lambda$

$$\begin{aligned} x &= 1 - 1\mu - 1\lambda \\ y &= 0 + 1\mu + 0\lambda \\ z &= 0 + 0\mu + 1\lambda \end{aligned}$$

$$\mathbb{L} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

… Ebenengleichung in Parameterform (4.6.1., S 213 f)



Übung

1) Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \;,\; B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \;,\; C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ermitteln Sie a) $A + B$ b) $3 \cdot A$ c) $\frac{1}{2} \cdot C$ d) $B - 2 \cdot A$ e) A^T f) $(B^T)^T$ g) Rg(A)

h) A^{-1} i) B^{-1} j) $C \cdot D$

2) Schreiben Sie folgende Gleichungssysteme mit Matrizen und Vektoren an:

a)
$$\begin{aligned} 5x - \;\; y &= 6 \\ -3x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 4x - 2 + y &= 2y - 4x + 1 \\ 12 - x - y &= x + y + 12 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} -x_2 &= 12 + 2x_1 + x_3 \\ x_3 - x_2 - 9 &= 0 \\ -2x_1 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

3) Lösen Sie folgende Gleichungssysteme mit Hilfe der inversen Koeffizienten-Matrix mit $G = \mathbb{R}$:

a)
$$\begin{aligned} 3x - 4y &= -6 \\ x + 5y &= 17 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_3 &= -5 \\ 4x_1 - x_2 &= 2 \\ 3x_2 + x_3 &= 9 \end{aligned}$$

4) Welche der Matrizen in Aufgabe 1) sind quadratisch?

5) Bestimmen sie den jeweiligen Rang folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösungen:

1) $a)\; A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad b)\; 3 \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad c)\; \frac{1}{2} \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$d)\; B - 2 \cdot A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad e)\; A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad f)\; (B^T)^T = B$ $\quad g)\; Rg(A) = 2$

$h)\; A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad i)\; B^{-1} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad j)\; C \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$

2) $a)\ \begin{pmatrix}5 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ 0\end{pmatrix}$ $\quad b)\ \begin{pmatrix}8 & -1\\ -2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 0\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}8 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 0\end{pmatrix}$

$c)\ \begin{pmatrix}-2 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ -2 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\ 9\\ 4\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\\ -9\\ -2\end{pmatrix}$

3) $a)\ \frac{1}{19}\cdot\begin{pmatrix}5 & 4\\ -1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\ 17\end{pmatrix}$ $\quad L=\{(2{,}3)\}$

$b)\ \frac{1}{25}\cdot\begin{pmatrix}1 & 6 & 2\\ 4 & -1 & 8\\ -12 & 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\ 2\\ 9\end{pmatrix}$ $\quad L=\{(1{,}2{,}3)\}$

4) A und B

5) $Rg(A)=2 \qquad Rg(B)=2 \qquad Rg(C)=2$

Kann ich's? [27]

1) Für welche Werte von $p \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & p\end{pmatrix}$ ist nicht invertierbar.

2) Es sei $x \in \mathbb{R}$. Die Matrix $\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & p1\end{pmatrix}$ ist . . .

(a) . . . genau dann invertierbar, wenn $x \neq 0$

(b) . . . genau dann invertierbar, wenn $x = 0$

(c) . . . nie invertierbar

(d) . . . immer invertierbar

(3) Es sei A eine n x n-Matrix über einem Körper K und $\vec{b} \in K^n$.
betrachten wir das Lineare Gleichungssystem (LGS) $A \cdot \vec{X} = \vec{b}$ für $\vec{X} \in K^n$.
Was gilt allgemein?

(a) Falls $\vec{b} \neq \vec{o}$ ist, existiert keine Lösung.

(b) Falls A nicht invertierbar ist, existiert keine Lösung.

(c) Falls A invertierbar ist, existiert eine Lösung.

(d) Falls eine Lösung existiert, ist A invertierbar.

1) $p \neq 2$ 2) (d) 3) (c)

[27] Beispiele nach oder von: SCL06.pdf (ethz.ch)

5.3. Lineare Abbildungen

5.3.1. Grundsätzliches

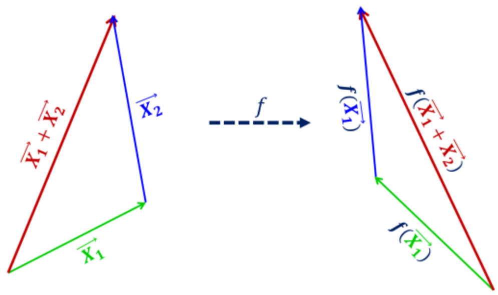
Wir haben schon Strukturen von Vektorräumen kennengelernt und einige ihrer Eigenschaften betrachtet.
In diesem Kapitel wollen wir Abbildungen zwischen Vektorräumen behandeln.

Eine lineare Abbildung $f: V \to W$

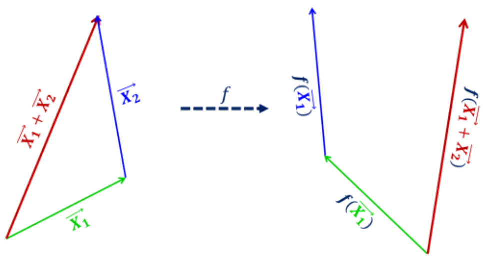
$\vec{X} \longmapsto f(\vec{X})$ besitzt folgende Eigenschaften:

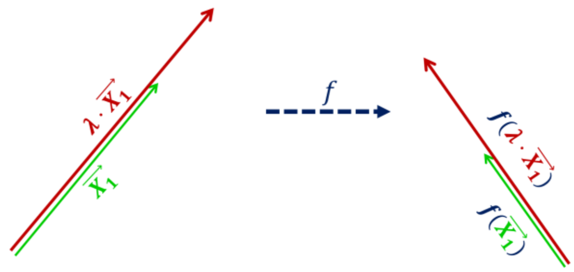
$$\boxed{\begin{array}{l}(a)\ f(\vec{X_1}+\vec{X_2}) = f(\vec{X_1}) + f(\vec{X_2}) \\ (b)\ f(\lambda \cdot \vec{X}) = \lambda \cdot f(\vec{X})\end{array}}$$

Betrachten wir das beispielhaft geometrisch veranschaulichend:

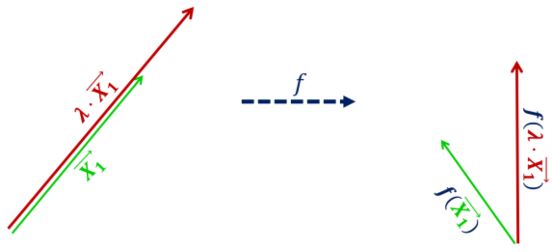


Eine Abbildung einer Vektoraddition ist dann **linear**, wenn das gegebene Dreieck abgebildet wiederum ein Dreieck ergibt, was im unteren Diagramm nicht der Fall ist.





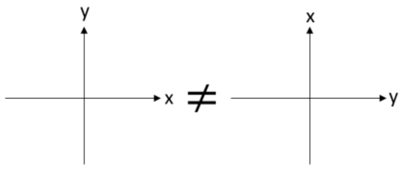
Eine Abbildung einer skalaren Multiplikation mit einem Vektor ist dann **linear**, wenn dieses Produkt abgebildet wiederum einen parallelen Vektor ergibt, was im unteren Diagramm nicht der Fall ist.



Betrachten wir den $\mathbb{R}^2$:

Die Standardbasis (kanonische Basis) des $\mathbb{R}^2$ lautet: $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ (Siehe 4.7.3., S 238 f)

Wir müssen hier eigentlich das Tupel $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ wählen, weil die Reihenfolge der Basisvektoren von Bedeutung, was bei einer Menge nicht der Fall ist:



Damit gilt für jeden Vektor $\vec{X} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$: $x \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ und somit ist $f(\vec{X}) = f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = f\left(x \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$

$$f\left(x \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) \underset{(a)}{=} f\left(x \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) + f\left(y \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) \underset{(b)}{=} x \cdot f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) + y \cdot f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$

Man sieht: Wir brauchen nur zu wissen, wie die Basisvektoren abgebildet werden.

Angenommen das Bild von $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ sei $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ und das Bild von $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ sei $\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \qquad\qquad f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$$

Dann ist $f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = x \cdot \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a \cdot x\\b \cdot x\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}c \cdot y\\d \cdot y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a \cdot x + c \cdot y\\b \cdot x + d \cdot y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & c\\b & d\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & c\\b & d\end{pmatrix} \cdot \vec{X}$

Siehe 5.2.3., S 262

Mit $A = \begin{pmatrix}a & c\\b & d\end{pmatrix}$ als sogenannte Abbildungsmatrix können wir schreiben:

$$f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = A \cdot \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \text{ bzw. } f(\vec{X}) = A \cdot \vec{X}$$

Entsprechend gilt für lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^n$nach $\mathbb{R}^m$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\dots\\x_n\end{pmatrix}: \qquad f(\vec{X}) = A \cdot \vec{X} \text{ mit } A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m}\\a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m}\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm}\end{pmatrix}$$

Dass $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ eine lineare Abbildung ist, ist für den $\mathbb{R}^2$ leicht gezeigt:

$$\overrightarrow{X_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{X_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$(a)\ \ f\left(\overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}\right) = (x_1 + x_2) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + (y_1 + y_2) \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a \cdot (x_1 + x_2) \\ b \cdot (x_1 + x_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \cdot (y_1 + y_2) \\ d \cdot (y_1 + y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot (x_1 + x_2) + c \cdot (y_1 + y_2) \\ b \cdot (x_1 + x_2) + d \cdot (y_1 + y_2) \end{pmatrix}$$

$$f\left(\overrightarrow{X_1}\right) + f\left(\overrightarrow{X_2}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + y_1 \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + y_2 \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a \cdot x_1 \\ b \cdot x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \cdot y_1 \\ d \cdot y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \cdot x_2 \\ b \cdot x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \cdot y_2 \\ d \cdot y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x_1 + a \cdot x_2 + c \cdot y_1 + c \cdot y_2 \\ b \cdot x_1 + b \cdot x_2 + d \cdot y_1 + d \cdot y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot (x_1 + x_2) + c \cdot (y_1 + y_2) \\ b \cdot (x_1 + x_2) + d \cdot y_1 + y_2) \end{pmatrix}$$

$$(b)\ \ f\left(\lambda \cdot \vec{X}\right) = f\left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda \cdot x \\ \lambda \cdot y \end{pmatrix}\right) = \lambda \cdot x \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \lambda \cdot y \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot f\left(\vec{X}\right) = \lambda \cdot \left[x \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right] = \lambda \cdot x \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \lambda \cdot y \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

Beispiel: 1) Zeigen Sie, dass $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung ist.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - 2y \\ z + y \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{X_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{X_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 - 2y_1 \\ z_1 + y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 - 2y_2 \\ z_2 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2y_1 + x_2 - 2y_2 \\ z_1 + y_1 + z_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\overrightarrow{X_1}\right) + f\left(\overrightarrow{X_2}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}\right) + \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 - 2y_1 \\ z_1 + y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 - 2y_2 \\ z_2 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2y_1 + x_2 - 2y_2 \\ z_1 + y_1 + z_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\lambda \cdot \vec{X}\right) = f\left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x - 2y \\ z + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot (x - 2y) \\ \lambda \cdot (z + y) \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot f\left(\lambda \cdot \vec{X}\right) = \lambda \cdot f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x - 2y \\ z + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot (x - 2y) \\ \lambda \cdot (z + y) \end{pmatrix}$$

2) Wie lautet die Abbildungsmatrix A?

Die Standardbasis (kanonische Basis) des $\mathbb{R}^3$ als Tupel lautet: $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1-2\cdot 0\\0+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{0}\end{pmatrix} \qquad f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0-2\cdot 1\\0+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{1}\end{pmatrix} \qquad f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0-2\cdot 0\\1+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

Damit lautet $A = \begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{0}\\\mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$

3) Ermitteln Sie $f(\vec{o})$.

$$\vec{o} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad f(\vec{o}) = f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0-2\cdot 0\\0+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \vec{o}$$

Beachten Sie, dass der ursprüngliche Nullvektor aus $\mathbb{R}^3$ stammt, während seine Abbildung der Nullvektor im $\mathbb{R}^2$ ist!

Beispiel: Ist die Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mid f(\vec{X}) = -\vec{X}$ eine lineare Abbildung?

Gilt $f(\vec{X_1} + \vec{X_2}) = f(\vec{X_1}) + f(\vec{X_2})$?

$$f(\vec{X_1} + \vec{X_2}) = -(\vec{X_1} + \vec{X_2}) = \boldsymbol{-\vec{X_1} - \vec{X_2}}$$

$$f(\vec{X_1}) = -\vec{X_1} \qquad f(\vec{X_2}) = -\vec{X_2} \quad \to \quad \boldsymbol{f(\vec{X_1}) + f(\vec{X_2}) = -\vec{X_1} - \vec{X_2}}$$

Es gilt somit $f(\vec{X_1} + \vec{X_2}) = f(\vec{X_1}) + f(\vec{X_2})$

Gilt auch $f(k \cdot \vec{X}) = k \cdot f(\vec{X})$?

$$f(k \cdot \vec{X}) = -(k \cdot \vec{X}) = \boldsymbol{-k \cdot \vec{X}}$$

$$k \cdot f(\vec{X}) = k \cdot (-\vec{X}) = \boldsymbol{-k \cdot \vec{X}}$$

Es gilt auch $f(k \cdot a) = k \cdot f(a)$

Damit handelt es sich um eine **lineare Abbildung**.

Die Translation $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mid f(\vec{X}) = -\vec{X}$ ist eine lineare Abbildung. Geben Sie die dazugehörige Abbildungsmatrix A an.

Wir brauchen nur die **Bilder der Standard-Basisvektoren** des $\mathbb{R}^2$ zu bilden:

$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ und $f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ Damit ist $A = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$

Die Abbildungsvorschrift lautet demnach

$$\vec{X'} = f(\vec{X}) = A \cdot \vec{X} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \cdot \vec{X}$$

Beispiel: Ist die Translation $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mid f(\vec{X}) = \vec{X} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ eine lineare Abbildung?

Gilt $f(\vec{X_1} + \vec{X_2}) = f(\vec{X_1}) + f(\vec{X_2})$?

$$f(\vec{X_1} + \vec{X_2}) = (\vec{X_1} + \vec{X_2}) + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \vec{X_1} + \vec{X_2} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$f(\vec{X_1}) = \vec{X_1} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad f(\vec{X_2}) = \vec{X_2} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$f(\vec{X_1}) + f(\vec{X_2}) = \vec{X_1} + \vec{X_2} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = a + \vec{X_2} + 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Somit ist $f(\vec{X_1} + \vec{X_2}) \neq f(\vec{X_1}) + f(\vec{X_2})$

und es handelt es sich bei der Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mid f(\vec{X}) = \vec{X} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, also bei der **Translation** (**Verschiebung**) um den Vektor $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, um keine lineare Abbildung.

Beispiel: Überprüfen Sie, ob die gegebene Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \mid f(\vec{X}) = f\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ linear ist.

Wenn ja, schreiben Sie sie in der Form $f(\vec{X}) = A \cdot \vec{X}$ an.

Wir brauchen nur die **Bilder der Standard-Basisvektoren** des $\mathbb{R}^3$ zu bilden:

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

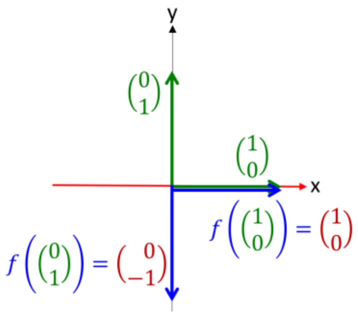
Damit wäre $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

Überprüfen wir, ob wir mit A die gegebene Abbildung erhalten:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3\\0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} ✓$$

In den Kapiteln 5.3.2. bis 5.3.10. sind die geometrischen Veranschaulichungen verschiedener linearer Abbildungen erläutert:

5.3.2. Spiegelung an der x-Achse



$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

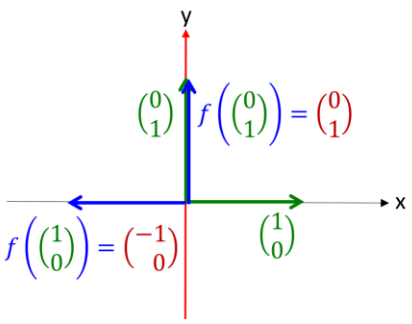
$$f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$

Beispiel: $P(4/3)$

$$P'=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 4+0\cdot 3\\0\cdot 4+(-1)\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$$

5.3.3. Spiegelung an der y-Achse



$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$

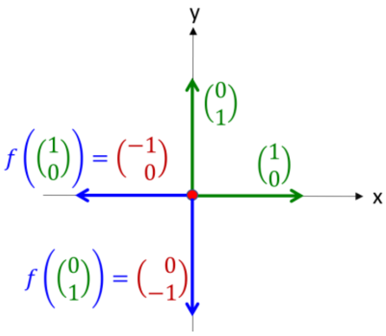
$$f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

Beispiel: $P(4/3)$

$$P'=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1)\cdot 4+0\cdot 3\\0\cdot 4+1\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$$

5.3.4. Spiegelung am Koordinatenursprung



$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

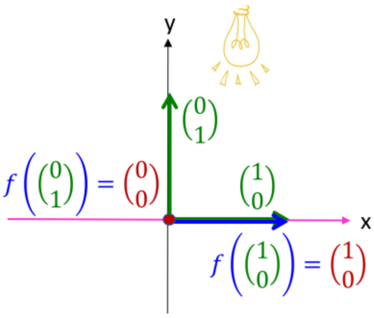
$$A = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$

Beispiel: $P(4/3)$

$$P' = \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(-1)\cdot 4 + 0 \cdot 3\\0 \cdot 4 + (-1) \cdot 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}$$

5.3.5. Normalprojektion auf die x-Achse

Es sind die Schatten der Pfeile auf die x-Achse, die mit der eingezeichneten Lampe erzeugt werden.



$$A = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

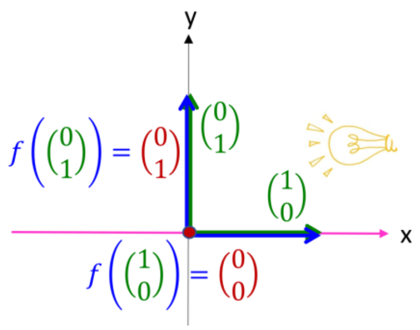
$$f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Beispiel: $P(4/3)$

$$P' = \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 \cdot 4 + 0 \cdot 3\\0 \cdot 4 + 0 \cdot 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$$

5.3.6. Normalprojektion auf die y-Achse

Es sind die Schatten der Pfeile auf die y-Achse, die mit der eingezeichneten Lampe erzeugt werden.



$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

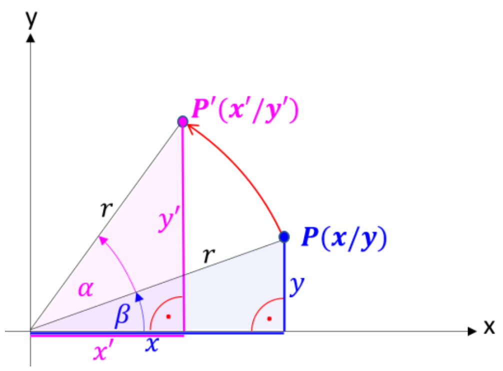
$$f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

Beispiel: $P(4/3)$

$$P' = \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\cdot 4+0\cdot 3\\0\cdot 4+1\cdot 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$$

5.3.7. Drehung um den Koordinatenursprung



$$cos(\beta) = \frac{x}{r} \quad |\cdot r \rightarrow \quad x = r\cdot cos(\beta)$$

$$sin(\beta) = \frac{y}{r} \quad |\cdot r \rightarrow \quad y = r\cdot sin(\beta)$$

$$cos(\beta+\alpha) = \frac{x'}{r} \quad |\cdot r \rightarrow \quad x' = r\cdot cos(\beta+\alpha)$$

$$sin(\beta+\alpha) = \frac{y'}{r} \quad |\cdot r \rightarrow \quad y' = r\cdot sin(\beta+\alpha)$$

Additionstheoreme: $\sin(\beta+\alpha) = \sin(\beta)\cdot\cos(\alpha) + \cos(\beta)\cdot\sin(\alpha)$

$$\cos(\beta+\alpha) = \cos(\beta)\cdot\cos(\alpha) - \sin(\beta)\cdot\sin(\alpha)$$

Eingesetzt in die Ausdrücke für x' und y': $x' = r \cdot cos(\beta + \alpha) = r \cdot (\cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) - \sin(\beta) \cdot \sin(\alpha)) =$

$$= \underbrace{r \cdot \cos(\beta)}_{x} \cdot \cos(\alpha) - \underbrace{r \cdot \sin(\beta)}_{y} \cdot \sin(\alpha) =$$

$$x' = x \cdot \cos(\alpha) - y \cdot \sin(\alpha)$$

$$y' = r \cdot sin(\beta + \alpha) = r \cdot (\sin(\beta) \cdot \cos(\alpha) + \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha)) =$$

$$= \underbrace{r \cdot \sin(\beta)}_{y} \cdot \cos(\alpha) + \underbrace{r \cdot \cos(\beta)}_{x} \cdot \sin(\alpha)$$

$$y' = y \cdot \cos(\alpha) + x \cdot \sin(\alpha)$$

$$x' = \cos(\alpha) \cdot x - \sin(\alpha) \cdot y$$

$$y' = \sin(\alpha) \cdot x + \cos(\alpha) \cdot y$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Beispiel: $P(4/3)$ Drehung um 30° = $\frac{\pi}{6}$

Positive Winkel bedeutet eine Drehung **gegen** den Uhrzeigersinn.

$$P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(30°) & -\sin(30°) \\ \sin(30°) & \cos(30°) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 3 \\ \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.96 \\ 4.60 \end{pmatrix}$$

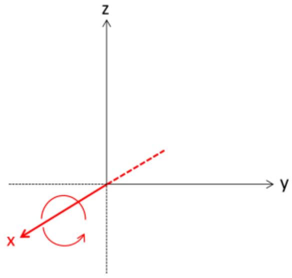
α	0° bzw. 0	30° bzw. $\frac{\pi}{6}$	45° bzw. $\frac{\pi}{4}$	60° bzw. $\frac{\pi}{3}$	90° bzw. $\frac{\pi}{2}$
$\sin(\alpha)$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{0}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{4}$
$\cos(\alpha)$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{4}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{0}$

Drehung um eine der Koordinatenachsen im $\mathbb{R}^3$:

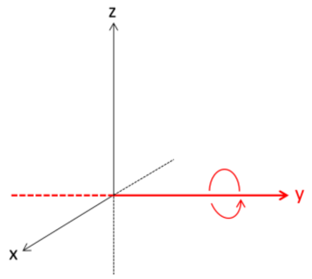
Die Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^3$: $\vec{e_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e_3} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Diejenigen **Koordinaten**, **die der Drehachse entsprechen**, verändern sich nicht.

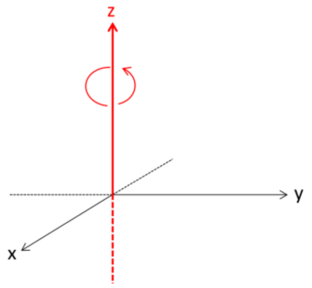
Die Rotationsmatrix $A = \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}$ wird für A_y und A_z jeweils transponiert (siehe 5.2.4., S 265)



$$A_x = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}$$



$$A_y = \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha)\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha)\end{pmatrix}$$



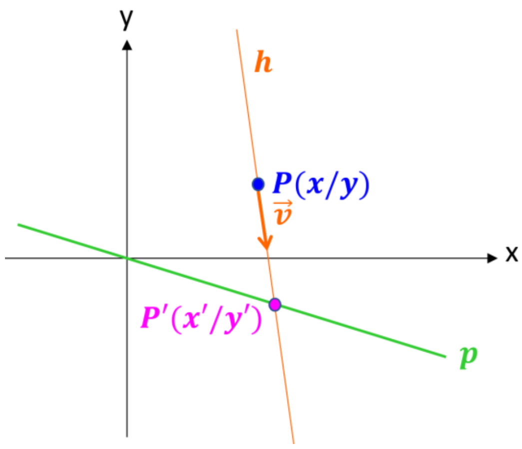
$$A_z = \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Beispiel: Drehung um die y-Achse um 45° :

$\sin(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ... siehe S 291

Damit lautet die Rotationsmatrix $A_y = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

5.3.8. Projektion auf eine Ursprungsgerade in Richtung eines Vektors $\vec{v}$



Ursprungsgerade: Eine Gerade, die durch den Koordinatenursprung geht.

Die Projektion P' des Punktes P auf die Ursprungsgerade p ist der Schnittpunkt der Geraden p und h.

Beispiel: $P(4/3) \quad p: x + 3\,y = 0 \quad \vec{v} = \binom{2}{1}$

Auf der Geraden $\boldsymbol{h}$ soll der Punkt $\boldsymbol{P}$ liegen und die Gerade soll die Richtung von $\vec{v}$ besitzen. Außerdem soll der Punkt $\boldsymbol{P'}$ auch auf $\boldsymbol{h}$ liegen:

$h\colon \overrightarrow{P'} = \binom{x}{y} + t \cdot \binom{2}{1}$ Siehe 4.5.1.1., S 199 f

$$\binom{x'}{y'} = \binom{x}{y} + t \cdot \binom{2}{1} \qquad \begin{aligned} x' &= x + 2\,t \\ y' &= y + t \end{aligned}$$

Der Punkt $\boldsymbol{P'}$ soll zusätzlich auf der Geraden $\boldsymbol{p}$ liegen:

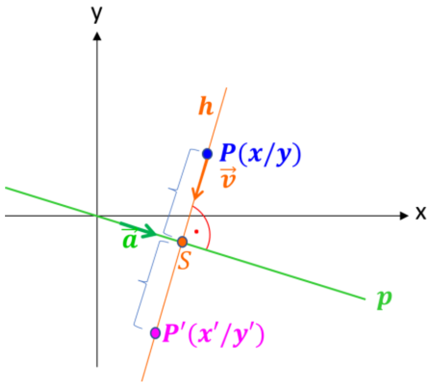
$$\begin{aligned} p\colon \quad x' + 3\;y' &= 0 \\ x + 2t + 3(y + t) &= 0 \\ x + 2\,t + 3\,y + 3\,t &= 0 \\ x + 3\,y + 5\,t &= 0 \quad | - x - 3\,y \\ 5\,t &= -x - 3\,y \quad | : 5 \\ \boldsymbol{t} &= \boldsymbol{-0.2\,x - 0.6\,y} \end{aligned}$$

$$h\colon \binom{x'}{y'} = \binom{x}{y} + t \cdot \binom{2}{1} \rightarrow \binom{x'}{y'} = \binom{x}{y} + (\boldsymbol{-0.2\,x - 0.6\,y}) \cdot \binom{2}{1}$$

$$\binom{x'}{y'} = \binom{x}{y} + \begin{pmatrix} -0.4\,x - 1.2\,y \\ -0.2\,x - 0.6\,y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6\,x - 1.2\,y \\ -0.2\,x + 0.4\,y \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0.6 & -1.2 \\ -0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$P' = \binom{x'}{y'} = \begin{pmatrix} 0.6 & -1.2 \\ -0.2 & 0.4 \end{pmatrix} \cdot \binom{4}{3} = \begin{pmatrix} 0.6 \cdot 4 - 1.2 \cdot 3 \\ -0.2 \cdot 4 + 0.4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \binom{-1.2}{0.4}$$

5.3.9. Spiegelung an einer Ursprungsgeraden



Ursprungsgerade: Eine Gerade, die durch den Koordinatenursprung geht.

Die Projektion P' des Punktes P auf die Ursprungsgerade p ist der Schnittpunkt der Geraden p und h.

Beispiel: $P(4/3) \quad p: x + 3\,y = 0$

Auf der Geraden h soll der Punkt P liegen und sie soll die **normale** Richtung von p besitzen:

$\vec{n_p} = \binom{1}{3} \qquad h: \vec{P'} = \binom{x}{y} + t \cdot \binom{1}{3}$ Siehe 4.4.5, S 190 und 4.5.1.3., S 202

Schneiden bedeutet geometrisch, gemeinsame Punkte der beiden Geraden zu suchen, rechnerisch gemeinsame Lösungen suchen:

$$\vec{P'} = \binom{x}{y} + t \cdot \binom{1}{3} \qquad \binom{x'}{y'} = \binom{x}{y} + t \cdot \binom{1}{3} \qquad \begin{aligned} x' &= x + t \\ y' &= y + 3t \end{aligned}$$

P' soll auch auf p liegen:

$$\begin{aligned} x' + 3\,y' &= 0 \\ x + t + 3(y + 3t) &= 0 \\ x + t + 3\,y + 9\,t &= 0 \\ x + 3\,y + 10\,t &= 0 \;|-x-3\,y \\ 10\,t &= -x - 3\,y \;|:10 \\ \boldsymbol{t} &= \boldsymbol{-0.1\,x - 0.3\,y} \end{aligned}$$

mal 2 da P' doppelt so weit von P entfernt ist wie der Schnittpunkt S

$$h: \vec{P'} = \binom{x}{y} + \mathbf{2} \cdot t \cdot \binom{1}{3}: \quad \binom{x'}{y'} = \binom{x}{y} + \mathbf{2} \cdot (\boldsymbol{-0.1\,x - 0.3\,y}) \cdot \binom{1}{3}$$

$$\binom{x'}{y'} = \binom{x}{y} + (\boldsymbol{-0.2\,x - 0.6\,y}) \cdot \binom{1}{3}$$

$$\binom{x'}{y'} = \binom{x}{y} + \begin{pmatrix} -0.2\,x - 0.6\,y \\ -0.6\,x - 1.8\,y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8\,x - 0.6\,y \\ -0.6\,x - 0.8\,y \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 \\ -0.6 & -0.8 \end{pmatrix}$$

$$P' = \binom{x'}{y'} = \binom{4}{3} \begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 \\ -0.6 & -0.8 \end{pmatrix} \cdot \binom{4}{3} = \begin{pmatrix} 0.8 \cdot 4 - 0.6 \cdot 3 \\ -0.6 \cdot 4 - 0.8 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.4 \\ -4.8 \end{pmatrix}$$

5.3.10. Streckung bzw. Stauchung bezüglich Koordinatenursprung

Ohne grafische Darstellung: Streckungsfaktor $a > 0$ bzw. Stauchungsfaktor $\frac{1}{a}$: $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

Beispiel: $P(4/3) \quad a = 2$

$$P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Analoge Überlegungen gelten für den $\mathbb{R}^3$.

Beispiel:

Aufstellen von linearen Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$: Bestimmen Sie die Matrix der folgenden linearen Abbildungen und wenden Sie dann die Abbildung auf den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ an.

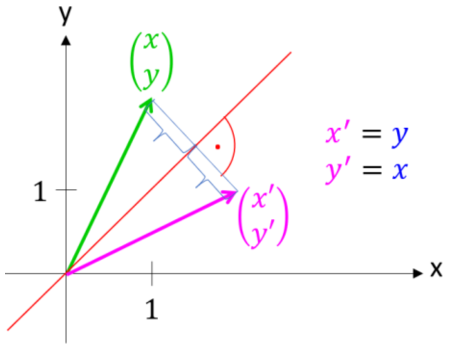
(a) Spiegelung um die "Diagonale" also die Gerade durch den Ursprung und den Punkt $(1,1)$ geht.

(b) Drehung um -45 Grad

(c) Stauchung um den Faktor 2

(d) (Normal-)Projektion auf die Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

(a)



$x' = 0\,x + 1\,y$

$y' = 1\,x + 0\,y \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

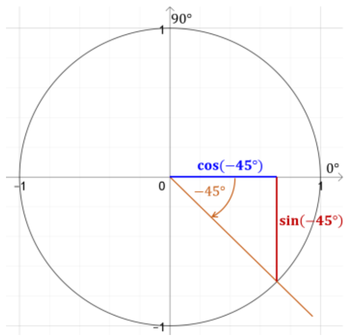
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Oder: $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) Siehe 5.3.7, S 290 f

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = A = \begin{pmatrix} \cos(-45°) & -\sin(-45°) \\ \sin(-45°) & \cos(-45°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

α	$0°$ bzw. 0	$30°$ bzw. $\frac{\pi}{6}$	$45°$ bzw. $\frac{\pi}{4}$	$60°$ bzw. $\frac{\pi}{3}$	$90°$ bzw. $\frac{\pi}{2}$
$\sin(\alpha)$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4}$
$\cos(\alpha)$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{0}$



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

(c) $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Wenn die Stauchung 2 beträgt, ist der Faktor $\frac{1}{2}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot 1 + 0\cdot 2 \\ 0\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

(d) Siehe 4.4.7., S 196 f und 4.7.5.1., S 252 f

$$\vec{b}_{||} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\cdot\vec{a} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left(\sqrt{3^2+(-4)^2}\right)^2}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{3-8}{25}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{-5}{25}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

5.3.11. Hintereinanderausführung linearer Abbildungen

Beispiel: Geben Sie die Matrix jener linearen Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an, die einen beliebigen Vektor zuerst in x-Richtung um den Faktor 2 streckt und das Ergebnis dann an der y-Achse spiegelt.

Streckung in x-Richtung um den Faktor 2: $f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \quad f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \ \to \ A_1 = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

Spiegelung an der y-Achse: $f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \quad f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \ \to \ A_2 = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

$$A_2 \cdot A_1 = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = A$$

Ist diese lineare Abbildung umkehrbar? Können Streckung um den Faktor 2 in x-Richtung und die Spiegelung an der y-Achse eindeutig rückgängig gemacht werden?

Eine lineare Abbildung ist (eindeutig) umkehrbar, wenn sich zur Abbildungsmatrix A die inverse Matrix A^{-1} finden lässt.

$$A = \begin{pmatrix}-2 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{cc|cc}-2 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 1\end{array}\right) :(-2) \quad \to \quad \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -0.5 & 0\\0 & 1 & 0 & 1\end{array}\right) \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix}-0.5 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

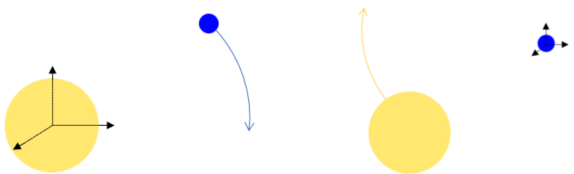
5.3.12. Wechsel von Koordinatensystemen

© Pixabay

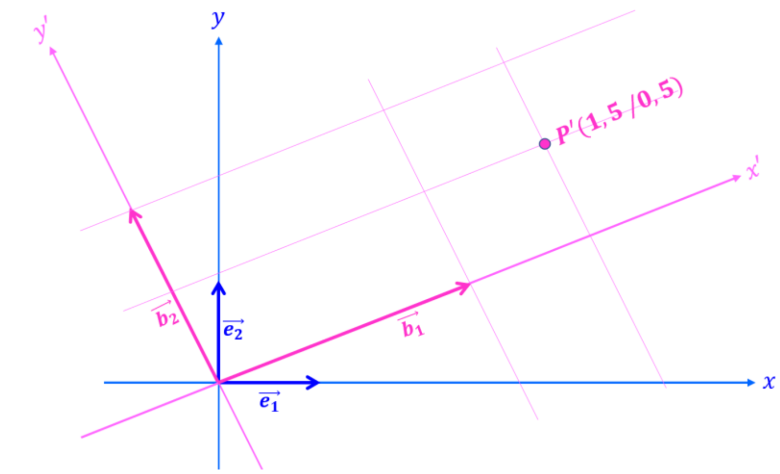
Eine der wesentlichen Anwendungen linearer Funktionen ist der Wechsel zwischen Koordinatensystemen.

Physikalische Gesetze sollten unabhängig vom gewählten Koordinatensystem zu gleichen Ergebnissen führen.

Deshalb benötigt man ein Mittel, um zwischen Koordinatensystemen wechseln zu können.



Beispiel im $\mathbb{R}^2$:



Das ursprüngliche Koordinatensystem ist das kartesische mit den Basisvektoren $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Das neue Koordinatensystem besitzt die Basisvektoren $\vec{b_1}$ und $\vec{b_2}$, die nicht gleich lang sind und nicht normal aufeinander stehen (keine ONB bilden) (siehe 4.7.4., S 246 f)

Im ursprünglichen Koordinatensystem besitzen $\vec{b_1}$ und $\vec{b_2}$ die Koordinaten $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Der Punkt P' besitzt im *neuen* Koordinatensystem die Koordinaten $P'(1.5/0.5)$.

Wollen wir die Koordinaten von P' im ursprünglichen Koordinatensystem, so gehen wir so vor:

$$P' = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} = 1.5 \cdot \vec{b_1} + 0.5 \cdot \vec{b_2} = 1.5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.5 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 1.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2.5 \end{pmatrix} = P$$

Wollen wir die Koordinaten von P im *neuen* Koordinatensystem, so gehen wir so vor:

$$P = \begin{pmatrix} 4 \\ 2.5 \end{pmatrix} = x' \cdot \vec{b_1} + y' \cdot \vec{b_2} = x' \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + y' \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 4 &= 3\,x' - 1\,y' \\ 2.5 &= 1\,x' + 2\,y' \end{aligned}$$

x'	y'		
3	-1	4	
1	2	2.5	$\mid \cdot 3$]$-$
3	-1	4	
0	-7	-3.5	$\rightarrow$ $\mathbf{y' = 0.5} \rightarrow$ $\mathbf{x' = 1.5}$ $P'(1.5/0.5)$

Die **Bedingungen** für diese Art von Umwandlungen sind:

- Beide Koordinatensysteme haben denselben Ursprung
- Die Koordinatenachsen sind Geraden.

Bemerkung 1: Bei dem bildlichen Beispiel Sonne und Erde auf S 297 unten hätten die Koordinatensysteme nicht denselben Ursprung.

Bemerkung 2: Bei Polarkoordinaten sind die Koordinatenachsen nicht notwendig Geraden. Zum Beispiel in der sphärischen Geometrie (Erdball).

Übung

1) Ein neues Koordinatensystem besitzt die Basisvektoren $\overrightarrow{b_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

a) Ein Punkt in diesem neuen Koordinatensystem besitzt die Koordinaten $(1,2)$.
Wie lauten seine Koordinaten im kartesischen Koordinatensystem?

b) Ein Punkt im kartesischen Koordinatensystem besitzt die Koordinaten $(2,1)$.
Wie lauten seine Koordinaten im neuen Koordinatensystem?

2) Ein neues Koordinatensystem besitzt die Basisvektoren $\overrightarrow{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ein Punkt in diesem neuen Koordinatensystem besitzt die Koordinaten $(4, 2, 1)$.
Wie lauten seine Koordinaten im kartesischen Koordinatensystem?

Lösungen: 1) a) (4 / –5) b) (1 / 0) 2) (3 / –6 / 4)

5.4. Bild und Kern einer Matrix

5.4.1. Bild einer Matrix

Beispiel: Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Multiplizieren wir diese Matrix der Reihe nach mit den Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten die drei Spaltenvektoren. Diese sind **ein** mögliches Bild (**image**) der Matrix.

$$\operatorname{img}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

Es gibt jedoch unendlich viele Bilder der Matrix, nämlich alle Spaltenvektoren, die sich durch Multiplikation der Matrix mit einem *beliebigen* Spaltenvektor ergeben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad \ldots$$

$$\operatorname{img}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}, \ \ldots \right\}$$

Der vierte Spaltenvektor ist hier das Doppelte des dritten und der dritte Spaltenvektor das Doppelte des ersten.

Demnach benötigen wir für das Bild der Matrix nur die ersten beiden Spaltenvektoren und ihre Linearkombinationen, um alle unendlich vielen Bilder der Matrix zu erzeugen (Siehe auch 4.7.1., S 233 f):

$$\operatorname{img}(A) = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$$

4.7.2., S 237

Die Linearkombinationen linear **un**abhängiger Spaltenvektoren einer Matrix A heißen Bild der Matrix A.

Im praktischen Rechnen geht man so vor: Man bildet zunächst die **transponierte Matrix A^T** und verwandelt diese Matrix in
die Zeilenstufenform (in eine obere Dreiecksmatrix). (Siehe auch 5.2.6., S 275)
Ansonsten müsste man eine Spaltenstufenform erreichen, was recht ungewohnt ist.

Rechengang:
1. Matrix transponieren
2. Transponierte Matrix in obere Dreiecksmatrix verwandeln.
3. Dreiecksmatrix transponieren
4. Bild aufschreiben

Beispiel: Berechnen Sie das Bild der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad ① \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \boxed{3\cdot\text{I}-\text{II}} \quad \boxed{2\cdot\text{I}-\text{III}}$$

$$② \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$③ \quad (A^T)^T = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$④ \quad \operatorname{img}(A) = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Wir können statt des Spaltenvektors $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ auch den halb so langen Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ wählen, weil die Linearkombination der linear unabhängigen Spaltenvektoren das Bild aufstellen.

Die Dimension dieses Bildes ist 2, da es aus 2 linear **un**abhängigen Vektoren besteht.

Es gilt: $\operatorname{rg}(A) = \dim(\operatorname{ing}(A))$

Die Dimension einer **Matrix** mit n Zeilen und m Spalten ist n x m

Vergleichen wir die beiden erstellten Bilder der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$:

$\operatorname{img}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$ (S 300 unten) bzw. das eben berechnete Bild $\operatorname{img}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

Die beiden Bilder sind augenscheinlich nicht gleich. Die jeweiligen Bilder entstammen der Menge **aller** Linearkombinationen linear **un**abhängiger Spaltenvektoren.

Daraus folgt, dass es unendlich viele Möglichkeiten gibt, das Bild einer bestimmten Matrix aufzuschreiben.

5.4.2. Kern einer Matrix

Der Kern einer Matrix A, Kern(A), ist die Lösungsmenge des **homogenen** Gleichungssystems $A \cdot \vec{X} = \vec{\mathbf{0}}$.

Die Dimension des Kerns = Defekt = Rg(A) – 1 = dim (ing(A)) – 1

Beispiel: Berechnen Sie den Kern der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

x_1	x_2	x_3		
1	3	2	0	
2	4	4	0	2·I–II
3	5	6	0	3·I–III
1	3	2	0	
0	2	0	0	
0	4	0	0	2·II–III
1	3	2	0	$\rightarrow x_1 + 0 + 2\lambda = 0 \rightarrow x_1 = -2\lambda$
0	2	0	0	$\rightarrow 2x_2 = 0 \rightarrow x_2 = 0$
0	0	**0**	0	$\rightarrow x_3 = \lambda$

$$x_1 = 0 - 2t \qquad x_2 = 0 + 0t \qquad x_3 = 0 + 1t \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Kern ist in diesem Fall die Gerade, die vom Vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

Kern(A) = $\left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ Die Dimension des Kerns ist 1 = Defekt.

Dimension **0** … die Lösung des homogenen Gleichungssystems ist ein einziger **Punkt**

Dimension **1** … alle Lösungen des homogenen Gleichungssystems liegen auf einer **Geraden**

Dimension **2** … alle Lösungen des homogenen Gleichungssystems liegen auf einer **Ebene**

Beispiel: Berechnen Sie den Kern der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$.

x_1	x_2		
2	1	0	$\boxed{3\cdot\text{I}-\text{II}}$
6	3	0	
2	1	0	$\rightarrow\ 2\,x_1 + 1\,\lambda = 0 \rightarrow\ x_1 = -0.5\cdot\lambda$
0	0	0	$\rightarrow\ x_2 = \lambda$

$$x_1 = 0.5\cdot\lambda \qquad x_2 = 1\cdot\ \lambda \qquad \lambda\cdot\begin{pmatrix}0.5\\1\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$\text{Kern}(A) = \left\{\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \mid \lambda\in\mathbb{R}\right\} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\} = <\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}>$$

Die Dimension des Kerns ist 1.

Gegeben ist das (m, n)-Gleichungssystem $A\cdot\vec{X} = \vec{b}$.

- Für $\vec{b}$ hat das Gleichungssystem zumindest eine Lösung, wenn $\vec{b} \in \text{Bild}(A)$
- Hat man eine Lösung x_0 des **in**homogenen Gleichungssystems, so erhält man alle anderen mit $x = x_0 + \text{Kern}(A)$

Wie überprüft man, ob eine Matrix einen Kern besitzt?

Für quadratische Matrizen gilt:

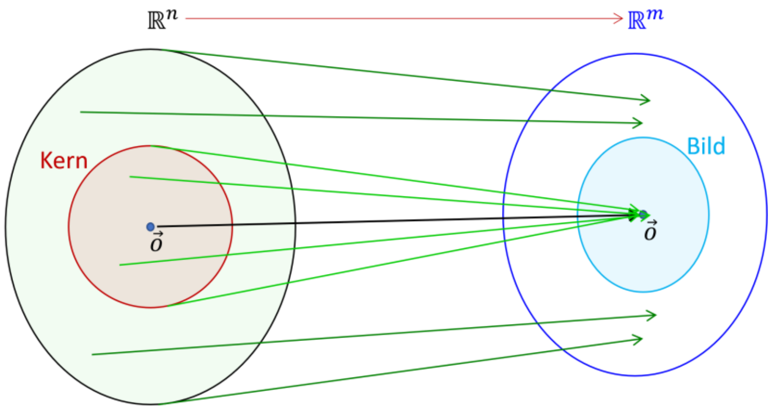
$$\det(A) \neq 0 \rightarrow\ \text{Kern}(A) = \{\vec{o}\}$$

$$\det(A) = 0 \rightarrow\ \text{Kern}(A) \neq \{\vec{o}\}$$

det … Determinante (siehe 6.1., S 306 f)

$$\det\left|\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}\right| = 2\cdot 3 - 6\cdot 1 = 6 - 6 = 0 \rightarrow \; Kern(A) \neq \{\vec{o}\}$$

Zusammenfassend lässt sich feststellen:



- Der Nullvektor $\vec{o} \in \mathbb{R}^n$ wird auf dem Nullvektor $\vec{o} \in \mathbb{R}^m$ abgebildet.
- Alle Vektoren $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$des Kerns werden auf dem Nullvektor $\vec{o} \in \mathbb{R}^m$ abgebildet.

  Deshalb besteht der Kern aus jenen Vektoren, die sich aus den Lösungen des homogenen Gleichungssystems $A \cdot \vec{X} = \vec{o}$ ergeben.
- Hat der Kern die Dimension null, so wird nur der Nullvektor $\vec{o} \in \mathbb{R}^n$ auf dem Nullvektor $\vec{o} \in \mathbb{R}^n$ abgebildet.
- $\dim(\mathrm{img}(A)) + dim(Kern(A)) = n$
- $\dim\big(\mathrm{img}(A)\big) = \mathrm{Rg}(A)$

Übung

1. Welche Dimension hat die Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems aus 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten?

2. Kann ein lineares Gleichungssystem genau zwei Lösungen haben?

3. Warum hat ein homogenes lineares Gleichungssystem mindestens eine Lösung?

4. Wahr oder falsch: Ein lineares Gleichungssystem, das aus gleich vielen Gleichungen wie Variablen besteht, ist immer eindeutig lösbar.

5. Ist dieses Gleichungssystem, dargestellt durch die erweiterte Matrix, eindeutig lösbar? $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

   Wenn ja, bestimmen Sie die Lösungen.

6. Geben Sie den Kern folgender (n, n) −Matrizen an: a) $A = \vec{o}$ b) $A = E$

7. Eine Abbildung lautet (1) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \ \mid f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 5 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

   (2) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \ \mid f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$

   a) Überprüfen Sie, ob es sich um eine lineare Abbildung handelt.

   b) Wenn ja, geben Sie die Abbildungsmatrix an.

8. Geben Sie die lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ an, mit $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Lösungen: 1. Die Dimension ist $(2{,}3) = 2 \times 3$.

2. Nein, denn ein lineares Gleichungssystem besitzt entweder keine, eine oder unendlich viele Lösungen. (siehe 3.2.1., S 146 f und 3.2.2.1., S 153 f)

3. Ein homogenes lineares Gleichungssystem hat zumindest die Lösung $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ (triviale Lösung)

4. Falsch, denn es ist nur dann eindeutig lösbar, wenn Rg(A) = n mit n als der Anzahl der Variablen (siehe 5.2.7., S 2768 f)

5. Ja, weil Rg(A) = Rg(A|b) = 2 Lösung: $x_1 = 3,\ x_2 = 4$

6. a) Kern$(\vec{o}) = \mathbb{R}^n$ b) Kern$(E) =< \vec{o} > =< \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} >$

7. (1) $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\,x_1 + 5\,x_2 \\ 1\,x_1 + 1\,x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x_1 + 5 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$ f ist **keine** lineare Abbildung.

(2) (1) $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,x_1 + x_2 + 0\,x_3 \\ 0\,x_1 + 1\,x_2 - 1\,x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right)$$

f ist linear mit der Abbildungsmatrix A.

8. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $A \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \end{pmatrix}$

$1\,a + 2\,b = -2 \qquad 3\,a + 1\,b = 9$

$1\,c + 2\,d = 8 \qquad 3\,c + 1\,d = -1$

$a + 2\,b = -2 \qquad 3c + \ d = -1$

$3\,a + \ b = 9 \quad |\mathrm{I} - 2.\mathrm{II} \qquad c + 2d = 8 \quad |\ \mathrm{I} - 3.\mathrm{II}$

$-5a = -20 \qquad -5d = -25$

$a = 4 \qquad d = 5$

$b = -3 \qquad c = -2$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,x_1 - 3\,x_2 \\ -2x_1 + 5x_2 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)$$

„An seinen Vorfahren kann man nichts ändern, aber man kann mitbestimmen, was aus den Nachkommen wird."
François de La ROCHEFOUCAULD
(1613–1680)

VI DETERMINANTEN

6.1. Grundbegriffe

Die **Determinante det(A)** bzw. **|A|** einer **quadratischen** Matrix A ergibt eine Zahl, die sich durch folgende Berechnung ergibt (Regel von SARRUS). [28]

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

① Wir schreiben die ersten beiden Spalten rechts neben die Matrix.
② Dann bilden wir die **Diagonalen von links oben nach rechts unten** (Hauptdiagonalen).
③ Nun folgen die **Diagonalen von links unten nach rechts oben**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \overset{\textcircled{1}}{\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right.} = \overset{\textcircled{2}}{\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right.} =$$

$$= \overset{\textcircled{3}}{\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right.}$$

④ Die Zahlen entlang der Diagonalen werden multipliziert.
Die Ergebnisse der **Diagonalen von links oben nach rechts unten** werden **addiert**,
die Ergebnisse der **Diagonalen von links unten nach rechts oben** werden **subtrahiert**.

④ $\det(A) = |A| = \mathbf{+1\,.\,1\,.\,2\ +2\,.\,3\,.\,1\ +1\,.\,1\,.\,4\ -1\,.\,1\,.\,1\ -4\,.\,3\,.\,1\ -2\,.\,1\,.\,2 = +12 - 17 = -5}$

Mit Hilfe von Determinanten lassen sich auch lineare Gleichungssysteme lösen:

[28] Pierre Frédéric *SARRUS* (1798–1861), französischer Mathematiker

Beispiel:

$$\begin{array}{rl} \text{I:} & 4x + 2y - 7z = -15 \\ \text{II:} & 3x + 2y - 4z = -8 \\ \text{III:} & x - 6y + 2z = 14 \end{array}$$

Zunächst bilden wir die **Koeffizientenmatrix A**: Sie besteht aus den Koeffizienten (Vorzahlen) der Gleichungen:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -7 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Dann berechnen wir den Wert der dazugehörigen Determinante:

$$\mathbf{det(A) = |A|} = \left|\begin{array}{rrr|rr} 4 & 2 & -7 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & 3 & 2 \\ 1 & -6 & 2 & 1 & -6 \end{array}\right. =$$

$$= +4 \,.\, 2 \,.\, 2 + 2 \,.\, (-4) \,.\, 1 + (-7) \,.\, 3 \,.\, (-6) - 1 \,.\, 2 \,.\, (-7) - (-6) \,.\, (-4) \,.\, 4 - 2 \,.\, 3 \,.\, 2 = \mathbf{40}$$

Jetzt benötigen wir die Determinanten **det(A_x) = |A_x|** , **det(A_y) = |A_y|** und **det(A_z) = |A_z|**.

det(A_x) = |A_x| erhalten wir, indem wir die Koeffizienten der x-Spalte, durch die Spalte der konstanten Glieder,
det(A_y) = |A_y| erhalten wir, indem wir die Koeffizienten der y-Spalte, durch die Spalte der konstanten Glieder,
det(A_z) = |A_z| erhalten wir, indem wir die Koeffizienten der x-Spalte, durch die Spalte der konstanten Glieder

ersetzen.

$$\begin{array}{rl} \text{I:} & 4x + 2y - 7z = \boxed{-15} \\ \text{II:} & 3x + 2y - 4z = \boxed{-8} \\ \text{III:} & x - 6y + 2z = \boxed{14} \end{array}$$

$$\mathbf{det(A_x) = |A_x|} = \begin{vmatrix} -15 & 2 & -7 \\ -8 & 2 & -4 \\ 14 & -6 & 2 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{rrr|rr} -15 & 2 & -7 & -15 & 2 \\ -8 & 2 & -4 & -8 & 2 \\ 14 & -6 & 2 & 14 & -6 \end{array}\right. =$$

$$= +(-15) \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-4) \cdot 14 + (-7) \cdot (-8) \cdot (-6) - 14 \cdot 2 \cdot (-7) - (-6) \cdot (-4) \cdot (-15) - 2 \cdot (-8) \cdot 2 = \mathbf{80}$$

$$\mathbf{det(A_y) = |A_y|} = \begin{vmatrix} 4 & -15 & -7 \\ 3 & -8 & -4 \\ 1 & 14 & 2 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{rrr|rr} 4 & -15 & -7 & 4 & -15 \\ 3 & -8 & -4 & 3 & -8 \\ 1 & 14 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right. =$$

$$= +4 \cdot (-8) \cdot 2 + (-15) \cdot (-4) \cdot 1 + (-7) \cdot 3 \cdot 14 - 1 \cdot (-8) \cdot (-7) - 14 \cdot (-4) \cdot 4 - 2 \cdot 3 \cdot (-15) = \mathbf{-40}$$

$$\textbf{det}(\mathbf{A_z}) = |\mathbf{A_z}| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & \boxed{-15} \\ 3 & 2 & -8 \\ 1 & -6 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -15 \\ 3 & 2 & -8 \\ 1 & -6 & 14 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & -6 \end{matrix} =$$

$$= +4 \cdot 2 \cdot 14 + 2 \cdot (-8) \cdot 1 + (-15) \cdot 3 \cdot (-6) - 1 \cdot 2 \cdot (-15) - (-6) \cdot (-8) \cdot 4 - 14 \cdot 3 \cdot 2 = \mathbf{120}$$

Für die Werte für x, y und z gilt:

CRAMERsche Regel [29]

$$\boxed{\mathbf{x} = \frac{|\mathbf{A_x}|}{|\mathbf{A}|} \qquad \mathbf{y} = \frac{|\mathbf{A_y}|}{|\mathbf{A}|} \qquad \mathbf{z} = \frac{|\mathbf{A_z}|}{|\mathbf{A}|}}$$

Auf unser Beispiel übertragen: $\mathrm{x} = \frac{80}{40} = 2 \qquad \mathrm{y} = \frac{-40}{40} = -1 \qquad \mathrm{z} = \frac{120}{40} = 3$

$$L = \{(2,\ -1, 3)\}$$

Wollen wir überprüfen, ob ein lineares Gleichungssystem eindeutig lösbar ist, bilden wir zunächst die **Koeffizientenmatrix *A*** und den Wert der dazugehörigen **Determinante**. Besitzt diese den Wert **null**, so existiert **keine Lösung**. Die Brüche zur Berechnung der Variablen (siehe Kasten oben) sind dann nicht definiert, weil der Nenner null ist.

[29] Gabriel CRAMER (1704–1752). Schweizer Mathematiker, der diese Regel 1750 veröffentlichte.
Die Zeit, um damit lineare Gleichungssysteme zu lösen, nimmt mit der Anzahl n der Variablen auch bei elektronischer Unterstützung sehr schnell zu, wie folgende Tabelle zeigt:

n	10	12	14	16	18	20
Rechenzeit	0,4 s	1 min	3,6 h	41 Tage	38 Jahre	16 000 Jahre

Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Cramersche_Regel

- Die Determinante einer **Dreiecks**matrix ist gleich dem Produkt ihrer Diagonal-Elemente.

Beispiel: Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

Verwandeln wir A in eine obere Dreiecksmatrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \mathrm{II}-2\cdot\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-\frac{7}{2}\cdot\mathrm{I} \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \mathrm{III}+\frac{5}{4}\cdot\mathrm{II} \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 1 & 3 \\ 0 & \mathbf{-2} & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{-\frac{15}{4}} \end{pmatrix}$$

$\det(A) = \mathbf{2} \cdot (\mathbf{-2}) \cdot \left(\mathbf{-\frac{15}{4}}\right) = 15$

- Eine (n, n)-Matrix ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$

- Ein Gleichungssystem $A \cdot \vec{X} = \vec{b}$ ist dann eindeutig lösbar, wenn $\det(A) \neq 0$

  Die Lösung ist dann $\vec{X} = A^{-1} \cdot \vec{b}$

- Für quadratische Matrizen gilt:

$$\det(A) \neq 0 \rightarrow \quad \mathrm{Kern}(A) = \{\vec{o}\}$$

$$\det(A) = 0 \rightarrow \quad \mathrm{Kern}(A) \neq \{\vec{o}\}$$

6.2. Eigenwerte einer Matrix

Grundsätzlich dienen Eigenwerte bzw. Eigenvektoren dazu, um bei großen Datenmengen (großen Matrizen) die Dimension zu reduzieren (die Matrix als Vielfaches eines Vektors darzustellen).

Anwendungen:

- Gesichtserkennung 
- Algorithmen
- Suchmaschinen

Multipliziert man eine **Matrix mit** einem **Vektor**, so **erhält** man wiederum einen **Vektor**, wenn die Dimensionen stimmen, wenn also die

Spaltenanzahl der **Matrix** = **Zeilenanzahl** des **Vektors**

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$A \cdot \vec{v} = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 8$$
$$2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12$$

Der **Ergebnis-Vektor** hat die **gleiche Dimension** wie der Vektor, mit dem multipliziert wurde.
Der **Ergebnis-Vektor** besitzt die **gleiche Richtung** wie der Vektor, mit dem multipliziert wurde, ist parallel zu ihm und hat, in diesem Falle, die vierfache Länge.

Gibt es noch andere Vektoren, die, mit der Matrix multipliziert, ihre Richtung beibehalten und sich lediglich in ihrer Länge (ihrem Betrag) unterscheiden? Die also **Vielfache des Vektors $\vec{v}$** sind?

$$\boldsymbol{A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}}$$

Das ist sicher dann erfüllt, wenn $\vec{v} = \vec{o}$ (der Nullvektor) ist, denn dann gilt:

$$A \cdot \vec{o} = \lambda \cdot \vec{o}$$
$$\vec{o} = \vec{o}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schauen wir uns den Fall $\vec{v} \neq \vec{o}$ an: $\boxed{\boldsymbol{A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} \wedge \vec{v} \neq \vec{o}}}$

Diese **Bedingungen** nennt man das sogenannte **Eigenwertproblem**, $\vec{v}$ den **Eigenvektor** (weil er seine eigene Richtung beibehält) und $\boldsymbol{\lambda}$ den **Eigenwert**.

An die Beschriftungen für Gleichungen angelehnt, wählen wir statt $\vec{v}$ die Schreibweise $\vec{X}$:

$$\boldsymbol{A \cdot \vec{X} = \lambda \cdot \vec{X}}$$

Formen wir die Gleichung so um, dass auf einer Seite der Nullvektor steht:

$$A \cdot \vec{X} = \lambda \cdot \vec{X} \quad | - \lambda \cdot \vec{X}$$

Da $\vec{X}$ in jedem Glied vorkommt, können wir $\vec{X}$ herausheben (ausklammern).

$$A \cdot \vec{X} - \lambda \cdot \vec{X} = \vec{o}$$

$$(A - \lambda) \cdot \vec{X} = \vec{o}$$

Ein Problem stellt dar, dass man von einer Matrix (A) keine Zahl (λ) subtrahieren kann.

Es gilt aber: $\boldsymbol{E} \cdot \vec{X} = \vec{X}$ [30]
$\boldsymbol{E}$ **... Einheitsmatrix**

$$A \cdot \vec{X} - \lambda \cdot E \cdot \vec{X} = \vec{o}$$

$$(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{X} = \vec{o}$$

Ein Produkt (Ergebnis einer Multiplikation) ist dann null, wenn mindestens einer der Faktoren null ist.
Entsprechend für Vektoren: Matrix mal Vektor ergibt den Nullvektor, wenn entweder die Matrix oder der Vektor der Nullvektor ist.

$$\underbrace{(A - \lambda \cdot E)}_{= \vec{o}} \vee \underbrace{\vec{X}}_{= \vec{o}}$$

Vorausgesetzt $\vec{X} \neq \vec{o}$, also bleibt nur noch:

$$A - \lambda \cdot E = \vec{o}$$

30 Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Siehe 5.2.3., S 264: $1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 = 2$
$0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 3$

Ohne Beweise führe ich an: Es sei $B = A - \lambda \cdot E$:

$\mathrm{Rg(B)} = \mathrm{n} \Leftrightarrow \det(\mathrm{B}) \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{B}^{-1}$ existiert $\Leftrightarrow \mathrm{B} \cdot \vec{\mathrm{X}} = \vec{\mathrm{o}}$ hat nur die Lösung $\vec{\mathrm{X}} = \vec{\mathrm{o}} \Leftrightarrow \lambda = 0$ ist kein Eigenwert von B

Damit gilt im Umkehrschluss:

$\mathrm{Rg(B)} < \mathrm{n} \wedge$ $\mathbf{\det(B) = 0}$ $\wedge\ \mathrm{B}^{-1}$existiert nicht $\wedge\ \mathrm{B} \cdot \vec{\mathrm{X}} = \vec{\mathrm{o}}$ hat weitere Lösungen außer $\vec{\mathrm{X}} = \vec{\mathrm{o}}$ $\wedge$ $\lambda = 0$ ist ein Eigenwert von B

Am einfachsten sind die Eigenwerte zu ermitteln mit: $\boxed{\det(A - \lambda \cdot E) = 0}$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 10 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

$$A - \lambda \cdot E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 10 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 10 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 10-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 10-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$\det(A - \lambda \cdot E) = 0$ bedeutet

Die Regel von SARRUS angewandt:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2-\lambda & -1 & 2 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & 10-\lambda & -2 & -1 & 10-\lambda \\ 2 & -2 & 5-\lambda & 2 & -2 \end{array}\right.$$

$$= +(2-\lambda)\cdot(10-\lambda)\cdot(5-\lambda) + (-1)\cdot(-2)\cdot 2 + 2\cdot(-1)\cdot(-2)$$

$$-2\cdot(10-\lambda)\cdot 2 - (-2)\cdot(-2)\cdot(2-\lambda) - (5-\lambda)\cdot(-1)\cdot(-1) =$$

$$= +(2-\lambda)\cdot(10-\lambda)\cdot(5-\lambda) + 4 + 4 - 4\cdot(10-\lambda) - 4\cdot(2-\lambda) - 1\cdot(5-\lambda) = 0$$

$$\boxed{+(2-\lambda)\cdot(10-\lambda)\cdot(5-\lambda) + 4 + 4 - 4\cdot(10-\lambda) - 4\cdot(2-\lambda) - (5-\lambda) = 0}$$

Den oberen Ausdruck nennt man auch **charakteristisches Polynom** der Matrix A.

Ausmultipliziert ergibt das ein Polynom 3. Grades, null gesetzt eine Gleichung 3. Grades in λ.
Diese Gleichung hat in $\mathbb{C}$ **genau 3** Lösungen, in $\mathbb{R}$ **höchstens 3** Lösungen.
Es sind maximal so viele Lösungen, wie die quadratische Matrix Zeilen bzw. Spalten besitzt.
Im Allgemeinen lässt sich diese Gleichung mit dem HORNERschema (3.1.3., S 127 f) lösen.

Des Öfteren bietet sich auch ein schnelleres Lösungsverfahren an:

Einer der Eigenwerte ist entweder null oder ein Wert der Hauptdiagonale, in diesem Beispiel also 2 , 10 oder 5.

Ist 2 , 10 oder 5 ein Eigenwert, so lässt sich der markierte Teil des Polynoms so zusammenfassen, dass einer der Faktoren des Produktes

$(2-\lambda)\cdot(10-\lambda)\cdot(5-\lambda)$ entsteht.

$$\boxed{+(2-\lambda)\cdot(10-\lambda)\cdot(5-\lambda)\ \boxed{+ 4 + 4 - 4\cdot(10-\lambda) - 4\cdot(2-\lambda) - (5-\lambda)} = 0}\ :$$

$$\boxed{+ 4 + 4 - 4\cdot(10-\lambda) - 4\cdot(2-\lambda) - (5-\lambda)} = 8 - 40 + 4\cdot\lambda - 8 + 4\cdot\lambda - 5 + \lambda = 9\cdot\lambda - 45 = 9\cdot(\lambda - 5) =$$

$$= -9\cdot(-\lambda + 5) = \boxed{-9\cdot(5-\lambda)}$$

Jetzt setzen wir diesen Ausdruck für $\boxed{}$ in das charakteristische Polynom ein:

$$+(2-\lambda)\cdot(10-\lambda)\cdot(5-\lambda)\boxed{-9\cdot(5-\lambda)} = 0$$

$(5-\lambda)\cdot[(2-\lambda)\cdot(10-\lambda) - 9] = 0$ Da $(5-\lambda)$ in jedem Glied vorkommt: herausheben

$\underbrace{(5-\lambda)}_{=0}\cdot\underbrace{[(2-\lambda)\cdot(10-\lambda) - 9]}_{=0} = 0$

Wir wenden den **Produkt-Null-Satz** an:
Ein Produkt (Ergebnis einer Multiplikation) ist dann null, wenn mindestens einer der Faktoren null ist.

$5 - \lambda = 0 \qquad \vee \qquad (2 - \lambda) \cdot (10 - \lambda) - 9 = 0$

$5 - \lambda = 0 \quad | + \lambda \qquad 20 - 2 \cdot \lambda - 10 \cdot \lambda + \lambda^2 - 9 = 0$

$\mathbf{5 = \lambda_1} \qquad \underbrace{\lambda^2 - 12}_{p} \cdot \underbrace{\lambda + 11}_{q} = 0$

Die quadratische Gleichung lösen wir mit der **pq-Formel**:

$$1 \cdot x^2 + p \cdot x + q = 0$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\lambda_{2/3} = -\frac{(-12)}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{(-12)}{2}\right)^2 - 11}$$

$$\lambda_{2/3} = +6 \pm \sqrt{(6)^2 - 11}$$

$$\lambda_{2/3} = 6 \pm \sqrt{36 - 11}$$

$$\lambda_{2/3} = 6 \pm \sqrt{25}$$

$$\lambda_{2/3} = 6 \pm 5$$

$$\boldsymbol{\lambda_2 = 11} \qquad \boldsymbol{\lambda_3 = 1}$$

Damit haben wir die **Eigenwerte** der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 10 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ errechnet: $\boldsymbol{\lambda_1 = 5 \quad \lambda_2 = 11 \quad \lambda_3 = 1}$

Bemerkung: Die Reihenfolge der angegebenen Lösungen ist wie bei allen Gleichungen unerheblich.

Es gibt eine „Probe“, ob wir richtig gerechnet haben:

Die **Spur einer Matrix**, die **Summe der Werte der Hauptdiagonale**,
ist **gleich** groß wie die **Summe der Eigenwerte**.

2 + 10 + 5 = 17 und 5 + 11 + 1 = 17

Bemerkung: Lässt sich dieses Verfahren nicht anwenden, und wir müssen die Gleichung 3. Grades des charakteristischen Polynoms auf konventionelle Weise lösen, so kann man davon ausgehen, dass keiner der Werte der Hauptdiagonale ein Eigenwert ist.

```
import numpy as np
from numpy import linalg as LA
A = np.array([[2,-1,2],[-1,10,-2],[2,-2,5]])
w, v = LA.eig(A)
print(w)
```

```
[11.  1.  5.]
```

Übung

Ermitteln Sie die Eigenwerte folgender Matrizen:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 3) $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 8 & 3 & 7 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

4) $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 5) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

6)[27] Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Ermitteln Sie das charakteristische Polynom von A.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte.

Lösungen:

1) $1,\ 2$

2) $1 + 2i,\ 1 - 2i$

3) $1,\ 3,\ 7$

4) $1, -1$

5) $1, 1$

6) a) $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2$ b) $1,\ 2$

Video-Tipp https://www.youtube.com/watch?v=eJWgKvrhDm

6.3. Eigenvektoren und Eigenräume einer Matrix

Eigenwerte und **Eigenvektoren** lassen sich nur von **quadratischen** Matrizen berechnen!

Greifen wir als Beispiel jenes von Kapitel 6.2. auf.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 10 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

Um die Eigenvektoren bestimmen zu können, müssen die Eigenwerte bekannt sein.

$$\boxed{(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{E}) \cdot \vec{\boldsymbol{X}} = \vec{\boldsymbol{o}}}$$ Siehe 6.2., S 313

Beginnen wir mit dem Eigenvektor zum Eigenwert $\boldsymbol{\lambda = 1}$:

$A - \lambda \cdot E \quad \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 10-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = 0$ Siehe 6.2., S 314

Für $\boldsymbol{\lambda = 1}$ eingesetzt: $A - \lambda \cdot E = \begin{pmatrix} 2-1 & -1 & 2 \\ -1 & 10-1 & -2 \\ 2 & -2 & 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 9 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

$(A - 1 \cdot E) \cdot \vec{X} = \vec{o}$ bedeutet hier $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 9 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

und ausgerechnet

$$\begin{aligned} 1 \cdot x - 1 \cdot y + 2 \cdot z &= 0 \\ -1 \cdot x + 9 \cdot y - 2 \cdot z &= 0 \\ 2 \cdot x - 2 \cdot y + 4 \cdot z &= 0 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem lösen wir z.B. mit dem **Gaußschen Algorithmus** (3.2.2.2., S 154 f), vereinfacht in folgendem Schema:

x	y	z		
1	−1	2	0	
−1	9	−2	0	I + II
2	−2	4	0	
1	−1	2	0	
0	8	0	0	
2	−2	4	0	III − 2 . I
1	−1	2	0	
0	8	0	0	
0	0	0	0	

Zunächst wollen wir unterhalb der Hauptdiagonale Nullen erzeugen.
(Die obere Dreiecksmatrix bilden.)

Dass wir hier eine Null-Zeile erhalten, sollte nicht verwundern, denn:

Zieht man auf der Hauptdiagonale einen Eigenwert ab,
so vermindert sich der Rang der Matrix.

x	y	z	
1	−1	2	0 $\rightarrow x + 2t = 0 \rightarrow x = -2t$
0	8	0	0 $\rightarrow 8y = 0 \rightarrow y = 0$
0	0	**0**	0 $\rightarrow z = t$

Somit lautet ein **Eigenvektor**, der zu $\boldsymbol{\lambda = 1}$ gehört: $\begin{pmatrix} -2t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$

mit $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}\backslash\{\mathbf{0}\}$, weil wenn $\mathbf{t = 0}$ ist, wird $\overrightarrow{X_1} = \vec{o}$
und das ist ausgeschlossen! (Siehe 6.2., S 313)

und der für den Eigenwert $\boldsymbol{\lambda = 1}$ der Matrix A gehörige Eigenraum $E_A(1) = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \right\}$

Der Eigenraum besitzt die Dimension 1, weil er aus einem Eigenvektor und seinen Vielfachen besteht.

Der normierte Eigenvektor lautet $\frac{1}{\sqrt{(-2)^2+0^2+1^2}} \begin{pmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Setzen wir jetzt für $\lambda = 5$: $\begin{pmatrix} 2-5 & -1 & 2 \\ -1 & 10-5 & -2 \\ 2 & -2 & 5-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Damit haben wir folgendes Gleichungssystem zu lösen:

x	y	z		
−3	−1	2	0	
−1	5	−2	0	I − 3 · II
2	−2	0	0	2 · I + 3 · III
−3	−1	2	0	
0	−16	8	0	| : 8
0	−8	4	0	2 · III − II
−3	−1	2	0	$\to -3x - \left(-\frac{1}{2}\right) + 2t = 0 \to x = \frac{1}{2}t$
0	−2	1	0	$\to -2y = 1 \to y = -\frac{1}{2}$
0	0	**0**	0	$\to z = t$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot t \\ \frac{1}{2}\cdot t \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{\frac{1}{2}} \\ \mathbf{\frac{1}{2}} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \text{ und } E_A(5) = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \right\}$$

Da $E_A(5)$ jedes Vielfache (außer das Nullfache) von $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ sein kann, wähle ich das Doppelte davon, also $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Der normierte Eigenvektor lautet $\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Den Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 11$ könnten wir genauso wie vorhin berechnen.

In diesem Fall gibt es aber einen einfacheren Weg, weil die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 10 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ symmetrisch ist.

Bei einer **symmetrischen Matrix** sind
die **Eigenvektoren** zu verschiedenen **Eigenwerten** immer **orthogonal**[31]

Mathematisch formuliert:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}: \ \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{i}} \neq \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{j}} \ \Rightarrow \mathbf{V}_{\mathbf{i}} \perp \mathbf{V}_{\mathbf{j}}$$

Mit den berechneten Eigenvektoren lässt sich das leicht zeigen, denn dann muss ihr Skalarprodukt null[32] sein:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 2 + 0 + 2 = 0$$

Der dritte Eigenvektor muss in diesem Fall senkrecht auf die beiden anderen stehen, also das Kreuzprodukt der beiden anderen Eigenvektoren sein.[33]

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \\ -(-2 \cdot 2 - 1 \cdot 1) \\ -2 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Damit ist der Eigenraum $E_A(11) = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \mid \mathrm{t} \in \mathbb{R} \backslash \{0\} \right\}$

Der normierte Eigenvektor lautet

$$\frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + 5^2 + (-1)^2}} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{27}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{9 \cdot 3}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Die Basis, die aus den Eigenvektoren besteht, nennt man **Eigenbasis**: $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

31 orthogonal: orthós (griechisch): recht (im Sinne von richtig)
gon (griechisch): Winkel
Orthographie … Rechtschreibung

32 Siehe 4.4.6., S 191 f

33 Siehe 4.6.2., S 218

```
import numpy as np
from numpy import linalg as LA
A = np.array([[2,-1,2],[-1,10,-2],[2,-2,5]])
w, v = LA.eig(A)
print(w)
print(v)
```

```
[11.  1.  5.]
[[-1.82574186e-01  8.94427191e-01  4.08248290e-01]
 [ 9.12870929e-01 -2.85964792e-16  4.08248290e-01]
 [-3.65148372e-01 -4.47213595e-01  8.16496581e-01]]
```

Bemerkungen zur Darstellungsform in PYTHON:

1: Der Eigenvektor in der 1. Zeile gehört zum ersten Eigenwert: $\lambda_1 = 11$: $\overrightarrow{X_1} \approx \begin{pmatrix} -0.18 \\ 0.89 \\ 0.41 \end{pmatrix}$ usw.

2: Die Eigenvektoren sind normiert, also als Einheitsvektoren angegeben.

Hier noch eine Formel zur Inversion einer Matrix: Siehe auch 5.2.5., S 266 f

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^{\sim}}$$

Für eine **2 x 2**- Matrix gilt: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $A^{\sim} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$A^{\sim}$ bzw. $\text{adj}(A)$ … Adjunkte (Matrix)

Siehe auch 5.2.5., S 266 f

Bemerkung: Die Elemente von $A^{\sim}$ erhält man, indem man die **Elemente der Hauptdiagonale** von A **vertauscht** und bei den Elementen, die NICHT auf der Hauptdiagonale liegen, das Vorzeichen verändert.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{4} & -\mathbf{2} \end{pmatrix}$ $\quad A^{\sim} = \begin{pmatrix} -\mathbf{2} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{4} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -\mathbf{2} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{4} & \mathbf{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & -\frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

det(A) = 5 . (–2) – 4 . (–1) = –10 +4 = –6

Zusammenfassend wichtige

Eigenschaften von Matrizen & Determinanten

- Spur (Trace) $\operatorname{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i$ Die **Spur** einer Matrix ist gleich der Summe der Elemente der Hauptdiagonale ist gleich der Summe der Eigenwerte

- $\det(A) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_i$ Die Determinante einer Matrix ist gleich dem Produkt der Eigenwerte

- $A = A^T: \quad \lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow V_i \perp V_j$ Ist eine Matrix symmetrisch und hat verschiedene Eigenwerte, so sind die dazugehörigen Eigenvektoren orthogonal.

- Ist KEIN Eigenwert null $\Rightarrow$ A besitzt eine inverse Matrix A^{-1}

  Die Eigenwerte von A^{-1} sind $\frac{1}{\lambda_i}$, wenn λ_i die Eigenwerte der Matrix A sind.

  Die Eigenvektoren von A^{-1} sind die gleichen wie von A

- **reguläre** Matrix A: Quadratische Matrix besitzt eine inverse Matrix I und $\det(A) \neq 0$
  singuläre Matrix A: Quadratische Matrixbesitzt **keine** inverse Matrix Iund $\det(A) = 0$

  Ist A quadratische Matrix: $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow$ Gleichungssystem **eindeutig** lösbar $\wedge \;\exists A^{-1}$

  $\det(A) = 0 \Leftrightarrow$ Gleichungssystem NICHT eindeutig lösbar

- Ist mindestens eine Zeile bzw. Spalte einer Matrix A ein Nullvektor, so ist $\det(A) = 0$

- Wenn zwei Zeilen bzw. Spalten linear **ab**hängig sind, ist $\det(A) = 0$

- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

Übung

1) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichungssysteme mit Hilfe der CRAMERschen Regel und $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ bzw. $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

a) $\begin{aligned} 3x + 5y &= 26 \\ 4x - y &= 4 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 2x - 5y &= 7 \\ 4x - 10y &= 21 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} 2u + 5v &= 7 \\ 15u - v &= 14 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x - 2y - 3z &= -5 \\ 3x + 3y + z &= 6 \\ 2x + y - z &= 0 \end{aligned}$

2) Ermitteln Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren, die Eigenräume und Dimensionen folgender Matrizen:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Lösungen: 1) a) $L = \{(2,4)\}$ b) $L = \{\ \}$ c) $L = \{(1,1)\}$ d) $L = \{(2,-1,3)\}$

2) a) $\lambda_1 = 3$ $E_A(3) = \left\{t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\right\}$ … Dimension 1 $\lambda_2 = 6$ $E_A(6) = \left\{t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\right\}$ … Dimension 1

b) $\lambda_1 = 1$ $E_A(1) = \left\{t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\right\}$ … Dimension 1 $\lambda_2 = 2$ $E_A(2) = \left\{t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\right\}$ … Dimension 1

$\lambda_3 = -1$ $E_A(-1) = \left\{t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\right\}$ … Dimension 1

c) $\lambda_{1,2,3} = 2$ $E_A(2) = \left\{t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t, s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\right\}$ … Dimension 2

d) c) $\lambda_{1/2} = 4$ $E_A(4) = \left\{r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| r, s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\right\}$ … Dimension 2 $\lambda_3 = 1$ $E_A(1) = \left\{t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\right\}$ … Dimension 1

„Wir leben alle unter dem gleichen Himmel,
aber wir haben nicht alle den gleichen Horizont.“

Konrad ADENAUER
(1876 – 1967)

VII FUNKTIONEN

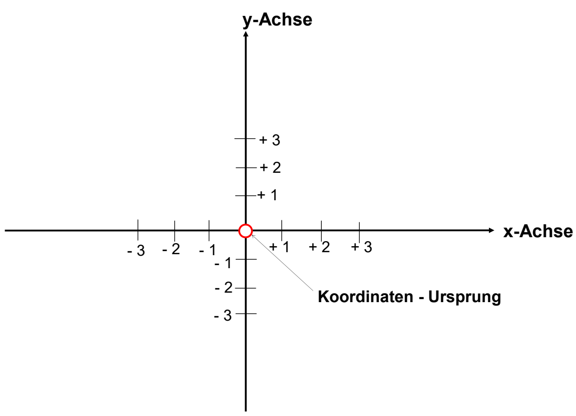
7.1. Koordinatensysteme

René DESCARTES
(1596 – 1650)

Im **kartesischen Koordinatensystem** stehen die Achsen **senkrecht** aufeinander.
Benannt nach René DESCARTES, latinisiert, wie es zu seiner Zeit Mode war, Renatus CARTESIUS.
DESCARTES war französischer Philosoph, Mathematiker und Naturwissenschaftler. Mit seinen Ideen und Auffassungen trug er maßgeblich zum Weltbild der Neuzeit bei.

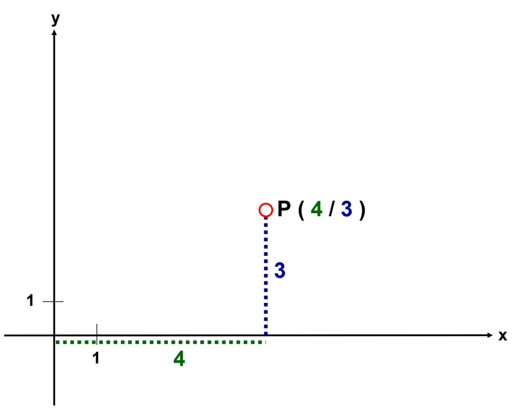
Zwar wurden seine naturwissenschaftlichen Theorien durch die NEWTONsche Physik zum Teil widerlegt, doch gilt DESCARTES als Wegbereiter der mechanistischen Denkweise, die die Jahrhunderte gültige aristotelische Sicht der Naturphänomene überwand und die Physik zu neuen Ufern führte.

Im $\mathbb{R}^2$(xy-Ebene):



Auf die waagrechte Achse wird die unabhängige Variable aufgetragen die senkrechte Achse die abhängige Variable.
(Siehe auch 7.2.2., S 329)

Der Schnittpunkt der Koordinatenachsen ist der (Koordinaten-) Ursprung.
Links des Ursprungs liegen die negativen x-Werte, rechts die positiven.
Oberhalb des Ursprungs finden sich die positiven y-Werte, unterhalb die negativen.



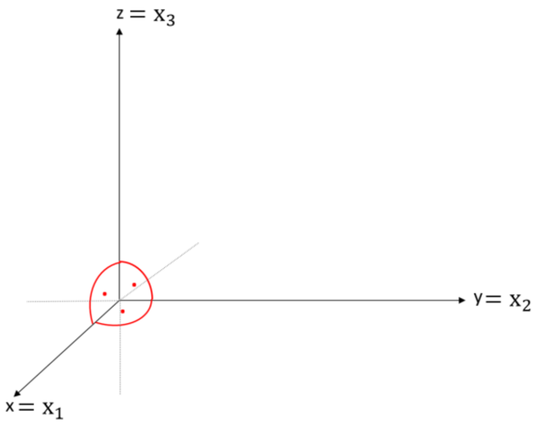
Die Koordinaten eines Punktes sind orientierte Strecken, gemessen vom Ursprung aus.
Orientiert meint, dass das Vorzeichen die Richtung vom Ursprung aus angibt.

y – Koordinate
…oder Ordinate

P (4 / 3)

x – Koordinate …
…oder **Stelle** bzw. Abszisse

Im $\mathbb{R}^3$(xyz-Ebene):



Daneben gibt es noch andere Koordinaten(systeme), wie z.B.

Kugelkoordinaten

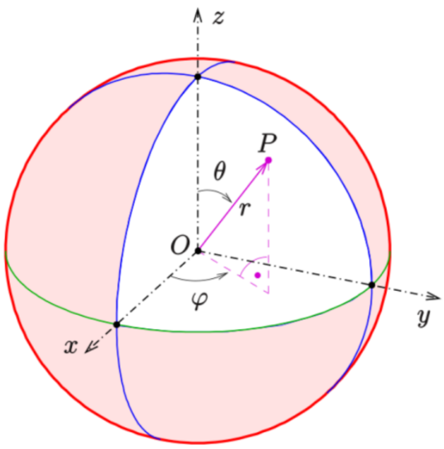


Abb: Wikipedia

Die in der sphärischen (räumlich-gekrümmten) Geometrie Verwendung finden.

Zylinderkoordinaten

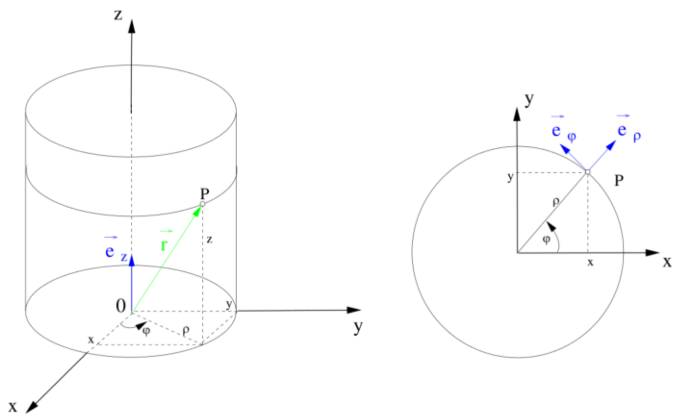
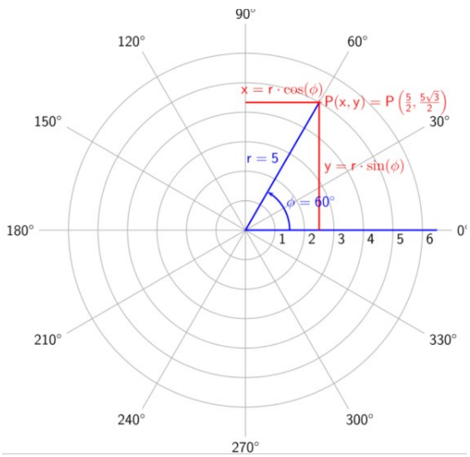


Abb: Geta-Wiki

Sie werden verwendet, um sphärische Koordinaten auf ebene Flächen zu übertragen, wie bei Karten im globalem Maßstab.
Im zweidimensionalen Fall handelt es sich um Polarkoordinaten (siehe 1.3.2., S 24).



Polarkoordinaten – Wikipedia

7.2. Allgemeine Begriffe

7.2.1. Definition einer Funktion

Was versteht man unter einer Funktion?

Eine **Funktion** ist eine **Zuordnung**, bei der **JEDEM Element** der sog. **Definitionsmenge** **GENAU EIN Element** der sog. **Zielmenge Z zugeordnet wird**.[34]

Beispiel:

Wir betrachten die Körpergrößen verschiedener Personen.

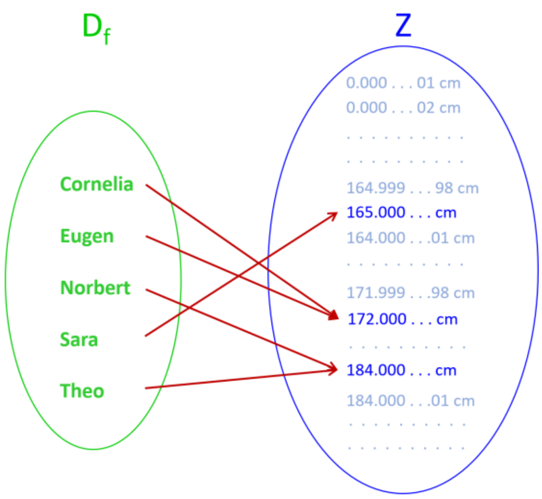
Die Definitionsmenge D_f besteht aus den (Vor-) Namen der gemessenen Personen, die Wertemenge (das Bild) W_f aus den dabei erhaltenen Körpergrößen:

D_f = { Cornelia, Eugen, Norbert, Sara, Theo }

$Z = \mathbb{R}^+$

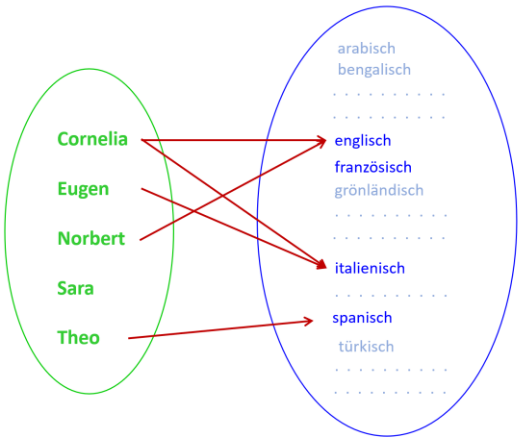
Die Zuordnung lautet: Jeder Person wird ihre Körpergröße zugeordnet.

Angenommen, Cornelia misst 172 cm, ebenso Eugen. Norbert ist 184 cm groß, Sara verfügt über eine Körpergröße von 165 cm und Theo von 184 cm. Dann sieht diese Funktion im sog. **Pfeil** - oder **VENN -Diagramm** – benannt nach John VENN (1834–1923) *[nicht der Held zahlreicher alter Wild-West-Filme!]* – wie folgt aus:



Im Pfeildiagramm erkennt man eine Funktion daran, dass von **JEDEM** Element der **Definitionsmenge GENAU EIN** Pfeil abgeht.

[34] Weitere Begriffe siehe 7.2.3., S 332 f

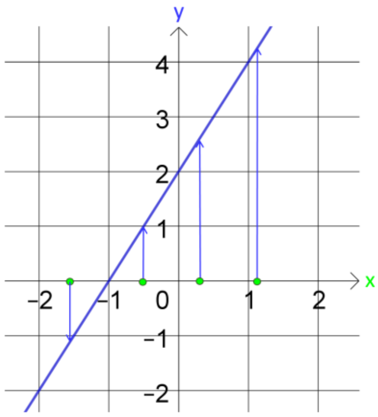


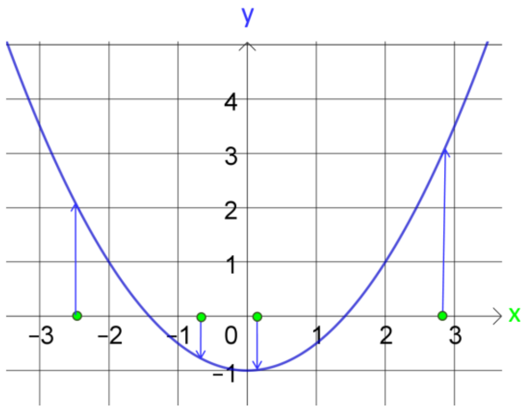
Würden wir beispielsweise jeder Person ihre erlernte(n) Fremdsprache(n) zuordnen, so wäre diese Zuordnung nicht eindeutig und stellte keine Funktion dar.

In nebenstehendem Beispiel beherrscht z.B. Cornelia zwei Fremdsprachen, Eugen, Norbert und Theo eine, während sich Sara nur in ihrer Muttersprache deutsch ausdrücken kann. Deshalb führen von Cornelia zwei Pfeile weg, von Sara hingegen keiner.

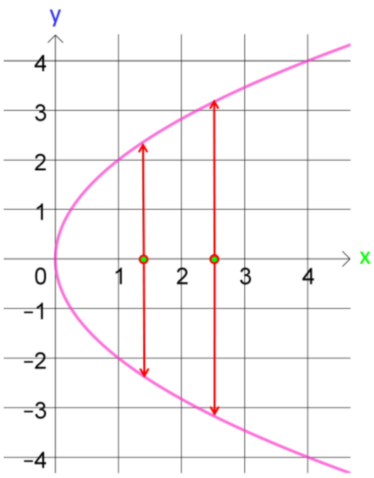
Am **Graphen** (an der gezeichneten Funktion) erkennt man eine Funktion daran, dass man von **JEDEM** (beliebigen) **x-Wert GENAU EINMAL** auf den **Graphen** stößt.

Beispiele:





KEINE Funktion ist z.B.:



Man braucht nur einen einzigen x-Wert, bei dem man nie oder öfter als einmal auf den Graphen stößt und schon weiß man, dass es sich um keine Funktion handelt.

Hier handelt es sich um eine Kegelschnitt-Parabel in 1. HL

7.2.2. Bezeichnungen

A, B, C, . . . , P_1, P_2, . . . **Punkte** werden, wenn überhaupt, mit **Großbuchstaben** bezeichnet

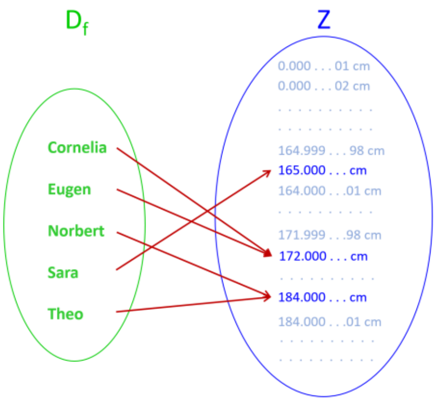
$\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}, \dots, \boldsymbol{f_1}$, $\boldsymbol{f_2}, \dots$ **Funktionen** und alle **Linien** werden mit **Kleinbuchstaben** bezeichnet

$\boldsymbol{D_f}$ . . . **Definitionsmenge** einer Funktion f

$\boldsymbol{Z}$ . . . **Zielmenge** . . . jener Zahlenbereich, in den die Funktionswerte hinzielen

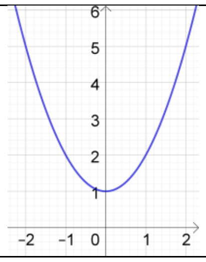
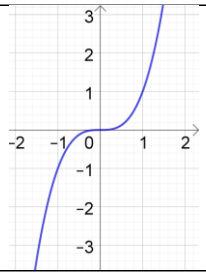
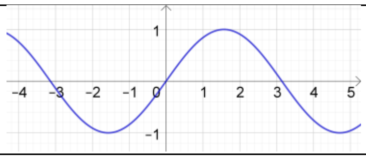
$\boldsymbol{W_f}$ . . . **Wertemenge** bzw. **Bild**(menge) einer Funktion f . . . jene Zahlen von Z, die tatsächlich Funktionswerte sind

Nochmals das Beispiel von S 327:



$Z = \mathbb{R}^+ \qquad W = \{165, 172, 184\}$

Weitere **Beispiele** von Ziel- und Bildmenge:

Funktion	Graph	(eine) Zielmenge Z	(die) Bildmenge W
$f(x) = x^2 + 1$		$Z = \mathbb{R}$	$W_f = [1\,, \infty)$
$f_2(x) = x^3$		$Z = \mathbb{R}$	$W_{f_2} = \mathbb{R}$
$g(x) = \sin(x)$		$Z = \mathbb{R}$	$W_g = [-1\,, 1]$

$x \in D_f$ . . . allgemein bezeichnet man die **Elemente der Definitionsmenge** mit x

$y \in W_f$ . . . allgemein bezeichnet man die **Elemente** des **Bildes** (der **Wertemenge**) mit y

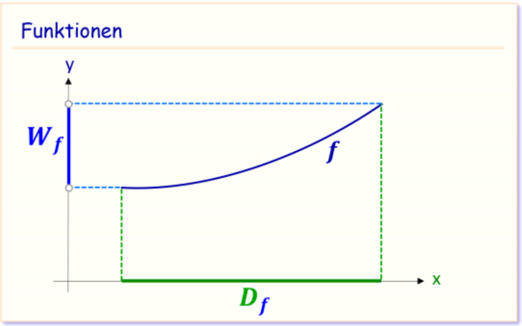
$$\boxed{y = f(x)} \quad \rightarrow \quad f(x) \in W_f$$

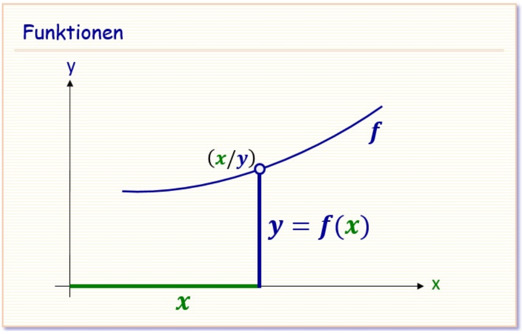
x . . . **un**abhängige Variable bzw. **x – Koordinate** bzw. **Stelle** bzw. **Abszisse**

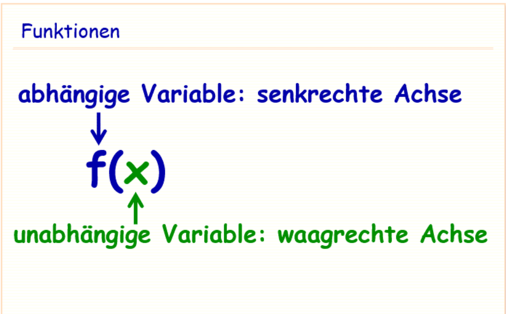
y . . . **ab**hängige Variable bzw. **y – Koordinate** bzw. **Ordinate**

$f(x)$ . . . **Funktionswert** an der **Stelle x**

$G_f = f$ . . . **Graph** der Funktion f bzw. ihr **Name**: Die im Koordinatensystem zeichnerisch dargestellte Funktion





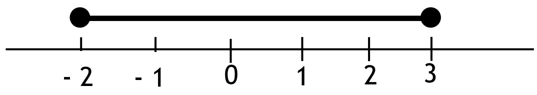
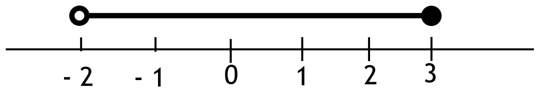
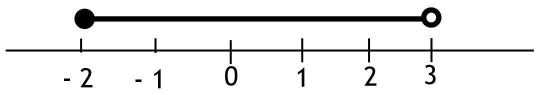
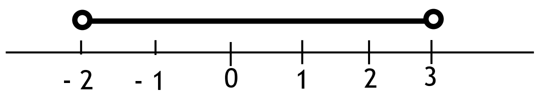


Für **Teilbereiche der reellen Zahlen** (ℝ) gibt es die

Intervall-Schreibweise,

was **immer** ***x*-Werte** (die **un**abhängige Variable) meint.

Beispiele und ihre Veranschaulichung:

$[-2;3]$ bzw. $[-2;3]$ bzw. $-2 \leq x \leq 3$ Alle reellen Zahlen zwischen einschließlich –2 und einschließlich 3.	
$]-2;3]$ bzw. $(-2;3]$ bzw. $-2 < x \leq 3$ Alle reellen Zahlen zwischen ausschließlich –2 und einschließlich 3.	
$[-2;3[$ bzw. $[-2;3)$ bzw. $-2 \leq x < 3$ Alle reellen Zahlen zwischen einschließlich –2 und ausschließlich 3.	
$]-2;3[$ bzw. $(-2;3)$ bzw. $-2 < x < 3$ Alle reellen Zahlen zwischen ausschließlich –2 und ausschließlich 3.	

7.2.3. Darstellungsarten von Funktionen

Beispiel: $D_f = \mathbb{R}$ und $Z = \mathbb{R}$

Zuordnung: Jedem Element x von D_f wird sein Quadrat zugeordnet.

(1) Funktionsterm: allgemein hat ein Funktionsterm folgende Gestalt:

Name der Funktion → $f\colon\ D_f \longrightarrow Z$

$x \longmapsto y$

Für unser Beispiel bedeutet das:

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2$$

Beachten Sie, dass die Elemente der Wertemenge nicht einfach mit y bezeichnet werden, sondern mit jenem Ausdruck, der der Zuordnungsvorschrift entspricht.

Da bei dieser Funktion jedem x sein Quadrat zuzuordnen ist, lautet $y = x^2$

(2) Funktionsgleichung: Die Funktionsgleichung gibt an, wie y gebildet wird.

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2$$
$$\uparrow$$
$$y$$

Demnach lautet die Funktionsgleichung für unser Beispiel: $y = x^2$

Statt **y** kann man auch **f (x)** schreiben, sofern die Funktion **f** heißt.

Insofern kann diese Funktionsgleichung auch als $f(x) = x^2$ angegeben werden.

$$\boxed{y = f(x)}$$

(3) Wertetabelle: Wir **ermitteln Punkte der Funktion**, indem wir aus der **Definitionsmenge** (hier $\mathbb{R}$) geeignete $\boldsymbol{x}$ **– Werte wählen** und mittels Funktionsgleichung die dazugehörigen $\boldsymbol{y}$ **– Werte berechnen**.

Bemerkung : Geeignete x-Werte sind jene, die in einem Bereich liegen, für den die Funktion interessiert.

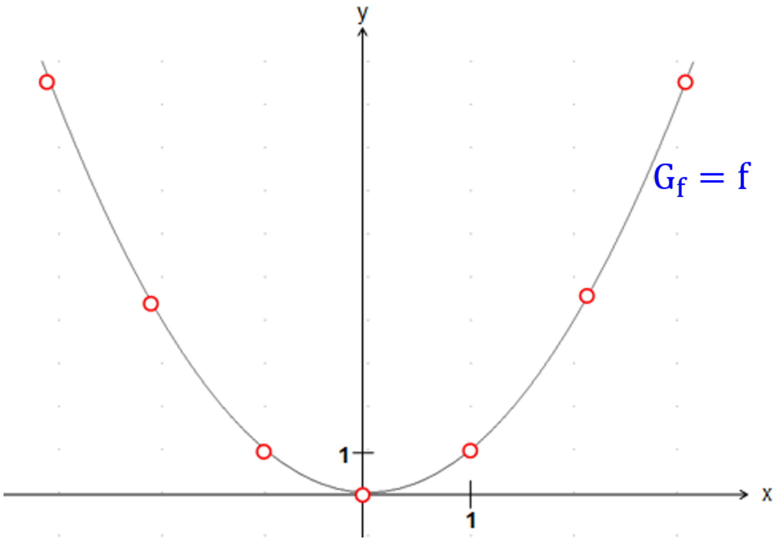
Wertetabelle:

x	y = f (x) = x ^{2}
–3	9
–2	4
–1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

Berechnungen:

$y = f(-3) = (-3)^2 = 9$
$y = f(-2) = (-2)^2 = 4$
$y = f(-1) = (-1)^2 = 1$
$y = f(0) = 0^2 = 0$
$y = f(1) = 1^2 = 1$
$y = f(2) = 2^2 = 4$
$y = f(3) = 3^2 = 9$

(4) Funktions – Graph G_f bzw. **f** Die **Punkte** werden **in ein Koordinatensystem** geeigneter Größe **gezeichnet** und durch eine Linie verbunden.



- Es ist möglich und manchmal auch nötig, die Einheiten in x - und y – Richtung verschieden groß zu wählen.
- Wenn die Gestalt des Graphen noch nicht konkret zum Ausdruck kommt, müssen weitere Punkte ermittelt werden.
- Die eingezeichneten Punkte werden durch eine entsprechende Linie verbunden, so $D_f = \mathbb{R}$ oder ein Intervall aus $\mathbb{R}$ ist.
- Bemerkung: Lautet der Name einer Funktion z.B. p_1, so wird deren Graph mit G_{p_1} bzw. p_1 bezeichnet.

7.2.4. Eigenschaften

7.2.4.1. surjektiv injektiv bijektiv

surjektiv

Eine Funktion f heißt **surjektiv**, wenn es für **jeden Funktionswert** (y-Wert) **mindestens** einen **Wert** der **Definitionsmenge** (mindestens einen x-Wert) gibt.

Formal: f heißt surjektiv: $\forall$[35] $y \in W_f$ $\exists$[35] $x \in D_f$ mit $y = f(x)$

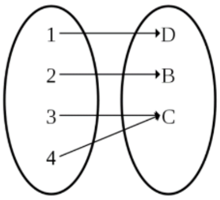


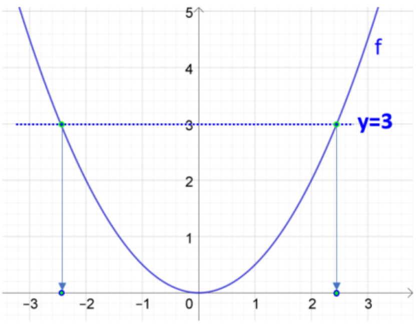
Bild: surjektive Funktion – Wikipedia

Anschaulich: Jeder y-Wert entstammt mindestens einem x-Wert.

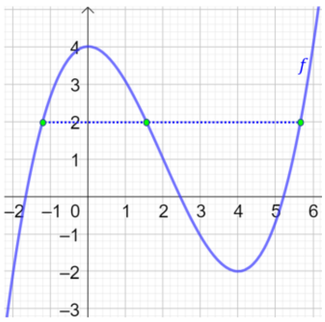
Oder: Jeder y-Wert wird mindestens einmal getroffen.

Beispiele surjektiver Funktionen:

$f: \mathbb{R} \rightarrow [0\,;\infty): f(x) = 0.5\,x^2$



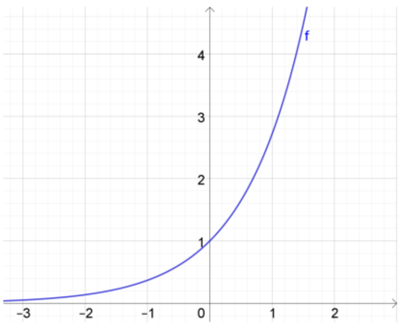
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = \frac{3}{16}x^3 - \frac{9}{8}x^2 + 3$



Außer y = 0 entstammen alle anderen y-Werte zwei x-Werten.

NICHT surjektiv ist z.B. folgende Funktion:

$f: \mathbb{R} \rightarrow [0\,;\infty): f(x) = e^x$



Da alle y-Werte positiv sind, entstammt z.B. $y = 0$ keinem x-Wert.

Anders gelagert wäre der Fall, wenn z.B. $D_f = (0\,;\ \infty) = \mathbb{R}^+$ wäre.

[35] Siehe Abschnitt VIII

injektiv

Eine Funktion f heißt **injektiv**, wenn es für **jeden Funktionswert** (y-Wert) **höchstens** einen **Wert** der **Definitionsmenge** (höchstens einen x-Wert) gibt.

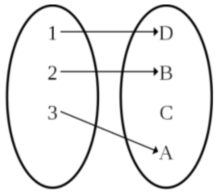


Bild: injektive Funktion – Wikipedia

Formal: f heißt surjektiv: $\forall\, x_1, x_2 \in Df \;\; \exists\, x \in D_f : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

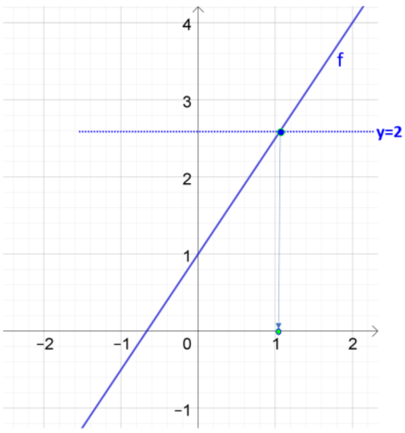
Anschaulich: Jeder y-Wert entstammt höchstens einem x-Wert.

Oder: Jeder y-Wert wird höchstens einmal getroffen.

Ist f injektiv, so ist f streng monoton /wachsend bzw. fallend). Siehe auch 7.2.4.3., S 346 f

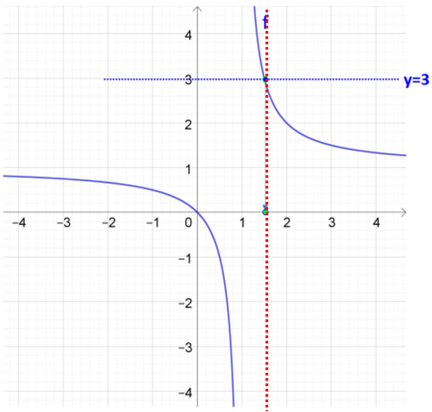
Beispiele injektiver Funktionen:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 1.5\, x + 1$



Bei dieser Funktion entstammt jeder y-Wert genau einem x-Wert und somit auch höchstens einem x-Wert.

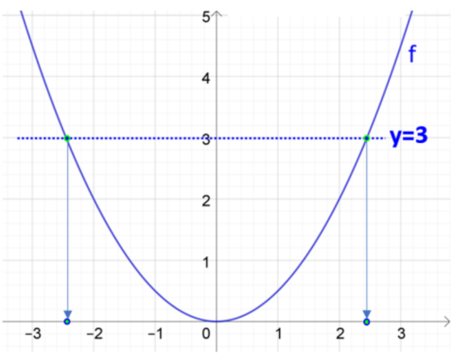
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \dfrac{1}{x-1} + 1$



Bei dieser Funktion entstammen alle y-Werte immer höchstens einem x-Wert.
Nur für x = 1 lässt sich kein y-Wert finden.
Da an dieser Stelle der Nenner null würde,
schließen wir x=1 aus und $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, so entstammte jeder y-Wert genau einem x-Wert.

NICHT injektiv ist z.B.:

f: $\mathbb{R} \to [0\,;\infty) \quad : f(x) = 0.5\, x^2$



. . . weil bis auf y = 0 jeder andere y-Wert zwei x-Werten entstammt.

Beispiel: Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \sqrt{x-1}$ für $D = [1, \infty)$ injektiv ist.

$\forall\, x_1, x_2 \in D_f \ \exists\ x \in D_f$: $\mathbf{f(x_1) = f(x_2)} \ \Rightarrow\ \mathbf{x_1 = x_2}$

$$\sqrt{x_1 - 1} = \sqrt{x_2 - 1} \ \mid (\,)^2$$

$$x_1 - 1 = x_2 - 1 \ \mid +1$$

$$x_1 = x_2$$

bijektiv [36]

Eine Funktion f heißt **bijektiv** , wenn sie **surjektiv und injektiv** ist, also für **jeden Funktionswert** (y-Wert) mindestens **und** höchstens (**=genau**) einen **Wert** der **Definitionsmenge** (genau einen x-Wert) gibt.

Formal: f heißt bijektiv: $\forall\, y\ \exists\, !^{37}\ x \in D_f : f(x) = y$

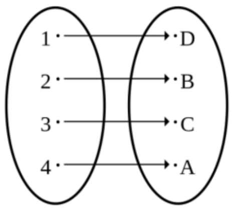


Bild: bijektive Funktion – Wikipedia

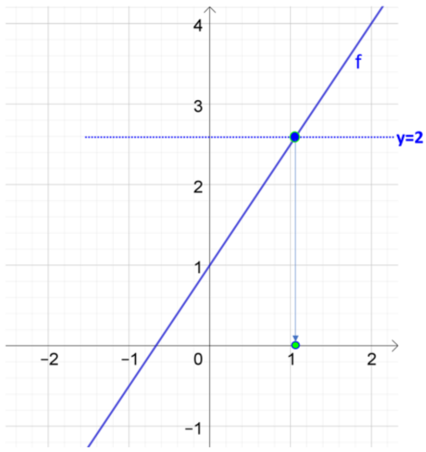
Anschaulich: Jeder y-Wert entstammt genau einem x-Wert

Oder: Jeder y-Wert wird genau einmal getroffen.

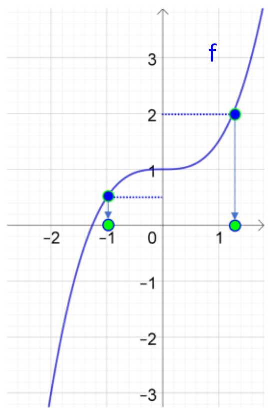
.

Beispiele bijektiver Funktionen:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 1.5\,x + 1$



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 0.5\,x^3 + 1$

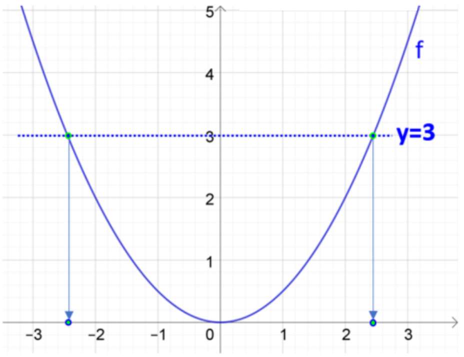


[36] bis (lateinisch): zweimal

[37] Siehe Abschnitt VIII

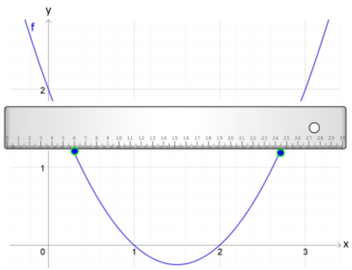
NICHT bijektiv ist z.B.:

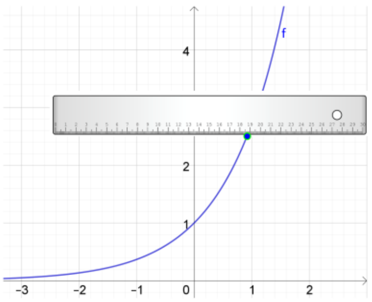
f: $\mathbb{R} \rightarrow [0\,;\infty)$ $: f(x) = 0.5\,x^2$

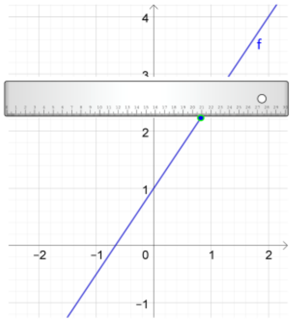


Bei dieser Funktion entstammen alle y-Werte außer y = 0 zwei x-Werten.

Man kann grafisch leicht überprüfen, welcher Art die Funktion ist:
Legen Sie ein Lineal parallel zur x-Achse in das Koordinatensystem. Stößt man im gesamten Wertebereich immer







auf mindestens einen Punkt des Graphen: **surjektiv**

auf höchstens einen Punkt des Graphen: **injektiv**

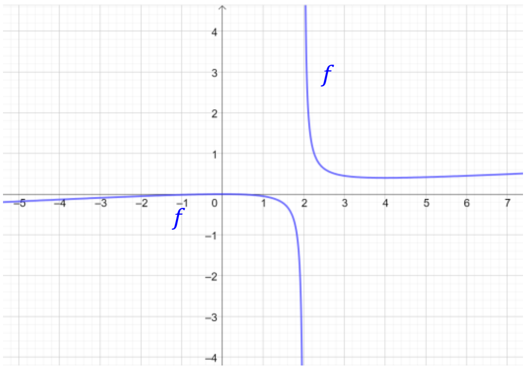
auf genau einen Punkt des Graphen: **bijektiv**

Beispiel: Welche der folgenden Funktionen ist injektiv bzw. surjektiv?

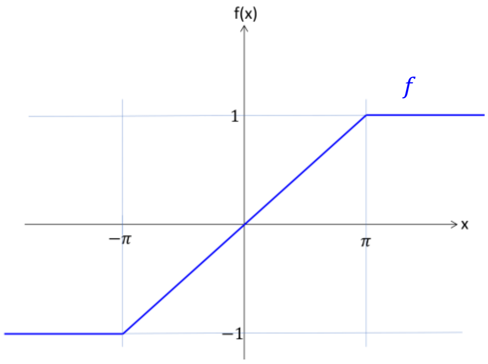
a) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, n \to n^2$ b) $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \to n^2$ c) $h: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \to n+1$

Sind die grafisch dargestellten Funktionen injektiv oder surjektiv? Wenn nein, verändern Sie den Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ bzw. Bildbereich $B = \mathbb{R}$ so ab, dass die Funktionen zumindest eine der Eigenschaften erhalten.

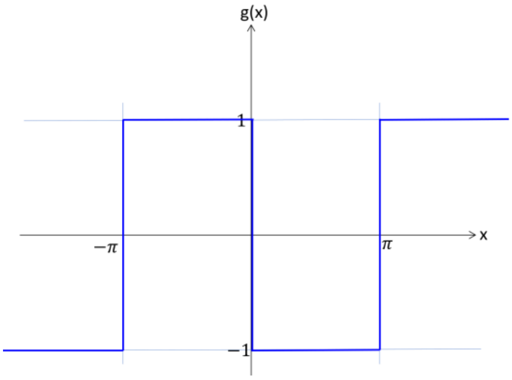
d)



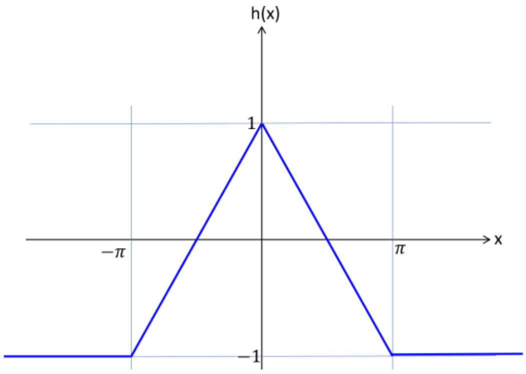
e)



f)



g)



Lösungen:

a) f ist nicht injektiv, weil nicht alle verschiedenen Zahlen aus dem Definitionsbereich auch verschiedene Funktionswerte besitzen. Damit gibt es y-Werte, die verschiedenen x-Werten zugeordnet sind.
Z.B. $f(5) = 5^2 = 25$ und $f(-5) = (-5)^2 = 25$

f ist auch nicht surjektiv, weil nicht alle Zahlen aus dem Wertebereich Funktionswerte sind.
Nicht alle natürlichen Zahlen sind Quadratzahlen. Damit gibt es y-Werte, die keinem x-Wert zugeordnet sind.

b) g ist **injektiv**, weil alle verschiedenen Zahlen aus dem Definitionsbereich verschiedenene Funktionswerte besitzen.
Verschiedenene natürliche Zahlen ergeben quadriert verschiedenene Zahlen.
Damit ist jeder y-Wert einem anderen x-Wert zugeordnet.

Verglichen mit der Funktion f zeigt sich, dass durch Einschränkung des Definitionsbereiches eine Funktion injektiv gemacht werden kann.

g ist nicht surjektiv, weil nicht alle Zahlen aus dem Wertebereich Funktionswerte sind.
Nicht alle natürlichen Zahlen sind Quadratzahlen. Damit gibt es y-Werte, die keinem x-Wert zugeordnet sind.

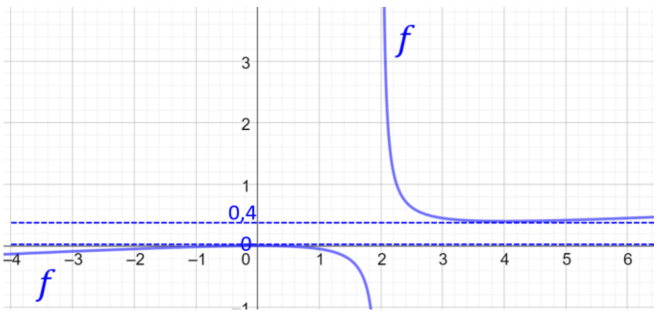
c) h ist injektiv, weil, wenn man zu verschiedenen ganzen Zahlen 1 addiert, man immer eine verschiedene Zahl erhält.
Damit ist jeder y-Wert einem anderen x-Wert zugeordnet.

h ist auch surjektiv, weil jede ganze Zahl m das Bild einer ganzen Zahl ist, nämlich von $n = m - 1$ ist
$n \rightarrow n + 1$ bedeutet $m = n + 1 \mid -1 \rightarrow \; m - 1 = n$. Damit ist jeder y-Wert einem x-Wert zugeordnet.

Somit ist die Funktion h **bijektiv**.

d) Zunächst stellt der Graph keine Funktion dar, weil an der Stelle $x = 2$ kein Funktionswert existiert:
Deshalb schließen wir diesen Wert aus $\mathbb{R}$ aus: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
Damit ist die Funktion injektiv, weil verschiedene Werte des Definitionsbereichs immer verschiedene Funktionswerte besitzen.

Surjektiv ist die Funktion nicht, weil nicht alle Werte des Bildbereichs Funktionswerte sind.
So gibt es z.B. im Intervall $(0; 0{,}4)$ des Bildbereiches keine dazugehörigen Werte des Definitionsbereiches.
Damit die Funktion auch surjektiv wird, und damit bijektiv ist, müssen wir dieses Intervall aus dem Werte- bzw. Bildbereich ausschließen: $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus (0; 0{,}4)$.



Der Bereich $(0; 0{,}4)$ erschließt sich einem besser, wenn man die Extrema (Hochpunkt und Tiefpunkt) dieser Funktion bestimmt (siehe 9.4.2., S 454 f).

e) Mit $D = \mathbb{R}$ ist die Funktion f nicht injektiv, weil nicht alle verschiedenen Werte des Definitionsbereichs verschiedene Werte des Werte- bzw. Bildbereichs besitzen.
So besitzen alle x-Werte im Intervall $(-\infty, -\pi)$ den Funktionswert -1 und alle x-Werte im Intervall (π, ∞) den Funktionswert 1.

Sie ist auch nicht surjektiv, weil nicht alle reellen Zahlen des Bildbereichs Funktionswerte sind, sondern nur die Werte zwischen einschließlich -1 und einschließlich 1.

Bei folgenden Einschränkungen ist die Funktion f injektiv und surjektiv und somit auch bijektiv:
$f: [-\pi, \pi] \rightarrow [-1, 1]$

f) Zunächst handelt es sich um keine Funktion, weil zumindest an den Stellen $-\pi, 0$ und π unendlich viele Funktionswerte existieren, nämlich alle im Intervall $[-1, 1]$. Deshalb müssen diese Stellen aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen werden: $D = \mathbb{R} \setminus \{-\pi, 0, \pi\}$ bzw. $D = \mathbb{R} \setminus \{z \cdot \pi \mid z \in \mathbb{Z}\}$

Die Funktion ist nicht injektiv, weil nicht jeder verschiedene Wert des Definitionsbereichs verschiedenene Funktionswerte besitzt. Es existieren für alle reellen Zahlen des Definitionsbereichs D nur die Funktionswerte -1 und 1.

Die Funktion ist auch nicht surjektiv, weil nicht alle reellen Zahlen Funktionswerte sind.

Hier helfen auch keine Einschränkungen des Definitions- und Bildbereichs um eine der beiden Eigenschaften zu erlangen.

zumindest … weil der Graph vermuten lässt, dass bei allen Vielfachen von π keine Funktion vorliegt.
Müsste gezeigt werden.

g) Die Funktion ist nicht injektiv, weil nicht jeder verschiedene Wert des Definitionsbereichs verschiedenene Funktionswerte besitzt. Es existiert für alle reellen Zahlen $(x < -\pi) \vee (x > \pi)$ des Definitionsbereichs nur der Funktionswert -1.

Die Funktion ist auch nicht surjektiv, weil nicht alle reellen Zahlen Funktionswerte sind.

Folgende Einschränkungen lassen die Funktion **surjektiv** werden:
$g: [-\pi, \pi] \rightarrow [-1, 1]$

Aufgaben dazu: https://www.max-academy.de/contentPool/5e1506a9ca4dfd000732af7d

Video-Tipp https://www.youtube.com/watch?v=23jng4oAwI8

7.2.4.2. Umkehrfunktionen (Funktionen invertieren)

Nur bijektive Funktionen besitzen Umkehrfunktionen.

Es sei f eine bijektive Funktion, dann wird ihre Umkehrfunktion mit f^{-1} bezeichnet.

Bemerkung: f^{-1} bedeutet nicht $\frac{1}{f}$. Die Hochzahl ist nur ein Symbol. Man hätte statt f^{-1} z.B. auch f^* wählen können.

Formal. $f: D_f \longrightarrow W_f$ $\qquad f^{-1}: W_f \longrightarrow D_f$

$x \longmapsto f(x)$ $\qquad y \longmapsto f^{-1}(y) = x$

Beachten Sie: Die Bezeichnungen bei f^{-1} beziehen sich auf f.

Beispiel: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \underbrace{1.5\,x + 1}_{f(x)}$

Dass diese Funktion bijektiv ist, haben wir uns anschaulich dargelegt (siehe 7.2.4.1., S 336).

Wollen wir die Gleichung der Umkehrfunktion f^{-1}, so gehen wir wie folgt vor:

① Wir schreiben in der Funktionsgleichung statt $f(x)$ den Ausdruck y.

$$y = 1.5 \cdot x + 1$$

② Wir vertauschen die Buchstaben x und y.

$$x = 1.5 \cdot y + 1$$

③ Die Gleichung wird auf y umgeformt.

$$x = 1.5 \cdot y + 1 \quad | -1$$

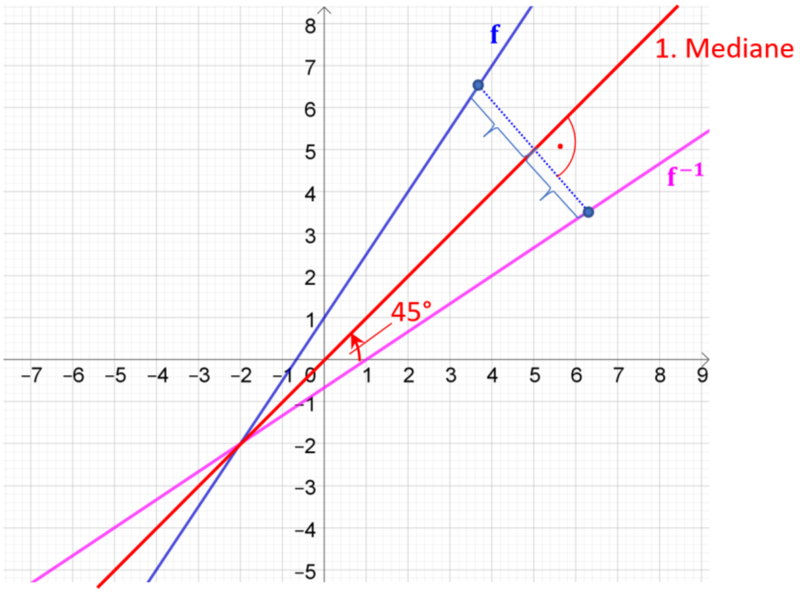
$$x - 1 = 1.5 \cdot y \quad | : 1.5 = : \frac{3}{2} \quad = \cdot \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} \cdot x - \frac{2}{3} = y$$

④ Abschließend ersetzen wir y durch $f^{-1}(x)$

$$\frac{2}{3} \cdot x - \frac{2}{3} = f^{-1}(x)$$

Die Graphen der Funktionen:



> Wenn man den Graphen der bijektiven Funktion **f** an der **1. Mediane** spiegelt, erhält man den Graphen der Umkehrfunktion $\mathbf{f^{-1}}$

Die **1. Mediane** ist eine Gerade, die durch den Koordinatenursprung geht und mit der x-Achse einen Winkel von 45° einschließt.
Ihre Gleichung lautet $y = x$ weil alle Punkte auf ihr die gleichen x- und y-Koordinaten besitzen.

Beispiel: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \frac{7x}{(x-4)\cdot(x+1)}$

Ist f eine Abbildung (Funktion)?
Falls nein, ändern Sie die Definition(smenge) so ab, dass Sie eine Funktion erhalten.

Die gegebene Zuordnung ist KEINE Funktion, weil es reelle Zahlen gibt, die den Nenner Null werden lassen. An diesen Stellen erhalten wir keine (Funktions-) Werte, weil ein Bruch mit dem Nenner Null nicht definiert ist, also nichts (nicht Null!) ergibt.

Wir setzen den Nenner gleich Null und erhalten so jene Zahlen, für die der Nenner Null wird:

$$(x-4)\cdot(x+1) = 0$$

Produkt-Null-Satz angewandt: $x - 4 = 0 \;\; |+4 \quad \vee \quad x + 1 = 0 \;\; |-1$

$$x = 4 \quad \vee \quad x = -1$$

Diese Zahlen müssen aus den reellen Zahlen ausgeschlossen werden, was eine „ordentliche" Definition(smenge) liefert:

$$D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\,;4\}$$

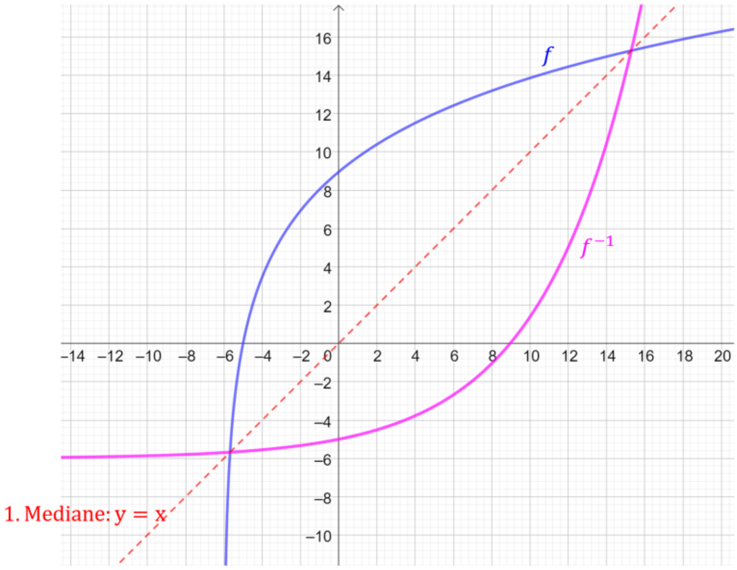
$x = -1$ und $x = 4$ sind sog. Polstellen (siehe 9.1., S 423 f).

Beispiel: Bestimmen Sie die inverse Funktion der folgenden Funktion und zeichnen Sie deren Graph.
$f(x) = 5 \cdot \ln(x+6)$

$y = 5 \cdot \ln(x+6) \rightarrow \quad x = 5 \cdot \ln(y+6) \;\Big|:5 \;\rightarrow\; \frac{x}{5} = \ln(y+6) \;\Big|\, e \;\rightarrow\; e^{\frac{x}{5}} = e^{\ln(y+6)} \;\rightarrow$

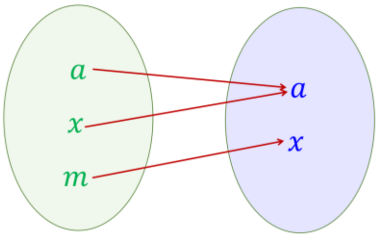
$\rightarrow\; e^{\frac{x}{5}} = y + 6 \;|-6 \;\rightarrow\; e^{\frac{x}{5}} - 6 = y \;\rightarrow\; e^{\frac{x}{5}} - 6 = f^{-1}(x)$

Siehe 7.6., S 367 f



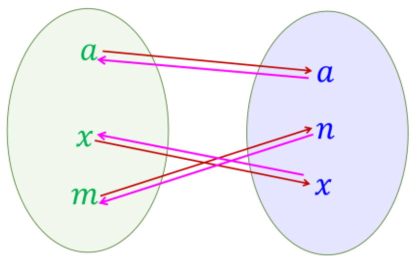
Beispiel: Invertieren Sie, falls möglich, die folgende Abbildung
$f : \{a, x, m\} \rightarrow \{a, x\} : \; a \rightarrow \; a, x \rightarrow \; a, m \rightarrow \; x.$

Nur bijektive Abbildungen besitzen eine Umkehrfunktion (sind invertierbar)



Diese Funktion ist nicht injektiv, weil nicht alle verschiedenen Werte des Definitionsbereichs verschiedenen Funktionswerte besitzen.
Damit kann die Funktion auch nicht bijektiv sein und somit besitzt sie keine Umkehrfunktion.

Ein abgewandeltes **Beispiel:**



Diese Funktion f ist bijektiv und die Umkehrfunktion lautet:

$$f^{-1}: \{a, n, x\} \to \{a, x, m\}:$$
$$\begin{array}{ccc} a & \to & a \\ n & \to & m \\ x & \to & x \end{array}$$

Man sieht: Bei bijektiven Funktionen muss die Anzahl der Elemente des Definitions- und Bildbereichs gleich groß sein.

Übung

a) Verändern Sie die Definitionsmenge nötigenfalls so ab, dass die Abbildung eine Funktion beschreibt.

b) Wenn vorhanden, bestimmen Sie die Inversion (Umkehrfunktion).

c) Zeichnen Sie den Graphen der jeweiligen Funktion und, wenn vorhanden, ihre Umkehrfunktion.

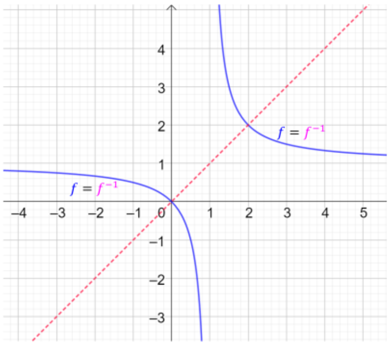
1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \frac{x^2}{x\cdot(x-1)}$ 2) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to e^{1-x}$

3) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \frac{1}{x^2+1}$ 4) $f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to -\ln(x-1)$

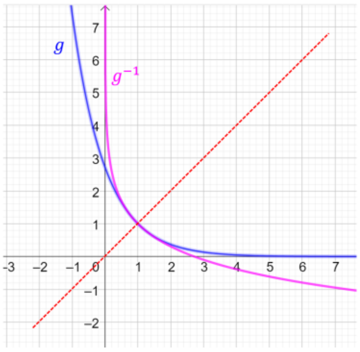
Video-Tipp https://www.youtube.com/watch?v=KIlcbIrmjWg

Lösungen: 1) Tipp: den Bruch kürzen! a) $D = \mathbb{R} \backslash \{1\}$ b) $f^{-1}(x) = f(x) = \frac{x}{x-1}$

c)



2) a) $D = \mathbb{R}$ b) $f^{-1}(x) = 1 - \ln(x)$ c)



3) a) $D = \mathbb{R}$ b) Es gibt keine Umkehrfunktion, weil mit $x = \frac{1}{y^2+1}$ $| \cdot (y^2 + 1)$

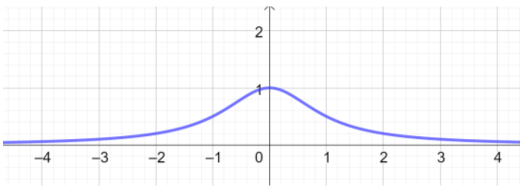
$$(y^2 + 1) \cdot x = 1 \,|: x \rightarrow \; y^2 + 1 = \frac{1}{x} \;\; |-1$$

$$y^2 = \frac{1}{x} - 1 \;\; |\sqrt{}$$

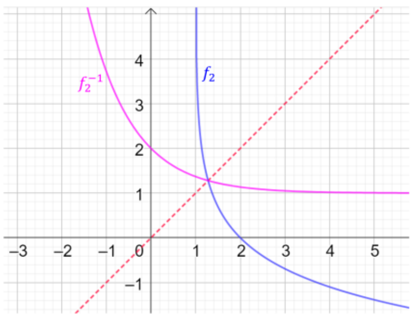
$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{x} - 1}$$

werden jedem Element des Definitionsbereichs 2 Werte zugeordnet, was keine Funktion darstellt

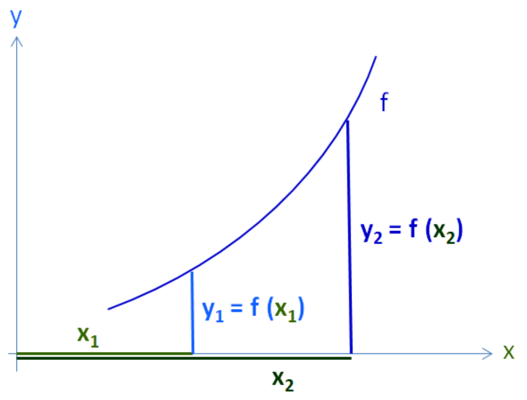
c)



4) a) $D = (1, \infty)$ b) $f_2^{-1}(x) = e^{-x} + 1$ c)



7.2.4.3. Monotonie



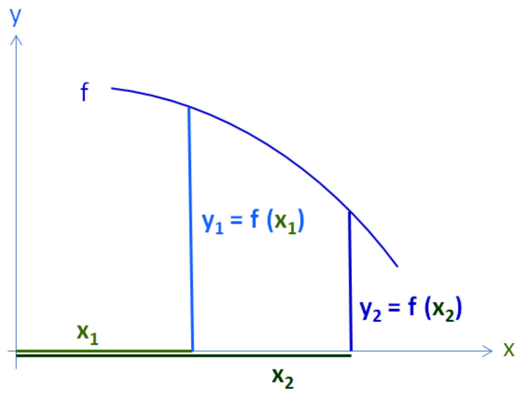
Eine Funktion **f** ist streng **monoton steigend** (streng monoton wachsend),

wenn **mit wachsendem x** die **Funktionswerte y = f(x) immer größer** werden.

Formal: $\forall\, x_1, x_2\ (x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)\,)$

Eine Funktion f ist **monoton steigend**

$\forall\, x_1, x_2\ (x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)\,)$



Eine Funktion **f** ist streng **monoton fallend** ,

wenn **mit wachsendem x** die **Funktionswerte y = f(x) immer kleiner** werden.

$\forall\, x_1, x_2\ (x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)\,)$

Eine Funktion f ist **monoton fallend**

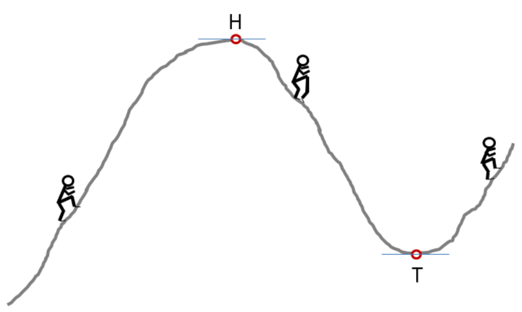
$\forall\, x_1, x_2\ (x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)\,)$

wachsendes x bedeutet, die **x-Werte** werden **immer größer**. Wir betrachten also die Funktion in **Schreibrichtung**:

von links kommend, nach rechts schauend

Ist eine Funktion ***monoton steigend***, so **steigen** in dieser Blickrichtung auch die entsprechenden **y-Werte**, sie werden **größer**.

Ist eine Funktion ***monoton fallend***, so werden die **y-Werte** in dieser Blickrichtung immer **kleiner**

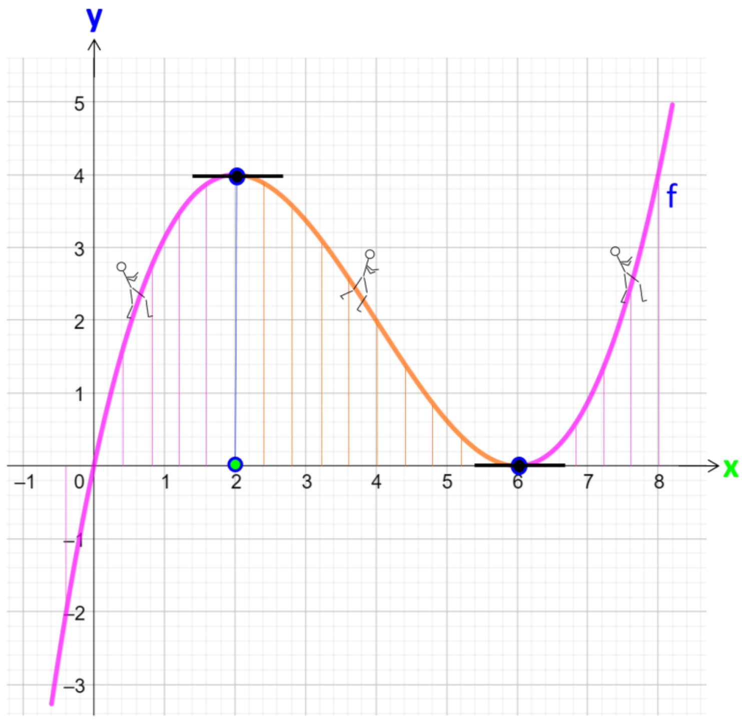


Denken Sie sich den Funktionsgraphen als Berg- und Tallandschaft, die in Schreibrichtung durchwandert wird.

Dort, wo Sie **bergauf** gehen, es also **ansteigt**, ist der Graph **monoton steigend** in jenen Bereichen, wo's **bergab** geht, **monoton fallend**.

Im **höchsten Punkt H** und **tiefsten Punkt T** ist die Funktion **weder steigend noch fallend**, da es hier **weder bergauf noch bergab** geht.
Hier ist die Steigung null. (Siehe auch 9.4.2., S 454 f)

Beispiel: Geben Sie die Intervalle an, in der die abgebildete Funktion **f** mit $D_f = \mathbb{R}$ monoton steigend bzw. fallend ist.



Von links nach rechts (in Schreibrichtung) geschaut:

Für alle **x-Werte** bis ausschließlich **x = 2** werden die **y-Werte** der Funktion immer **größer**.
Von **x = – ∞** bis ausschließlich **x = 2** ist die **Funktion** demnach streng **monoton steigend**.

Bei **x = 2** wachsen oder fallen die Funktionswerte **nicht**, weil dort der **höchste** Punkt liegt,
bei dem es weder bergauf noch bergab geht.

Nach **x = 2** bis ausschließlich **x = 6** werden die **y-Werte** immer **kleiner**. In diesem Bereich ist die Funktion streng **monoton fallend**.

Bei **x = 6** fallen oder steigen die Funktionswerte **nicht**, weil dort der **tiefste** Punkt liegt,
bei dem es weder bergab noch bergauf geht.

Nach **x = 6** **steigen** dann die **y-Werte** für alle weiteren **x-Werte** an. Die Funktion ist demnach ab hier immer streng **monoton steigend**.

Wir schreiben:

für $(-\infty\,;2)$ bzw. $x < 2$ ist **f** streng **monoton steigend**, bedeutet **Anstieg**, weil **positive Steigung**,

für $(2\,;6)$ bzw. $2 < x < 6$ ist **f** streng **monoton fallend**, bedeutet **Gefälle**, weil **negative Steigung**,

für $(6\,;\infty)$ bzw. $x > 6$ ist **f** streng **monoton steigend**, bedeutet **Anstieg**, weil **positive Steigung**.

7.2.5. Verkettung (Komposition) von Funktionen

Es seien $f: M \to N$ und $g: N \to P$ Funktionen.

Die Verkettung (Komposition) $f \circ g$ ist definiert: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$$\boxed{(f \circ g)(x) = f(g(x))}$$

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{x+1}$ $g(x) = x^2$

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x^2) = \frac{1}{x^2+1}$$

$f(x) = \frac{1}{x+1}$ $g(x) = x^2$

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g\left(\frac{1}{x+1}\right) = \left(\frac{1}{x+1}\right)^2 = \frac{1^2}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} \neq \frac{1}{x^2+1^2}$$

... siehe auch: 2.2.6.2.2., S 92

Beispiel: $f(x) = 1 - \sin^2(x)$ $g(x) = 1 + \cos(x^2)$

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(1 + \cos(x^2)) = 1 - \sin^2(1 + \cos(x^2))$$

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = 1 + \cos((1 - \sin^2(x))^2) = 1 + \cos[\cos^2(x)]^2 = 1 + \cos[\cos^4(x)]$$

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \quad | -\sin^2(x)$

$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = 1 - [\sin(x)]^2$

Übung

Gegeben sind die Funktionen $f(x) = 2x - 1 \quad g(x) = 1 - 2x \quad h(x) = \frac{1}{16}x^4$

$u(x) = \sqrt{x} \quad v(x) = 3 \cdot 2^{x-1} \quad w(x) = \log_2(x)$

Bestimmen Sie 1) $(f \circ g)(x)$ 2) $(g \circ f)(x)$

3) $(h \circ u)(x)$ 4) $(u \circ h)(x)$

5) $(v \circ w)(x)$ 6) $(w \circ v)(x)$

Lösungen:

1) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(1 - 2x) - 1 = 2 - 4x - 1 = -4x + 1$

2) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 1 - 2(2x - 1) = 1 - 4x + 2 = -4x + 3$

3) $(h \circ u)(x) = h(u(x)) = \frac{1}{16}(\sqrt{x})^4 = \frac{1}{16}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^4 = \frac{1}{16}x^2$

4) $(u \circ h)(x) = u(h(x)) = \sqrt{\frac{1}{16}x^4} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{16}} \cdot \sqrt{x^4} = \pm\frac{1}{4}\,(x^4)^{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{4} \cdot x^2$ KEINE Funktion

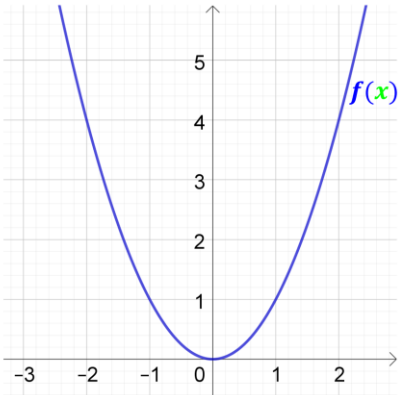
5) $(v \circ w)(x) = v(w(x)) = 3 \cdot 2^{\log_2(x)-1} = 3 \cdot 2^{\log_2(x)} \cdot 2^{-1} = \frac{3}{2} \cdot x$ Siehe 7.6., S 367 f

6) $(w \circ v)(x) = w(v(x)) = \log_2(3 \cdot 2^{x-1}) = \log_2(3) + \log_2(2^{x-1}) = \log_2(3) + x - 1$ Siehe 7.6., S 367 f

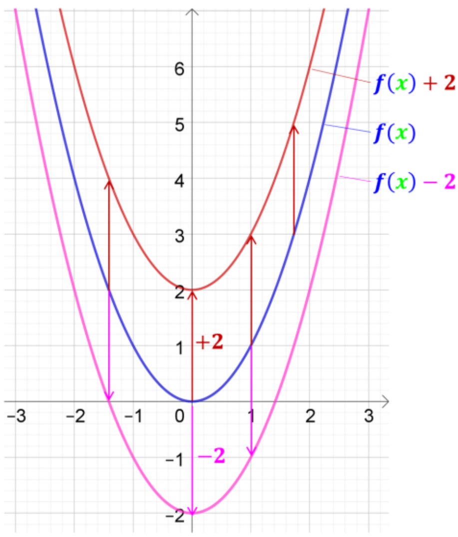
Wenn gewisse Regeln bzw. Eigenschaften nicht geläufig sind, siehe 2.2.2, S 73 f
7.6, S 367 f

Video-Tipp https://www.youtube.com/watch?v=y7MmgAdibnY

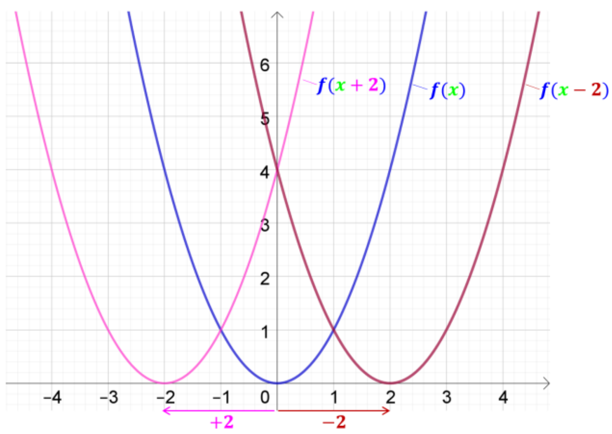
7.2.6. Translation und Spiegelung



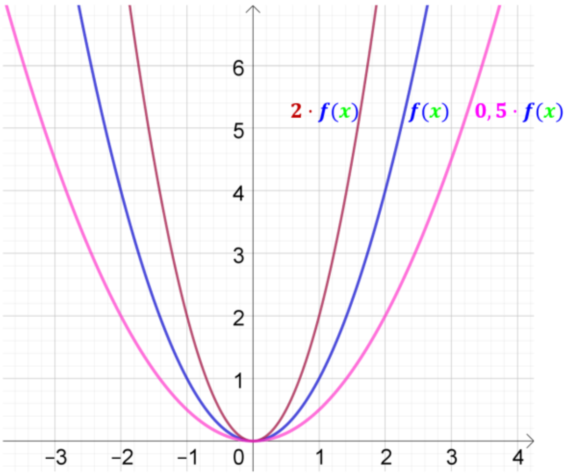
Betrachten wir die Funktion $f(x) = x^2$



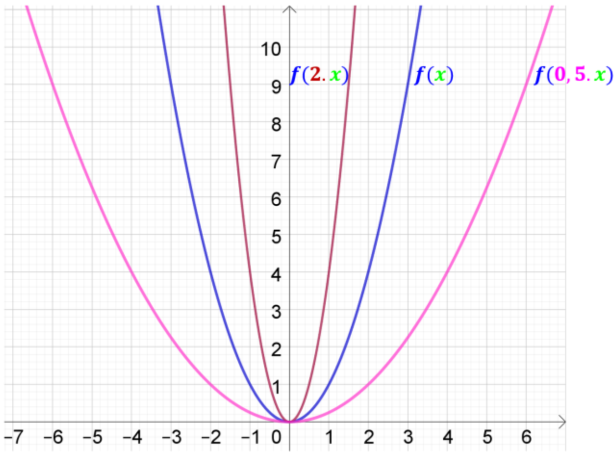
$$f(x)+c \begin{cases} c > 0 \text{ ... Translation nach oben} \\ c < 0 \text{ ... Translation nach unten} \end{cases}$$



$$f(x+c) \begin{cases} c > 0 \text{ ... Translation nach links} \\ c < 0 \text{ ... Translation nach rechts} \end{cases}$$

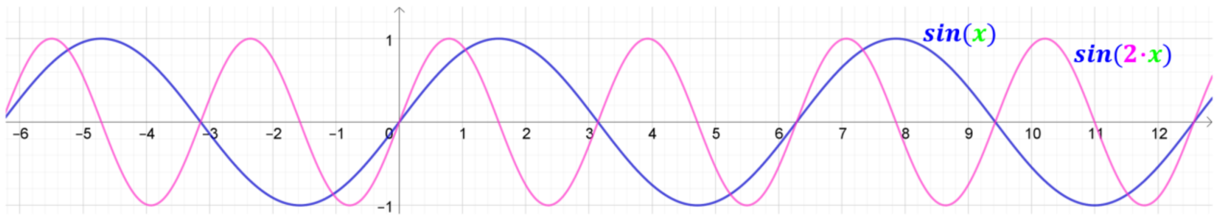


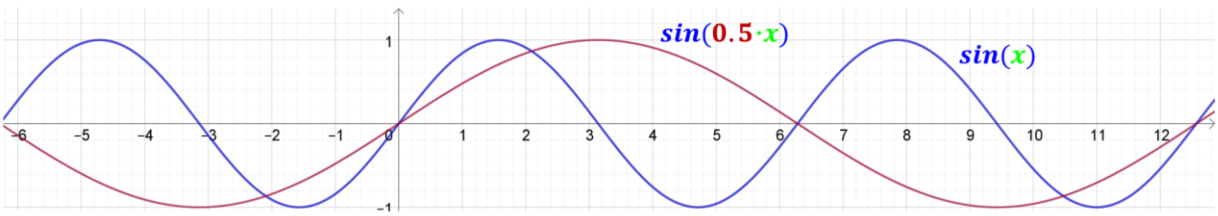
$$a \cdot f(x) \begin{cases} a > 0 \text{ ... Streckung in y-Richtung} \\ a < 0 \text{ ... Stauchung in y-Richtung} \end{cases}$$

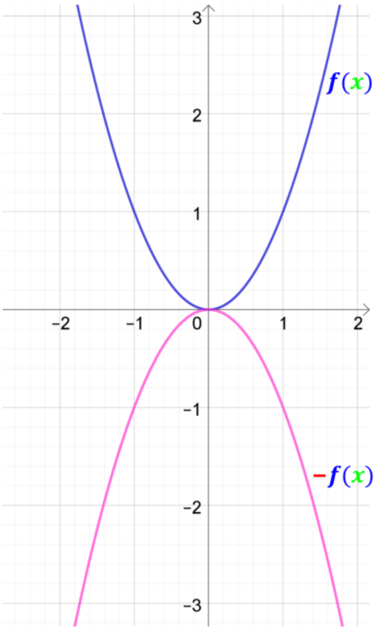


$$f(a \cdot x) \begin{cases} a > 0 \text{ ... Stauchung in x-Richtung} \\ a < 0 \text{ ... Streckung in x-Richtung} \end{cases}$$

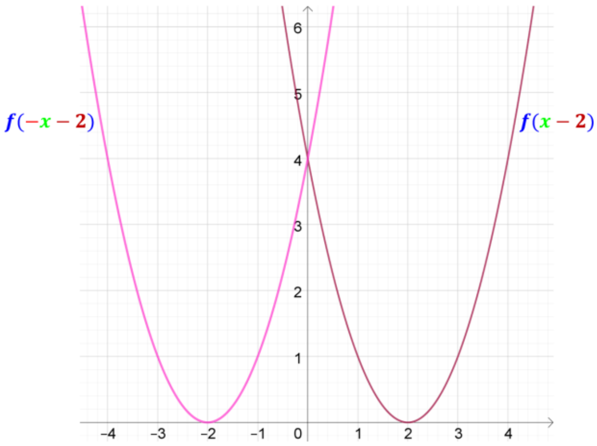
Besser ersichtlich bei periodischen Funktionen wie dem Sinus (sin):







$-f(x)$ … **Spiegelung** an der **x-Achse**



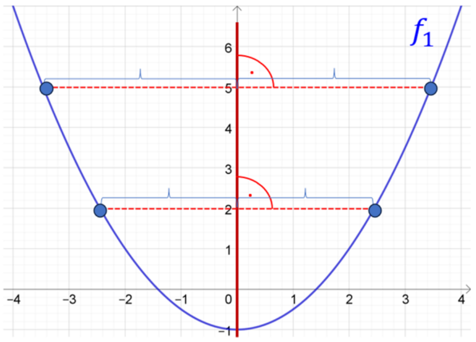
$f(-x)$ … **Spiegelung** an der **y-Achse**

7.2.7. Gerade und ungerade Funktionen

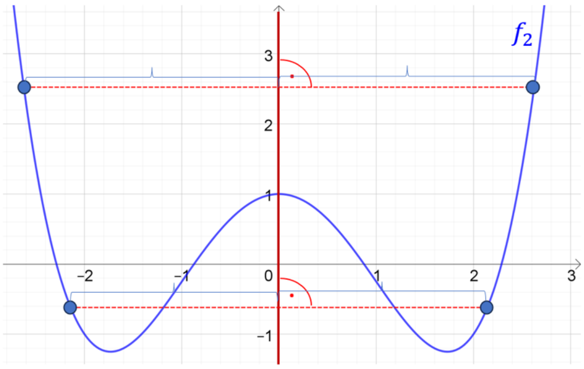
Gerade Funktionen

Gerade Funktionen liegen **spiegelsymmetrisch zur y-Achse**.

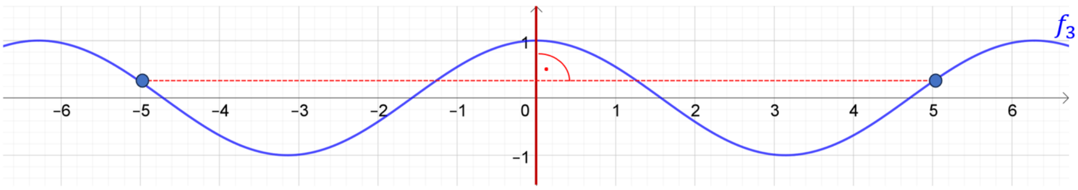
Beispiele gerader Funktionen



$f_1(x) = 0.5\,x^2 - 1 \cdot x^0$



$f_2(x) = 0.25\,x^4 + 1.5 \cdot x^2 + 1 \cdot x^0$



$f_3(x) = \cos(x)$

Gerade Polynomfunktionen besitzen **nur gerade Potenzen**, also Potenzen mit **geraden** Hochzahlen.

2. Grades: $\mathbf{f(x) = a \cdot x^2 + b} \cdot x^0$

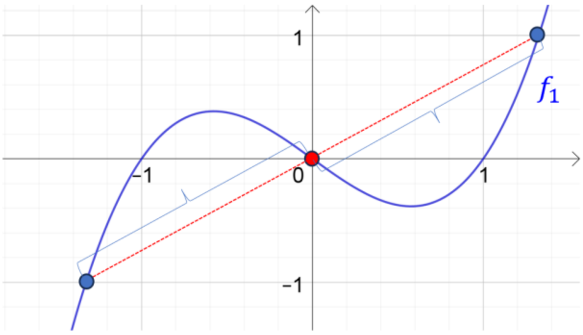
4. Grades: $\mathbf{f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c} \cdot x^0$

Verwechseln Sie **nicht** ***gerade*** *Funktionen* (spiegelsymmetrisch zur y-Achse) mit ***Geraden***, den Graphen linearer Funktionen.

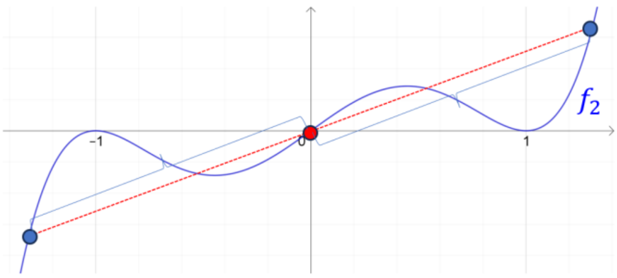
Ungerade Funktionen

Ungerade Funktionen liegen **punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung**.

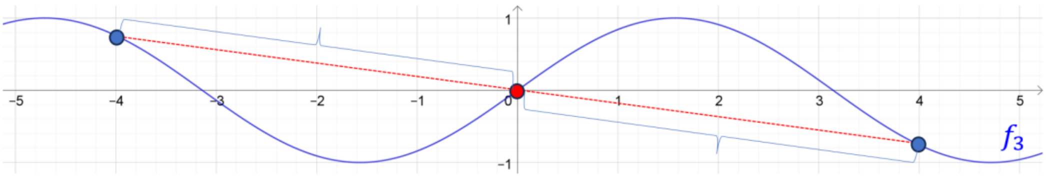
Beispiele **un**gerader Funktionen



$f_1(x) = 1 \cdot x^3 - 1 \cdot x^1$



$f_2(x) = 2 \cdot x^5 - 2 \cdot x^3 + 1 \cdot x^1$



$f_3(x) = \sin(x)$

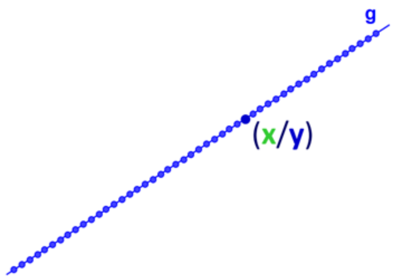
Ungerade Polynomfunktionen besitzen **nur ungerade Potenzen**, also Potenzen mit **ungeraden** Hochzahlen.

1. Grades: $\mathbf{f(x) = a \cdot x^1}$

3. Grades: $\mathbf{f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^1}$

7.3. Polynomfunktionen

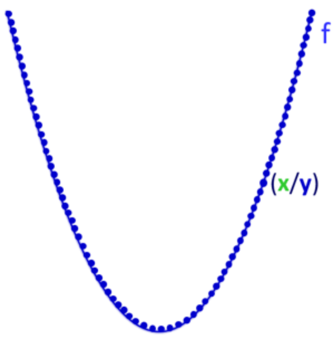
Hier **Beispiele**, die noch genaue Behandlung erfahren:



Polynomfunktion 1. Grades (lineare Funktion)

y = k . x + d

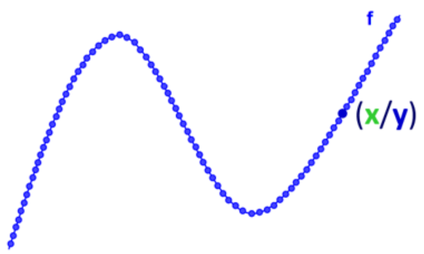
- Gleichung beschreibt eine **Linie**, weil x **und** y vorkommen.
- x und y stehen für **jeden der unendlich vielen Punkte**, aus denen die Linie besteht.
- Gleichung beschreibt eine **Funktion**, weil **y nur linear** vorkommt.
- Gleichung beschreibt eine **lineare Funktion** (eine **Gerade**), weil x **nur linear** (höchste Hochzahl ist 1) vorkommt.
- Gleichung beschreibt eine **allgemeine lineare Funktion** (Gerade), weil außer x und y noch **andere Buchstaben** vorkommen.
- **y = 2 x + 1** beschreibt eine **konkret gegebene lineare Funktion** (Gerade), weil **außer** x und **y nur Zahlen** vorkommen.



Polynomfunktion 2. Grades (quadratische Funktion)

$y = a . x^2 + b . x + c$

- Gleichung beschreibt eine **Linie**, weil x **und** y vorkommen.
- x und y stehen für **jeden der unendlich vielen Punkte**, aus denen die Linie besteht.
- Gleichung beschreibt eine **Funktion**, weil **y nur linear** vorkommt.
- Gleichung beschreibt eine **quadratische Funktion**, weil die höchste Potenz von x **quadratisch** (hoch 2) ist.
- Gleichung beschreibt eine **allgemeine quadratische Funktion**, weil außer x und y noch **andere Buchstaben** vorkommen.
- **$y = 3 x^2 + 2 x - 1$** beschreibt eine **konkret gegebene quadratische Funktion**, weil **außer** x und **y nur Zahlen** vorkommen.



Polynomfunktion 3. Grades (kubische Funktion)

$y = a . x^3 + b . x^2 + c . x + d$

- Gleichung beschreibt eine **Linie**, weil x **und** y vorkommen.
- x und y stehen für **jeden der unendlich vielen Punkte**, aus denen die Linie besteht.
- Gleichung beschreibt eine **Funktion**, weil **y nur linear** vorkommt.
- Gleichung beschreibt eine **Funktion 3. Grades**, weil die höchste Potenz von x **hoch 3** ist.
- Gleichung beschreibt eine **allgemeine Funktion 3. Grades**, weil außer x und y noch **andere Buchstaben** vorkommen.
- **$y = 2 x^3 + 3 x^2 - 4 x + 1$** beschreibt eine **konkret gegebene Funktion 3. Grades**, weil **außer** x und **y nur Zahlen** vorkommen.

usw.

Polynomfunktionen bestehen in der Regel aus mehreren Gliedern (+ −), wobei die **un**abhängige Variable (**x**) in der **Basis** einer Potenz **steht** und sich **nicht** im Nenner befindet. Die **Hochzahl** (der Exponent) muss eine **natürliche Zahl** sein.

Beispiele:

$\mathbf{f(x) = \frac{1}{4}\,x^1 - 2}$	Polynomfunktion **1.** Grades (lineare Funktion)
$\mathbf{h(x) = x^2 + \frac{3}{4}}$	Polynomfunktion **2.** Grades (quadratische Funktion)
$\mathbf{y = \frac{1}{8}\,x^3 - 5\,x^2 - 3\,x + 1}$	Polynomfunktion **3.** Grades (kubische Funktion)

Polynomfunktionen n-ten Grades werden auch **ganzrationale Funktionen** n-ten Grades oder **Potenzfunktionen** n-ten Grades genannt.

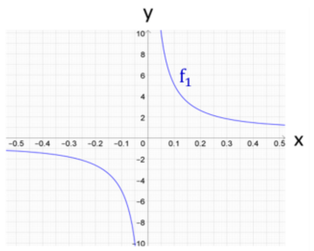
Auch **Parabeln** n-ter Ordnung, weil ihre Graphen (ab 2. Grades) als Parabeln bezeichnet werden.

Keine Polynomfunktionen sind **z.B.**:

$f_1(x) = \frac{1+x^2}{2\,x}$

(gebrochen) **rationale** Funktion

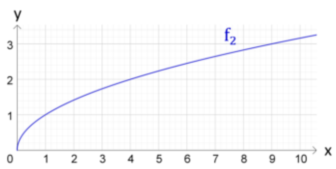
Die unabhängige Variable steht zumindest im Nenner.



$f_2(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

Wurzelfunktion

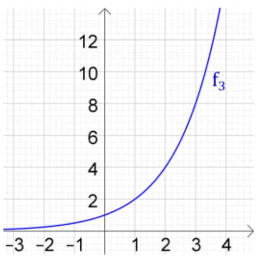
Die unabhängige Variable steht in der Wurzel bzw. die Potenz besitzt eine Bruch-Hochzahl (rationale Zahl).



$f_3(x) = 2^x$

Exponentialfunktion

Die unabhängige Variable steht im Exponenten.



7.3.1. Polynomfunktionen 1. Grades (Lineare Funktionen)

In Gleichungen **linear**er **Funktionen** kommt die unabhängige Variable (x) **nur linear** vor, das heißt, sie hat die Hochzahl **1** und steht **nicht** im Nenner.

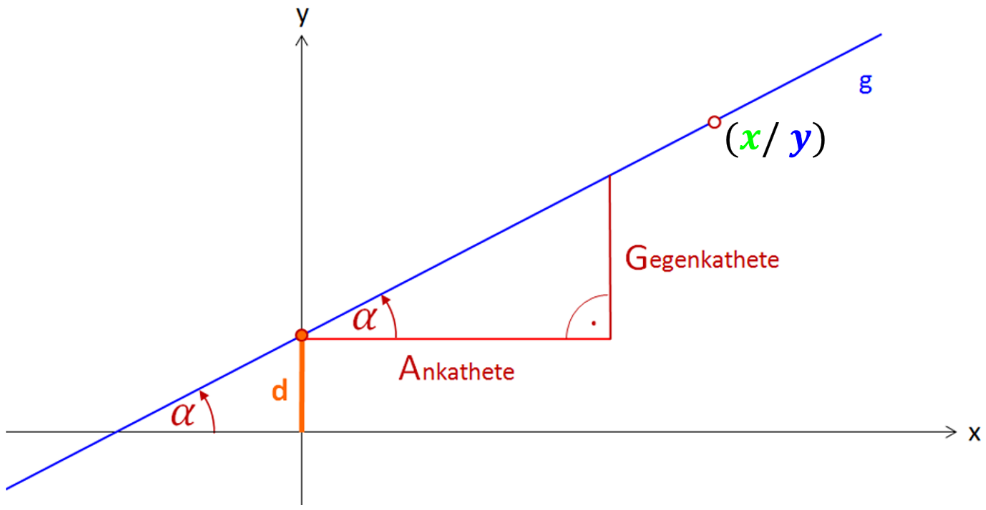
$\mathbf{y = f(x)}$ kommt **in jeder Funktion nur linear** vor.

Beispiele: $\mathbf{f(x) = \frac{1}{4}\, x^1 - 2}$

$\mathbf{3\, x^1 + 2\, y^1 = 4}$

Alle **linearen Funktionen** lassen sich auf folgende Form bringen:

$$\mathbf{g\!: \; y = k \cdot x + d}$$ [38]



Beachten Sie: **Positive** Winkel werden **gegen** den Uhrzeigersinn angegeben, **negative mit** dem Uhrzeigersinn.

$\mathbf{(x/y)}$ ... $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ stehen, wie in jeder Gleichung, die eine Linie beschreibt,
für die $\mathbf{x}$- und $\mathbf{y}$- Koordinaten aller **unendlich** vielen Punkte, aus denen die Linie (hier die Gerade) besteht.

Bemerkung: Es kann also **nie** Aufgabe sein, alle diese Variablen, nämlich alle unendlich vielen Punkte, zu berechnen.

[38] Siehe auch 4.5.1.4., S 203

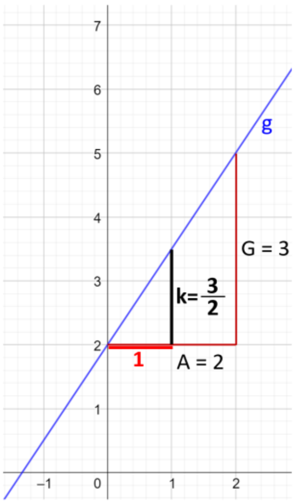
d . . . Der **Abstand** (die Distanz) **des Schnittpunktes der Geraden mit der y-Achse vom Koordinaten-Ursprung**.

k . . . **Steigung** (Anstieg, Gefälle, Richtung, mittlere Änderungsrate m.Ä.) **der Geraden**

Die **Steigung** $\mathbf{k}$ ist festgelegt als

$$\boxed{\mathbf{k} = \frac{\mathbf{Gegenkathete}}{\mathbf{Ankathete}} = \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{A}} = \mathbf{tan}(\alpha)}$$

Wählt man die **Ankathete A = 1**, so entspricht die **Gegenkathete G** immer der **Steigung** $\mathbf{k}$ der Geraden.



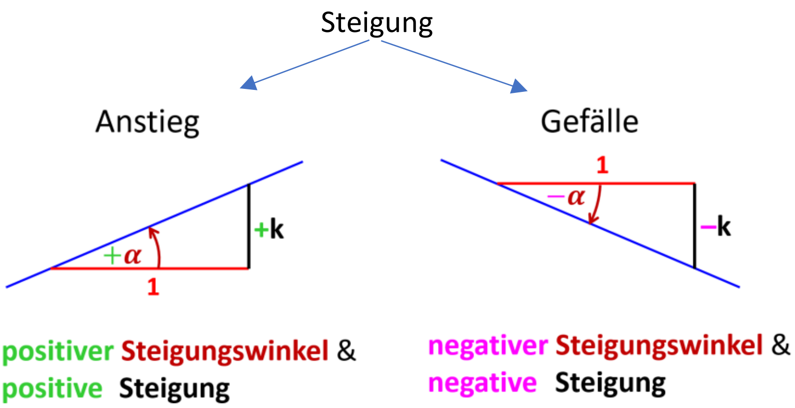
Warum?

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{A}} \; \begin{matrix}\leftrightarrow \\ = \\ \leftrightarrow\end{matrix} \; \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{1}}$$

Ein **Beispiel**:

Es sei $\mathrm{k} = \frac{3}{2}$:

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} \rightarrow \mathrm{k} = \frac{\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}}{\mathbf{1}} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{1}} = \frac{\mathrm{G}}{\mathrm{A}}$$



7.3.2. Polynomfunktionen 2. Grades (quadratische Funktionen)

Polynomfunktionen 2.Grades nennt man auch **ganzrationale Funktionen 2.Grades** oder **quadratische Funktionen** oder auch **Parabeln 2.Ordnung** weil die höchste Potenz der unabhängigen Variablen (x) **quadratisch** ist.

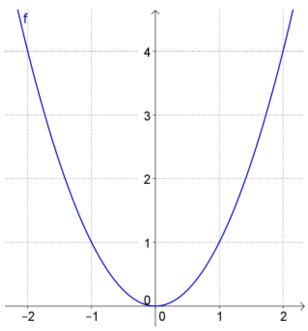
Beispiele: $f_1(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x - 5$

$f_2(x) = x^2 + 1$

Die **allgemeine Form einer Polynomfunktion 2. Grades** lautet:

$$\mathbf{f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x^1 + c \cdot x^0 = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_0 \cdot x^0}$$

Mit a, b und c bzw. a_2, a_2, a_0 als den Koeffizienten (Vorzahlen).



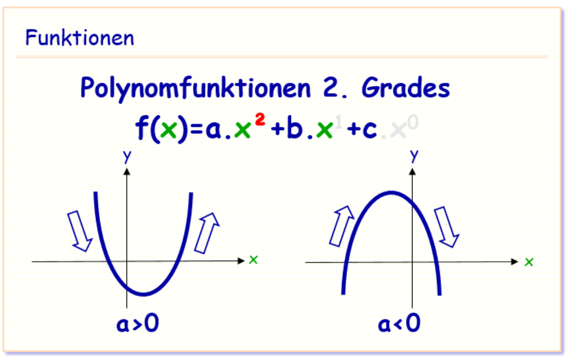
Die einfachste quadratische Funktion besitzt die Gleichung

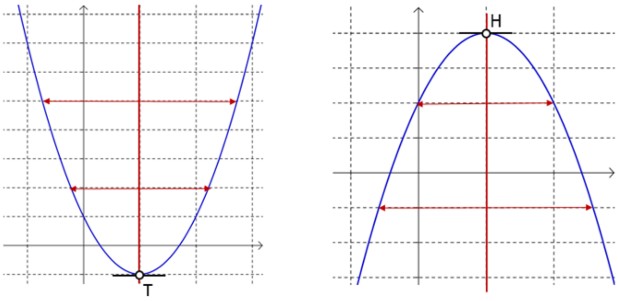
$$f(x) = x^2,$$

deren Graph nebenstehenden Verlauf besitzt.

Den **Graphen einer Polynomfunktion 2. oder höheren Grades** nennt man **Parabel**.

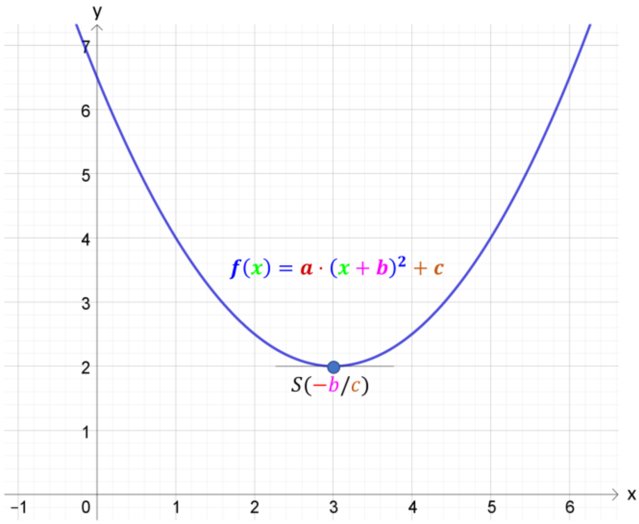
Alle **Polynomfunktionen 2. Grades** verfügen über diese charakteristische Form, wenngleich nicht immer in besonderer Lage wie $f(x) = x^2$.





Polynomfunktionen 2. Grades sind spiegel-**symmetrisch bezüglich** der Achse durch ihren **tiefsten Punkt T** bzw. **höchsten Punktes H**.

Scheitelberechnung



Beispiel: $f(x) = \frac{1}{2}\,x^2 - 3\,x + \frac{13}{2}$

$$f(x) = \frac{1}{2}\,x^2 - 3\,x + \frac{13}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot (\,x^2 - 6\,x + \ \dots) + \frac{13}{2}$$

Ergänzung zu einem **vollständigen Quadrat**:

$(\,a^2 - 2\,a\,b + b^2)$
$(\,x^2 - 6\,x \quad + \cdots)$
$\rightarrow \ a = x \quad 2\,a\,b = 2\,x\,b = 6\,x \ \rightarrow \ b = 3 \rightarrow b^2 = 9$
$(\,x^2 - 6\,x \quad + \ \mathbf{9})$

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot (\,x^2 - 6\,x + \mathbf{9}) + \underbrace{\frac{13}{2} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot \mathbf{9}}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x - 3)^2 + 2$$

Da wir $\frac{1}{2} \cdot 9$ ergänzt haben, müssen wir $\frac{1}{2} \cdot 9$ auch wieder abziehen.

$S(3/2)$

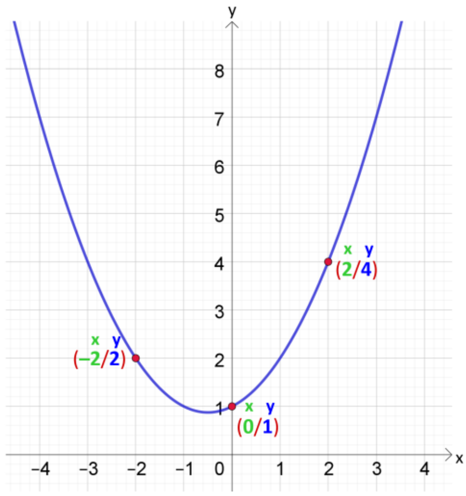
Bemerkung: In der Differentialrechnung wird ein Scheitel mittels 1. Ableitung, die null gesetzt wird, bestimmt.
(Siehe 9.4.2., S 454 f)

Tipp: Mit dem Programm GeoGebra® oder GNU-Oktave® oder Wolfram Alpha® lassen sich Funktionsgraphen leicht darstellen, zur Veranschaulichung und Kontrolle.

Beispiel:

Der Graph einer Polynomfunktion 2. Grades geht durch die Punkte (–2/2), (0/1) und (2/4).

Stellen Sie die Gleichung dieser Funktion auf.



Die allgemeine Gleichung einer Polynomfunktion 2. Grades lautet:

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Die x und $y = f(x)$ stehen für alle unendlich vielen Punkte, aus denen der Graph besteht. Diese können naturgemäß nicht (alle) bestimmt werden.
Eine Polynomfunktion gilt dann als gegeben, wenn man die Koeffizienten (Vorzahlen), hier a, b und c, kennt.
Demnach haben wir **3 Bestimmungsstücke** und benötigen **3 Angaben** über diese Funktion:
Wir kennen 3 Punkte, die wir für x und $y = f(x)$ in die Funktionsgleichung einsetzen können, weil diese 3 Punkte auf dem Graphen liegen sollen:

$$f(\ x\ ) = y$$

$$f(-2) = 2 \ :\ f(-2) = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c$$

$$f(0) = 1 \ :\ f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$

$$f(2) = 4 \ :\ f(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$$

$$2 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c$$

$$1 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$

$$4 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$$

$$\begin{array}{lll} I & 2 = 4 \cdot a - 2 \cdot b + c & \\ II & 1 = 0 \cdot a + 0 \cdot b + c & \rightarrow\ c = 1 \\ III & 4 = 4 \cdot a + 2 \cdot b + c & \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll} I & 2 = 4 \cdot a - 2 \cdot b + 1 \\ III & 4 = 4 \cdot a + 2 \cdot b + 1 \end{array}\right] +$$

$$6 = 8 \cdot a \quad + 2 \quad | -2$$

$$4 = 8 \cdot a \quad | :8$$

$$0.5 = a$$

$$I \quad 2 = 4 \cdot 0.5 - 2 \cdot b + 1 \ \rightarrow\ b = 0.5$$

$$f(x) = 0.5 \cdot x^2 + 0.5 \cdot x + 1$$

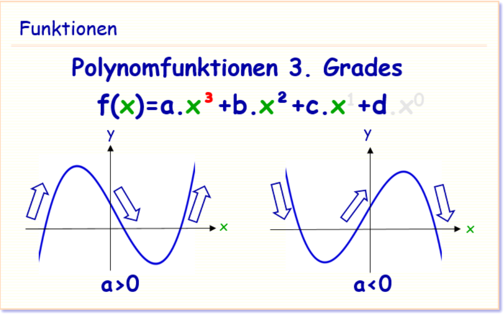
7.3.3. Polynomfunktionen 3. und höheren Grades

Die **allgemeine Form einer Polynomfunktion 3. Grades** lautet:

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x^1 + d \cdot x^0 = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_0 \cdot x^0$$

Beispiele konkret gegebener Funktionen: $f_1(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - 2x + 4$ oder $f_2(x) = x^3$

Charakteristische Verläufe der Funktionsgraphen:



Die **allgemeine Form einer Polynomfunktion 4. Grades** lautet:

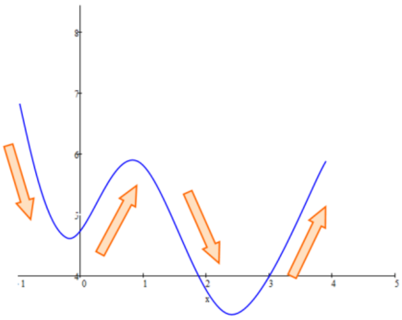
$$f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x^1 + e \cdot x^0$$

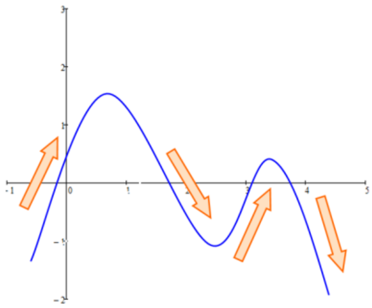
$$f(x) = a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_0 \cdot x^0$$

Beispiele konkret gegebener Funktionen: $f_1(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{8}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - 2x + 4$

$f_2(x) = x^4 + 1$

Charakteristische Verläufe der Funktionsgraphen:





Abschließend noch die **allgemeine Gleichung einer Polynomfunktion n-ten Grades:**

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_0 \cdot x^0$$

Mit a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ... , a_2, a_1, a_0 als den Koeffizienten (Vorzahlen)

An der Struktur der allgemeinen Gleichung lässt sich erkennen, dass eine Polynomfunktion **n**-ten Grades **n+1** Koeffizienten und damit Bestimmungsstücke besitzt.

7.4. (gebrochen) rationale Funktionen

Auch bei (gebrochen) **rationalen Funktionen** steht die Variable **x in der Basis** von Potenzen.
x steht (auch) im **Nenner**. Die **Graphen** solcher Funktionen nennt man **Hyperbel**n.

Beispiele: $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$; $p(x) = \frac{2x}{x+0.5}$

Rationale Funktionen existieren nicht automatisch für alle $x \in \mathbb{R}$. Es existiert also nicht für jede reelle Zahl ein y-Wert (Funktionswert). Nämlich für jene Zahlen nicht, für die der Nenner Null wird.

Beispiel: $f(x) = \frac{2x}{x^3 - 1}$ $G = \mathbb{R}$

Setzen wir den Nenner Null, um jene Zahlen zu ermitteln, für die der Nenner den Wert Null annimmt.

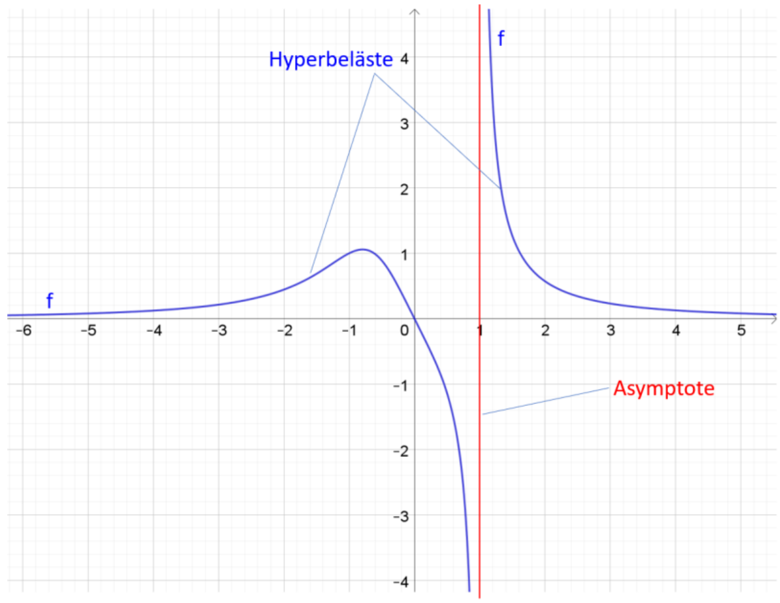
Nenner: $x^3 - 1 = 0 \quad | +1$

$x^3 = 1 \quad | \sqrt[3]{\ }$

$\underline{x = 1}$

Aus der Grundmenge $G = \mathbb{R}$ schließen wir die Zahl $x = 1$ aus, weil es für sie keinen y-Wert gibt.

Das führt uns auf die Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$



An der Stelle $x = 1$ schmiegt sich der Graph der Funktion von beiden Seiten kommend einer Geraden an, Eine solche Gerade heißt Asymptote. Eine solche senkrecht verlaufende Asymptote nennt man Pol, die (x-) Stelle, an der der Pol liegt, die Polstelle. (Siehe auch 9.1., S 423 f)

Das Verhalten der Funktion im Unendlichen meint, wohin die **y-Werte tendieren**, wenn $x \to \pm\infty$ geht. (Unendlicher Grenzwert. Siehe auch 7.8.2., S 389 f)

Beispiel: $f(x) = \frac{2\,x}{x^3-1}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2\,x}{x^3-1} \overset{①}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2\,x}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{1}{x^3}} \overset{②}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{\overset{1}{2\,\cancel{x}}}{\cancel{x^3}x^2}}{\frac{\cancel{x^3}1}{\underset{1}{\cancel{x^3}}}-\frac{1}{x^3}} \overset{③}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\overbrace{\frac{2}{x^2}}^{\to\,0}}{1-\underbrace{\frac{1}{x^3}}_{\to\,0}} = \frac{0}{1-0} = \mathbf{0}$$

① Jedes Glied (+ –) im Zähler und Nenner wird durch die höchste Potenz der unabhängigen Variablen (x) dividiert, die im Bruch vorkommt.

② Jeder einzelne Bruch wird, wenn möglich, gekürzt.

③ In jedem einzelnen Bruch lassen wir nun $x \to \pm\infty$ gehen.

$\frac{2}{x^2}$ … Wenn der Nenner immer größer wird, geht der gesamte Bruch gegen **0**, weil 2 durch eine immer größer werdende Zahl dividiert wird.

$\frac{1}{x^3}$ … Wenn der Nenner immer größer wird, geht der gesamte Bruch gegen **0**, weil 1 durch eine immer größer werdende Zahl dividiert wird.

Wenn $x \to \pm\infty$ geht, gehen die y-Werte bei dieser Funktion gegen **0** (siehe auch Graph am Beginn der Seite).

7.5. Wurzelfunktionen

Die **Umkehrung der Potenzrechnung** ist die **Wurzelrechnung**:

Beispiele:

$5^2 = 25 \quad \leftrightarrow \quad \sqrt[2]{25} = \pm 5$ $\qquad$ $2^3 = 8 \quad \leftrightarrow \quad \sqrt[3]{8} = 2$

Entsprechend ist die Umkehrfunktion einer Potenz– bzw. Polynomfunktion die entsprechende Wurzelfunktion und die Umkehrfunktion einer Wurzelfunktion die entsprechende Potenzfunktion:

Potenz – Funktionen	**Wurzel** – Funktionen
Bei **Potenz**– oder **Polynom**funktionen steht die unabhängige **Variable** in der Basis.	Bei **Wurzel**funktionen steht die unabhängige **Variable** in der Wurzel.
Bsp.: $f(x) = x^3$	**Bsp.:** $f(x) = \sqrt[3]{x}$
Bsp.: $f(x) = x^4$	**Bsp.:** $f(x) = \sqrt[4]{x}$

Bemerkung: Ich habe hier auf die Schreibweise f^{-1} für die Umkehrfunktion verzichtet, weil die Beziehungen wechselseitig gelten.

Bei **Wurzeln** mit **geradem Wurzelexponenten**, also z.B. $\sqrt[2]{}$ oder $\sqrt[4]{}$, muss die **Definitionsmenge** bestimmt werden, weil solche Wurzeln in $\mathbb{R}$ nur für nicht-negative Inhalte festgelegt sind.

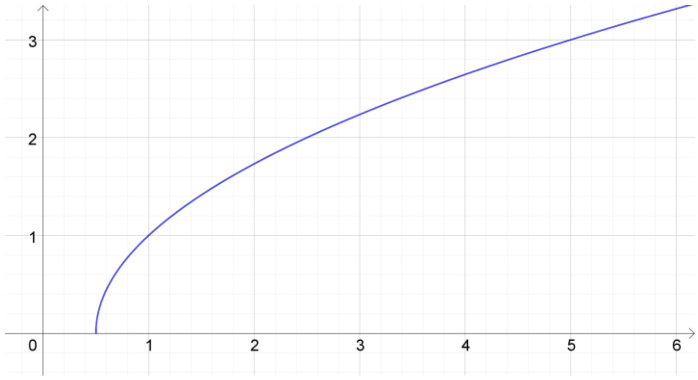
Beispiel: $G = \mathbb{R}$

$f(x) = \sqrt{2x-1}$ $\qquad$ Wurzelinhalt $2x - 1 \geq 0 \quad | +1$

$$2x \geq 1 \quad | :2$$

$$\underline{x \geq \frac{1}{2}}$$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \geq \tfrac{1}{2} \right\} = \left[\tfrac{1}{2}, \infty \right)$$



Diese Wurzelfunktion existiert erst für alle $x \geq \frac{1}{2}$, da erst für solche Zahlen der Wurzelinhalt nicht mehr negativ ist.

Keiner Einschränkung der Grundmenge bedarf es bei Wurzelfunktionen mit **un**geradem Wurzelexponenten, also z.B. $\sqrt[3]{\ }$ oder $\sqrt[5]{\ }$, weil solche Wurzeln in $\mathbb{R}$ auch für negative Zahlen definiert sind!

Beispiel: $\sqrt[3]{-8} = -2$ weil $(-2)^3 = -8$

7.6. Exponential – und Logarithmusfunktionen

Exponential – Funktionen	**Logarithmus** – Funktionen
Bei **Exponential**funktionen steht die unabhängige **Variable** im Exponenten (in der Hochzahl)	Bei **Logarithmus**funktionen steht die unabhängige **Variable** im Argument (Logarithmand[39])
Bsp.: $f(x) = 2^x$	**Bsp.:** $f(x) = \log_2(x)$

Sowie Potenz– und Wurzelfunktionen die gegenseitigen Umkehrfunktionen sind, verhält es sich bei den Exponential– und Logarithmusfunktionen:

$$x^3 \longleftrightarrow \sqrt[3]{x}$$

$$2^x \longleftrightarrow \log_2(x)$$

Der **Zusammenhang zwischen Exponential– und Logarithmusfunktion** ist:

$$\boxed{\mathbf{a^x = b \leftrightarrow \log_a(b) = x}}$$

Beispiele:

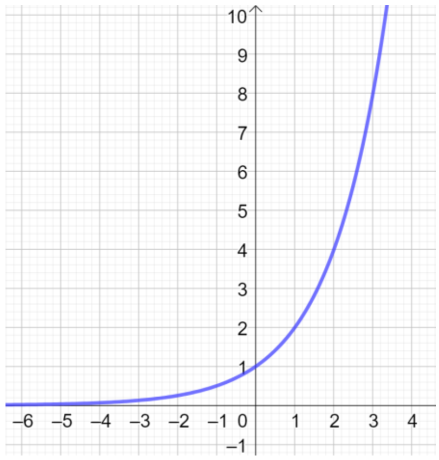
$$2^3 = 8 \quad \leftrightarrow \quad \log_2(8) = 3$$

$$\frac{1}{100} = 10^{-2} \quad \leftrightarrow \quad \log_{10}\left(\frac{1}{100}\right) = -2$$

$$e = e^1 \quad \leftrightarrow \quad \log_e(e) = 1 = \ln(e) = 1$$

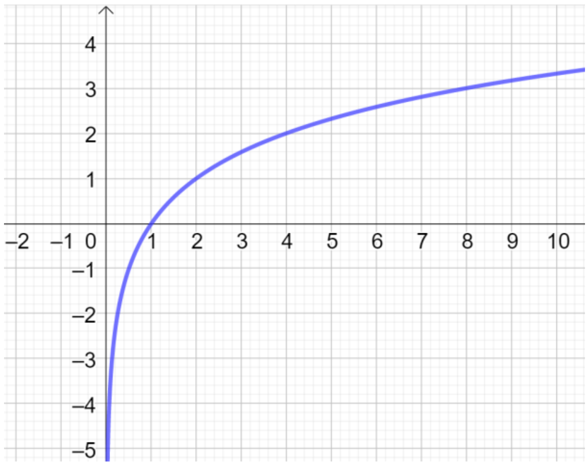
siehe S 369

[39] Eigentlich: *numerus logarithmandus*: die zu logarithmierende Zahl



Für reine Exponentialfunktionen gilt:

- $D = \mathbb{R}$
  ... für jede reelle Zahl als x-Wert gibt es einen y-Wert (Funktionswert)
- $W = \mathbb{R}^+$
  ... alle y-Werte (Funktionswerte) sind positiv
- $a^0 = 1$
  ... bei x = 0 ist der y-Wert gleich1

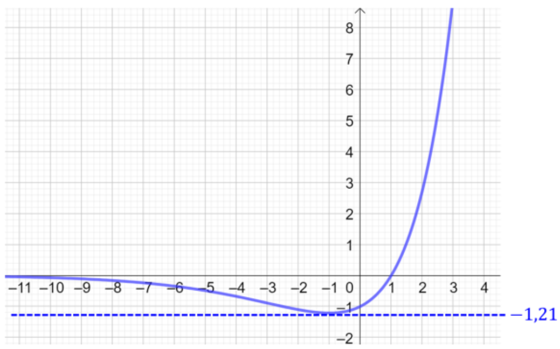


Für reine Logarithmusfunktionen gilt:

- $D = \mathbb{R}^+$
  ... Logarithmusfunktionen existieren nur für positive x-Werte
- $W = \mathbb{R}$
  ... die y-Werte (Funktionswerte) können positive und negative Werte annehmen oder null.
- $log_a(1) = 0$
  ... bei x = 1 ist der y-Wert null.
- $log_a(a) = 1$
  ... $\log_2(2) = 1$ $\log_{10}(10) = 1$ ...
- $a^{log_a(x)} = x$ $log_a(a^x) = x$
  ... weil die jeweiligen Umkehrungen

Was bedeuten *reine* Exponential- bzw. Logarithmusfunktionen?

Beispiel: $f(x) = e^{\frac{x}{2}} \cdot (x - 1)$ ... KEINE *reine* Exponentialfunktion



Diese Funktion setzt sich aus zwei Funktionen zusammen:
Aus der Exponentialfunktion $e^{\frac{x}{2}}$
und der linearen Funktion $x - 1$.

Hier ist $D = \mathbb{R}$ aber $W = [-1,21;\ \infty)$

Bemerkung: Der y-Wert –1,21 wurde mittels Extremum (Tiefpunkt) der Funktion f ermittelt (9.4.2., S 454 f).

Für Logarithmen bestimmter Basen gibt es eigene Abkürzungen:

	Schreibweise
binärer Logarithmus	$\log_2 x = \mathbf{lb}\ x$
dekadischer Logarithmus	$\log_{10} x = \mathbf{lg}\ x$
natürlicher Logarithmus (*logarithmus naturalis*)	$\log_e x = \mathbf{ln}\ x$

e ist die **EULER**sche Zahl. e ≈ 2,7182 . .

Leonhard EULER
(1707 – 1783)

Leonhard EULER, ein Schweizer Mathematiker und einer der größten seines Faches, entwickelte diese Zahl, indem er in der Zinseszins-Formel die Anzahl der Verzinsungen pro Jahr gegen unendlich gehen ließ:

Zinseszinsformel: $K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$ (für ganzjährige Verzinsung)

Wird ein Kapital von 1 (€) ein Jahr angelegt, so wächst es bei 100 % Verzinsung pro Jahr mit $i = \frac{100}{100} = 1$ auf $K_1 = (1+1)^1 = 2$ (€) an.

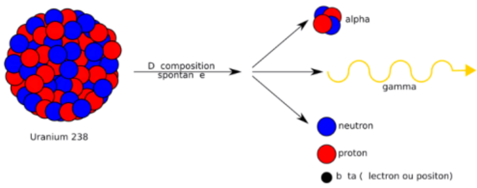
Findet die Verzinsung **halb**jährlich statt, so gilt für das Kapital nach **einem** Jahr: $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$

bei vierteljähriger Verzinsung $\left(1+\frac{1}{4}\right)^4$.

Wird n-mal **im** Jahr verzinst, so wächst das Kapital auf $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ an.

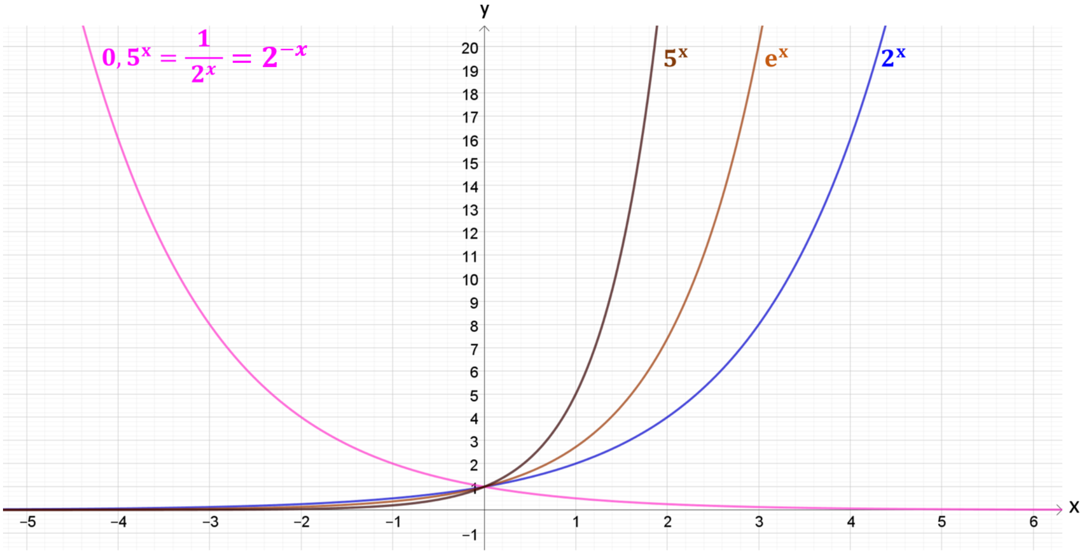
Lässt man $n \to \infty$, so gilt $$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$$

Mit der Exponentialfunktion e^x und ihrer Umkehrung dem $\ln(x)$ lassen sich natürliche Wachstumsvorgänge, wie z.B. die Anzahl der Bakterien in Nährlösungen, oder der radioaktive Zerfall im Zeitverlauf mathematisch beschreiben.

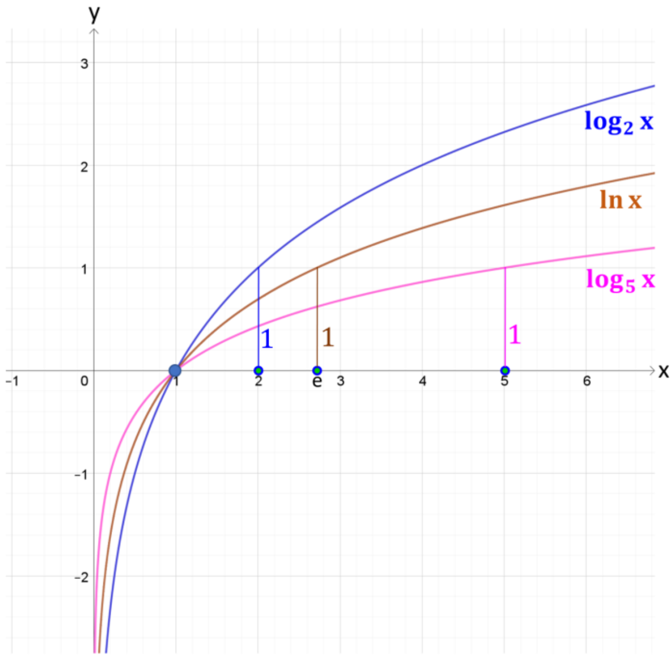


Bilder: Pixabay

Im Folgenden einige Graphen von Exponential-



und Logarithmusfunktionen:



7.7. Winkelfunktionen

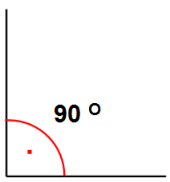
7.7.1. Grundbegriffe

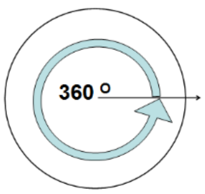
Strasbourg

Es gibt auf der Welt **zwei fundamentale Richtungen**:

senkrecht oder lotrecht, auch **vertikal** genannt. Diese Richtung zeigt zum Erdmittelpunkt. Alle Körper in Erdnähe werden von unserem Planeten in dieser Richtung angezogen.

waag(e)recht bzw. **horizontal**: Die Lage, die die Wasseroberfläche in ruhendem Zustand einnimmt.



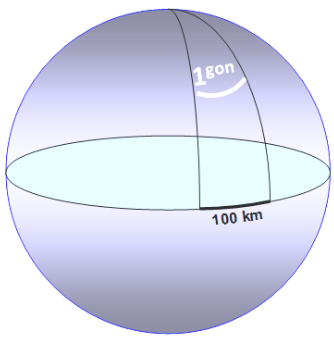


Spätestens die *Babylonier* (*Babylonisches Reich* 1839 v.Chr. – 539 v.Chr.) teilten den ***rechten*** (im Sinne für das Bauen *richtigen*) **Winkel** in **90^o** ein und entsprechend den **Vollkreis** in **360 °** .

Dabei gilt: **$1^o = 60\,'$** **$1\,' = 60\,''$** **'** ... Winkel**minuten** **''** ... Winkel**sekunden**

Winkel in diesem **Gradmaß** werden mit **griechischen Kleinbuchstaben** angegeben. Hier einige Bezeichnungen:

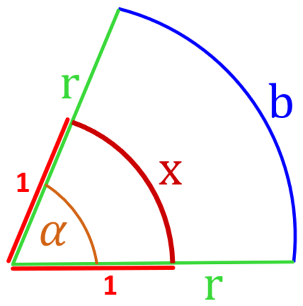
α	*alpha*	λ	*lamda*
β	*beta*	μ	*my*
γ	*gamma*	π	*pi*
δ	*delta*	ρ	*rho*
ε	*epsilon*	σ	*sigma*



Im Jahre 1795 legten Franzosen die Winkel-Einheit **Neugrad (gon)**, wie nebenstehend skizziert, fest. Demnach besitzt der **Vollkreis 400** $^{g(on)}$, der **rechte Winkel** misst **100** $^{g(on)}$.

Einerseits wurde dieses Winkelmaß nach der *Französischen Revolution* als Zeichen des Bruches mit den früheren royalen Verhältnissen eingeführt, andererseits war es der Versuch, auch die Winkeleinteilung dekadisch, also nach den Regeln des 10-er Systems, zu gestalten.

Diese Winkeleinheit hat sich nicht durchgesetzt. Der Vorteil im Rechnen, dass **1^g = 100 Winkelminuten** und **1 Winkelminute = 100 Winkelsekunden** hat, ist durch die elektronischen Hilfsmittel obsolet geworden.



Mit dem **Bogenmaß** existiert eine dritte Möglichkeit, die Größe von Winkeln anzugeben. Das **Bogenmaß x** gibt die **Länge** des zum Winkel α gehörigen **Kreisbogen**s eines Kreises mit dem **Radius 1**, im sogenannten **Einheitskreis**, an.

Für die Länge eines Kreisbogens b gilt $b = \frac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180°}$

Ist $r = 1$, so gilt $x = \frac{1 \cdot \pi \cdot \alpha}{180°} = \pi \cdot \frac{\alpha}{180°}$

Zusammenhang zwischen

Gradmaß α und **Bogenmaß** $\mathbf{x}$

$$\pi \cdot \frac{\alpha}{180°} = x$$

Danach ergibt sich beispielsweise für

$180°$	$\pi \cdot \frac{180°}{180°} = \pi$	π
$90°$		$\frac{\pi}{2}$
$270°$		$\frac{3\pi}{2}$

Im Folgenden die Winkelfunktionen, ihre Umkehrungen und die Bezeichnungen am Taschenrechner:

Winkelfunktion	ihre **Umkehrung**	Taschenrechner
Sinus (**sin**)	Arcussinus (arcsin)	$\sin^{-1}$
Cosinus (**cos**)	Arcuscosinus (arccos)	$\cos^{-1}$
Tangens (**tan**)	Arcustangens (arctan)	$\tan^{-1}$

sinus *(lateinisch): Biegung, Rundung*

cosinus *: Abkürzung von sinus complementari : der Sinus des Komplementärwinkels (des auf 90°ergänzten Winkels)*

z.B. ist der sin (30°) = cos (90° – 30°) = cos (60°)

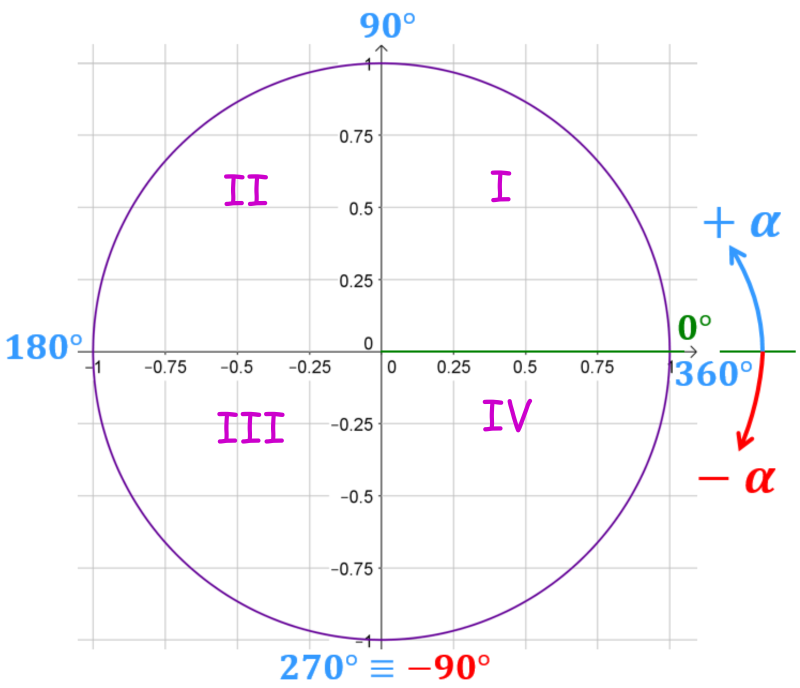
tangens *(lateinisch):* berührend

arcus *(lateinisch):* Bogen

7.7.2. Winkelfunktionen im Einheitskreis

Der **Einheitskreis** hat seinen **Mittelpunkt im Koordinatenursprung**.
Der **Radius** ist **1 Längeneinheit** groß.

Betrachten wir zunächst den **Einheitskreis**: Beachten Sie, der Radius $r = 1$

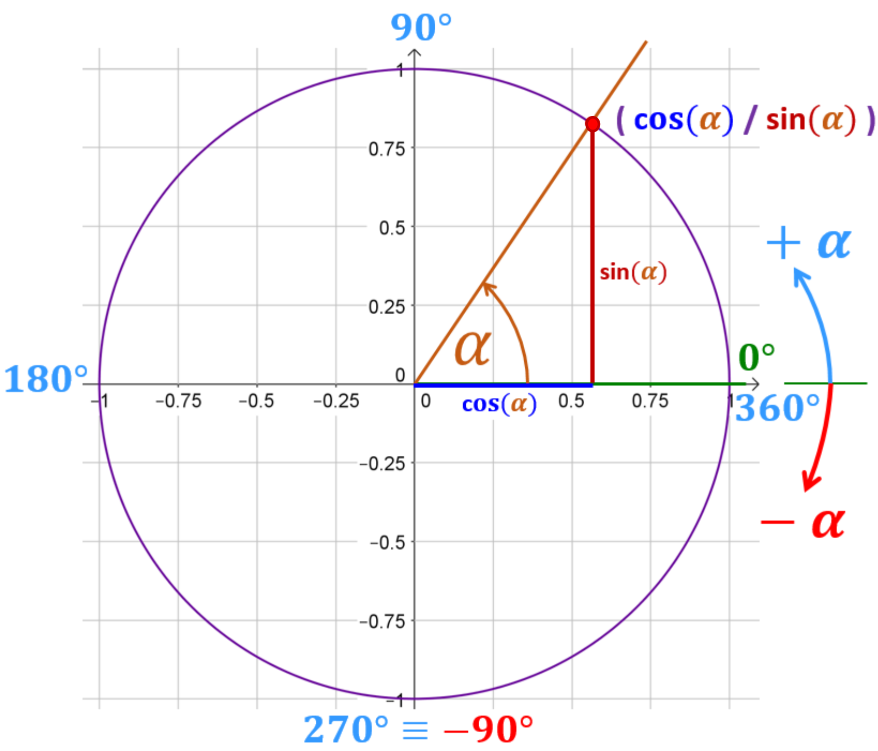


- **Alle Winkel** werden von der **positiven x-Achse** aus gemessen.
- **positive Winkel** werden **gegen den Uhrzeigersinn** aufgetragen,
  negative Winkel **mit dem Uhrzeigersinn**.

  $\equiv$ ist das Zeichen für **entspricht**

- **I … 1. Quadrant:** $0° < \alpha < 90°$ **II … 2. Quadrant:** $90° < \alpha < 180°$
  III … 3. Quadrant: $180° < \alpha < 270°$ **IV … 4. Quadrant:** $270° < \alpha < 360°$

Sin und Cosinus im Einheitskreis



- **Alle Winkel** werden von der **positiven x-Achse (= 1. Schenkel des Winkels)** aus gemessen.
- Der **2. Schenkel des Winkels** schneidet im Punkt ● den Einheitskreises.

  Dessen **x-Koordinate** ist der **Cosinus** des Winkels, dessen **y-Koordinate** der **Sinus** des Winkels.

Geometrie

x-Koordinate: $\cos(\alpha)$

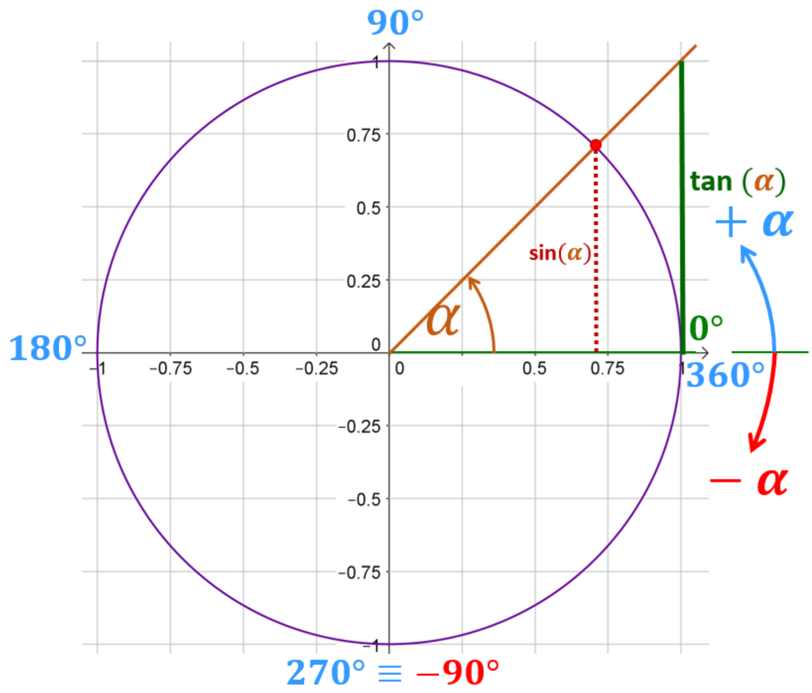
y-Koordinate: $\sin(\alpha)$

Merkspruch: **sinus ist senkrecht**

Aus dem Einheitskreis lässt sich ablesen:

	I	II	III	IV
sin	+	+	−	−
cos	+	−	−	+

Tangens im Einheitskreis



- **Alle Winkel** werden von der **positiven x-Achse (= 1. Schenkel des Winkels)** aus gemessen.
- Der **2. Schenkel des Winkels** schneidet im Punkt ● den Einheitskreis.

  Der **Tangens berührt** den **Einheitskreis parallel** zum Sinus des Winkels.

Da $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ gilt

	I	II	III	IV
sin	+	+	−	−
cos	+	−	−	+
tan	+	−	+	−

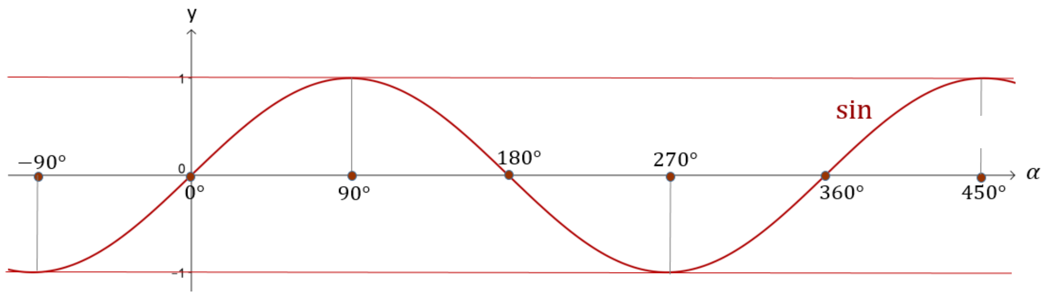
Das Vorzeichen des Tangens in den einzelnen Quadranten ergibt sich durch die Vorzeichenregeln der Division.

7.7.3. Graphen der Winkelfunktionen

7.7.3.1. sin und cos

Im Folgenden sind die Graphen dargestellt und wesentliche Eigenschaften besprochen.

Sinus

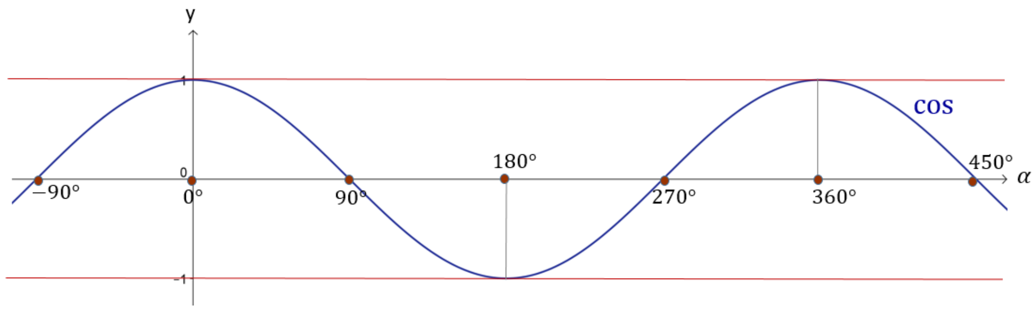


Eigenschaften:

- Die Funktion **sin** ist für alle x ∈ ℝ, also für alle reellen Zahlen definiert: $D = \mathbb{R}$
- Alle 360° wiederholen sich die Funktionswerte: Periode T = 360° bzw. 2π

  Man spricht deshalb von einer periodischen Funktion mit der Periode $T = 360° = 2\pi$
- Der größte y-Wert, den der Sinus annimmt, ist **+ 1** , der kleinste y-Wert, den der Sinus annimmt, ist **– 1**:
  $W = [-1, 1]$

Cosinus

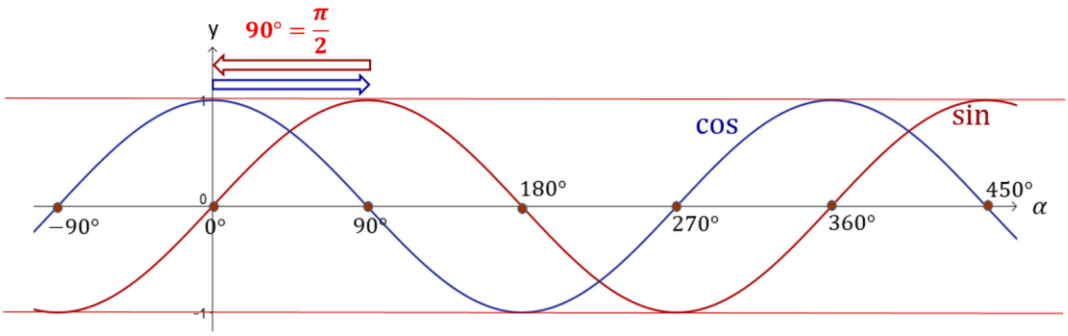


cos

Eigenschaften:

- Die Funktion **cos** ist für alle x ∈ ℝ, also für alle reellen Zahlen definiert: $D = \mathbb{R}$
- Alle 360° wiederholen sich die Funktionswerte: Periode T= 360° bzw. 2π

  Man spricht deshalb von einer periodischen Funktion mit der Periode $T = 360° = 2\pi$
- Der größte y-Wert, den der Cosinus annimmt, ist **+ 1** , der kleinste y-Wert, den der Cosinus annimmt, ist **– 1**
  $W = [-1, 1]$



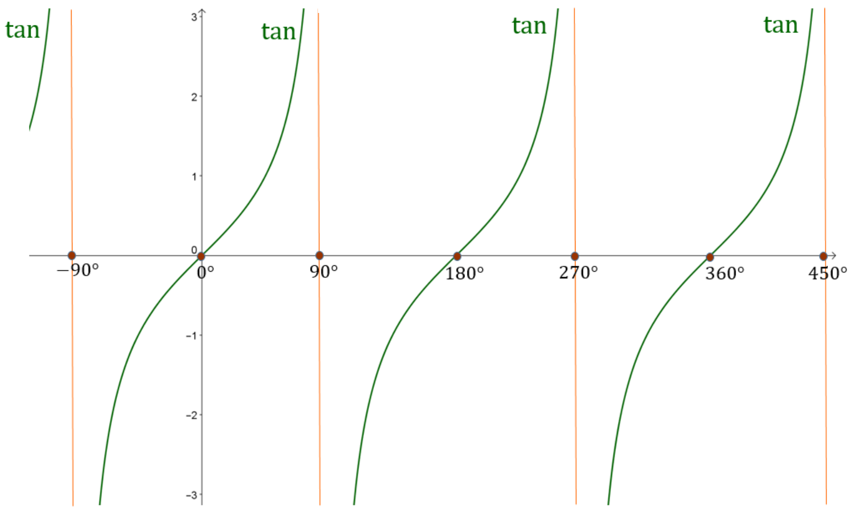
Verschiebt man den Graphen des Sinus um 90° nach links, so entsteht der Graph des Cosinus.

Verschiebt man den Graphen des Cosinus um 90° nach rechts, so entsteht der Graph des Sinus.

Gradmaß:	Bogenmaß:
$\sin(\alpha + 90°) = \cos(\alpha)$	$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$
$\cos(\alpha - 90°) = \sin(\alpha)$	$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$

7.7.3.2. tan

Tangens



Eigenschaften:

- Die Funktion **tan** ist für alle reellen Zahlen außer den ungeraden Vielfachen von $90° = \frac{\pi}{2}$ definiert:

  $D = \mathbb{R} \backslash \{(2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

- Alle $180°$ wiederholen sich die Funktionswerte: Periode $T = 180°$ bzw. π

  Man spricht deshalb von einer periodischen Funktion mit der Periode $T = 180° = \pi$

- Die y-Werte können jede reelle Zahl annehmen, also von $-\infty$ bis $+\infty$ gehen: $W = \mathbb{R}$

Der **Tangens** ist deshalb **für alle ungeraden Vielfachen von $90°$ nicht definiert**, weil der Tangens festgelegt ist als

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

und der **Cosinus bei allen ungeraden Vielfachen von $90°$** gleich **null** ist.

Ein Bruch mit dem Nenner Null ergibt aber **keine** Zahl (und auch nichts anderes).

Abschließend noch eine Liste für die Werte von Winkelfunktionen einzelner Winkel im 1. Quadranten:

	$0°$ bzw. 0	$30°$ bzw. $\frac{\pi}{6}$	$45°$ bzw. $\frac{\pi}{4}$	$60°$ bzw. $\frac{\pi}{3}$	$90°$ bzw. $\frac{\pi}{2}$
sin	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{0}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{4}$
cos	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{4}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{0}$
$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ *	1	$\sqrt{3}$	Nicht definiert

* $\frac{\frac{1}{2}\sqrt{1}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Übung

1) Verändern Sie nötigenfalls die Definition folgender Funktionen so ab, dass Sie eine Definitionsmenge bekommen.

a) $f: \{a, b, c\} \to \{u, v\}: \; a \to u, \; b \to \{u, v\}, \; c \to v$

b) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}: n \to n^2$

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \to \pm \sqrt[3]{x}$

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: \; x \to \frac{1}{(x-2)\cdot(x+1)}$

2) [40] Betrachten wir die Abbildung $f: (0, 1) \to (0, \infty): f(x) = \frac{1+x}{1-x}$

a) Zeichnen Sie den Graphen von f.

b) Für welche x ist $f(x) = 2$?

c) Ist f injektiv oder surjektiv?

d) Ist f monoton steigend oder fallend?

e) Bestimmen Sie das Bild (die Bildmenge) von f.

3) a) Der Graph einer Polynomfunktion 2. Grades geht durch die Punkte (–1/0), (0/2) und (2/4). Stellen Sie die Gleichung dieser Funktion auf.

b) Der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades geht durch die Punkte (–4/0), (0/2), (2/0) und (4/0). Ermitteln Sie die Funktionsgleichung.

4) Bestimmen Sie Definitionsbereich, Nullstellen und die Polstellen folgender reellwertiger Funktionen:

a) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-x-2}$ b) $g(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{x}$

5) Bestimmen Sie den Graphen der folgenden Funktion $f_i: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Für welche x ist die Funktion f_i definiert (Definitionsbereich)?
Bestimmen Sie das Bild (den Wertebereich) dieser Funktion.
Ist die Funktion injektiv, surjektiv, bijektiv?
Bestimmen Sie das Verhalten im Unendlichen.
Bestimmen Sie die Nullstellen.

a) $f_1(x) = 2\ln(-2x-1)$ b) $f_2(x) = 2\cos\left(\frac{1}{2}\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$

[40] https://www2.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2015/other/mathematik1_CHAB/Serie9

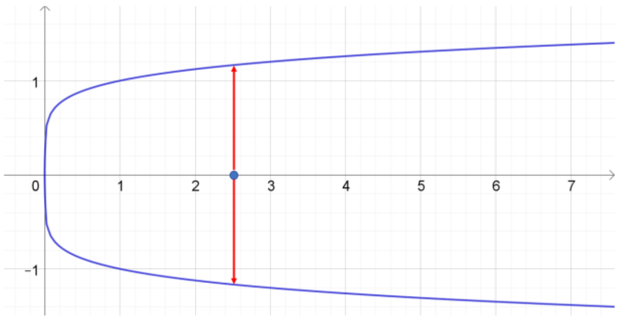
Lösungen: 1) Eine Funktion liegt dann vor, wenn JEDEM Element der Definitionsmenge GENAU EIN Element der Wertemenge zugeordnet wird.

a) Da dem Element b die **Menge** $\{u, v\}$ zugeornet wird, die NICHT Element der Wertemenge ist, nehmen wir das Element b heraus: $D = \{a, c\}$

b) Da JEDER natürlichen Zahl n GENAU eine Quadratzahl zugeordnet ist, braucht die Definitionsmenge nicht zu verändert werden: $D = \mathbb{N}$

Nicht damit verwechseln, dass es mehrere natürliche Zahlen gibt, die die gleiche Quadratzahl besitzen: eine positive Zahl und ihre negative Gegenzahl

c) Hier ist die Zuordnung zu verändern, weil ansonsten jeder reellen Zahl **zwei** Funktionswerte zugeordnet werden: ein positiver und ein negativer Wert. Die gegebene *Relation* besitzt folgenden Graphen



Es ist nur dann eine Funktion, wenn die Zuordnung entweder

$x \rightarrow +\sqrt[3]{x}$

oder

$x \rightarrow -\sqrt[3]{x}$

lautet.

d) Der Bruch $\frac{1}{(x-2)\cdot(x+1)}$ ist nur für solche reelle Zahlen definiert, für die der Nenner **nicht** null ist:

$$(x-2)\cdot(x+1) = 0 \text{ wenn } x-2=0 \lor x+1=0$$
$$x = 2 \lor x = -1$$

Damit lautet die Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}\backslash\{-1, 2\}$

2) a)

b) $x = \frac{1}{3}$

c) injektiv (siehe Graph)

d) (streng) monoton steigend (siehe Graph)

e) $W_f = (1, \infty)$ (siehe Graph)

3) a) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + 2$

b) $f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{8}x^2 - x + 2$

4) a) Tipp: Zuerst den Nenner zerlegen und anschließend kürzen!

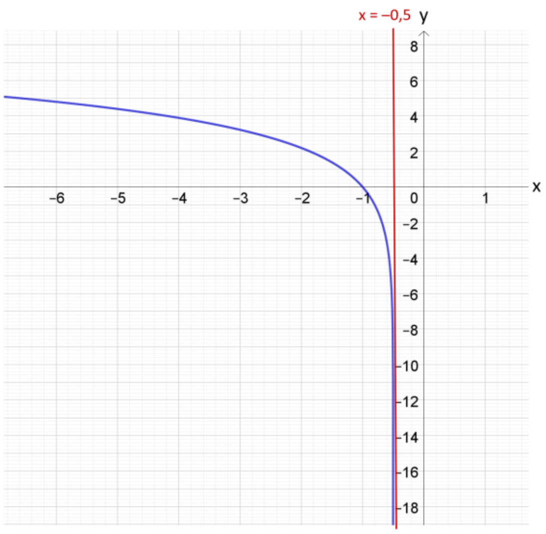
$D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ $\quad$ *keine Nullstellen* $\quad$ *Polstelle*: $x = -1$

b) $D_f = (-\infty, 1]\backslash\{0\}$ $\quad$ $N(1/0)$ $\quad$ *Polstelle*: $x = 0$

5) a) D_{f_1}: Logarithmen sind nur für positive Argumente (Logarithmanden) definiert:

$-2x - 1 > 0 \;|+1 \;\rightarrow\; -2x > 1 \;|:(-2) \;\rightarrow\; x < -0{,}5 \;\rightarrow\; D_{f_1} = (-\infty\,;\,-0{,}5)$

Logarithmen können jeden y-Wert annehmen: $W_{f_1} = \mathbb{R}$



Die Funktion ist bijektiv, weil für jeden y-Wert innerhalb der D_{f_1} genau ein x-Wert existiert.

Die y-Werte wachsen für $x \rightarrow -\infty$ immer mehr an, gehen also gegen ∞: $\lim\limits_{x\rightarrow-\infty} f_1(x) = \infty$

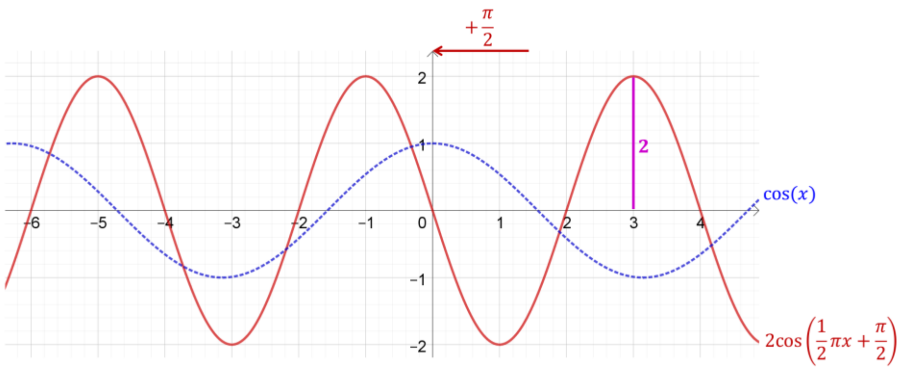
Nullstellen: Ein Logarithmus ist null, wenn sein Argument gleich 1 ist: $\log_a(1) = 0$ Siehe auch 7.6. S 367 f

$-2x - 1 = 0 \;|+1$

$-2x = 2 \;|:(-2)$

$x = -1$

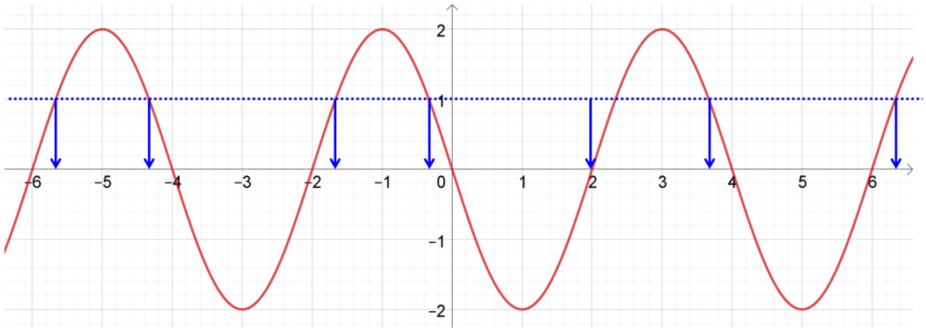
b)



Winkelfunktionen sind für alle reellen Zahlen definiert: $D_{f_2} = \mathbb{R}$

Die Amplitude ist $A = 2$: $W_{f_2} = [-2\,;\,2\,]$

Die Funktion ist surjektiv, weil es zu jedem y-Wert mindestens einen x-Wert gibt.



Es lässt sich weder für $x \to -\infty$ noch für $x \to \infty$ ein Wert angeben, gegen den die Funktion strebt, weil es eine periodische Funktion ist.

Die cos-Funktion ist dann null, wen ihr Argument ungerade Vielfache von $\frac{\pi}{2}$ sind (siehe 7.7.2., S 371 f)

$\frac{1}{2}\pi x + \frac{\pi}{2} = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$

$\frac{1}{2}\pi x + \frac{\pi}{2} = k \cdot \pi + \frac{\pi}{2} \quad | -\frac{\pi}{2}$

$\frac{1}{2}\pi x = k \cdot \pi | : \left(\frac{1}{2}\pi\right)$

$x = \frac{k \cdot \pi}{\frac{1}{2} \cdot \pi}$

$x = 2k \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$

$N_k(2k/0) \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$

Nebenrechnungen:

$$\frac{k \cdot \cancel{\pi}^{1}}{\frac{1}{2} \cdot \cancel{\pi}_{1}} = k \cdot \frac{2}{1} = 2\,k$$

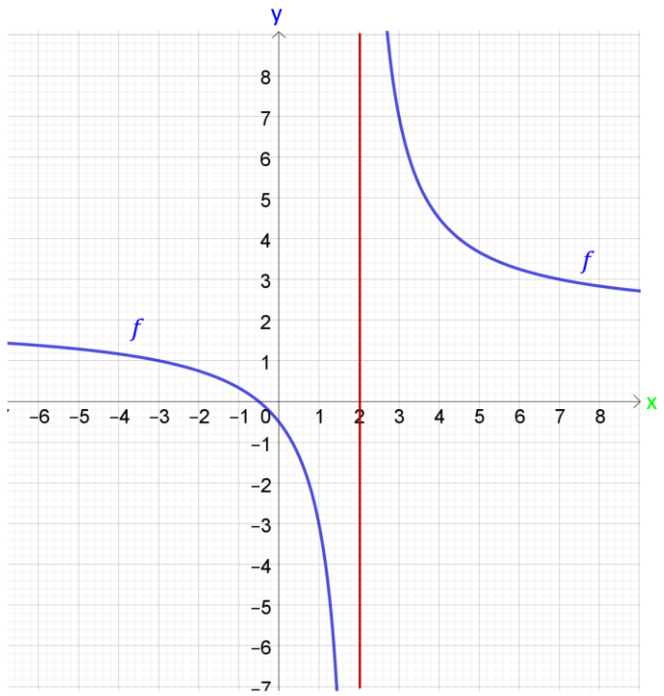
7.8. Grenzwerte

Es gibt zwei Arten von Grenzwerten:

- x-Werte, die sich einer (endlichen) Zahl nähern (**endliche** Grenzwerte) und
- x-Werte, die gegen unendlich streben (**unendliche** Grenzwerte)

7.8.1. Endliche Grenzwerte

Das Verhalten einer Funktion bei den Polstellen



Die abgebildete Funktion besitzt die Gleichung

$$f(x) = \frac{2 \cdot x + 1}{x - 2}$$

mit $G = \mathbb{R}$.

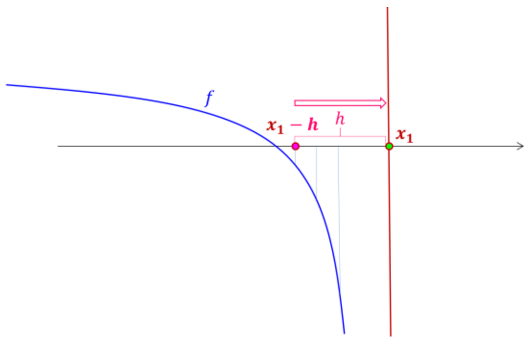
Für die Definitionsmenge D müssen wir jene reellen Zahlen aus der Grundmenge G ausscheiden, die den Nenner null werden lassen:

$x - 2 = 0 \rightarrow \; x = 2 \rightarrow \; D = \mathbb{R}\backslash\{2\}$

Offensichtlich springt der Graph dieser Funktion an der Stelle $x_1 = 2$.

Vor $x_1 = 2$ werden die Funktionswerte immer kleiner (immer „negativer"),
nach $x_1 = 2$ werden die Funktionswerte immer größer (immer „positiver").
In diesem Fall spricht man von einer Polstelle **mit** Vorzeichenwechsel.

Man kann das Verhalten der Funktion in unmittelbarer Umgebung der Stelle $x_1 = 2$ mittels Grenzwert (Limes) bestimmen.



Dazu beginnen wir in einem **Abstand h links** der Stelle $x_1 = 2$ und nähern uns dann immer mehr der Stelle $x_1 = 2$, indem wir **h gegen null** ($h \rightarrow 0$) gehen lassen. Dabei spricht man vom sog. **Links**seitigen **Limes** ($\lim$), weil man sich von **links** der besagten Stelle nähert:

allgemein: $\lim\limits_{h \to 0} f(x_1 - h)$

$$\lim_{h\to 0} f(2-h) = \lim_{h\to 0} \frac{2\cdot(2-h)+1}{2-h-2} = \lim_{h\to 0} \frac{2\cdot 2 \overbrace{-\,2\cdot h}^{-0{,}000\,...\,002} +1}{2 \underbrace{-\,h}_{-0{,}000\,...\,001} -2} =$$

Denke dir h als

$h = +0{,}000\,...\,0001$

$$= \frac{4-0{,}000\,...\,002+1}{2-0{,}000\,...\,001-2} = \frac{+4{,}999\,...\,998}{-0{,}000\,...\,001} \to -\infty$$

Dann ist (im Zähler)

$-2\cdot h = -2\cdot 0{,}000\,...\,001 =$

$= -0{,}000\,...\,002$

und (im Nenner)

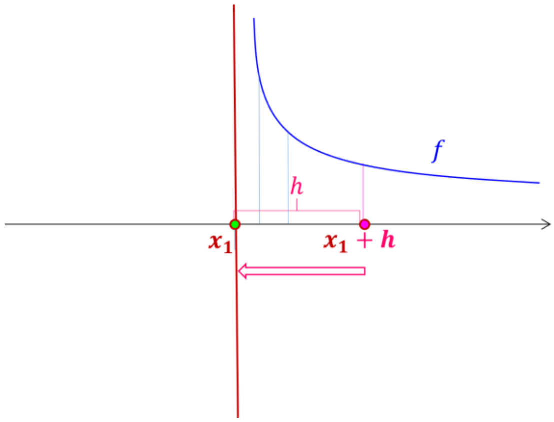
$-h = -0{,}000\,...\,001$

```
from sympy import *
```

```
x = symbols("x")
```

```
limit((2*x+1)/(x-2), x, 2, "-")
```

$-\infty$



Jetzt starten wir in einem **Abstand h rechts** der Stelle $x_1 = 2$ und nähern uns dann immer mehr der Stelle $x_1 = 2$, indem wir **h gegen null** ($h \to 0$) gehen lassen.

Dabei spricht man vom sog. **Rechtsseitigen Limes** (**lim**), weil man sich von **rechts** der besagten Stelle nähert:

allgemein: $\lim\limits_{h\to 0} f(x_1 + h)$

Denke dir h als

$h = +0{,}000\,...\,0001$

$$\lim_{h\to 0} f(2+h) = \lim_{h\to 0} \frac{2\cdot(2+h)+1}{2+h-2} = \lim_{h\to 0} \frac{2\cdot 2 \overbrace{+\,2\cdot h}^{+0{,}000\,...\,002} +1}{2 \underbrace{+\,h}_{+0{,}000\,...\,001} -2} =$$

Dann ist (im Zähler)

$+2\cdot h = +2\cdot 0{,}000\,...\,001 =$

$= +0{,}000\,...\,002$

$$= \frac{4+0{,}000\,...\,002+1}{2+0{,}000\,...\,001-2} = \frac{+5{,}000\,...\,002}{+0{,}000\,...\,001} \to +\infty$$

und (im Nenner)

$+h = +0{,}000\,...\,001$

```
from sympy import *
```

```
x = symbols("x")
```

```
limit((2*x+1)/(x-2), x, 2, "+")
```

∞

bzw:

```
from sympy import *
```

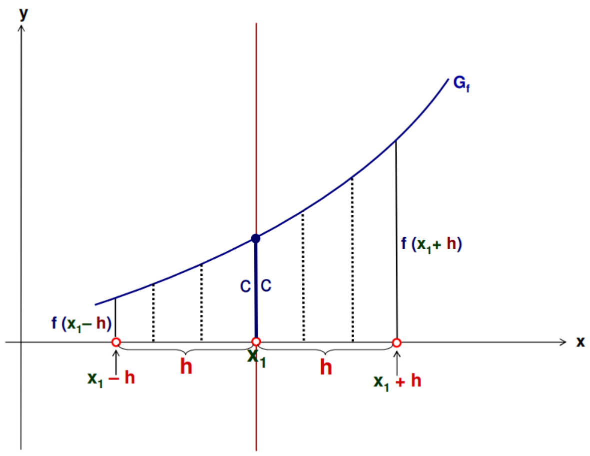
```
x = symbols("x")
```

```
limit((2*x+1)/(x-2), x, 2)
```

∞

Allgemein betrachtet können folgende Fälle auftreten:

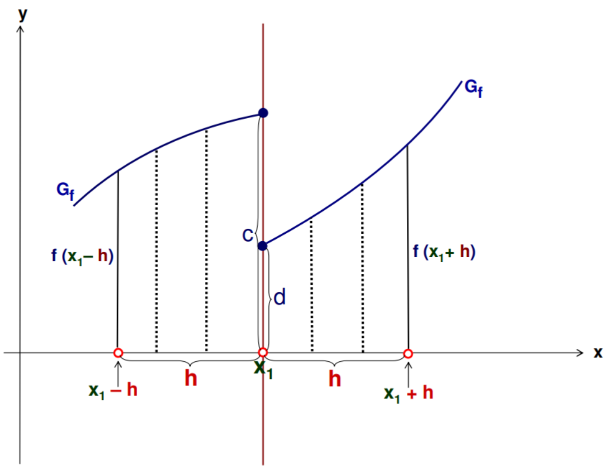
Fall 1: $\lim\limits_{h\to 0} f(x_1 - h) = \lim\limits_{h\to 0} f(x_1 + h) = c \in \mathbb{R}$



Linksseitiger Limes = Rechtsseitiger Limes = **c** ∈ ℝ

Die Funktion hat an der Stelle x_1 einen **stetig**en Verlauf.

Fall 2: $\lim\limits_{h\to 0} f(x_1 - h) = c \in \mathbb{R} \neq \lim\limits_{h\to 0} f(x_1 + h) = d \in \mathbb{R}$

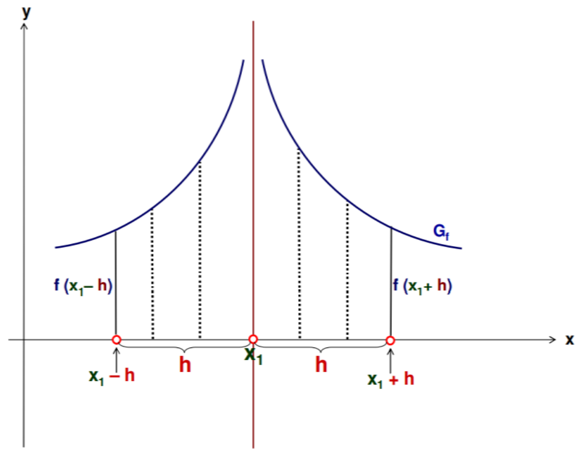


Linksseitiger Limes = **c** ∈ ℝ ≠ Rechtsseitiger Limes = **d** ∈ ℝ

Die Funktion hat an der Stelle x_1 einen **endliche** Sprungstelle.

Fall 3: $\lim\limits_{h\to 0} f(x_1-h) = +\infty = \lim\limits_{h\to 0} f(x_1+h)$

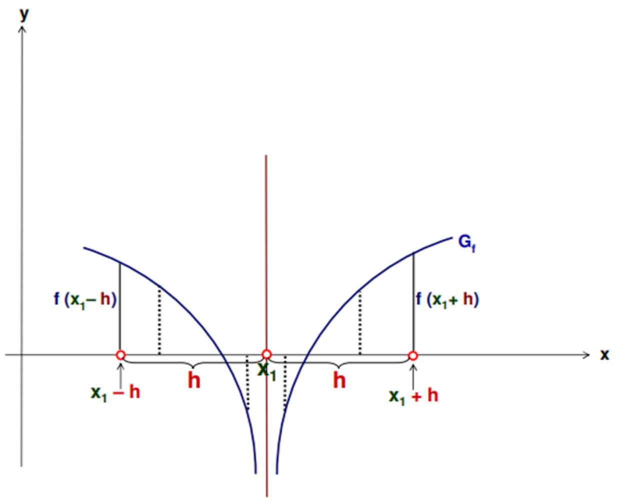
Links- und rechtsseitiger Limes sind gleich und **sterben beide nach $+\infty$** bzw. **beide nach $-\infty$**



bzw. $\lim\limits_{h\to 0} f(x_1-h = -\infty = \lim\limits_{h\to 0} f(x_1+h)$

Linksseitiger Limes = Rechtsseitiger Limes → $+\infty$ bzw. $-\infty$

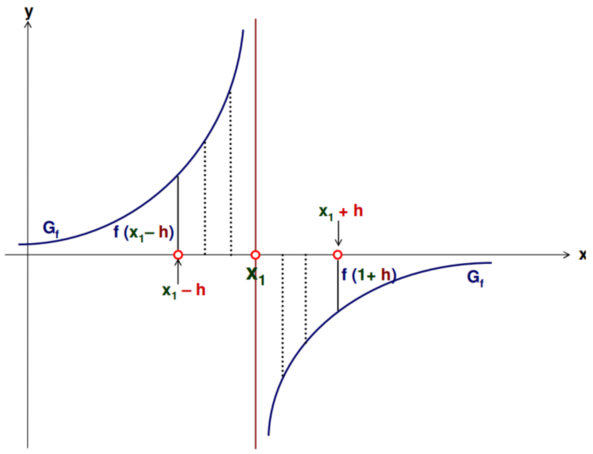
Die Funktion hat an der Stelle x_1 eine **unendliche** Sprungstelle (**Polstelle**) **ohne** Vorzeichenwechsel.



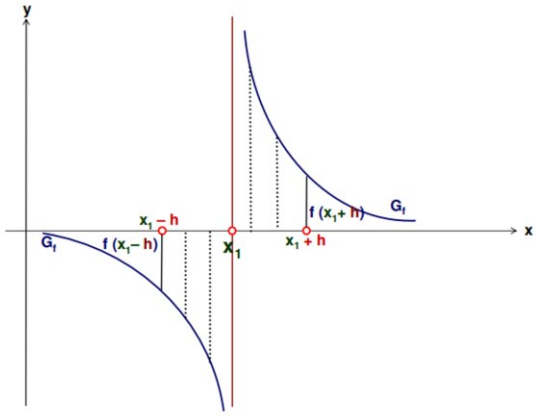
Fall 4: $\lim\limits_{h\to 0} f(x_1-h) = +\infty \neq \lim\limits_{h\to 0} f(x_1+h) = -\infty$

Links- und rechtsseitiger Limes sind ungleich unendlich

Hier spricht man von einer **unendliche**n **Sprungstelle mit Vorzeichenwechsel**, die auch unten abgebildeten Verlauf annehmen kann:



bzw. $\lim\limits_{h\to 0} f(x_1 - h) = -\infty \neq \lim\limits_{h\to 0} f(x_1 + h) = +\infty$



Linksseitiger Limes ≠ Rechtsseitiger Limes → $+\infty$ bzw. $-\infty$

Die Funktion hat an der Stelle x_1 eine **unendliche** Sprungstelle (**Polstelle**) **mit** Vorzeichenwechsel.

Der Begriff endlicher Grenzwert sollte nicht zu dem Fehlschluss verleiten, dass das Ergebnis des Limes, also die y-Werte, gegen eine (endliche) Zahl streben!

Beispiel:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x^2+x}{x+3}$ mit $G = \mathbb{R}$.

1) Bestimmen Sie die Definitionsmenge dieser Funktion.

2) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion in unmittelbarer Umgebung der Polstelle.

1) $x + 3 = 0 \to \; x = -3 \to \; D = \mathbb{R}\backslash\{-3\}$

2) Linksseitiger Limes:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(-3-h)^2+(-3-h)}{-3-h+3} = \lim_{h\to 0} \frac{3^2+6\cdot h+h^2-3-h}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{9+\overset{\to +0}{6\cdot h}+\overset{\to +0}{h^2}-3-\overset{\to -0}{h}}{\underset{\to -0}{-h}} = \frac{+6}{-0} = \frac{+6}{0^-} \to -\infty$$

Rechtsseitiger Limes:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(-3+h)^2+(-3+h)}{-3+h+3} = \lim_{h\to 0} \frac{3^2-6\cdot h+h^2-3+h}{+h} = \lim_{h\to 0} \frac{9-\overset{\to +0}{6\cdot h}+\overset{\to +0}{h^2}-3+\overset{\to +0}{h}}{\underset{\to +0}{+h}} = \frac{+6}{+0} = \frac{+6}{0^+} \to +\infty$$

An der Stelle $x = -3$ liegt eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel vor (Fall 4 / 2. Graph)

Tipps für Grenzwerte:[41]

① Bei Brüchen: Durch die höchste auftretende Potenz von n teilen.

② Bei Wurzel-Ausdrücken: erweitern

③ Unentscheidbar: $\frac{0}{0}$ $\quad \frac{\infty}{\infty}$ $\quad \infty - \infty$ $\quad 1^{\infty}$ $\quad \infty^0$ $\quad 0^0$ $\quad 0 \cdot \infty$ Zum Teil mit Regel von DE L'HOSPITAL lösbar (9.4.6., S 467 f)

④ Polynomdivision durch den Faktor, der gegen null geht.

⑤ Dominante Funktionen identifizieren

⑥ Variable transformieren

⑦ Wichtige Grenzwertsätze: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(a\,x)}{x} = x \qquad \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin(a\,x)} = \frac{1}{a} \qquad \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$

Beispiel: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 - \frac{\pi}{2}x}{\cos(x)}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 - \frac{\pi}{2}x}{\cos(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \lim_{y\to 0} \frac{\left(y-\frac{\pi}{2}\right)(-y)}{\sin(y)} = \lim_{y\to 0} \frac{\overset{\to 0}{-y^2} + \frac{\pi}{2}\overset{\to 0}{y}}{\underset{\to 0}{\sin(y)}} =$$

$\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

7.7.3.1., S 377

Substitution: $y = \frac{\pi}{2} - x \to$

$$x = \frac{\pi}{2} - y \to$$

$$x - \frac{\pi}{2} = -y$$

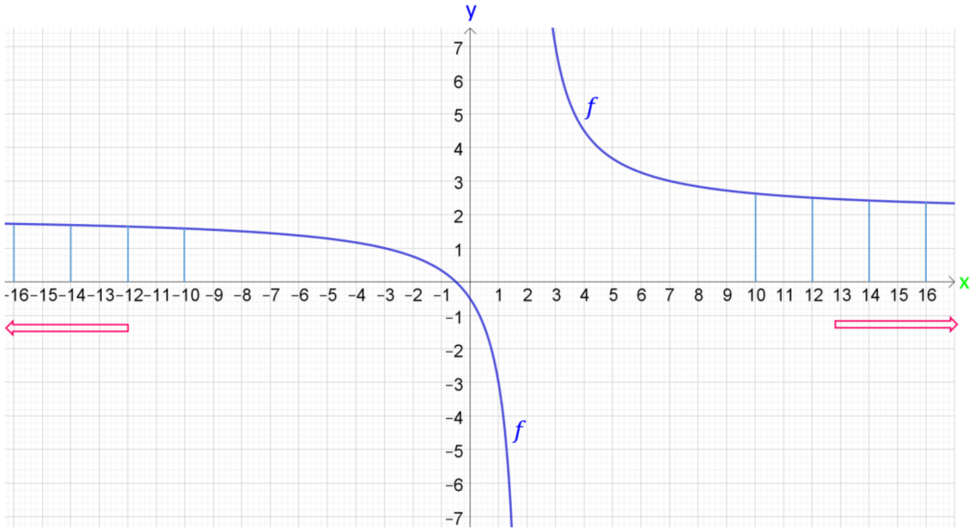
$$= \lim_{y\to 0} \frac{\overset{\to 0}{-2\,y} + \frac{\pi}{2}}{\underset{\to 1}{\cos(y)}} = \frac{\pi}{2}$$

$\frac{0}{0}$ … wir wenden die Regel von DE L'HOSPITAL an (9.4.6., S 467 f)

[41] https://n.ethz.ch/~brunnerg/Analysis%20I/Serie%202.pdf

7.8.2. Unendliche Grenzwerte

Das Verhalten einer Funktion im Unendlichen



Hier betrachtet man, ob die **y-Werte zu einem Wert tendieren**,
wenn die **x-Werte immer kleiner** ($x \to -\infty$) oder **immer größer** ($x \to +\infty$) werden.

Wir betrachten also den jeweiligen Limes

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$$

Bei Potenzfunktionen (Polynomfunktionen), bei denen die (unabhängige) **Variable in der Basis** steht, geht man wie folgt vor:

① Jedes Glied (+ –) im Zähler und Nenner wird durch die höchste Potenz der unabhängigen Variablen dividiert, die im Term vorkommt.

② Dann kürzt man jeden der entstandenen Brüche, wenn möglich.
Alle Brüche, die nach dem Kürzen noch die Variable besitzen, gehen gegen null, weil ja der Nenner gegen unendlich geht.

Beispiel: $f(x) = \frac{2\cdot x+1}{x-2}$

① ②

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{2\cdot x+1}{x-2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2\cdot\cancel{x}}{1\cdot\cancel{x}}+\frac{1}{x}}{\frac{1\cdot\cancel{x}}{1\cdot\cancel{x}}-\frac{2}{x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2+\overset{\to -0}{\frac{1}{x}}}{1-\underset{\to +0}{\frac{2}{x}}} = \frac{2-0}{1+0} = 2$$

$$+\frac{1}{x} \to +\frac{1}{-1\,000\,000\ldots000} \to -0$$

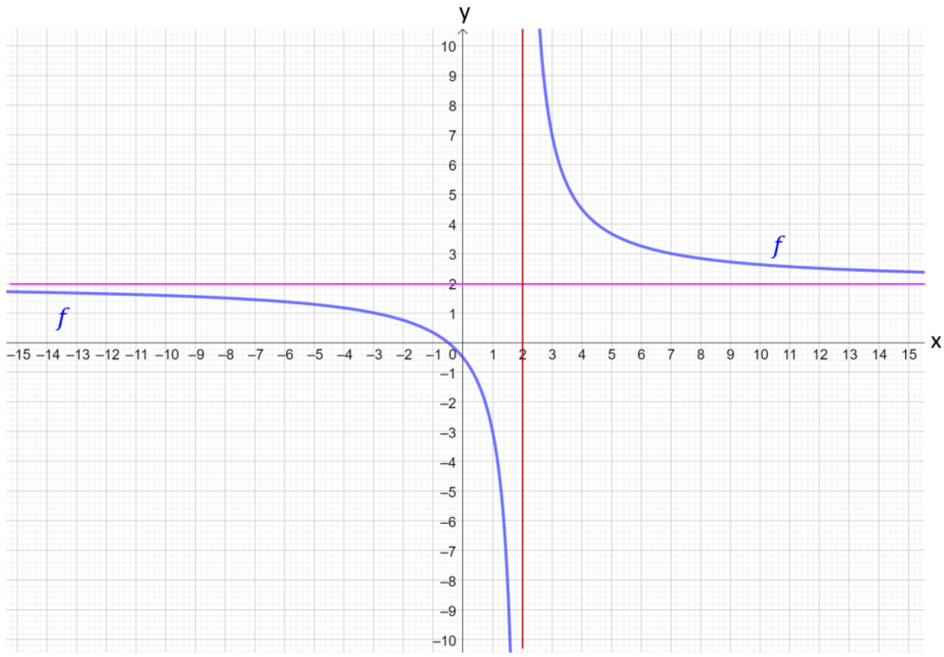
$$-\frac{2}{x} \to -\frac{2}{-1\,000\,000\ldots000} \to +0$$

① ②

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\cdot x+1}{x-2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2\cdot\cancel{x}}{1\cdot\cancel{x}}+\frac{1}{x}}{\frac{1\cdot\cancel{x}}{1\cdot\cancel{x}}-\frac{2}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2+\overset{\to +0}{\frac{1}{x}}}{1-\underset{\to -0}{\frac{2}{x}}} = \frac{2+0}{1-0} = 2$$

$$+\frac{1}{x} \to +\frac{1}{+1\,000\,000\ldots000} \to +0$$

$$-\frac{2}{x} \to -\frac{2}{+1\,000\,000\ldots000} \to -0$$




```python
from sympy import *
```

```python
x = symbols("x")
```

```python
limit((2*x+1)/(x-2), x, oo)
```

2

Der Begriff unendlicher Grenzwert sollte nicht zu dem Fehlschluss verleiten, dass das Ergebnis des Limes, also die y-Werte, immer gegen unendlich streben!

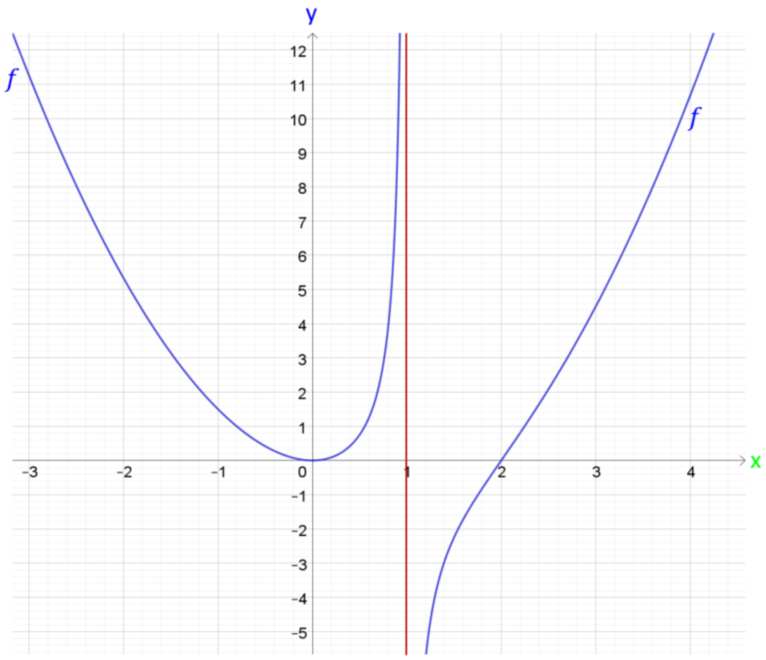
Beispiel: $f(x) = \frac{x^3 - 2\cdot x^2}{x-1} \qquad G = \mathbb{R} \qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-2\cdot x^2}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^3}{x^3}-\frac{2\cdot x^2}{x^3}}{\frac{x}{x^3}-\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\overset{\to +0}{\frac{2}{x}}}{\underset{\to +0}{\frac{1}{x^2}}-\underset{\to +0}{\frac{1}{x^3}}} \to \frac{1+0}{+0} \to +\infty$$

$$\frac{1+0{,}000000\ldots001}{0{,}000000\ldots001} = \frac{+1{,}000000\ldots001}{+0{,}000000\ldots001} \to +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-2\cdot x^2}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3}{x^3}-\frac{2\cdot x^2}{x^3}}{\frac{x}{x^3}-\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\overset{\to -0}{\frac{2}{x}}}{\underset{\to +0}{\frac{1}{x^2}}-\underset{\to -0}{\frac{1}{x^3}}} \to \frac{1-0}{+0} \to +\infty$$

Da $\frac{1}{x^3}$ schneller gegen null geht als $\frac{1}{x^2}$ geht der Nenner gegen $+0$



Beispiel: $f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ mit $G = \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \frac{(\sqrt{x}-2)\cdot(\sqrt{x}+2)}{(x-4)\cdot(\sqrt{x}+2)} = \frac{(\sqrt{x})^2 - 2^2}{(x-4)\cdot(\sqrt{x}+2)} = \frac{\cancel{(x-4)}^{1}}{\cancel{(x-4)}_{1}\cdot(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

$(a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2$ ... Binomische Formel

Definitionsmenge: Der Inhalt der Quadratwurzel muss $x > 0 \rightarrow D = \mathbb{R}^+$

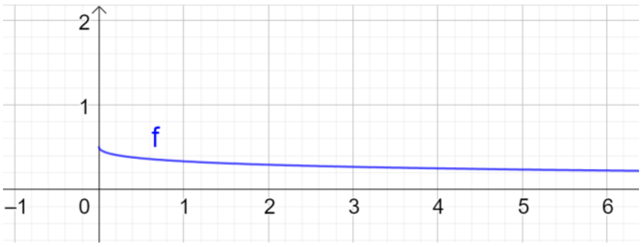
Nenner $\neq 0$: $\sqrt{x} + 2 = 0 \;|-2 \rightarrow \sqrt{x} = -2 \;|()^2 \rightarrow x = 4$

Doch: $\sqrt{4} + 2 = 2 + 2 = 4 \;\vee\; -2 + 2 = 0$

Mit $D = \mathbb{R}^+$ ist der Fall $\sqrt{4} = -2$ ausgeschlossen

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{\sqrt{0}+2} = \frac{1}{0+2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{x}+2}_{\to\infty}} = 0$$



Übung

Ermitteln Sie von folgenden Funktionen mit $G = \mathbb{R}$
1) die Definitionsmenge
2) die Polstelle(n),
3) das Verhalten der Funktion bei der/den Polstelle(n),
4) das Verhalten der Funktion im Unendlichen

a) $f(x) = \frac{1-x}{x+2}$ b) $g(x) = \frac{1+2x}{x^2-1}$ c) $P(t) = \frac{t^2+1}{t^2+t}$ d) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$

Lösungen:

a) 1) $D = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$ 2) $x = -2$ 3) $\lim\limits_{x\to -2} f(x-h) \to -\infty$ $\lim\limits_{x\to -2} f(x+h) \to +\infty$ 4) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) \to -1$

b) 1) $D = \mathbb{R}\{-1; 1\}$ 2) $x_1 = -1$ $x_2 = 1$ 3) $\lim\limits_{x\to -1} f(x-h) \to -\infty$ $\lim\limits_{x\to -1} f(x+h) \to +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x-h) \to -\infty$ $\lim\limits_{x\to 1} f(x+h) \to +\infty$

4) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) \to 0$

c) 1) $D = \mathbb{R}\setminus\{-1\,; 0\}$ 1) $t_1 = -1$ $t_2 = 0$ 3) $\lim\limits_{t\to -1} f(x-h) \to +\infty$ $\lim\limits_{t\to -1} f(x+h) \to -\infty$

$\lim\limits_{t\to 0} f(x-h) \to -\infty$ $\lim\limits_{t\to 0} f(x+h) \to +\infty$

4) $\lim\limits_{t\to \pm\infty} f(x) \to 1$

d) Tipp: Zähler und Nenner zerlegen und kürzen.

1) $D = \mathbb{R}\setminus\{3\}$ 2) $x = 3$ 3) $\lim\limits_{x\to 3} f(x-h) \to -\infty$ $\lim\limits_{x\to 3} f(x+h) \to +\infty$ 4) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) \to 1$

Kann ich's? $\lim\limits_{x\to 0} x^3 \cdot \log(x^2)$

Lösung: $\lim\limits_{x\to 0} x^3 \cdot \log(x^2) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\log(x^2)}{x^{-3}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x^2}\cdot 2\,x}{-3\,x^{-4}} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\frac{2\,x}{x^2}}{-\frac{3}{x^4}}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{\frac{2}{x}}{\frac{3}{x^4}}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{2}{x}\cdot\frac{x^4}{3}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{2\,x^3}{3}\right) = 0$

„Algorithmen sind Meinungen, verpackt in Mathematik.“

Cathy O'NEIL
(*1972)

VIII LOGIK & MENGEN

8.1. Logik

Wozu benötigt man die Logik und ihre Symbole?

Weil (natürliche) Sprachen meistens nicht über die geforderte Eindeutigkeit verfügen. Das macht den Reiz von Sprachen und Kommunikation aus. Selbst eine relativ analytische Sprache wie Deutsch kann durch ihr assoziativen Potenziale und Mehrdeutigkeiten Phantasien und Gefühle stimulieren. Darin besteht unter anderem die Faszination guter Literatur. In der Mathematik und in Befehlen für Maschinen wird aber eine Eindeutigkeit benötigt, die in menschlichem Austausch oft nicht möglich oder auch gar nicht gewollt ist.

Hier ein **Beispiel**, was in verbalem Ausdruck ungeklärt bleiben kann:

Ich sehe Leon auf dem Dach mit dem Fernglas.

Einige mögliche Deutungen:

Ich sehe durch mein Fernglas Leon, die auf dem Dach ist.
Ich bin auf dem Dach und sehe durch mein Fernglas Leon.
Ich sehe Leon, die auf dem Dach ist und ein Fernglas hat.

Beispiel: Eine Frau im Autismus-Spektrum dachte wochenlang darüber nach, was es bedeuten könnte, Kartoffeln zu „würfeln“.[42]

8.1.1. Aussagenlogik

Aussage … ein aus Wörtern und bzw. oder mathematischen Zeichen aufgebauter Ausdruck, die IMMER entweder wahr (**w**ahr bzw. **t**rue bzw. **1**) oder falsch (**f**alsch bzw. **f**alse bzw. **0**) sein muss.
Auch, wenn der Betrachter nicht weiß, ob diese Behauptung wahr oder falsch ist.

Beispiel: Aussage A: Die US-Präsidentenwahlen im Jahr 2040 wird eine Frau hispano-amerikanischer Abstammung gewinnen.

[42] Interview mit André Frank ZIMPEL in der FAZ vom 01.07.2024, S 18

Weitere **Beispiele** für Aussagen:

B: Die Stadt Salzburg liegt an der Salzach. B ist eine **wahre** Aussage (**w**), im Sinne von **richtige** Aussage.

C: San Marino hat 30 000 Einwohner.

C ist KEINE Aussage, denn diese Zahl kann sich ändern und ist somit nicht IMMER wahr oder falsch.

D: 每個自然數都大於負一。

Auch wenn wir nicht wissen, was diese Zeichen bedeuten, handelt es sich um eine Aussage, **wenn** diese wahr oder falsch sein kann. Um das zu überprüfen, muss man um die Bedeutung der Zeichen wissen.

Auf Deutsch: D: Jede natürliche Zahl ist größer als minus eins. D ist demnach **w**.

Weitere **Beispiele** für Aussagen:

E: Die Summe zweier Primzahlen ist wieder eine Primzahl. [43]

Auch wenn wir (noch) nicht wissen, ob diese Behauptung **w** oder **f** ist, handelt es sich um eine Aussage, weil die Behauptung **nur** **w** oder **f** sein **kann**.

Da diese Behauptung für alle Primzahlen gelten soll, reicht schon **ein** Gegenbeispiel, um diese Behauptung zu widerlegen:

3 + 5 = 8 da 8 keine Primzahl ist, handelt es sich um eine **f**-Aussage.

Umgekehrt reicht es **nicht**, **ein** passendes Beispiel zu finden, um bewiesen zu haben, dass diese Aussage für **alle** Primzahlen wahr ist!

Sätze, die keinen Sinn ergeben, sind ebenfalls keine Aussagen.

Beispiele: F: Der Garten im Smarten.

Oder: G:

ottos mops klopft
otto: komm mops komm
ottos mops kommt
ottos mops kotzt
otto: ogottogott

[44]

H: Boah, digga, det is dufte! (Heast, Oida, des is leiwand!)

[43] Siehe 1.1.1, S 4

[44] Ein Gedicht von Ernst Jandl (1925–2000). Wenn dieses Gedicht rein logisch keinen Sinn macht, so können solche Wortspiele literarisch trotzdem sinnvoll erscheinen.

Aussage**form** … enthält Variable. Durch Belegung der Variablen durch Zahlen entsteht eine Aussage

Beispiel: Aussage*form*: x – 2 = 5

Belegen wir die Variable mit x = 3, so entsteht die **f** -Aussage 3 – 2 = 5 -> 1 = 5

Belegen Wir die Variable mit x = 7, so entsteht die **w** -Aussage 7 – 2 = 5 -> 5 = 5

8.1.2. Formeln der Aussagenlogik

8.1.2.1. Junktoren

jungere (lateinisch) … verbinden, zusammenbringen

Junktoren sind Symbole der Aussagenlogik, die Aussagen miteinander verbinden oder in Beziehung stellen.

Junktoren verbinden nur **Aussagen** miteinander!

Beispiele:

$$\underbrace{\text{24 ist durch 4 teilbar}}_{\text{Aussage 1}}\ \underbrace{\text{und}}_{\text{Junktor}}\ \underbrace{\text{7 ist eine gerade Zahl.}}_{\text{Aussage 2}}$$

24 und 7 sind natürliche Zahlen.

24 … **keine** Aussage, weil hier nicht mit w oder f geantwortet werden kann

7 sind natürliche Zahlen … **keine** Aussage und grammatikalisch falsch

Dieses und ist **KEIN** Junktor (im deutschen spricht man von Bindewort).

$\neg$ … **non (nicht)** … die Verneinung (Negation)

Beispiel: A: Salzburg liegt in Österreich. (**w = 1**)

$\neg\, A$: Salzburg liegt nicht in Österreich. (**f = 0**)

$\neg\,(\neg\, A)$: Salzburg liegt nicht nicht in Österreich. Ist gleichbedeutend mit Salzburg liegt in Österreich.

In der Umgangssprache trifft man manchmal auf Formulierungen wie Des måcht kaa Mensch ned!

Gemeint ist damit, dass kein (einziger) Mensch so etwas macht.

Logisch bedeutet die doppelte Verneinung aber, dass jeder Mensch so etwas macht!

∨ ... Disjunktion: meint **oder** im **nicht** ausschließenden Sinne: entweder – oder – oder beides (alles)

Hier reicht es schon, wenn auch nur ***eine*** Aussage wahr (w=1) ist.

Das ∨ kommt vom lateinischen *vel*, was so viel wie oder heißt.

Beispiel: Aussage A: Salzburg liegt in Österreich. (w=1)

Aussage B: Österreich liegt in Deutschland. (f=0)

$A \vee B$ ist eine wahre Aussage (w=1), weil **zumindest eine** der Aussagen wahr ist.

$A \vee B$ ist bereits dann erfüllt, wenn **zumindest eine** Aussage erfüllt ist.

Beispiel: Aussage A: $4 < 7$ (w=1)

Aussage B: $3 + 4 = 7$ (w=1)

$A \vee B$ ist eine wahre Aussage (w=1), weil **zumindest eine** der Aussagen wahr ist. In diesem Fall sind beide Aussagen wahr.

Bemerkung: Es gibt auch den Junktor $\dot{\vee}$ und meint das ausschließliche Oder (siehe S 401)

∧ **...** Konjunktion: meint **und** im Sinne von sowohl – als auch

Hier müssen alle Bedingungen erfüllt sein.

Beispiel: Aussage A: Salzburg liegt in Österreich. (w=1)

Aussage B: Österreich liegt in Deutschland. (f=0)

$A \wedge B$ ist eine falsche Aussage, weil nicht beide (**alle**) Aussagen wahr sind.

Beispiel: Aussage A: $4 < 7$ (w=1)

Aussage B: $3 + 4 = 7$ (w=1)

$A \wedge B$ ist eine wahre Aussage, weil beide Aussagen (und damit **alle**) wahr sind.

⇒ … Implikation (Konditional, Konklusion): „impliziert“ „wenn . . . dann“ „aus … folgt …“

$$\overbrace{\underbrace{A}_{\substack{\text{Prämisse}\\ \text{Voraussetzung}}} \Longrightarrow \underbrace{B}_{\substack{\text{Konklusion}\\ \text{Schlussfolgerung}}}}^{\text{Implikation}}$$

Beispiel: Aussage A: Es ist Nebel. Aussage B: Die Sicht ist schlecht.

$A \Longrightarrow B$ („Es ist Nebel“ impliziert, „Die Sicht ist schlecht.“) ist eine wahre Aussage.

$B \Longrightarrow A$ Die Implikation „Die Sicht ist schlecht“ impliziert nicht (unbedingt) „Es ist Nebel“

Die Ursache schlechter Sicht könnten neben Nebel, z.B. Starkregen, Schneefall, Dunkelheit, schmutzige Scheiben etc. sein.

Im Allgeneinen folgt aus $A \Longrightarrow B$ NICHT $B \Longrightarrow A$

Die Implikation mit „daraus folgt“ zu deuten, kann zu Missverständnissen führen.

Beispiel: Welche der folgenden Implikationen sind w und welche f?

(1) Berlin liegt im Vereinten Königreich ⟹ Hunde sind Pflanzen.

(2) Berlin liegt im Vereinten Königreich ⟹ Hunde sind Tiere.

(3) Berlin liegt in Deutschland ⟹ Hunde sind Pflanzen.

(4) Berlin liegt in Deutschland ⟹ Hunde sind Tiere.

Lösungen: (1) und (2) sind w, weil hier bereits die Prämisse f ist und aus etwas Falschem Beliebiges folgen kann.
(4) ist w, weil sowohl die Prämisse, als auch die Konklusion w sind.

Die Resultate weichen vielleicht vom hausverständlichen denken ab!

Folgendes **Beispiel** [45] soll das illustrieren:

A: In Mathe die Note 1 geschrieben. B: Du erhältst 20 Euro.

(1): In Mathe keine 1 geschrieben ⟹ Du erhältst keine 20 Euro.

(2): In Mathe keine 1 geschrieben ⟹ Du erhältst 20 Euro.

(3): In Mathe eine 1 geschrieben ⟹ Du erhältst keine 20 Euro.

(4): In Mathe eine 1 geschrieben ⟹ Du erhältst 20 Euro.

[45] Das Beispiel stammt leicht verändert von Prof. Edmund Weitz von der HAW-hamburg.

Im Fall 1 wird das Kind es OK finden, weil ja abgemacht ist, nur bei einer Eins 20 Euro zu erhalten.

Im Fall 2 wird es das Kind auch OK finden, wenn es die 20 Euro erhält, wenn es keine Eins geschrieben hat.

Im Fall 3 wird es das Kind nicht OK finden, wenn es trotz einer Eins keine 20 Euro erhält.

Im Fall 4 wird es das Kind OK finden, weil genau das ausgemacht war.

$\Longleftrightarrow$ … Äquivalenz: Eine zweiseitige Implikation: genau dann, wenn

A $\Longleftrightarrow$ B Wenn aus A $\Longrightarrow$ B folgt, dann folgt aus B $\Longrightarrow$ A

Beispiel: Aussage A: x ist eine gerade Zahl Aussage B: x ist durch 2 teilbar

A $\Longleftrightarrow$ B …wahre Aussage

Manchmal ist die Äquivalenz nicht so einsichtig und muss erst bewiesen werden:

Beispiel: Es ein n eine natürliche Zahl ($n \in \mathbb{N}$)

A: n ist gerade B: n^2 ist gerade

Ist $A \Longleftrightarrow B$?

Dann muss sowohl $A \Longrightarrow B$ als auch $B \Longrightarrow A$ gelten.

$A \Longrightarrow B$: Wenn n gerade ist, dann existiert eine natürliche Zahl k mit $n = 2 \cdot k$
Denn jede natürliche Zahl ist dann gerade, wenn sie durch 2 teilbar ist: $\frac{2 \cdot k}{2} = k$

Daraus folgt, dass $n^2 = (2 \cdot k)^2 = 4 \cdot k^2 = 2 \cdot 2 \cdot k^2$ auch durch 2 teilbar und somit gerade ist.

$A \Longrightarrow B$ ist somit eine w.A.

$B \Longrightarrow A$: Angenommen, n sei ungerade. Dann existiert eine natürliche Zahl k mit $n = 2 \cdot k - 1$.
Denn $2 \cdot k$ ist gerade, weil durch 2 teilbar. Dann muss der Vorgänger dieser Zahl wohl ungerade sein.

Somit ist $n^2 = \underbrace{(2 \cdot k - 1)^2 = 4 \cdot k^2 - 4 \cdot k + 1}_{\text{Binomische Formel (2.2.5., S87 f)}} = 4 \cdot (k^2 - k) + 1 = \underbrace{\underbrace{2 \cdot 2 \cdot (k^2 - k)}_{\text{gerade}} + 1}_{\text{ungerade}}$

Somit gilt, wenn n^2 gerade ist, ist auch n gerade und auch $B \Longrightarrow A$ ist eine wahre Aussage.

Bei der Beweisführung von $B \Longrightarrow A$ wählte man zunächst das Gegenteil der Annahme (*Kontraposition*).

Bemerkung: In der Mathematik muss alles bewiesen werden. Auch die offensichtlichen Sachverhalte.

Um zu viele Klammern zu umgehen, gibt es auch innerhalb der Junktoren Vorrangregeln:

am stärksten bindet	$\neg$ ... (Negation)
gefolgt von	$\wedge$ ... Konjunktion
danach	$\vee$ ... Disjunktion
nachrangig	$\Rightarrow$ ... Implikation
und schließlich	$\Leftrightarrow$ ... Äquivalenz

Beispiel: $\neg A \wedge B \Longrightarrow B \vee C \wedge A$ bedeutet $\big((\neg A) \wedge B\big) \Longrightarrow \big(B \vee (C \wedge A)\big)$

Im Zweifel Klammern setzen um die richtige Reihenfolge nicht zu verletzen!

$\forall$ ... Allquantor: für alle

Beispiel: $(\forall\ \mathrm{n}\ \in\ \mathbb{N} : \mathrm{n} \geq 0)$ ... Für alle n aus den natürlichen Zahlen (also für alle natürlichen Zahlen) gilt: sie sind größer oder gleich null

$\exists$ ... Existenzquantor: es gibt mindestens ein/e

Beispiel: ($\exists\ \mathrm{n}\ \in\ \mathbb{N} : \mathrm{n}$ ist nur durch 1 und sich selbst teilbar)
... Es gibt mindestens eine natürliche Zahl, die nur durch 1 und sich selbst teilbar ist. (*Primzahlen*)

Verneinung von Allquantor- und Existenzquantor: Es sei $A(x)$ eine Aussageform:

$$\neg(\forall \mathrm{x}: \mathrm{A}(\mathrm{x})) = \ \exists x : \neg(\mathrm{A}(\mathrm{x})) \qquad \neg\big(\mathrm{Ex}: \mathrm{A}(\mathrm{x})\big) = \forall \mathrm{x}: (\neg\ \mathrm{A}(\mathrm{x}))$$

Beispiel: Aussage A: Alle Menschen lieben Statistik.

Aussage B: $\forall\ \mathrm{n}\ \in\ \mathbb{N} : \mathrm{n} \geq 2$

Aussage C: Es gibt mindestens einen Menschen mit 2 Ohren.

$\neg$ (Alle Menschen lieben Statistik) = Mindestens ein Mensch liebt nicht Statistik.

$\neg (\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N} : \mathrm{n} \geq 2) = \exists \mathrm{n} \in \mathbb{N} : \mathrm{n} < 2$

$\neg$ (Es gibt mindestens einen Menschen mit 2 Ohren.) = Alle Menschen haben nicht 2 Ohren.

X bzw. $\underline{\vee}$ bzw. $\dot{\vee}$ bzw. $\oplus$… XOR Antivalenz: das **aus**schließende Oder

$A \oplus B$ ist eine wahre Aussage, wenn entweder A oder B, aber **nicht beide** Aussagen wahr sind.

Beispiel: A: Es regnet.
B: Es regnet nicht.

Ist $A \oplus B$ eine wahre Aussage?

$A \oplus B$ ist eine wahre Aussage denn entweder regnet es oder es regnet nicht, aber nicht beides.
gleichzeitig.

Beispiel: Aussage A: Salzburg liegt in Österreich. (w=1)
Aussage B: Österreich liegt in Deutschland. (f=0)

$A \oplus B$ ist eine wahre Aussage, weil genau eine Aussage wahr ist (A), aber **nicht beide**.

Tautologie: Eine allgemein gültige Aussage. Eine Aussage, die immer **wahr** ist.

Beispiel: A: Es regnet. B: Es regnet nicht

Tautologie: $A \vee B$ bzw. $A \oplus B$

Antilogie: Gegenteil einer Tautologie. Eine Aussage, die immer **falsch** ist.

Beispiel: A: Es regnet. B: Es regnet nicht

Antilogie: $A \wedge B$

Bemerkung: Die Antilogie wird auch als Kontradiktion bezeichnet.

Kontraposition: Gegenposition: $A \implies B$ Kontraposition: $\neg B \implies \neg A$

Beispiel: Es regnet. $\implies$ Am Himmel sind Wolken.

Kontraposition: Am Himmel sind keine Wolken $\implies$ Es regnet nicht.

8.1.2.2. Wahrheitstafeln

Beachten Sie folgende Unterscheidungen:

$A, B, C, \ldots$ einzelne **Aussagen**

$A \vee B$ . . . **Formel** bzw. **Syntax**: Die Struktur der Verknüpfung von Aussagen.
Die Regeln, nach denen die Verknüpfungen erfolgen dürfen.

Semantik . . . die Bedeutung der Verknüpfung

In der Sprache ist die Syntax die Grammatik und die Semantik die Bedeutung der Worte.

Ich verwende in den Wahrheitstafeln für **w** die **1** und für **f** die **0**.

Beispiel:

Syntax	Semantik	
A	0	1
¬A	1	0

A	B	A ∨ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Die Disjunktion ist **wahr**,
wenn auch nur *eine* der Aussagen **wahr** ist.

A	B	A ∧ B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Die Konjunktion ist **wahr**,
wenn *alle* Aussagen **wahr** sind.

A	B	$A \Longrightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Die Implikation weicht von unserer Alltagsvorstellung ab:
Nur wenn A wahr und B falsch ist, ist A $\Longrightarrow$ B falsch.

Folgendes **Beispiel** [46] soll das (nochmals) illustrieren:

Die Eltern versprechen ihrem Kind 20 Euro, wenn es in Mathe die Note 1 schreibt.
A: In Mathe die Note 1 geschrieben. B: Du erhältst 20 Euro.

A	B	$A \Longrightarrow B$	
0	0	1	Fall 1: In Mathe keine 1 geschrieben $\Longrightarrow$ Du erhältst keine 20 Euro.
0	1	1	Fall 2: In Mathe keine 1 geschrieben $\Longrightarrow$ Du erhältst 20 Euro.
1	0	0	Fall 3: In Mathe eine 1 geschrieben $\Longrightarrow$ Du erhältst keine 20 Euro.
1	1	1	Fall 4: In Mathe eine 1 geschrieben $\Longrightarrow$ Du erhältst 20 Euro.

Im Fall 1 wird das Kind es OK finden, weil ja abgemacht ist, nur bei einer Eins 20 Euro zu erhalten.

Im Fall 2 wird es das Kind auch OK finden, wenn es die 20 Euro erhält, wenn es keine Eins geschrieben hat.

Im Fall 3 wird es das Kind nicht OK finden, wenn es trotz einer Eins keine 20 Euro erhält.

Im Fall 4 wird es das Kind OK finden, weil genau das ausgemacht war.

A	B	$A \Longleftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Die Äquivalenz ist dann erfüllt, wenn entweder beide Aussagen f=0 oder beide Aussagen w=1 sind.

Äquivalente Aussagen drücken denselben Sachverhalt aus bzw. beschreiben Eigenschaften, die auf den gleichen Sachverhalt führen.

Beispiel: A: Im Viereck ABCD sind die gegenüberliegenden Seiten parallel und gleich lang.
B: Das Viereck ABCD ist ein Parallelogramm.

Es gilt offensichtlich $A \Longleftrightarrow B$

[46] Das Beispiel stammt leicht verändert von Prof. Edmund WEITZ von der HAW-Hamburg

A	B	$A \otimes B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Bei der Antivalenz (dem ausschließlichen Oder) können nicht beide Aussagen wahr oder beide Aussagen falsch sein, es kann immer nur eine Aussage wahr und die andere falsch sein.

Gesetze die Verknüpfung von Aussagen:

Kommutativgesetz: $A \wedge B$ ist gleichwertig mit $B \wedge A$

$A \vee B$ ist gleichwertig mit $B \vee A$

Distributivgesetz: $A \wedge (B \vee C)$ ist gleichwertig mit $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

$A \vee (B \wedge C)$ ist gleichwertig mit $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Bemerkung: „ ist gleichwertig mit" darf in einer Formel nur dann durch $\Leftrightarrow$ bzw. $=$ ersetzt werden, wenn sie eine Tautologie darstellt, also unter allen Bedingungen wahr ist.

Gesetze von De Morgan[47] für Aussagen:

$$\neg (A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$$
$$\neg (A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$$

Zeigen wir, dass $\neg (A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$ gilt:

A	B	$A \wedge B$	$\neg (A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

[47] Augustus de Morgan (1806–1871), englischer Mathematiker

Beispiel: A: Alle Menschen gehören zu den Säugetieren. (wahre Aussage laut Wikipedia)
B: Alle Säugetiere sind mindestens 50 cm groß. (falsche Aussage laut BREHMS Tierleben[48]).

Ist die Konklusion $A \Leftrightarrow B$ wahr?

Wahrheitstafel:

A	B	$A \Leftrightarrow B$		
1	0	**0**	NEIN	(siehe S 403)

Beispiel: Prämisse A_1: Alle Fernseher sind Farbfernseher.
Prämisse A_2: Alle Menschen sind weiblich.
Konklusion B: Einige Hunde sind keine Fernseher.

Ist $(A_1 \wedge A_2) \Longrightarrow B$ … eine wahre Aussage?

A_1 … 0, denn es gibt noch Schwarz-Weiß-Fernseher.

A_2 … 0, denn es gibt noch andere Geschlechter

B … 0, denn *alle* Hunde sind keine Fernseher

Wahrheitstafel:

A_1	A_2	$A_1 \wedge A_2$	$(A_1 \wedge A_2) \Longrightarrow B$		
0	0	0	**1**	JA	(siehe S 402, S 403)

Schauen wir uns folgende Verknüpfungen an:

A	B	$\neg A$	$B \vee (\neg A)$	$A \Longrightarrow B$	$B \Longrightarrow A$	$(A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow A)$	$(A \Leftrightarrow B)$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1

Offensichtlich gilt $A \Longrightarrow B$ ist das Gleiche wie $B \vee (\neg A)$

und $A \Leftrightarrow B$ ist das Gleiche wie $(A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow A)$ und damit $\big(B \vee (\neg A)\big) \wedge (A \vee (\neg B))$

Wozu sind solche Überlegungen nötig?

Weil in den meisten Computersprachen keine Junktoren wie $\Longrightarrow$ oder $\Leftrightarrow$ zur Verfügung stehen.

Mathematisches Symbol	Symbol in **Computersprache** (Java, C, …)
$\wedge$	&&
$\vee$	||
$\neg$	!

[48] **Brehms Tierleben**, ein zoologisches Nachschlagewerk von Alfred BREHM (1829 – 1884)

In mathematischen Aussagen bzw. Aussageformen finden sich auch folgende Symbole:

$\sum_{k=1}^{n} a_k$ ... Summen-Zeichen $\quad \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

$\prod_{k=1}^{n} a_k$ ... Produkt-Zeichen $\quad \prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$

Beispiel: Schreiben Sie in ausführlicher Form: $\sum_{k=2}^{5} (-1)^{2\,n-1} \cdot \frac{2^k}{k^2}$

$$\sum_{k=2}^{4} (-1)^{2\,n-1} \cdot \frac{2^k}{k^2} = (-1)^{2\cdot 2-1} \cdot \frac{2^2}{2^2} + (-1)^{2\cdot 3-1} \cdot \frac{2^3}{3^2} + (-1)^{2\cdot 4-1} \cdot \frac{2^4}{4^2} = -1 - \frac{8}{9} - 1 = -\frac{26}{9}$$

Beispiel: Schreiben Sie in ausführlicher Form: $\sum_{k=1}^{3} \prod_{l=0}^{k} a_{kl}$

Wir haben eine Summe von Produkten zu bilden:

$$\sum_{k=1}^{3} \prod_{l=0}^{k} a_{kl} = \prod_{l=0}^{1} a_{1l} + \prod_{l=0}^{2} a_{2l} + \prod_{l=0}^{3} a_{3l} = a_{10} \cdot a_{11} + a_{20} \cdot a_{21} \cdot a_{22} + a_{30} \cdot a_{31} \cdot a_{32} \cdot a_{33}$$

Beispiel: Schreiben Sie mit dem entsprechenden Summensymbol an:

$$\frac{\sin(x)}{x} - \frac{\sin(2\,x)}{x^2} + \frac{\sin(3\,x)}{x^3} + \ldots \pm \frac{\sin(n\,x)}{x^n}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-1} \cdot \frac{\sin(k\,x)}{x^k}$$

Das alternierende (wechselnde) Vorzeichen erreicht man mit der Potenz der Basis (-1).
Ist die Hochzahl gerade, erhält man $+1$, ist die Hochzahl ungerade, erhält man -1.

Da das erste Glied positiv ist, müssen wir bei $k = 1$ plus 1 erhalten. Das ist bei $(-1)^{1-1} = (-1)^0 = 1$ der Fall.
Da das zweite Glied negativ ist, müssen wir bei $k = 2$ minus 1 erhalten. Das ist bei $(-1)^{2-1} = (-1)^1$ der Fall.
Deshalb erzeugt der Term $(-1)^{n-1}$ die jeweils passenden Vorzeichen.

Wir hätten statt $(-1)^{n-1}$ auch $(-1)^{n+1}$ wählen können, wie man sich leicht überzeugen kann.

Übung

1) Liegt eine Aussage vor?
   (a) Durch Österreich fließt der Rhein.
   (b) Woher kommst du?
   (c) $1 + 2 = 4$

2) Verneinen Sie folgende Aussagen: A: Die Zeit ist abgelaufen.
   B: Alle Tiere sind Säugetiere.
   C: Mindestens eine/r in der Gruppe lügt.
   D: Alle dreiziffrigen Zahlen sind größer als 100.

3) Gegeben seien die folgenden Aussagen: A: Es ist eiskalt. B: Es schneit.
   Drücken Sie die nachfolgenden Sätze als aussagenlogische Formeln mit Hilfe der Aussagen A und B aus.
   (a) Es ist eiskalt und es schneit.
   (b) Es ist eiskalt, aber es schneit nicht.
   (c) Es ist nicht eiskalt und es schneit nicht.
   (d) Entweder es schneit oder es ist eiskalt (oder beides).
   (e) Entweder es schneit oder es ist eiskalt, aber es schneit nicht, wenn es eiskalt ist.
   (f) Wenn es schneit, ist es eiskalt.

Lösungen:

1) (a) ja (b) nein (c) ja

2) $\neg$ A: Die Zeit ist nicht abgelaufen.
   $\neg$ B: Mindestens ein Tier ist kein Säugetier.
   $\neg$ C: Keiner in dieser Gruppe lügt.
   $\neg$ D: Mindestens eine dreiziffrige Zahl ist kleiner als oder **gleich** 100.

3) (a) $A \wedge B$ (b) $A \wedge (\neg B)$ (c) $(\neg A) \wedge (\neg B) = \neg (A \vee B)$ (d) $A \vee B$

   (e) $(A \otimes B) \wedge (A \Rightarrow \neg B)$ (f) $B \Rightarrow A$

Video-Tipp Aussagenlogik Beispiel 1, Konjunktion, Disjunktion, Äquivalenz, Verneinung, Implikation |Daniel Jung - Bing video

Aussagenlogik Beispiel 3, Konjunktion, Disjunktion, Äquivalenz, Verneinung, Implikation |Daniel Jung - Bing video

8.2. Mengen

8.2.1. Was ist eine Menge?

Eine **Menge** besteht aus sogenannten **Elementen**, die **in beliebiger Reihenfolge** und **beliebig oft** angeführt werden dürfen und in **geschwungenen Klammern** stehen.

Beispiele:

$\{1,2,3,4,5\}$	{ ☺ , ☹ , ✂ , ☽ }
$\{1,2,3,4,5\} = \{2,4,1,3,5\}$	{ ☺ , ☹ , ✂ , ☽ } = { ✂ , ☹ , ☺ , ☽ }
$\{1,2,3,4,5\} = \{1,1,1,2,3,3,5,4\}$	{ ☺ , ☹ , ✂ , ☽ } = { ☺ , ☺ , ☺ , ✂ , ☽ , ☹ }

Mengen werden mit **Großbuchstaben** bezeichnet.

Beispiele:

$\mathrm{A} = \{1,2,3,4,5\}$

$\mathrm{A} = \{1,1,1,2,3,3,5,4\}$

Gleiche Mengen werden mit **gleichen Buchstaben** bezeichnet.

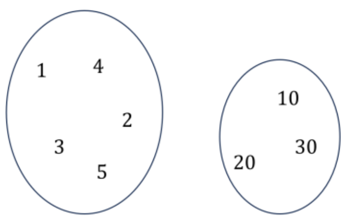
$\mathrm{M} = \{10,20,30\}$

$2 \in \mathrm{A}$ bedeutet: 2 **ist** ein **Element** der Menge A (gehört zur Menge A)

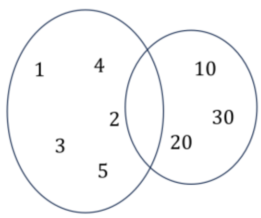
$7 \notin \mathrm{A}$ bedeutet: 7 ist **kein Element** der Menge A (gehört nicht zur Menge A)

Man kann Mengen grafisch im sogenannten **EULER-Diagramm** [49] oder **VENN-Diagramm**[50] darstellen:

EULER – Diagramm



VENN - Diagramm



Während im EULER-Diagramm nur tatsächliche Überschneidungen von Mengen dargestellt werden, illustriert das VENN-Diagramm alle potentiellen Überlappungen, auch wenn diese keine Elemente enthalten.

[49] Benannt nach Leonhard EULER (Schweizer Mathematiker, 1707 – 1783)

[50] Benannt nach John VENN Junior (englischer Mathematiker, (1834 – 1923)

$|A|$ … Kardinalität (Mächtigkeit) der Menge A: Die Anzahl der ***verschiedenen*** Elemente.

Beispiele: $A = \{1, 1, 1, 2, 3, 3, 5, 4\}$ $\quad |A| = 5$

Leere Menge $\{\ \}$ bzw. $\varnothing$: Menge OHNE Elemente $\qquad \{0\} \neq \{\ \}$

Mengen in **aufzählender** Form: $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

Mengen in **beschreibender** Form: $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 3\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 < x < 4\}$

Beispiel: Eine Menge E in aufzählender Form:

$$E = \{\ 1, -3, \frac{1}{1 \cdot 2} 3^2, -\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} 3^3, \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 3^4, \ldots\ \} \quad \text{oder}$$

$$E = \{(-1)^0 \cdot \frac{1}{0!} \cdot 3^0, (-1)^1 \cdot \frac{1}{1!} \cdot 3^1, (-1)^2 \cdot \frac{1}{2!} \cdot 3^2, (-1)^3 \cdot \frac{1}{3!} \cdot 3^3, (-1)^4 \cdot \frac{1}{4!} \cdot 3^4, \ldots\ \}$$

Diese Menge E in beschreibender Form: $E = \left\{ n \in \mathbb{N}_0 : (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot 3^n \right\}$

Produktmenge $A \times B$:

Beispiel: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad B = \{a, b\}$

	1	2	3	4
a	$(1, a)$	$(2, a)$	$(3, a)$	$(4, a)$
b	$(1, b)$	$(2, b)$	$(3, b)$	$(4, b)$

$A\text{x}B = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, a), (1, b), (2, b), (3, b), (4, b)\}$

	a	b
1	$(a, 1)$	$(b, 1)$
2	$(a, 2)$	$(b, 2)$
3	$(a, 3)$	$(b, 3)$
4	$(a, 4)$	$(b, 4)$

$B\text{x}A = \{(a, 1), (b, 1), (a, 2), (b, 2), (a, 3), (b, 3), (a, 4), (b, 4)\}$

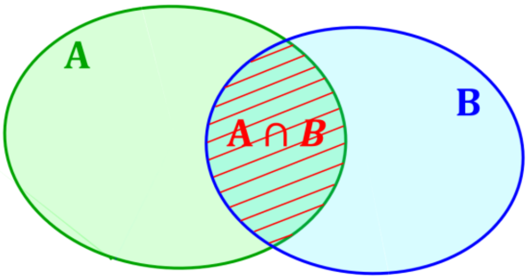
Bildet man $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$, so kann man diese Produktmenge auch mit $\boldsymbol{A}^2$ bezeichnen

$(1,2) \neq (2,1)$ $\qquad$ Im Allgemeinen gilt: $A \times B \neq B \times A$ $\qquad$ $(2,2) \neq (2)$

Weiter siehe 8.3., S 417 f

8.2.2. Durchschnittsmenge

Die **Durchschnitts-Menge zweier Mengen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$**, $\boldsymbol{A \cap B}$, besteht aus den Elementen, die **zur Menge $\mathbf{A}$ und** ($\wedge$) **zur Menge $\mathbf{B}$** (sowohl zur Menge A als auch zur Menge B) gehören.



Beispiel:

$\mathbf{A} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}\}$ $\mathbf{B} = \{\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{6}, \mathbf{8}, \mathbf{10}\}$

$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{\mathbf{2}, \mathbf{4}\}$

Beispiel:

$\mathrm{A}_1 = \mathbb{N}^{\mathrm{u}} = \{1, 3, 5, 7, \ . \ . \ .\}$ $\mathrm{A}_2 = \mathbb{N}^{\mathrm{g}} = \{2, 4, 6, 8, \ . \ . \ .\}$

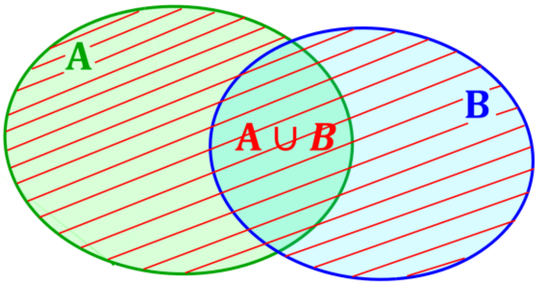
$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \{\quad\} = \varnothing$

Ergibt der Durchschnitt von Mengen die leere Menge, so nennt man die Mengen disjunkt.

$$A \cap B = \{\ \} \Leftrightarrow A \text{ und } B \text{ sind disjunkt}$$

8.2.3. Vereinigungsmenge

Die **Vereinigungs-Menge zweier Mengen A und B**, $\boldsymbol{A \cup B}$, besteht aus den Elementen,
die **entweder zur Menge A oder zur Menge B oder zu beiden** ($\vee$) **Mengen** gehören.



Beispiel:

$\mathbf{A = \{1, 2, 3, 4, 5\}}$ $\mathbf{B = \{2, 4, 6, 8, 10\}}$

$\boldsymbol{A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}}$

Beispiel:

$\mathrm{A}_1 = \mathbb{N}^{\mathrm{u}} = \{1, 3, 5, 7, \ . \ . \ .\}$ $\mathrm{A}_2 = \mathbb{N}^{\mathrm{g}} = \{2, 4, 6, 8, \ . \ . \ .\}$

$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ . \ . \ . \ \} = \mathbb{N}$

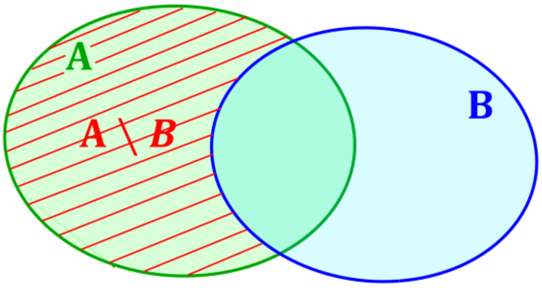
Gesetze von DE MORGAN für Mengen:

$$\neg(A \cap B) = (\neg A) \cup (\neg B)$$
$$\neg(A \cup B) = (\neg A) \cap (\neg B)$$

Man muss nur bei den Regeln von DE MORGAN für Aussagen $\wedge$ durch $\cap$ und $\vee$ durch $\cup$ ersetzen. (Siehe 8.1.2.2., S 402)

8.2.4. Differenzmenge

Die **Differenz-Menge zweier Mengen A und B**, $A \backslash B$, besteht aus den Elementen, die **zur Menge A gehören, aber nicht zur Menge B.**



Beispiel:

$\mathbf{A} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}\}$ $\mathbf{B} = \{\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{6}, \mathbf{8}, \mathbf{10}\}$

$\mathbf{A} \backslash \mathbf{B} = \{\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{5}\}$

$\mathbf{B} \backslash \mathbf{A} = \{\mathbf{6}, \mathbf{8}, \mathbf{10}\}$

Beispiel:

$\mathrm{A}_1 = \mathbb{N}^{\mathrm{u}} = \{1, 3, 5, 7, \ . \ . \ .\}$ $\mathrm{A}_2 = \mathbb{N}^{\mathrm{g}} = \{2, 4, 6, 8, \ . \ . \ .\}$

$\mathbf{A} \backslash \mathbf{B} = \{1, 3, 5, 7, . \ . \ .\} = \mathbb{N}^{\mathrm{u}} = \mathrm{A}_1$

Sind zwei Mengen A und B disjunkt, so gilt $A \backslash B = A$ und $B \backslash A = B$

Beispiel:

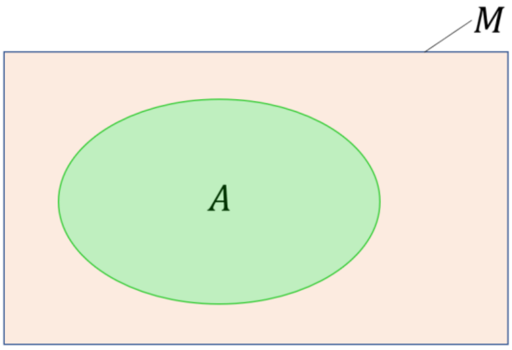
$\mathrm{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ $\mathrm{B} = \{10, 20, 20\}$

$\mathrm{A} \backslash \mathrm{B} = \mathrm{A}$

$\mathrm{B} \backslash \mathrm{A} = \mathrm{B}$

8.2.5. Teilmenge, Obermenge, Potenzmenge

Die Menge $\mathbf{A}$ heißt **Teil-Menge einer Menge** $\boldsymbol{M}$, $\mathbf{A} \subset \mathbf{M}$ wenn jedes Element der Menge $\boldsymbol{A}$ auch Element der Menge $\boldsymbol{M}$ ist.



Formal: $\mathbf{A} \subset \mathbf{M}\colon\ \mathbf{x} \in \mathbf{A} \Longrightarrow \mathbf{x} \in \mathbf{M}$

Ist $\mathbf{A}$ **Teilmenge von** $\mathbf{M}$, so ist $\mathbf{M}$ **Obermenge** von $\mathbf{A}$, $\mathbf{M} \supset \mathbf{A}$.

Beispiel:

$\mathrm{M} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ $\mathrm{A} = \{2, 4, 6\}$ $\mathrm{A} \subset \mathrm{M}$

Beachte: Die **leere Menge** ist **Teilmenge jeder Menge** $\mathbf{M}$: $\{\ \} \subset \mathbf{M}$

$\subset$ ... ist echte Teilmenge von Im oberen Beispiel ist $A \subset M$

$\subseteq$ ... ist Teilmenge von $M \subseteq M$

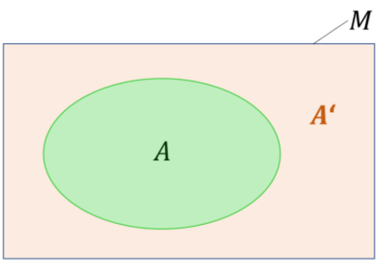
Komplementärmenge A'

$\mathbf{M}$ ist eine Menge und $\mathbf{A}$ eine **Teilmenge** von $\mathbf{M}$, $\mathbf{A} \subset \mathbf{M}$. Das heißt, jedes Element von $\mathbf{A}$ ist auch Element von $\mathbf{M}$.

Dann gilt $\mathbf{A}' = \mathbf{M} \backslash \mathbf{A}$

Die Menge $\mathbf{A}$ und ihre Komplementärmenge A' ergeben die Gesamtmenge M:

$$\mathbf{A} \cup A' = \mathbf{M}$$



Potenzmenge $P(A)$ einer Menge A: Die Potenzmenge $P(A)$ besteht aus **allen** Teilmengen der Menge A.

Beispiel:

$\mathrm{A} = \{1, 2, 3, \}$ $\quad P(A) = \{\{\ \}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

Beachte: Die leere Menge $\{\ \}$ ist Teilmenge jeder Menge.

Die Menge A ist Teilmenge von sich selbst.

Die Elemente der Potenzmenge sind selbst Mengen.

Besitzt die Menge A n verschiedene Elemente, so besitzt die Potenzmenge $P(A)$ 2^n Elemente.

```
x = {"a","b","c","d","e"}
y = {"b","c"}
x | y
```

```
{'a', 'b', 'c', 'd', 'e'}
```

```
x = {"a","b","c","d","e"}
y = {"b","c"}
x & y
```

```
{'b', 'c'}
```

```
x = {"a","b","c","d","e"}
y = {"b","c"}
x - y
```

```
{'a', 'd', 'e'}
```

Kann ich's?

1) $P = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 1\}$ $\quad P = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 1\}$

Ermitteln Sie (i) $P \cup Q$ (ii) $Q \cap P$ (iii) $P \setminus Q$ (iv) $Q \setminus P$

2) Gegeben ist die Menge $A = \{1, 2, 3\}$

Welche Ausdrücke sind Elemente der Potenzmenge $P(A)$? 2, $\{2\}$, $\{\ \}$

Lösungen: 1) (i) $P \cup Q = \mathbb{Q}$ (ii) $Q \cap P = P \cap Q = \{1\}$ (iii) $P\ Q = \{x \in \mathbb{Q} : x < 1\}$ (iv) $Q\ P = \{x \in \mathbb{Q} : x > 1\}$

2) $\{2\}$ und $\{\ \}$

Zusammenfassung mathematischer Symbole

$:=$	Ist definiert durch
$\in$	Ist Element von
$\notin$	Ist kein Element von
$\{\ \}$	Mengenklammer
$\lvert\{\ \}\rvert$	Kardinalität (Mächtigkeit) : Anzahl der verschiedenen Elemente einer Menge
$:$ bzw. $\mid$	für die gilt
$\vee$	**ein**schließendes oder
$\oplus$	**aus**schleißendes oder
$\wedge$	und (sowohl als auch)
$\cup$	vereinigt mit (Vereinigungsmenge)
$\cap$	geschnitten mit (Durchschnittsmenge)
$\subseteq$	ist Teilmenge von . . . $\subset$ ist echte Teilmenge von . . .
$\supseteq$	ist Obermenge von . . . $\supset$ ist echte Obermenge von . . .
$\sum$	Summe (+)
$\prod$	Produkt (.)
x	Kartesisches Produkt
$\neg$ bzw. $\overline{}$	nicht
$\exists$	es gibt mindestens ein
$\exists!$	es gibt genau ein
$\forall$	für alle
W(a)	Wahrheitswert von a
$\Rightarrow$	Implikation (daraus folgt)
$\Leftrightarrow$	Äquivalenz (genau dann, wenn)

Übung

1) Gegeben sind die Mengen $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 36\}$ und $B = \{1, 4, 9, 16, . . . \}$

a) Geben Sie die Menge A in aufzählender Form an.
b) Geben Sie die Menge B in beschreibender Form an.
c) Geben Sie $P(A)$ an.
d) Bestimmen Sie $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$, A^2
e) Ist $\{ 6 \} \in A$ wahr?
f) Ist $\{-6\} \in P(A)$ wahr?
g) Gilt $A \subset B$?
h) Gilt $A \subset P(A)$?
i) Sind A und B disjunkt?
j) Ist $\{ \} \in P(B)$?

2) Wahr oder falsch? a) $\{0\} = \{ \}$

$A = \{1,2\}$ $B = \{1,2\}$: $b)$ $(1,2) \in A^2$ $c)$ $(1,2) = (2,1)$ $d)$ $A \backslash B = B \backslash A$

Lösungen:

1) a) $A = \{-6, 6\}$ b) $B = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ c) $P(A) = \{\{ \}, \{-6\}, \{6\}, \{-6, 6\}\}$

d) $A \cup B = \{-6, 6, 1, 4, 9, 16, . . . \}$ $A \cap B = \{ \}$ A und B sind disjunkt

$A \backslash B = A$ $B \backslash A = B$ $A^2 = A\text{x}A = \{(-6,-6), (-6,6), (6,-6), (6,6)\}$

e) Nein, weil nur $6 \in A$ und nicht die Menge $\{ 6 \}$

f) Ja, weil die Elemente von Potenzmengen selbst wieder Mengen sind.

g) Nein, weil nicht jedes Element von A auch Element von B ist.

h) Nein, weil in einer Potenzmenge $P(A)$ die Menge A zwar Element ist, aber keine Teilmenge.
Es gilt: $\{\{-6, 6\}\} \subset P(A)$

i) Ja, siehe Lösung von d) die letzte

j) Ja, weil die leere Menge Element jeder Potenzmenge ist.

2) a) falsch, weil die leere Menge kein Element besitzt und nicht das Element 0.

b) wahr, weil $A = B$

	1	2
1	(1,1)	(1,2)
2	(2,1)	(2,2)

c) falsch, siehe obere Verknüpfungstabelle

d) wahr, weil $A \backslash B = B \backslash A = \{ \}$

8.3. Relationen

8.3.1. Definition

Eine (binäre) Relation R zweier Mengen A und B ist eine Teilmenge der Produktmenge $A \text{ x } B$. (siehe auch S 409)

R besteht aus geordneten Paaren (a, b) mit $a \in A \ \wedge b \in B$

$R \subseteq A \text{ x } B$ bzw. $R \subseteq \{(a, b): a \in A \ \wedge b \in B\}$

Beispiel:

$A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{m, n\}$

Die Produktmenge $A \text{ x } B = \{(1, m), (1, n), (2, m), (2, n), (3, m), (3, n)\}$

Mögliche Relationen: $R_1 = \{(1, m), (2, n)\}$

$R_2 = \{(2, m), (3, m), (3, n)\}$

Natürlich gibt es auch Relationen $R_i \ \subseteq B \text{ x } A$:

$R_3 = \{(m, 1), (m, 2), (n, 1), (n, 2)\}$

Für $(a, b) \in R$ kann man auch schreiben $a\ R\ b$

Beispiel:

Es sei $\mathbb{R}\ x\ \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

$R = \{(x, y) \in \ \mathbb{R}^2 : x < \ y\} = \{x\ R\ y : \ x < \ y\}$

Beispiel:

Es sei $M = \{1, 2, 3\}$.

Geben wir folgende Relationen auf M^2 an: $x\ R_1\ y : x$ ist gerade

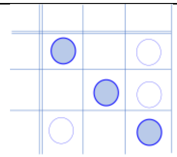
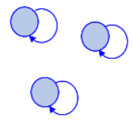
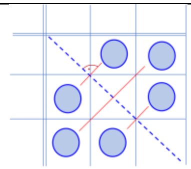
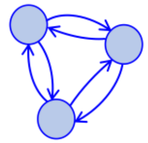
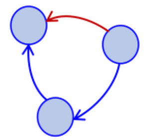
$x\ R_2\ y : x < y$

$R_1 = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$

$R_2 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$

8.3.2. Eigenschaften

Es sei A eine Menge und $R \subseteq A$ x A

Eigenschaft	Beschreibung	Formale Angabe	Tabelle	Graph
reflexiv	Jedes Element steht mit sich selbst in Relation.	$\forall a \in A : a\ R\ a$		
symmetrisch	Steht ein Element a in Relation mit einem Element b, so steht auch b in Relation mit a.	$\forall a, b \in A : a\ R\ b \Longrightarrow b\ R\ a$		
transitiv	Steht a in Relation zu b, und b in Relation zu c, so steht a in Relation zu c.	$\forall a, b, c \in A : a\ R\ b\ \land b\ R\ C \Longrightarrow a\ R\ c$		
irreflexiv	Kein Element steht mit sich selbst in Relation.	$\forall a \in A : \neg a\ R\ a$		
antisymmetrisch	Zwei verschiedene Elemente a und b stehen nicht in Relation zueinander.	$\forall a, b \in A : a\ R\ b \land b\ R\ a \Longrightarrow a = b$		
asymmetrisch	Steht a in Relation zu b, dann steht b nicht in Relation zu a.	$\forall a, b \in A : a\ R\ b \Longrightarrow \neg b\ R$	[51]	

[51] Die grafische Darstellung orientiert sich an Prof. Weitz von der HAW Hamburg. Graph: siehe Abschnitt XIII, S 629 f

Beispiel:

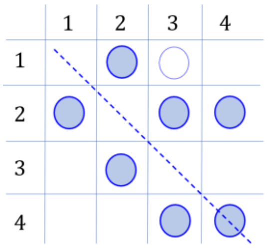
Es seien $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und $R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (4, 3), (4, 4)\}$.

Ist R reflexiv?

NEIN, denn es müsste $\forall a \in A : a\ R\ a$ gelten.

Ein Gegenbeispiel (was schon reicht): 1 steht nicht in Relation zu 1 (das geordnete Paar $(1, 1)$ kommt in R nicht vor.

Grafisch mit Tabelle:



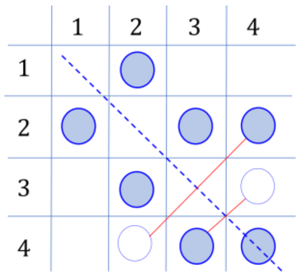
Es fehlen geordnete Paare auf der Hauptdiagonale.

Ist R symmetrisch?

NEIN, denn es müsste $\forall a, b \in A : a\ R\ b \Longrightarrow b\ R\ a$ gelten.

Ein Gegenbeispiel (was schon reicht): 2 steht in Relation zu 4 aber 4 nicht zu 2. Das geordnete Paar $(4, 2)$ fehlt.

Grafisch mit Tabelle



Die Spiegelsymmetrie bezüglich der Hauptdiagonale ist nicht für **alle** geordneten Paare gegeben.

Ist R transitiv?

NEIN, denn es müsste $\forall a, b, c \in A : a\ R\ b\ \wedge b\ R\ C \Longrightarrow a\ R\ c$ gelten.

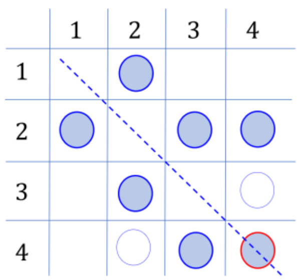
Ein Gegenbeispiel (was schon reicht): $1\ R\ 2\ \wedge 2\ R\ 3$ aber nicht $1\ R\ 3$

Ist R irreflexiv?

NEIN, denn es müsste $\forall a \in A : \neg a\ R\ a$ gelten.

Es steht aber 4 mit sich selbst in Relation. Das geordnete Paar $(4, 4)$ existiert.

Grafisch mit Tabelle:



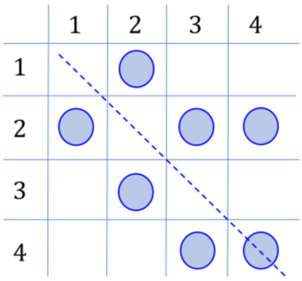
Es dürfen keine geordneten Paare auf der Hauptdiagonale liegen.

Ist R antisymmetrisch?

NEIN, denn es müsste $\forall a, b \in A : a\ R\ b \wedge b\ R\ a \Longrightarrow a = b$ gelten.

Es stehen verschiedene Element in Relation. Z.B. $1\ R\ 2$ sowie $2\ R\ 1$. Es ist aber $1 \neq 2$

Grafisch mit Tabelle:



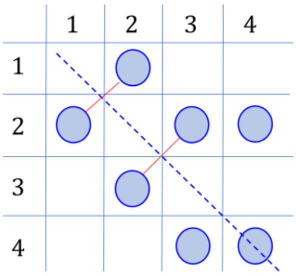
Es dürfen geordneten Paare **nur** auf der Hauptdiagonale liegen.

Ist R asymmetrisch?

NEIN, denn es müsste $\forall a, b \in A : a\ R\ b \Longrightarrow \neg b\ R\ a$ gelten.

Es ist z.B. $1\ R\ 2$ und $2\ R\ 1$

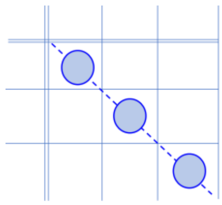
Grafisch mit Tabelle:



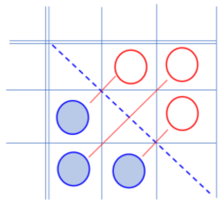
Es dürfen keine symmetrisch liegenden geordneten Paare auftreten.

Nicht antisymmetrisch und asymmetrisch verwechseln!

antisymmetrisch bedeutet, dass nur gleiche Elemente in Relation stehen,



asymmetrisch bedeutet, dass keine Symmetrie existiert.



Relation NICHT reflexiv $\not\Rightarrow$ Relation ist irreflexiv

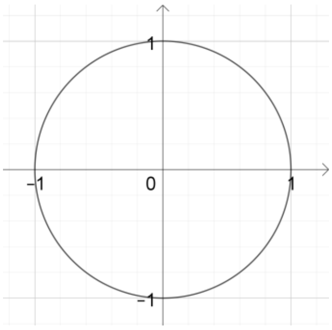
Relation NICHT symmetrisch $\not\Rightarrow$ Relation ist antisymmetrisch

Relationen, die reflexiv, symmetrisch und transitiv sind, nennt man Äquivalenzrelationen.

Beispiel siehe Übung auf S 421

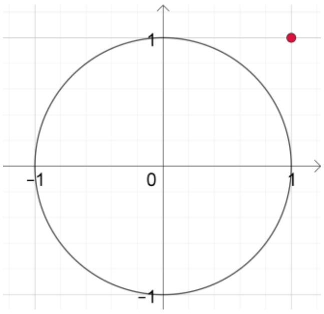
Beispiel: [52]

$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$



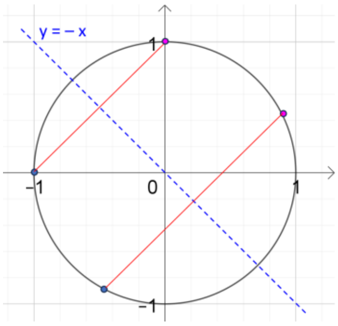
Die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ beschreibt die Punkte auf einem Kreis mit dem Radius 1 und dem Koordinaten-Ursprung als Mittelpunkt, also den **Einheitskreis**.

Ist R reflexiv?



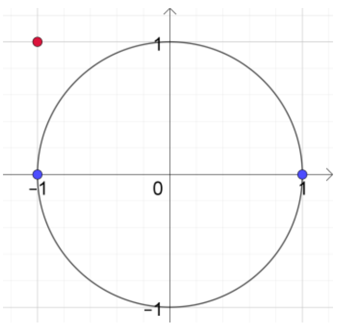
NEIN, denn z.B. liegt der Punkt $(1, 1)$ nicht auf dem Einheitskreis.

Ist R symmetrisch?



JA, denn alle Punkte des Einheitskreises sind spiegelsymmetrisch bezüglich der 2. Mediane y = –x (und auch der 1. Mediane y = x)

Ist R transitiv?



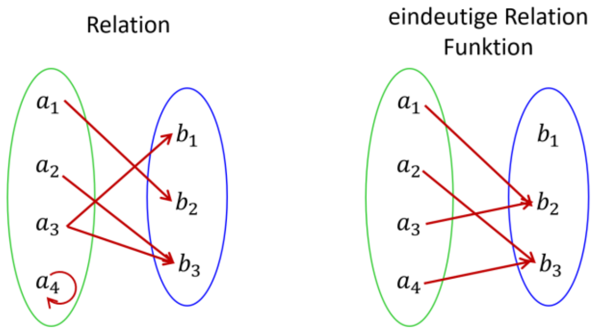
k … Einheitskreis

NEIN, denn z.B. ist $(1, 0) \in k \;\wedge\; (0, -1) \in k$ aber $(1, -1) \notin k$

[52] Beispiel von Prof. WEITZ von der HAW Hamburg

Was ist der Unterschied zwischen Relation und Funktion?

Eine Funktion ist eine *eindeutige* Relation. Hier wird **jedem** Element der Menge A **genau ein** Elemebt der Menge B zugeordnet.



Übung [53] Überprüfen Sie, ob es sich bei folgenden Angaben um Äquivalenzrelationen handelt.

a) $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid |x - y| \leq 2\}$ b) $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid (x = y = 0) \vee (x \cdot y > 0)\}$

Lösungen:

a) reflexiv: ja, denn für alle (natürlichen) Zahlen gilt $x - x = 0 \leq 2$

symmetrisch: ja, weil für alle (natürlichen) Zahlen gilt $|x - y| = |y - x|$
Ist $x - y \leq 2$, so ist auch $|y - x| \leq 2$
Z.B.: $|3 - 2| = 1 \leq 2 \quad |2 - 3| = 1 \leq 2$

transitiv: NEIN, weil $\forall x, y, z \in A : x\,R\,y \;\wedge y\,R\,z \not\Rightarrow x\,R\,z$
Beispiel: $|5 - 3| = 2 \leq 2 \quad |3 - 1| = 2 \leq 2 \;\Longrightarrow |5 - 1| = 4 > 2$

Es handelt sich also um KEINE Äquivalenzrelation.

b) $(x = y = 0) \vee (x \cdot y > 0)$ bedeutet: Entweder sind beide ganzen Zahlen Null $(x = y = 0)$ oder beide Zahlen sind positiv oder beide Zahlen sind negativ (dann ist $x \cdot y > 0$)

reflexiv: ja, denn entweder sind dann beide Zahlen Null oder jeweils gleich groß und sowohl plus mal plus als auch minus mal minus ist > 0

symmetrisch: ja, denn die Multiplikation ist kommutativ (vertauschbar).
Demnach gilt z.B. $3 \cdot 2 = 6 > 0$ und $2 \cdot 3 = 6 > 0$

transitiv: ja, denn entweder sind die Zahlen jeweils Null oder es gilt $x \cdot y > 0 \;\wedge\; y \cdot z > 0 \;\Longrightarrow x \cdot z > 0$
Weil ja ein Produkt nur dann positiv ist, wenn entweder beide Zahlen positiv oder beide Zahlen negativ sind.

Bsp.: $-2 \cdot (-3) > 0 \;\wedge\; -3 \cdot (-4) > 0 \;\Longrightarrow\; -2 \cdot (-4) > 0$

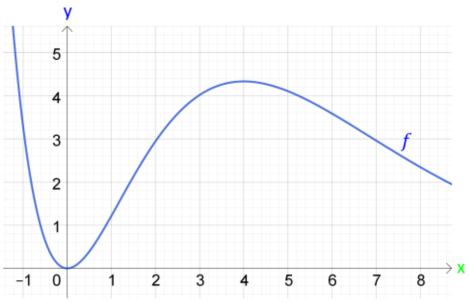
R_2 ist eine Äquivalenzrelation

[53] Beispiele von Dr. KIRCHGASSER, FH Salzburg

„Meine Erfahrung geht dahin: Sobald die Leute alt genug sind, schärfer zu unterscheiden, unterscheiden sie überhaupt nichts mehr.“
Oscar WILDE
(1854–1900)

IX DIFFERENZIEREN

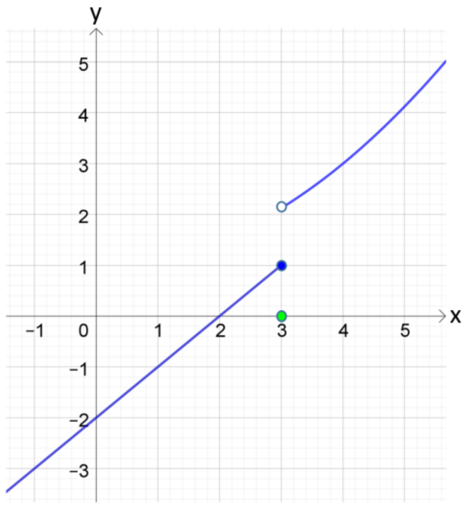
9.1. Stetig



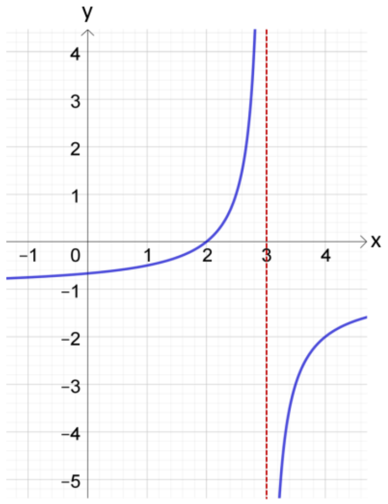
Anschaulich ist eine Funktion **stetig**, wenn ihr Graph im Definitionsbereich eine zusammenhängende Linie darstellt, die keine Sprünge aufweist und die man ohne abzusetzen zeichnen kann.

Im Österreichischen gibt es den Ausdruck *„Sei stad!“* und meint *„Sei ruhig!“*.
Das Wort *stetig* stammt vom Wort *ruhig*.
Ein stetiger Verlauf meint demnach einen ruhigen Verlauf, einen ohne abrupte Änderungen, ohne Sprünge.

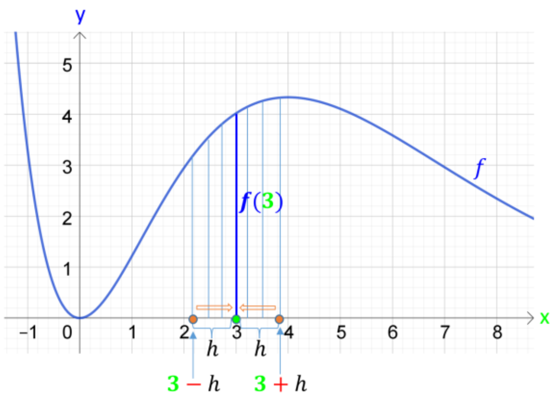
Beispiele für nicht stetige Funktionen mit $G = \mathbb{R}$:



Diese Funktion hat an der Stelle **x = 3** eine **endliche** Sprungstelle.



Hier liegt an der Stelle **x = 3** eine **unendliche** Sprungstelle vor.



Um festzustellen, ob eine Funktion an einer Stelle x_1 stetig ist, bilden wir dort den links- und rechtsseitigen Limes (7.8.1., S 383 f).

Erhalten wir **beide Male**
den **gleichen (endlichen) Wert**,
so ist die Funktion an dieser Stelle **stetig**.

Beispiel: Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = x^2 - 1$ an der Stelle $x_1 = 3$ stetig ist.

Linksseitiger Limes: $\lim\limits_{h\to 0} f(3-h) = \lim\limits_{h\to 0}[(3-h)^2 - 1] = \lim\limits_{h\to 0}(9 - \overset{\to 0}{6\,h} + \overset{\to 0}{h^2} - 1) = 9 - 1 = \mathbf{8}$

Rechtsseitiger Limes: $\lim\limits_{h\to 0} f(3+h) = \lim\limits_{h\to 0}[(3+h)^2 - 1] = \lim\limits_{h\to 0}(9 + \overset{\to 0}{6\,h} + \overset{\to 0}{h^2} - 1) = 9 - 1 = \mathbf{8}$

Beispiel: a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \frac{1-x}{x+2}$ an der Stelle $x_1 = 1$ stetig ist.

Linksseitiger Limes: $\lim\limits_{h\to 0} f(1-h) = \lim\limits_{h\to 0}\left[\frac{1-(1-h)}{(1-h)+2}\right] = \lim\limits_{h\to 0}\left[\frac{1-1+h}{1-h+2}\right] = \lim\limits_{h\to 0}\left[\frac{\overset{\to +0}{h}}{\underset{\to -0}{3-h}}\right] = \frac{+0}{+3} = \mathbf{0}$

Rechtsseitiger Limes: $\lim\limits_{h\to 0} f(1+h) = \lim\limits_{h\to 0}\left[\frac{1-(1+h)}{(1+h)+2}\right] = \lim\limits_{h\to 0}\left[\frac{1-1-h}{1+h+2}\right] = \lim\limits_{h\to 0}\left[\frac{\overset{\to -0}{-h}}{\underset{\to +0}{3+h}}\right] = \frac{-0}{+3} = \mathbf{0}$

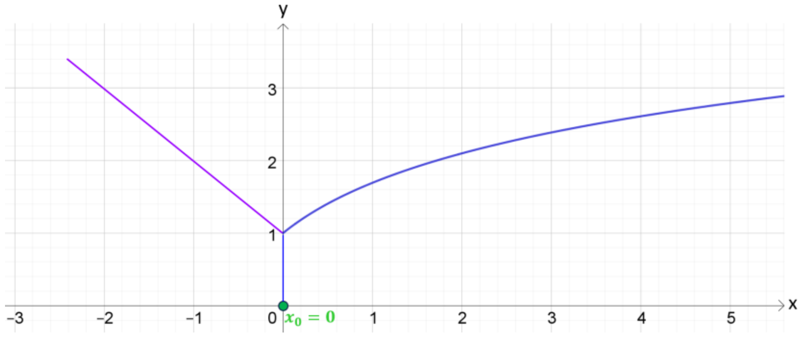
b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \frac{1-x}{x+2}$ an der Stelle $x_1 = -2$ *nicht* stetig ist.

Linksseitiger Limes: $\lim\limits_{h\to 0} f(-2-h) = \lim\limits_{h\to 0}\left[\frac{1-(-2-h)}{(-2-h)+2}\right] = \lim\limits_{h\to 0}\left[\frac{1+2+h}{-2-h+2}\right] = \lim\limits_{h\to 0}\left[\frac{\overset{\to +0}{3+h}}{\underset{\to -0}{-h}}\right] = \frac{+3}{-0} \to -\infty$

Rechtsseitiger Limes: $\lim\limits_{h\to 0} f(-2+h) = \lim\limits_{h\to 0}\left[\frac{1-(-2+h)}{(-2+h)+2}\right] = \lim\limits_{h\to 0}\left[\frac{1+2-h}{-2+h+2}\right] = \lim\limits_{h\to 0}\left[\frac{\overset{\to -0}{3-h}}{\underset{\to +0}{h}}\right] = \frac{+3}{+0} \to +\infty$

Hier spricht man von einer Polstelle bzw. unendlichen Sprungstelle **mit** Vorzeichenwechsel.

Beispiel: Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{für } x \leq 0 \\ 1 + \ln(x+1) & \text{für } x > 0 \end{cases}$ an der Stelle $x_0 = 0$ stetig ist.



Der linksseitige Limes wird mit der Funktion $f_1(x) = 1 - x$ gebildet:

$$\lim_{h\to 0} f_1(x) = \lim_{h\to 0}[1-(0-h)] = \lim_{h\to 0}(1 - 0 + \overset{\to 0}{h}) = \mathbf{1}$$

Der rechtsseitige Limes wird mit der Funktion $f_2(x) = 1 + \ln(x+1)$ gebildet:

$$\lim_{h\to 0} f_2(x) = \lim_{h\to 0}[1 + \ln(0 + \underset{\to 0}{h} + 1)] = 1 + \underbrace{\ln(1)}_{=0} = \mathbf{1}$$

Da an der Stelle $x_0 = 1$ der linksseitige Limes gleich dem rechtsseitigen Limes ist, ist die gegebene Funktion an dieser Stelle stetig.

Übung

Bestimmen Sie Definitionsbereich, die Polstellen, das Verhalten im Unendlichen und die Bildmenge (Wertemenge) der folgenden reellwertigen Funktionen.

1. $f(x) = \frac{4x}{x^2-1}$ 2) $f(x) = \frac{x^2-x}{x^2+x}$ 3) $f(x) = \frac{-2x^3+2}{2x^2+x-1}$ 4) $f(x) = \frac{x^4+x^2}{x}$

5. $f(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x & \text{für } x < 4 \\ x & \text{für} \geq 4 \end{cases}$ Zeigen Sie, dass die Funktion an der Stelle $x_0 = 4$ stetig ist.

6. Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \begin{cases} -x+1 & x \leq -1 \\ a^2 + a\,x^2 - 0.75 & x > -1 \end{cases}$ stetig?

Sollten Begriffe nicht mehr präsent sein: 7.2.1, 327 f, 7.2.2., S 329 f, 7.2.3., S 332 f, 7.4., S 363 f

Lösungen: ! Zuerst trachten, den Bruch zu vereinfachen.

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1{,}1\}$ Polstellen: $x_1 = -1$ $x_2 = 1$

   $x_1 = -1$: $\lim_{h\to 0} f(-1-h) \to -\infty$ $\lim_{h\to 0} f(-1+h) \to +\infty$

   $x_2 = 1$: $\lim_{h\to 0} f(1-h) \to -\infty$ $\lim_{h\to 0} f(1+h) \to +\infty$

   Beide Polstellen sind unendliche Sprungstellen mit Vorzeichenwechsel.

   $\lim_{x\to \pm\infty} f(x) \to 0$ $W_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ Polstelle: $x_1 = -1$

   $x_1 = -1$: $\lim_{h\to 0} f(-1-h) \to +\infty$ $\lim_{h\to 0} f(-1+h) \to -\infty$

   Polstelle ist unendliche Sprungstelle mit Vorzeichenwechsel.

   $\lim_{x\to \pm\infty} f(x) \to 1$ $W_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

3. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0{,}5\}$ Polstellen: $x_1 = -1$ $x_2 = 0{,}5$

   $x_1 = -1$: $\lim_{h\to 0} f(-1-h) \to +\infty$ $\lim_{h\to 0} f(-1+h) \to -\infty$

   $x_1 = 0{,}5$: $\lim_{h\to 0} f(0{,}5-h) \to -\infty$ $\lim_{h\to 0} f(0{,}5+h) \to +\infty$

   Polstellen sind unendliche Sprungstellen mit Vorzeichenwechsel.

   $\lim_{x\to \pm\infty} f(x) \to \infty$ $W_f = \mathbb{R}$

4. $f(x) = x^3 + x$ Keine Polstellen: $\rightarrow$ $D_f = W_f = \mathbb{R}$

   $\lim_{x\to -\infty} f(x) \to -\infty$ $\lim_{x\to +\infty} f(x) \to +\infty$

5. Ja, weil bei $x_0 = 4$ der linksseitige und rechtsseitige Limes gleich 4 ist.

6. $f(-1) = -(-1) + 1 = 2 = a^2 + a\,(-1)^2 - 0.75 \rightarrow a_1 = 0.5$ $a_2 = -1.5$

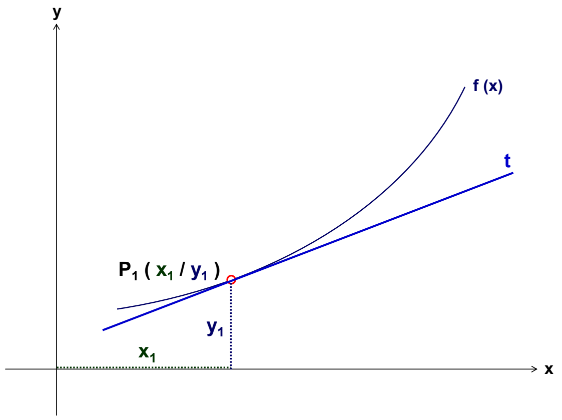
Kann ich's? Zeigen Sie, dass folgende Funktion an der Stelle $x = 1$ stetig ist:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x \cdot e^x & \text{für } x \le 1 \\ \frac{e}{2}x + \frac{e}{2} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Lösung: linksseitiger Limes = rechtsseitiger Limes = 1

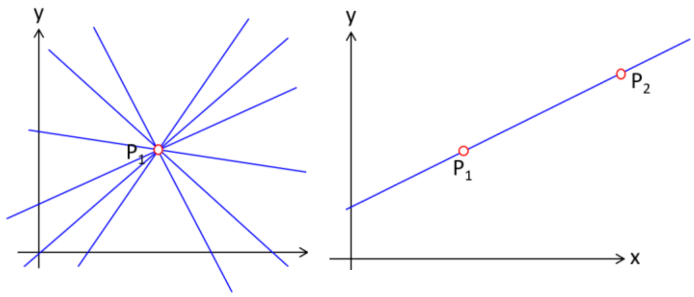
9.2. Steigung einer Tangente

Betrachten wir, was Differenzieren anschaulich bedeutet:

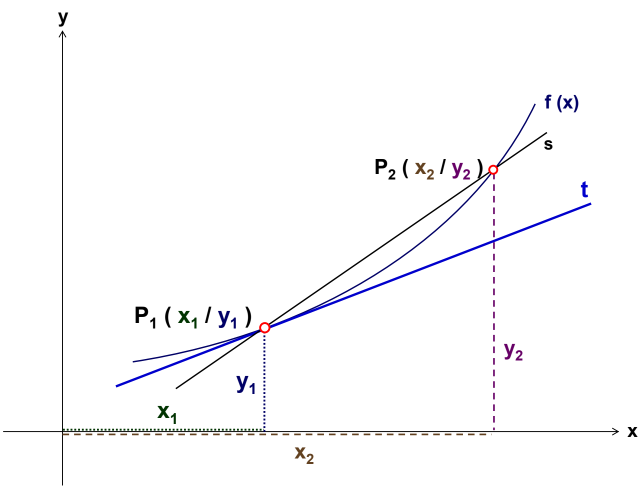


Die Gleichung der Funktion **f(x)** sei gegeben.

Wir wollen im Punkt P_1 der Kurve mit der x-Koordinate x_1 (x_1 könnte z.B. 2 sein, wir wollen aber allgemein bleiben) eine **Tangente t** (berührende Gerade) legen und deren Steigung bestimmen.
Wenn wir den Wert x_1 in die Funktionsgleichung einsetzen, erhalten wir die zugehörige y-Koordinate $y_1 = f(x_1)$. Somit kennen wir beide Koordinaten des Punktes P_1 (x_1 / y_1).



Das Problem ist, dass man durch *einen* Punkt unzählig viele Geraden legen kann. Die Lage einer Geraden ist erst dann eindeutig bestimmt, wenn wir mindestens zwei Punkte der Geraden kennen.

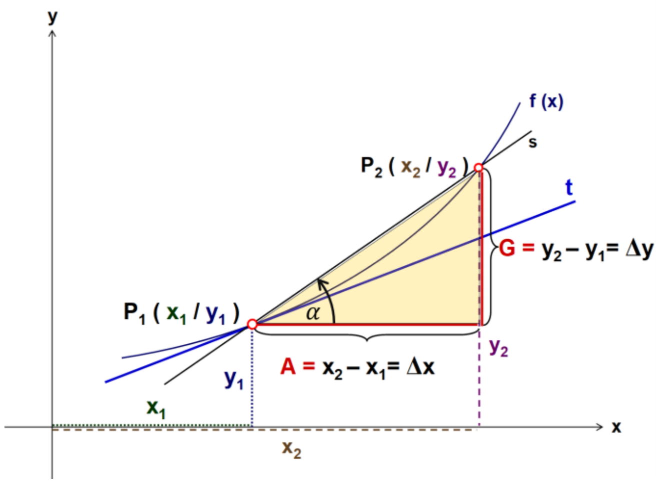


Also ermitteln wir einen zweiten Punkt P_2 der Funktion, indem wir eine beliebige x-Koordinate $x_2 > x_1$ wählen und die dazugehörige y-Koordinate mit $y_2 = f(x_2)$ berechnen. Durch die beiden nun bekannten Punkte P_1 und P_2 lässt sich leicht eine Gerade s legen.

s steht für Sekante (Schneidende, denn diese Gerade schneidet den Funktionsgraphen in den Punkten P_1 und P_2).

Wir können jetzt die Steigung dieser Sekanten s angeben, wohl wissend, dass unsere gesuchte Tangente t und die Sekante s beileibe nicht die gleiche Steigung (Richtung) besitzen.

Dazu etwas später.



Für das Steigungsdreieck gehen wir von P_1 aus.

Die Gegenkathete **G** des Winkels α ist **G =** $y_2 - y_1$, also die Differenz der y-Koordinaten der beiden Punkte. Deshalb kürzt man diese Differenz auch mit dem großen griechischen D, **Δ** (Delta) ab, was für **D**ifferenz steht.

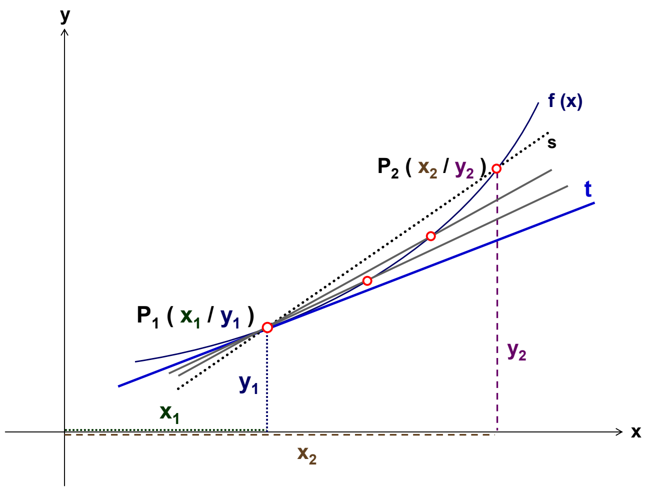
Die Ankathete des Winkels α lautet **A =** $x_2 - x_1$, also die Differenz der x-Koordinaten der beiden Punkte. Auch hier verwendet man die Abkürzung **Δ** .

Damit lautet die **Steigung der Sekanten**

$$k_s = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

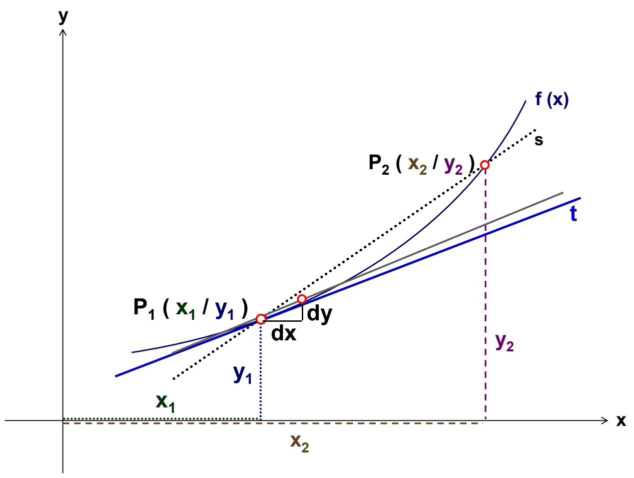
Da man hier Differenzen dividiert und das Ergebnis einer Division Quotient heißt, nennt man die **Sekanten-Steigung** auch **Differenzenquotient**. Eine andere Bezeichnung ist **mittlere** (durchschnittliche) **Änderung**(srate).

Schön und gut für die Sekante! Doch wonach wir eigentlich suchen ist die Steigung der Tangente in P_1!



Ohne die exakte Herleitung sei hier die Idee erläutert, wie die Steigung k_t der Tangente t zu ermitteln ist:
Je näher wir den zweiten Punkt P_2 an den Punkt P_1 heranlegen, desto ähnlicher wird die Richtung (also die Steigung) der Sekante jener der Tangente sein. Wenn wir P_2 beliebig (also unendlich) nahe an P_1 heranrücken, so wird die Steigung der Geraden durch P_1 und P_2 faktisch jener der Tangente t entsprechen.

Bemerkung: Das Unendlich nahe an einen bestimmten Wert Heranrücken geschieht mathematisch mit dem sog. **Grenzwert**, lateinisch **Limes**, abgekürzt **lim**. Wir behandelten dieses Thema bereits im Kapitel 7.8.1., S 383 f.



Gegen- und Ankathete des Steigungsdreiecks werden dabei immer kleiner. Für (im Prinzip) unendlich kleine Differenzen verwendet man die Abkürzung **d**.

So lautet die **Steigung der Tangente**:

$$k_t = \frac{dy}{dx}$$

Sehr **kleine Differenzen** nennt man **Differentiale**. Deshalb bezeichnet man die **Steigung der Tangente** auch als **Differentialquotient** oder auch **momentane (lokale) Änderung**(srate).

Gottfried Wilhelm von LEIBNIZ
(1646 – 1716)

Sir Isaac NEWTON
(1643 – 1727)

LEIBNIZ und NEWTON entwickelten unabhängig voneinander die Differentialrechnung.

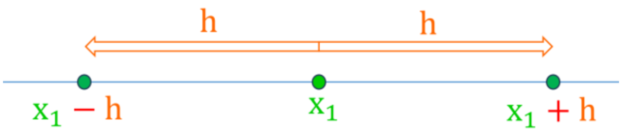
Als **Kurzschreibweise** des sog. **Grenzwertes der Sekanten-Steigung**, der die **Steigung der Tangente** ergibt, führte

LEIBNIZ $f'(x)$ oder y' ein, während

NEWTON $\dot{f}(x)$ oder $\dot{y}$ festlegte.

Die Bezeichnung LEIBNIZ' setzte sich in der Mathematik durch, jene NEWTONS in der Physik.

Mit

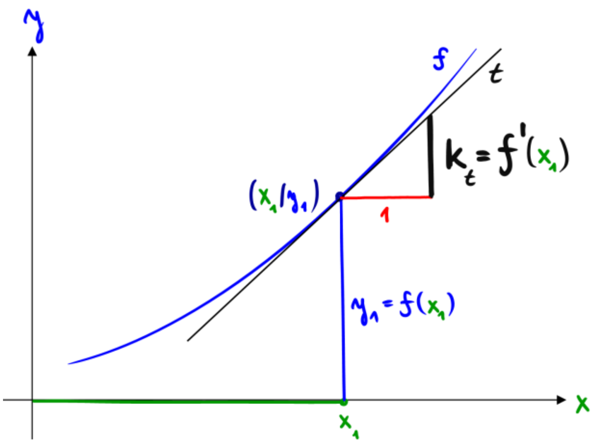


können wir die **Steigung der Tangente** allgemein so angeben:

$$\boxed{k_t = f'(x_1) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1) - f(x_1 - h)}{x_1 - (x_1 - h)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}}$$

Die **Steigung der Tangente** nennt man auch **erste Ableitung**.

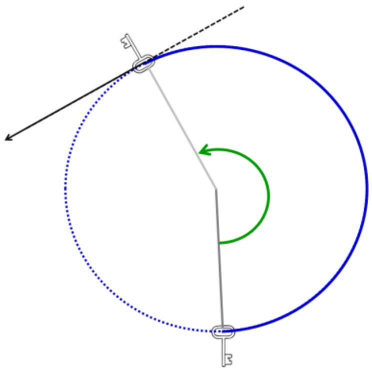
Weiters gilt (siehe auch 7.3.1., S 357 f):



$$\boxed{f'(x_1) = k_t}$$

Dass die **Steigung** (Richtung) **der Tangente** an einer bestimmten Stelle der Funktion auch die **Steigung** (Richtung) **der Funktion** selbst ist, sollen folgende Beispiele veranschaulichen:

Denken wir an einen **Schlüssel**, den wir drehen. Zunächst fliegt der Schlüssel entlang einer kurvigen Bahn. Ab dem Moment des Loslassens fliegt der Schlüssel (zunächst) ***geradlinig*** in **Richtung der Tangente**, weil die Kurve im Punkt des Loslassens die Richtung der Tangente besitzt.



Denken wir an ein **Schleifrad**, an dem ein Werkstück bearbeitet wird. Die glühenden Metallspäne fliegen vom Auflagepunkt des Werkstücks ***geradlinig*** weg, weil sie sich in jene Richtung bewegen, die die Kurve in diesem Punkt besitzt und das ist die **Richtung der Tangente**.

Fassen wir zusammen:

In **jedem Berührpunkt** von Funktion und Tangente gilt:

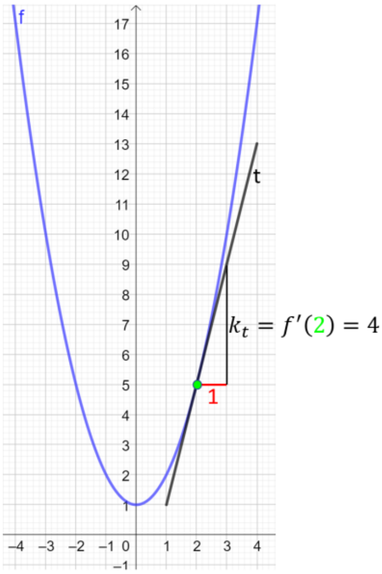
$$\boxed{\mathbf{f'(x_1) = k_t}}$$

In Worten:

$$\boxed{\textbf{Kurvensteigung = Tangentensteigung}}$$

Dieser Zusammenhang zwischen Kurven- und Tangentensteigung ist von fundamentaler Bedeutung und wird uns in der Differentialrechnung immer wieder begegnen.

Beispiel: Ermitteln Sie die Steigung der Funktion $f(x) = x^2 + 1$ bzw. der Tangente an der Stelle $x_1 = 2$.



$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 + 1 - (2^2 + 1)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2^2 + 4\,h + h^2 + 1 - 2^2 - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 4\,h}{h} \overset{*}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\overset{1}{\cancel{h}} \cdot (h+4)}{\underset{1}{\cancel{h}}} =$$

$$= \lim_{h\to 0} (\overset{\to 0}{h} + 4) = 4 = k_t = f'(2)$$

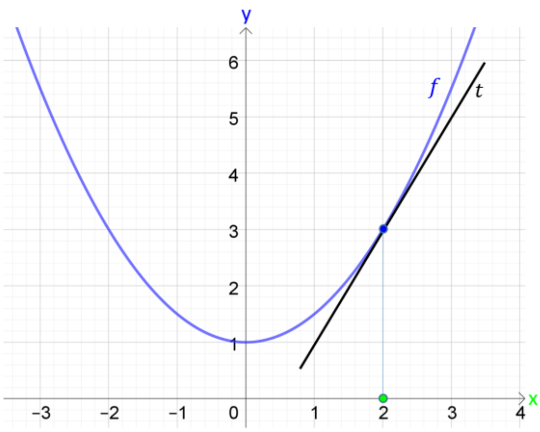
Bemerkung: Das gleiche Ergebnis erhalten wir, wenn wir statt des rechtsseitigen Limes, wie hier, den linksseitigen Limes wählen (7.8.1., S 383 f).

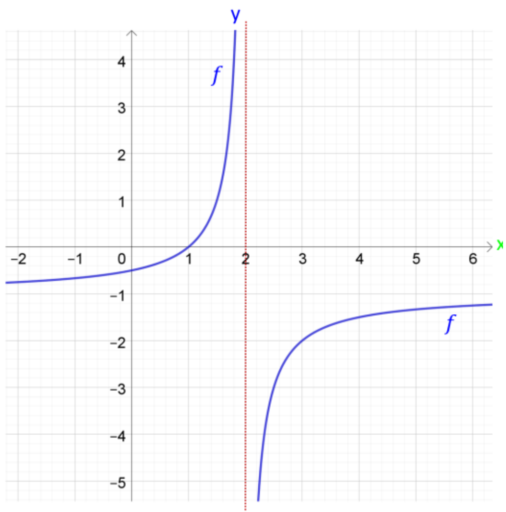
* 1) Zuerst h kürzen
2) $h \to 0$

Wann ist denn eine Funktion, mathematisch betrachtet, differenzierbar?

Wenn man **an einer bestimmten Stelle** x_1 die **Steigung der Tangente**, also die **1. Ableitung der Funktion**, eindeutig bestimmen kann.

Eine notwendige Bedingung: Die Funktion muss an dieser Stelle **stetig** sein.





Die links dargestellte Funktion ist (anschaulich) an an der Stelle $x_1 = 2$ stetig.

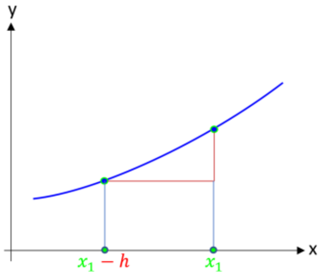
Die rechts dargestellte Funktion ist (anschaulich) an der Stelle $x_1 = 2$ nicht stetig.
An der Stelle $x_1 = 2$ lässt sich keine Tangentensteigung bestimmen, weil diese Funktion an der Stelle $x_1 = 2$ nicht definiert ist, also nicht existiert.

Weiters muss für die Differenzierbarkeit einer Funktion f an einer Stelle x_1 gelten:

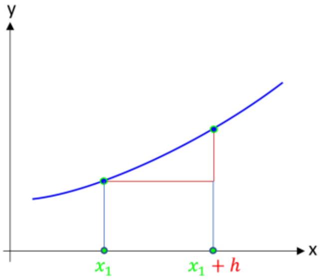
$$\boxed{f'(x_1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_1) - f(x_1 - h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}}$$

Der links- und rechtsseitige **Limes des Differenzenquotienten** (= **Differentialquotient**) muss gleich sein.

Bei Bildung des Limes immer zuerst jenen Punkt wählen, der **rechts** liegt und von diesem die Koordinaten des links davon liegenden Punktes abziehen! Ansonsten erhält man vertauschte Vorzeichen!

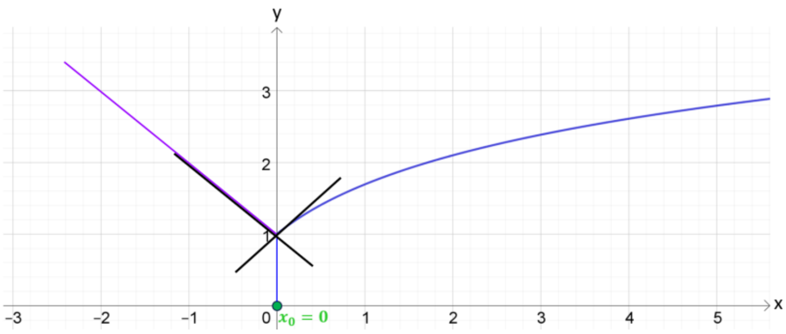


bzw.



$f(x_1) - f(x_1 - h)$ $\qquad$ $f(x_1 + h) - f(x_1)$

Ein anschauliches **Beispiel** einer Funktion, die an der Stelle x_1 stetig, aber nicht differenzierbar ist.



Der links- und rechtsseitige Limes

$$\lim_{h\to 0} f(0-h) =$$

$$= \lim_{h\to 0} f(0+h) = \mathbf{1}$$

und damit ist f an der Stelle x_0 **stetig**.

Die Steigungen (Richtungen) der **Tangenten** sind aber an der Stelle x_0 verschieden, wenn ich mich von links bzw. rechts der Stelle x_0 nähere.

Damit ist f an der Stelle x_0 nicht differenzierbar.

Beispiel: Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = x^2 - 1$ an der Stelle $x_0 = 2$ differenzierbar ist.

Zunächst zeigen wir die **Stetigkeit** an der Stelle $x_0 = 2$:

Linksseitiger Limes: $\lim\limits_{h \to 0} f(2-h) = \lim\limits_{h \to 0} [(2-h)^2 - 1] = \lim\limits_{h \to 0} (4 - \overset{\to 0}{4\,h} + \overset{\to 0}{h^2} - 1) = 4 - 1 = \mathbf{3}$

Rechtsseitiger Limes: $\lim\limits_{h \to 0} f(2+h) = \lim\limits_{h \to 0} [(2+h)^2 - 1] = \lim\limits_{h \to 0} (4 + \overset{\to 0}{4h} + \overset{\to 0}{h^2} - 1) = 4 - 1 = \mathbf{3}$

Der links- und rechtsseitige Limes der Funktion (=Differentialquotient) ist an der Stelle $x_0 = 2$ gleich und damit die Funktion f an dieser Stelle stetig.

Jetzt die **Differenzierbarkeit**:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2) - f(2-h)}{2 - (2-h)} = \lim_{h \to 0} \frac{(2^2 - 1) - [(2-h)^2 - 1]}{2 - 2 + h} = \lim_{h \to 0} \frac{4 - 1 - (4 - 4\,h + h^2 - 1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4 - 1 - 4 + 4\,h - h^2 + 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4\,h - h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overset{1}{\cancel{h}} \cdot (4-h)}{\underset{1}{\cancel{h}}} = \lim_{h \to 0} (4 - \overset{\to 0}{h}) = \mathbf{4}$$

VOR der Grenzwertbestimmung:
h herausheben und kürzen.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{(2+h) - 2} = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 1 - (2^2 - 1)}{2 + h - 2} = \lim_{h \to 0} \frac{4 + 4\,h + h^2 - 1 - (4-1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4 + 4\,h + h^2 - 1 - 4 + 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4\,h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overset{1}{\cancel{h}} \cdot (4+h)}{\underset{1}{\cancel{h}}} = \lim_{h \to 0} (4 + \overset{\to 0}{h}) = \mathbf{4}$$

Auch der links- und rechtsseitige Limes des Differenzenquotienten (=Differentialquotient) ist an der Stelle $x_0 = 2$ gleich und damit die Funktion f an dieser Stelle differenzierbar.

Beispiel: Ermitteln Sie die (erste) Ableitung der Funktion g mit Hilfe der Limes-Definition.

$$g(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{x+h}}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{\sqrt{x+h}\cdot\sqrt{x}}}{\frac{h}{1}} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{\sqrt{x+h}\cdot\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{\sqrt{x+h}\cdot\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}}\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x+h})\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}{(\sqrt{x+h}\cdot\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}\cdot\frac{1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x-(x+h)}{\sqrt{x+h}\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\cdot\sqrt{x+h}\cdot\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x-x-h}{\sqrt{x+h}\cdot x+\sqrt{x}\cdot(x+h)}\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\overset{-1}{\cancel{-h}}}{\underbrace{\sqrt{x+h}}_{\to 0}\cdot x+\sqrt{x}\cdot\underbrace{(x+h)}_{\to 0}}\cdot\frac{1}{\cancel{h}} =$$

(a–b) . (a+b) = a²–b²

$$= \frac{-1}{\sqrt{x}\cdot x+\sqrt{x}\cdot x} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\cdot\boldsymbol{x}\cdot\sqrt{\boldsymbol{x}}} \quad \text{bzw.} \quad -\frac{1}{2\cdot x^1\cdot x^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2\cdot x^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^3}}$$

Beispiel: Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an die Funktion $g(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}$ an der Stelle $x_0 = 1$.

$$y = g(1) = \frac{1}{\sqrt{1}} = \frac{1}{1} = \mathbf{1}$$

$$k = g'(1) = -\frac{1}{2\cdot 1\cdot\sqrt{1}} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

$$t: \boldsymbol{y} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} + d$$

$$\mathbf{1} = -\frac{1}{2}\cdot\mathbf{1} + d \quad \Big| +\frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{d} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$$

$$\boldsymbol{t}: \boldsymbol{y} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\cdot\boldsymbol{x} + \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$$ Siehe auch 7.3.1., S 357 f

Übung

1) Überprüfen Sie die Stetigkeit und Differenzierbarkeit folgender Funktionen an den angegebenen Stellen:

a) $f(x) = \frac{1}{8}\,x^2 + 2$ an der Stelle $x_1 = -1$

b) $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ an der Stelle $x_1 = 1$

c) $P(t) = \frac{t^2-2\,t}{t^2-4}$ an der Stelle $t_1 = 2$

2) a) Ermitteln Sie die (erste) Ableitung der Funktion g mit Hilfe der Limes-Definition.

$$aa)\ f(x) \coloneqq \frac{1}{x^2} \qquad ab)\ f(x) \coloneqq (1-x)^2$$

b) Geben Sie für die Funktionen der Aufgabe 2) a) die Gleichungen der Tangenten an.

Für $aa)$ an der Stelle $x = -1$ für $ab)$ an der Stelle $x = 0$

Lösungen:

1) a) Stetig an der Stelle $x_1 = -1$, weil linksseitiger = rechtseitiger Limes = 2.125.
Differenzierbar an der Stelle $x_1 = -1$, weil links- und rechtsseitiger Limes des Differenzenquotienten (= Differentialquotient) = – 0.25

b) Nicht stetig an der Stelle $x_1 = 1$, weil linksseitiger Limes → $-\infty$ und rechtsseitiger Limes → $+\infty$
Damit auch nicht differenzierbar an der Stelle $x_1 = 1$, weil die Stetigkeit ein notwendiges Kriterium für die Differenzierbarkeit ist.

c) **!** Zuerst Zähler und Nenner zerlegen und kürzen!
Stetig an der Stelle $t_1 = 2$, weil linksseitiger = rechtseitiger Limes = 0.5
Differenzierbar an der Stelle $t_1 = 2$, weil links- und rechtsseitiger Limes des Differenzenquotienten (=Differentialquotient) = 0.125

2) a) aa) $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$ ab) $f(x) = -2\,(1-x)$ b) aa) $t: y = 2\,x + 3$ ab) $t: y = 2\,x + 1$

9.3. Ableitungsregeln

Differenzieren nennt man auch **Ableiten**.

9.3.1. Potenzregel

Diese Regel gibt an, wie Potenzen der Form x^r mit x als der abhängigen Variablen und $r \in \mathbb{R}$ differenziert werden.

Die Regel lautet:

$$\boxed{f(x) = x^r \qquad f'(x) = r \cdot x^{r-1}}$$

Beispiel: $f(x) = x^3 \qquad f'(x) = 3 \cdot x^2$

Die Potenzregel darf NUR dann angewendet werden, wenn in der Basis der Potenz nur die Variable steht und sich die Potenz nicht im Nenner befindet!

So wäre die Anwendung der Potenzregel bei Funktionen folgender Form **falsch** :

Beispiel: $f(x) = (4x - 5)^3 \qquad \cancel{f'(x) = 3 \cdot (4x - 5)^2}$

Da in der Basis dieser Potenz nicht nur die Variable x steht (sondern $4x - 5$), darf **nicht** mit der Potenzregel differenziert werden!

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{x^3} \qquad \cancel{f'(x) = \frac{1}{3 \cdot x^2}}$

Da die Potenz im Nenner steht, darf **nicht** mit der Potenzregel differenziert werden!

Betrachten wir weitere **Beispiele**, die mit der Potenzregel abzuleiten sind:

$f(x) = x^5 \qquad f'(x) = 5 \cdot x^4$

$f(x) = x^{-3} \qquad f'(x) = -3 \cdot x^{-4}$

$f(x) = x = x^1 \qquad f'(x) = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1$

$x^0 = 1$

$x = x^1 \neq x^0$

$f(x) = x^{\frac{3}{2}} \qquad f'(x) = \frac{3}{2}\, x^{\frac{1}{2}}$

Beispiel: $f(x) = 4 \cdot x^3 \qquad f'(x) = 4 \cdot 3 \cdot x^2 = 12\,x^2$

Beachten Sie, dass die Basis der Potenz in der Funktion $f(x) = 4\,x^3$ nur aus der Variablen x besteht! Die Vorrangregeln klären eindeutig, dass Hoch– vor Punktrechnung kommt!

Stünde in der Basis der Potenz 4x, was nur bei $(4x)^3$ der Fall wäre, dürfte die Potenzregel nicht zur Anwendung kommen!

Konstante Faktoren (. :) werden **unverändert in die Ableitung** übernommen.

$$f(x) = k \cdot x^r \qquad f'(x) = k \cdot r \cdot x^{r-1}$$

Dieser Buchstabe ist die **Variable**, nach der **differenziert** wird.
Alle anderen Buchstaben gelten als Konstanten.

Weitere **Beispiele:**

$f(x) = \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot x^2$ $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x = x$

$f(x) = \frac{4x^6}{3} = \frac{4}{3} \cdot x^6$ $f'(x) = \frac{4}{3} \cdot 6 \cdot x^5 = 8x^5$

$f(x) = -\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{5} = -\frac{2}{5} \cdot x^{\frac{3}{2}}$ $f'(x) = -\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} = -\frac{3}{5}x^{\frac{1}{2}}$

Beispiel:

$f(x) = \frac{1}{x^3} \underset{\uparrow}{=} x^{-3}$ $f'(x) = -3 \cdot x^{-4} \underset{\uparrow}{=} -3 \cdot \frac{1}{x^4} = -\frac{3}{x^4}$

P 4 Siehe 2.2.2., S 77 P 4

Potenzen im Nenner müssen **vor dem Differenzieren** nach der Regel $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ **aus dem Nenner** gebracht werden (ausgenommen bei der Quotientenregel (9.3.5., S 448 f))!

$f(x) = \frac{4}{x^6} = 4 \cdot x^{-6}$ $f'(x) = 4 \cdot (-6) \cdot x^{-7} = -24 \cdot x^{-7} = -24 \cdot \frac{1}{x^7} = -\frac{24}{1} \cdot \frac{1}{x^7} = -\frac{24}{x^7}$

$f(x) = -\frac{5}{4x^2} = -\frac{5}{4}\frac{1}{x^2} = -\frac{5}{4}x^{-2}$ $f'(x) = -\frac{5}{4}(-2)x^{-3} = \frac{5}{2}x^{-3} = \frac{5}{2x^3}$

Falsch wäre folgende Umformung: $-\frac{5}{4x^2} = -5 \cdot 4x^{-2}$

Nur für die Potenz, also die Hochrechnung, gibt es die Kehrwertregel P4.
Die 4 im Nenner ist mit x^2 nachrangig mit Punktrechnung verbunden, also bloß ein Faktor der Potenz x^2!

Es ist ja auch $-\frac{5}{4} = -1.25 \neq -5 \cdot 4 = -20$

Beispiel: $f(x) = \sqrt[3]{x^5} = x^{\frac{5}{3}}$ $\qquad f'(x) = \frac{5}{3}\, x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3} \sqrt[3]{x^2}$

P 6 2.2.2., S 79 $\qquad$ P 6

Wurzeln müssen **vor dem Differenzieren** nach der Regel $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$ **in Potenzen** verwandelt werden!

Beispiel: $f(x) = \sqrt{x} = \sqrt[2]{x^1} = x^{\frac{1}{2}}$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{2}\, x^{-\frac{1}{2}} \overset{①}{=} \frac{1}{2} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \overset{②}{=} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2.\sqrt{x}}$

① Zuerst die Potenz mit negativer Hochzahl in den Nenner bringen.
② Dann die Potenz mit Bruchhochzahl in eine Wurzel verwandeln.

Beispiel: $f(x) = 2 = 2 \cdot 1 = 2 \cdot x^0$ $\qquad f'(x) = 2 \cdot 0 \cdot x^{-1} = 0$

P 3 2.2.2., S 76

Da man sich jede Konstante mit 1 bzw. x^0 multipliziert vorstellen kann, wird in der Ableitung eines konstanten Gliedes stets der Faktor Null vorkommen und damit das Ergebnis immer Null sein

$$\mathbf{f(x) = k \rightarrow f'(x) = 0}$$

Dieser Buchstabe ist die **un**abhängige Variable, nach der differenziert wird.

Ein **konstantes Glied** (+ ; –) ergibt **abgeleitet Null**.

$f(x) = -\frac{3}{2}$ $\qquad f'(x) = 0$

$f(x) = \pi$ $\qquad f'(x) = 0$

$f(x) = a^3$ $\qquad f'(x) = 0$

$f(a) = a^3$ $\qquad f'(a) = 3a^2$

Beispiel: f(x) $= 6\,x^2 - 4\,x + 3 = 6\,x^2 - 4\,x^1 + 3\,x^0$ $\qquad f'(x) = 6 \cdot 2 \cdot x^1 - 4 \cdot 1 \cdot x^0 + 3 \cdot 0 \cdot x^{-1} = 12\,x - 4$

Man darf **gliedweise** (+ –) **getrennt differenzieren**.

Beispiel: $f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ $\qquad f'(x) = a \cdot 3 \cdot x^2 + b \cdot 2 \cdot x + c \cdot 1 = 3\,a\,x^2 + 2\,b\,x + c$

Höhere Ableitungen werden mit der gleichen Regel bestimmt.

Beispiel: $f(x) = \frac{3}{2} \cdot x^4 - x^3 + \frac{1}{4} \cdot x^2 - 1$

$$f^{I}(x) = \frac{3}{2} \cdot 4 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot x^1 - 0 = 6 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot x$$

$$f^{II}(x) = 6 \cdot 3 \cdot x^2 - 3 \cdot 2 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x^0 = 18 \cdot x^2 - 6 \cdot x + \frac{1}{2}$$

$$f^{III}(x) = 18 \cdot 2 \cdot x - 6 \cdot 1 \cdot x^0 + 0 = 36 \cdot x - 6$$

$$f^{IV}(x) = 36 \cdot 1 \cdot x^0 - 0 = 36$$

$$f^{V}(x) = 0$$

Bemerkung: Die „Striche“ bei den Ableitungen sind eigentlich römische Zahlen ohne die Querstriche.

Wie viele Ableitungen kann man bilden, bis alle weiteren Ableitungen Null ergeben?

Immer um eine mehr als der Grad der Polynomfunktion.

Beispiel: $U(t) = t^3 - t^2 + 1$

$$U^{I}(t) = 3\,t^2 - 2t$$

$$U^{II}(t) = 6\,t - 2$$

$$U^{III}(t) = 6$$

$$U^{IV}(t) = 0$$

Herleitung der Potenzregel (des Differenzierens):

$$f(x) = x^n$$

$$\boldsymbol{f'(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$

Siehe 9.2., S 427 f

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\binom{n}{0} \cdot x^n \cdot h^0 + \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} \cdot h^1 + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot h^2 + \,.\,.\,.\,.\,. + \binom{n}{n-1} \cdot x^1 \cdot h^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot x^0 \cdot h^n \; - \; x^n}{h}$$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \,.\,.\,.\,.\,. + \binom{n}{n-1} \cdot a^1 \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot a^0 \cdot b^n$$

Siehe 2.2.5., S 87 f

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^n} + \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} \cdot h^1 + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot h^2 + \,.\,.\,.\,.\,. + \binom{n}{n-1} \cdot x^1 \cdot h^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot x^0 \cdot h^n \; - \; \cancel{x^n}}{h}$$

$$\binom{n}{0} \cdot x^n \cdot h^0 = 1 \cdot x^n \cdot 1 = x^n$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot \left[\binom{n}{1} \cdot x^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot h^1 + \,.\,.\,.\,.\,. + \binom{n}{n-1} \cdot x^1 \cdot h^{n-2} + \binom{n}{n} \cdot x^0 \cdot h^{n-1}\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\overset{1}{\cancel{h}} \cdot \left[\binom{n}{1} \cdot x^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot h^1 + \,.\,.\,.\,.\,. + \binom{n}{n-1} \cdot x^1 \cdot h^{n-2} + \binom{n}{n} \cdot x^0 \cdot h^{n-1}\right]}{\underset{1}{\cancel{h}}}$$

$$= \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} \; = \; \boldsymbol{n \cdot x^{n-1}}$$

Alle Glieder, die den Faktor h besitzen, werden Null.

Übung Bilden Sie von folgenden Funktionen jeweils die 1. Ableitung und vereinfachen Sie das Ergebnis.

1) $f(x) = x$ 2) $f(x) = -x$ 3) $f(x) = x^0$ 4) $f(x) = \frac{4}{3} \cdot x^3$ 5) $f(x) = a\,x$

6) $f(a) = a\,x$ 7) $f(t) = \frac{t^2}{2}$ 8) $a(t) = a_0\,t$ 9) $f(t) = \frac{2}{t^2}$ 10) $I(t) = \varepsilon_0 \cdot \frac{1}{t}$

11) $W(x) = \sqrt{x^3}$ 12) $U(t) = 220$ 13) $v(t) = \frac{a}{2} \cdot t^2 + 2\,t$ 14) $K(m) = Nm - \frac{4}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$

15) $S(t) = \frac{\sin(30°)}{t^2}$ 16) $2 - \frac{1}{x} + f(x) = 0$ 17) $A(T_2) = \frac{R}{K-1} \cdot (T_1 - T_2)$

18) $c_1(n) = c + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ 19) $I(b) = \frac{1}{12} \cdot (BH^3 - bh^3)$ 20) $f(w) = w \cdot \frac{2}{w^2}$

21) $p(x) = 2x^3 + \sqrt{x} - 1$

Lösungen:

1) $f'(x) = 1$ 2) $f'(x) = -1$ 3) $f'(x) = 0$ 4) $f'(x) = 4\,x^2$ 5) $f'(x) = a$

6) $f'(a) = x$ 7) $f'(t) = t$ 8) $a'(t) = a_0$ 9) $f'(t) = -\frac{4}{t^3}$ 10) $I'(t) = -\frac{\varepsilon_0}{t^2}$

11) $W'(t) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ 12) $U'(t) = 0$ 13) $v'(t) = a\,t + 2$ 14) $K'(m) = N$

15) $S'(t) = -\frac{2 \cdot \sin(30°)}{t^3} = -\frac{1}{t^3}$ 16) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ 17) $A'(T_2) = -\frac{R}{K-1}$

18) $c_1'(n) = \frac{2\,v}{n^3}$ 19) $I'(b) = -\frac{1}{12}\,h^3$ 20) $f'(w) = -\frac{2}{w^2}$ 21) $p'(x) = 6\,x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

9.3.2. Ableitungen spezieller Funktionen

9.3.2.1. Winkelfunktionen

Ohne Herleitung:

$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$f(x) = \cot(x)$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$

Bemerkung: $\cos^2(x) = [\cos(x)]^2 = \cos(x) \cdot \cos(x)$ $\quad$ $\sin^2(x) = [\sin(x)]^2 = \sin(x) \cdot \sin(x)$

Beispiele: $f(x) = 2 \cdot \cos x$ $\quad$ $f'(x) = -2 \cdot \sin x$

$$P(x) = \frac{3 \cdot \sin(x)}{4} - \sqrt[3]{x^2} = \frac{3}{4} \cdot \sin(x) - x^{\frac{2}{3}}$$

$$P'(t) = \frac{3}{4} \cdot \cos(x) - \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{3}{4} \cdot \cos(x) - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{3}{4} \cdot \cos(x) - \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$$

Weitere Beispiele siehe 9.3.3., S 445 f

9.3.2.2. Exponential- und Logarithmusfunktionen

Ohne Herleitung:

$\mathbf{f(x) = e^x}$	$\mathbf{f\,'(x) = e^x}$
$\mathbf{f(x) = a^x}$	$\mathbf{f\,'(x) = a^x \cdot \ln(a)}$
$\mathbf{f(x) = \ln(x)}$	$\mathbf{f\,'(x) = \frac{1}{x}}$
$\mathbf{f(x) = \log_a(x)}$	$\mathbf{f\,'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}}$

Beispiele:

$f(x) = \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2} \cdot e^x \qquad f\,'(x) = \frac{1}{2} \cdot e^x$

$f(x) = 3 \cdot 3^x \qquad f\,'(x) = 3 \cdot 3^x \cdot \ln(3) = 3^{1+x} \cdot \ln(3)$

$f(x) = \frac{3\ln(x)}{2} = \frac{3}{2} \cdot \ln(x) \qquad f\,'(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{2x}$

$S(u) = 2 \cdot \log_2(u) \qquad S\,'(u) = 2 \cdot \frac{1}{u \cdot \ln(2)} = \frac{2}{u \cdot \ln(2)}$

Übung Bilden Sie von folgenden Funktionen jeweils die 1. Ableitung.

1) $f(x) = -\sin x + 2\tan x$ 2) $f(x) = -2 \cdot 2^x + a\,x$

3) $g(x) = -\frac{\tan x}{8} - \frac{e^x}{4}$ 4) $A(m) = \frac{4}{\sqrt{m^5}} - 5\log_5(m) + e^{x^2-1}$

5) $S(T) = 2\,e^{\pi}\,e^{T}$

Lösungen: 1) $f\,'(x) = -\cos x + 2\,\frac{1}{\cos^2 x}$ 2) $f\,'(x) = -2 \cdot 2^x \cdot \ln(2) + a = -2^{1+x} \cdot \ln(2) + a$

3) $g\,'(x) = -\frac{1}{8\cos^2 x} - \frac{e^x}{4}$

4) $A\,'(m) = -\frac{10}{\sqrt{m^7}} - \frac{5}{m \cdot \ln(5)} = -5 \cdot \left(\frac{2}{m^3 \cdot \sqrt{m}} + \frac{1}{m \cdot \ln(5)}\right)$ 5) $S'(T) = 2\,e^{\pi}\,e^{T}$

9.3.3. Kettenregel (Chain Rule)

Die Kettenregel **muss** angewendet werden

① wenn in der **Basis** der Potenz **nicht nur die** (unabhängige) **Variable** steht:

Beispiel: $f(x) = (2\,x - 1)^2$

In der Basis der Potenz steht nicht nur die Variable x , sondern $2\,x - 1$

Wir setzen die Basis gleich einer **Hilfsvariablen z**.

$f(x) = z^2$ z stellt keine Konstante dar, da ja $z = 2\,x - 1$ ist.

Nun differenzieren wir zunächst $f(x)$ nach z (**äußere** Ableitung) und dann z nach x (**innere** Ableitung):

$$f'(x) = \underbrace{2 \cdot z^1}\ \cdot\ \underbrace{z'} = 2 \cdot z \cdot z' = 2 \cdot (2x - 1) \cdot 2 = 4 \cdot (2x - 1)$$

äußere . innere Ableitung

Am Ende wird statt z der ursprüngliche Ausdruck eingesetzt.

$z = 2\,x - 1$ $z' = 2$

Formal:

$$f'(x) = \frac{d\,f(x)}{d\,x} = \underbrace{\frac{d\,f(x)}{\cancel{d\,z}}} \cdot \underbrace{\frac{\cancel{d\,z}}{d\,x}}$$

äußere . innere Ableitung

Kettenregel:

$$\left(\boxed{}^{\,n}\right)' = n.\boxed{}^{\,n-1} . \boxed{}'$$

oder: **äußere** Ableitung mal **innere** Ableitung

Beispiel: $f(x) = 6 \cdot \sqrt[3]{1-x^2} = 6 \cdot (\underbrace{1-x^2}_{z})^{\frac{1}{3}} = 6 \cdot z^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt[3]{1-x^2} \neq \sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{x^2}$

$$f'(x) = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot z^{-\frac{2}{3}} \cdot z' = 2 \cdot \frac{1}{z^{\frac{2}{3}}} \cdot z' = \frac{2\,z'}{\sqrt[3]{z^2}} = \frac{2 \cdot (-2x)}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}} = -\frac{4\,x}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$$

$z = 1 - x^2 \qquad z' = -2\,x$

Am besten, man tätigt die Umformungen nach dem Differenzieren mit z und z' und setzt erst am Ende die entsprechenden Ausdrücke dafür ein.

Beispiel: $f(x) = \frac{2}{4-x} = \frac{2}{(4-x)^1} = 2 \cdot (\underbrace{4-x}_{z})^{-1} = 2 \cdot z^{-1}$

$$f'(x) = 2 \cdot (-1) \cdot z^{-2} \cdot z' = -2 \cdot \frac{1}{z^2} \cdot z' = -\frac{2 \cdot z'}{z^2} = -\frac{2 \cdot (-1)}{(4-x)^2} = \frac{-2}{-(4-x)^2} = \frac{2}{(4-x)^2}$$

$z = 4 - x \qquad z' = -1$

FALSCH wäre $\frac{2}{4-x} = 2 \cdot (4^{-1} - x^{-1})$ umzuformen!

Man darf **NUR faktorenweise getrennt hochrechnen**, aber niemals gliedweise!

② wenn im **Exponenten** von Exponentialfunktionen bzw.
im **Argument** von Winkel- und Logarithmusfunktionen
} **nicht nur die** (unabhängige) **Variable** steht.

Beispiel: $f(x) = 2 \cdot e^{\overbrace{1-2x}^{z}} = 2 \cdot e^{z}$

$$f'(x) = 2 \cdot e^{z} \cdot z' = 2 \cdot e^{1-2x} \cdot (-2) = -4 \cdot e^{1-2x}$$

$z = 1 - 2\,x \qquad z' = -2$

Beispiel: $U(t) = \frac{1}{2} \cdot \sin(\underbrace{\omega \cdot t + \varphi}_{z}) = \frac{1}{2} \cdot \sin(z)$

$$U'(t) = \frac{1}{2} \cdot \cos(z) \cdot z' = \frac{1}{2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) \cdot \omega = \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

$z = \omega \cdot t + \varphi \qquad z' = \omega$

9.3.4. Produktregel

Die Produktregel **muss** angewendet werden, wenn die (unabhängige) **Variable in beiden Faktoren** vorkommt.

Ohne Herleitung:

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = u(x) \cdot v(x) \qquad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}}$$

$$\boldsymbol{f(x) = u(x) \cdot v(x)} \qquad \cancel{\boldsymbol{f'(x) = u'(x) \cdot v'(x)}}$$

Man darf nur gliedweise (+ −) und NICHT faktorenweise (. :) getrennt differenzieren!

Beispiel: $f(x) = \underbrace{x^2}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^{\sin(x)}}_{v(x)}$ . . . x kommt in beiden Faktoren vor -> Produktregel

$u(x) = x^2 \qquad\qquad u'(x) = 2\,x$

$v(x) = e^{\overbrace{\sin(x)}^{z}} = e^z \qquad v'(x) = e^z \cdot z' = e^{\sin(x)} \cdot \cos(x)$

$z = \sin(x) \qquad z' = \cos(x)$

$$f'(x) = \underbrace{2 \cdot x}_{u'(x)} \cdot \underbrace{e^{\sin(x)}}_{v(x)} + \underbrace{x^2}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^{\sin(x)} \cdot \cos(x)}_{v'(x)} = x \cdot e^{\sin(x)} \cdot [2 + x \cdot \cos(x)]$$

Alle Umformungen in den Nebenrechnungen durchführen, bevor man in die Formel der Produktregel einsetzt!

9.3.5. Quotientenregel

Die Quotientenregel **muss** angewendet werden, wenn die (unabhängige) **Variable im Zähler und Nenner** vorkommt.

Ohne Herleitung:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \qquad f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ $\cancel{f'(x) = \frac{u'(x)}{v'(x)}}$

Man darf nur gliedweise (+ −) und NICHT faktorenweise (. :) getrennt differenzieren!

Beispiel: $f(x) = \dfrac{\overbrace{\sqrt{x^2-1}}^{u(x)}}{\underbrace{e^{2x}}_{v(x)}}$ . . . x kommt im Zähler und Nenner vor -> Quotientenregel

$$u(x) = \sqrt{x^2-1} = (x^2-1)^{\frac{1}{2}} = z^{\frac{1}{2}}$$

$$u'(x) = \frac{1}{2} \cdot z^{-\frac{1}{2}} \cdot z' = \frac{1 \cdot z'}{2 \cdot z^{\frac{1}{2}}} = \frac{z'}{2 \cdot \sqrt{z}} = \frac{2\,x}{2 \cdot \sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$z = x^2 - 1 \qquad z' = 2x$

$$v(x) = e^{2x} = e^t$$

$$v'(x) = e^t \cdot t' = e^{2x} \cdot 2 = 2\,e^{2x}$$

$z_2 = 2x \qquad z_2' = 2$

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \cdot e^{2x} - \sqrt{x^2-1} \cdot 2 \cdot e^{2x}}{(e^{2x})^2} = \frac{\overset{1}{\cancel{e^{2x}}} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - 2 \cdot \sqrt{x^2-1}\right)}{\underset{1}{\cancel{e^{2x}}} \cdot e^{2x}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{2 \cdot \sqrt{x^2-1}}{1}}{e^{2x}} =$$

$$= \frac{\frac{x - 2 \cdot \sqrt{x^2-1} \cdot \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}}{e^{2x}} = \frac{\frac{x - 2 \cdot (x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}}}{e^{2x}} = \frac{\frac{x - 2x^2 + 2}{\sqrt{x^2-1}}}{e^{2x}} =$$

$$= \frac{\frac{x - 2x^2 + 2}{\sqrt{x^2-1}}}{\frac{e^{2x}}{1}} = \frac{x - 2x^2 + 2}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{1}{e^{2x}} = \frac{x - 2x^2 + 2}{\sqrt{x^2-1} \cdot e^{2x}} = \frac{-2x^2 + x + 2}{e^{2x} \cdot \sqrt{x^2-1}}$$

Bei der Quotientenregel gilt umso mehr: Alle Umformungen in den Nebenrechnungen durchführen, bevor man in die Formel der Quotientenregel einsetzt!

Wer beim Rechnen mit Bruchtermen nicht sattelfest ist: 2.4.2. – 2.4.4, S 98 – S 103

Übung Bilden Sie jeweils die erste Ableitung und vereinfachen Sie diese soweit wie möglich:

1) $f(x) = 3 \cdot \sqrt[3]{3-x}$ 2) $P(t) = \frac{1}{t^2-t}$ 3) $u(t) = \frac{1}{4} \cdot \cos(\omega t - \varphi)$

4) $G(r) = \varepsilon_0 \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ 5) $f(x) = 2 \cdot \log_2(2x)$ 6) $g(z) = \frac{a}{a-z}$

7) $h(x) = e^{x^2 \cdot \sin(x)}$ 8) $f(m) = m_0 \cdot tan(m^2 - m)$ 9) $f(t) = 2 \cdot \sin(t) \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(t)$

10) $m(x) = e^{e^x} \sin(e^x)$ 11) $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ 12) $T(t) = 2^{\frac{e^{t^2-t}}{\sin(t)}}$ 13) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}$

14) $f(x) = sin\left(ln\left(2 \cdot \sin(x) \cdot 3^{x^2}\right)\right)$

Lösungen:

1) $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt[3]{(3-x)^2}}$ 2) $P'(t) = -\frac{2t-1}{(t^2-t)^2}$ 3) $u'(t) = -\frac{1}{4}\,\omega \sin(\omega t - \varphi)$

4) $G'(r) = -\frac{2\,\varepsilon_0\, m_1\, m_2}{r^3}$ 5) $f'(x) = \frac{2}{x \ln(2)}$ 6) $g'(z) = \frac{a}{(a-z)^2}$

7) $h'(X) = e^{x^2 \cdot \sin(x)} \cdot [2\,x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos^2(x)]$ 8) $f'(m) = m_0 \cdot \frac{2m-1}{\cos^2(m^2-m)} = \frac{m_0(2m-1)}{\cos^2(m^2-m)}$

9) $f'(t) = \cos^2 t - \sin^2 t$ 10) $m'(x) = e^{e^x} \cdot e^x\,(\sin(e^x) + \cos(e^x))$

11) $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ 12) $T'(t) = 2^{\frac{e^{t^2-t}}{\sin(t)}} \cdot \ln(2) \cdot \frac{e^{t^2-t}\,[(2t-1)\sin(t) - \cos(t)]}{\sin^2(t)}$

13) $f'(x) = \frac{x\cos(x) - 2\sin(x)}{x^3}$ 14) $f'(x) = cos\left(ln\left(2 \cdot \sin(x) \cdot 3^{x^2}\right)\right) \cdot \frac{\cos(x) + 2 \cdot \ln(3) \cdot x \cdot \sin(x)}{\sin(x)}$

1. Ableitung von $f(x) = x^2 - x$

```
from sympy import *
x = symbols("x")
```

```
diff(x**2-x, x)
```

$2x - 1$

1. Ableitung von $f(x) = 2\,e^{2x}$

```
from sympy import *
x = symbols("x")
```

```
diff(2*e^(2*x), x)
```

$4e^{2x}$

1. Ableitung von $f(x) = \frac{1}{4}\sin(e^x)$

```
from sympy import *
x = symbols("x")
```

```
diff(1/4*sin(e^x), x)
```

$\frac{e^x \cos(e^x)}{4}$

1. Ableitung von $f(t) = \sqrt[3]{\sin(2t)} \cdot e^{-t}$

```
from sympy import *
t = symbols("t")
```

```
diff(sin(2*t)**(1/3)*e**(-t), t)
```

$-e^{-t}\sqrt[3]{\sin(2t)} + \frac{2e^{-t}\cos(2t)}{3\sin^{\frac{2}{3}}(2t)}$

1. Ableitung von $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$

```
from sympy import *
x, a, b, c = symbols("x a b c")
```

```
diff(a*x**2+b*x+c, x)
```

$2ax + b$

1. Ableitung von $f(\boldsymbol{a}) = a\,x^2 + b\,x + c$

```
from sympy import *
x, a, b, c = symbols("x a b c")
```

```
diff(a*x**2+b*x+c, a)
```

x^2

1. und 2. Ableitung von $f(t) = 4\,t^3$

```
from sympy import *
t = symbols("t")
```

```
diff(4*t**3)
```

$12t^2$

```
diff(12*t**2)
```

$24t$

Übersicht

wann welche Ableitungsregel anzuwenden ist

Kommt
- in der Basis
- im Exponenten
- im Argument

NUR die unabhängige **Variable** vor?

Ja

Potenzregel
Formel für **Exponentialfunktionen**
Formel für **Winkel**- bzw. **Logarithmusfunktionen**

Nein

Kettenregel

Kommt die unabhängige **Variable**

in **beiden Faktoren** vor?

Produktregel

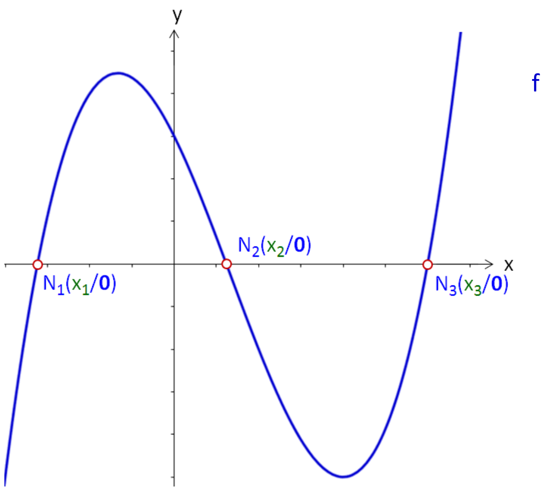
im **Zähler und Nenner** vor?

Quotientenregel

9.4. Anwendungen der Differentialrechnung

9.4.1. Nullpunkte

Nullpunkte bzw. Nullstellen (die x-Koordinaten der Nullpunkte) haben zwar nichts mit Differenzieren zu tun, passen aber gut zur sog. *Kurvendiskussion*, bei der markante Punkte der Funktion bestimmt werden, wie **Nullpunkte**, **Extrema** und **Wendepunkte**.



Nullpunkte sind **Punkte** der Linie, die **auf der x-Achse** liegen.

Alle Punkte auf der x-Achse haben $\boldsymbol{y = 0}$.

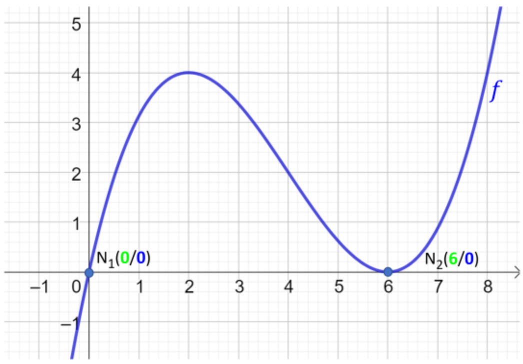
Suchen wir die Nullpunkte, dann wollen wir jene Punkte der Linie mit $\boldsymbol{y = 0}$ bestimmen, also setzen wir

$$\boldsymbol{y = 0}$$

Bemerkung: In der obigen Skizze sind die Nullpunkte der Reihe nach von links nach rechts nummeriert. Es spielt aber keine Rolle, welcher der Nullpunkte mit N_1, N_2 usw. bezeichnet wird.
Die Reihenfolge der Beschriftung ist also **un**erheblich. Wichtig ist, man hat alle Nullpunkte bestimmt.

Beispiel: Bestimmen Sie die Nullpunkte der Funktion $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x$ mit $G = \mathbb{R}$.

Polynomfunktionen sind stetig über $\mathbb{R}$ (stetig für alle reellen Zahlen, also ist $D = \mathbb{R}$.



$f(x) = 0:$

$$0 = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x$$

$$0 = x \cdot \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}\right)$$

$$x_1 = 0 \quad \vee \quad \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{2} = 0$$

$$\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{2} = 0 \;|\,.8$$

$$x^2 - 12x + 36 = 0$$

$$x_{2/3} = 6 \pm \sqrt{6^2 - 36}$$

$$x_{2/3} = 6 \pm \sqrt{36 - 36}$$

$$x_{2/3} = 6 \pm \sqrt{0}$$

$$x_{2/3} = 6 \pm 0$$

$$x_{2/3} = 6$$

$N_1(0/0)$ $N_2(6/0)$

```
solve(1/8*x**3-3/2*x**2+9/2*x,x)
```

```
[x == 6, x == 0]
```

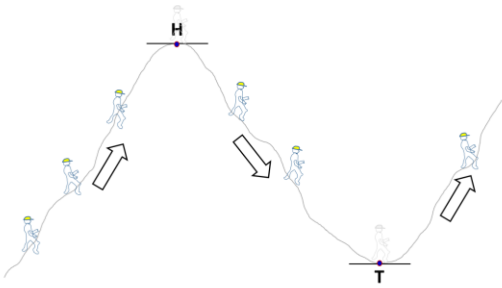
oder:

```
from sympy import Poly, roots

p = Poly(1/8*x**3-3/2*x**2+9/2*x, x)

d = p
print(d)

print(roots(d))
```

```
Poly(1/8*x**3 - 3/2*x**2 + 9/2*x, x, domain='QQ')
{6: 2, 0: 1}
```

9.4.2. Extrema [54]

Greifen wir das Bild einer Bergwanderung auf:



Denken Sie den Funktionsgraphen als Berg- und Tallandschaft, die in Schreibrichtung durchwandert wird.

Zunächst **steigt** es **an**. Kommen wir am höchsten Punkt **H** an, so geht es weder bergauf (positive Steigung) noch bergab (negative Steigung).

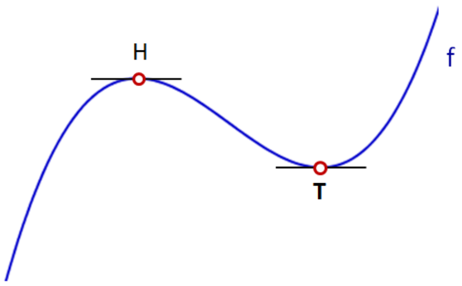
Deshalb gilt für den **Hochpunkt H**
die **Steigung** ist **Null**,
da die **Tangente** hier **waagrecht** liegt.

Gehen wir vom Hochpunkt aus weiter, so geht's **bergab**.
Gelangen wir zum tiefsten Punkt **T**, so geht es weder bergab noch bergauf.

Deshalb gilt für den **Tiefpunkt T**
die **Steigung** ist **Null**,
da die **Tangente** hier **waagrecht** liegt.

Hochpunkt H und **Tiefpunkt T** nennt man die (relativen) **Extrema**.

Relativ höchster bzw. *relativ* tiefster Punkt deshalb, weil ja die unendlich lange Linie des Funktions-Graphen ins negativ- bzw. positiv-Unendliche geht und somit absolut gesehen höhere und tiefere Punkte der Kurve existieren.

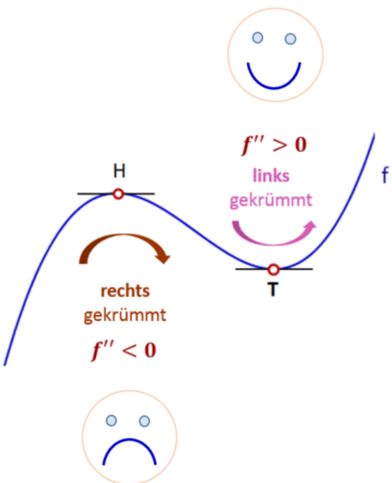


Extrema sind **Punkte** der Kurve mit der **Steigung Null** .

Suchen wir die Extrema, dann wollen wir
jene Punkte der Linie mit der Steigung $\boldsymbol{f'} = \mathbf{0}$ bestimmen,
also setzen wir

$$\boldsymbol{f'} = \mathbf{0}$$

Außerdem gilt:



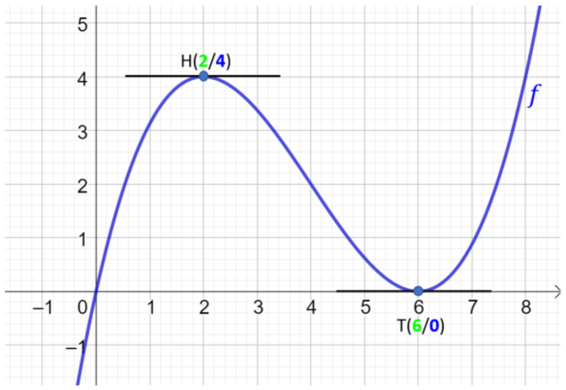
Der **Hochpunkt** (das lokale **Maximum**) liegt im Bereich **rechter Krümmung**.
Rechte Krümmung ist **negativ**, weil hier die Steigung abnimmt.

Der **Tiefpunkt** (das lokale **Minimum**) liegt im Bereich **linker Krümmung**.
Linke Krümmung ist **positiv**, weil hier die Steigung zunimmt.
Siehe auch 9.4.3., S 456

Bemerkung: Mit **positiver** und **negativer** Laune lässt sich die Krümmung gut merken.

[54] Extrema: Plural von Extremum (lateinisch): das Äußerste

Beispiel: Bestimmen Sie die Extrema der Funktion $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x$ mit $G = \mathbb{R}$.



$$y = f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x$$

$$\text{Steigung} = f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - 3x + \frac{9}{2}$$

$$\text{Krümmung} = f''(x) = \frac{3}{4}x - 3$$

$f'(x) = 0$:

$$0 = \frac{3}{8}x^2 - 3x + \frac{9}{2} \quad |.8$$

$$0 = 3x^2 - 24x + 36 \quad | :3$$

$$0 = x^2 - 8x + 12$$

$$x_{1/2} = 4 \pm \sqrt{16 - 12}$$

$$x_{1/2} = 4 \pm \sqrt{4}$$

$$x_{1/2} = 4 \pm 2$$

$$x_1 = 6 \quad \vee \quad x_2 = 2$$

Da wir jetzt nicht, wie bei den Nullpunkten, davon ausgehen können, dass die y-Werte null sind, müssen wir diese berechnen:

$x_1 = 6 \quad f(6) = \frac{1}{8} \cdot 6^3 - \frac{3}{2} \cdot 6^2 + \frac{9}{2} \cdot 6 = 0 \qquad f''(6) = \frac{3}{4} \cdot 6 - 3 = +\frac{3}{2} > 0 \rightarrow$ **T(6/0)**

$x_2 = 2 \quad f(2) = \frac{1}{8} \cdot 2^3 - \frac{3}{2} \cdot 2^2 + \frac{9}{2} \cdot 2 = 4 \qquad f''(2) = \frac{3}{4} \cdot 2 - 3 = -\frac{3}{2} < 0 \rightarrow$ **H(2/4)**

```
from sympy import *
import math
x, y, e, z = symbols("x y e z")

y = 1/8*x**3-3/2*x**2+9/2*x

e = diff(y)
z = diff(e)

solve(e)
```

```
[2, 6]
```

```
[1/8*x**3-3/2*x**2+9/2*x for x in [2, 6]]
```

```
[4, 0]
```

```
z
```

$\frac{3x}{4} - 3$

```
[3*x/4-3 for x in [2, 6]]
```

```
[-3/2, 3/2]
```

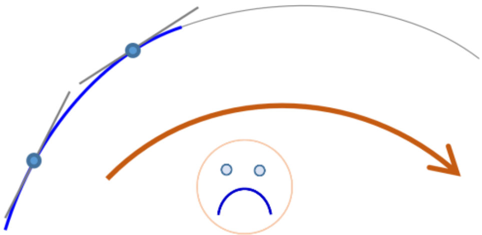
9.4.3. Wendepunkte

© Pixabay

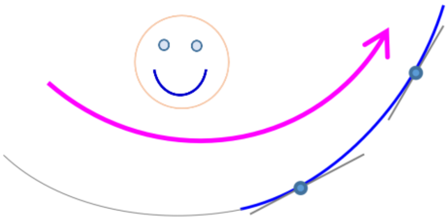
Zunächst erläutert, worum es sich bei der Krümmung handelt:

Die **Krümmung** ist ein Maß, **wie stark sich die Steigung** (also die **Richtung**) **ändert**.

Je stärker die Steigungs-, also Richtungsänderung, *umso stärker* ist die Krümmung.

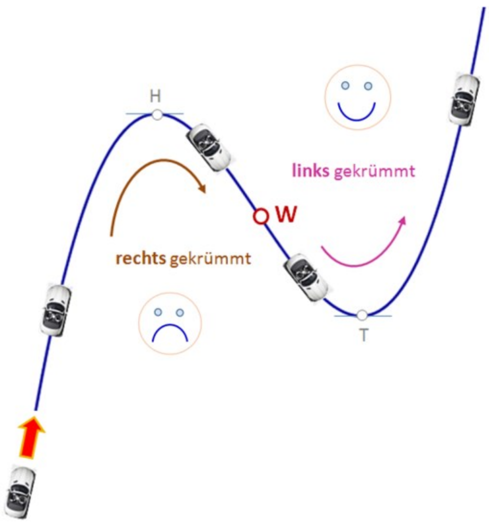


Ist eine **Kurve rechts gekrümmt**,
so **nimmt die Steigung** von links gesehen **ab**.
Deshalb ist **rechte Krümmung negativ**.



Ist eine **Kurve links gekrümmt**,
so **nimmt die Steigung** von links gesehen **zu**.
Deshalb ist **linke Krümmung positiv**.

Somit lässt sich, wie schon auf S 454 angedeutet, mit Hilfe der Krümmung mathematisch zeigen, ob das berechnete (relative) Extremum einen Hochpunkt H oder einen Tiefpunkt T darstellt.



Für die Krümmung denken wir uns eine Straße von oben betrachtet, die wir in Schreibrichtung, also von links kommend, durchfahren.

Zunächst müssen wir nach **rechts** lenken, anfangs leicht, in der Folge stärker, weil die Straße **rechts gekrümmt** ist. Den **stärksten Rechts-Einschlag** verzeichnen wir im **Hochpunkt** H.

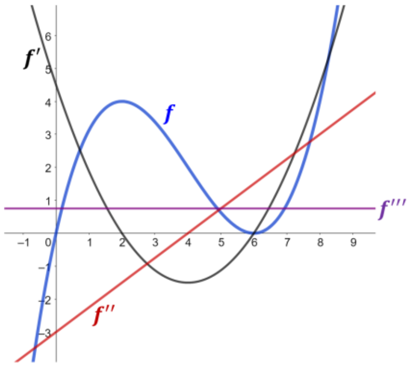
Danach beginnen wir nach links zu lenken, haben aber das Lenkrad noch geraume Zeit rechts der neutralen Geradeaus-Stellung. Erst **im Punkt W** ist das **Steuer für einen Augenblick in Neutralstellung**. Danach **links** davon, weil die Straße ab hier **links gekrümmt** ist. Den **stärksten Links-Einschlag** verzeichnen wir im **Tiefpunkt** T.

Danach beginnen wir wieder nach rechts zu lenken. Das Lenkrad wird jedoch bei diesem Kurvenverlauf nie mehr die Geradeaus-Stellung erreichen oder gar eine rechts davon.

Im sog. **Wendepunkt W** wendet der Krümmungssinn der Kurve. Im Punkt W selbst ist die **Krümmung null**, weil sich das Lenkrad für einen Moment in Neutralstellung befindet, wie auf geraden Straßen.

Wollen wir den **Wendepunkt W** *bestimmen, suchen wir jenen Punkt der Kurve, in dem die* **Krümmung Null** *ist.*
Deshalb setzen wir die Krümmung

$$f'' = 0$$



Außerdem ist

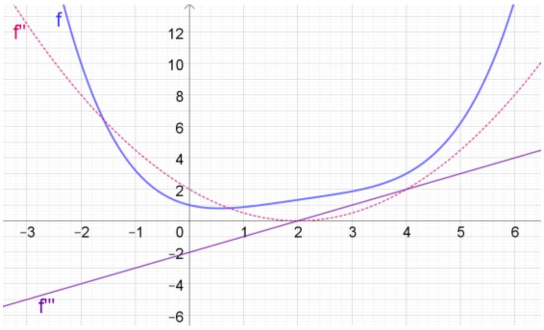
$$f''' \neq 0$$

$f''' < 0$ … Übergang von **linker** zu **rechter** Krümmung

$f''' > 0$ … Übergang von **rechter** zu **linker** Krümmung

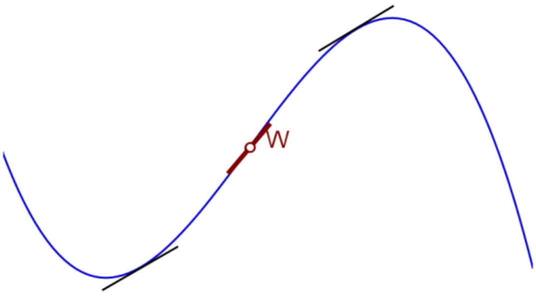
$f''' = 0$ … Flachpunkt

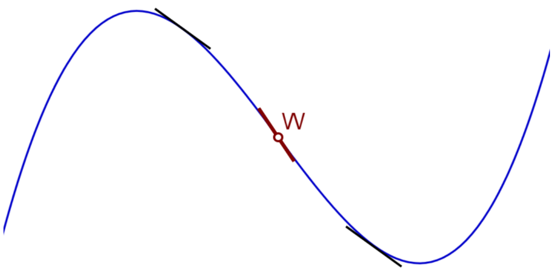
Beispiel für Flachpunkt



An der Stelle $x = 2$ besitzt die Funktion f einen Flachpunkt, weil dort $f'''(2) = 0$ ist.

Weiters gilt:

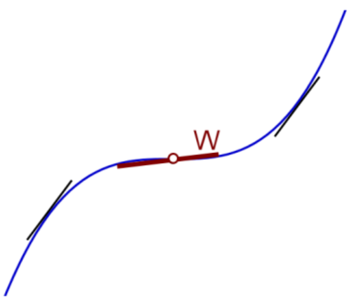


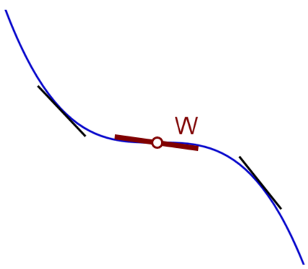


Im Wendepunkt ist der Anstieg am größten (maximal) bzw. das Gefälle am größten (maximal)

Im Wendepunkt ist die **Steigung am größten** (maximal)

oder

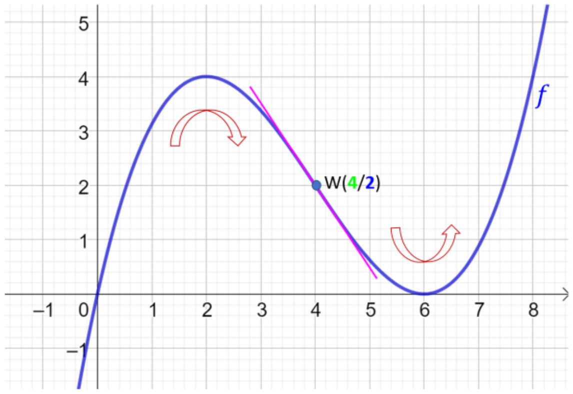




Im Wendepunkt ist der Anstieg am kleinsten (minimal) bzw. das Gefälle am kleinsten (minimal)

Im Wendepunkt ist die **Steigung am kleinsten** (minimal).

Beispiel: Bestimmen Sie den Wendepunkt der Funktion $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x$ mit $G = \mathbb{R}$.



$$y = f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x$$

$$\text{Steigung} = f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - 3x + \frac{9}{2}$$

$$\text{Krümmung} = f''(x) = \frac{3}{4}x - 3$$

$f''(x) = 0$:

$$0 = \frac{3}{4}x - 3 \quad |+3 \quad |:\frac{3}{4} \quad \rightarrow \quad x = 4$$

Auch hier müssen wir die y-Koordinate berechnen, weil wir nicht davon ausgehen können, dass y = 0 ist.

$$f(4) = \frac{1}{8}\cdot 4^3 - \frac{3}{2}\cdot 4^2 + \frac{9}{2}\cdot 4 = 2$$

W(4/2)

Gleichung der Wendetangente:

$$k = f'(4) = \frac{3}{8}\cdot 4^2 - 3\cdot 4 + \frac{9}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$t_W:\ y = k\cdot x + d$$

W(4/2) $\in t_W$: $2 = -\frac{3}{2}\cdot 4 + d \rightarrow d = 8 \rightarrow t_W: y = -\frac{3}{2}x + 8$

Bemerkung: Auf diese Weise kann die Gleichung der **Tangente in jedem Punkt** einer differenzierbaren Funktion bestimmt werden.

```
from sympy import *
import math
x, y, e, z = symbols("x y e z")

y = 1/8*x**3-3/2*x**2+9/2*x

e = diff(y)
z = diff(e)

solve(z)
```

[4]

```
z
```

$\frac{3x}{4} - 3$

```
[1/8*x**3-3/2*x**2+9/2*x for x in [4]]
```

[2]

Übung

[54] Ermitteln Sie die Nullstellen, Extrema, Wendepunkt(e) und Wendetangente folgender Funktionen mit $G = \mathbb{R}$:

1) $f(x) = -\frac{1}{4}x^5 - x$ 2) $f(x) = e^x - e^{-x}$

3) $f(t) = (2t^2 - 1)^2 - 1 - e^{-i\pi}$ 4) $f(x) = \frac{x-4}{x-1}$

5. (a) Zeichnen Sie die Graphen folgender Funktionen und skizzieren Sie die Tangenten bei x = 0, x = 1 und x = −1.

   (b) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion in x = 0 und x = −1

   (i) $f(x) = -2^{\frac{x}{2}-1}$ (ii) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ (iii) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin(2x)$

6. Bestimmen Sie die Tangentengleichung folgender Funktionen an den angegebenen Stellen:

   a) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 - x$ an der Stelle $x_0 = 1$

   b) $f(t) = 0.125 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8} \cdot t - \frac{\pi}{4}\right)$ an der Stelle $x_1 = \frac{\pi}{2}$

   c) $f(x) = cos(e^{2x}) + 2\,x^2 \ln(x+2)$ an der Stelle $x_1 = 0$

7. Ermitteln Sie Nullpunkte (Nullstellen), Extrema und Wendepunkte folgender Funktionen, soweit vorhanden.

   a) $f(x) = 2\,x^2 + 2e^{-i\,\pi}x + 12$ b) $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2$ c) $f(x) = \frac{e^{-x^2}+1}{4}$

[54] Beispiele von bzw. nach Prof. Eibl, FH Salzburg

Lösungen:

1) N(0/0) = W keine Extrema t_W: y = –x

2) N(0/0) = W keine Extrema t_W: y = 2 x

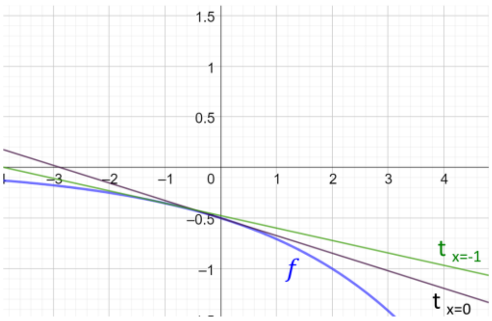
3) $N_1(-\frac{\sqrt{2}}{2}/0) = T_1$ $N_2(\frac{\sqrt{2}}{2}/0) = T_2$ H(0/1)

$W_1(-\frac{\sqrt{6}}{6}/0.44)$ $W_2(\frac{\sqrt{6}}{6}/0.44)$ t_{W1}: y = 2.18 x + 1.33 t_{W2}: y = –2.18 x +1.33

4) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ $\lim_{h\to 0} f(1-h) \to +\infty$ $\lim_{h\to 0} f(1+h) \to -\infty$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$

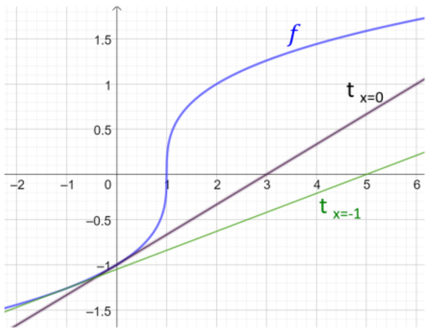
N(4/0) keine Extrema und Wendepunkte.

5. (i) a)



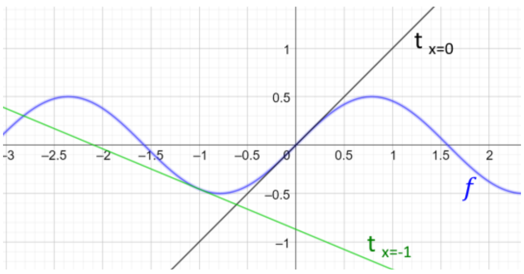
b) $f'(0) = -0.17$ $f'(-1) = -0.12$

(ii) a)



b) $f'(0) = 0.33$ $f'(-1) = 0.21$

(iii) a)



b) $f'(0) = 1$ $f'(-1) = -0.42$

6. a) $y = -0.5$ b) $y = 0.008\,x + 0.09$ c) $y = -1.68\,x + 0.54$

7. a) keine Nullpunkte T(0.5/11.5) keine Wendepunkte

b) $N_1(12/0)$ $N_2 = H(0/0)$ T(8/–32) W(4/–16)

c) keine Nullpunkte H(0/0.5) $W_1(-\frac{\sqrt{2}}{2}/0.40)$ $W_2(\frac{\sqrt{2}}{2}/0.40)$

9.4.4. Bewegungsaufgaben I

Im Folgenden ein Beispiel aus der **Bewegungslehre (Dynamik)** und die entsprechenden Deutungen:

Zunächst einmal die **Bezeichnungen und** ihre **Bedeutungen**:

t ... **Zeit(dauer)**, die seit Beobachtungsbeginn (t = 0) vergangen ist

t kommt vom Lateinischen *tempus*: die Zeit (englisch: *time*)

$s(t)$ ... die momentane **Entfernung von der „Orts-Nullmarke“**, nachdem die Zeitdauer t vergangen ist

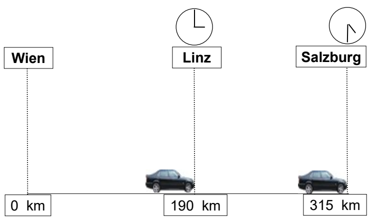
s stammt vom Lateinischen *spatium*: der Weg

$s(t)$ ist nur dann gleich der zurückgelegten Wegstrecke, wenn die Bewegung bei der Orts-Nullmarke begonnen hat und sich weg von der Orts-Nullmarke bewegt!

Fahren wir z.B. um 15.00 von Linz auf der Westautobahn nach Salzburg, dann bewegen wir uns von s (15.00) = 190 km bis s (16.30) = 315 km und haben damit innerhalb der Zeitdauer 16.30 – 15.00 = 1 h 30 min eine Strecke von 315 km – 190 km = 125 km zurückgelegt.

Bemerkung: Die „Nullmarke“ auf der Westautobahn befindet sich in Wien-Auhof.

1 h 30 min $\neq$ 1,30 h 1 h 30 min = 1,5 h



$v(t)$ ... die **momentane Geschwindigkeit**, nachdem die Zeitdauer t vergangen ist.

$$v(t) = s'(t)$$

v stammt vom Lateinischen *velocitas*: die Geschwindigkeit (englisch: *velocity*)


© Pixabay

$a(t)$ ... die **momentane Beschleunigung**, nachdem die Zeitdauer t vergangen ist.

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

a stammt vom Lateinischen *acceleratio*: die Beschleunigung (englisch: *acceleration*)


© unsplash

Ist die Beschleunigung konstant, so schreibt man statt $a(t)$ auch nur a.

Beispiel: [55]

© Pixabay

Die Spitze des Zeigefingers eines Roboters bewegt sich entlang folgender Bahn:

$$s(t) = -\frac{3}{4}\,t^3 + 1.5\,t^2$$

t ... Zeit in Sekunden (s)

$s(t)$ ... Abstand vom Nullpunkt, t Sekunden nach dem Start in Metern (m)

a) Ermitteln Sie den Abstand der Zeigefinger-Spitze vom Ausgangspunkt, ihre Geschwindigkeit und die Beschleunigung zum Zeitpunkt $t = 2$ s.

$$s(t) = -\frac{3}{4}\,t^3 + 1.5\,t^2 \qquad v(t) = s'(t) = -\frac{9}{4}\,t^2 + 3\,t \qquad a(t) = v'(t) = s''(t) = -\frac{9}{2}\,t + 3$$

$$s(2) = -\tfrac{3}{4} \cdot 2^3 + 1.5 \cdot 2^2 = 0 \text{ m}$$

... Die Spitze des Zeigefingers des Roboters befindet sich 2 s nach dem Start wieder am Ausgangsort.

$$v(2) = -\tfrac{9}{4} \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 = -3 \text{ m/s}$$

... Die Spitze des Zeigefingers des Roboters bewegt sich 2 s nach dem Start mit -3 m/s, also in Richtung Ausgangsort.

$$a(2) = -\tfrac{9}{2} \cdot 2 + 3 = -6 \text{ m/s}^2$$

... Die Spitze des Zeigefingers des „menschlichen" Roboters bremst (weil die Beschleunigung negativ ist) 2 s nach dem Start mit -6 m/s².

b) Ermitteln Sie den Zeitpunkt maximaler Geschwindigkeit.

Maximum: $v'(t) = a(t) = 0$: $\quad -\tfrac{9}{2}\,t + 3 = 0 \;\;|\; -3$

$$-\tfrac{9}{2}\,t = -3 \;\;|\; :\left(-\tfrac{9}{2}\right) = \cdot\left(-\tfrac{2}{9}\right)$$

$$t = \tfrac{2}{3}\text{ s}$$

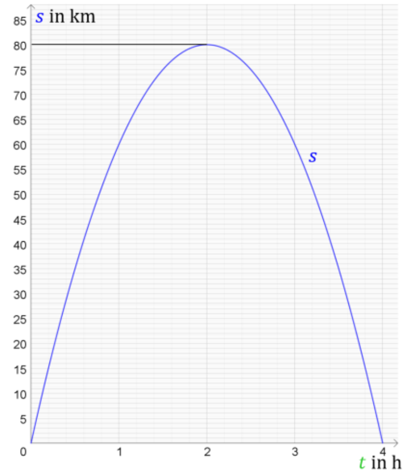
(Ca.) 0,67s nach dem Start erreicht die Fingerspitze des Roboters seine maximale Geschwindigkeit.

Video-Tipp Vollständige KURVENDISKUSSION ganzrationale Funktion – Polynom, Polynomfunktion - Bing video

Video-Tipp Vollständige KURVENDISKUSSION e Funktion – Diskussion e-Funktion - YouTube

[55] Nach einem Beispiel von Prof. Eibl, FH Salzburg

Beispiel: Lesen Sie aus den folgenden Graphen ab, welcher Weg in den dargestellten Intervallen zurückgelegt wurde.

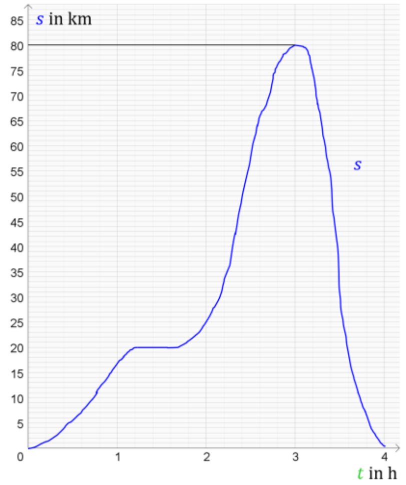


Bei s handelt es sich um den jeweiligen Abstand vom Ortsnullpunkt. Dieser liegt wohl bei $y = s(0) = 0$, bei diesem Beispiel im Koordinatenursprung.

Die Bewegung erfolgt zunächst weg vom Ortsnullpunkt, weil sich der Abstand von diesem mit wachsender Zeitdauer **t** vergrößert.
Der größte Abstand wird **2 h** nach Bewegungsbeginn erreicht und beträgt dann **80 km**.

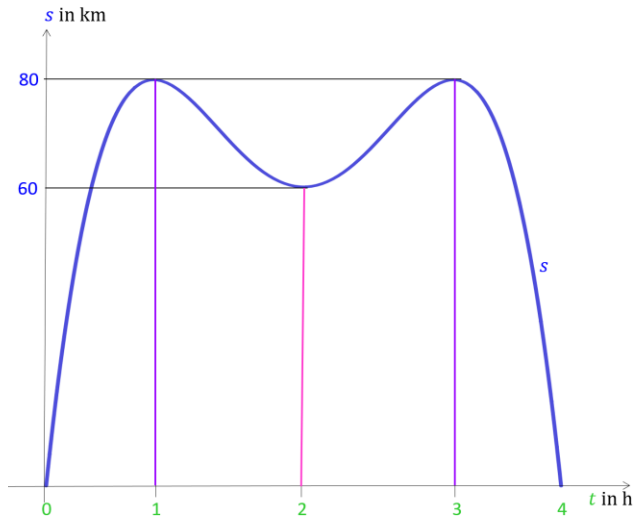
Die Bewegung endet nach insgesamt **4 h** dort, wo sich begonnen hat. Demnach müssen vom entlegensten Punkt wiederum **80 km** bis zum Ortsnullpunkt zurückgelegt worden sein.

Somit beträgt insgesamt der zurückgelegte Weg **160 km**.



Gleiches ist der Fall, wenn die Funktion s den links dargestellten Verlauf besitzt.

Aus der Form des Graphen kann nicht auf die Geländeform geschlossen werden, in der die Bewegung abläuft.



Ist die sogenannte Weg-Zeit-Funktion s nicht durchgehend monoton wachsend und ab einer bestimmten Stelle t_0 durchgehend monoton fallend, so sind folgende Überlegungen vonnöten:

In der ersten Stunde findet die Bewegung weg vom Ortsnullpunkt statt und man befindet sich danach in 80 km vom Ortsnullpunkt. In der zweiten Stunde erfolgt die Bewegung 20 km in Richtung Ortsnullpunkt, weil danach die Entfernung zum Ortsnullpunkt nur noch 60 km beträgt. In der dritten Stunde wird eine Entfernung von weiteren 20 km weg vom Ortsnullpunkt zurückgelegt und in der vierten Stunde werden die 80 km bis zum Ortsnullpunkt zurückgelegt.
Somit beträgt der insgesamt zurückgelegte Weg
80 km + 20 km + 20 km + 80 km = **200 km**

Weitere Aspekte der Bewegungsaufgaben siehe 10.3. Bewegungsaufgaben II, S 505 f

Übung

1. 

© shinhansen - Bing images

Der Hochgeschwindigkeitszug *Shinkansen* verlässt um 7:30 den Hauptbahnhof in Tōkiō. Seine Fahrt kann durch folgende Weg-Zeit-Funktion beschrieben werden:

$$s(t) = \frac{1}{96}\,t^2 + \frac{64}{25}\,t$$

t ... Zeit in Minuten seit Abfahrt des Zuges in Tōkiō
$s(t)$ ... Entfernung in km vom Hauptbahnhof Tōkiō, t Minuten nach Abfahrt des Zuges in Tōkiō

a) Ermitteln Sie, welche Entfernung vom Hauptbahnhof Tōkiō der Zug eine Stunde nach Abfahrt hat.

b) Endstation ist die Stadt Kyōto, die 475 km von Tōkiō entfernt ist.
Ermitteln Sie die Fahrzeit, die der Zug von Tōkyō bis Kyōto benötigt.

2. Ein Auto fährt auf einer geraden Strecke. $x(t) = t^{1/4}\ln(2t^2+1) - 1$

t ... Zeit in Sekunden (s), die seit dem Start vergangen ist
$x(t)$ ... Entfernung vom Startpunkt, t Sekunden nach dem Start

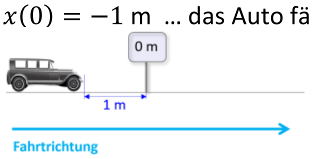
a) Berechnen Sie den Ort des Startpunktes (also bei $t = 0$)
b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit zur Zeit $t = 2$
c) Berechnen Sie die Beschleunigung zur Zeit $t = 2$..

3. Angaben wie in Aufgabe 1. mit $s(t) = -\frac{1}{2}\,e^{i\pi}\cdot\sqrt[3]{t^2-1}$

Lösungen:

1) a) 200 km b) 120 min

2. a) $x(0) = -1$ m ... das Auto fährt 1 m „hinter" dem Orts-Nullpunkt los:



b) $x'(2) = 1.38$ m/s
c) $x''(2) = -0.27$ m/s² (Bremsung)

3. a) $s(0) = -0.5$ m ... Deutung siehe 1. a)
b) $s'(2) = 0.32$ m/s
c) $s''(2) = -0.12$ m/s² (negative Beschleunigung: Bremsung)

9.4.5. Aufstellen einer Funktionsgleichung (Umkehraufgaben)

Beispiel:

Eine Polynomfunktion dritten Grades geht durch den Punkt P (1 / 5) und den Wendepunkt W (2 / 3). Die Steigung der Wendetangente beträgt k = –3. Wie lautet die Funktionsgleichung?

$f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$

Wir suchen eine Polynomfunktion 3. Grades.
Deren allgemeine Gleichung lautet wie links ersichtlich
(siehe Kapitel 7.3.3., S 362 f).

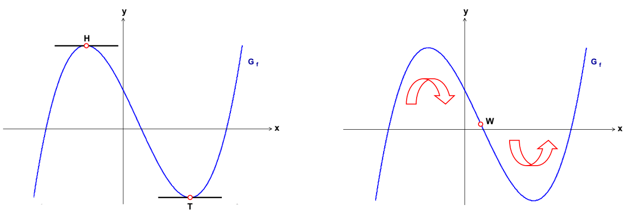
Damit diese Funktion konkret gegeben ist, benötigen wir für die Koeffizienten a, b, c und d Zahlenwerte.
Folglich haben wir 4 derzeit noch unbekannte Bestimmungsstücke und benötigen dafür 4 Bedingungen:

$f(x) = y$
$P(1/5) \in f: \; f(1) = 5 \; \ldots I$

$f(x) = y$
$W(2/3) \in f: \; f(2) = 3 \; \ldots II$

Zuerst halten wir Ausschau nach **vollständig gegebene**n **Punkte**n, die auf der Kurve liegen. Diese können wir **für x und y in die Funktionsgleichung einsetzen**, da x und y für alle (unendliche vielen) Punkte der Kurve stehen.

Jetzt verwenden wir allfällige **Besonderheiten von Punkten** wie



Extrema: f ' (x) = 0 oder **Wendepunkte: f '' (x) = 0**

$f''(x) = 0$
$f''(2) = 0 \; \ldots III$

Von einem Extremum, wie Hoch- oder Tiefpunkt, ist in unserem Beispiel keine Rede. Wir wissen aber, dass der Punkt W ein Wendepunkt ist, also muss dort die Krümmung f '' (x) = 0 sein.

Weitere Bedingungen findet man über **gegebene Steigungen**.

$f'(x_1) = k_t$
$f'(2) = -3 \; \ldots IV$

Jetzt fehlt uns noch die vierte Bedingung:
Wir kennen die **Steigung k = – 3** der Tangente im Wendepunkt.
Da im Berührpunkt Kurvensteigung = Tangentensteigung gilt, wissen wir auch die Steigung f **'**(x) der Kurve im Wendepunkt.

Damit lauten die vier Bedingungen:

I: f (1) = 5
II: f (2) = 3
III: f '' (2) = 0
IV: f ' (2) = –3

Die Reihenfolge, in der die Bedingungen angeführt warden, ist **un**erheblich.

Bilden wir zunächst beide Ableitungen der allgemeinen Funktionsgleichung:

$y = f(x) = a \cdot x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$

Steigung $f'(x) = 3\,a\,x^2 + 2\,b\,x + c$

Krümmung $f''(x) = 6\,a\,x + 2\,b$

Jetzt können wir unsere vier Bedingungen in die entsprechenden Gleichungen einsetzen:

I:	$f(1) = 5$	: $f(1) = a\cdot 1^3 + b\cdot 1^2 + c\cdot 1 + d$	$\rightarrow\; 5 = a + b + c + d$	. . . I
II:	$f(2) = 3$	: $f(2) = a\cdot 2^3 + b\cdot 2^2 + c\cdot 2 + d$	$\rightarrow\; 3 = 8\,a + 4\,b + 2c + d$	. . . II
III:	$f''(2) = 0$	: $f''(2) = 6\,a\cdot 2 + 2b$	$\rightarrow\; 0 = 12\,a + 2\,b$	. . . III
IV:	$f'(2) = -3$	: $f'(2) = 3\,a\cdot 2^2 + 2\,b\cdot 2 + c$	$\rightarrow\; -3 = 12\,a + 4\,b + c$	. . . IV

Händisch kann dieses lineare Gleichungssystem z.B. mit dem **Gaußschen Algorithmus** (3.2.2.2., S 154 f) gelöst werden.

```
from sympy import *
```

```
M = Matrix(([1, 1, 1, 1, 5], [8, 4, 2, 1, 3], [12, 2, 0, 0, 0], [12, 4, 1, 0, -3]))
```

```
M.rref()
```

```
(Matrix([
 [1, 0, 0, 0,  1],
 [0, 1, 0, 0, -6],
 [0, 0, 1, 0,  9],
 [0, 0, 0, 1,  1]]),
 (0, 1, 2, 3))
```

$a = 1 \quad b = -6 \quad c = 9 \quad d = 1 \;\rightarrow\; f(x) = x^3 - 6\,x^2 + 9\,x + 1$

Video-Tipp STECKBRIEFAUFGABEN Symmetrie, Wendepunkt – LGS, Gleichungssystem lösen - YouTube

9.4.6. Regel von DE L' HOSPITAL [56]

Diese Regel dient zur **Grenzwertbestimmung**, wenn dabei **unbestimmte Werte** wie $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ bzw. ihre Abwandlungen $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0 oder 0^∞ entstehen.

Die Regel von DE L'HOSPITAL:

$$\boxed{\lim_{x\to x_1}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_1}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_1}\frac{f''(x)}{g''(x)} = \,...}$$

x_1 kann auch gegen ∞ gehen.

Hier werden, im Gegensatz zur Quotientenregel, (9.3.5., S 448) Zähler und Nenner **getrennt** differenziert.

Beispiel: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\overset{\to\infty}{x}}{\underset{\to\infty}{\ln(x)}} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} 1\cdot\frac{x}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} x \;\to \infty$

Beispiel: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\overbrace{\overbrace{e^x}^{\to 1}-1}^{\to 0}}{\underset{\to 0}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{1} = \lim\limits_{x\to 0}\overset{\to 1}{e^x} = 1$

Beispiel: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\overset{\to\infty}{2\,x^2}}{\underset{\to\infty}{e^x}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\overset{\to\infty}{4\,x}}{\underset{\to\infty}{e^x}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{4}{\underset{\to\infty}{e^x}} = 0$

[56] Guillaume François Antoine, Marquis DE L'HOSPITAL (1661–1704), veröffentlichte diese Regel 1696.
Sie stammt aber nicht von ihm, sondern er kaufte sie von Johann I BERNOULLI, einem Schweizer Mathematiker.

Beispiel: $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[\overset{\to -\infty}{x}]{\underbrace{x}_{\to -\infty}+\underbrace{e^x}_{\to 0}} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{\ln\left(\sqrt[x]{x+e^x}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{\ln(x+e^x)^{\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}\cdot\ln(x+e^x)} = e^0 = 1$

$e^{\ln(A)} = A$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\cdot\ln(x+e^x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(x+e^x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x+e^x}\cdot(1+e^x)}{1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\overset{\to 0}{e^x}}{\underbrace{x}_{\to-\infty}+\underbrace{e^x}_{\to 0}} = 0$$

Regel von de L'Hospital

Beispiel: $\lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to\infty}^{\overset{\to 0}{x}} =$

Bemerkung: 0^+ bedeutet, dass wir uns von rechts null nähern, da für negative x der Ausdruck $\left(\frac{1}{x}\right)^x$ nicht definiert ist:

$$= \lim_{x\to 0^+} e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)^x} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot[\overset{=0}{\ln(1)}-\ln(x)]} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot[-\ln(x)]} =$$

$e^{\ln(A)} = A$ L3, 3.1.4.4., S 139 f L1, 3.1.4.4., S 139 f & 7.6., S 367

$$= \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot[-\ln(x)]} = \lim_{x\to 0^+} e^{-\overset{\to 0}{x}\cdot\overset{\to-\infty}{\ln(x)}} = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{\overset{\to-\infty}{\ln(x)}}{\underset{\to\infty}{\frac{1}{x}}}} = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} =$$

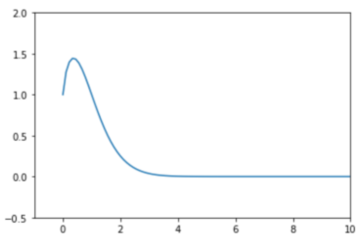
$-\frac{x}{1}\cdot\ln(x) = \frac{\ln(x)}{-\frac{1}{x}} = -\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$

$\frac{1}{x} = x^{-1}$

$(x^{-1})' = -1\,x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$$= \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{1}} = \lim_{x\to 0^+} e^x = e^0 = 1$$

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x = np.linspace(-1, 10, 100, endpoint=True)
F = (1/x)**x
plt.plot(x,F)
startx, endx = -1, 10
starty, endy = -0.5, 2
plt.axis([startx, endx, starty, endy])
plt.show()
```



Kommt die Variable in der Basis und im Exponenten vor, so formt man den Term mit $e^{\ln}$ entsprechend um

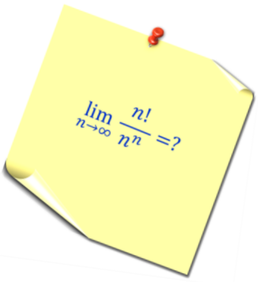
$$\boxed{\;...x...\;}^{\boxed{\;...x...\;}} = e^{\ln \boxed{\;...x...\;}^{\boxed{\;...x...\;}}}$$

weil $e^{\ln \boxed{...x...}^{\boxed{...x...}}} = \boxed{...x...}^{\boxed{...x...}}$

und bearbeitet ihn nach den Rechenregeln für Logarithmen (3.1.4.4., S 139 f) und nach den Rechenregeln für Potenzen (2.2.2., S 73 f).

Kann ich's? $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} - e^{-x}}{x^2 - \sin(x)}$

Lösung: –4



Video-Tipp GRENZWERT mit L'HOSPITAL – 0 mal unendlich, Beispiele Grenzwert berechnen - Bing video

Übung

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

1) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^3-27}{x-3}$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{2\,x}$

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x \cdot sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

4) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^{2x}}{x^2}$

5) $\lim\limits_{x \to 0} x^x$

Lösungen: 1) 27 2) 0 3) 1 Tipp: $x = \frac{1}{\frac{1}{x}}$ 4) ∞

5) 1 Tipp: $x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \cdot \ln(x)}$ und $x \cdot \ln(x) = \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$

```
from sympy import *
```
```
from fractions import Fraction
```
```
x = symbols("x")
```
```
limit((x**3-27)/(x-3), x, 3)
```
27

```
from sympy import *
```
```
from fractions import Fraction
```
```
x = symbols("x")
```
```
limit(x**x, x, 0)
```
1

Video-Tipp Grenzwerte von Funktionen: Regel von L'Hospital - Bing video

„Man muss viel gelernt haben, um über das, was man nicht weiß, fragen zu können."

Jean-Jacques ROUSSEAU

(1712–1778)

X INTEGRIEREN

10.1. Integrationsregeln

10.1.1. Potenzregel

Wie für das Differenzieren, so gibt es auch für das Integrieren eine Rechenregel, wie man Potenzen der Form x^r mit $r \in \mathbb{R}$ integriert:

$$\boxed{\int \mathbf{x^r \cdot dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C}}$$

Folgende Anmerkungen, die zunächst reichen:

* Das Integralzeichen $\int$ ist ein langgezogenes ***S*** und steht für **S**umme (siehe 10.2.1., S 489 f)

* dx ist ein feststehender Ausdruck und bedeutet **nicht** d · x (siehe 10.2.1., S 489 f)

* C ist die sog. Integrationskonstante (siehe Beispiel S 475)

Beispiel: $\int x^3 \cdot dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C$

Wie beim Differenzieren, so darf auch beim **Integrieren** die **Potenzregel** nur dann verwendet werden, wenn **in der Basis** der Potenz **nur die** (unabhängige) **Variable** steht und sich die **Potenz nicht im Nenner** befindet.

$$\int (2x+1)^3 \cdot dx = \cancel{\frac{(2x+1)^4}{4}} + C \qquad \int \frac{1}{x^3} \cdot dx = \cancel{\frac{1}{\frac{x^4}{4}}} + C$$

… in der Basis steht NICHT nur die Variable … die Potenz steht im NENNER

Weiteres **Beispiel** für die Potenzregel:

$$\int x \cdot dx = \int x^1 \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot x^2 + c$$

Beispiel:

$$\int 4x^3 \cdot dx = \int \mathbf{4} \cdot x^3 \cdot dx = \mathbf{4} \cdot \frac{x^4}{4} + C = \frac{\overset{1}{\cancel{4}} \cdot x^4}{\underset{1}{\cancel{4}}} + C = x^4 + C$$

Konstante Faktoren (. :) werden, wie beim Differenzieren, **unverändert übernommen**.

$$\int \mathbf{k} \cdot x^r \cdot dx = \mathbf{k} \cdot \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$$

Dieser Buchstabe ist die **Variable**, nach der integriert wird.

Beispiel:

$$\int \frac{3\,x^2}{2} \cdot dx = \frac{3}{2} \int x^2 \cdot dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + C = \frac{1 \cdot x^3}{2} + C = \frac{1}{2} \cdot x^3 + C$$

Man kann **konstante Faktoren**, so sie für den gesamten Ausdruck gelten, **vor dem Integrieren vor das Integral** schreiben.

Beispiel:

$$\int x^{-3} \cdot dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = \frac{1 \cdot x^{-2}}{-2} + C = \frac{1}{-2} \cdot x^{-2} + C = -\frac{1}{2} \cdot x^{-2} + C = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + C = -\frac{1}{2\,x^2} + C$$

Potenzen im Nenner müssen vor dem Integrieren nach der Regel $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ **aus dem Nenner** gebracht werden.

Beispiel:

$$\int \frac{6}{5\,x^2} \cdot dx = \int \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot dx = \frac{6}{5} \cdot \int x^{-2} \cdot dx = \frac{6}{5} \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{6\,x^{-1}}{-5} + C =$$

$$= -\frac{6}{5}\,x^{-1} + C = -\frac{6}{5} \cdot \frac{1}{x^1} + C = -\frac{6}{5} \cdot \frac{1}{x} + C = -\frac{6}{5\,x} + C$$

$$\frac{6}{5\,x^2} \neq 6 \cdot 5\,x^{-2}$$

$$6 : 5 \neq 6 \cdot 5$$

Beispiel:

$$\int \frac{1}{x}\cdot dx = \int x^{-1}\cdot dx = \frac{x^{-1+1}}{-1+1} + C \neq \cancel{\frac{x^{0}}{0}} + C = \mathbf{\ln|x|}\ +c$$

Ein **Bruch mit dem Nenner Null** ist **nicht definiert**. Er ergibt **keine Zahl** (und auch sonst nichts).

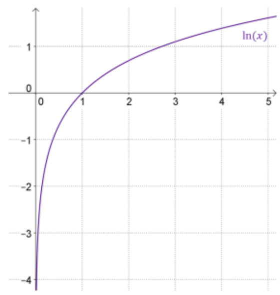
Obwohl in der Basis der Potenz nur die Variable steht, kann für **r = – 1** die Potenzregel des Integrierens **nicht** angewendet werden, da der Nenner Null wird.

Es gilt:

Differenzieren

$$f(x) = \ln x \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

Integrieren



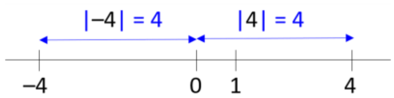
So muss doch zutreffen: $\boxed{\int \frac{1}{x}\cdot dx = \ln|x| + C}$

Da der $\ln(x)$ nur für positive x existiert, muss $|x|$ geschrieben werden. $|x|$ bedeutet den **Betrag** von x

Der Betrag macht jede Zahl positiv.

Beispiele: $|4| = 4$ $\qquad |-4| = 4$

Korrekt ist der Betrag einer Zahl ihr Abstand von der Zahl Null:



Beispiel:

$$\int 2\cdot dx = \int 2\cdot 1\cdot dx = \int 2\cdot x^{0}\cdot dx = 2\cdot\int x^{0}\cdot dx = 2\cdot\frac{x^{1}}{1} + c = 2\cdot x + C$$

$1 = x^0$

Da wir jede **Konstante** mit 1 bzw. x^0 multiplizieren können, erhalten wir **integriert** immer die **Konstante mal der Variablen**:

Eine **Konstante für sich** ergibt **integriert** die **Konstante mal der Variablen**.

$$\int \mathbf{k}\cdot \mathbf{dx} = \mathbf{k}\cdot \mathbf{x} + \mathbf{C}$$

Dieser Buchstabe ist die **Variable**, nach der integriert wird.

Beispiel:

$\int \pi \cdot dx = \pi \cdot x + C$

Dieser Buchstabe ist die **Variable**, nach der integriert wird!

$\int \pi \cdot d\pi = \frac{\pi^2}{2} + C$

Beispiel:

$$\int (3\,x^2 + 4\,x + 1) \cdot dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 1 \cdot x + C = \frac{3}{3} \cdot x^3 + \frac{4}{2} \cdot x^2 + 1 \cdot x + C = x^3 + 2\,x^2 + x + C$$

Man darf **gliedweise** (+ –) **getrennt integrieren**.

Beispiel:

$$\int \left(\frac{4}{3} \cdot x^2 - 2 \cdot x\right) \cdot dx = \frac{4}{3} \cdot \frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + C = \frac{4}{9} \cdot x^3 - x^2 + C$$

Falsch wäre $\frac{4}{3} \cdot \int (x^2 - 2x) \cdot dx$, weil $\frac{4}{3}$ nicht herausgehoben werden kann (kein gemeinsamer Faktor!).

Beispiel:

$$\int (a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d) \cdot dx = \frac{a\,x^4}{4} + \frac{b\,x^3}{3} + \frac{c\,x^2}{2} + d \cdot x + e$$

Da in dieser Funktion **c** die **Vorzahl von x** darstellt, können wir diesen Buchstaben nicht als Integrationskonstante wählen.

Ich habe **e** gewählt, in alphabetischer Reihenfolge.

Die mathematisch üblichen Schreibweisen für die Integrationskonstante sind C_1 bzw C_2 usw.

Allgemein:

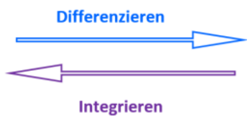
$$\int f(x) \cdot dx = F(x)$$

$$\int \text{Funktion} = \text{Stammfunktion}$$

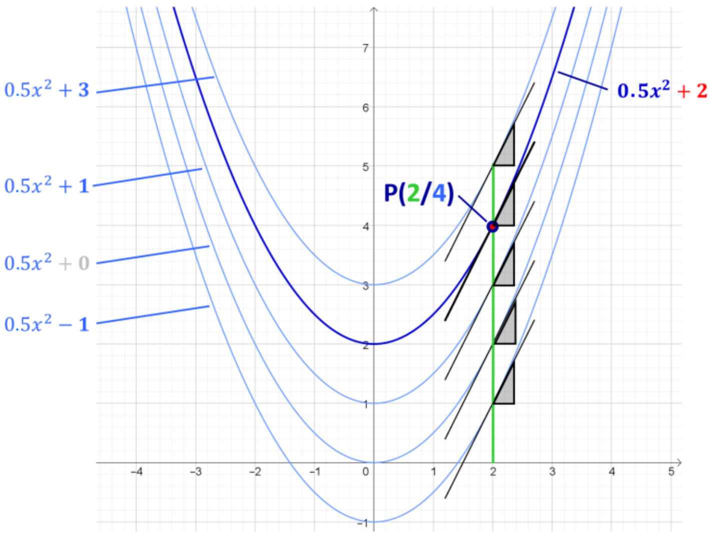
Die **integrierte Funktion** nennt man **Stammfunktion** und bezeichnet sie mit entsprechendem **Großbuchstaben**.

Ein Beispiel, das die Integrationskonstante veranschaulicht:

Beispiel: Wie heißt die Gleichung einer Funktion f, deren Graph durch den Punkt **P(2/4)** geht und deren Steigung $f'(x) = x$ lautet?



$$f(x) = \int f'(x) \cdot dx = \int x \cdot dx = \frac{1}{2} x^2 + C$$



$$f(x) = \frac{1}{2} x^2 + C$$

ist eine **quadratische** Funktion, da die höchste Potenz von x **quadratisch** ist.

Das C in der Gleichung bedeutet, dass wir eine ganze Schar von Funktionen dieser Form erhalten. Alle diese Funktionen haben an einer bestimmten Stelle die gleiche Steigung $k = f'(x_1)$, hier $2 = f'(2)$.

Von den unendlich vielen Funktionen dieser Art suchen wir jene, deren Graph durch den Punkt **P(2/4)** geht:

$$f(x) = y$$

P(2/4) → $f(2) = 4$

$$f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 + C$$

$$f(2) = 4 \rightarrow 4 = \frac{1}{2} \cdot 4 + C$$

$$4 = 2 + C \quad | -2$$

$$2 = c$$

Damit lautet die Gleichung der gesuchten Funktion: $f(x) = \frac{1}{2} x^2 + 2$

10.1.2. Integrale besonderer Funktionen

$$\int \sin(x) \cdot dx = -\cos(x) + C$$

$$\int \cos(x) \cdot dx = \sin(x) + C$$

$$\int \tan(x) \cdot dx = -\ln|\cos(x)| + C$$

$$\int \cot(x) \cdot dx = \ln|\sin(x)| + C$$

$$\int e^x \cdot dx = e^x + C$$

$$\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$$

$$\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln|x| + C$$

$$\int \ln(x) \cdot dx = x \cdot \ln|x| - x + C = x \cdot [\ln|x| - 1] + C$$

$$\int \log_a(x) \cdot dx = x \cdot \log_a(x) - \frac{x}{\ln(a)} + C$$

$$\int \arctan(x) \cdot dx = \frac{1}{x^2 + 1} + C$$

Beispiele:

$$\int 2 \cdot \sin(x) \cdot dx = 2 \cdot \int \sin(x) \cdot dx = 2 \cdot (-\cos(x)) + C = -2 \cdot \cos(x) + C$$

$$\int -\frac{2^x}{2} \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot \int 2^x . dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2^x}{\ln(2)} + C = -\frac{1 \cdot 2^x}{2^1 \cdot \ln(2)} + C = -\frac{2^{x-1}}{\ln(2)} + C$$

$\int \frac{1}{\cos^2(x)} \cdot dx = \tan(x) + C$ weil $[\tan(x)]' = \frac{1}{\cos^2(x)}$

10.1.3. Substitutionsmethode

Die Substitutionsmethode *kann* unter zwei verschiedenen Bedingungen angewendet werden:

Art 1: * Beim **Differenzieren** müsste man die **Kettenregel** anwenden **und**

* die **Ursache der Kettenregel** ist **linear** ist:

Beispiel:

$$\int (2\,x+1)^3 \cdot dx \;=\; \overset{①②③}{\int z^3 \cdot \frac{dz}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \int z^3 \cdot dz \;= \overset{④}{\frac{1}{2} \cdot \frac{z^4}{4}} + C = \frac{1}{8} \cdot z^4 + C = \overset{⑤}{\frac{1}{8} \cdot (2x+1)^4 + C}$$

Der Term $(2\,x+1)^3$ müsste mit der Kettenregel differenziert werden, weil in der Basis dieser Potenz nicht nur die Variable steht. Außerdem ist diese Basis $2\,x^1+1$ linear -> Substitutionsmethode

Leitfaden:

① Die lineare Basis wird gleich z gesetzt. $z = 2\,x+1$

② Wir benötigen auch einen Ausdruck für dx: $z' = \frac{dz}{dx} = 2 \;|\cdot\; dx$

$$dz = 2 \cdot dx \;\;|:2$$

$$\frac{dz}{2} = dx$$

③ Die Ausdrücke für $2x+1$ und dx werden im Integral eingesetzt.

④ Es wird nach z integriert.

⑤ Am Ende wird statt z der ursprüngliche Ausdruck eingesetzt.

VOR dem Integrieren muss die ursprüngliche Variable (hier $\mathbf{x}$) zur Gänze verschwunden sein!

Beispiel: $\int (2x^2+1)^3 \cdot dx = \int z^3 \cdot \frac{dz}{4\boldsymbol{x}}$

$$z = 2x^2+1 \qquad z' = \frac{dz}{dx} = 4x \to \;\; dx = \frac{dz}{4x}$$

Deshalb muss die Ursache der Kettenregel **linear** sein, weil sonst die ursprüngliche Variable nicht verschwindet!

Beispiel:

$$\int 2\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot dx \;=\; \int 2\cdot\sin(z)\cdot 2\cdot dz == 4\cdot\int \sin(z)\cdot dz = 4\cdot[-\cos(z)] + C = -4\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

$\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ müsste mit der Kettenregel differenziert werden, weil im Argument nicht nur die Variable steht.
Außerdem ist das Argument, $\frac{x}{2}$, linear -> Substitutionsmethode

$$z = \frac{x}{2}$$

$$z' = \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}\;\Big|\cdot dx \;\;\rightarrow\;\; dz = \frac{1}{2}\cdot dx\;\Big|\cdot 2 \;\;\rightarrow\;\; 2\cdot dz = dx$$

Beispiel:

$$\int e^{-x}\cdot\, dx \;=\; \int e^{z}\cdot(-dz) \;= -\int e^{z}\cdot dz = -\,e^{z} + C = \,-e^{-x} + C$$

e^{-x} müsste mit der Kettenregel differenziert werden, weil im Exponenten nicht nur die Variable steht.
Außerdem ist der Exponent linear -> Substitutionsmethode

$$z = -x$$

$$z' = \frac{dz}{dx} = -1\,|\cdot dx \;\;\rightarrow\;\; dz = -dx\;\;|\cdot(-1) \;\;\rightarrow\;\; -dz = dx$$

Art 2: * Beim **Differenzieren** müsste man die **Produktregel** anwenden **und**

* **ein Faktor** ist, bis auf konstante Faktoren, die **(innere) Ableitung des anderen** Faktors:

Klingt etwas kompliziert! Betrachten wir Beispiele:

Beispiel:

$$\int 4\,x \cdot \sqrt{1+x^2}\; dx \;= \int 4 \cdot x \cdot \sqrt[2]{(1+x^2)^1} \cdot dx = \int 4 \cdot x \cdot\; (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot dx$$

Beim Differenzieren müsste man die Produktregel anwenden, weil die Variable in beiden Faktoren vorkommt.

$(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ müsste mit der Kettenregel differenziert werden, weil in der Basis der Potenz nicht nur die Variable steht.

Die innere Ableitung, die Ableitung der Basis, lautet $(1+x^2)' = 2\,x$

Das entspricht, bis auf den konstanten Faktor 2 genau dem anderen Faktor $4\,x$ im Integral.

Die Ursache der Kettenregel wird z gesetzt: $z = 1 + x^2$

$$\frac{dz}{dx} = 2\,x \mid \cdot\, dx \;\; \mid : (2x) \rightarrow \;\; dx = \frac{dz}{2x}$$

Somit lautet das Integral $\displaystyle\int 4 \cdot x \cdot (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot dx \;= \int 4 \cdot x \cdot z^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{dz}{2x} = 2 \cdot \int z^{\frac{1}{2}} \cdot dz = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot z^{\frac{3}{2}} + C =$

$$= \frac{4}{3} \cdot \sqrt[2]{z^3} + C = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{(1+x^2)^3} + C$$

Nochmals erinnert:

VOR dem integrieren muss die ursprüngliche Variable verschwunden sein!

Beispiel:

$$\int e^{\sin(x)} \cdot \cos(x) \cdot dx = \int e^{z} \cdot \cancel{\cos(x)}^{1} \cdot \frac{dz}{\cancel{\cos(x)}_{1}} = \int e^{z} \cdot dz = e^{z} + C = e^{\sin(x)} + C$$

Beim Differenzieren müsste man die Produktregel anwenden, weil die Variable in beiden Faktoren vorkommt.

Zusätzlich gilt: $(\sin(x))' = \cos\,(x)$ … das entspricht genau dem anderen Faktor

$z = \sin(x) \qquad \frac{dz}{dx} = \cos(x)\ |\,.\,dx \rightarrow\ dz = \cos(x) \cdot dx\ \ |:\cos(x) \rightarrow \frac{dz}{\cos(x)} = dx$

Beispiel:

$$\int \sin(x) \cdot \cos\,(x)\, dx\ =$$

Beim Differenzieren müsste man die Produktregel anwenden, weil die Variable in jedem Faktor vorkommt.

Kettenregel ist hier nicht notwendig.

Es gilt $(\sin(x))' = \cos\,(x)$ bzw. $(\cos(x))' = -\sin\,(x)$

Entsprechend ist der eine Faktor, bei sin bis auf den konstanten Faktor –1, die Ableitung des anderen Faktors.

Wir haben hier die Wahl, ob wir $sin(x)$ oder $cos(x)$ gleich z setzen. Ich wähle $sin(x)$.

$z = \sin(x)$

$\frac{dz}{dx} = \cos(x)\ |\cdot\ dx\ \ |:\cos(x) \rightarrow\ dx = \frac{dz}{\cos(x)}$

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x)\, dx\ = \int z \cdot \cancel{\cos(x)}^{1} \cdot \frac{dz}{\cancel{\cos(x)}_{1}} = \int z \cdot dz = \frac{z^2}{2} + C = \frac{[\sin(x)]^2}{2} + C = \frac{\sin^2(x)}{2} + C$$

Wie wir gleich sehen werden, ist **ein** Kriterium für die **Partielle Integration** (10.1.4., S 481 f), dass man beim Differenzieren die Produktregel anwenden müsste. Dieses Kriterium alleine ist noch kein Grund für die Partielle Integration.

Es kann auch sein, dass die Substitutionsmethode infrage kommt, nämlich wenn ein Faktor die (innere) Ableitung des anderen ist.

In aller Regel hat man dann *nicht* die Auswahl zwischen Substitutionsmethode und Partieller Integration. Aber selbst, wenn man die Wahl hätte, ist die Substitutionsmethode leichter und schneller zu bewerkstelligen.

10.1.4. Partielle Integration

Die Partielle Integration entstammt der Produktregel des Differenzierens:

$$[u(x)\cdot v(x)]' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) \;\; | \int$$

$$\int [u(x)\cdot v(x)]' = \int u'(x)\cdot v(x) + \int u(x)\cdot v'(x)$$

$$u(x)\cdot v(x) = \int u'(x)\cdot v(x) + \int u(x)\cdot v'(x) \;\; | - \int u(x)\cdot v'(x)$$

Die Seiten vertauscht: $$\int u'(x)\cdot v(x) = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)$$

oder: $$u(x)\cdot v(x) = \int u'(x)\cdot v(x) + \int u(x)\cdot v'(x) \;\; | - \int u'(x)\cdot v(x)$$

Die Seiten vertauscht: $$\int u(x)\cdot v'(x) = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)$$

Die partielle Integration kann angewendet werden, wenn man beim Differenzieren die Produktregel anwenden müsste **und** die Substitutionsmethode **nicht** möglich ist.

Beispiel:

$$\int x^2 \cdot e^x \, dx =$$

Beim Differenzieren müsste man die Produktregel anwenden, weil in beiden Faktoren die Variable vorkommt.

Aber: $(x^2)' = 2\,x$ $\quad (e^x)' = e^x$ … Hier ist kein Faktor die Ableitung des anderen -> Partielle Integration

Einfacher statt mit den obigen Formeln ist es, bei der partiellen Integration mit der sogenannten **D I – Regel** [57] zu rechnen:

Bei der **DI-Regel** wird **ein Faktor differenziert**, der **andere integriert**.

Ist ein Faktor eine Potenzfunktion (hier x^2), so wird diese differenziert bis man Null erhält.

[57] D I – Regel: D … Differenzieren I … Integrieren

D I – Regel

D		I
x^2	$+$ ③	e^x
$2\,x$	$-$	e^x
2	$+$	e^x
0	$\int$ ④	e^x

① ②

① Die Potenzfunktion (Polynomfunktion) wird so lange differenziert, bis die Ableitung Null ergibt.

② Die andere Funktion wird entsprechend oft integriert.

③ Die Ableitungen und Integrale werden schräg versetzt multipliziert und die Produkte abwechselnd addiert und subtrahiert.

④ Die letzte Zeile wird multipliziert und das Produkt integriert.

Das ergibt:

$$\int \boldsymbol{x^2 \cdot e^x \cdot dx} = +x^2 \cdot e^x - 2\,x \cdot e^x + 2\,e^x + \int 0 \cdot e^x . dx$$

$$= x^2 \cdot e^x - 2\,x \cdot e^x + 2\,e^x + \int 0 \,.\, dx = x^2 \cdot e^x - 2\,x \cdot e^x + 2\,e^x + 0 = x^2 \cdot e^x - 2\,x \cdot e^x + 2\,e^x =$$

$$\int 0 \cdot dx = \int 0 \cdot x^0 \cdot dx = 0 \cdot \frac{x^1}{1} = 0 \cdot x = 0$$

$$= \boldsymbol{e^x \cdot (x^2 - 2\,x + 2) + C}$$

Beispiel:

$$\int (4 - x) \cdot e^{-x}\, dx \;=$$

Beim Differenzieren müsste man die Produktregel anwenden, weil in beiden Faktoren die Variable vorkommt.
Aber: $(4 - x)' = -1$ $\qquad (e^{-x})' = -e^{-x}$ ... Hier ist kein Faktor die Ableitung des anderen -> Partielle Integration

Kettenregel!

D I – Regel

D		I
$4 - x$	$+$	e^{-x}
-1	$-$	$-e^{-x}$
0	$\int$	$+e^{-x}$

$$\int e^{-x} \cdot dx = \int e^z \cdot (-dz) = \int -e^z \cdot dz = -e^z \;= -e^{-x}$$

Substitutionsmethode: $z = -x \qquad \frac{dz}{dx} = -1 \,|\cdot dx$

$$dz = -dx \,|\cdot(-1)$$

$$-dz = dx$$

Das ergibt:

$$\int (4-x)\cdot e^{-x}\cdot dx = +(4-x)\cdot(-e^{-x}) - (-1).e^{-x} + \int 0\cdot e^{-x}\cdot dx$$

$$= -e^{-x}\cdot(4-x) + e^{-x} + \int 0\,.dx == -e^{-x}\cdot(4-x) + e^{-x} + 0 = -e^{-x}\cdot(4-x-1) =$$

$$= -e^{-x}\cdot(3-x) + C$$

Beispiel:

$$\int x\cdot \sin(x)\cdot\, dx \ =$$

Beim Differenzieren müsste man die Produktregel anwenden, weil in beiden Faktoren die Variable vorkommt.
Aber: $(x)' = 1$ $\quad (\sin(x))' = \cos(x)$ … Hier ist kein Faktor die Ableitung des anderen -> Partielle Integration

D I – Regel

D		I
x	$+$	$\sin(x)$
1	$-$	$-\cos(x)$
0	$\int$	$-\sin(x)$

Das ergibt:

$$\int x\cdot \sin(x)\cdot dx = +x\cdot(-\cos(x)) \ -1\cdot\ (-\sin(x)) + \int 0\cdot(-\sin(x)).dx$$

$$= -x\cdot\cos(x) + \sin(x) + \int 0\cdot dx = -\,x\cdot\cos(x) + \sin(x) + 0 = -x\cdot\cos(x) + \sin(x) + C$$

Beispiel:

$$\int e^x \cdot \cos(x) \cdot \, dx \; =$$

Beim Differenzieren müsste man die Produktregel anwenden, weil in beiden Faktoren die Variable vorkommt.

Aber: $(e^x)' = e^x \qquad (\cos(x))' = -\sin(x)$ … Hier ist kein Faktor die Ableitung des anderen -> Partielle Integration

Da hier keiner der Faktoren eine Potenzfunktion ist, integriert man denjenigen Faktor, der sich ***leichter*** integrieren lässt:

D I – Regel

D		I
$\cos(x)$		e^x
	$+$	
$-\sin(x)$		e^x
	$-$	
$-\cos(x)$		e^x
	$\int$	

Hier hört man dann auf, wenn man die Angabe mit vertauschtem Vorzeichen erhält.

Das ergibt:

$$\int \boldsymbol{x \cdot \cos(x) \cdot dx} = +\cos(x) \cdot e^x - \left(-\sin(x)\right) \cdot \boldsymbol{e^x} + \int \left(-\cos(x)\right) \cdot \boldsymbol{e^x \cdot dx}$$

$$\int x \cdot \cos(x) \cdot dx = e^x \cdot \cos(x) + e^x \cdot \sin(x) - \int e^x \cdot \cos(x) \cdot dx \quad | + \int e^x \cdot \cos(x) \cdot dx$$

$$2 \cdot \int x \cdot \cos(x) \cdot dx = e^x \cdot \cos(x) + e^x \cdot \sin(x) \quad | :2$$

$$\int \boldsymbol{x \cdot \cos(x) \cdot dx} = \frac{\boldsymbol{e^x \cdot [\cos(x) + \sin(x)]}}{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{C}$$

Beispiel:

$$\int \cos^2(x) \cdot dx \;=\; \int \cos(x) \cdot \cos(x)\,.\,dx =$$

Die Substitutionsmethode ist nicht möglich, weil $\int \cos^2(x) \cdot dx = \int [\cos(x)]^2 \cdot dx$ eine Potenz darstellt, deren Basis NICHT linear ist.

Beim Differenzieren müsste man die Produktregel anwenden, weil in beiden Faktoren die Variable vorkommt.
Aber: $(\cos{(x)})' = -\sin{(x)} \neq \cos{(x)}$ … Hier ist kein Faktor die Ableitung des anderen ->
Partielle Integration

D I – Regel

D		I
$\cos{(x)}$		$\cos{(x)}$
	$+$	
$-\sin{(x)}$		$\sin{(x)}$
	$-$	
$-\cos(x)$	$\longrightarrow$	$-\cos{(x)}$
	$\int$	

Das ergibt:

$$\int \boldsymbol{\cos(x) \cdot \cos(x) \cdot dx} = +\cos(x) \cdot \sin(x) - (-\sin(x)) \cdot (-\cos(x)) + \int -\cos(x) \cdot (-\cos(x)) \cdot dx$$

$$\int \cos^2(x) \cdot dx = \sin(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot \cos(x) + \int \cos^2(x) \cdot dx \quad | - \int \cos^2(x) \cdot dx$$

$$0 \;=\; 0 \quad w.A. \quad ?$$

Mit der partiellen Integration lässt sich dieses Integral offensichtlich nicht lösen!

In diesem Falle kommt eine Formel für $\cos^2(x)$ zur Anwendung:

$$\int \cos^2(x) \cdot dx \;=\; \int \frac{1}{2} \cdot (\cos(2x) + 1) \cdot \; dx \qquad = \frac{1}{2} \cdot \int (\cos(z) + 1) \cdot \frac{dz}{2} = \frac{1}{4} \cdot \int (\cos(z) + 1) \cdot dz =$$

$$\boldsymbol{\cos(2x) = 2 \cdot \cos^2(x) - 1} \quad | + 1$$

$$\cos(2x) + 1 = 2 \cdot \cos^2(x) \quad | : 2$$

$$\frac{1}{2} \cdot (\cos(2x) + 1) = \cos^2(x)$$

$\cos{(2x)}$ lässt sich mit der Substitutionsmethode integrieren, weil man beim Differenzieren die Kettenregel anwenden müsste und das Argument linear ist:

$$z = 2x$$

$$\frac{dz}{dx} = 2 \;| \cdot dx \;|: 2 \rightarrow dx = \frac{dz}{2}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (\sin(z) + z) + C = \boldsymbol{\frac{1}{4} \cdot (\sin(2x) + 2x) + C}$$

Man könnte für $\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$ setzen:

$$\frac{1}{4} \cdot (\sin(2x) + 2x) + C = \frac{1}{4} \cdot (2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) + 2\,x) + C = \frac{2}{4} \cdot (\sin(x) \cdot \cos(x) + x) + C =$$

$$\frac{1}{2} \cdot (\sin(x) \cdot \cos(x) + x) + C$$

Beispiel:

$$\int x^2 \cdot \sqrt{1+x}\; dx =$$

Beim Differenzieren müsste man die Produktregel anwenden, weil in beiden Faktoren die Variable vorkommt.
Aber: $(1+x)' = 1 \quad (x^2)' = 2\,x$ ... Hier ist kein Faktor die Ableitung des anderen -> Partielle Integration

D I – Regel

D	I
x^2	$\sqrt{1+x}$
$2\,x$	$\frac{2}{3} \cdot \sqrt{(1+x)^3}$
2	$\frac{4}{15} \cdot \sqrt{(1+x)^5}$
0	$\frac{8}{105} \cdot \sqrt{(1+x)^7}$

$$\int \sqrt{1+x} \cdot dx = \int (1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot dx = \int z^{\frac{1}{2}} \cdot dz = \frac{2}{3} \cdot z^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{(1+x)^3}$$

Substitutionsmethode: $z = 1 + x \quad \frac{dz}{dx} = 1 \quad dx = dz$

$$\int \frac{2}{3} \cdot \sqrt{(1+x)^3} \cdot dx = \frac{2}{3} \cdot \int t^{\frac{3}{2}} \cdot dt = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot t^{\frac{5}{2}} = \frac{4}{15} \cdot \sqrt{(1+x)^5}$$

Substitutionsmethode: $t = 1 + x \quad \frac{dt}{dx} = 1 \quad dx = dt$

$$\int \frac{4}{15} \cdot \sqrt{(1+x)^5} \cdot dx = \frac{4}{15} \cdot \int w^{\frac{5}{2}} \cdot dw = \frac{4}{15} \cdot \frac{2}{7} \cdot w^{\frac{7}{2}} = \frac{8}{105} \cdot \sqrt{(1+x)^7}$$

Substitutionsmethode: $w = 1 + x \quad \frac{dw}{dx} = 1 \quad dx = dw$

$$\int x^2 \cdot \sqrt{1+x}\; dx = x^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{(1+x)^3} - 2\,x \cdot \frac{4}{15} \cdot \sqrt{(1+x)^5} + 2 \cdot \frac{8}{105} \cdot \sqrt{(1+x)^7} + 0 =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \sqrt{(1+x)^3} \cdot [x^2 - \frac{4}{5}\, x\,(1+x) + \frac{8}{35}\,(1+x)^2 + C$$

Nebenrechnungen: $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15} \qquad \frac{8}{35} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{105} \qquad \sqrt{(1+x)^5} = \sqrt{(1+x)^3} \cdot \sqrt{(1+x)^2} = 1 + x$

$$\sqrt{(1+x)^7} = \sqrt{(1+x)^3} \cdot \sqrt{(1+x)^4} = (1+x)^2$$

Übersicht

wann welche Integrationsregel bzw. Integrationsmethode anzuwenden ist.

Kommt

- in der Basis
- im Exponenten
- im Argument

NUR die unabhängige **Variable** vor?

Ja

Potenzregel

Formel für **Exponentialfunktionen**

Formel für **Winkel**- bzw. **Logarithmusfunktionen**

Nein

Beim **Differenzieren**

Kettenregel
&
Ursache der Kettenregel **linear**

Substitutionsmethode

Produktregel

&
ein Faktor die (innere) Ableitung des anderen

Substitutionsmethode

ansonsten

Partielle Integration

Übung

Integrieren und vereinfachen Sie:

1) $\int -\frac{x^3}{8}\cdot dx$ 2) $\int 3x\cdot\ln(3)\cdot dx =$ 3) $\int -\frac{\sin(x)}{2}\cdot dx =$

4) $\int \frac{3}{x}\cdot dx =$ 5) $\int (2\,e^x - 2\cdot 2^x - 2x)\cdot dx =$ 6) $\int (\frac{2}{3\,x^2} - \frac{4\cos(x)}{3} + \log_2(x))\cdot dx =$

7) $\int 3\cdot\sqrt[2]{2x+3}\cdot dx =$ 8) $\int \frac{\sin(2x)}{2}\cdot dx =$ 9) $\int -e^{-x}\cdot dx =$ 10) $\int \frac{1}{8}\cos(\omega t+\varphi)\cdot dt =$

11) $\int (x^2\cdot e^{-x})\cdot dx =$ 12) $\int \frac{4x-2}{\sqrt{x^2-x}}\cdot dx$ 13) $\int (x\cdot 2^x)\cdot dx =$

14) $\int \ln(x)\cdot dx = \int 1\cdot\ln(x) =$ 15) $\int (e^x)^2\cdot dx =$ 16) $\int x\cdot\cos(x^2)\cdot dx =$

Tipp: partielle Integration mit u'=1 und v=ln(x)

Folgende Integrale sollten für die FOURIERreihe (12.2.3.5., S 620 f) beherrscht werden:

17) $\int k\cdot\sin(nx)\cdot\ dx =$ 18) $\int k\cdot\cos(nx)\cdot dx =$ 19) $\int (k+x)\cdot\sin(nx)\cdot dx =$

20) $\int (k+x)\cdot\cos(nx)\cdot dx =$

Lösungen: 1) $-\frac{x^4}{32}+C$ 2) $\frac{3\cdot\ln(3)\cdot x^2}{2}+C$ 3) $\frac{\cos(x)}{2}+C$ 4) $3\cdot\ln|x|+C$

5) $2\cdot e^x - \frac{2^{x+1}}{\ln(2)} - x^2 + C$ 6) $-\frac{2}{3\,x} - \frac{4\cdot\sin(x)}{3} + x\cdot\log_2(x) - \frac{1}{\ln(2)}\cdot x + C$

7) $\sqrt{(2x+3)^3}+C$ 8) $-\frac{\cos(2x)}{4}+C$ 9) $e^{-x}+C$ 10) $\frac{1}{8\,\omega}\cdot\sin(\omega\,t+\varphi)+C$

11) $-e^{-x}\,(x^2+2x+2)+C$ 12) $4\,\sqrt{x^2-x}+C$ 13) $\frac{2^x}{\ln(2)}\cdot\left(x-\frac{1}{\ln(2)}\right)+C$

14) $x\,(\ln(x)-1)+C$ 15) $\frac{e^{2x}}{2}+C$ 16) $\frac{1}{2}\,\sin(x^2)+C$

17) $-\frac{k}{n}\cdot\cos(nx)+C$ 18) $\frac{k}{n}\cdot\sin(nx)+C$ 19) $-\frac{(k+x)\cdot\cos(nx)}{n}+\frac{\sin(nx)}{n^2}+C$

20) $\frac{(k+x)\cdot\sin(nx)}{n}+\frac{\cos(nx)}{n^2}+C$

```
from sympy import *
y = -x**3/8
integral(y, x)
```
-1/32*x^4

```
from sympy import *
y = 3*(2*x+3)**(1/2)
integral(y, x)
```
(2*x + 3)^(3/2)

```
from sympy import *
y = -sin(x)/2
integral(y, x)
```
1/2*cos(x)

```
from sympy import *
import numpy
y = numpy.log(x)
integral(y, x)
```
x*log(x) - x

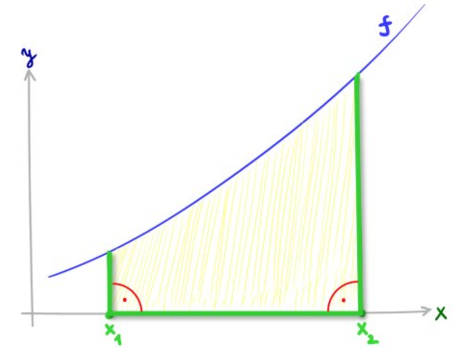
Video-Tipp

integral of log_{a}(x) - Symbolab

10.2. Flächenberechnungen mit Integral

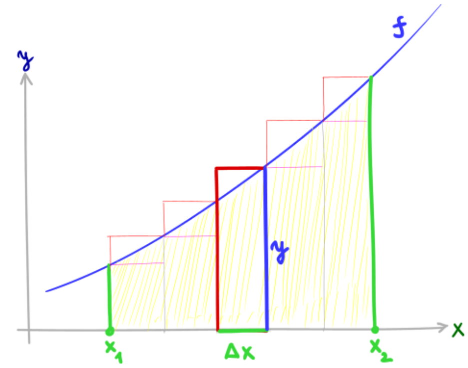
10.2.1. Veranschaulichung

Zunächst kurz skizziert, wie ein Integral Flächen berechnet:



Das Integral berechnet den Inhalt jener Fläche, deren Begrenzungen in drei Strecken einem Rechteck gleichen: Drei der Begrenzungen sind gerade und stehen angrenzend aufeinander im rechten Winkel.

Die vierte Begrenzungslinie kann eine andere Form aufweisen: Sie muss mit ihren Nachbarn keinen rechten Winkel einschließen und kann auch gekrümmt sein.

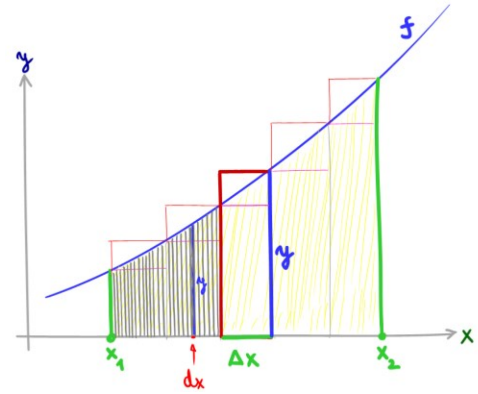


Mit Hilfe des Integrals werden Flächeninhalte dadurch bestimmt, indem das Flächenstück in **n Rechtecke gleicher Breite** zerlegt wird. Die Längen dieser Rechtecke sind die jeweiligen Funktionswerte $y = f(x)$.
Die Breite der Rechtecke wird mit Δx bezeichnet.

Δ … Delta, großes griechisches D, steht für **Differenz**. Es gilt: $\Delta x = \frac{x_2 - x_1}{n}$

Summiert man die Inhalte dieser Rechtecke, so erhält man nicht die Größe der gesuchten Fläche. Wie nebenstehende Skizze zeigt, wird der Flächeninhalt all dieser Rechtecke größer sein als der gesuchte.

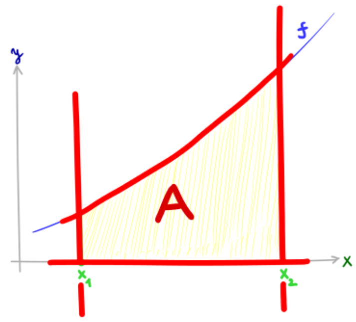
Wir könnten auch Rechtecke wählen, die jeweils unterhalb des Graphen enden. Dann ergäbe die Summe dieser Rechteckflächen eine Fläche, die kleiner ist als der gesuchte Inhalt.



Ohne uns in die exakte Theorie zu vertiefen:

Die Abweichungen bei Berechnung der sogenannten *Ober*- bzw. *Untersummen* werden durch folgende Überlegung vermieden:
Indem wir das gesuchte Flächenstück in unzählige und damit unendlich schmale Rechtecke unterteilen, werden die Über- bzw. Unterlappungsfehler immer kleiner und gehen schließlich gegen Null.
Die Breite dieser Rechtecke geht dabei auch gegen null und wird dann mit dx bezeichnet.
Damit besitzt ein so unendlich schmales Rechteck den Inhalt $y \cdot dx$
Summiert man all die unendlich vielen Rechtecke, so erhält man den Inhalt der gelblich markierten Fläche.

$$A = \int_{x_1}^{x_2} y \cdot dx$$



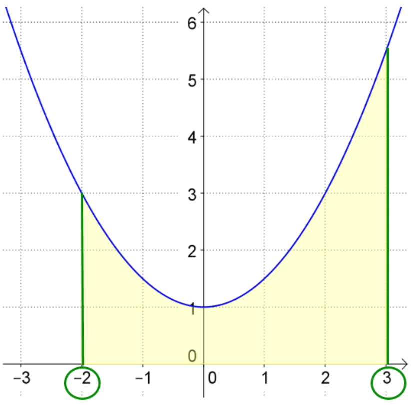
Was **zu merken** ist:

Das Integral berechnet immer den Inhalt jener

Fläche, die innerhalb der sog. Grenzen x_1 und x_2 vom Funktionsgraphen und der waagrechten Achse begrenzt wird.

Beispiel:

Bestimmen Sie den Inhalt jener Fläche, die im Intervall [– 2 ; 3] vom Graphen der Funktion $\mathbf{f(x) = \frac{1}{2}\, x^2 + 1}$ und der x-Achse begrenzt wird.



Wir wollen den Inhalt jener Fläche bestimmen, die innerhalb der Grenzen $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$ von der **Funktion** und der **x-Achse** begrenzt ist.

Das ist die gelb markierte Fläche.

Integrieren wir die Funktion von $x_1 = -2$ bis $x_2 = 3$,dann erhalten wir den Inhalt der gesuchten Fläche, denn das Integral bestimmt ja immer jene Fläche innerhalb der **Grenzen**, die dort vom **Funktionsgraphen** und der **x-Achse** begrenzt ist.

$$A = \int_{-2}^{3} y \cdot dx = \int_{-2}^{3} \left(\frac{1}{2}\, x^2 + 1\right) \cdot dx = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + 1 \cdot x\right]_{-2}^{3} = \left[\frac{x^3}{6} + x\right]_{-2}^{3} =$$

$$y = f(x) = \frac{1}{2}\, x^2 + 1$$

$$= \left(\frac{3^3}{6} + 3\right) - \left(\frac{(-2)^3}{6} + (-2)\right) = \frac{65}{6}\, E^2 = 10.83\, E^2$$

E ... steht für **Längen**-Einheit

E^2 ... steht für **Flächen**-Einheit

Es wird immer

$$\boxed{\text{obere} - \text{untere}}$$

größere rechtsliegende	kleinere linksliegende

Grenze gerechnet

```
from sympy import *
```

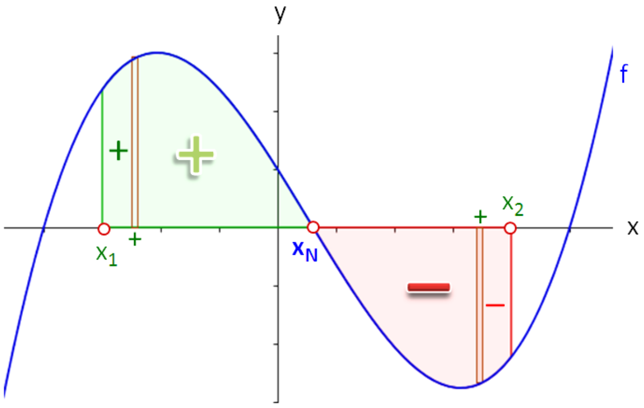
```
y = 1/2*x**2+1
```

```
integral(y, (x, -2, 3))
```

65/6

10.2.2. Grundaufgaben

10.2.2.1. Fläche innerhalb gegebener Grenzen



gegeben: **f (x)** und **[x_1 ; x_2]**

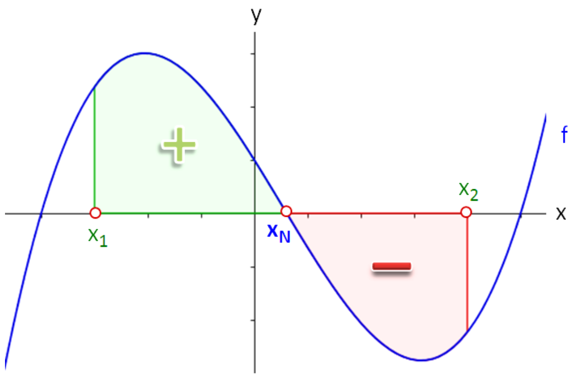
Rufen wir uns in Erinnerung:
Das Integral berechnet Flächeninhalte, indem es jene von Rechtecken ermittelt, deren Längen die jeweiligen y-Werte sind, und die Inhalte der Rechtecke summiert.

In nebenstehender Abbildung besitzen im linken Flächenbereich die Rechtecklängen **positive** y-Werte.
Im rechten Teil der gesuchten Fläche verfügen die Rechtecklängen über **negative** y-Werte, da hier der Graph unterhalb der x-Achse liegt.

Die Rechteckbreiten dx sind **in beiden Fällen positiv**, da $\mathbf{dx} = \frac{x_2 - x_1}{n}$

z.B: $x_1 = -2 \quad x_2 = 3 \quad \mathbf{dx} = \frac{3-(-2)}{n} = \frac{3+2}{n} = \frac{5}{n} > 0$

n ist als Anzahl immer eine positive Zahl



Da der Flächeninhalt eines Rechtecks das Produkt aus Länge mal Breite ist, werden die Rechteckflächen im linken Teilstück positiv, im rechten Teil wohl negativ.

Würden wir von den gegebenen Grenzen x_1 bis x_2 in einem integrieren, so zögen sich die Inhalte der Teilflächen ab und wir erhielten damit ein geometrisch unsinniges Ergebnis!

Deshalb: **Nicht** automatisch **über Nullstellen integrieren !**

Bezogen auf die obige Skizze ergibt sich demnach folgender Rechengang:

(1) **Nullstellen** berechnen

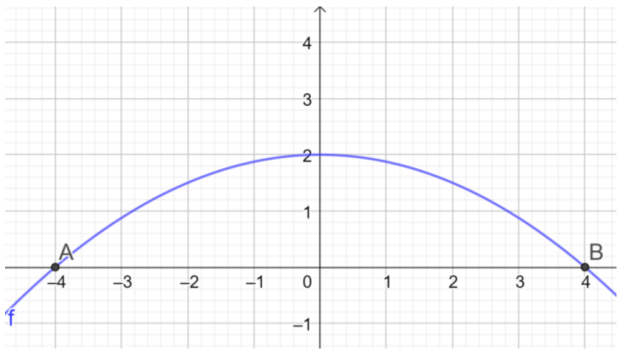
(2) $A_+ = \int_{x_1}^{x_N} y \cdot dx \qquad A_- = \int_{x_N}^{x_2} y \cdot dx \qquad A_{ges} = |A_+| + |A_-|$

Bemerkung 1: Die **Betragstriche | |** bei | A₊ | und | A₋ | bedeuten, dass die Ergebnisse **positiv** zu deuten sind.

Bemerkung 2: Freilich besitzt diese Kurve drei Nullstellen, doch hat für die Flächenberechnung nur x_N Bedeutung.

Beispiel:

Bestimmen Sie den Inhalt jener Fläche, die vom Graphen der Funktion $\mathbf{f(x) = -\frac{x^2}{8} + 2}$ und der x-Achse im Intervall **[0; 6]** begrenzt ist.



(1) Nullstellen:

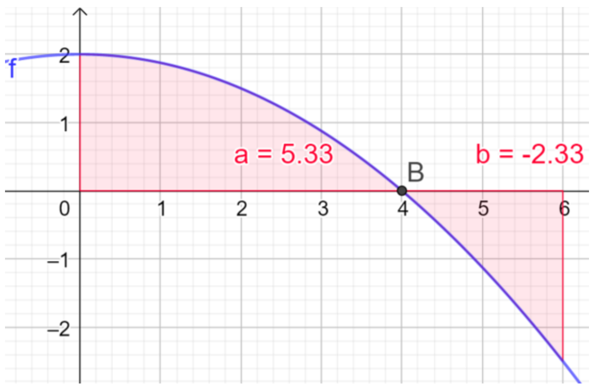
$$0 = -\frac{x^2}{8} + 2 \quad | -2$$

$$-2 = -\frac{x^2}{8} \quad | \cdot 8$$

$$-16 = -x^2 \quad | \cdot (-1)$$

$$16 = x^2 \quad | \sqrt{}$$

$$x_{1/2} = \pm 4$$



(2) Flächenberechnung:

$$A_1 = \int_0^4 \left(-\frac{x^2}{8} + 2\right) \cdot dx = -\frac{x^3}{24} + 2\,x \,\Big|_0^4 =$$

$$\left(-\frac{4^3}{24} + 2 \cdot 4\right) - \left(-\frac{0^3}{24} + 2 \cdot 0\right) = \frac{16}{3} = 5.33$$

$$A_2 = \int_4^6 \left(-\frac{x^2}{8} + 2\right) \cdot dx = -\frac{x^3}{24} + 2\,x \,\Big|_4^6 =$$

$$\left(-\frac{6^3}{24} + 2 \cdot 6\right) - \left(-\frac{4^3}{24} + 2 \cdot 4\right) = -\frac{7}{3} = -2.33$$

$$A_{ges} = |A_1| + |A_2| = 5.33 + 2.33 = 7.66\ E^2$$

```
from sympy import *
```

```
y = -1/8*x**2+2
```

```
solve(y, x)
```

[-4, 4]

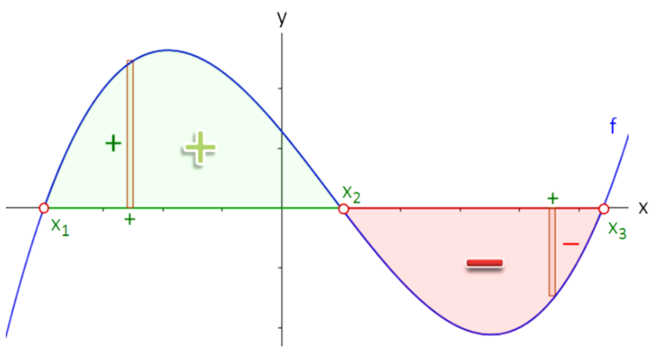
```
integrate(y, (x, 0, 4))
```

$\frac{16}{3}$

```
integrate(y, (x, 4, 6))
```

$-\frac{7}{3}$

10.2.2.2. Fläche von Funktion und x-Achse begrenzt



gegeben: **f (x)**

Der Unterschied zur ersten Art der Flächenberechnung besteht darin, dass wir diesmal **keine Grenzen gegeben** haben. Wie links ersichtlich, sind hier die **Nullstellen die Grenzen**.

Auch bei dieser Art der Flächenermittlung kann ein Flächenteil oberhalb der x-Achse liegen und somit eine positive Zahl als Inhalt ergeben, ein anderer Teil sich unterhalb der x-Achse befinden und einen negativen Flächeninhalt als Ergebnis liefern.

Deshalb integrieren wir
von Nullstelle zu Nullstelle.

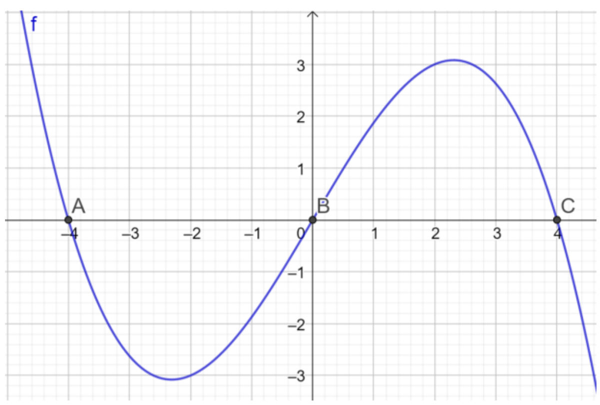
Rechengang bezogen auf die obige Skizze:

(1) **Nullstellen** berechnen

(2) $A_+ = \int_{x_1}^{x_2} y \cdot dx$ $\quad A_- = \int_{x_2}^{x_3} y \cdot dx$ $\quad A_{ges} = |A_+| + |A_-|$

Beispiel:

Bestimmen Sie den Inhalt jener Fläche, die vom Graphen der Funktion $\mathbf{f(x) = -\frac{x^3}{8} + 2\,x}$ und der x-Achse begrenzt ist.



(1) Nullstellen:

$$0 = -\frac{x^3}{8} + 2\,x$$

$$0 = x \cdot \left(-\frac{x^2}{8} + 2\right)$$

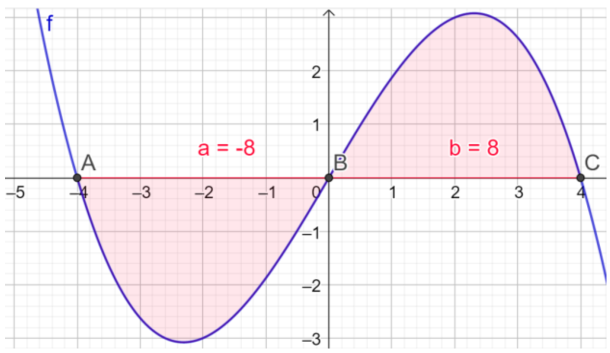
$$x_1 = 0 \lor -\frac{x^2}{8} + 2 = 0 \quad | -2$$

$$-\frac{x^2}{8} = -2 \qquad | \cdot 8$$

$$-x^2 = -16 \qquad | \cdot (-1)$$

$$x^2 = 16 \qquad | \sqrt{}$$

$$x_{2/3} = \pm 4$$



(2) Flächenberechnung:

$$A_1 = \int_{-4}^{0}\left(-\frac{x^3}{8} + 2\,x\right)\cdot dx = -\frac{x^4}{32} + x^2 \,\Big|_{-4}^{0} =$$

$$\left(-\frac{0^4}{32} + 0^2\right) - \left(-\frac{(-4)^4}{32} + (-4)^2\right) = -8$$

$$A_2 = \int_{0}^{4}\left(-\frac{x^3}{8} + 2\,x\right)\cdot dx = -\frac{x^4}{32} + x^2 \,\Big|_{0}^{4} =$$

$$\left(-\frac{4^4}{32} + 4^2\right) - \left(-\frac{0^4}{32} + 0^2\right) = 8$$

$$A_{ges} = |A_1| + |A_2| = 8 + 8 = 16\ E^2$$

Bemerkung: Da die gegebene Funktion ungerade und damit ihr Graph punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung (siehe 7.3.2., S 359 f) ist, müsste man nur den Inhalt *eines* Flächenteils bestimmen und das Ergebnis verdoppeln.

```
from sympy import *
```

```
y = -1/8*x**3+2*x
```

```
solve(y, x)
```

```
[-4, 0, 4]
```

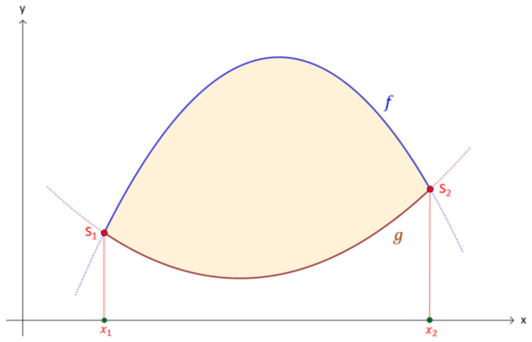
```
integrate(y, (x, -4, 0))
```

-8

```
integrate(y, (x, 0, -4))
```

8

10.2.2.3. Fläche nur von 2 Funktionen begrenzt

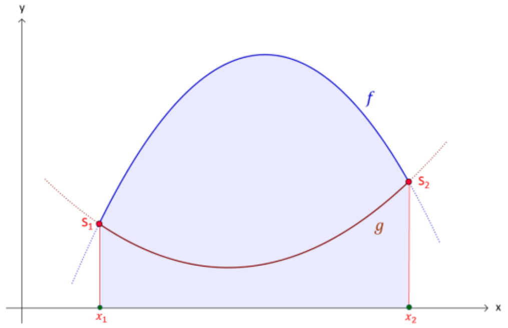


gegeben: $\mathbf{f(x)}$ und $\mathbf{g(x)}$

Wir wollen den Inhalt jenes Flächenstücks bestimmen, das nur von den Graphen der Funktionen **f** und **g** begrenzt wird.

Die **Grenzen** dieses Flächenstücks sind offensichtlich die **x-Koordinaten** der Schnittpunkte $\mathbf{S_1}$ und $\mathbf{S_2}$, die sogenannten **Schnittstellen**.

Dieses Flächenstück reicht **nicht** bis zur x-Achse hinunter.

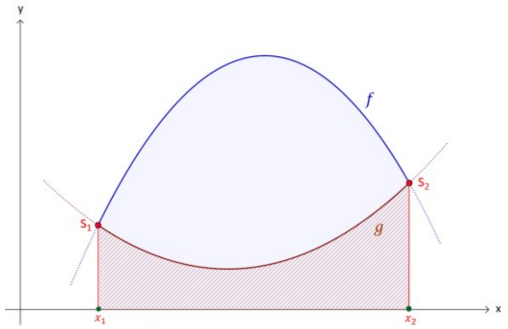


Da das Integral aber immer die Fläche innerhalb der Grenzen bestimmt, die von **Funktion und x-Achse** begrenzt ist, gehen wir so vor:

Zunächst integrieren wir die Funktion **f** innerhalb der Schnittstellen, also

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot dx$$

und erhalten die in nebenstehender Skizze **blau markierte Fläche**.

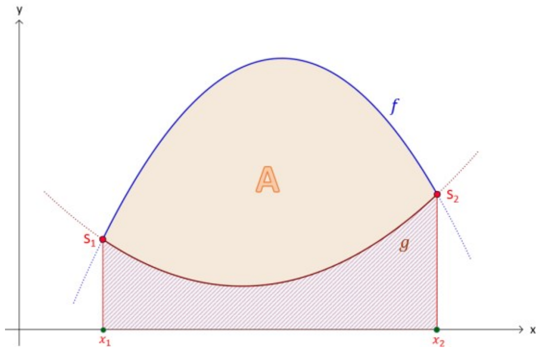


In der blau markierten Fläche ist jener Teil zu viel, der unterhalb des Graphen von **g** liegt.

Deshalb integrieren wir die Funktion **g** innerhalb der Schnittstellen, also

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x) \cdot dx$$

und erhalten die **rot schraffierte Fläche**.



Ziehen wir von der blau markierten die rot schraffierte Fläche ab und erhalten wir den Inhalt **A** der gesuchten Fläche:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot dx - \int_{x_1}^{x_2} g(x) \cdot dx$$

Somit ergibt sich für die Berechnung des Inhalts von **Flächen, die nur von zwei Funktionen begrenzt** sind, folgender Rechengang (bezogen auf die oberen Skizzen):

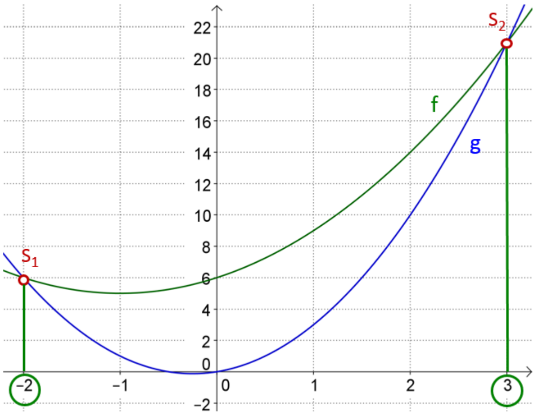
(1) **Schnittstellen** berechnen

(2) $$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot dx - \int_{x_1}^{x_2} g(x) \cdot dx$$

größere – **kleinere** Fläche

Beispiel:

Die Graphen der Funktionen **f (x) = x² + 2 x + 6** und **g (x) = 2 x² + x** begrenzen ein Flächenstück. Berechnen Sie dessen Inhalt.



(1) **Schnittstellen**:

Schnittpunkte sind **gemeinsame Punkte** von Linien.

Gemeinsame Punkte bedeutet rechnerisch gemeinsame Lösungen.

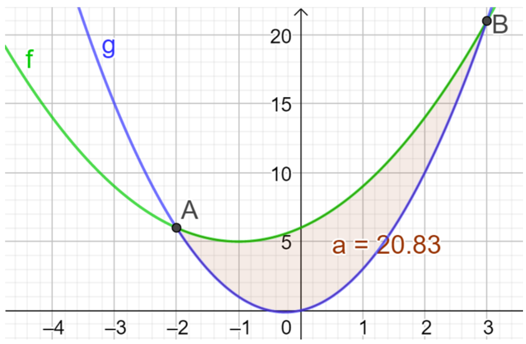
f (x) = x² + 2 x + 6 **g (x) = 2 x² + x**

x² + 2 x + 6 = 2 x² + x | −2 x² − x

−x² + x + 6 = 0 | ·(−1)

x² − x− 6 = 0

Mit pq-Formel (3.1.2.1., S 118 f) gelöst: **$x_1 = -2$** **$x_2 = 3$**



(2) Flächenberechnung:

$$A_f = \int_{-2}^{3} f(x) \cdot dx = \int_{-2}^{3} (x^2 + 2x + 6) \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + 6x\right]_{-2}^{3} =$$

$$= \left(\frac{3^3}{3} + 3^2 + 6 \cdot 3\right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} + (-2)^3 + 6 \cdot (-2)\right) = \frac{140}{3}$$

$$A_g = \int_{-2}^{3} g(x) \cdot dx = \int_{-2}^{3} (2x^2 + x) \cdot dx = \left[\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{3} = \left(\frac{2 \cdot 3^3}{3} + \frac{3^2}{2}\right) - \left(\frac{2 \cdot (-2)^3}{3} + \frac{(-2)^2}{2}\right) = \frac{155}{6}$$

$$A_{ges} = A_f - A_g = \frac{125}{6}\ E^2$$

Die größere von der kleineren Fläche abziehen!
Ansonsten erhält man ein negatives Vorzeichen.

```
from sympy import *
```

```
y1 = x**2+2*x+6
y2 = 2*x**2+x
```

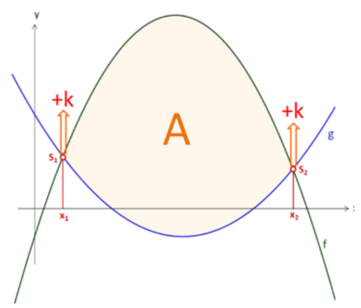
```
solve(y1-y2)
```

[-2, 3]

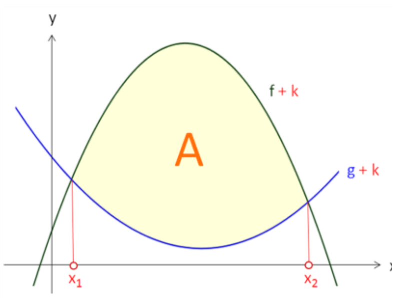
```
integral(y1-y2, (x, -2, 3))
```

125/6

Wenn eine Fläche NUR von zwei Funktionen und NICHT der x-Achse begrenzt wird, ist es unerheblich, ob ein Teil der Fläche unterhalb der x-Achse liegt.



Denken wir uns einen Tisch, der die Form der links dargestellten Fläche besitzt. Verschieben wir diesen Tisch soweit nach oben, dass kein Teil der Fläche unterhalb der x-Achse liegt, so bleibt seine Form und damit Fläche unverändert.



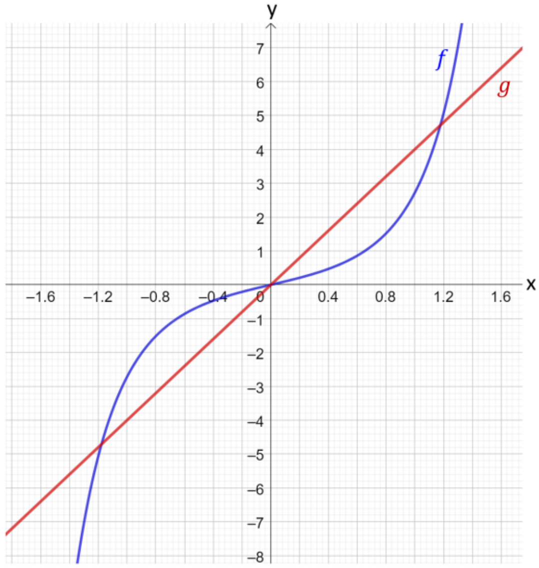
$$A = \int_{x_1}^{x_2} [f(x) + k]\, dx - \int_{x_1}^{x_2} [g(x) + k]\, dx$$

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x).dx + \cancel{\int_{x_1}^{x_2} k.dx} - \int_{x_1}^{x_2} g(x).dx - \cancel{\int_{x_1}^{x_2} k.dx}$$

Die Integrale, die durch die Verschiebung entstehen, ergeben Null.

Beispiel: [58] Ermitteln Sie den Inhalt jener Fläche, die von den Funktionen $f(x) = x \cdot e^{x^2}$ und $g(x) = 4\,x$ begrenzt wird.

① Skizze



② Schnittstellen

$f(x) = x \cdot e^{x^2} \qquad g(x) = 4\,x$

$x \cdot e^{x^2} = 4\,x \;\; | -4\,x$

$x \cdot e^{x^2} - 4\,x = 0$

$x \cdot \left(e^{x^2} - 4\right) = 0$

$\mathbf{x_1 = 0} \;\; \vee \;\; e^{x^2} - 4 = 0 \;\; | +4$

$e^{x^2} = 4 \;\; | \, ln$

$\ln\left(e^{x^2}\right) = \ln(4)$

$x^2 \cdot \ln(e) = \ln(4)$

$x^2 = \ln(4) \;\; | \sqrt{}$

$\mathbf{x_2 = +\sqrt{\ln(4)}} \qquad \mathbf{x_3 = -\sqrt{\ln(4)}}$

Flächenberechnung: Beide Funktionen sind punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.
Deshalb reicht es ein Flächenstück zu berechnen und dessen Inhalt zu verdoppeln:

$$\int_0^{\sqrt{\ln(4)}} \left(4\,x - x \cdot e^{x^2}\right) \cdot dx = \int_0^{\sqrt{\ln(4)}} 4\,x \cdot dx - \int_0^{\sqrt{\ln(4)}} x \cdot e^{x^2} \cdot dx$$

$$\int_0^{\sqrt{\ln(4)}} 4\,x \cdot dx = \left[2\,x^2\right]_0^{\sqrt{\ln(4)}} = 2 \cdot \ln(4) - 2 \cdot 0 = 2 \cdot \ln(4) \approx 2.77$$

$$\int_0^{\sqrt{\ln(4)}} x \cdot e^{x^2} \cdot dx = \left[\frac{1}{2} \cdot e^{x^2}\right]_0^{\sqrt{\ln(4)}} = \frac{1}{2} \cdot e^{\ln(4)} - \frac{1}{2} \cdot e^0 = \frac{1}{2} \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 1 = 1.5$$

Beim Differenzieren müsste man die Produktregel anwenden.
Doch: Ein Faktor ist die (innere) Ableitung des anderen. -> Substitutionsmethode

$z = x^2 \quad \frac{dz}{dx} = 2\,x \rightarrow \quad dx = \frac{dz}{2x} \rightarrow \quad \int x \cdot e^z \cdot \frac{dz}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \int e^z \cdot dz = \frac{1}{2} \cdot e^z = \frac{1}{2} \cdot e^{x^2}$

$A_{ges} = 2 \cdot (2{,}77 - 1{,}5) = 2.54\ E^2$

[58] Beispiel von bzw. nach Prof. Eibl, FH Salzburg

Übung

1) Berechnen Sie den Inhalt jener Fläche, die vom Graphen der Funktion $f(x) = \frac{x^4}{2} - 2\,x$ und der x-Achse im Intervall [–2.5 ; 2.5] begrenzt wird.

2) Ermitteln Sie den Inhalt jener Fläche, die von den Graphen der Funktionen $f(x) = \frac{x^2}{4} + 4$ und $g(x) = \frac{x^2}{2} - 1$ begrenzt wird.

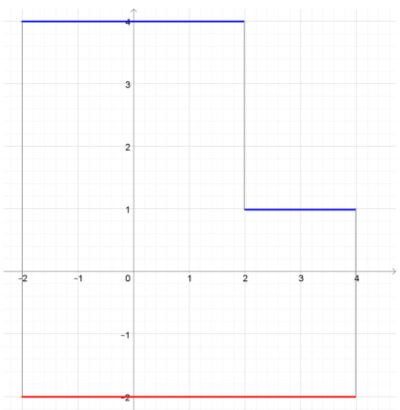
3) Bestimmen Sie den Inhalt jener Fläche, die vom Graphen der Funktion $S(t) = |\sin(t)|$ in den Grenzen $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ begrenzt wird.

4) Ermitteln Sie den Inhalt jener Fläche, die vom Graphen der Funktion $f(t) = (2 + 6\,t)e^{-t}$ und der t-Achse im Intervall [0 ; 10] begrenzt wird.

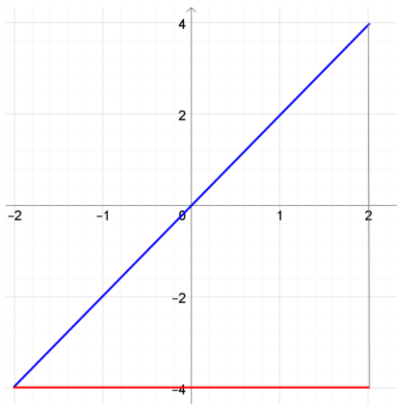
5) Berechnen Sie den Inhalt jener Fläche, die von den Funktionen $u(t) = \sqrt{t}$ $v(t) = t^2$ begrenzt wird.

6) Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche, die von der blauen und roten Linie begrenzt wird.
   i) geometrisch ii) mit Integral

a)



b)



Lösungen: 1) 22,56 E² 2) 29,81 E² 3) 2 E² 4) 8 E² 5) $\frac{1}{3}$ E²

6) a) i) Es sind 30 Quadrate mit dem jeweiligen Inhalt 1 E². Damit beträgt die Gesamtfläche 30 E².

ii) Gleichung der oberen blauen Geraden: $f(x) = 4$
Gleichung der unteren blauen Geraden: $g(x) = 1$
Gleichung der roten Geraden: $h(x) = -2$

$\int_{-2}^{2} f(x) - h(x) \cdot dx + \int_{2}^{4} g(x) - h(x) \cdot dx$

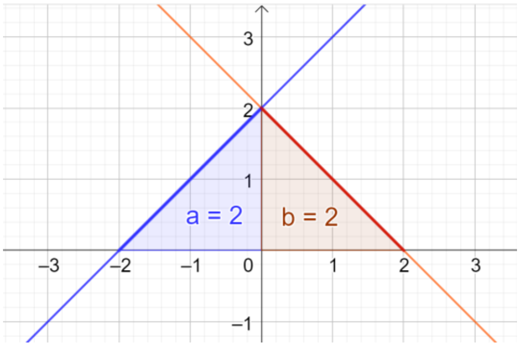
b) i) Rechtwinkeliges Dreieck: $A = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16$ E²

ii) Gleichung der blauen Geraden: $f(x) = 2\,x$
Gleichung der roten Geraden: $h(x) = -2$

$\int_{-2}^{2} f(x) - h(x) \cdot dx$

Beispiel: [47] Berechnen Sie folgendes bestimmtes Integral sowohl durch Integrieren als auch geometrisch:

$$\int_{-2}^{2} f(x) \cdot dx \quad \text{für} \quad f(x) := \begin{cases} 2 + x & \text{für } x \in [-2{,}0) \\ 2 - x & \text{für } x \in [0{,}2] \end{cases}$$



Im Bereich $x \in [-2{,}0)$ ist $f_1(x) = 2 + x$

$$\int_{-2}^{0} (2 + x) \cdot dx = 2\,x + \frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{0} = 2\,E^2$$

Im Bereich $x \in [0{,}2]$ ist $f_2(x) = 2 - x$

$$\int_{0}^{2} (2 - x) \cdot dx = 2\,x - \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{2} = 2\,E^2$$

Damit beträgt die Gesamtfläche $2 + 2 = 4\,E^2$

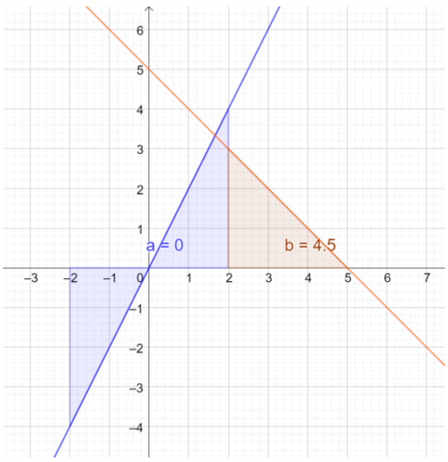
Geometrisch gelöst: Die beiden Teilflächen sind rechtwinkelige Dreiecke bzw. Hälften eines Quadrats.

Der Flächeninhalt eines rechtwinkeligen Dreiecks kann berechnet werden mit $A = \frac{a \cdot b}{2}$ wobei a und b die Katheten sind. Für beide Dreiecke gilt $a = b = 2\,E$.

Somit gilt für die Gesamtfläche $A = 2 \cdot \frac{2 \cdot 2}{2} = 4\,E^2$

Beispiel: [47] Berechnen Sie folgendes bestimmtes Integral sowohl durch Integrieren als auch geometrisch im dargestellten Bereich:

$$\int_{-2}^{5} f(x) \cdot dx \quad \text{für} \quad f(x) := \begin{cases} 2\,x & \text{für } |x| < 2 \\ 5 - x & \text{für } |x| \geq 2 \end{cases}$$



Der Bereich $|x| < 2$ bedeutet $-2 < x < 2$

Da $f(x) = 2x$ (bezüglich des Koordinatenursprungs) punktsymmetrisch ist, sind die blauen rechtwinkeligen Dreiecke gleich groß:

$$\int_{0}^{2} (2\,x) \cdot dx = x^2\big|_{0}^{2} = 4 \qquad\qquad 2 \cdot 4 = 8\,E^2$$

Der Bereich $|x| \geq 2$ bedeutet $(x < -2) \vee (x > 2)$

$$\int_{2}^{5} (5 - x) \cdot dx = 5\,x - \frac{x^2}{2}\Big|_{2}^{5} = 4.5\,E^2$$

Damit beträgt die Fläche der beiden blauen Dreiecke $8 + 4.5 = 12.5\ E^2$

Geometrisch gelöst: Die blauen Teilflächen sind rechtwinkelige Dreiecke. Da $f_1(x)$ bezüglich des Koordinatenursprungs punktsymmetrisch ist, sind diese rechtwinkeligen Dreiecke gleich groß:

$A = 2 \cdot \frac{4 \cdot 2}{2} = 8\ E^2$

Auch der orangefarbene Flächenteil ist ein rechtwinkeliges Dreieck: $A = \frac{3 \cdot 3}{2} = 4.5\ E^2$
Die Gesamtfläche ist somit $8 + 4.5 = 12.5\ E^2$

Beispiel: Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int_0^2 \left[9x^4 - x^2 - 2xe^{x^2+1} - 3f(x)\right] \cdot dx \quad \text{für } f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \le 0.5 \\ 4 & \text{für } x > 0.5 \end{cases}$$

Demnach haben wir zwei Integrale zu lösen: $\int_0^{0.5} \left(9x^4 - x^2 - 2xe^{x^2+1} - 3 \cdot 1\right) \cdot dx$

und $\int_{0.5}^2 \left(9x^4 - x^2 - 2xe^{x^2+1} - 3 \cdot 4\right) \cdot dx$

Wir dürfen gliedweise (+, –) getrennt integrieren:

$$\int_0^{0.5} \left(9x^4 - x^2 - 2xe^{x^2+1} - 3\right) \cdot dx = \frac{9}{5}\, x^5 - \frac{1}{3}\, x^3 - e^{x^2+1} - 3\,x\, |_0^{0.5} = |-2.26|$$

$\int 2x\, e^{x^2+1} dx = e^{x^2+1}$ … Beim Differenzieren Produktregel und ein Faktor (innere) Ableitung des anderen -> Substitutionsmethode

$$z = x^2 + 1 \rightarrow \quad dx = \frac{dz}{2x} \rightarrow \int 2x\, e^z\, \frac{dz}{2x} = \int e^z \cdot dz = e^z$$

$$\int_{0.5}^2 \left(9x^4 - x^2 - 2xe^{x^2+1} - 3 \cdot 4\right) \cdot dx = \frac{9}{5}\, x^5 - \frac{x^3}{3} - e^{x^2+1} - 12\,x\, |_{0.5}^2 \quad = |-108| = 108$$

Somit beträgt die Gesamtfläche $2.26 + 108 = 110.26\ E^2$

Übung

1. Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int_2^1 \left(e^{-x} + \frac{3}{x} - 2\cos(x) + f(x)\right) \cdot dx \quad \text{für } f(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \leq 2 \\ 2\,x^2 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

2. Berechnen Sie folgendes bestimmtes Integral sowohl durch integrieren als auch geometrisch:

$$\int_{-2}^{5} f(x) \cdot dx \quad \text{für } f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \leq 1 \\ 4 & \text{für } |x| > 1 \end{cases}$$

3. Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(2t)\,f(t) \cdot dt \quad \text{für } f(t) := \begin{cases} 3 & \text{für } |t| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{für } |t| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

4. [59] Gegeben ist die Funktion $h(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

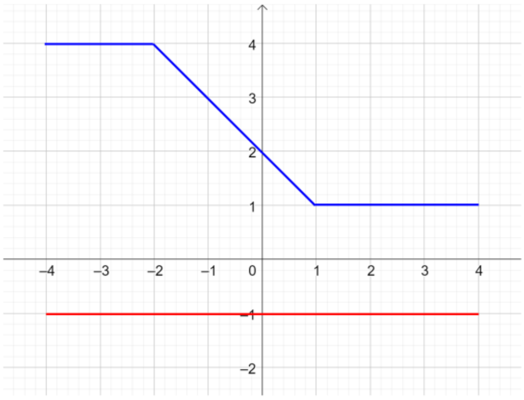
Die Fläche A wird vom Graphen der Funktion $h(x)$, von der x-Achse und von der Geraden $x = k$ ($k > 1$) begrenzt. Es ist A = 2. Bestimmen Sie k.

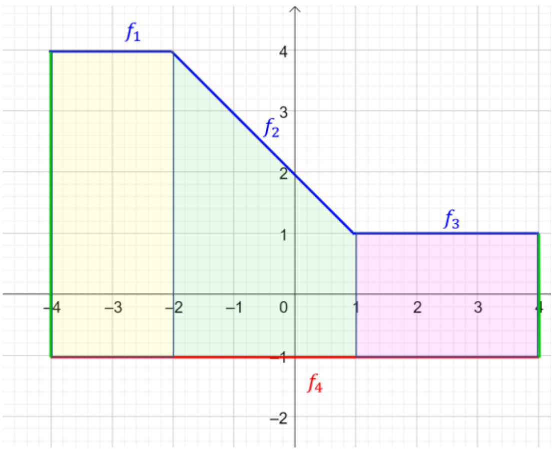
Lösungen: 1. $A = 3.68\;E^2$ 2. $A = 22\;E^2$ 3. Nullstellen bestimmen! $A = 14.14\;E^2$

4. $k = e^2$

[59] Beispiel der Aufnahmeprüfung für (M)INT-Fächer an der ETH-Zürich im Studienjahr 2010/11

Beispiel: [47] Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche zwischen der blauen und roten Linie rein mathematisch, also mit Integration, und auch geometrisch.





Offensichtlich handelt es sich um eine Fläche, die im Intervall $[-4, 4]$ von der blauen und der roten Funktion, also von zwei Funktionen begrenzt wird. Dabei ist es unerheblich, ob ein Teil der Fläche oberhalb und ein Teil unterhalb der x-Achse liegt.
(Siehe 10.2.2.3, S 495 f)

Allerdings besteht die blaue Funktion aus drei verschiedenen Funktionen:

f_1 ist eine Parallele zur x-Achse im Abstand $+4$. Auf ihr liegen alle Punkte mit $y = 4$. Deshalb lautet die Gleichung von $f_1: y = 4$.

f_2 ist Teil einer Geraden mit $d = 2$ und der Steigung $k = -1$.
(Siehe 7.3.1., S 357 f).
Deshalb lautet die Gleichung von $f_2: y = -1 \cdot x + 2$

f_3 ist eine Parallele zur x-Achse im Abstand 1. Auf ihr liegen alle Punkte mit $y = 1$. Deshalb lautet die Gleichung von $f_3: y = 1$.

f_4 ist eine Parallele zur x-Achse im Abstand -1. Auf ihr liegen alle Punkte mit $y = -1$. Deshalb lautet die Gleichung von $f_4: y = -1$.

Somit haben wir die drei Flächenstücke mit drei Integralrechnungen zu bestimmen:

$$A_1 = \int_{-4}^{-2} (f_1 - f_4) \cdot dx = \int_{-4}^{-2} [4 - (-1)] \cdot dx = \int_{-4}^{-2} 5 \cdot dx = 5x|_{-4}^{-2} = 5.(-2) - 5.(-4) = 10$$

$$A_2 = \int_{-2}^{1} (f_2 - f_4) \cdot dx = \int_{-2}^{1} [-x + 2 - (-1)] \cdot dx = \int_{-2}^{-1} (-x + 3) \cdot dx = -\frac{x^2}{2} + 3x|_{-2}^{1} = 2.5 - (-8) = 10.5$$

$$A_2 = \int_{1}^{4} (f_3 - f_4) \cdot dx = \int_{1}^{4} [1 - (-1)] \cdot dx = \int_{1}^{4} 2 \cdot dx = 2x|_1^4 = 8 - 2 = 6$$

Damit beträgt der gesamte Flächeninhalt $A = 10 + 10.5 + 6 = 26.5\ E^2$

Viel einfacher ist es, den Flächeninhalt geometrisch zu bestimmen:

A_1 ist ein Rechteck mit der Länge 5 und der Breite 2: $A_1 = 5 \cdot 2 = 10$

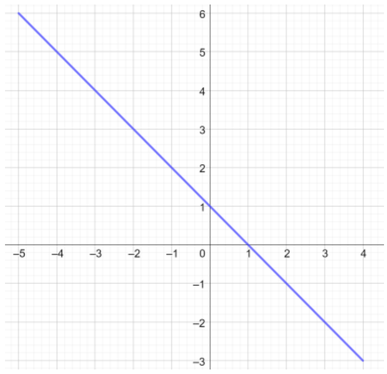
A_2 setzt sich aus einem rechtwinkeligen Dreieck mit den Katheten der Länge 3 zusammen und einem Rechteck mit der Länge 3 und der Breite 2: $A_2 = \frac{3 \cdot 3}{2} + 3 \cdot 2 = \frac{9}{2} + 6 = 10.5$

A_3 ist ein Rechteck mit der Länge 3 und der Breite 2: $A_3 = 3 \cdot 2 = 6$

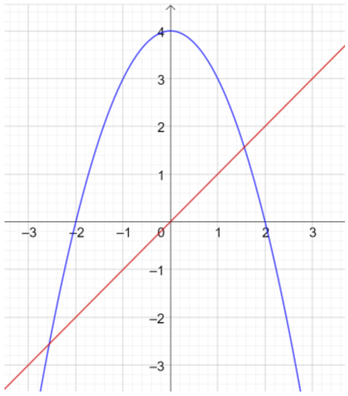
Ergibt in Summe auch $10 + 10.5 + 6 = 26.5\ E^2$

Übung

1. Berechnen Sie die Fläche zwischen der blauen Kurve und der x-Achse rein mathematisch, also mit Integration als auch geometrisch.



2. Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die von den beiden Funktionen eingeschlossen wird.



Lösungen:

1. 20.5 E²
2. 11.68 E²

10.3. Bewegungsaufgaben II

Wenn einzelne Begriffe und Bezeichnungen nicht mehr geläufig sind: 9.4.4., S 461 f

Differenzieren und Integrieren sind die jeweiligen Umkehrungen.

$$\boxed{\begin{array}{l} v(t) = s'(t) \rightarrow \quad s(t) = \int v(t).dt \\ a(t) = v'(t) \rightarrow \quad v(t) = \int a(t).dt \end{array}}$$

Beispiel:


© Pixabay

Ein Zug startet im HB Zürich und bewegt sich mit einer Momentangeschwindigkeit von $v(t) = 40\,t^2 + 30\,t$ in km/h im Intervall [0 h; 2 h].

a) Stellen Sie die Weg-Zeit-Funktion dieser Bewegung auf.

$$s(t) = \int v(t)\cdot dt = \int (40\,t^2 + 30t)\cdot dt = \frac{40}{3}\,t^3 + 15\,t^2 + s_0$$

Bei $s(t)$ ist die Integrationskonstante $s_0 = s(0)$
Also der **Abstand vom Ortsnullpunkt zu Beginn** der Bewegung.

$$s(t) = \frac{40}{3}\,t^3 + 15\,t^2$$

Wenn die Bewegung im Ortsnullpunkt startet, ist $s_0 = 0$

b) Ermitteln Sie den Weg, den der Zug in der angegebenen Zeit zurücklegt.

$$s(2) = \frac{40}{3}\,2^3 + 15\cdot 2^2 = 166.67\ \text{km}$$

Beispiel: [47] Welchen Weg legt ein Objekt zurück, das 7 Sekunden lang mit 3 m/s^2 beschleunigt?

Rechnerisch gelöst:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}) = \int \boldsymbol{a}(\boldsymbol{t}) \cdot dt = \int 3 \cdot dt = 3\,t + C = 3\,t + \boldsymbol{v_0} \qquad = 3\,t$$

Die Integrationskonstante ist hier die **Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{0})$**

Unter der Annahme $v_0 = 0$

$$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{t}) = \int \boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}) \cdot dt = \int 3\,t \cdot dt = \frac{3}{2}\,t^2 + C_2 = \frac{3}{2}\,t^2 + s_0 \qquad = \frac{3}{2} t^2$$

Die Integrationskonstante ist hier der Abstand vom Ortsnullpunkt zu Beginn der Bewegung: $\boldsymbol{s_0} = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{0})$

Unter der Annahme $s_0 = 0$

Der Weg in den ersten 7 Sekunden: $s(7) - s(0) = \frac{3}{2} \cdot 7^2 - \frac{3}{2} \cdot 0^2 = 73.5\ m$

Ein falscher Lösungsweg wäre, würde man so rechnen:

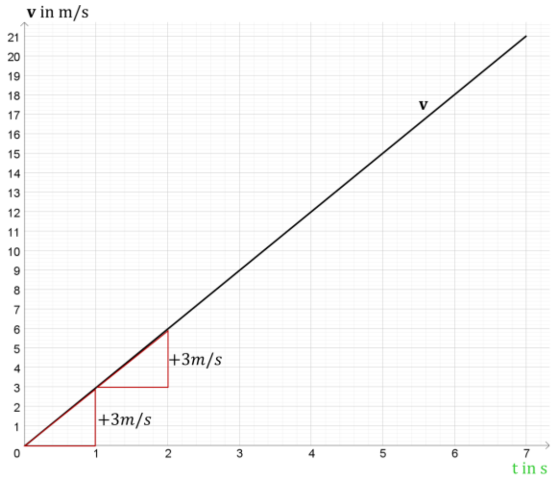
$$v(t) = \int_0^7 a(t) \cdot dt = \int_0^7 3 \cdot dt = [\,3\,t\,]_0^7 = \ 3 \cdot 7 - 3 \cdot 0 = 21\ m/s$$

Denn hier träfen wir die Annahme, dass die Geschwindigkeit in den 7 Sekunden **konstant** (gleichbleibend) ist. Das ist aber ein Widerspruch zur Angabe! Wenn die Beschleunigung 3 m/s² beträgt, dann verändert sich in den 7 Sekunden die Geschwindigkeit, sie wird größer.

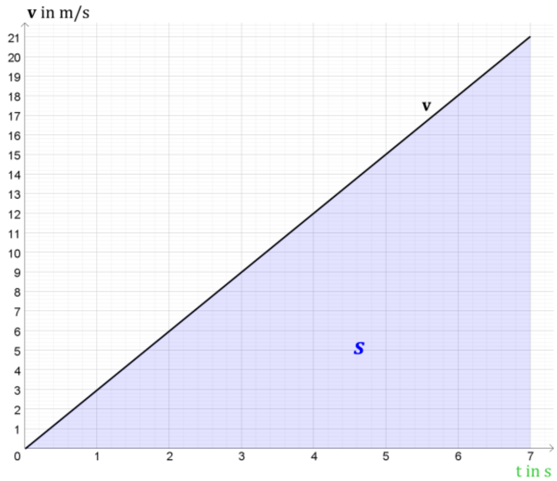
Ein grobes Bild:

Auto mit Automatikgetriebe.
Konstante Beschleunigung: Das Gaspedal bleibt in einer bestimmten Stellung.
Ändernde Beschleunigung: Das Gaspedal wird gedrückt oder es wird gebremst (negative Beschleunigung)

Graphische Lösung:



Eine Beschleunigung von $3\ m/s^2$ bedeutet, dass die Geschwindigkeit pro Sekunde um $3\ m/s$ **mehr** wird.



Die Geschwindigkeit v ist die erste Ableitung von s. Entsprechend ist s das Integral von v.

Ein Integral mit Grenzen bestimmt die Fläche innerhalb der Grenzen, die zwischen Funktion und waagrechter Achse liegt.

In diesem Fall ist diese Fläche ein rechtwinkeliges Dreieck:

$$\frac{\mathbf{7} \cdot \mathbf{21}}{2} = 73.5$$

Die Einheit der Fläche ist nicht automatisch m^2 oder Entsprechendes, sondern

die **Einheit der Fläche** = **Einheit der einen Achse** **mal** **Einheit der anderen Achse**

In unserem Beispiel $\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{\frac{m}{s}} = \mathbf{m}$ ... Meter

Somit beträgt der zurückgelegte Weg in den ersten 7 Sekunden (= Abstand vom Ortsnullpunkt nach 7 Sekunden) 73.5 m.

„Für uns gläubige Physiker hat die Scheidung von Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft nur die Bedeutung einer, wenn auch hartnäckigen, Illusion.“

Albert EINSTEIN
(1879–1955)

XI DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

11.1. Grundbegriffe

Differentialgleichungen (DGL) sind aus den Naturwissenschaften nicht wegzudenken.
In der Physik beschreiben sie Bewegungen, von atomaren Teilchen bis zu Galaxien. In der Elektrodynamik treffen wir bei den MAXWELL[59]-Gleichungen, in der Quantenmechanik bei den SCHRÖDINGER[60]-Gleichungen auf Differentialgleichungen.
Es gibt Stimmen, die meinen, Physik ohne DGL sei unmöglich. In der Biologie oder der Evolutionstheorie werden damit Prozesse des Wachstums treffend beschrieben. In der Informatik kommen DGL beispielsweise im *Image-Inpainting*, dem Herausrechnen von Schriften oder Logos aus Bildern, zum Einsatz.

© Pixabay

Wir haben bereits DGL gelöst (siehe 10.3., S 505).

In DGL kennt man (unter anderem) die Steigung f ’(x) = y ’, oder Krümmung f ”(x) = y ” oder höhere Ableitungen einer Funktion und möchte f(x) = y bestimmen.

Beispiel:

© Pixabay

Die Magnetschwebebahn *Transrapid* beschleunigt gleichmäßig mit a = 0.93 m /sec ^{2}.

Mit dieser Angabe ist es möglich, die Geschwindigkeits-Zeit–Funktion und die Weg-Zeit–Funktion für diese Bewegung zu ermitteln:

Zunächst die notwendigen Begriffe (Siehe auch 9.4.4., S 461 f)

t … Zeitdauer, die seit Beobachtungsbeginn (t = 0) vergangen ist
$a(t)$ … momentane Beschleunigung
$v(t)$ …. momentane Geschwindigkeit, nachdem die Zeitdauer t vergangen ist
$s(t)$ … momentaner Abstand vom Ortsnullpunkt, nachdem die Zeitdauer t vergangen ist.

[59] James Clerk MAXWELL (1831 – 1879), schottischer Physiker. Seine Gleichungen bildeten die Grundlage der Elektrodynamik.
[60] Erwin SCHRÖDINGER (1887 – 1961), österreichischer Physiker. Gilt als einer der Begründer der Quantenmechanik.

Die momentane Beschleunigung ist die Veränderung der Geschwindigkeit innerhalb einer gewissen Zeitdauer, also

Hier der Fall mit konstanter Beschleunigung, also $a(t) = a$:

$$a(t) = \boldsymbol{v}'(\boldsymbol{t}) = \frac{\boldsymbol{d\,v}(\boldsymbol{t})}{\boldsymbol{dt}} \qquad v(t) = \int a \cdot dt = a \cdot t + C = a \cdot t + \boldsymbol{v_0}$$

Die Integrationskonstante bei $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})$ ist hier als **Anfangsgeschwindigkeit** $\boldsymbol{v_0} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{0})$ zu deuten.

Die momentane Geschwindigkeit ist die Veränderung des Ortes innerhalb einer bestimmten Zeitdauer, also

$$v(t) = \boldsymbol{s}'(\boldsymbol{t}) = \frac{\boldsymbol{d\,s}(\boldsymbol{t})}{\boldsymbol{dt}} \qquad s(t) = \int v(t) \cdot dt = \int (a \cdot t + \boldsymbol{v_0}) \cdot dt = \frac{a}{2}\, t^2 + v_0 \cdot t + \boldsymbol{s_0}$$

Die Integrationskonstante bei $s(t)$ ist hier als der **Abstand von der Ortsnullmarke zu Beobachtungsbeginn** $\boldsymbol{s_0} = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{0})$ zu deuten.

Steht der Zug zu Beobachtungsbeginn und fährt von der "Nullmarke" ab, so sind $\boldsymbol{v_0} = \boldsymbol{0}$ m/s und $\boldsymbol{s_0} = \boldsymbol{0}$ m und wir erhalten:

Beschleunigung-Zeit-Funktion $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{a}$

Geschwindigkeits-zeit-Funktion $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{t}$

Weg-Zeit-Funktion $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{t}) = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{2}}\, \boldsymbol{t^2}$

Auch wenn $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{t})$ die Weg-Zeit-Funktion genannt wird, handelt es sich bei $\boldsymbol{s}$ um den jeweiligen **Abstand** vom Ortsnullpunkt. (Siehe auch 9.4.4., S 461 f)

Welche Geschwindigkeit in km/h besitzt der *Transrapid* 2 Minuten nach Abfahrt?

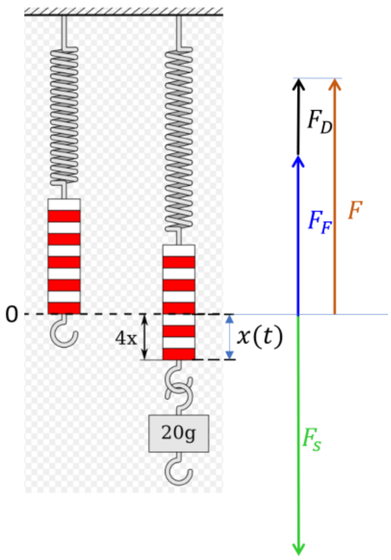
$$v(120) = 0.93 \cdot 120 = 111.6 \text{ m/s}$$

$$\frac{111.60 \cdot m \cdot 3\,600}{1 \cdot s \cdot 3\,600} = \frac{401\,760 \cdot m}{3\,600 \cdot s} = \frac{401.76 \cdot km}{1 \cdot h} = 401.76\ km/h$$

Welche Strecke in km hat der *Transrapid* bis dahin zurückgelegt?

$s(120) = \frac{0{,}93}{2} \cdot 120^2 = 6\,696$ m = 6.696 km

Beispiel: Federkraft



Grundbild: Hookesches Gesetz – Wikipedia

Es geht um die Kraft, die bei Belastung durch eine Masse auf einer Feder wirkt und sie dehnt (Auslenkung):

Wir suchen $x(t)$ … Ausdehnung der Feder zum Zeitpunkt t

Die Federkraft F_F wirkt gegen die die Auslenkung und ist proportional zur Auslenkung $x(t)$:

$$F_F = -k \cdot x(t) \quad \text{(Hookesches Gesetz[61])}$$

k … Federkonstante (Proportionalitätsfaktor)

Zusätzlich wirkt Reibung (Dämpfung) gegen die Bewegung, abhängig in welchem Medium (Gas, Flüssigkeit) sich die Feder befindet. Diese Kraft wirkt auch gegen die Auslenkung und ist Abhängig von der Geschwindigkeit v der Auslenkung.

$$F_D = -c \cdot v = -c \cdot \frac{d\,x(t)}{d\,t}$$

Nach Newton[62] addieren sich einzelne Kräfte und für jede Kraft gilt, dass sie das Produkt aus Masse mal Beschleunigung ist:

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{d^2\,x(t)}{d\,t^2}$$

F_s … Schwerkraft

Somit gilt $F = F_F + F_D$

$$m \cdot \frac{d^2\,x(t)}{d\,t^2} = -k \cdot x(t) - c \cdot \frac{d\,x(t)}{d\,t}$$

Dabei handelt es sich um eine *gewöhnliche DGL 2. Ordnung*.

Im Folgenden erhalten wir eine Übersicht über die wichtigsten Grundtypen von Differentialgleichungen.
Die Aufzählung der Arten erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Hier soll vielmehr ein Einblick in die Systematik und Berechnungen sowie einige konkrete Anwendungen gewährt werden.

[61] Robert Hooke (1635 – 1702), englischer Universalgelehrter
[62] Sir Isaac Newton (1642 – 1726), einer der größten Physiker

In diesem Skript werden nur **gewöhnliche DGL** behandelt.

Sind die gesuchten **Funktionen** nur von **einer Variablen**, z.B. x , **abhängig**, so spricht man von **gewöhnlichen DGL**.

Anders ausgedrückt: Bei gewöhnlichen DGL gibt es nur **eine unabhängige Variable**.

Beispiele: $2\,y' + y = x^2$ Kann man auch so schreiben: $2\,y'(x) + y(x) = x^2$ oder $2\,\frac{d\,y}{d\,x} + y = x^2$

$\sqrt[3]{x} \cdot y'' + \sin(x) \cdot y = \ln\,(1+x)$ Kann man auch so schreiben: $\sqrt[3]{x} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + \sin(x) \cdot y = \ln\,(1+x)$

Bemerkungen: * $\frac{d\,y}{dx}$ bedeutet, dass y von x abhängig ist und nach der Variablen x differenziert wird.

* Statt y könnten wir z.B. auch $f(x)$ schreiben.

* $\frac{d\,y}{dx} = y'$ ... 1. Ableitung $\frac{d^2\,y}{dx^2} = y''$ ... 2. Ableitung $\frac{d^n\,y}{dx^n} = y^{(n)}$ ... n-te Ableitung

In Partiellen DGL hängt die gesuchte Funktion von mehreren unabhängigen Variablen ab und es kommen sogenannte partielle Ableitungen der Funktion vor.

Beispiele: $2\,y(x,t) + \frac{\partial\,y}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial\,y}{\partial t}(x,t) = 2\,t \cdot x^2$

Bemerkung: $\frac{\partial\,y}{\partial x}$ bedeutet, dass y nach der Variablen x abgeleitet wird. In diesem Fall wird t als **Konstante** behandelt.

$\frac{\partial\,y}{\partial t}$ bedeutet, dass y nach der Variablen t abgeleitet wird. In diesem Fall wird x als **Konstante** behandelt.

$\frac{\partial\,y}{\partial x}$ und $\frac{\partial\,y}{\partial t}$ nennt man **partielle** Ableitungen von y

Beispiel: $y(x,t) = 2\,x^2 - 3\,t$ $\frac{\partial\,y(x,t)}{\partial x} = 4\,x$ $\frac{\partial\,y(x,t)}{\partial t} = -3$

11.2. DGL 1. Ordnung

In DGL 1. Ordnung ist die höchste vorkommende Ableitung der gesuchten Funktion die 1. Ableitung.

Beispiele: $3\,y' - \frac{1}{2}\,y = x^2$ $\qquad -0.125\,y^2 + \frac{1}{8}\,\frac{dy(t)}{dt} = -\left(1-\frac{t}{4}\right)^4$

$2\,y'' - 3\,y' - \frac{1}{2}\,y = x^2$ ist eine DGL **2.** Ordnung

Wir behandeln hier nur **lineare** DGL:

In linearen DGL kommen die gesuchte Funktion und ihre Ableitungen nur **linear** vor und es kommen keine Produkte der gesuchten Funktion mit ihren Ableitungen oder Verkettungen mit der gesuchten Funktion vor.

Beispiele: $y' - \frac{1}{2}\,y = x^2$ $\qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{dy(t)}{dt} = -\left(1-\frac{t}{4}\right)^4$

NICHT linear ist z.B.: $(\sin(x))\cdot y^2 - y^3\cdot y' = x$

Die allgemeine Form einer linearen gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung lautet:

$$\boxed{y' + p(x)\cdot y = s(x)}$$

$p(x)$ … Vorzahl (Koeffizient) von y, die abhängig von x sein kann.

$s(x)$ ist das sog. **Störglied**. Ist $s(x) = 0$, handelt es sich um eine **homogene Differentialgleichung**,

anderenfalls ist die **DG inhomogen**

y … **gesuchte Funktion**

$y\,'$ deren **1. Ableitung**

Beispiel:

$$\boldsymbol{y' \underbrace{- \frac{1}{x}}_{p(x)} \cdot y = \underbrace{x \cdot cos(x)}_{s(x)}}$$

Im Folgenden behandeln wir die **mögliche**n **Fälle**:

Fall 1: $\boldsymbol{p(x) = 0 \ \wedge \ s(x) \neq 0}$: **DGL**: $\boldsymbol{y' + 0 \cdot y = s(x) \rightarrow \ y' = s(x)}$

Beispiel: $y' - x = e^x$

$$y' - x = e^x \quad | + x$$

$$y' = \underbrace{e^x + x}_{s(x)}$$

Wir verwenden hier die Schreibweise

$$\boldsymbol{y' = \frac{dy}{dx}}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x + x$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x + x \quad | \cdot dx$$

Trennung der Variablen:

Ausdrücke mit y auf die eine Seite der Gleichung, jene mit x auf die andere.

$$dy = (e^x + x) \cdot dx \quad \Big| \int$$

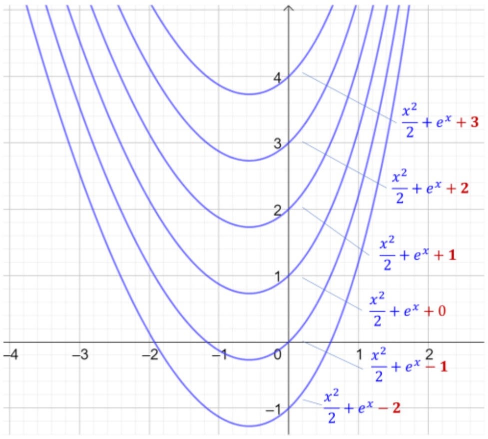
$$\int dy = \int (e^x + x) \cdot dx$$

Um von der Ableitung auf die Stamm-Funktion zu gelangen, **integrieren** wir die Gleichung (zur Erinnerung: differenzieren und integrieren sind die jeweiligen Umkehrungen).

$\int dy = y \qquad \int (x + e^x)\, dx = \frac{x^2}{2} + e^x$ (10.1.1., S 471 f & 10.1.2., S 476 f)

$$\boldsymbol{y = \frac{x^2}{2} + e^x + C}$$

allgemeine Lösung, sog. **allgemeines Integral**



Die Integrationskonstante C ist hier von erheblicher Bedeutung!

Die allgemeine Lösung **der Differentialgleichung** besteht nämlich aus **unendlich vielen Lösungen**, einer links im Bild angedeuteten Kurvenschar, die sich um den Summanden C unterscheiden.

Will man eine bestimmte Funktion dieser Kurvenschar ermitteln, weil z.B. nur eine der Funktionen einer konkreten Problemstellung entspricht, bedarf es einer weiteren Angabe, der sog.
Anfangs- oder Randbedingung, auch
Anfangswertproblem genannt.

Nehmen wir an, unsere **Anfangsbedingung** lautet $f(0) = y(0) = 0$:

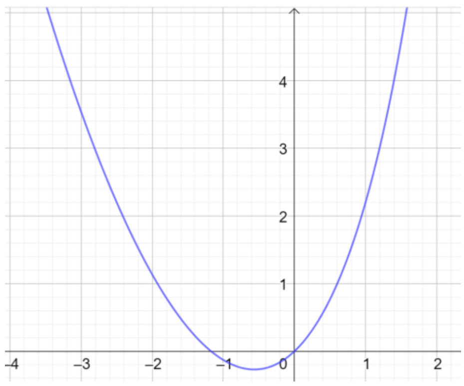
$\mathbf{0 = \frac{0^2}{2} + e^0 + C}$ eingesetzt in das allgemeine Integral (die allgemeine Lösung)

$0 = \frac{0}{2} + 1 + C$

$0 = 0 + 1 + C$

$0 = 1 + C \mid -1$

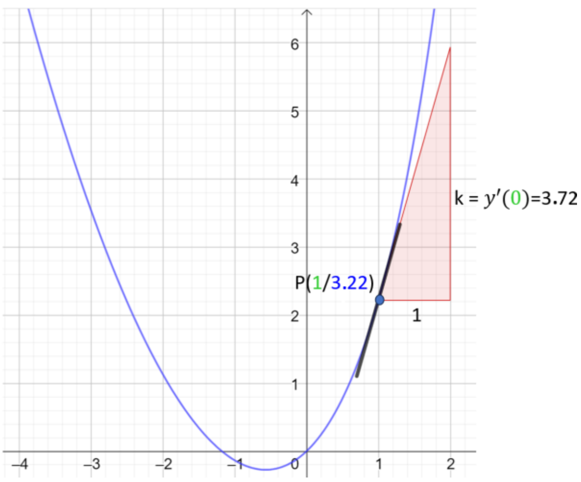
C = – 1



Die gesuchte Funktion lautet damit

$y = x^2 + e^x - 1$ (**partikuläre Lösung**)

und hat nebenstehenden Verlauf.



Was bedeutet die DGL $y' = e^x + x$ eigentlich geometrisch?

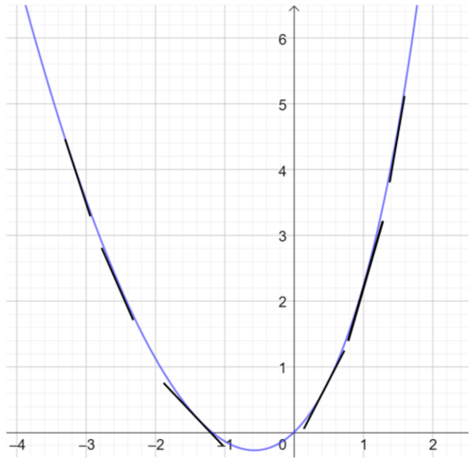
y' ist die **Steigung**, also die **Richtung** .

Setzen wir beispielsweise für **x = 1**, so lautet

y = f (1) = $\frac{1^2}{2} + e^1 - 1 = 2.22$ und die Richtung (Steigung)

der Kurve im Punkt P (1/2.22) beträgt $y' = 1 + e^1 = \mathbf{3.72}$

Graphisch dargestellt ist die Kurven-Richtung in diesem Punkt durch die Tangente im Punkt P, genannt das **Linienelement**.



Auf diese Weise lässt sich in jedem Punkt der Funktion und nötigenfalls der gesamten Kurvenschar die konkrete Richtung (das Linienelement) ermitteln.

Die **Gesamtheit aller Linienelemente** heißt **Richtungsfeld**.

Mit diesen Angaben lässt sich beispielsweise die Stärke und Richtung eines elektrischen oder magnetischen Feldes in jedem beliebigen Punkt genau beschreiben.

Fassen wir zusammen:

Rechenschritte für eine **lineare gewöhnlichen DGL 1. Ordnung**	
1.	$y' = \dfrac{dy}{dx}$
2.	**Trennung der Variablen**
3.	**integrieren** $\rightarrow$ **allgemeine(s)** (unbestimmtes) **Integral (Lösung)**
4.	**Anfangs-** bzw. **Randbedingung** $\rightarrow$ **partikuläre Lösung**

Diese Rechenschritte finden **auch bei homogenen Differentialgleichungen** ihre Verwendung, die wir in Fall behandeln.

Beispiel: [63]

In welcher Zeit kühlt sich ein Körper, der auf 100° C erhitzt wurde, auf 25° C ab, wenn die Außentemperatur 20° C beträgt, sich der Körper in 10 Minuten auf 60° C abkühlt und die Abkühlungsgeschwindigkeit proportional der Temperaturdifferenz von Körper und Außentemperatur ist?

Wir betrachten $T(t)$: t … Zeit in Minuten
$T(t)$ … Temperatur in °C nach t Minuten

$T(0) = 100$

$T(10) = 60$

[63] Beispiel aus der Aufgabensammlung zur Höheren Mathematik der TU Chemnitz 2014

Die DGL lautet:

$T'(t) = k \cdot (T - 20)$ (NEWTONsches Abkühlungsgesetz)

$\frac{dT}{dt} = k \cdot (T - 20) \mid : (T - 20) \mid \cdot dt$ Trennung der Variablen

$$\frac{dT}{T - 20} = k \cdot dt$$

$$\frac{1}{T - 20} \cdot dT = k \cdot dt \mid \int$$

$$\int \frac{1}{T - 20} \cdot dT = \int k \cdot dt$$

$\ln|T - 20| = k \cdot t + C$ * ... siehe nächste Seite

$T(0) = 100: \ \ln|100 - 20| = k \cdot 0 + C \rightarrow \ln(80) = C$

$T(10) = 60: \ \ln|60 - 20| = k \cdot 10 + C$

$\ln(40) = 10\,k + \ln(80) \mid -\ln(80))$

$\ln(40) - \ln(80) = 10\,k$

$\ln\left(\frac{40}{80}\right) = 10\,k \mid : 10$ Siehe 3.1.4.4., S 139 f

$$\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{10} = k$$

* $\ln|25 - 20| = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{10} \cdot t + \ln(80) \mid -\ln(80)$

$\ln|5| = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{10} \cdot t + \ln(80) \mid -\ln(80)$

$\ln|5| - \ln(80) = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{10} \cdot t \mid \cdot 10$

$10 \cdot [\ln|5| - \ln(80)] = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot t \mid : \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\frac{10 \cdot [\ln|5| - \ln(80)]}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = t$$

$t = 45$

Nach 45 Minuten ist der Körper auf 25° C abgekühlt.

Fall 2: $p(x) \neq 0 \;\wedge\; s(x) = 0$: **DGL:** $y' + p(x) \cdot y = 0$

Eine solche Gleichung heißt gewöhnliche **homogene** **Differentialgleichung**

Beispiel:

$\underbrace{y' - 2x}_{p(x)} \cdot y = 0 \quad | \; + 2x \cdot y$

$y' = 2x \cdot y$ Wir setzen $y' = \frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot y \quad | \cdot dx$ **Trennung der Variablen**

$dy = 2x \cdot y \cdot dx \quad | \; : y$

$\frac{dy}{y} = 2x \cdot dx$

$\frac{1}{y}\, dy = 2x \cdot dx \quad | \quad \int$ **integrieren**

$\int \frac{1}{y}\, dy = \int 2x\, dx$ $\int \frac{1}{y}\, dy = \ln|y|$ $\int 2x\, dx = 2.\frac{x^2}{2} = x^2$ (10.1.1., S 471 f)

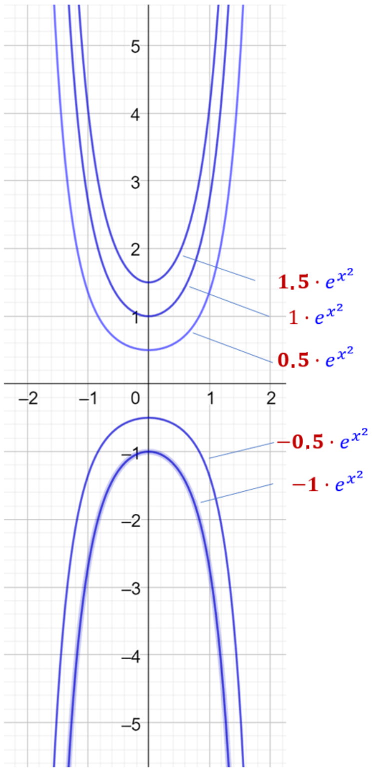
$\ln|y| = x^2 + C_1 \quad | \quad e$ exponenzieren (3.1.4.4., S 139 f)

$e^{\ln|y|} = e^{x^2 + C_1}$ $e^{\ln|x|} = y$ $e^{x^2+C_1} = e^{x^2} \cdot e^{C_1}$ nach der Regel $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$ (2.2.2, S 73)

$y = e^{x^2} \cdot e^{C_1}$ e^{C_1} ist selbst eine Konstante, nennen wir sie C

$y = e^{x^2} \cdot C$

$\boldsymbol{y = C \cdot e^{x^2}}$ **allgemeines Integral** (allgemeine Lösung)



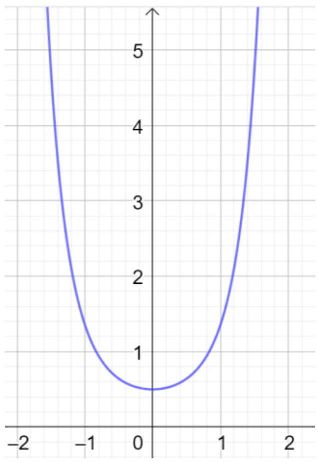
Auch hier stellt das **allgemeine Integral** eine **Kurvenschar** dar.

Liegt eine konkrete **Anfangsbedingung** vor, z.B. $y = f(0) = \frac{1}{2}$, so ergibt sich folgende **partikuläre Lösung**:

$y = C \cdot e^{x^2}$

$\frac{1}{2} = C \cdot e^{0^2}$ $\qquad e^{0^2} = e^0 = 1$

0.5 = C



Damit lautet die **partikuläre Lösung**

$$y = 0.5 \cdot e^{x^2}$$

und stellt nebenstehende Funktion dar.

Fall 3: $p(x) \neq 0 \;\wedge\; s(x) \neq 0$: **DGL:** $y' + p(x) \cdot y = s(x)$

Solche Gleichungen heißen gewöhnliche **inhomogene Differentialgleichungen**, $s(x)$ ist das sog. **Störglied**

Der Rechengang gewöhnlicher **in**homogener Differentialgleichungen 1. Ordnung weicht etwas von der bisherigen Berechnung ab:

Beispiel:

$$y' - \frac{y}{x} = x \cdot \cos x \quad \Big| \quad \frac{y}{x} = \frac{1}{x} \cdot y$$

$$y' \underbrace{- \frac{1}{x}}_{p(x)} y = \underbrace{x \cdot \cos x}_{s(x)}$$

(1) Zunächst **löst** man die **entsprechende homogene Differentialgleichung**, indem man $s(x) = 0$ setzt.

$$y' - \frac{1}{x} y = 0 \quad \Big| + \frac{1}{x} y$$

$$y' = \frac{1}{x} y \qquad\qquad \mathbf{y' = \frac{dy}{dx}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} y \quad | : y \quad | \cdot dx$$ **Trennung der Variablen**

$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{x} dx$$ **integrieren**

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{x} dx \qquad\qquad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{y} dy = \ln|y| \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$$

$$\ln|y| = \ln|x| + C_1 \quad \Big| \; e$$ exponenzieren

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln|x| + C_1} \qquad\qquad e^{\ln|y|} = y; \quad e^{\ln|x|+C_1} = e^{\ln|x|} \cdot e^{C_1} = x \cdot C$$

$$e^{\ln|x|} = x$$

e^{C_1} ist selbst eine Konstante, nennen wir sie C.

Lösung der **homogenen** DGL: $y_H = C \cdot x$

(2) **Variation der Konstanten**: **C wird nicht** als **Konstante**, sondern als **Funktion von** x, also als $C(x)$ aufgefasst.

$y_H = C(x) \cdot x$ Wir **Differenzieren** y_H , um den Ausdruck für y' in die inhomogene Ausgangsgleichung einsetzen zu können.

$y' = C'(x) \cdot x + C(x) \cdot 1$ Da in beiden Faktoren die Variable x vorkommt, müssen wir mit der **Produktregel** differenzieren.

$y' = C'(x) \cdot x + C(x)$

Die inhomogene (gegebene) Differentialgleichung lautet:

$y' = \frac{1}{x} \cdot y + x \cdot \cos(x)$

In diese Gleichung werden die Ausdrücke für $y = C(x) \cdot x$ und $y' = C'(x) \cdot x + C(x)$ eingesetzt

$$\underbrace{C'(x) \cdot x + C(x)}_{y'} = \underbrace{\frac{1}{\cancel{x}} \cdot C(x)}_{y} \cdot \cancel{x} + x \cdot \cos(x)$$

$C'(x) \cdot x + C(x) = C(x) + x \cdot \cos(x) \quad | - C(x)$

$C'(x) \cdot x = x \cdot \cos(x) \quad | : x$ Die Gleichung wird auf $C'(x)$ umgeformt

$C'(x) = \frac{x \cdot \cos(x)}{x}$

$C'(x) = \cos(x) \quad |$ Berechnung von C(x) durch Integrieren

$\int C'(x)dx = \int \cos(x)\, dx$

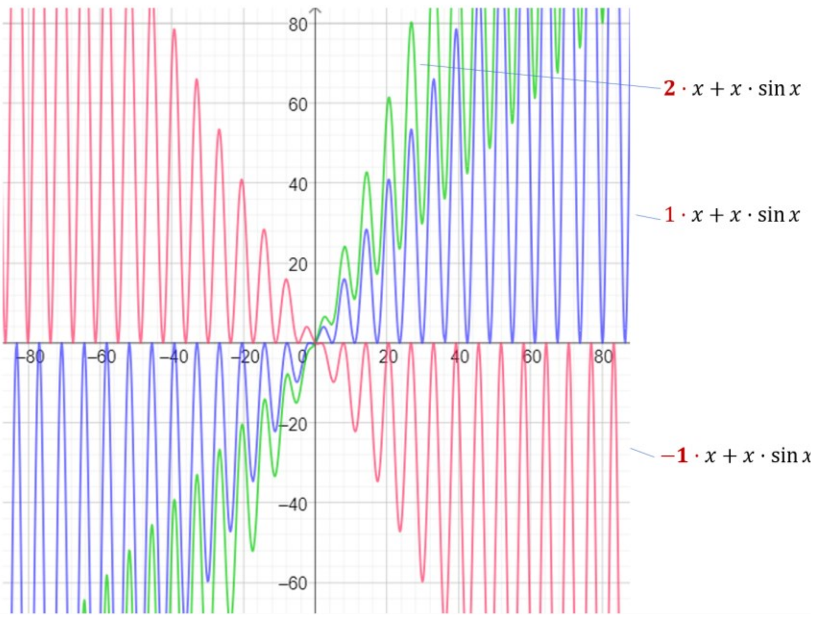
$C(x) = \sin(x)$ (10.1.2., S 476 f)

$y_H = C \cdot x$ $C(x)$ eingesetzt in y_H

$y_P = \sin(x) \cdot x$ y_P … **partikuläre** Lösung der inhomogenen DGL

Die allgemeine Lösung (das allgemeine Integral) der **inhomogenen DGL** lautet: $y = y_H + y_P$

Bezogen auf das Beispiel : $y = C \cdot x + x \cdot \sin(x)$



Um die Konstante C für den konkreten Bedarfsfall zu bestimmen, bedarf es wiederum einer Anfangsbedingung.

Fassen wir zusammen:

Rechenschritte für gewöhnliche **in**homogene DGL 1. Ordnung		
1.	**q (x) = 0 → homogene Differentialgleichung (DG) → y H**	
2.	**Variation der Konstanten → y P**	
3.	allgemeines Integral:	**y = y H + y P**

Bemerkung: Da wir nur gewöhnliche DGL behandeln, werde ich diese Eigenschaft künftig nicht mehr erwähnen.

Rechengang der **Variation der Konstanten**:

DGL hat die Form $y'(x) + a(x) \cdot y(x) = b(x)$

① Lösung der homogenen DGL $y'(x) + a(x) \cdot y(x) = 0$

y_H mit Trennung der Variablen

② Variation der Konstanten: $y(x = c(x) \cdot y_H(x)$

$$y'(x) = c'(x) \cdot y_H(x) + c(x) \cdot y'_H(x)$$

→ $c(x)$ berechnen

③ $y(x) = c(x) \cdot y_H(x)$

Beispiel: $y' - y = 1 + x^2$

① $y' - y = 0$

$\frac{dy}{dx} - y = 0 \quad | + y$ Trennung der Variablen

$\frac{dy}{dx} = y \quad |\cdot dx \quad | : y$

$\frac{1}{y}\, dy = dx \quad | \int$ Integrieren

$\int \frac{1}{y}\, dy = \int 1\, dx$

$\ln|y| = x + C_1 \quad | e$

$e^{\ln|y|} = e^{x + C_1}$

$y = e^x \cdot \underbrace{e^{C_1}}_{= C}$

$\boldsymbol{y_H(x) = C_2 \cdot e^x}$

② Variation der Konstanten:

$\boldsymbol{y(x) = C(x) \cdot e^x}$

$y'(x) = C'(x) \cdot e^x + C(x) \cdot e^x$

Eingesetzt in die **in**homogene DGL:

$C'(x) \cdot e^x + C(x) \cdot e^x - C(x) \cdot e^x = x^2 + 1$

$C'(x) \cdot e^x = x^2 + 1 \quad | : e^x$

$C'(x) = \frac{x^2+1}{e^x}$

$$C(x) \int \frac{1 + x^2}{e^x}\, dx = \int (1 + x^2) \cdot e^{-x}\, dx = (1 + x^2) \cdot (-e^{-x}) - 2\,x \cdot e^{-x} + 2 \cdot (-e^{-x}) + C = **$$

Partielle Integration mit **DI** – Regel:
(Siehe auch 10.1.4., S 481 f)

D	I
$1 + x^2$	e^{-x}
$2\,x$	$-\,e^{-x}$
2	e^{-x}
0	$-\,e^{-x}$

$** \; = e^{-x} \cdot [-(1+x^2) - 2\,x - 2] + C = e^{-x} \cdot [-1 - x^2 - 2\,x - 2] + C =$

$= \mathrm{e}^{-\mathrm{x}} \cdot (-\mathrm{x}^2 - 2\,\mathrm{x} - 3) + C = \mathbf{-e^{-x} \cdot (x^2 + 2\,x + 3) + C} = \boldsymbol{C(x)}$

$y(x) = C(x) \cdot e^x = [-e^{-x} \cdot (x^2 + 2\,x + 3) + C] \cdot e^x =$

$= \; - \cdot \underbrace{e^{-x} \cdot e^x}_{= e^0 = 1} \cdot (x^2 + 2\,x + 3) + C \cdot e^x$

$\boldsymbol{y(x) = -(x^2 + 2\,x + 3) + C \cdot e^x}$

11.2.1. DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Sind in einer DGL $y'(x) + a(x) \cdot y(x) = b(x)$ $a(x) = a$ konstant, so ist auch folgender Rechengang möglich:

DGL: $y'(x) + a \cdot y(x) = b(x)$

① Zunächst lösen wir die homogene DGL mit folgendem Exponential-Ansatz: $\boldsymbol{y_H(x) = C \cdot e^{\lambda \cdot x}}$

Das können wir machen, weil die homogene DGL immer eine solche Lösung besitzt.

Wir benötigen auch $y_H'(x) = C \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot x}$

Wählen wir das letzte **Beispiel** von vorhin: $y' - y = 1 + x^2$

Die Ausdrücke für y_H' und y_H eingesetzt in die homogene DGL $y' - y = 0$:

$$C \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot x} - 1 \cdot C \cdot e^{\lambda \cdot x} = 0$$

$$\underbrace{C \cdot e^{\lambda \cdot x}}_{\neq 0} \cdot \underbrace{(\lambda - 1)}_{= 0} = 0$$

$$\lambda - 1 = 0 \rightarrow \lambda = 1 \rightarrow \boldsymbol{y_H(x) = C \cdot e^x}$$

Nun zum Störglied, hier mit $b(x)$ bezeichnet: $b(x) = 1 - x^2$ besitzt die allgemeine Form

$y_P(x) = A_2\, x^2 + A_1\, x + A_0$ ... es handelt sich um eine Polynomfunktion 2. Grades

Da in der inhomogenen DGL auch y'vorkommt, benötigen wir noch $y'_P(x) = 2\, A_2\, x + A_1$

Nun setzen wir die Ausdrücke $y_P(x)$ und $y_P'(x)$ in die inhomogene DGL ein:

$$2\, A_2\, x + A_1 - (A_2\, x^2 + A_1\, x + A_0\ ) = 1 + x^2$$

Wir multiplizieren aus, ordnen die Glieder und machen einen **Vorzahlen-Vergleich**:

$$2\, A_2\, x + A_1 - A_2\, x^2 - A_1\, x - A_0 \ = \mathbf{1}\, x^2 + \mathbf{0}\, x + \mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{-A_2}\, x^2 + (\boldsymbol{2\, A_2 - A_1})\, x + \boldsymbol{A_1 - A_0} = \mathbf{1}\, x^2 + \mathbf{0}\, x + \mathbf{1}$$

Dieser Vergleich liefert uns ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a_2, a_1, a_0

$-A_2 = 1 \ \ | \cdot (-1) \ \rightarrow \ A_2 = -1$

$2\,A_2 - A_1 = 0 \quad 2\,(-1) - A_1 = 0 \ \rightarrow \ -2 - A_1 = 0 \ \rightarrow \ A_1 = -2$

$A_1 - A_0 = 1 \quad\ -2 - A_0 = 1 \ \rightarrow \ A_0 = -3$

Somit lautet $y_P(x) = -1\,x^2 - 2\,x - 3$ und $\boldsymbol{y(x) = C \cdot e^x - (x^2 + 2x + 3)}$

Die entsprechenden **allgemeinen Ansätze** für das Störglied lauten:

Form des Störgliedes	allgemeiner Ansatz
$b(x) = a_0$	$y_P(x) = A_0$
$b(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n\,x^n$	$y_P(x) = A_0 + A_1\,x + A_2\,x^2 + ... + A_n\,x^n$
$b(x) = a \cdot e^{\lambda \cdot x}$	$y_P(x) = A \cdot e^{\lambda \cdot x}$
$b(x) = a \cdot \cos(\omega x) + b \cdot \sin(\omega x)$	$y_P(x) = A \cdot \cos(\omega x) + B \cdot \sin(\omega x)$

Diese Liste ist beileibe **nicht** vollständig!

Beispiel: $y' + y = 2 \cdot \sin\,(3\,x)$

Den Ansatz $\boldsymbol{y_H(x) = C \cdot e^{\lambda \cdot x}}$ in die homogene DGL eingesetzt, liefert

$\lambda + 1 = 0$ Selbst ausprobieren!

$\lambda = -1 \ \rightarrow \ \boldsymbol{y_H(x) = C \cdot e^{-x}}$

$y_P(x) = A \cdot cos(3\,x) + B \cdot sin(3\,x) \rightarrow \ \ y'_P(x) = -3\,A \sin(3\,x) + 3\,B \cos(3\,x)$

Auch wenn in der DGL der cos nicht vorkommt, ist er im allgemeinen Ansatz zu berücksichtigen!

Ist man sich bei der Ableitung unsicher: 9.3.3., S 445 f

Die Ausdrücke für $y_P'(x)$ und $y_P(x)$ in die inhomogene DGL eingesetzt:

$-3\,A \sin(3\,x) + 3\,B \cos(3\,x) + \ A \cdot cos(3\,x) + B \cdot sin(3\,x) = 2 \sin\,(3x)$

Koeffizientenvergleich:

$-3\,A\sin(3\,x) + B \cdot sin(3\,x) + 3\,B\cos(3\,x) + \;A \cdot cos(3\,x) = \;2\sin(3\,x) + 0 \cdot \cos\,(3\,x)$

$(\boldsymbol{-3\,A + B})\sin(3\,x) + (\boldsymbol{3\,B + A})\cos(3\,x) = \boldsymbol{2}\sin(3\,x) + \boldsymbol{0} \cdot \cos\,(3\,x)$

$\boldsymbol{-3\,A + B = 2} \;\rightarrow\; B = 2 + 3\,A$

$\boldsymbol{3\,B + A = 0} \;\rightarrow\; 3 \cdot (2 + 3\,A) + A = 0 \;\rightarrow\; 6 + 9\,A + A = 0 \;\rightarrow\; A = -\frac{3}{5}$

$B = 2 + 3 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{5}$

$$y_P(x) = -\frac{3}{5} \cdot cos(3\,x) + \frac{1}{5} \cdot sin(3\,x)$$

$$y(x) = \;\boldsymbol{C \cdot e^{-x}} - \frac{3}{5} \cdot cos(3\,x) + \frac{1}{5} \cdot sin(3\,x)$$

Übung Lösen Sie folgende DGL: 1) $y' - \sin(x) = 1$

2) $y' + e^x = 0$

3) $y' + 2\,y = e^x$

Lösungen:

1) $y(x) = -\cos(x) + x + C$

2) $y(x) = C - e^x$

3) $y(x) = \frac{e^x}{3} + \frac{C}{e^{2x}}$

11.2.2. Gleichgradige DGL

Gleichgradig bedeutet, die Ausdrücke $\boldsymbol{\frac{y}{x}}$ kommen in jeweils gleicher Potenz vor.

Manchmal bedarf es geeigneter Umformschritte, um eine solche Form zu erhalten.

Gleichgradige Differentialgleichungen lassen sich auf die **Form** $\boldsymbol{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$ bringen.

Beispiele:

$$f_1\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x} + 1 \qquad f_2\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y^2+2\,x^2}{x\,y} = \frac{\frac{y^2}{x^2}+\frac{2\,x^2}{x^2}}{\frac{x\,y}{x^2}} = \frac{\frac{y^2}{x^2}+2}{\frac{y}{x}} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2+2}{\frac{y}{x}}$$

Zähler und Nenner durch x^2 dividieren.

Beispiel:

$$y' = \frac{x+y}{x}$$

Beide Glieder des Zählers werden durch x dividiert

$$y' = \frac{x}{x} + \frac{y}{x}$$

$$y' = 1 + \frac{y}{x} \quad *$$

Wir setzen für $\boxed{\boldsymbol{\frac{y}{x} = z}}$ $| \cdot x \rightarrow \quad \boldsymbol{y = z \cdot x}$

$$\boldsymbol{y'} = z' \cdot x + z \cdot 1 = \boldsymbol{z' \cdot x + z}$$

Produktregel

Diese Ausdrücke werden entsprechend in die DGL eingesetzt:

$$* \quad z' \cdot x + z = 1 + z \quad | - z$$

$z' \cdot x = 1$ Damit erhalten wir eine **gewöhnliche DGL 1. Ordnung** in $\boldsymbol{z}$, die wir entsprechend lösen.

$$z' \cdot x = 1$$

$\frac{dz}{dx} \cdot x = 1 \quad |\cdot\ dx \quad |: x$ Trennung der Variablen

$dz = \frac{1}{x}\, dx \quad | \quad \int$

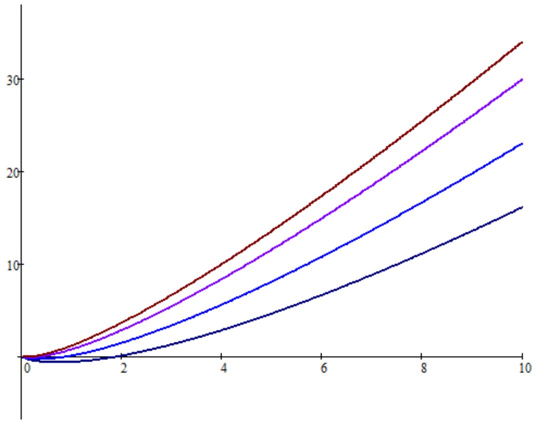
$\int dz = \int \frac{1}{x}\, dx$

$z = \ln|x| + C$

$z = \ln\ | C \cdot x|$ Rechenregel für Logarithmen: log u + log v = log (u . v) (siehe 3.1.4.4., S 139 f)

$y = x \cdot z$

$y = x \cdot \ln\ | C \cdot x|$



Einige Funktionen der unendlichen Kurvenschar des allgemeinen Integrals sind nebenstehend abgebildet.

Lautet die Anfangs- bzw. Randbedingung y=f(1)=0

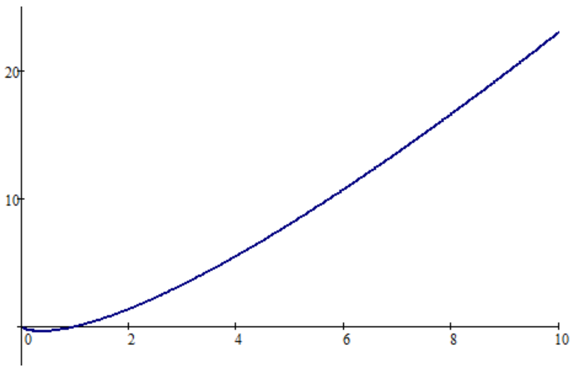
$y = f(1) = 0 = 1 \cdot \ln|C \cdot 1|$

$0 = 1 \cdot \ln|C \cdot 1|$

$0 = \ln|C| \quad \Big| \quad e$

$e^{0} = e^{\ln|C|}$

$1 = C$



Somit lautet die partikuläre Lösung

$y = x \cdot \ln|1.x|$

$y = x \cdot \ln|\ x|$

11.2.3. Exakte DGL

Wir betrachten eine Funktion Φ der Form $\Phi\big(x, y(x)\big) = A$.

Das bedeutet, in der Funktion Φ kommen die unabhängige Variable x **und** die abhängige Variable y vor.
Letztlich hängt Φ nur von $\boldsymbol{x}$ ab, denn y hängt ja auch von x ab.
Gleich welche Werte $\boldsymbol{x}$ und y annehmen, die Werte von Φ ergeben immer die konstante A.
In diesem Fall spricht man von einem *Potenzial*, wie es in Gradientenfeldern (elektrischen Feldern, Höhenlinien) vorkommt.

Eine exakte DGL besitzt die Form $a(x,y) + b(x,y) \cdot y' = 0$

$$a(x,y) + b(x,y) \cdot y' = 0$$

$$a(x,y) + b(x,y) \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad | \,.\, dx$$

bzw. $$a(x,y) \cdot dx + b(x,y) \cdot dy = 0$$

Differenzieren wir die Funktion Φ :

Wir differenzieren letztlich nach $\boldsymbol{x}$, weil ja Φ letztlich nur von $\boldsymbol{x}$ abhängig ist, obwohl auch $y = y(x)$ in der Funktion Φ vorkommt.

$$\Phi' = \frac{d\Phi}{dx} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{dx}}}{\underset{1}{\cancel{dx}}} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Zunächst leiten wir Φ nur nach x ab. Man spricht deswegen von einer partiellen (teilweisen) Ableitung.

Die Kettenregel angewendet, wird dann noch x nach x Abgeleitet.

Dazu kommt noch die Ableitung von Φ nur nach y. Man spricht deswegen von einer partiellen (teilweisen) Ableitung.

Die Kettenregel angewendet, wird dann noch y nach x Abgeleitet.

∂ … das Symbol für partielle Ableitung

So können wir schreiben: $\Phi\big(x, y(x)\big) = A$

$$\underbrace{\Phi'\big(x, y(x)\big)}_{\frac{d\Phi}{dx} \,=\, \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot y'} = 0$$

A ist ja eine Konstante, die abgeleitet Null ergibt.

$$\frac{d\Phi}{dx} = \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}_{\Phi_x} + \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}_{\Phi_y} \cdot y' = 0$$

Φ_x … Die Funktion Φ partiell nach x differenziert

Φ_y … Die Funktion Φ partiell nach y differenziert

verglichen mit

$$\begin{array}{rcl} \Phi_x & + & \Phi_y \cdot y' = 0 \\ a(x,y) & + & b(x,y) \cdot y' = 0 \end{array}$$

ist $a(x,y) = \Phi_x$ und $b(x,y) = \Phi_y$

Nach dem Satz von SCHWARZ [64] erhält man für (mehrfach stetige differenzierbare) Funktionen das gleiche Ergebnis, wenn man die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauscht:

$$\Phi_{x\,y} = \Phi_{y\,x}$$

$\Phi_{x\,y}$ … zuerst wird nach x und dann nach y abgeleitet

$\Phi_{y\,z}$ … zuerst wird nach y und dann nach x abgeleitet

Soll diese Beziehung gelten, dann müssen wir $a(x,y) = \Phi_x$ noch nach y ableiten, also $\frac{\partial a}{\partial y} = a_y$ bilden

und $b(x,y) = \Phi_y$ noch nach x ableiten, also $\frac{\partial b}{\partial x} = b_x$ bilden.

$\Phi_{x\,y} = \Phi_{y\,x}$ bedeutet dann $a_y = a_x$

Ist diese Bedingung erfüllt, dann ist die DGL exakt lösbar. Man nennt diese Bedingung ***Integrabilitätsbedingung***.

[64] Hermann Amandus SCHWARZ, deutscher Mathematiker (1843 – 1921)

Beispiel:

$$\underbrace{(x \cdot y^2 + 1)}_{a(x,y)} + \underbrace{x^2 \cdot y}_{b(x,y)} \cdot y' = 2$$

Kontrollieren wir zunächst, ob die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist:

$$a_y = \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\,(x \cdot y^2 + 1) = 2\,x\,y$$

$$b_x = \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\,(x^2 \cdot y) = 2\,x\,y$$

Mit $a_y = b_x$ ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt, die DGL ist exakt.

Bestimmen wir jetzt $a(x,y)$ und $b(x,y)$:

$$a(x,y) = \Phi_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \rightarrow \quad \Phi = \int (x \cdot y^2 + 1)\,dx = \frac{x^2}{2} \cdot y^2 + x + C(y) = \frac{x^2\,y^2}{2} + x + C(y)$$

Bei der Integration nach x kann die Integrationskonstante auch von y abhängen, weil hier y als Konstante zählt.

$$b(x,y) = \Phi_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \rightarrow \quad \Phi = \int (x^2 \cdot y)\,dy = x^2 \cdot \frac{y^2}{2} + C(x) \qquad = \frac{x^2\,y^2}{2} \qquad + C(x)$$

Bei der Integration nach y kann die Integrationskonstante auch von x abhängen, weil hier x als Konstante zählt.

Vergleichen wir nun die beiden Terme für Φ:

$$\Phi = \boxed{\frac{x^2\,y^2}{2}} \quad \boxed{+ \quad x} \quad \boxed{+\,C(y)}$$

$$\Phi = \boxed{\frac{x^2\,y^2}{2}} \quad \boxed{+\,C(x)} \quad \boxed{+ \quad C}$$

Der Ausdruck $\frac{x^2\,y^2}{2}$ kommt in beiden Termen vor.

Das x entspricht der Konstanten $C(x)$ im unteren Ausdruck, denn dort wird nach y abgeleitet.

$C(y)$ ist C, denn würde $C(y)$ ein Ausdruck mit y sein, wäre $C \neq 0$

Damit lautet $\Phi(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \frac{x^2\,y^2}{2} + \quad x + C$

Wie eingangs beschrieben, ist $\Phi\big(\mathrm{x},\mathrm{y}(\mathrm{x})\big) = \Phi(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{A}$:

Mit $\frac{x^2\,y^2}{2} + \quad x + C = A$ haben wir eine implizite[65] Lösung (allgemeines Integral) für y gefunden.

---

[65] Implizit: innen platziert. Hier: y ist nicht ausgedrückt, also nicht explizit

Wollen wir y explizit: $\frac{x^2\,y^2}{2} + x + C = A \quad | -C - x$

$\frac{x^2\,y^2}{2} = A - C - x$ $\qquad$ $A - C$ ist ja ebenfalls konstant

$x^2\,y^2 = 2\,(A - C - x) \quad | : x^2$

$y^2 = \frac{2\,(A-C-x)}{x^2} \qquad | \sqrt{}$

$y = \pm\sqrt{\frac{2\,(A-C-x)}{x^2}}$

$y = \pm\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{A-C-x}}{\sqrt{x^2}}$

$y = \pm\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{A-C-x}}{x}$

Mit der Anfangsbedingung $\Phi(2,1) = 2$: $1 = \pm\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-C-2}}{2} \quad | \cdot 2$

$1 = \pm\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{-C}}{2} \quad | \cdot 2$

$2 = \pm\sqrt{2}\cdot\sqrt{-C} \quad | \,(\,)^2$

$4 = 2\cdot(-C) \quad | : (-2)$

$\boldsymbol{C = -2}$

Eine partikuläre Lösung lautet damit: $y_P = \pm\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-(-2)-x}}{x}$ -> $\boldsymbol{y_P = \pm\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{4-x}}{x}}$

Zusammenfassung:

DGL: $a(x,y) + b(x,y)\cdot y' = 0$

① Exaktheit: $\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}$

② $\left.\begin{array}{ll} a(x,y) = \Phi_x & \Phi = \int a(x,y).\,dx + C(y) \\ b(x,y) = \Phi_y & \Phi = \int b(x,y).\,dy + C(x) \end{array}\right\}$ Vergleich liefert Φ

③ $\Phi(x,y) = A$ nach y auflösen

Ein gutes Video dazu:

11.2.4. Nicht Exakte DGL

Bei DGL, die nicht exakt sind, trifft $\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}$ nicht zu.

In solchen Fällen kann aus einer DGL der Form $a(x,y) + b(x,y)y' = 0$ eine exakte DGL entstehen, wenn sie mit einem sogenannten

Integrierenden Faktor $M(x,y)$ zu multipliziert wird:

$$a(x,y) + b(x,y)y' = 0 \mid \cdot M(x,y)$$

$$\underbrace{a(x,y) \cdot M(x,y)}_{a^*(x,y)} + \underbrace{b(x,y) \cdot M(x,y)}_{b^*(x,y)} \cdot y' = 0$$

Wenn diese DGL exakt sein soll, muss gelten:

$$\frac{\partial a^*}{\partial y} = \frac{\partial b^*}{\partial x}$$

$$\frac{\partial a^*}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[M(x,y) \cdot a(x,y)\right] = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \cdot a(x,y) + M(x,y) \cdot \frac{\partial a^*(x,y)}{\partial y} = M_y \cdot a + M \cdot a_y$$

$$\frac{\partial b^*}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[M(x,y) \cdot b(x,y)\right] = \frac{\partial M(x,y)}{\partial x} \cdot b(x,y) + M(x,y) \cdot \frac{\partial b^*(x,y)}{\partial x} = M_x \cdot b + M \cdot b_x$$

Bei Exaktheit gilt: $M_y \cdot a + M \cdot a_y = M_x \cdot b + M \cdot b_x$ … eine partielle DGL, weil teilweise nach x und teilweise nach y differenziert wird.

Einfacher gestaltet sich die Berechnung, wenn der integrierende Faktor nur von einer Variablen abhängt:

$M = M(x)$ In diesem Fall werden die Ableitungen nach y null, weil nun y eine Konstante darstellt:

$$\underbrace{M_y}_{=0} \cdot a + M \cdot a_y = M_x \cdot b + M \cdot b_x$$

$$M \cdot a_y = M_x \cdot b + M \cdot b_x \mid - M \cdot b_x$$

$$M \cdot a_y - M \cdot b_x = M_x \cdot b$$

$$M \cdot (a_y - b_x) = M_x \cdot b \quad \mid : b$$

$$\frac{M \cdot (a_y - b_x)}{b} = M_x$$

$M = M(y)$ In diesem Fall werden die Ableitungen nach x null, weil nun x eine Konstante darstellt:

$$M_y \cdot a + M \cdot a_y = \underbrace{M_x}_{=0} \cdot b + M \cdot b_x$$

$$M_y \cdot a + M \cdot a_y = M \cdot b_x \mid - M \cdot a_y$$

$$M_y \cdot a = M_x \cdot b_x - M \cdot a_y$$

$$M_y \cdot a = M \cdot (b_x - a_y) \mid : a$$

$$M_y = \frac{M \cdot (b_x - a_y)}{a}$$

Beides gewöhnliche DGL.

Beispiel: $\underbrace{x+\frac{y^2}{x}}_{a(x,y)} \underbrace{+2\,y\,y'}_{b(x,y)} = 0$

Gilt $\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}$? $\frac{\partial a}{\partial y} = a_y = 0 + \frac{2\,y}{x} = \frac{2\,y}{x}$ $\frac{\partial b}{\partial x} = b_x = 0$ $\frac{2\,y}{x} \neq 0$ … keine exakte DGL

Wir nehmen zunächst an, $M = M(x)$: $M_x = \frac{M\cdot\left(\frac{2\,y}{x}-0\right)}{2\,y} = \frac{\frac{2\,y}{x}}{2\,y}\cdot M = \frac{2\,y}{x}\cdot\frac{1}{2y}\cdot M = \frac{1}{x}\cdot M$

$M_x = \frac{1}{x}\cdot M$ entspricht einer EULERschen DGL

EULERsche DGL [66] **:** $\boldsymbol{y' = \frac{\alpha}{x}\cdot y \;\rightarrow\; y = C\cdot x^{\alpha}}$

In unserem Beispiel ist $\alpha = 1$: $M_x = \frac{1}{x}\cdot M \;\rightarrow\; M(x) = C\cdot x^1 = C\cdot x$

Wir können die Konstante C auch weglassen, ohne die Exaktheit zu verletzen: $M(x) = x$

Wir haben „Glück“ gehabt, dass M nur von x und nicht auch von y abhängig ist.

Multiplizieren wir jetzt die gegebene DGL mit $M(x) = x$:

$$x+\frac{y^2}{x} + 2\,y\,y' = 0 \;|\cdot x$$

$$x^2+\frac{y^2}{x}\,x + 2\,x\,y\,y' = 0$$

$$\underbrace{x^2+y^2}_{a^*(x,y)} \underbrace{+2\,x\,y\,y'}_{b^*(x,y)} = 0$$

Exaktheit: $\frac{\partial a^*}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\,(x^2+y^2) = 2\,y$ $\frac{\partial b^*}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\,(2\,x\,y) = 2\,y \;\rightarrow$ exakte DGL

$a^*(x,y) = \Phi_x = x^2+y^2$ $\Phi = \int(x^2+y^2)dx = \frac{x^3}{3} + y^2\,x + C(y)$

$b^*(x,y) = \Phi_y = 2\,x\,y$ $\Phi = \int 2\,x\,y\,dy = 2\,x\frac{y^2}{2} + C(x) = y^2 x + C(x)$

Vergleich: $y^2\,x + \frac{x^3}{3} \quad + C(y)$

$y^2 x + C(x) + \quad C$

$$\Phi(x,y) = x\,y^2 + \frac{x^3}{3} + C$$

[66] Leonhard EULER (1707 – 1783), Schweizer Mathematiker und einer der Größten seines Faches

Gilt nun $\Phi(\mathrm{x},\mathrm{y}) = A$, so folgt $x\,y^2 + \frac{x^3}{3} + C = A \quad | - C$

$$x\,y^2 + \frac{x^3}{3} = A - C$$

Da A und C Konstanten sind, ist auch $A - C$ eine Konstante, nennen wir sie $\tilde{C}$

$$x\,y^2 + \frac{x^3}{3} = \tilde{C} \quad | - \frac{x^3}{3}$$

$$x\,y^2 = \tilde{C} - \frac{x^3}{3} \quad | : x$$

$$y^2 = \frac{\tilde{C} - \frac{x^3}{3}}{x} \quad | \sqrt{\ }$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{\tilde{C} - \frac{x^3}{3}}{x}}$$ … allgemeines Integral

Übung

Bestimmen Sie das allgemeine Integral folgender DGL:

1) $y' = \frac{y}{x} - 1$

2) $x - \frac{y^2}{x} + 2\,y\,y' = 0$

Lösungen:

1) $y = C \cdot x - x \cdot \ln(x)$

2) $y = \pm\sqrt{\frac{C}{x} - 1} \cdot x$

11.2.5. BERNOULLIsche DGL [67]

Bei der BERNOULLIschen DGL handelt es sich um eine nicht-lineare gewöhnliche DGL 1. Ordnung der Form

$$\boldsymbol{y' + a(x) \cdot y + b(x) \cdot y^{\alpha} = 0}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$

Eine solche DGL wird mit der Substitution $\boldsymbol{u(x) = y^{1-\alpha}}$ gelöst.

Bilden wir auch hier die 1. Ableitung von u: $u'(x) = (1-\alpha) \cdot y^{1-\alpha-1} \cdot y' = (1-\alpha) \cdot y^{-\alpha} \cdot y'$

Hier ist die Kettenregel anzuwenden, weil y von x abhängt, also $y = y(x)$

$$u'(x) = (1-\alpha) \cdot y^{-\alpha} \cdot y' = (1-\alpha) \cdot y^{-\alpha} \cdot [-a(x) \cdot y - b(x) \cdot y^{\alpha}]$$

DGL: $y' + a(x) \cdot y + b(x) \cdot y^{\alpha} = 0 \quad | - a(x) \cdot y - b(x) \cdot y^{\alpha}$

$$y' = -a(x) \cdot y - b(x) \cdot y^{\alpha}$$

$$u'(x) = (1-\alpha) \cdot y^{-\alpha} \cdot \big(-a(x)\big) \cdot y^{1} - (1-\alpha) \cdot y^{-\alpha} \cdot b(x) \cdot y^{\alpha}$$

$$u'(x) = -a(x) \cdot (1-\alpha) \cdot y^{1-\alpha} - (1-\alpha) \cdot b(x) \cdot y^{-\alpha} \cdot y^{\alpha}$$

$$u'(x) = -a(x) \cdot (1-\alpha) \cdot \underbrace{y^{1-\alpha}}_{=u} - (1-\alpha) \cdot b(x) \cdot \underbrace{y^{0}}_{=1}$$

$u'(x) = -a(x) \cdot (1-\alpha) \cdot u - b(x) \cdot (1-\alpha)$ … lineare DGL 1. Ordnung, die sich entsprechend lösen lässt.

[67] Jakob I BERNOULLI, Schweizer Mathematiker und Physiker (1655 – 1705)

Beispiel: $y' = y + xy^3$

$u = y^{1-\alpha} = y^{1-3} = y^{-2}$

$u' = -2\,y^{-3} \cdot y' = -2\,y^{-3} \cdot (y + xy^3) = -2\,y^{-3} \cdot y^1 - 2\,y^{-3} \cdot x \cdot y^3 = -2\,\underbrace{y^{-2}}_{u} - 2 \cdot y^0 \cdot x$

DGL: $y' = y + xy^3$

$u' = -2\,u - 2\,x \;\; | + 2\,u$

$u' + 2\,u = \; -2\,x$

$u' + 2u = 0$ … homogene DGL

$u = C \cdot e^x$

$\lambda + 2 = 0 \;\rightarrow\; \lambda = -2 \;\rightarrow\; u_H = C \cdot e^{-2\,x}$

$u_P(x) = A_0 + A_1\,x$

$u_P'(x) = A_1$

Eingesetzt in die inhomogene DGL:

$A_1 + 2(A_0 + A_1\,x) = -2\,x$

$A_1 + 2\,A_0 + 2\,A_1 x = -2x$

$2\,A_1 x \;+\; A_1 + 2\,A_0 = \; -2\,x + 0$

$2\,A_1 = -2 \;\rightarrow\; A_1 = -1$

$A_1 + 2\,A_0 = 0 \;\rightarrow\; -1 + 2\,A_0 = 0 \;\rightarrow\; A_0 = \frac{1}{2}$

$u_P(x) = \frac{1}{2} - \,x$

$u = u(x) = C \cdot e^{-2\,x} + \frac{1}{2} - x$

$u = y^{-2} = \frac{1}{y^2} = \; C \cdot e^{-2\,x} + \frac{1}{2} - x \;\; | \,.\, y^2$

$1 = \left(C \cdot e^{-2\,x} + \frac{1}{2} - x \;\right) \cdot y^2 \;\; | \; : (\;)$

$\frac{1}{C \cdot e^{-2\,x} + \frac{1}{2} - x} = y^2 \;\; | \sqrt{\;}$

$\pm \sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{C \cdot e^{-2\,x} + \frac{1}{2} - x}}} = \boldsymbol{y}$

11.3. DGL 2. Ordnung

In DGL 2. Ordnung ist die höchste Ableitung die 2. Ableitung.

Beispiele: $y'' + 6\,y' + 5\,y = 0$ $\qquad 2\,\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = x + 1$

11.3.1. DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

11.3.1.1. Homogene DGL 2. Ordnung

Beispiele: $y'' + 6\,y' + 5\,y = 0$

Diese DGL wird mit dem Exponentialansatz $y = C \cdot e^{\lambda\,x}$ berechnet (Siehe auch 11.2.1., S 524 f)

Wir benötigen, wie man in der DGL sieht, die entsprechenden ausdrücke für y' und y'':

$y = C \cdot e^{\lambda\,x} \qquad y' = C \cdot \lambda \cdot e^{\lambda\,x} \qquad y'' = C \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda\,x}$

Eingesetzt in die DGL: $C \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda\,x} + 6 \cdot C \cdot \lambda \cdot e^{\lambda\,x} + 5 \cdot C \cdot e^{\lambda\,x} = 0$

$$\underbrace{C \cdot e^{\lambda\,x}}_{\neq 0} \cdot \underbrace{(\lambda^2 + 6\,\lambda + 5)}_{= 0} = 0$$

$\lambda^2 + 6\,\lambda + 5 = 0$ … nennt man das charakteristische Polynom (charakteristische Gleichung)

Ist hier eine quadratische Gleichung, die entsprechend gelöst wird:

$\lambda^2 + 6\,\lambda + 5 = 0$

$\lambda_{1/2} = -3 \pm \sqrt{3^2 - 5}$

$\lambda_{1/2} = -3 \pm \sqrt{4}$

$\lambda_1 = -3 + 2 = -1 \qquad \lambda_2 = -3 - 2 = -5$

Die charakteristische Lösung (allgemeines Integral) lautet allgemein $y = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x}$

Bezogen auf das Beispiel: $\boldsymbol{y = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-5x}}$

Mit Anfangsbedingungen erhalten wir eine spezielle Lösung:

Anfangsbedingungen: $y(0) = 0$ und $y'(0) = 4$

$y = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-5x}$ $\qquad$ $y' = -C_1 \cdot e^{-x} - 5 \cdot C_2 \cdot e^{-5x}$

$y(0) = C_1 \cdot e^0 + C_2 \cdot e^0 = 0$ $\qquad$ $y'(0) = -C_1 \cdot e^0 - 5 \cdot C_2 \cdot e^0$ $\qquad$ $e^0 = 1$

$C_1 + C_2 = 0$ $\qquad$ $-C_1 - 5 \cdot C_2 = 4$

$C_1 = -C_2 \ *$ $\quad \rightarrow \quad$ $-(-C_2) - 5 \cdot C_2 = 4$

$C_2 - 5\,C_2 = 4 \quad \rightarrow \quad -4\,C_2 = 4 \ \rightarrow \ C_2 = -1 \ \rightarrow * \ C_1 = 1$

Damit lautet die spezielle Lösung: $\boldsymbol{y = e^{-x} - e^{-5x}}$

11.3.1.2. Inhomogene DGL 2. Ordnung

Beispiele: $y'' + 8\,y' + 7\,y = 14$ ... lineare inhomogene DGL 2. Ordnung

Zuerst wir die entsprechende homogene DGL gelöst: $y'' + 8\,y' + 7\,y = 0$

Diese DGL wird wiederum mit dem Exponentialansatz $y = C \cdot e^{\lambda x}$ berechnet (Siehe auch 11.3.1.1, S 538)

Was folgendes charakteristisches Polynom ergibt: $\lambda^2 + 8\,\lambda + 7 = 0$ Selbst nachrechnen!

$$\lambda^2 + 8\,\lambda + 7 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = -4 \pm \sqrt{4^2 - 7}$$

$$\lambda_{1/2} = -4 \pm \sqrt{9}$$

$$\lambda_1 = -4 + 3 = -1 \qquad \lambda_2 = -4 - 3 = -7$$

$$\boldsymbol{y_H = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-7x}}$$

Zur inhomogenen Gleichung: Das Störglied $b(x) = s(x) = 14$ also eine Konstante, hat also die Form $b(x) = a_0$.
Damit lautet der allgemeine Ansatz für $y_P(x) = A_0$

$y_P(x) = A_0 \qquad y_P'(x) = 0 \qquad y_P''(x) = 0$

Eingesetzt in die inhomogene DGL: $0 + 8 \cdot 0 + 7 \cdot A_0 = 14 \rightarrow A_0 = 2 \rightarrow \boldsymbol{y_P(x) = 2}$

Für die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL gilt: $y = y_H + y_P = \boldsymbol{C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-7\,x} + 2}$

Kennen wir auch Anfangsbedingungen, können wir Werte für C_1 und C_2 bestimmen:

$y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0 \qquad\qquad y' = -C_1 \cdot e^{-x} - 7 \cdot e^{-7\,x}$

$y(0) = C_1 \cdot e^0 + C_2 \cdot e^0 + 2 = C_1 + C_2 + 2 = 1 \qquad\qquad y'(0) = -C_1 \cdot e^0 - 7 \cdot e^0 = 0$

$C_1 + C_2 + 2 = 1 \qquad\qquad -C_1 - 7 = 0 \rightarrow C_1 = -7$

$-7 + C_2 + 2 = 1 \rightarrow C_2 = 6$

Damit lautet eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL: $\boldsymbol{y = -7 \cdot e^{-x} + 6 \cdot e^{-7\,x} + 2}$

Ohne Herleitung sind hier noch die

Lösungen der homogenen DGL
für verschiedene Lösungsmöglichkeiten des charakteristischen Polynoms

angeführt:

Lösungen des charakteristischen Polynoms	Lösungen der DGL
eine Lösung $\lambda \in \mathbb{R}$	$y_H = C \cdot e^{\lambda\,x}$
zwei verschiedene Lösungen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$	$y_H = C_1 \cdot e^{\lambda_1\,x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2\,x}$
zwei gleiche Lösungen (Doppellösung) $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$	$y_H = C_1 \cdot e^{\lambda_1\,x} + C_2 \cdot \boldsymbol{x} \cdot e^{\lambda_2\,x}$
$\lambda_1 = a + b \cdot i \qquad \lambda_1 = a - b \cdot i$	$y_H = e^{a\,x} \cdot \cos(b\,x) + e^{a\,x} \cdot \sin(b\,x)$

Beispiel: $3\,y'' - 2\,y' + y = 0$

Ansatz: $y_H = C \cdot e^{\lambda\,x} \;\rightarrow\; 3\,\lambda^2 - 2\,\lambda + 1 = 0$

$$\lambda_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4\cdot 3\cdot 1}}{2\cdot 3}$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-12}}{6}$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{6}$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{2 \pm 8\,i}{6}$$

$$\lambda_1 = \frac{2+8\,i}{6} = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}\,i \qquad \lambda_2 = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\,i$$

$$\boldsymbol{y_H} = e^{\frac{1}{3}} \cdot \cos\left(\frac{4}{3}x\right) + e^{\frac{1}{3}} \cdot \sin\left(\frac{4}{3}x\right) = \sqrt[3]{e} \cdot \cos\left(\frac{4}{3}x\right) + \sqrt[3]{e} \cdot \sin\left(\frac{4}{3}x\right)$$

Übung

Bestimmen Sie das allgemeine Integral folgender DGL:

1) $y' = y + x\,y^2$

2) $y'' + 2\,y' + y = 0$

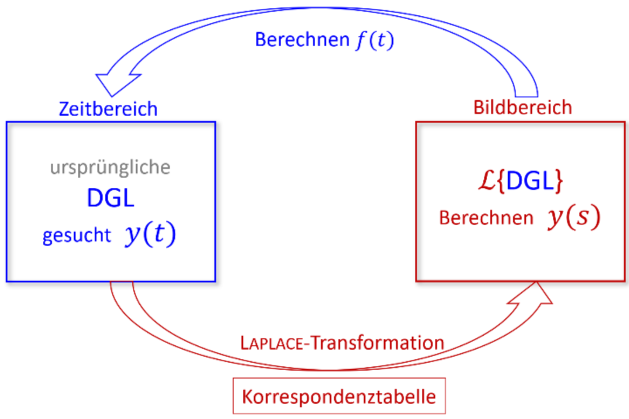
Lösungen:

1) $y = -\frac{e^x}{(x-1)\cdot e^x + C}$

2) $y = \frac{C_1 x + C}{e^x}$

11.4. LAPLACE-Transformation [68]

Mit Hilfe der LAPLACE-Transformation lassen sich z.B. nicht-lineare DGL auf lineare Form bringen.



Um die gegebenen DGL, in der die Funktion $\boldsymbol{y(t)}$ gesucht ist, in eine einfachere DGL, in der die Funktion $\boldsymbol{y(s)}$ gesucht ist, umzuwandeln, bedient man sich der

LAPLACE-Transformation:

$$\boxed{\boldsymbol{y(s) = \int_0^\infty y(t) \cdot e^{-s \cdot t}\, dt}}$$

Warum der Ansatz so lautet und wie solche Integrale bestimmt werden, beschäftigt uns hier nicht. Wir bedienen uns einer sogenannten

Korrespondenztabelle

$y(t)$	$y(s)$
$y'(t)$	$s \cdot y(s) - y(0)$
$y''(t)$	$s^2 \cdot y(s) - s \cdot y(0) - y'(0)$
$\dfrac{1}{(s-a)^{n+1}}$	$\dfrac{t^n}{n!} \cdot e^{ta}$
$-t \cdot y(t)$	$y'(s)$
$t^2 \cdot y(t)$	$y''(s)$
$(-t)^n \cdot y(t)$	$y^{(n)}(s)$
$e^{-a \cdot t}$	$\dfrac{1}{s+a}$
$1 - e^{-a \cdot t}$	$\dfrac{a}{s \cdot (s+a)}$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$

Weitere Werte der Korrespondenztabelle : http://www2.hs-esslingen.de/~mohr/mathematik/me2/LT_Tabelle.pdf

[68] Pierre-Simon Marquis de LAPLACE (1749 – 1827), französischer Mathematiker, Physiker und Astronom

Ich wähle im Folgenden eine relativ einfache DGL, die man auch anders lösen könnte, weil sonst der Rechenaufwand erheblich wird.

Beispiel: $y'' - 2\,y' + y = e^t$ ... lineare DGL 2. Ordnung, abhängig von der Variablen t

Anfangsbedingungen: $y(0) = 3$ und $y'(0) = 4$

① LAPLACE-Transformation in den Bildbereich:

Wir können die DGL auch so anschreiben: $y''(t) - 2\,y'(t) + y(t) = e^t$

Und die Anfangsbedingungen

Mit Hilfe der Korrespondenztabelle transformieren wir:

$$s^2 \cdot y(s) - s \cdot y(0) - y'(0) - 2 \cdot [s \cdot y(s) - y(0)] + y(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$e^t = e^{-(-1)\,t} \to a = -1 \to \frac{1}{s+a} = \frac{1}{s-1}$$

② $y(s)$ bestimmen:

Wir setzen die Anfangsbedingungen ein und formen auf $y(s)$ um.

$$s^2 \cdot y(s) - s \cdot 3 - 4 - 2 \cdot [s \cdot y(s) - 3] + y(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$s^2 \cdot y(s) - 3\,s - 4 - 2\,s \cdot y(s) + 6 + y(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$y(s) \cdot [s^2 - 2\,s + 1] - 3\,s + 2 = \frac{1}{s-1} \quad | + 3\,s - 2$$

$$y(s) \cdot [s^2 - 2\,s + 1] = \frac{1}{s-1} + 3\,s - 2 \quad | : [s^2 - 2\,s + 1]$$

$$y(s) = \frac{\frac{1}{s-1} + 3\,s - 2}{s^2 - 2\,s + 1}$$

Nebenrechnung: Nenner in Linearfaktoren zerlegen: Hier entweder durch Probieren (2.2.6.2.3., S 93) oder mit Wurzelsatz von VIETÁ (3.1.2.2., S 121).

$$s^2 - 2\,s + 1 = 0 \to s_{\frac{1}{2}} = 1 \pm \sqrt{1-1} = 1 \to s^2 - 2\,s + 1 = (s-1) \cdot (s-1) = (s-1)^2$$

$$y(s) = \frac{\frac{1}{s-1} + 3\,s - 2}{(s-1)^2} = \frac{\frac{1}{s-1}}{(s-1)^2} + \frac{3\,s}{(s-1)^2} - \frac{2}{(s-1)^2} = \frac{1}{(s-1)^3} + \frac{3\,s}{(s-1)^2} - \frac{2}{(s-1)^2}$$

$$\frac{\frac{1}{s-1}}{(s-1)^2} = \frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{(s-1)^2} = \frac{1}{(s-1)^3}$$

3 Rücktransformation:

Siehe Korrespondenztabelle: $\frac{1}{(s-1)^3} = \frac{1}{(s-1)^{2+1}} = \frac{t^2}{2!} \cdot e^t \qquad = \frac{t^2}{2} \cdot e^t$

$\frac{1}{(s-a)^{n-1}} = \frac{t^n}{n!} \cdot e^{a\,t}$ $\qquad 2! = 2 \cdot 1 = 2$

$\frac{3\,s}{(s-1)^2} = 3 \cdot (1+t) \cdot e^t$

Siehe http://www2.hs-esslingen.de/~mohr/mathematik/me2/LT_Tabelle.pdf

$\frac{2}{(s-1)^2} = 2 \cdot \frac{t^1}{1!} \cdot e^t = 2\,t\,e^t$

Somit ist $\boldsymbol{y(t)} = \frac{t^2}{2} \cdot e^t + 3 \cdot (1+t) \cdot e^t - 2\,t\,e^t = e^t\left(\frac{t^2}{2} + 3 + 3\,t - 2t\right) = \boldsymbol{e^t\left(\frac{t^2}{2} + t + 3\right)}$

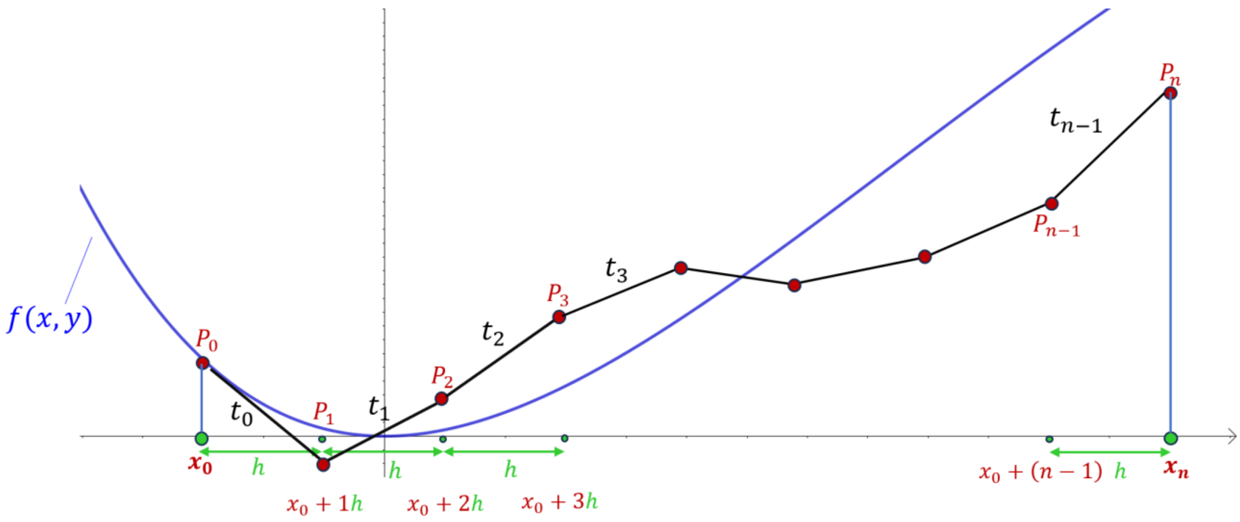
11.5. EULER – Verfahren [69]

Das EULER-Verfahren ist eines der numerischen Lösungsmethoden und kommt zur Anwendung, wenn

- keine exakte Lösung der DGL gefunden werden kann.
- wenn der Rechengang zu aufwändig wäre.

Die DGL habe die Form $y' = f(x, y)$ mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$

Angenommen, das Näherungsverfahren soll im Intervall $[x_0 , x_n]$ angewandt werden.



Die Schrittweite bestimmt man mit

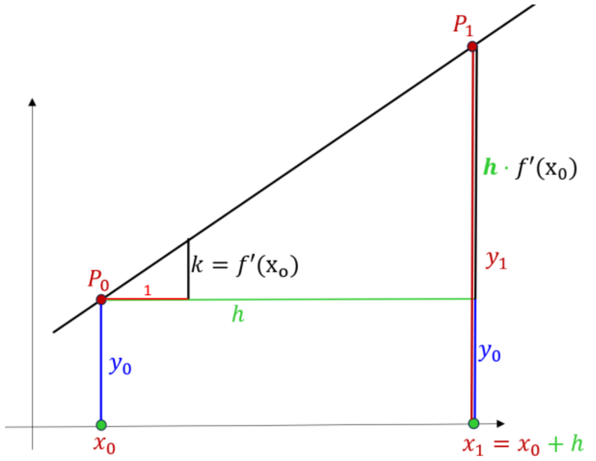
$$h = \frac{b - x_0}{n}$$

mit n als der Anzahl der Punkte, die den Polygonzug (Streckenzug) beschreiben sollen.

Im Punkt P_0 wird die Funktion $f(x, y)$ durch ihre Tangente t_0 in diesem Punkt ersetzt.
An der Stelle $x_1 = x_0 + h$ bestimmen wir nun auf der Tangente t_0 den Punkt P_1 und ersetzen dort die Tangente t_0 durch die Strecke t_1.
An der Stelle $x_2 = x_0 + 2h$ bestimmen wir nun auf der Strecke t_1 den Punkt P_2 und ersetzen dort die Strecke t_1 durch die Strecke t_2 und so fort, bis wir beim Punkt P_n angelangt sind.

Auf diese Weise entsteht ein Polygonzug $P_0, P_1, . . . , P_n$), der annähernd den Verlauf der eigentlichen Funktion $f(x, y)$ wiedergibt.

[69] Leonhard EULER (1707 – 1783), Schweizer Mathematiker, Physiker, Astronom, Geograph, Logiker und Ingenieur



Weiters gilt der links abgebildete Sachverhalt:

Hier kommt der Strahlensatz zur Anwendung.

Siehe auch 7.3.1., S 357 f

Folgende Aufgabe müsste nicht mit einem Näherungsverfahren gelöst werden, es dient lediglich zur Demonstration des EULER-Verfahrens.

Beispiel: DGL: $y'(x,y) = \cos(x)$ Anfangsbedingung: $y(0) = 1$

Stellen wir mit Hilfe des Euler-Verfahrens die Punkte des Polygonzuges im Intervall $[0\,;\frac{\pi}{2}]$ auf mit $n = 2$.

$$h = \frac{x_n - x_0}{2} = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$x_0 = 0 \quad y_0 = 1$ … siehe Anfangsbedingung $P_0(0/\,1)$

$$x_1 = x_0 + 1 \cdot h = 0 + 1 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$y_1 = y_0 + h \cdot f'(x_0) = 1 + \frac{\pi}{4} \cdot \cos(0) = 1 + \frac{\pi}{4} \cdot 1 = 1 \qquad P_1\left(\frac{\pi}{4}\,/1.7854\right)$$

DGL: $y'(x,y) = f'(x_0) = f'(x_0, y_0) = \cos(x_0)$

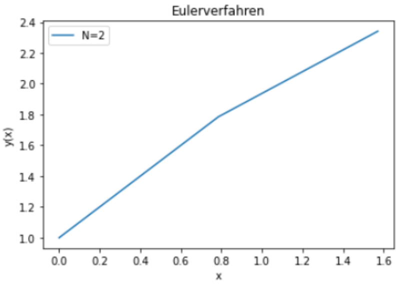
$$x_2 = x_1 + h = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot f'(x_1) = 1.7854 + \frac{\pi}{4} \cdot cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.7854 + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2.3408$$

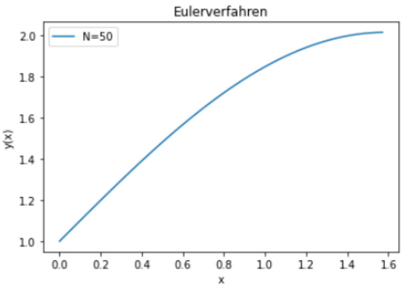
$P_2\left(\frac{\pi}{2}\,/2.3408\right)$

Abschließend noch das Beispiel mit Python .

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def f(x):
    return cos(x)
startwert = 1
def euler(x, y0, fx):
    N = len(x)-1
    y = np.zeros(N+1)
    y[0] = y0
    dy = fx(x)
    h = (x[len(x)-1] - x[0])/N
    for k in range(N):
        y[k+1] = y[k] + h*dy[k]
    return y
fig, ax = plt.subplots()
for n in [2]:
    x = np.linspace(0, 1.5708, n+1)
    y = euler(x, startwert, f)
    ax.plot(x, y, label='N='+str(n))
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y(x)')
ax.set_title("Eulerverfahren")
ax.legend()
plt.show()
```



Wesentlich besser wird die Annäherung, wenn wir nicht 2, sondern 50 Punkte des Polygonzuges bestimmen:



Es existieren noch weitere Näherungsverfahren, aber wir wollen es damit bewenden lassen, obgleich es noch einiges an DGL aufzulösen gibt.

Übung Lösen Sie folgende DGL:

1) $y' = \frac{y}{x} + 1$ mit der Anfangsbedingung $y(1) = 0$

2) $y' = \cos(x) \cdot (y - 1)$ gesucht: das allgemeine Integral

3) $y' = 2\,y + e^{2\,x}$ gesucht: allgemeines Integral

4) $y' + y = \cos(x) + \sin(x)$ mit der Anfangsbedingung $y(\pi) = e^{-\pi}$

5) $y' = x^2 + 2\,x + 3 - y$ mit dem Anfangswert $y(1) = 4$

6) $y' + 2\,x\,y = y^2 \cdot e^x$ mit $y(0) = 1$ Tipp: BERNOULLIsche DGL

7) $3\,y' + y = \frac{1}{y^2}$ Tipp: BERNOULLIsche DGL

8) $y'' - 5\,y' + 4\,y = 0$

9) $y'' + y = x^2$

10) $y''(t) + 2\,y'(t) + y(t) = 3\,t\,e^{-t}$ Lösen Sie mit LAPLACE-Transformation

Lösungen: 1) $y = x \cdot \ln(x)$ 2) $y = 1 + C\,e^{\sin(x)}$ 3) $y = (x + C)\,e^{2\,x}$ 4) $y = \sin(x) + e^{-x}$

5) $y = x^2 + 3$

6) allgemeine Lösung: $y = \frac{e^{-x^2}}{C_1 - x}$ spezielle Lösung: $y = \frac{e^{-x^2}}{1 - x}$

7) $y = \sqrt[3]{C \cdot e^{-x} + 1}$

8) $y = C_1 e^{4\,x} + C_2\,e^x$

9) $y = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x) + x^2 - 2$

10) $y(t) = 4\,e^{-t} + 6\,t\,e^{-t} + 3 \cdot \frac{t^3}{3!}\,e^{-t} = 4\,e^{-t} + 6\,t\,e^{-t} + \frac{t^3}{2}\,e^{-t}$

Eine interessante Webadresse, die einerseits die Bedeutung von DGL in den angewandten Wissenschaften skizziert und andererseits einen renommierten Mathematiker der ETH-Zürich vorstellt (Siddharta MISHRA), der mit den EULERschen Gleichungen außergewöhnliche Durchbrüche erzielte, indem er einen neuen Algorithmus für das Näherungsverfahren vorschlug. Außerdem entwickelte MISHRA einen Lösungsansatz für bestimmte EULER-Gleichungen, mit dem sich die Dynamik instabiler, chaotischer und turbulenter Strömungen genauer bestimmen lässt. So hat er beispielsweise robuste, effiziente Algorithmen entworfen, mit denen sich nichtlineare partielle Differentialgleichungen schneller und genauer auf Supercomputern simulieren lassen.

MISHA erhielt für seine Arbeiten 2023 den RÖSSLER-Preis, den höchstdotierten Forschungspreis der ETH-Zürich.

Das Geheimnis einer guten Lösung | ETH Zürich

„Das Geheimnis des Erfolges ist, den Standpunkt des anderen zu verstehen."

Henry FORD
(1863–1947)

XII FOLGEN & REIHEN

12.1. Folgen

12.1.1. Was versteht man unter einer (Zahlen-) Folge?

Unter einer Zahlen- Folge versteht man eine Funktion, bei der jeder natürlichen Zahl eine (reelle) Zahl zugeordnet ist:

Allgemein wird eine **Funktion** folgendermaßen angegeben:

$$f: D_f \longrightarrow W_f$$
$$x \longmapsto y$$

f . . . Name der Funktion
D_f . . Definitionsmenge
W_f . . Wertemenge (Bild)
x . . . Elemente der D_f
y . . . Elemente der W_f

Für eine **Folge** bedeutet diese Schreibweise:

$$\langle\,\rangle : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto a_n$$

< > . . .Symbol für eine Folge
$\mathbb{N}$ . . .Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{R}$ . . .Menge der reellen Zahlen
n . . . Element von $\mathbb{N}$
a_n . . Element von $\mathbb{R}$
allgemeines Glied der Folge
bzw. **Bildungsgesetz**

Beispiel einer Folge:

$$\langle\,\rangle : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto \frac{2n-1}{n+3}$$

Indem man in das Bildungsgesetz der Folge der Reihe nach die natürlichen Zahlen einsetzt, erhält man die sog. Glieder der Folge.

Beispiel: Gegeben ist die Folge $\left\langle \frac{2n-1}{n+3} \right\rangle$.

Das allgemeine Glied (Bildungsgesetz) dieser Folge lautet $a_n = \frac{2\cdot n-1}{n+3}$

Die ersten Folgenglieder lauten: $a_1 = \frac{2\cdot 1-1}{1+3} = \frac{1}{4}$

$a_2 = \frac{2\cdot 2-1}{2+3} = \frac{3}{5}$

$a_3 = \frac{2\cdot 3-1}{3+3} = \frac{5}{6}$

$a_4 = \frac{2\cdot 4-1}{4+3} = \frac{7}{7} = 1$

. . . . .

$a_{100} = \frac{2\cdot 100-1}{100+3} = \frac{199}{103}$

. . . . .

$a_{1000} = \frac{2\cdot 1000-1}{1000+3} = \frac{1999}{1003}$

. . . .

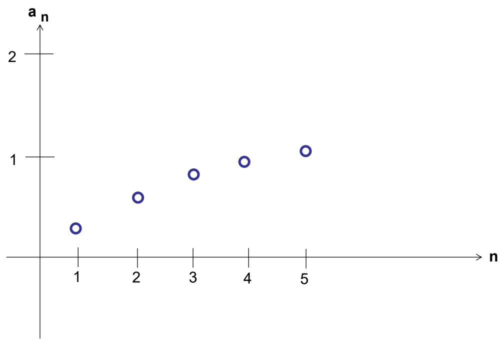
$$\left\langle \frac{2n-1}{n+3} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{6}, 1, \ldots, \frac{199}{103}, \ldots, \frac{1999}{1003}, \ldots \right\rangle$$

Bemerkung: Folgen können statt mit kleiner-größer-Klammern auch mit runden Klammern bezeichnet werden.

Also z.B. statt mit $\langle a_n \rangle$ auch mit (a_n)

Im Gegensatz zu Mengen ist bei Folgen die Reihenfolge der Glieder bedeutend!

Glieder sind hier nicht mit Strichrechnung verbunden!



Graphisch ist die Folge eine Menge von Punkten, die nicht durch eine Linie verbunden werden, da die $D_f = \mathbb{N}$ ist.

Da beispielsweise zwischen n =2 und n = 3 keine weitere natürliche Zahl liegt, kann es dazwischen auch kein Folgenglied geben.

```python
for n in range(11) :
    a_n = (2*n-1)/(n+3)
    print(a_n)
```

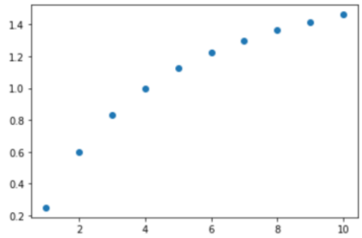
```
-1/3
1/4
3/5
5/6
1
9/8
11/9
13/10
15/11
17/12
19/13
```

Bemerkung: Python fängt bei n = 0 an.

```python
import numpy as plt
```

```python
import matplotlib.pyplot as plt
```

```python
x = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]
y = [1/4, 3/5, 5/6, 1, 9/8, 11/9, 13/10, 15/11, 17/12, 19/13]
plt.scatter(x, y)
plt.show()
```



Übung Berechnen Sie die ersten sechs Glieder der angegebenen Folgen:

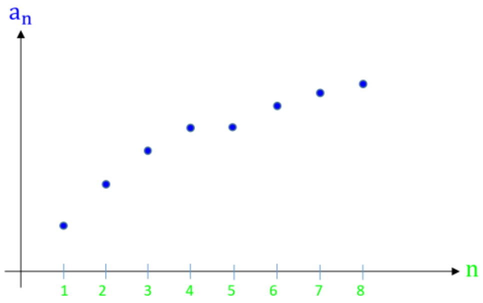
1) $\left\langle \frac{1-n}{n+1} \right\rangle$ 2) $\left\langle (-1)^n \cdot \frac{n^2+n}{n+1} \right\rangle$ 3) $\left\langle \frac{1}{(-1)^{n+1}} \cdot \frac{1}{n} \right\rangle$

Lösungen: 1) $\left\langle 0, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{5}, -\frac{2}{3}, -\frac{5}{7}, . . . \right\rangle$ 2) $\langle -1,\ 2, -3,\ 4, -5,\ 6, . . . \rangle$

3) $\left\langle 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, . . . \right\rangle$

12.1.2. Eigenschaften von Folgen

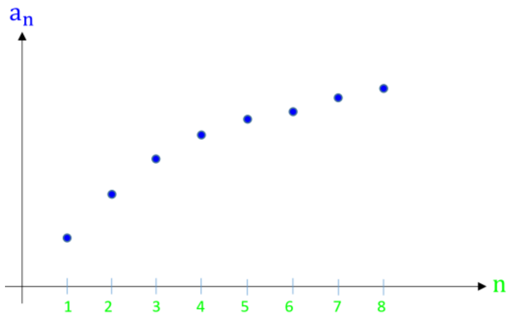
12.1.2.1. Monotonie



Eine Folge ist monoton wachsend (steigend), wenn

$$\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} (a_n \leq a_{n+1})$$

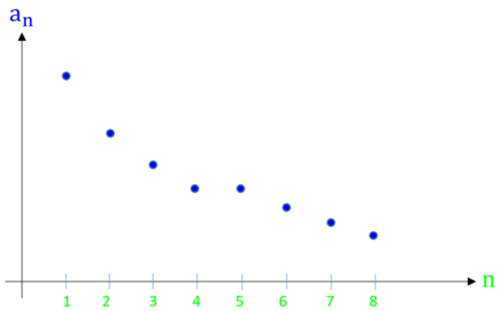
Wenn also jeder Vorgänger kleiner als oder gleich groß wie das nachfolgende Glied ist.



Eine Folge ist streng monoton wachsend (steigend), wenn

$$\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} (a_n < a_{n+1})$$

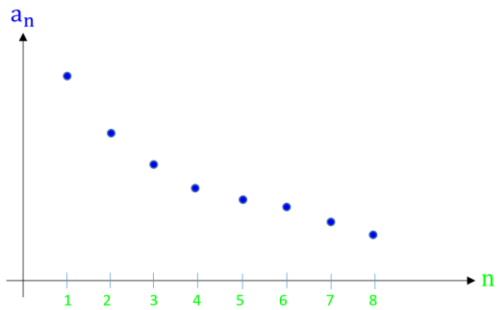
Wenn also jeder Vorgänger kleiner wie das nachfolgende Glied ist.



Eine Folge ist monoton fallend, wenn

$$\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} (a_n \geq a_{n+1})$$

Wenn also jeder Vorgänger größer als oder gleich groß wie das nachfolgende Glied ist.

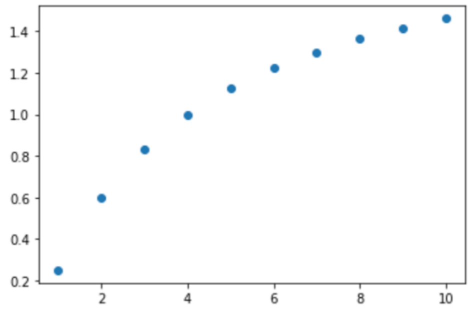


Eine Folge ist streng monoton fallend, wenn

$$\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} (a_n > a_{n+1})$$

Wenn also jeder Vorgänger größer als das nachfolgende Glied ist.

Beispiel: Gegeben ist die Folge $\left\langle \frac{2n-1}{n+3} \right\rangle$



Aufgrund der ersten Glieder (siehe nebenstehendes Diagramm) treffen wir die Annahme, die Folge kann streng monoton wachsend sein:

$$\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} (a_n < a_{n+1})$$

$$\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \left(\frac{2\,n-1}{n+3} < \frac{2\,(n+1)-1}{n+1+3} \right)$$

$$\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \left(\frac{2\,n-1}{n+3} < \frac{2\,n+2-1}{n+4} \right)$$

Siehe auch 3.4.1., S 165 f

$$\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \left(\frac{2\,n-1}{n+3} < \frac{2\,n+1}{n+4} \quad | \cdot \underbrace{\overbrace{(n+3)}^{\text{pos}} \cdot \overbrace{(n+4)}^{\text{pos}}}_{\text{pos}} \right)$$

$$\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \big((2n-1) \cdot (n+4) < (2n+1) \cdot (n+3) \ \big)$$

$$\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} (2\,n^2 - n + 8\,n - 4 < 2\,n^2 + n + 6\,n + 3 \ )$$

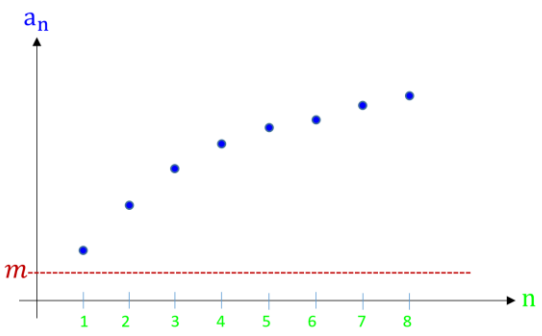
$$\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} (2\,n^2 + 7\,n - 4 < 2\,n^2 + 7\,n + 3 \ ) \ | - 2\,n^2$$

$$\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} (\ 7\,n - 4 < \ 7\,n + 3 \ ) \quad \text{... w.A. für alle } n \in \mathbb{N}$$

Wenn man vom Siebenfachen einer natürlichen Zahl die Zahl 4 subtrahiert, so wird diese Differenz stets kleiner sein, als wenn man zum Siebenfachen dieser Zahl die Zahl 3 addiert.

Damit haben wir bewiesen, dass diese Folge streng monoton wachsend ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

12.1.2.2. Beschränktheit

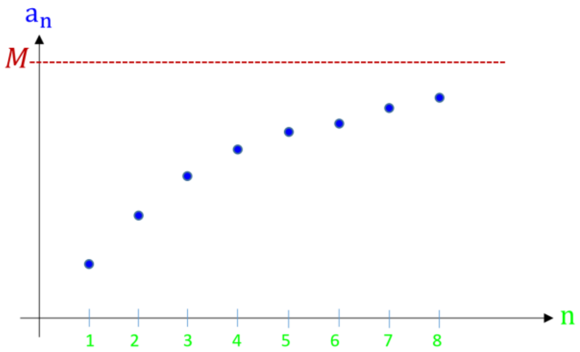


Eine Folge ist nach unten beschränkt, wenn

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(a_n \in \mathbb{R})\ \exists\, m \in \mathbb{R}\ (m \leq a_n)$$

Wenn die Zahl m kleiner als oder gleich groß wie alle Folgenglieder ist.

m heißt dann untere Schranke der Folge

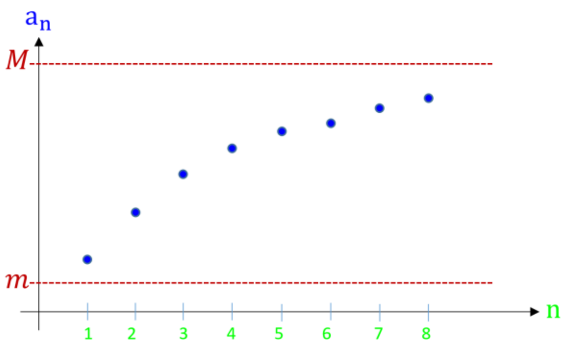


Eine Folge ist nach oben beschränkt, wenn

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(a_n \in \mathbb{R})\ \exists\, M \in \mathbb{R}\ (M \geq a_n)$$

Wenn die Zahl M größer als oder gleich groß wie alle Folgenglieder ist.

M heißt dann obere Schranke der Folge

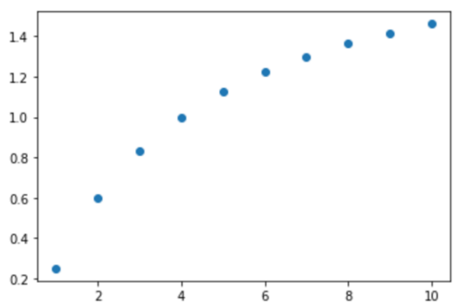


Besitzt eine Folge eine untere und eine obere Schranke, so nennt man die Folge beschränkt.

Das bedeutet, dass sich alle unendlich vielen Folgenglieder in einem Intervall aus $\mathbb{R}$ befinden:

$$a_n \in [m, M]$$

Beispiel: Gegeben ist die Folge $\left\langle \frac{2n-1}{n+3} \right\rangle$



Da diese Folge streng monoton wachsend ist, ist 0 sicher eine untere Schranke, da das erste Glied der Folge ¼ lautet und alle anderen Glieder größer sind.
Trotzdem ist dieser Sachverhalt zu zeigen:

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(a_n \in \mathbb{R})\ \exists\ m \in \mathbb{R}\ (m \leq a_n)$$

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ (0 \leq a_n)$$

Siehe auch 3.4.1., S 165 f

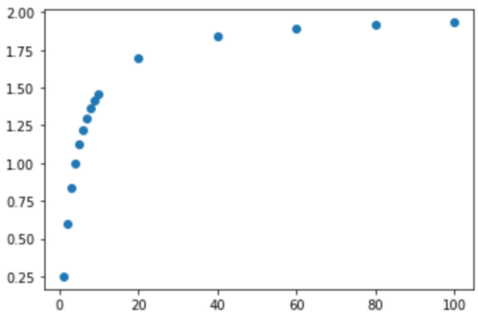
$$\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \left(0 \leq \frac{2\,n-1}{n+3} \mid \cdot \underbrace{(n+3)}_{\text{pos}}\right)$$

$$\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \left(0 \leq 2n - 1 \mid +1\right.$$

$$\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \left(1 \leq 2n \mid : 2\right)$$

$$\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \left(\frac{1}{2} \leq n\right) \quad \text{... w.A. für alle } n \in \mathbb{N}$$

$\frac{1}{2}$ ist kleiner als jede natürliche Zahl.
Damit ist $m = 0$ eine untere Schranke dieser Folge.



Siehe auch 3.4.1., S 174 f

Der Graph dieser Folge verleitet zur Annahme, dass 2
eine obere Schranke sein kann, was natürlich zu zeigen ist:

$$\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \left(M \geq a_n\right)$$

$$\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \left(2 \geq a_n\right)$$

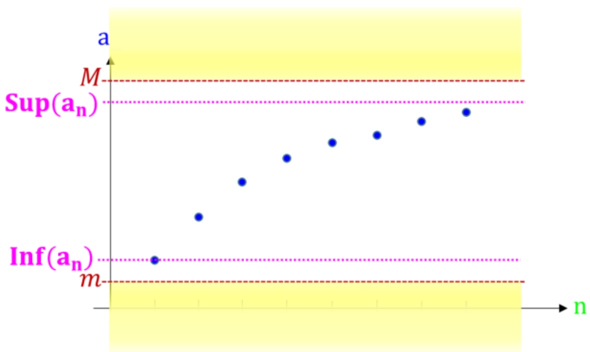
$$\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \left(2 \geq \frac{2\,n-1}{n+3} \mid \cdot \underbrace{(n+3)}_{\text{pos}}\right)$$

$$\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \left(2\,(n+3) \geq 2\,n - 1\right)$$

$$\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \left(2\,n + 6 \geq 2\,n - 1\right) \quad \text{... w.A. für alle } n \in \mathbb{N}$$

Addiert man zum Doppelten einer natürlichen Zahl die Zahl 6, so ist
diese Summe immer größer, als wenn man vom Doppelten
dieser natürlichen Zahl die Zahl 1 abzieht.

$M = 2$ ist eine obere Schranke dieser Folge und damit ist
die Folge beschränkt.



Existiert eine untere bzw. obere Schranke, so gibt es jeweils
unendlich viele untere bzw. obere Schranken
(jeweils gelbe Bereiche).

Von Bedeutung ist,

die **größte untere Schranke = Infimum $\mathrm{Inf}(a_n)$** bzw.

die **kleinste obere Schranke = Supremum $\mathrm{Sup}(a_n)$**

der Folge zu finden.

12.1.2.3. $\mathcal{O}$ -Notation

Ein einleitendes **Beispiel**:

Es werden die Laufzeiten zweier Daten-Sortierprogramme (zweier Algorithmen) verglichen.

n … Anzahl der zu sortierenden Daten

Die Laufzeit des Algorithmus A in Nanosekunden (ns) berechnet sich mit $2\,n^2 + 4\,n + 1$

Die Laufzeit des Algorithmus B in Nanosekunden (ns) berechnet sich mit $n^2 + 2\,n + 10$

Ist z.B. n = 100, so beträgt die Laufzeit mit dem Algorithmus A $2 \cdot 100^2 + 4 \cdot 100 + 1 =$ 20 401 ns
Die Laufzeit mit dem Logarithmus B $100^2 + 2 \cdot 100 + 8 =$ 10 208 ns

Laufzeit-Unterschied bei n = 1 000 000 Daten:

Laufzeit bei A $2 \cdot 1\,000\,000^2 + 4 \cdot 1\,000\,000 + 1 \approx 2 \cdot 10^{12}$ ns = 2 000 s und
bei B $1\,000\,000^2 + 2 \cdot 1\,000\,000 + 8 \approx 1 \,.\, 10^{12}$ ns = 1 000 s

Die Laufzeit bei A nähert sich immer mehr dem Doppelten von B.
Offensichtlich beeinflussen die quadratischen Glieder die Laufzeiten wesentlich.
Wenn $n \to \infty$ geht, wird die Laufzeit immer stärker von n^2 beeinflusst und auch der Faktor 2 wird unbedeutender.

In diesem Fall kann man schreiben: $\boldsymbol{a_n \in \mathcal{O}(b_n)}$**, was bedeutet** $\boldsymbol{\frac{a_n}{b_n} \leq c \in \mathbb{R}}$ **bzw.** $\boldsymbol{a_n = c \cdot b_n}$

Der **Quotient dieser Folgen** ist demnach **beschränkt**. Er nähert sich mit wachsendem n einer (endlichen) Zahl, die hier c genannt wird.

Im oberen Beispiel ist $c = 2$, wie sich leicht zeigen lässt: Siehe auch 7.8.2., S 389 f

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{2\,n^2 + 4\,n + 6}{n^2 + 2\,n + 8} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2\,n^2 + 4\,n + 6}{n^2 + 2\,n + 8} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2\,n^2}{n^2} + \frac{4\,n}{n^2} + \frac{6}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{2\,n}{n^2} + \frac{8}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{4}{n} + \frac{6}{n^2}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{8}{n^2}} = \frac{2+0+0}{1+0+0} = \frac{2}{1} = 2$$

Für unser Beispiel lässt sich das so deuten: Der Algorithmus A hat höchstens die 2-fache Laufzeit von Algorithmus B.

Folgende Bezeichnungen gelten:

$\mathcal{O}$ … $\mathcal{O}$-Notation, abgeleitet vom Englischen *Big O-Notation*, wobei das O für *order* (Ordnung) steht.

Die $\mathcal{O}$-Notation ist ein sogenanntes LANDAU-Symbol [70]

Es findet sich statt $a_n \in \mathcal{O}(b_n)$ auch die Schreibweise $a_n = \mathcal{O}(b_n)$, die aber zu Missverständnissen führen kann!

[70] Edmund LANDAU (1877 – 1938) deutscher Mathematiker. Nach ihm wurde das Symbol genannt, das eigentlich von Paul BACHMANN (1837 – 1920, deutscher Mathematiker) stammt.

Beispiel: Angenommen $a_n \in \mathcal{O}(b_n)$ und bedeutet $\frac{a_n}{b_n} = c_1 \in \mathbb{R}$ bzw. $a_n = c_1 \cdot b_n$

und $d_n \in \mathcal{O}(b_n)$ und bedeutet $\frac{d_n}{b_n} = c_2 \in \mathbb{R}$ bzw. $d_n = c_2 \cdot b_n$

Hier sieht man offensichtlich, dass $d_n \neq b_n$ ist.

Die Schreibweise $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ und $d_n = \mathcal{O}(b_n)$ könnte zu dem Schluss verleiten $d_n = b_n$

Weitere **Beispiele:**

Ist $c \in \mathcal{O}(a^n)$ mit $n \in \mathbb{N}$?

Ja, weil $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c}{a^n} \to 0$ weil der Zähler konstant bleibt (c) und der Nenner (a^n) wächst und damit ist der Quotient der Folgen beschränkt.

Auf das Eingangsbeispiel übertragen: Die Laufzeit betrüge in diesem Fall immer c Nanosekunden (ns), unabhängig von der zu verknüpfenden Datenmenge.

Ist $a_n \in \mathcal{O}(a_n)$?

Ja, weil $\frac{a_n}{a_n} = 1$ und damit ist der Quotient der Folgen beschränkt.

Ist $n^2 + 100\,000\,n \in \mathcal{O}(n^2)$?

Ja, weil $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+100\,000\,n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{100\,000\,n}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}} = \frac{1+0}{1} = 1$ und damit ist der Quotient der Folgen beschränkt.

Siehe auch 7.8.2., S 389 f

Ist $n^2 + 100\,000\,n \in \mathcal{O}(n^3)$?

Ja, weil $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+100\,000\,n}{n^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^3}+\frac{100\,000\,n}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3}} = \frac{0+0}{1} = 0$ und damit ist der Quotient der Folgen beschränkt.

Siehe auch 7.8.2., S 389 f

Entsprechend ist $n^2 + \ldots \in \mathcal{O}(n^{2+k})$ mit $k \in \mathbb{N}$

Es bedeutet, dass Folgen oder auch Funktionen mit der höchsten Potenz n^2 bzw. x^2 weniger schnell wachsen als Folgen oder Funktionen, deren höchste Potenz einen höheren Grad besitzen.

Allerdings sind solche Einschränkungen wie $n^2 + \ldots \in \mathcal{O}(n^{2+k})$ mit $k \in \mathbb{N}$ schwächer als $n^2 + \ldots \in \mathcal{O}(n^2)$

Ist $n^3 \in \mathcal{O}(n^2)$?

NEIN, weil $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n^3}{n^3}}{\frac{n^2}{n^3}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} \to \infty$ und damit ist der Quotient der Folgen NICHT beschränkt ist.

Ist $n^2 \in \mathcal{O}(2^n)$?

Ja, weil $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} \to 0$ weil Exponentialfunktionen (2^n) schneller wachsen als Potenzfunktionen (n^2)
und damit ist der Quotient der Folgen beschränkt ist.

Ist $2^n \in \mathcal{O}(n^2)$?

NEIN, weil $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^2} \to \infty$ weil Exponentialfunktionen (2^n) schneller wachsen als Potenzfunktionen (n^2)
und damit ist der Quotient der Folgen NICHT beschränkt ist.

Betrachten wir noch einige Rechengesetze der $\mathcal{O}$-Notation :

Es sei $n, k \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathcal{O}(n^k)$ und $b_n \in \mathcal{O}(n^k)$

$$\boldsymbol{a_n + b_n \in \mathcal{O}(n^k)}$$

Warum: $a_n \in \mathcal{O}(n^k)$ bedeutet doch $\frac{a_n}{n^k} = c_1$ ... der Quotient der Folgen kann höchstens den Wert c_1 erreichen.

$b_n \in \mathcal{O}(n^k)$ bedeutet doch $\frac{b_n}{n^k} = c_2$ ... der Quotient der Folgen kann höchstens den Wert c_2 erreichen.

$a_n + b_n = \frac{a_n}{n^k} + \frac{b_n}{n^k} \leq c_1 + c_2 = c = \frac{a_n + b_n}{n^k}$

Demnach ist auch $\frac{a_n+b_n}{n^k} = c$ beschränkt und somit ist $a_n + b_n \in \mathcal{O}(n^k)$

Beispiel: $a_n = 10\, n^2 + 1\,000\, n \in \mathcal{O}(n^2)$ und $b_n = 0.01\, n^2 + 1 \in \mathcal{O}(n^2)$

Somit ist dann auch $a_n + b_n = 10\, n^2 + 1\,000\, n + 0.01\, n^2 + 1 = 10.01\, n^2 + 1\,000\, n + 1 \in \mathcal{O}(n^2)$

Es sei $n, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathcal{O}(n^{k_1})$ und $b_n \in \mathcal{O}(n^{k_2})$

$$\boldsymbol{a_n \cdot b_n \in \mathcal{O}(n^{k_1} \cdot n^{k_2})}$$

Warum: $a_n \in \mathcal{O}(n^{k_1})$ bedeutet doch $\frac{a_n}{n^{k_1}} = c_1$ … der Quotient der Folgen kann höchstens den Wert c_1 erreichen.

$b_n \in \mathcal{O}(n^{k_2})$ bedeutet doch $\frac{b_n}{n^{k_2}} = c_2$ … der Quotient der Folgen kann höchstens den Wert c_2 erreichen.

$$a_n \cdot b_n = \frac{a_n}{n^{k_1}} \cdot \frac{b_n}{n^{k_2}} = c_1 \cdot c_2 = c = \frac{a_n \cdot b_n}{n^{k_1} \cdot n^{k_2}}$$

Demnach ist auch $\frac{a_n \cdot b_n}{n^{k_1} \cdot n^{k_2}} = c$ beschränkt und somit ist $a_n \cdot b_n \in \mathcal{O}(n^{k_1} \cdot n^{k_2})$

Beispiel: $a_n = 10\,n^2 + 1\,000\,n \in \mathcal{O}(n^2)$ und $b_n = 0.01\,n^2 + 1 \in \mathcal{O}(n^2)$

Somit ist dann $a_n \cdot b_n = (10\,n^2 + 1\,000\,n) \cdot (0.01\,n^2 + 1) = 0.1\,n^4 + 10n^3 + 10\,n^2 + 1\,000\,n \in \mathcal{O}(n^4) = \mathcal{O}(n^2 \cdot n^2)$

Übung Geben Sie an, ob folgende Aussagen wahr (w) oder falsch (f) sind[71]:

1) $1\,000\,000\,000\,n^2 + 1 \in \mathcal{O}(n^2)$
2) $3^n \in \mathcal{O}(2^n)$
3) $n^{1\,000\,000} \in \mathcal{O}(1\,000\,000^n)$
4) $n^{1\,000\,000} \in \mathcal{O}(1^n)$
5) $n^{1\,000\,000} \in \mathcal{O}(2^n)$
6) $2^n \in \mathcal{O}(2\,000\,000^n)$
7) $3^n \in \mathcal{O}(2^n)$

Lösungen: 1) w 2) f 3) w 4) f 5) w 6) w 7) f

[71] Idee: Prof. WEITZ von der HAW-Hamburg

12.1.2.4. Grenzwert einer Folge

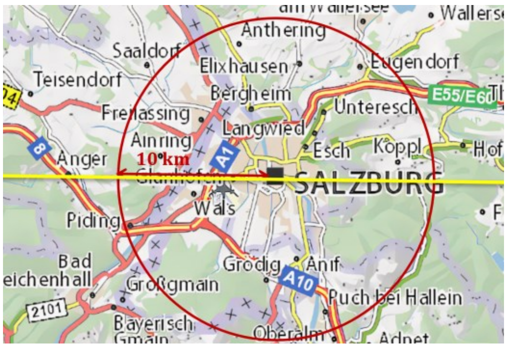
Bevor wir uns dem Grenzwert widmen, klären wir den Begriff der **ε-Umgebung**:

Im linken Bild ist die 15 km-Umgebung von Salzburg dargestellt.

Genauer: die 15 km-Umgebung von einem Punkt im Zentrum Salzburgs.

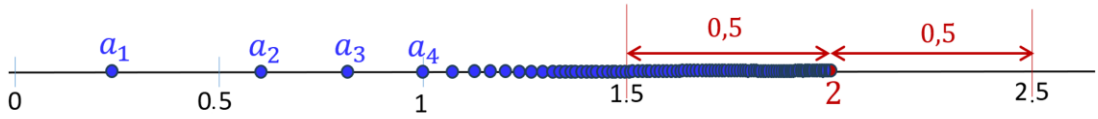
In der 15 km-Umgebung von Salzburg (S) befinden sich Orte wie Eugendorf (E), Anif (A), Hallein (H) und ganz am Rand Bad Reichenhall (REI).

Verkleinern wir den Radius auf 10 km, so liegen in der 10 km-Umgebung von S natürlich weniger Orte.



Projizieren wir Orte der 10 km-Umgebung von S auf eine Gerade wie die gelb eingezeichnete.

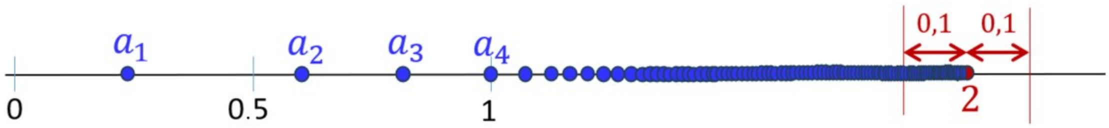
Übertragen wir diese Überlegungen auf die Folge $\left\langle \frac{2n-1}{n+3} \right\rangle$ und eine 0.5-Umgebung von 2:



Die Glieder dieser Folge nähern sich immer mehr der Zahl 2, werden aber nie über sie hinausgehen. 2 bildet wohl eine Grenze.
In der 0.5-Umgebung von 2 liegen alle Folgenglieder ab $a_{12} = 1.667$. Das sind, bei unendlich vielen Gliedern der Folge, „fast alle“ Glieder.

Bemerkung: Die Randzahlen, wie 1.5 und 2.5 liegen nicht mehr in der Umgebung.

Verkleinern wir die Umgebung und betrachten jetzt die 0.1-Umgebung von 2:



Zwar liegen jetzt erst alle Glieder ab $a_{48} = 1.902$ in der 0.1-Umgebung von 2, doch sind das auch „fast alle“ Glieder dieser Folge, die ja aus unendlich vielen Gliedern besteht.

Egal, wie klein wir die Umgebung von 2 wählen, es werden immer „fast alle“ Glieder der Folge in der Umgebung liegen.

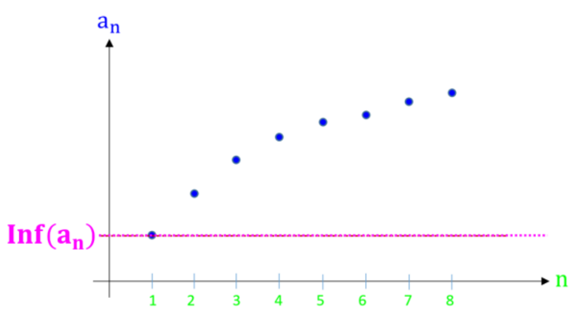
„fast alle“ Glieder bedeutet, dass nur **endlich** viele Glieder **nicht** in der gewählten Umgebung liegen.

Solche Umgebungen nennt man **ε-Umgebung**, wobei ε prinzipiell jede reelle Zahl sein darf.

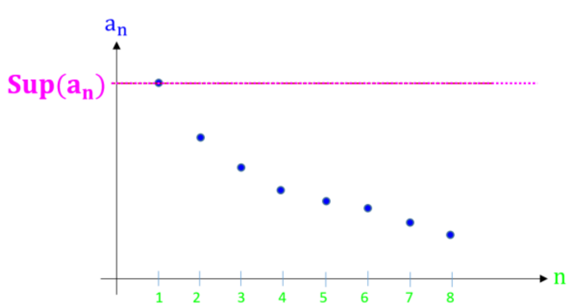
Eine Zahl $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ ist **Grenzwert** einer Folge, wenn in jeder ε-Umgebung von a (und damit in jeder noch so kleinen ε-Umgebung von a), „fast alle“ Glieder der Folge liegen.

Formal: $a \in \mathbb{R}$ ist Grenzwert der Folge $< a_n > \;\Longrightarrow\; \underset{\varepsilon \in \mathbb{R}^+}{\forall} \; \exists\, (N \geq 1) \; \forall\, (n > N) \; |a_n - a| < \varepsilon$

Weiters gilt:



Ist eine Folge (streng) monoton wachsend, so ist Grenzwert $a = \mathrm{Inf}(a_n)$



Ist eine Folge (streng) monoton fallend, so ist Grenzwert $a = \mathrm{Sup}(a_n)$

Der Grenzwert von Folgen kann auch so bestimmt werden:

Grenzwert a einer Folge: $\boldsymbol{a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n}$

lim ... **Limes** (lateinisch: Grenze)

Mit dieser Berechnung untersuchen wir, ob sich die Folgenglieder mit wachsendem n einer Zahl nähern.

Ohne Beweis sind hier die Grenzwertsätze, adaptiert an Folgen, angeführt:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} \quad mit \quad \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

Berechnung von Grenzwerten, wenn die Glieder im Zähler und Nenner **Potenzfunktionen** sind:

Jedes Glied im Zähler und Nenner wird durch die höchste Potenz dividiert, die im Bruch vorkommt.

Zur Erinnerung: Bei **Potenzfunktionen** steht die **Variable in der Basis**. Bsp.: $f_1(x) = x^2 \quad f_2(x) = (2\,x + 1)^3 \quad f_3(n) = 6\,n^4$

Beispiel: Gegeben ist die Folge $\left\langle \frac{2\,n-1}{n+3} \right\rangle$.

Der Grenzwert wird wie bei Funktionen berechnet (Siehe 7.8.2, S 389 f).

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2\,n-1}{n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2\,\overset{1}{\cancel{n}}}{\underset{1}{\cancel{n}}} - \frac{1}{n}}{\frac{\overset{1}{\cancel{n}}}{\underset{1}{\cancel{n}}} + \frac{3}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \overset{\to 0}{\frac{1}{n}}}{1 + \underset{\to 0}{\frac{3}{n}}} = \frac{2}{1} = 2$$

In den Brüchen $\frac{1}{n}$ und $\frac{3}{n}$ stehen im Zähler (endliche) Zahlen.
Der Nenner wird immer größer.
Demnach wird der Bruch immer kleiner
(er geht immer mehr gegen null).

Beispiele: $\frac{1}{100} = 0{,}01 \qquad \frac{1}{1000} = 0{,}001 \qquad \frac{1}{1000000} = 0{,}000001$

Der Grenzwert dieser Folge ist $a = 2$.

```python
from sympy import *
```

```python
n = symbols("n")
```

```python
def seqX (n):
    return((2*n-1)/(n+3))
```

```python
limit(seqX(n), n, oo)
```

2

Besitzt eine Folge einen Grenzwert, so heißt sie konvergent.

Eine Folge mit dem Grenzwert null heißt Nullfolge.

Besitzt eine Folge keinen Grenzwert, geht $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \to +\infty$ bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \to -\infty$, so heißt sie divergent.

Unendlich (∞)ist keine Zahl, unendlich ist ein Begriff: ohne Ende

So ist folgender Ausdruck sinnbefreit: $\infty.32$ (unendlich *Komma* 32)

Beispiel: Gegeben ist die Folge $\left\langle \frac{-5\,n^2+3\,n^4}{-2\,n-22} \right\rangle$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{-5\,n^2+3\,n^4}{-2\,n-22} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-5\,n^2}{n^4}+\frac{3\,n^4}{n^4}}{\frac{-2\,n}{n^4}-\frac{22}{n^4}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{\overset{\to -0}{\frac{-5}{n^2}}+3}^{\to\ +3}}{\underbrace{\underset{\to -0}{\frac{-2}{n^3}}-\underset{\to -0}{\frac{22}{n^4}}}_{\to\ -0}} \to -\infty$$

Was bedeutet $\to\ -0$?

Zum Beispiel $\frac{-2}{n^3}$: Der Zähler ist negativ (–), der Nenner ist positiv (+), weil n natürliche Zahlen (die Zahlen des Zählens) sind und eine positive Zahl hochgerechnet immer positiv ist.
Laut Vorzeichenregeln gilt $\frac{-}{+} = -$
Der Bruch $\frac{-2}{n^3}$ geht gegen Null, weil der Zähler 2 unverändert bleibt und der Nenner immer größer wird.

Denke dir statt $+0$ $+0{,}000\ .\ .\ .\ 001$ und statt -0 $-0{,}000\ .\ .\ .\ 001$

$\frac{+3}{-0}$ geht gegen $-\infty$. Warum?

Als Ergebnis minus kommt wegen der Vorzeichenregel $\frac{+}{-} = -$

Der Nenner würde erst dann exakt null sein, wenn wir bis unendlich kämen. Aber das ist nie erreichbar, weil unendlich ohne Ende bedeutet.

Warum wird der Bruch $\frac{3}{0}$ immer größer?

Beispiele, die das andeuten: $\frac{3}{0.1} = \frac{3}{\frac{1}{10}} = 3 \cdot \frac{10}{1} = 30$

$$\frac{3}{0.000001} = \frac{3}{\frac{1}{1\,000\,000}} = 3 \cdot \frac{1\,0000\,000}{1} = 3\,000\,000$$

Man kann den Grenzwert auch gegen eine (endliche) Zahl gegen lassen:

Beispiel: $\lim\limits_{n\to 1} \frac{3\,n^2}{n} = \lim\limits_{n\to 1} \frac{\frac{3\,n^2}{n^2}}{\frac{n}{n^2}} = \lim\limits_{n\to 1} \frac{3}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to 1} 3 \cdot \frac{n}{1} = \lim\limits_{n\to 1} 3 \cdot \overset{\to 1}{n} = 3$

Bemerkung: Freilich könnte man hier auch einfacher rechnen, doch möchte ich mich auf möglichst wenige verschiedene Rechengänge beschränken.

Ist eine Grenzwertberechnung mit anderen Funktionstypen als den Potenzfunktionen zu bestimmen, kann folgende Orientierung helfen:

Wer wird mit wachsendem n am schnellsten größer?

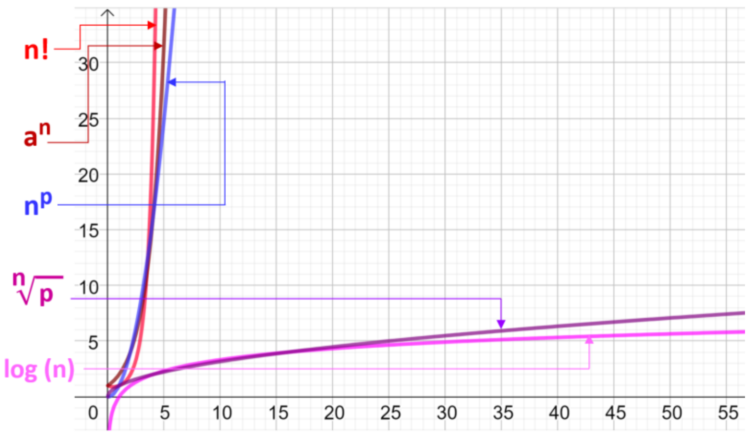
① **n!** **faktoriell**

② **a^n** **Exponential**funktionen

③ **n^p** **Potenz**funktionen

④ **$\sqrt[n]{p}$** **Wurzel**funktionen

⑤ **log (n)** **Logarithmus**funktionen



Beispiel: $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1000000} \cdot e^{-0.000001\,n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{1000000}}{e^{0.000001\,n}} = 0$ ... Nullfolge

Da die Exponentialfunktion im Nenner letztlich schneller gegen unendlich strebt als die Potenzfunktion im Zähler, geht der Bruch gegen Null. Es handelt sich um eine Nullfolge.

Beispiel: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n}} \to \infty$

Da die Potenzfunktion $n = n^1$ im Zähler schneller gegen unendlich strebt als die Wurzelfunktion im Nenner, geht der Bruch gegen unendlich. Die Folge ist also divergent.

Grenzwertberechnungen mit (Quadrat-) **Wurzeln**

Beispiel: Gegeben ist die Folge $\left\langle \frac{1-\sqrt{\frac{n-1}{n}}}{1-\frac{n-1}{n}} \right\rangle$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\sqrt{\frac{n-1}{n}}}{1-\frac{n-1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{1}{\cancel{\left(1-\sqrt{\frac{n-1}{n}}\right)}}}{\underset{1}{\cancel{\left(1-\sqrt{\frac{n-1}{n}}\right)}} \cdot \left(1+\sqrt{\frac{n-1}{n}}\right)} =$$

Binomischer Lehrsatz (2.2.5., S 87 f) $\quad a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$

Mit $a = 1$ und $b = \sqrt{\frac{n-1}{n}}$ ist $\quad 1 - \frac{n-1}{n} = \left(1-\sqrt{\frac{n-1}{n}}\right) \cdot \left(1+\sqrt{\frac{n-1}{n}}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\sqrt{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\overset{1}{\cancel{n}}}{\cancel{n}} - \frac{1}{n}}{\frac{\cancel{n}}{\underset{1}{\cancel{n}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}}{1} = \frac{1}{1} = 1 \;\to\; \sqrt{1} = \pm 1$$

Für $\sqrt{1} = -1$ gibt es keinen Grenzwert, weil dann $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+\sqrt{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0}$

Das letzte Beispiel zeigt:

Um Vereinfachungen mit Quadratwurzeln bewerkstelligen zu können, bedient man sich häufig des Binomischen Lehrsatzes (2.2.5., S 87 f) für n = 2 in den Formen

$$\left(A+\sqrt[2]{B}\right)\cdot\left(A-\sqrt[2]{B}\right)=A^2-\left(\sqrt[2]{B}\right)^2=A^2-B \qquad \left(\sqrt[2]{A}+B\right)\cdot\left(\sqrt[2]{A}-B\right)=\left(\sqrt[2]{A}\right)^2-B^2=A-B^2$$

$$\left(A-\sqrt[2]{B}\right)\cdot\left(A+\sqrt[2]{B}\right)=A^2-\left(\sqrt[2]{B}\right)^2=A^2-B \qquad \left(\sqrt[2]{A}-B\right)\cdot\left(\sqrt[2]{A}+B\right)=\left(\sqrt[2]{A}\right)^2-B^2=A-B^2$$

Beispiel: Gegeben ist die Folge $\left\langle\frac{2\,n+(-1)^n}{n}\right\rangle$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\,n+(-1)^n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\,n}{n}+\frac{(-1)^n}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2+\overset{\to 0}{\frac{(-1)^n}{n}}\right)=2+0=2$$

Weil $(-1)^n$ nur die Werte $+1$ oder -1 annimmt und der Nenner immer größer wird.

```python
from sympy import *
```

```python
n = symbols("n")
```

```python
def seqX (n):
    return((2*n+(-1)**n)/n)
```

```python
limit(seqX(n), n, oo)
```

2

Einige Grenzwerte von bestimmten Folgen:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n}=0 \quad \text{für} \quad a\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{n\to\infty}a^n=0 \quad \text{für} \quad |a|<1$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1 \quad \text{für} \quad a\in\mathbb{R}^+$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n=e^k$$

Beispiel: Gegeben ist die Folge $\left\langle \frac{3^{2n}-19}{9^n+12} \right\rangle$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{2n}-19}{9^n+12} = \lim_{n\to\infty} \frac{9^n-19}{9^n+12} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{9^n}{9^n}-\frac{19}{9^n}}{\frac{9^n}{9^n}+\frac{12}{9^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\overset{\to 0}{\frac{19}{9^n}}}{1+\underset{\to 0}{\frac{12}{9^n}}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

$3^{2n} = (3^2)^n = 9^n$

Beispiel: Gegeben ist die Folge $\left\langle \frac{\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{1+n}} \right\rangle$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{(n-1)\cdot(n+1)}}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n-1}\cdot\overset{1}{\cancel{\sqrt{n+1}}}}{\underset{1}{\cancel{\sqrt{n+1}}}} = \lim_{n\to\infty} \overset{\to\infty}{\sqrt{n-1}} \to \infty$$

$n^2-1 = (n-1)\cdot(n+1)$

Beispiel: Gegeben ist die Folge $\left\langle \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1} \right\rangle$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})}{1} \cdot \frac{(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1})}{(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1})} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1-(n^2-1)}{(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1})} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1-n^2+1}{(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1})} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(\underset{\to\infty}{\sqrt{n^2+1}}+\underset{\to\infty}{\sqrt{n^2-1}})} \to 0$$ ... Nullfolge

$(A-B)\cdot(A+B) = A^2-B^2$

Übung

Überprüfen Sie, ob die angegebenen Folgen konvergent sind und geben Sie in diesem Falle den Grenzwert an:

1) $\left\langle (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{n}}{n} \right\rangle$ 2) $\left\langle \frac{n^3}{3^n} \right\rangle$ 3) $\left\langle \left(\frac{\sqrt{n}}{n}\right)^n \right\rangle$ 4) $\left\langle \frac{3^n}{n\cdot 2^n} \right\rangle$ 5) $\left\langle \frac{1-\sqrt{1+n}}{1-(1+n)} \right\rangle$

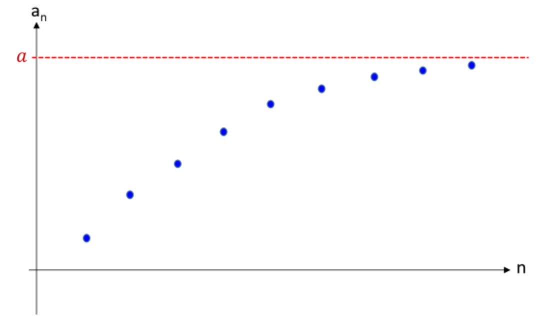
6) $\left\langle \frac{2^n-1}{2^{n-1}} \right\rangle$

Lösungen:

1) konvergent mit $a = 0$ 2) konvergent mit $a = 0$ 3) konvergent mit $a = 0$

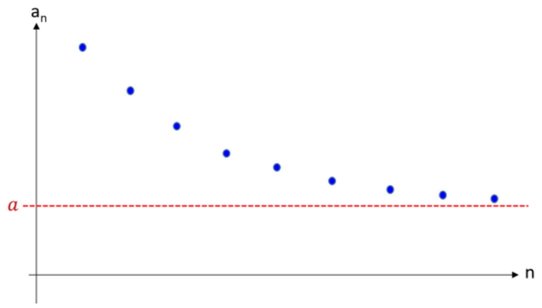
4) divergiert 5) konvergent mit $a = 0$ 6) konvergiert mit $a = 2$

12.1.2.5. Häufungspunkte einer Folge



Ein Häufungspunkt ist ein Wert, gegen den ein (wesentlicher) Teil der Folgenglieder strebt.

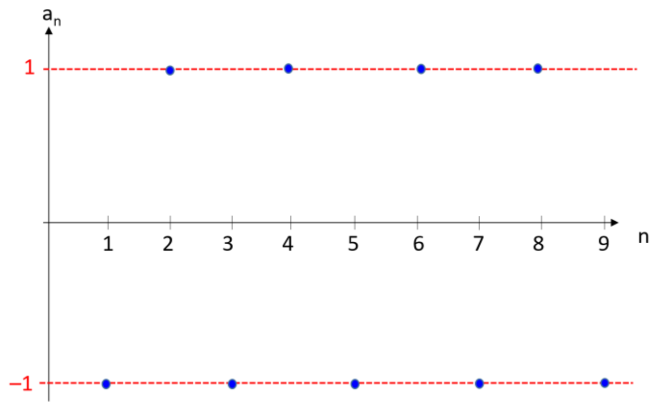
In der links abgebildeten Folge streben alle Folgenglieder gegen den Wert a. Dieser Wert ist sowohl Häufungspunkt als auch Supremum und Grenzwert der Folge.



In der links abgebildeten Folge streben alle Folgenglieder gegen den Wert a. Dieser Wert ist sowohl Häufungspunkt als auch Infimum und Grenzwert der Folge.

Eine Folge kann aber auch mehrere Häufungspunkte besitzen.

Beispiel: $\langle(-1)^n\rangle$



Bei dieser Folge strebt ein Teil der Glieder gegen 1, ein anderer Teil gegen -1.

$$\lim_{n\to\infty} Sup\, a_n = 1$$

Das ist der größte Häufungspunkt.

$$\lim_{n\to\infty} Inf\, a_n = -1$$

Das ist der kleinste Häufungspunkt.

Besitzt eine Folge genau einen Häufungspunkt a, so ist dieser auch Grenzwert und die Folge konvergiert.

Besitzt eine Folge keinen oder mehrere Häufungspunkte, so besitzt die Folge keinen Grenzwert und ist die Folge divergent.

Übung

Beurteilen Sie die Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

1) $a_n = -2$ 2) $b_n = \frac{1}{2\,n}$ 3) $c_n = 1 - \frac{1}{n}$ 4) $d_n = \frac{1}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)$

5) $e_n = (2 + 10 \cdot e^{-n}) \cdot \frac{1}{2^{n-3}}$ 6) $f_n = \frac{n^2-n}{n}$ 7) $g_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Lösungen:

1) konvergent mit $a = -2$ 2) konvergent mit $a = 0$ 3) konvergent mit $a = 1$

4) konvergent mit $a = 0$ 5) konvergent mit $a = 0$

6) divergent

7) $$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{(n+1)-(n)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

(a – b) · (a + b) = a² – b²

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

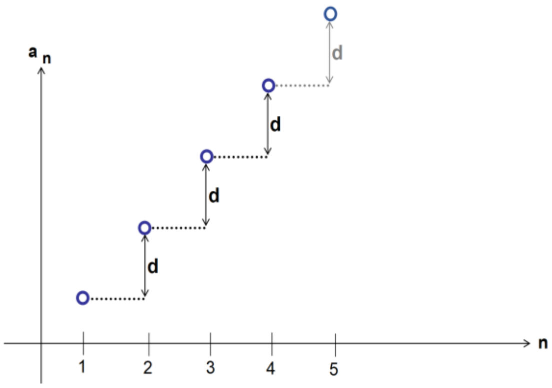
$$n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = n + n \cdot \frac{1}{n} = n + 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} =$$

$$= \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \sqrt{0} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1}+1} = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

12.1.3. Spezielle Folgen

12.1.3.1. Arithmetische Folgen



In einer **arithmetischen Folge** ist die **Differenz d eines Gliedes a_n und seines Vorgängers a_{n-1}** immer **gleich** groß.

$$a_n - a_{n-1} = d$$

$$\rightarrow a_n = a_{n-1} + d$$

$a_2 = a_{2-1} + d = a_1 + d$

$a_3 = a_{3-1} + d = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$

$a_4 = a_{4-1} + d = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$

. . . . .

Verallgemeinernd lässt sich sagen: $\mathbf{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}$ ... explizites Bildungsgesetz

Jedes Glied einer arithmetischen Folge lässt sich also mittels a_1 und d bestimmen.

Beispiel: Wie lautet das 13. Glied einer arithmetischen Folge mit $a_1 = -3$ und $d = \frac{1}{2}$?

$$a_{13} = a_1 + (13-1) \cdot d = -3 + 12 \cdot \frac{1}{2} = -3 + 6 = 3$$

Beispiel: Die Summe aus dem dritten und achten Glied einer arithmetischen Folge ist 31, die Differenz aus dem siebenten und vierten Glied lautet 9. Wie lautet das explizite Bildungsgesetz dieser Folge?

$$a_3 + a_8 = 31$$

$$a_7 - a_4 = 9$$

Der Text liefert zwei Gleichungen in vier Variablen. Um eindeutige Lösungen zu erhalten, dürfen aber bei zwei Gleichungen nur zwei Variable auftreten.

Deshalb drücken wir mit Hilfe des expliziten Bildungsgesetzes alle Glieder durch a_1 und d aus:

$$a_3 + a_8 = 31 \quad \rightarrow \quad a_1 + 2d + a_1 + 7d = 31$$

$$a_7 - a_4 = 9 \quad \rightarrow \quad a_1 + 6d - (a_1 + 3d) = 9$$

I: $2\,a_1 + 9\,d = 31 \;\rightarrow\; 2\,a_1 + 27 = 31 \rightarrow\; a_1 = 2$

II: $3\,d = 9 \;\rightarrow\; d = 3$

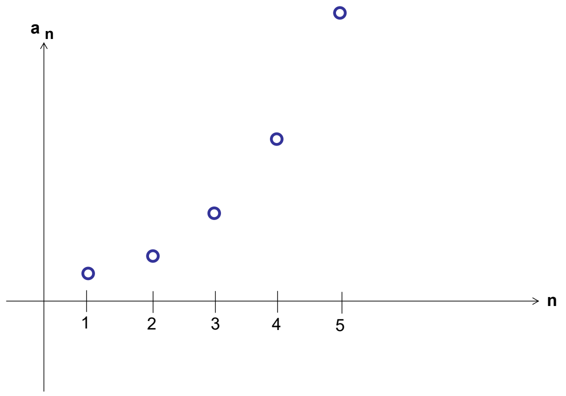
Somit lautet das explizite Bildungsgesetz dieser Folge $a_n = 2 + (n-1) \cdot 3$

In einer **arithmetischen** Folge ist jedes Glied (ausgenommen das erste) das **arithmetische** Mittel seiner Nachbarglieder (deshalb auch der Name ***arithmetische*** Folge):

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_1 + (n-2) \cdot d + a_1 + n \cdot d}{2} = \frac{2\,a_1 + n.d - 2d + n \cdot d}{2} = \frac{2a_1 + 2n \cdot d - 2d}{2} =$$

$$= \frac{2 \cdot (a_1 + n \cdot d - d)}{2} = a_1 + n \cdot d - d = a_1 + d \cdot (n-1) = a_1 + (n-1) \cdot d = a_n$$

12.1.3.2. Geometrische Folgen



In einer **geometrischen Folge** ist der **Quotient q** (das Ergebnis einer Division) **eines Gliedes b_n und seines Vorgängers b_{n-1} immer gleich** groß.

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = q \;\;|\; . \, b_{n-1}$$

$$\rightarrow b_n = b_{n-1} \, . \, q$$

$b_2 = b_{2-1} \, . \, q = b_1 \, . \, q$

$b_3 = b_{3-1} \, . \, q = b_2 \, . \, q = b_1 \, . \, q \, . \, q = b_1 \, . \, q^2$

$b_4 = b_{4-1} \, . \, q = b_3 \, . \, q = b_1 \, . \, q^2 \, . \, q = b_1 \, . \, q^3$

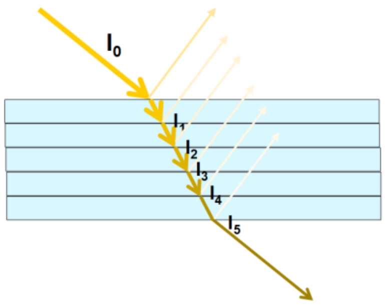
. . . . .

Verallgemeinernd lässt sich sagen: $\mathbf{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}$ ... explizites Bildungsgesetz

Jedes Glied einer geometrischen Folge lässt sich also mittels b_1 und q bestimmen.

Bemerkung: Die Glieder einer geometrischen Folge können mit b_n statt a_n bezeichnet sein, müssen aber nicht.

Beispiel:



Wie groß ist der Verlust an Lichtintensität, wenn ein Lichtstrahl der Intensität I_0 fünf gleichartige Glasplatten durchdringt und an jeder Grenzfläche jeweils 6 % seiner Intensität durch Reflexion einbüßt?

Um festzustellen, ob es sich um eine geometrische Folge handelt, stellen wir die ersten drei Glieder durch Überlegung ohne Verwendung einer Formel auf:

I_1 Licht-Intensität **nach** Durchdringung der ersten Platte

I_2 Licht-Intensität **nach** Durchdringung der zweiten Platte usw.

$$I_1 = 94\,\%\text{ von } I_0 = \frac{94}{100} \cdot I_0 = 0.94 \cdot I_0$$

$$I_2 = 94\,\%\text{ von } I_1 = \frac{94}{100} \cdot I_1 = 0.94 \cdot 094 \cdot I_0 = 0.94^{\,2} \cdot I_0$$

$$I_3 = 94\,\%\text{ von } I_2 = \frac{94}{100} \cdot I_2 = 0.94 \cdot 0.94^{\,2} \cdot I_0 = 0.94^{\,3} \cdot I_0$$

Damit gilt: $\frac{I_2}{I_1} = \frac{0.94^2 \cdot I_0}{0.94^1 \cdot I_0} = 0.94$ und $\frac{I_3}{I_2} = \frac{0.94^3 \cdot I_0}{0.94^2 \cdot I_0} = 0.94$

Da wir beide Male den gleichen Quotient q erhalten, handelt es sich um eine geometrische Folge mit $b_1 = I_1 = 0.94 \cdot I_0$ und $q = 0.94$.

Wichtig ist, dass die Nummerierung der Folgenglieder mit der Anzahl der Grenzflächen übereinstimmt, weil es sonst der Deutung des Endergebnisses zu Fehlern kommen kann!

Berechnen wir, wie viel der ursprünglichen Intensität des Lichtes beim Eintritt in die sechste Glasplatte verloren gegangen sind:

Der **Eintritt** in die 6. Glasplatte bedeutet, dass es sich um die Intensität I_5 **nach** Durchdringung der **5.** Platte handelt.

$$I_5 = 0.94 \cdot I_0 \cdot 0{,}94^{\,4} \cdot I_0 = 0.7339 \cdot I_0 = \text{ca. } 73\,\%\text{ von } I_0$$

Da noch ca. 73 % der ursprünglichen Intensität vorhanden sind, sind rund 100 % – 73 % = 27 % der ursprünglichen Lichtstärke verloren gegangen.

Noch ein

Beispiel: Jemand legt für die Dauer von 35 Kalenderjahren einmalig € 100,– bei einer jährlichen Verzinsung von 4 % an. Über welchen Betrag kann diese Person nach Ablauf dieser Zeitspanne verfügen?

Am **Ende** des 1. Kalenderjahr haben sich neben dem Anfangskapital von € 100,– auch 4 % an Zinsen angesammelt.

$b_1 = 100 + 4\ \%\text{ von } 100 = 100 + \frac{4}{100} \cdot 100 = 100 + 0.04 \cdot 100 = 100 + 4 = €\ 104,–$

Am **Ende** des 2. Kalenderjahres werden die € 104,– samt Zinsen auf

$b_2 = 104 + 4\ \%\text{ von } 104 = 104 + \frac{4}{100} \cdot 104 = 104 + 0.04 \cdot 104 = 104 + 4.16 = €\ 108.16$

angestiegen sein.

Am **Ende** des 3. Jahres beträgt der Wert des angelegten Kapitals samt Zinsen

$b_3 = 108.16 + 4\ \%\text{ von } 108.16 = 108.16 + \frac{4}{100} \cdot 108.16 = 108.16 + 0.04 \cdot 108.16 = €\ 112.4864$

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{108.16}{104} = \frac{b_3}{b_2} = \frac{112.4864}{108.16} = 1.04$$

Es handelt sich offensichtlich um eine geometrische Folge mit $b_1 = 104$ und $q = 1.04$.

Somit können wir rechnen: $b_{35} = b_1 . q^{34} = 104 \cdot 1.04^{34} = 394.61$ €

Wir könnten als erstes Glied der Folge auch das **Anfangskapital** $K_0 = b_0$ wählen, denn auch dann gilt

$$\frac{b_1}{b_0} = \frac{104}{100} = 1.04$$

Allerdings müssten wir dann folgenden Rechengang wählen: $b_{35} = b_0 \cdot q^{35} = 100 \cdot 1.04^{35} = 394.61$

Schreiben wir in der Formel $b_n = b_0 \cdot q^n$

K_n statt b_n, K_0 statt b_0 und $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ statt q, erhalten wir die Zinseszinsformel:

$$b_n = b_0 \cdot q^n$$

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Bemerkung: Nach 35 Jahren könnte man nicht über 394.61 € verfügen, weil jährlich 25 % an Kapitalertragssteuer (KESt) zu entrichten sind. Berücksichtigt man diesen Umstand, so ist wie folgt vorzugehen:

Wenn 25 % der Zinsen an Steuern zu zahlen sind, verbleiben noch 75 % der Zinsen: 75 % von 4 % = 3 %
Damit beträgt die effektive Verzinsung 3 % p.a. und $K_{35} = 100 \cdot (1 + 0.03)^{35} = 281.39$ €.

In jeder **geometrischen** Folge ist jedes Glied (außer dem ersten Glied) das **geometrische** Mittel seines Vorgängers und Nachfolgers (deshalb auch der Name ***geometrische*** Folge):

$$\sqrt[2]{b_{n-1} \cdot b_{n+1}} = \sqrt[2]{b_1 \cdot q^{n-2} \cdot b_1 \cdot q^n} = \sqrt[2]{b_1^2 \cdot q^{2n-2}} = \sqrt[2]{b_1^2 \cdot q^{2\cdot(n-1)}} = (b_1^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(q^{2\cdot(n-1)}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

P1, siehe 2.2.2., S 73

$$= b_1^{2\cdot\frac{1}{2}} \cdot q^{2\cdot(n-1)\cdot\frac{1}{2}} = b_1 \cdot q^{n-1} = b_n$$

P5, siehe 2.2.2., S 78

12.1.3.3. Rekursive Darstellung

Die bisher besprochenen Bildungsgesetze von Folgen nennt man explizit.

Dabei wird über das allgemeine Glied durch Einsetzen einer natürlichen Zahl direkt der Wert des entsprechenden Gliedes bestimmt.

Bei der rekursiven Darstellung greift man zur Berechnung eines Gliedes auf den Wert seines *Vorgängers* zurück.

Hier einige **Beispiele**:

	explizite Darstellung	**rekursive** Darstellung
allgemeine Zahlenfolge	$a_n = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \dots \ \cdot n$	$a_n = n \cdot a_{n-1}$ mit $a_1 = 1$
arithmetische Folge	$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$	$a_n = a_{n-1} + d$ mit gegebenem a_1
geometrische Folge	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$	$b_n = b_{n-1} \cdot q$ mit gegebenem a_1

Bei rekursiv gegebenen Folgen muss a_1 bekannt sein. Ansonsten lassen sich keine weiteren Glieder bilden!

Beispiel: Eine Folge ist rekursiv gegeben durch $a_{n+1} = 3 \cdot a_n - 1$ mit $a_1 = 1$.
Stellen Sie die ersten fünf Glieder dieser Folge auf.

$$n = 1: \quad a_{1+1} = a_2 = 3 \cdot a_1 - 1 = 3 \cdot 1 - 1 = 2$$

$$n = 2: \quad a_{2+1} = a_3 = 3 \cdot a_2 - 1 = 3 \cdot 2 - 1 = 5$$

$$n = 3: \quad a_{3+1} = a_4 = 3 \cdot a_3 - 1 = 3 \cdot 5 - 1 = 14$$

$$n = 4: \quad a_{4+1} = a_5 = 3 \cdot a_4 - 1 = 3 \cdot 14 - 1 = 41$$

```
def folge(n):
    if n < 2: return n
    return 3*folge(n-1)-1
print(folge(1))
```
1

```
def folge(n):
    if n < 2: return n
    return 3*folge(n-1)-1
print(folge(2))
```
2

```
def folge(n):
    if n < 2: return n
    return 3*folge(n-1)-1
print(folge(3))
```
5

```
def folge(n):
    if n < 2: return n
    return 3*folge(n-1)-1
print(folge(4))
```
14

```
def folge(n):
    if n < 2: return n
    return 3*folge(n-1)-1
print(folge(5))
```
41

Übung

1) Von einer arithmetischen Folge ist die Summe des zweiten und fünften Gliedes 14, die Differenz des sechsten und dritten Gliedes 6.
Stellen Sie das explizite und rekursive Bildungsgesetz dieser Folge auf.

2) DIE WELT **Datenvolumen verdoppelt sich alle zwei Jahre**

Begründen Sie, warum es sich bei diesem Wachstum um eine geometrische Folge handelt.

Stellen Sie das explizite und rekursive Bildungsgesetz dieser Folge auf.

Lösungen: Tipp für Aufgabe 1) : Stellen Sie die Glieder mit Hilfe des Bildungsgesetzes durch a_1 und d

$a_n = 2 + (n-1) \cdot 2 \qquad a_{n+1} = a_n + 2$ mit $a_1 = 2$

2) Verdoppelung alle 2 Jahre:

Nach	1	2	4	6	. . .	Jahren
	b_0	$2 \cdot b_0$	$4 \cdot b_0$	$8 \cdot b_0$		

$$\frac{b_1}{b_0} = \frac{2 \cdot b_0}{b_0} = 2 = q$$

explizites Bildungsgesetz: $b_n = 1 \cdot 2^n = 2^n$

rekursives Bildungsgesetz $b_{n+1} = b_n \cdot 2$ mit $b_0 = 1$

12.1.3.4. FIBONACCI-Folge

Mit dieser nach dem italienischen Mathematiker Leonardo von PISA (~1180 – 1250), besser bekannt unter dem Namen FIBONACCI (*filius Bonacci* – der Sohn des BONACCI) benannten Folge lassen sich bestimmte Wachstumsprozesse berechnen:

Beispiel:

Jemand setzt ein Weibchen und ein Männchen geschlechtsreifer Kaninchen in einem Garten aus, der auf allen Seiten von einer Mauer umgeben ist, so dass keine Kaninchen in den Garten oder heraus können.

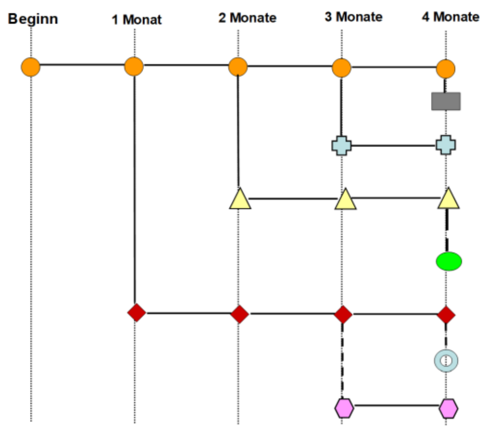
Folgende Bedingungen gelten:

- Jedes neugeborene Paar ist nach einem Monat geschlechtsreif.
- Jedes geschlechtsreife Paar schenkt nach einem Monat einem weiteren Paar gegengeschlechtlicher Tiere das Leben.

Zu Beginn befindet sich im Garten $F_0 = 1$ Paar Kaninchen, nämlich die beiden ausgesetzten Tiere.

Nach dem ersten Monat leben in diesem Garten $F_1 = 2$ Paare (das ausgesetzte und das von diesem Paar zur Welt gebrachte)

Nach dem zweiten Monat bevölkern diesen Garten $F_2 = 3$ Paare (das ausgesetzte Paar hat ein weiteres Paar geworfen plus dem vor einem Monat zur Welt gekommenen Paar)



Jeden Monat kommen so viele Paare dazu wie im vorletzten Monat lebten, da ja die Geschlechtsreife einen Monat beansprucht.
Für die ersten 12 Monate ergibt sich die Folge < 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; 233; 377 >,
die FIBONACCI wie folgt errechnete:

Zu Beginn und nach einem Monat ist die Anzahl gegeben: $F_0 = 1$ und $F_1 = 2$.

Nach zwei Monaten gilt: $F_2 = F_1 + F_0 = 2 + 1 = 3$

nach drei Monaten: $F_3 = F_2 + F_1 = 3 + 2 = 5$

nach vier Monaten: $F_4 = F_3 + F_2 = 5 + 3 = 8$ usw.

Ist $\mathbf{F_n}$ die **Anzahl der Paare** Kaninchen **nach n Monaten**, so gilt: $\mathbf{F_n = F_{n-1} + F_{n-2}}$

Berechnung von F_4:

```
def fibr(n):
    if n < 2: return n
    return fibr(n-1) + fibr(n-2)
```

```
print(fibr(6))
```

```
8
```

Wollen wir jetzt die Anzahl der Kaninchenpaare nach einem Jahr bestimmen.

Mit der sog. rekursiven[72] Formel $\mathbf{F_n = F_{n-1} + F_{n-2}}$ ist die Berechnung händisch mühselig, weil man zuerst immer alle Vorgängersummen, für unser Beispiel die Anzahl der Kaninchenpaare der ersten 11 Monate, bestimmen müsste.

BINET[73] beschäftigte sich mit der Theorie der Matrizenrechnung und definierte dabei die Multiplikation von Matrizen. U.a. veröffentlichte er eine nicht-rekursive Formel für die Bestimmung der Glieder von FIBONACCI-Folgen, die jedoch bereits zuvor Leonard EULER, Daniel BERNOULLI und Abraham de MOIVRE[74] bekannt war:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right]$$

Damit lässt sich z.B. die Anzahl der Kaninchenpaare nach einem Jahr leicht bestimmen, wobei wir n = 12 setzen

```
from sympy import *
```

```
float(1/(5)**(1/2)*(((1+5**(1/2))/2)**14-((1-5**(1/2))/2)**14))
```

```
377.0
```

Eine scheinbare Spielerei.

Doch KEPLER[75] stellte fest, dass sich das Verhältnis zweier aufeinander folgender FIBONACCI-Glieder mit wachsendem n immer mehr dem Verhältnis des *Goldenen Schnittes* nähert. Außerdem lässt sich das jeweilige Verhältnis als Kettenbruch darstellen:

$$\frac{F_1}{F_0} = \frac{2}{1} = 1 + \frac{1}{1} \qquad \frac{F_2}{F_1} = \frac{3}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}} \qquad \frac{F_3}{F_2} = \frac{5}{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}$$

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} \to 1.619 \ldots$$

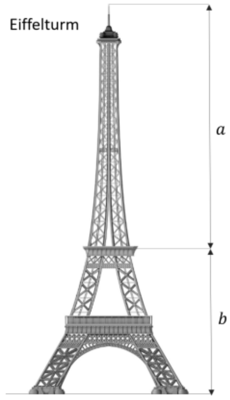
72 *recursare* (lateinisch) zurücklaufen. In der Mathematik: durch sich selbst definierend

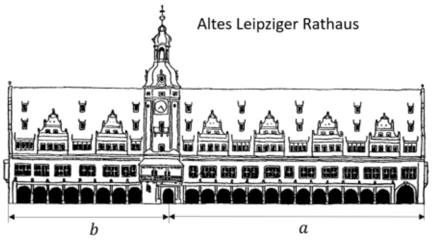
73 Jacques Philippe Marie BINET (1786–1856), französischer Mathematiker

74 Abraham de MOIVRE (1667 – 1754), französischer Mathematiker

75 Johannes KEP(P)LER (1571 (julianischer Kalender) – 1630 (gregorianischer Kalender)), deutscher Astronom, Physiker, Mathematiker

1.619 … ist das Verhältnis der Längen des *Goldenen Schnitts*, der in der Baukunst wie in der Natur ihren Widerhall findet.





Die Teilstrecken a und b genügen dem *Goldenen Schnitt*:

$$\frac{a+b}{a} = 1.169 \ldots$$

© Pixabay

Blütenstände von Pflanzen, wie der Sonnenblume, weisen Spiralen auf, deren Teilblüten einer FIBONACCI-Folge genügen. Dadurch liegen die Blütenblätter zueinander in maximalen Abständen und erhalten auf diese Weise möglichst viel Licht.

© Pixabay

Auch die Anzahl der Ahnen einer weiblichen Honigbiene gehorcht den Gesetzen dieser Folge.

12.2. Reihen

12.2.1. Definition

Unter einer Zahlen- **Reihe** versteht man eine **Folge**, wobei das **n-te Reihen**-Glied durch Addition der **ersten n Folgen-Glieder** entsteht:

Zahlenfolge: $< a_1 ; a_2 ; a_3 ; \ldots\ldots ; a_n >$

Die dazugehörige Reihe lautet: $< s_1 ; s_2 ; s_3 ; \ldots\ldots ; s_n >$

mit $s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$$\mathbf{s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n} = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

s_n nennt man die n-te Teilsumme bzw. n-te Partialsumme

Beispiel: Zahlenfolge: $< 1 ; 3 ; 5 ; 7 >$
Demnach ist $s_1 = a_1 = 1$, $s_2 = a_1 + a_2 = 1 + 3 = 4$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 3 + 5 = 9$,
$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$
und die dazugehörige Reihe lautet: $< 1 ; 4 ; 9 ; 16 >$

Der Sinn von Reihen besteht vornehmlich darin, die Summe der ersten n Glieder einer Folge zu bestimmen, wozu ein Bildungsgesetz der Folge bzw. der Reihe vonnöten ist.

Betrachten wir dazu nochmals unser obiges **Beispiel:**

Zahlenfolge: $< 1 ; 3 ; 5 ; 7 >$

$a_1 = 1 = 1 + 0 . 2$

$a_2 = 3 = 1 + 1 . 2$

$a_3 = 5 = 1 + 2 . 2$

Hier handelt es sich um eine arithmetische Folge mit $a_1 = 1$ und $d = 2$.

Demnach lautet das Bildungsgesetz der **Folge**: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 1 + (n-1) \cdot 2 = 1 + 2 \cdot n - 2 = 2 \cdot n - 1$

Das Auffinden des Bildungsgesetzes **allgemeiner** Zahlenfolgen erfordert eine gewisse Routine.

Betrachten wir nun die Glieder der **Reihe** < 1 ; 4 ; 9 ; 16 >, so wird offensichtlich jeder natürlichen Zahl ihr Quadrat zugeordnet und entsprechend lautet das Bildungsgesetz der Reihe: $s_n = n^2$.

Wollen wir nun beispielsweise wissen, wie groß die Summe der ersten 20 Glieder der gegebenen **Folge** mit dem expliziten Bildungsgesetz $a_n = 1 + (n-1) \cdot 2$ sind, brauchen wir nur wie folgt zu rechnen:

$$s_{20} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_{20} = 20^2 = 400$$

Das Aufstellen des allgemeinen Gliedes einer allgemeinen Zahlen**folge** kommt auch unter anderen in sogenannten *Intelligenztests* oder Aufnahmeprüfungen an Unis[76] vor.

Beispiel: Wie lautet die nächste Zahl der angegebenen Folge?

$$\frac{1}{2} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{7}{9} \quad \ldots$$

$$\begin{array}{lccccccccc}
n = & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 \\
 & & +2 & & +2 & & +2 & & +2 & \\
 & \frac{1}{4} & & \frac{3}{7} & & \frac{5}{9} & & \frac{7}{11} & & \ldots \\
 & & +3 & & +3 & & +3 & & +3 &
\end{array}$$

Der Zähler wird jeweils um **2** vermehrt, den Nenner um **3**. Da wir der Reihe nach für **n = 1, 2, 3, . . .** einsetzen, erhalten wir die entsprechenden Zahlen, indem wir im Zähler $2\,n$ und im Nenner $3\,n$ wählen:

$a_n = \frac{2\,n}{3\,n}$ $\qquad a_1 = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 1} = \frac{2}{3}$ Im Zähler soll aber nicht 2, sondern 1 stehen: $2 - 1 = 1$

Im Nenner soll aber nicht 3, sondern 4 stehen: $3 + 1 = 4$

Deshalb lautet das Bildungsgesetz $a_n = \frac{2\,n-1}{3\,n+1}$ und damit ist $a_5 = \frac{2 \cdot 5 - 1}{3 \cdot 5 + 1} = \frac{9}{16}$

1) $\boxed{-\frac{1}{2}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{-\frac{5}{4}}$ $\boxed{\frac{7}{5}}$ $\boxed{?}$

2) Simulation » **Zahlenfolgen**

6 21 11 22 37 27 54 ? ?

a) 64 / 54
b) 69 / 59
c) 62 / 52
d) 61 / 11
e) Keine Antwort ist richtig

Lösung: 1) −1,5 2) b)

[76] Zum Beispiel im MedAT Aufnahmetest für Humanmedizin, aus dem das 2. Beispiel der Übung stammt.

12.2.2. Konvergenzkriterien

Besitzt eine Folge einen Grenzwert, bedeutet das nicht, dass die dazugehörige Reihe auch einen endlichen Wert, den Reihenwert, besitzt.

Beispiel: $a_n = \frac{1}{n}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = ?$

Die dazugehörige Partialsumme s_n lautet $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \,.\,.\,. + \frac{1}{n}$

Was ergibt nun $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \,.\,.\,. + \frac{1}{n} + \,.\,.\,. = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$?

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \,.\,.\,. + \frac{1}{n} + \,.\,.\,. =$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \,.\,.\,. + \frac{1}{n} + \,.\,.\,.$$

$$\geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \,.\,.\,. + \frac{1}{n} + \,.\,.\,. =$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)}_{\frac{1}{2}} + \,.\,.\,. + \frac{1}{n} + \,.\,.\,. =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \,.\,.\,. + \frac{1}{2} + \,.\,.\,. \to \infty$$

Demnach gilt $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \,.\,.\,. + \frac{1}{n} \to \infty$

Dieses Beispiel zeigt, dass sich die Bestimmung des Reihenwertes diffiziler gestalten kann als bei Folgen.

Merken wir uns:

harmonische Reihe $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{divergiert}}$ $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{konvergiert}}$

Allgemeine harmonische Reihe $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}}$ konvergiert für $\alpha > 1$

Folgende Reihen konvergieren:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \mp \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$$ Alternierende harmonische Reihe

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \mp \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$ LEIBNIZ-Reihe

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \pm \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} = 1$$

(Siehe auch L. PAPULA: **Mathematische Formelsammlung**, S 182)

Um die Grenzwerte von Reihen bestimmen zu können, bedient man sich gewisser

Konvergenz-Kriterien:

① **Nullfolgen**-Kriterium: (Trivial-Kriterium): $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0 \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert

Wenn a_n **keine** Nullfolge ist, also nicht den Grenzwert Null besitzt, dann besitzt die dazugehörige Reihe keinen Grenzwert, sie ist divergent.

Beispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2\,n+1}: \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2\,n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{2\,n}{n}+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}} = \frac{1}{2} \neq 0 \;\Rightarrow \text{die Reihe } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2\,n+1} \text{ ist divergent}$$

Die Bedingung $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ist eine notwendige Bedingung für die Konvergenz der Reihe ,aber keine hinreichende!

Will heißen, wenn eine Nullfolge vorliegt, muss die Reihe nicht zwingend konvergent sein.

Beispiel:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ (Siehe 12.1.2.4., S 560 f) Aber: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent (Siehe S 582)

Somit sind weitere Konvergenz-Kriterien notwendig:

② **Majoranten**-Kriterium: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ist **konvergente** Reihe mit $b_n > 0$ und $|a_n| \leq b_n \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **konvergent**

Wenn alle Glieder b_n positiv sind, die dazugehörige Reihe konvergent und der Betrag jedes Gliedes a_n einer (anderen) Folge kleiner gleich dem entsprechenden Glied b_n ist, so ist auch die zur Folge a_n gehörige Reihe konvergent.

Auch im Falle der Konvergenz haben wir noch keine Reihensumme (keinen Reihenwert) bestimmt!

Beispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\,n\cdot(n+1)}: \qquad \left|\frac{1}{\underbrace{2\,n\cdot(n+1)}_{=2\,n^2+2\,n}}\right| < \frac{1}{2\,n^2} < \frac{1}{n^2} \qquad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ konvergiert}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\,n\cdot(n+1)} \text{ konvergiert}$$

```
from sympy import *
```
```
from fractions import Fraction
```
```
n = symbols("n")
```
```
Sum(1/(2*n*(n+1)), (n, 1, oo)).doit()
```

$\frac{1}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\,n \cdot (n+1)} = \frac{1}{2}$$ … der Grenzwert der Reihe (der Reihenwert) ist $\frac{1}{2}$

③ **Minoranten**-Kriterium: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ist **divergente** Reihe mit $b_n > 0$ und $|a_n| \geq b_n \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent

Wenn alle b_n positiv sind, die dazugehörige Reihe divergent und der Betrag jedes Gliedes a_n einer (anderen) Folge größer gleich dem entsprechenden Glied b_n ist, so ist auch die zur Folge a_n gehörige Reihe divergent.

Beispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}} : \quad \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2+2n^2}} = \frac{1}{\sqrt{3n^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{n^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}\cdot n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{divergiert} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}} \quad \text{divergiert}$$

$\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{divergiert}}$

④ **Quotienten**-Kriterium: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n \neq 0$ gilt für fast alle n

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konvergent}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{divergent}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{keine Aussage möglich}$$

Auch im Falle der Konvergenz haben wir noch keine Reihensumme (keinen Reihenwert) bestimmt.

Beispiel:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5+n}{10^n}: \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{5+n+1}{10^{n+1}}}{\frac{5+n}{10^n}}\right| = \left|\frac{5+n+1}{10^{n+1}}\cdot\frac{10^n}{5+n}\right| = \left|\frac{6+n}{10\cdot(5+n)}\right| = \left|\frac{1}{10}\cdot\frac{6+n}{5+n}\right| = \frac{1}{10}^{*}$$

P2 (Siehe 2.2.2., S 74)

$$* \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{10}\cdot\frac{6+n}{5+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{10}\cdot\frac{\frac{6}{n}+\frac{n}{n}}{\frac{5}{n}+\frac{n}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{10}\cdot\frac{\overset{\to 0}{\frac{6}{n}}+1}{\underset{\to 0}{\frac{5}{n}}+1} = \frac{1}{10}\cdot 1 = \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{10} < 1 \quad \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{5+n}{10^n}$$ ist **konvergent**

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$ konvergent

```
Sum((5+n)/10**n, (n, 0, oo)).doit()
```

$\frac{460}{81}$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5+n}{10^n} = \frac{460}{81}$ ... Reihenwert

⑤ **Wurzel**-Kriterium: $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} q < 1 & \textbf{konvergiert} \\ q > 1 & \text{divergiert} \\ q = 1 & \text{keine Aussage möglich} \end{cases}$$

Auch im Falle der Konvergenz haben wir noch keine Reihensumme (keinen Reihenwert) bestimmt!

Für $a > 0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!} \to \infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$$

https://studyflix.de/mathematik/wurzelkriterium-2428

Beispiel:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}: \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2} < 1 \;\Longrightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n} \text{ konvergiert}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1}$$

```
from sympy import *
```

```
from fractions import Fraction
```

```
n = symbols("n")
```

```
Sum(n/2**n, (n, 0, oo)).doit()
```

2

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n} = 2$$

⑥ **Leibniz**-Kriterium: Es sei $\langle a_n\rangle$ eine monoton fallende Nullfolge $\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot a_n$ **konvergiert**, wenn

$$(a_n \geq a_{n+1}) \wedge \left(\lim_{n\to\infty} a_n = 0\right)$$

(monoton fallend) (Nullfolge)

Auch im Falle der Konvergenz haben wir noch keine Reihensumme (keinen Reihenwert) bestimmt!

Beispiel:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2n+1}{n^2+1}: \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\overset{\to 0}{\frac{2}{n}}+\overset{\to 0}{\frac{1}{n^2}}}{1+\underset{\to 0}{\frac{1}{n^2}}} = \frac{0}{1} = 0 \text{ ... Nullfolge}$$

$$a_n \geq a_{n+1}\,? \quad \frac{2n+1}{n^2+1} \geq \frac{2(n+1)+1}{(n+1)^2+1}$$

$$\frac{2n+1}{n^2+1} \geq \frac{2n+2+1}{n^2+2n+1+1}$$

$$\frac{2n+1}{n^2+1} \geq \frac{2n+3}{n^2+2n+2} \;\Big|\cdot N$$

$$(2n+1)\cdot(n^2+2n+2) \geq (2n+3)\cdot(n^2+1)$$

$$2\,n^3+4\,n^2+4\,n+n^2+2n+2 \geq 2\,n^3+2\,n+3\,n^2+3$$

$$2\,n^3+5\,n^2+6\,n+2 \geq 2\,n^3+3n^2+2\,n+3 \;\; | -2\,n^3-3\,n^2-2\,n-2$$

$2\,n^2+4\,n \geq 1$ w.A. für alle $n \in \mathbb{N}$ ... **monoton fallend**

-> Die Reihe ist **konvergent**.

Weitere Beispiele zur Grenzwertbestimmung:

Beispiel: 5 ... **Wurzel**kriterium

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln(n))^n}: \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(\ln(n))^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{(\ln(n))^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\underbrace{\ln(n)}_{\to\infty}} = 0 < 1 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln(n))^n}$$ **konvergiert**

Beispiel: 3 ... **Minoranten**kriterium

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}: \quad \frac{1}{\sqrt[3]{n}} > \frac{1}{\sqrt[3]{n^3}} = \frac{1}{n} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \text{ divergiert } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$ divergiert

Beispiel:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}: \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{3}{2}$$

$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ist eine geometrische Reihe mit $b_1 = 1$ und $q = \frac{1}{3}$

Für die unendlich geometrische Reihe gilt $s = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$

(Siehe 12.2.3.2., S 593 f)

```
from sympy import *
```

```
from fractions import Fraction
```

```
n = symbols("n")
```

```
Sum(1/3**n, (n, 0, oo)).doit()
```

$\frac{3}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

```
from sympy import *
```

```
from fractions import Fraction
```

```
n = symbols("n")
```

```
Sum(1/n**n, (n, 1, oo)).doit()
```

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$$

```
from sympy import *
```

```
from fractions import Fraction
```

```
n = symbols("n")
```

```
Sum(1/n**n, (n, 1, oo)).is_convergent()
```

True

Wenn als Ergebnis statt eines Grenzwertes bzw. ∞ wiederum die Reihe angegeben wird, kann man mit dem Befehl **.is_convergent( )** überprüfen lassen, ob die Reihe konvergiert:

True: ja
False: nein

Noch ein Begriff:

Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, spricht man von Konvergenz.

Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert, so spricht man von absoluter Konvergenz.

Im ersten Fall können Folgenglieder auch negativ sein, im zweiten Fall sind sie nicht negativ.

Beispiel:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \mp \ldots\ldots = \ln(2)$$

... siehe S 582

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|(-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots \text{divergiert}$$

... siehe S 582

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ ist **konvergent** aber nicht absolut konvergent.

Wann wendet man welches Kriterium an?

① **Nullfolgen**-Kriterium: Dieses sog. Trivialkriterium kann man dann anwenden, wenn sich leicht zeigen lässt, ob die dazugehörige Folge eine Nullfolge ist.
Ist die Folge keine Nullfolge, so weiß man, die Reihe divergiert.

Beispiel: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n^3+2}{n^2-n}$: $\lim_{n\to\infty} \frac{-n^3+2}{n^2-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-n^3}{n^3}+\frac{2}{n^3}}{\frac{n^2}{n^3}-\frac{n}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{-1+\underbrace{\frac{2}{n^3}}_{\to +0}}^{\to -1}}{\underbrace{\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to +0}-\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to -0}}_{\to +0}} \to -\infty$

Da $-\frac{1}{n^2}$ schneller gegen null geht als $\frac{1}{n}$,
geht der Nenner gegen +0

② **Majoranten**-Kriterium und ③ **Minoranten**-Kriterium: Bei Reihen der Form $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$

Wobei $P(n)$ und $Q(n)$ **Polynomfunktionen** sind.

Als Majorante eignet sich oft die konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

als divergente Minorante die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Um eine geeignete Majorante zu finden, müssen wir den Zähler nach oben und den Nenner nach unten abschätzen. Für eine geeignete Minorante gilt der umgekehrte Sachverhalt.

Anhaltspunkte: Grad (Zähler) $<$ Grad (Nenner) – 1: die Reihe **konvergiert**, Anwendung des Majoranten-Kriteriums.
Grad (Zähler) $\geq$ Grad (Nenner) – 1: die Reihe divergiert, Anwendung des Minoranten-Kriteriums.

Beispiele: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}$ Hier gilt: Grad (Zähler) < Grad (Nenner) – 1
$1 \quad \geq \quad 2 \quad -1$

Die Reihe wird vermutlich divergieren, Anwendung des Minoranten-Kriteriums:

$\left|\frac{n}{1+n^2}\right| > \left|\frac{n}{n^2+n^2}\right| = \left|\frac{n}{2\,n^2}\right| = \left|\frac{1}{2\,n}\right|$ $\quad \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergiert (harmonische Riehe) (Siehe S 582)

Demnach divergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}$

④ **Quotienten**-Kriterium geht vornehmlich bei Polynomfunktionen (Potenzfunktionen)

Beispiel: $\sum_{n=1}^{\infty} -3\cdot\frac{22}{n^{0.98}}$: $\left|\frac{\frac{-66}{(n+1)^{0.98}}}{\frac{-66}{n^{0.98}}}\right| = \left|\frac{-66}{(n+1)^{0.98}}\cdot\frac{n^{0.98}}{-66}\right| = \left|\frac{n^{0.98}}{(n+1)^{0.98}}\right| = \left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^{0.98}\right| = 1^{0.98} = 1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}} = 1$$

Keine Aussage möglich.

Beispiel: $\sum_{n=1}^{\infty} 2\cdot\frac{7}{2^{n+1}}\cdot(x-8)^{2\,k+1}$: $\left|\frac{\frac{14\cdot(x-8)^{2(n+1)+1}}{2^{n+1+1}}}{\frac{14\cdot(x-8)^{2\,n+1}}{2^{n+1}}}\right| = \left|\frac{14\cdot(x-8)^{2(n+1)+1}}{2^{n+1+1}}\cdot\frac{2^{n+1}}{14\cdot(x-8)^{2\,n+1}}\right| =$

$$= \left|\frac{(x-8)^{2n+2+1}}{2^{n+2}}\cdot\frac{2^{n+1}}{(x-8)^{2\,n+1}}\right| = \left|\frac{(x-8)^{2n+3}}{2^{n+2}}\cdot\frac{2^{n+1}}{(x-8)^{2\,n+1}}\right| =$$

$$= \left|\frac{(x-8)^{2n+3}}{2^{n+2}}\cdot\frac{2^{n+1}}{(x-8)^{2\,n+1}}\right| = \left|\frac{(x-8)^2}{2}\right| = \frac{1}{2}\cdot(x-8)^2 =$$

$(x-8)^{2n+3} : (x-8)^{2n+1} = (x-8)^{2n+3-(2n+1)} = (x-8)^{2n+3-2n-1} = (x+8)^2$

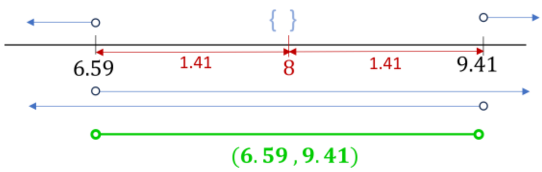
$= 2^{n+1} : 2^{n+2} = 2^{n+1-(n+2)} = 2^{n+1-n-2} = 2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$

Fallunterscheidungen: Konvergenz liegt vor, wenn $\frac{1}{2}\cdot(x-8)^2 < 1 \mid .2$ ... siehe 3.4.2., S 169 f

$(x-8)^2 < 2$

$x^2 - 16\,x + 64 < 2 \mid -2$

$x^2 - 16\,x + 62 < 0$



$x^2 - 16\,x + 62 = \mathbf{0}$

$x_{1/2} = 8 \pm \sqrt{64-62}$

$x_1 = 9.41 \;\vee\; x_2 = 6.59$

Man sagt, der Konvergenzradius an der Stelle $x = 8$ ist 1.41.

... siehe 12.2.3.3.2., S 603 f

$x^2 - 16\,x + 62 < 0$

$(x-9.41)\cdot(x-6.59) < 0$

$(x-9.41 > 0) \wedge (x-6.59 < 0) \;\vee\; (x-9.41 < 0) \wedge (x-6.59 > 0)$

$x > 9.41 \;\wedge x < 6.59 \qquad \vee \;\; x < 9.41 \;\wedge x > 6.59$

$\{\ \} \qquad \vee \qquad (6.59\,,9.41)$

⑤ **Wurzel**-Kriterium bei Reihen vornehmlich dann, wenn sich a_n vorteilhaft mit n-ter Wurzel darstellen lässt.

Beispiel: $\frac{2^{n^2+1}}{3^{3\,n}}$: $\sqrt[n]{\frac{2^{n^2+1}}{3^{3\,n}}} = \sqrt[n]{\frac{2^{n^2}\cdot 2}{(3^3)^n}} = \frac{\sqrt[n]{2^{n^2}}\cdot\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{(3^3)^n}} = \frac{2^n\cdot\sqrt[n]{2}}{3^3} = \cdots$

Hier ist es wichtig, die Rechenregeln für Potenzen und Wurzeln gut zu beherrschen! (2.2.2., S 73 f)

Beispiel: $\sum_{n=1}^{\infty} 0{,}1^n\cdot 7\cdot\left(\frac{9}{2}\right)^{n+3}$: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|0{,}1^n\cdot 7\cdot\left(\frac{9}{2}\right)^{n+3}\right|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{0{,}1^n}\cdot\sqrt[n]{7}\cdot\sqrt[n]{\left(\frac{9}{2}\right)^{n+3}} =$

Betragsstriche können weggelassen werden, weil alle Faktoren positiv sind.

$$= \lim_{n\to\infty} 0{,}1\cdot 1\cdot\left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{n+3}{n}} = \lim_{n\to\infty} 0{,}1\cdot 1\cdot\left(\frac{9}{2}\right)^{1+\overset{\to 0}{\frac{3}{n}}} = 0{,}1\cdot 1\cdot\frac{9}{2} = \frac{9}{20} < 1$$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$ (Siehe S 585)

Die Reihe **konvergiert**.

⑥ **Leibniz**-Kriterium bei alternierenden Reihen **wenn** * die **Folge** $< a_n >$ **monoton fallend** und eine **Nullfolge** ist.

Beispiel: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$: $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} =$

$$= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

Monotonie von $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$: $\sqrt{n+1+1}+\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n+1}+\sqrt{n}$

$\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ w.A. für alle $n \in \mathbb{R}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\underset{\to\infty}{\sqrt{n+1}}+\underset{\to\infty}{\sqrt{n}}} = 0$ Die Reihe **konvergiert**.

Bisher stellten wir immer nur fest, ob die Reihe einen Grenzwert besitzt, haben aber, außer mit Python, die Reihensumme (den Reihenwert) nicht bestimmt.

Die Bestimmung des Reihenwertes ist nicht immer einfach und bedarf schon einiger Rechenkenntnisse und vorausschauenden Verständnisses.

In den folgenden zwei Kapiteln betrachten wir zwei Methoden, um den Reihenwert zu bestimmen.

Grundvoraussetzung ist, dass zuvor überprüft wurde, ob die Reihe konvergent ist!

12.2.2.1. Rückführung auf unendlich geometrische Reihe

Beispiel: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 \cdot 2^{n+2}}{5^n}$

Wir versuchen, aus a_n eine unendlich geometrische Reihe zu formen (siehe 12.2.3.2., S 598 f)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 \cdot 2^{n+2}}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 \cdot 2^n \cdot 2^2}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 \cdot 2^n \cdot 4}{5^n} = 12 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{5^n} = 12 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n =$$

$$= 12 \cdot \frac{5}{3} = \mathbf{20}$$

Geometrische Reihe mit $b_0 = 1$ und $q = \frac{2}{5}$

Da $0 < q < 1$ besitzt die unendlich geometrische Reihe den Reihenwert

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b_0 \cdot \frac{1}{1-q} = 1 \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{5}} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$$

(siehe 12.2.3.2., S 598 f)

Beispiel: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^n \to \infty$ weil $q=\frac{5}{4}>1$ (siehe 12.2.3.2., S 598 f)

Beispiel: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^n$ konvergiert, weil $q=\frac{4}{5}<1$: $s=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{4}{5}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{5}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{1}=2.5$

Die geometrische Folge lautet: $b_n=b_1\cdot q^{n-1}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$ für alle $n\geq 1$

Entsprechend gilt für n≥0 : $b_n=b_0\cdot q^n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^n$

Für die Summe der unendlich geometrischen Reihe gilt: $s=\frac{b_0}{1-q}$

(siehe 12.2.3.2., S 598 f)

12.2.2.2. Bestimmung mit Partialbruchzerlegung

Beispiel: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$

Der Bruch $\frac{1}{n^2-1}$ lässt sich in Teilbrüche (Partialbrüche) zerlegen, weil der Nenner in Faktoren zerlegbar ist:

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{(n-1)\cdot(n+1)}$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{(n-1)\cdot(n+1)} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n+1} \quad | \cdot N = (n-1)\cdot(n+1)$$

$$1 = A\cdot(n+1) + B\cdot(n-1)$$

$$1 = A\cdot n + A + B\cdot n - B$$

$$1 = (A+B)\cdot n + A - B$$

$$0\cdot n + 1 = (A+B)\cdot n + A - B$$

$$A + B = 0 \ \rightarrow \ A = -B \ \rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$A - B = 1 \ \rightarrow \ -B - B = 1 \rightarrow \ B = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{A}{n-1} + \frac{B}{n+1} = \frac{\frac{1}{2}}{n-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{n+1} = \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{2(n+1)}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{2(n+1)}\right] = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2(n-1)} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}}_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots} - \frac{1}{2}\cdot \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+1}}_{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right) - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = \mathbf{\frac{3}{4}}$$

Übung Untersuchen Sie, ob folgende Reihen konvergent sind.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{17^n}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$ 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{n}}{450\, n+1}$ 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\mathrm{n}+1}}{\sqrt{n}}$ 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ 9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^n)^2}{n^{n^2}}$ 11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

Lösungen: 1) Mit Quotientenkriterium: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{n+1}{17^{n+1}}}{\frac{n}{17^n}}\right| = \ldots = \left|\frac{n+1}{17\, n}\right| \to \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{17\, n} \ldots = \frac{1}{17} < 1 \to$ konvergent

2) Mit Quotientenkriterium: $\ldots \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1 \to$ konvergent

3) Mit Quotientenkriterium: $\ldots \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{2} < 1 \to$ konvergiert

4) Mit Minorantenkriterium: Ab $n = 3$ ist $\ln(n) > 1 \implies \frac{\ln(n)}{n} > \frac{1}{n}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent $\implies$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$ ist divergent.

5) $\lim_{n\to\infty} cos\underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}_{\to 0} = 1$ Da $\lim_{n\to\infty} cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0$ divergiert die entsprechende Reihe.

6) Da die entsprechende Folge keine Nullfolge ist $\left(\text{Grenzwert } a = \frac{1}{450}\right)$ divergiert die Reihe.

7) Folge ist alternierend -> Leibniz-Kriterium: monoton fallend? $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ w.A. für alle $n \in \mathbb{N}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \implies$ Reihe ist konvergent.

8) Wurzelkriterium: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{e} = \frac{1}{e} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \frac{1}{e} \cdot 1 = \frac{1}{e} < 1$

Die Reihe konvergiert.

9) Wurzelkriterium: konvergent 10) divergent 11) divergent

Video-Tipp KONVERGENZ von REIHEN beweisen – Quotientenkriterium Beispiele - Bing video

12.2.3. Spezielle Reihen

12.2.3.1. Arithmetische Reihe

Für eine arithmetische Reihe $< s_1 ; s_2 ; s_3 ; \ldots\ldots ; s_n >$ gilt entsprechend mit

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n$, wobei $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$ Glieder einer arithmetischen **Folge** sind.

$$\left.\begin{aligned} s_n &= \boxed{a_1} + \boxed{a_2} + \boxed{a_3} + \ldots\ldots + \boxed{a_{n-2}} + \boxed{a_{n-1}} + \boxed{a_n} \\ s_n &= \boxed{a_n} + \boxed{a_{n-1}} + \boxed{a_{n-2}} + \ldots\ldots + \boxed{a_3} + \boxed{a_2} + \boxed{a_1} \end{aligned}\right\} +$$

Die Folgenglieder werden in umgekehrter Reihenfolge aufgeführt.

Wir addieren diese beiden Gleichungen und erhalten

$$2.s_n = n \cdot (a_1 + a_n) \quad \Big| \; :2$$

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

Denn jedes der paarweise (rechteckig eingerahmten) addierten Glieder ergibt $a_1 + a_n$:

$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + a_1 + (n-2)d = a_1 + a_1 + \underbrace{(n-2)\,d + d}_{=\,(n-1)\,d} = a_1 + \underbrace{a_1 + (n-1)\,d}_{=\,a_n} = a_1 + a_n$$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ -> $a_{n-1} = a_1 + (n-2) \cdot d$

--> $a_2 = a_1 + (2-1) \cdot d = a_1 + d$

$$a_3 + a_{n-2} = a_1 + 2d + a_1 + (n-3)\,d = a_1 + a_1 + \underbrace{(n-3)\,d + 2d}_{=\,(n-1)\,d} = a_1 + \underbrace{a_1 + (n-1)\,d}_{=\,a_n} = a_1 + a_n$$

usw.

Damit lautet das **allgemeine Glied** (das **Bildungsgesetz** oder die **n-te Teil-** bzw. **Partialsumme**) einer **arithmetischen Reihe**:

$$\mathbf{s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)}$$

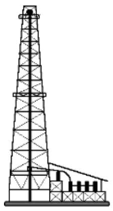
Mit $a_n = a_1 + (n-1)\,d$ gilt: $\quad s_n = \frac{n}{2} \cdot [a_1 + a_1 + (n-1)\,d\,] \rightarrow \mathbf{s_n = \frac{n}{2} \cdot [2\,a_1 + (n-1) \cdot d]}$

Mit der von ihm selbst entwickelten Formel $s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$ soll Carl Friedrich GAUß in seiner Grundschulzeit binnen weniger Minuten den Auftrag seines Volksschullehrers erledigt haben, die Summe der Zahlen von 1 bis 100 zu bilden.

GAUß rechnete dabei so: $\underbrace{1 + 100 = 101 \quad 2 + 99 = 101 \quad 3 + 98 = 101 \quad ..... \quad 50 + 51 = 101}_{\text{funktioniert 50-mal}}$

$\frac{100}{2} \cdot (1 + 100) = 5050$

Beispiel:



Ein Petrokonzern will eine Probebohrung durchführen, um Erdgas zu finden. Dazu werden Gestängerohre bis zu einem Kilometer in den Boden getrieben.

Die ersten 10 m Bohrung kosten € 570 000,–. Jede weiteren 10 m verteuern die Suche um € 30 000,–.

Wie teuer kommt die Bohrung, wenn an dieser Stelle 870 m tief ins Erdreich eingedrungen werden muss?

Da die Kosten alle 10 m um den konstanten Betrag von € 30 000, steigen, handelt es sich arithmetische Folge.

870 m Tiefe bedeuten, dass wir nach $s_{87} = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{87}$ suchen,

mit $a_1 =$ € 570 000,- und $d =$ € 30 000,-.

Somit betragen die Gesamtkosten

$$s_{87} = \frac{n}{2} \cdot [\, 2\, a_1 + (87 - 1)\, d \,] = \frac{87}{2} \cdot [2 \cdot 570\,000 + (87 - 1) \cdot 30\,000] =$$

$$= 161\,820\,000\ €$$

12.2.3.2. Geometrische Reihe

Für eine **endliche** geometrische Reihe $< s_1 ; s_2 ; s_3 ; \ldots ; s_n >$ gilt entsprechend mit

$s_1 = b_1$

$s_2 = b_1 + b_2$

$s_3 = b_1 + b_2 + b_3$

$s_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n$, wobei $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ Glieder einer geometrischen **Folge** sind.

$s_n = b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \ldots + b_1 \cdot q^{n-2} + b_1 \cdot q^{n-1}$

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

$s_n = b_1 \cdot (1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1})$

$s_n = b_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$

$\dfrac{q^n - 1}{q - 1} = (q^n - 1) : (q - 1) = q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q^2 + q + 1 = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1}$

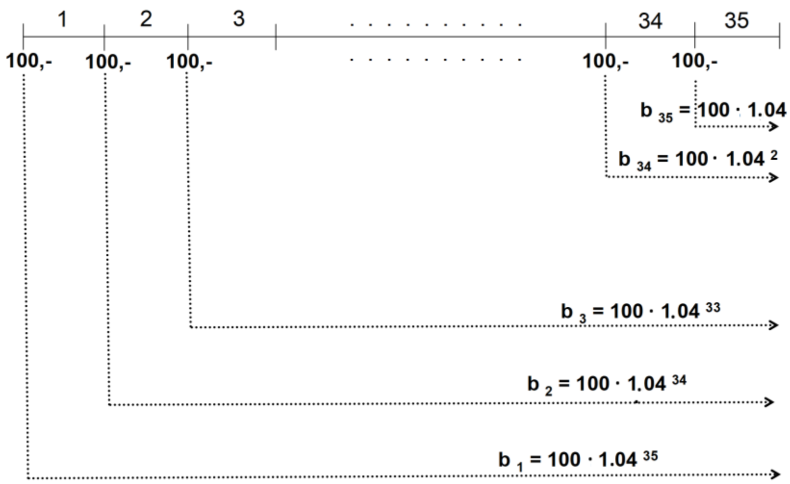
Somit lautet das **allgemeine Glied** (das **Bildungsgesetz** oder die **n-te Teil-** bzw. **Partialsumme**) einer **endlichen geometrischen Reihe**:

$$\mathbf{s_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}}$$

Sie Summe einer **unendlichen** geometrischen Reihe, wenn $0 < q < 1$ ist:

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} b_1 \cdot \frac{1 - \overset{\to 0}{q^n}}{1 - q} = \boldsymbol{\frac{b_1}{1 - q}}$$

Beispiel: Nehmen wir an, jemand legt 35-mal zu Beginn jedes Jahres € 100,– zu 4 % Verzinsung p.a. (pro Jahr) an. Über welchen Betrag kann nach Ablauf von 35 Jahren verfügt werden?



$b_1 = 100 \cdot 1.04^{35}$, da die ersten € 100 35 Jahre verzinst werden.

$b_2 = 100 \cdot 1.04^{34}$, da die zweiten € 100 34 Jahre verzinst werden.

$b_3 = 100 \cdot 1.04^{33}$, da dies dritten € 100 33 Jahre verzinst werden usw.

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{100 \cdot 1.04^{34}}{100 \cdot 1.04^{35}} = \frac{b_3}{b_2} = \frac{100 \cdot 1.04^{33}}{100 \cdot 1.04^{34}} = 1.04^{-1} = \frac{25}{26}$$

Damit können wir rechnen:

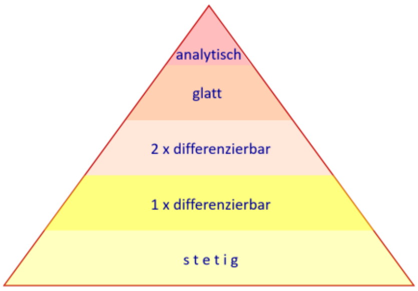
$$s_{35} = b_1 \cdot \frac{q^{35} - 1}{q - 1} = 100 \cdot 1.04^{35} \cdot \frac{\left(\frac{25}{26}\right)^{35} - 1}{\frac{25}{26} - 1} = 7\,659.83\text{ €}$$

Bemerkung: Diese Formel bestimmt den sog. Endwert einer vorschüssigen, ganzjährigen Rente, wobei unter Rente nicht nur Alterspensionen, sondern jede gleich große Zahlung, die in regelmäßigen Abständen geleistet wird, zu verstehen ist, also z.B. auch Ratenzahlungen.

12.2.3.3. Potenzreihen

12.2.3.3.1. Eigenschaften

Betrachten wir folgende Hierarchie von Funktionseigenschaften:



Eigenschaft der Funktion	Benennung	Bezeichnung
*	analytisch	$\mathcal{C}^{\omega}$
unendlich oft differenzierbar	glatt	$\mathcal{C}^{\infty}$
2 x differenzierbar	2 x differenzierbar	$\mathcal{C}^{2}$
1 x differenzierbar	1 x differenzierbar	$\mathcal{C}^{1}$
stetig	stetig	$\mathcal{C}^{0}$

* Es sei $A \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge. Eine Funktion $f: A \to \mathbb{R}$ heißt analytisch, wenn es zu jedem $a \in A$ eine konvergente Potenzreihe $\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (x-a)^k$ mit dem Konvergenzradius r und ein s mit $0 < s \leq r$ gibt, sodass

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-a)^n \text{ für alle } x \in A \cap (a-s\,, a+s)$$

Dieser Sachverhalt ist oft nicht einfach zu zeigen. Wir werden deshalb nur für konkrete Stellen x_0 die Konvergenz überprüfen.

Potenzreihendarstellung wichtiger analytischer Funktionen:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n!} = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} \pm \ldots$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^7}{7!} \pm \ldots$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \pm \ldots$$

Diese analytischen Funktionen konvergieren auf ganz $\mathbb{R}$.

Unter einer **Potenzreihe** versteht man eine Reihe der Form

$$\sum_{kn=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$$

mit a_k den entsprechenden Vorzahlen
und x_0 einer Konstanten.

Beispiel einer Potenzreihe:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n = \frac{1}{0!} \cdot x^0 + \frac{1}{1!} \cdot x^1 + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + ... = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + ...$$

Bemerkung: 0 ! = 1 ! = 1 und $x^0 = 1$

Setzen wir beispielsweise für x = 2 in die ersten 4 Glieder dieser Folge ein, erhalten wir

$$e^2 = \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{n!} \cdot 2^n = \frac{1}{0!} \cdot 2^0 + \frac{1}{1!} \cdot 2^1 + \frac{1}{2!} \cdot 2^2 + \frac{1}{3!} \cdot 2^3 = 1 + 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 8 = 6.\dot{3}$$

Dieses Ergebnis weicht noch deutlich vom tatsächlichen Wert $e^2 = 7.38905...$ ab.

Rechnen wir mit doppelt so vielen Gliedern, also den ersten 8, der Reihe, so lautet das Ergebnis $\frac{155}{21} = 7{,}38095\ldots$
und zeigt bereits eine Übereinstimmung bis zu den Hundertstel.

Wählen wir die gesamte Potenzreihe $e^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot 2^n$, dann erhalten wir exakt diesen Wert:

```
from sympy import *
```

```
n = symbols("n")
```

```
Sum(1/(factorial(n))*2**n, (n, 0, oo)).doit()
```

e^2

Übung

Ermitteln Sie den Term für die Anzahl der angegebenen Glieder folgender Potenzreihen:

1) $\ln(x) \approx \sum_{n=1}^{4} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}$

2) $\sum_{n=1}^{3} \frac{x^n}{n^2 \cdot 2^n}$

3) Bestimmen Sie mit Hilfe des in 1) aufgestellten Terms $\ln(2)$.

Lösungen:

1) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

2) $\frac{x}{2} + \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{72}$

3) $-\frac{4}{3} = -1.3333\ldots$ **!** $\ln(2) = 0.6931\ldots$

12.2.3.3.2. Konvergenzradius

Allgemein lautet eine Potenzreihe $P(x)$

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_o)^n$$

Der Konvergenzradius R gibt an, wie weit man sich von der (Entwicklungs-) Stelle x_0 entfernen darf, bis die Konvergenz verloren geht. R lässt sich auf zweierlei Art bestimmen:

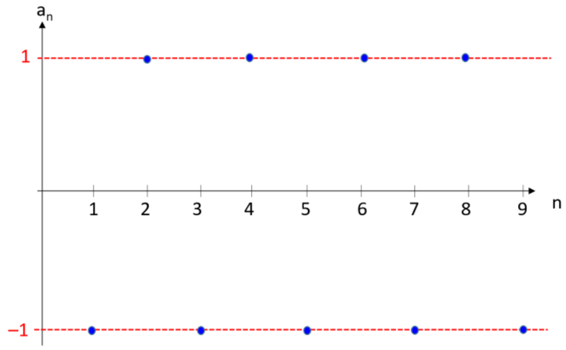
$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Oder: Konvergenzradius nach Cauchy und Hadamard [77]

Zunächst zur Erinnerung: Eine **Folge** kann mehrere Häufungspunkte (12.1.2.5., S 568 f) besitzen.

Beispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ . \ . \ .$$



Häufungspunkte sind Zahlenwerte, gegen den ein Teil der Folgenglieder strebt.
Bei dieser Folge sind das 1 und − 1 .

Der größte Häufungspunkt:

$$\lim_{n\to\infty} Sup\ a_n = 1$$

Der kleinste Häufungspunkt:

$$\lim_{n\to\infty} Inf\ a_n = -1$$

Man wählt $\lim\limits_{n\to\infty} Sup$, denn wenn es mehrere Häufungspunkte gibt, so bestimmt man damit den größten und weiß, dass alle anderen Häufungspunkte kleiner sein müssen.

Wurzelkriterium:

$$\lim_{n\to\infty} Sup \sqrt[n]{|\, a_n \cdot (x - x_0)^n|} = \lim_{n\to\infty} Sup \sqrt[n]{|\, a_n|} \cdot \sqrt[n]{|(x - x_0)^n|} = \lim_{n\to\infty} Sup \sqrt[n]{|\, a_n|} \cdot |x - x_0| \underbrace{< 1}_{\text{Bedingung für Konvergenz}}$$

$$\lim_{n\to\infty} Sup \sqrt[n]{|\, a_n|} \cdot |x - x_0| < 1 \quad \Big| : \lim_{n\to\infty} Sup \sqrt[n]{|\, a_n|}$$

Berechnung des Konvergenzradius nach Cauchy und Hadamard [77] $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} Sup \sqrt[n]{|\, a_n|}}$

[77] Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), Jacques Hadamard (1865–1963), Französische Mathematiker

Zusammenfassend:

$$\boxed{R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Sup} \sqrt[n]{|a_n|}}}$$

Bemerkung: Besitzt die Folge nur **einen** Häufungspunkt (das ist dann der Grenzwert), so braucht das Supremum nicht berücksichtigt zu werden.

Konvergenzintervall: $(\boldsymbol{x_0} - R, \boldsymbol{x_0} + R)$

Ist die **Folge** konvergent mit dem Grenzwert a, so ist $R = \frac{1}{a}$

$R = 0$ … Potenzreihe konvergiert nur für $x = x_0$

$R = \infty$ … Potenzreihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$

Beispiel: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} \cdot x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{\frac{1}{n \cdot 2^n}}^{a_n} \cdot (x - \mathbf{0})^n$$

somit ist $\boldsymbol{x_0} = \mathbf{0}$ denn $(x - \mathbf{0})^n = x^n$

Grenzwert der entsprechenden Folge:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n} = 0$ … 2^n geht am schnellsten gegen unendlich (S 564)

Da ein Grenzwert existiert, ist das Supremum Sup unerheblich.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n \cdot 2^n}\right|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left|\frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{2^n}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left|\frac{1}{\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1} \cdot 2}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left|\frac{1}{1 \cdot 2}\right|} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 = R$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Konvergenzintervall: $(0 - 2, 0 + 2) = (-2, 2)$

Oder: $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{n \cdot 2^n}}{\frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n \cdot 2^n} \cdot \frac{(n+1) \cdot 2^{n+1}}{1}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{n+1}{n} \cdot 2\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{\overbrace{\frac{n}{n}}^{=1} + \overbrace{\frac{1}{n}}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{n}{n}}_{=1}} \cdot 2\right| = 2$

Beachten Sie, dass im Konvergenzintervall $(x_0 - R, x_0 + R)$ die Randwerte nicht dabei sind.

Ist die Reihe auch an den Randwerten konvergent, so spricht man von absoluter Konvergenz.

Wie sieht das nun bei der gegebenen Reihe bei den Randwerten aus?

$$x = -2: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} = -\ln(2)$$

```python
from sympy import *
from fractions import Fraction
n = symbols("n")
Sum((-1)**n/n, (n, 1, oo)).doit()
```

$-\log(2)$

$$x = 2: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergiert}$$

Damit lautet das Konvergenzintervall $[-2, 2)$.

Im Konvergenzintervall stimmt die Potenzreihe mit der gegebenen Funktion überein.

Beispiel:

Konvergenzradius, Konvergenzintervall, Konvergenzbereich bestimmen, u.a. Formel von Cauchy-Hadamard - Bing video

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{[5+(-1)^n]^{2n}} \qquad x_0 = 2$$

$$\lim_{n\to\infty} Sup \sqrt[n]{\left|\frac{(x-2)^{2n}}{[5+(-1)^n]^{2n}}\right|} = \lim_{n\to\infty} Sup \frac{\left|\sqrt[n]{(x-2)^{2n}}\right|}{\left|\sqrt[n]{[5+(-1)^n]^{2n}}\right|} = \lim_{n\to\infty} Sup \frac{(x-2)^2}{[5+(-1)^n]^2} = \lim_{n\to\infty} Sup \frac{(x-2)^2}{4^2} < 1$$

(Bedingung für Konvergenz)

Wir können den Betrag weglassen, denn durch das Quadrieren werden die Werte immer positiv.

$$\sqrt[n]{(x-2)^{2n}} = \left((x-2)^{2n}\right)^{\frac{1}{n}} = (x-2)^{\frac{2n\cdot 1}{n}}$$

für gerade n ist $5 + (-1)^n = 5 + 1 = 6$

für ungerade n ist $5 + (-1)^n = 5 - 1 = 4$

Wenn wir durch eine kleinere Zahl dividieren, wird der Wert des Bruches größer und wir suchen ja den **größten** Häufungspunkt.

$$\frac{(x-2)^2}{4^2} < 1 \quad | \cdot 4^2$$

$$(x-2)^2 < 4^2 \quad | \sqrt{}$$

$$|x - \underset{x_0}{2}| = \underset{R}{4}$$

Damit lautet das Konvergenzintervall $(2-4, 2+4) = (-2, 6)$

Beispiel: https://studyflix.de/mathematik/potenzreihen-909

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2\,n+1)!} \cdot x^{2\,n+1}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{(2\,n+1)!}}{\frac{(-1)^{n+1}}{(2\,(n+1)+1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{(2\,n+1)!} \cdot \frac{(2\,(n+1)+1)!}{(-1)^{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{(2\,n+1)!} \cdot \frac{(2\,n+3)!}{(-1)^{n+1}} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} |(2n+3)\cdot(2n+2)| \to \infty$$

Das bedeutet, diese Reihe ist konvergent in (ganz) $\mathbb{R}$.

$$\frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{(-1)^n \cdot (-1)^1} = \frac{1}{(-1)^1} = -1$$

(-1) können wir wegen des Betrags weglassen

$$\frac{(2\,n+3)!}{(2\,n+1)!} = \frac{(2\,n+3)\cdot(2n+2)\cdot\cancelto{1}{(2n+1)}\cdot\cancelto{1}{2n}\cdot\ldots\cdot\cancelto{1}{2}\cdot 1}{\cancelto{1}{(2\,n+1)}\cdot\cancelto{1}{2n}\cdot\ldots\cdot\cancelto{1}{2}\cdot 1} = (2n+3)\cdot(2n+2)$$

Beispiel:

Das Konvergenzintervall von $\ln(x+1)$ ist $[0,2]$.

Was macht man, wenn man z.B. $\ln(7)$ bestimmen möchte?

$$\ln(7)=\ln\left(\frac{7}{2}\cdot 2\right)=\ln\left(\frac{7}{2}\right)+\ln(2)=\ln\left(\frac{7}{4}\cdot 2\right)=\ln\left(\frac{7}{4}\right)+\ln(2)+\ln(2)$$

$\frac{7}{4}\in[0,2]$

Übung Bestimmen Sie von folgenden Reihen den Konvergenzradius und das Konvergenzintervall:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{(x-1)^n}{n}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}n!\cdot(x+2)^n$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n}{n}\cdot(x-2)^n$ 5) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{\ln(n^n)}$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}\cdot(x+1)^n$

7) $\sum_{n=1}^{\infty}2^{n+1}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^n$ 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n\cdot x^n$ 9) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{2n}\cdot\left(\frac{x}{3n^2+1}\right)^n$

Lösungen:

1) $R=\infty$ Das heißt, die Reihe konvergiert für alle $x\in\mathbb{R}$.

2) $R=1$ $\text{Konvergenzintervall}=(0,2)$

3) $R=0$ Das heißt, die Reihe besitzt kein Konvergenzintervall.

4) $R=\frac{1}{8}$ $\text{Konvergenzintervall}=\left[\frac{15}{8},\frac{17}{8}\right)$

5) $R=1$ $\text{Konvergenzintervall}=(-1,\ 1)$

6) $R=\frac{1}{3}$ $\text{Konvergenzintervall}=\left(-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$

7) $R=\frac{3}{2}$ $\text{Konvergenzintervall}=\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$

8) $R=\frac{3}{2}$ $\text{Konvergenzintervall}=\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$

9) Tipp: $\left(\frac{n^{2n}}{3n^2+1}\right)^n=\left(\frac{n^2}{3n^2+1}\right)^n=\left(\frac{1}{3+\frac{1}{n^2}}\right)^n\to\frac{1}{3}\to R=3$ $\text{Konvergenzintervall}=(-3,3)$

12.2.3.4. TAYLORreihen

12.2.3.4.1. Definition

Brook TAYLOR
(1685 – 1731)

Eine **besondere Form der Potenzreihen** ist die sog. **TAYLOR - Reihe**, benannt nach dem gleichnamigen englischen Mathematiker.

Ist eine Funktion f(x) beliebig oft differenzierbar, also glatt, so lässt sie sich als Potenzreihe folgender Form darstellen:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!} \cdot (x - x_0)^0 + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0)^1 + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

Diese Form der Darstellung heißt TAYLOR - Reihe.

$f^{(n)}$ ist die n-te Ableitung von $f(x)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\frac{f^{(0)}(x_0)}{0!} \cdot (x - x_0)^0}_{T_0(x)} + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0)^1}_{T_1(x)} + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2}_{T_2(x)} + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

$T_0(x)$ ... Taylorpolynom 0. Ordnung

$T_1(x)$ ... Taylorpolynom 1. Ordnung

$T_2(x)$ ... Taylorpolynom 2. Ordnung u.s.w.

Ist die Entwicklungsstelle $x_0 = 0$, so spricht man von einer MACLAURIN-Reihe[78]

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot (x)^n$$

[78] Colin MACLAURIN (1698–1746): britischer Mathematiker, Geodät und Geophysiker aus Schottland

Beispiel: Taylorreihe (Taylorentwicklung), MacLaurin + Beispiel f(x)=sin(x) - Bing video

$f(x) = \sin(x)$ und $\boldsymbol{x_0 = 0}$

Berechnen wir $T_5(x)$

1 Zuerst bilden wir die entsprechende Anzahl der Ableitungen:

2 Dann wird die Entwicklungsstelle eingesetzt.

3 Die Resultate werden in die Taylorreihe eingesetzt.

1	2
$f^{(0)}(x) = \sin(x)$	$f^{(0)}(\mathbf{0}) = \sin(\mathbf{0}) = 0$
$f^{(1)}(x) = \cos(x)$	$f^{(1)}(\mathbf{0}) = \cos(0) = 1$
$f^{(2)}(x) = -\sin(x)$	$f^{(2)}(\mathbf{0}) = -\sin(\mathbf{0}) = 0$
$f^{(3)}(x) = -\cos(x)$	$f^{(3)}(\mathbf{0}) = -\cos(\mathbf{0}) = -1$
$f^{(4)}(x) = \sin(x)$	$f^{(4)}(\mathbf{0}) = \sin(\mathbf{0}) = 0$
$f^{(5)}(x) = \cos(x)$	$f^{(5)}(\mathbf{0}) = \cos(\mathbf{0}) = 1$

3 $$T_5(x) = \frac{0}{0!} \cdot (x - \mathbf{0})^0 + \frac{1}{1!} \cdot (x - \mathbf{0})^1 + \frac{0}{2!} \cdot (x - \mathbf{0})^2 + \frac{-1}{3!} \cdot (x - \mathbf{0})^3 + \frac{0}{4!} \cdot (x - \mathbf{0})^4 + \frac{1}{5!} \cdot (x - \mathbf{0})^5$$

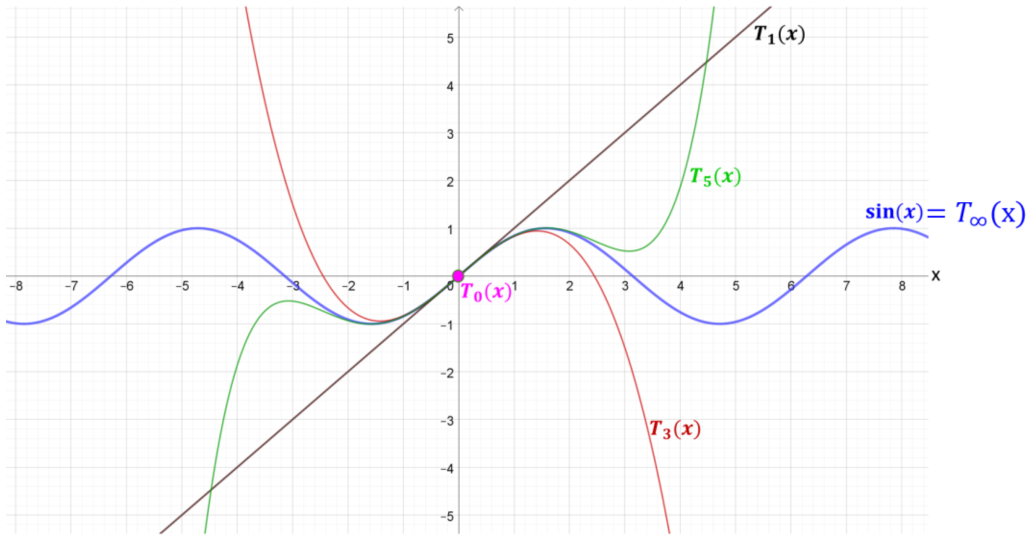
$$T_5(x) = 0 + x + 0 - \frac{1}{6} \cdot x^3 + 0 + \frac{1}{120} \cdot x^5$$

```python
from sympy import *
```

```python
x = symbols('x')
```

```python
def taylor(function, x0, n):
    return function.series(x,x0,n).removeO()

print( 'sin(x) =' , taylor(sin(x), 0, 6))
```

```
sin(x) = x**5/120 - x**3/6 + x
```



$T_0(x)$ . . . der **Punkt** der Funktion **an der** Entwicklungsstelle x_0

$T_1(x)$ . . . die **Tangente** an der Entwicklungsstelle x_0

Je höher die Ordnung des Taylorpolynoms, desto ähnlicher ist dessen Graph dem der darzustellenden Funktion.

$T_\infty(x) = f(x)$ . . . die Taylorreihe, die völlig mit der darzustellenden Funktion übereinstimmt.

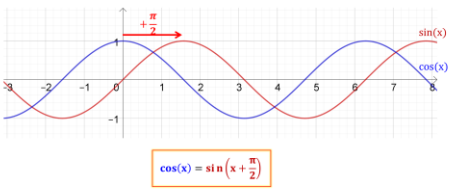
In unserem Beispiel ist

$$T_\infty(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(x)$$

Warum?

$f^{(0)}(x) = \sin(x)$

$f^{(1)}(x) = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$



$f^{(2)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x + \pi)$

$f^{(3)}(x) = \cos(x + \pi) = \sin\left(x + \pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$

$f^{(0)}(x) = \sin\left(x + 0 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \qquad f^{(0)}(0) = \sin\left(0 + 0 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin(0) = 0$

$f^{(1)}(x) = \sin\left(x + 1 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \qquad f^{(1)}(0) = \sin\left(0 + 1 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$f^{(2)}(x) = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \qquad f^{(2)}(x) = \sin\left(0 + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\pi) = 0$

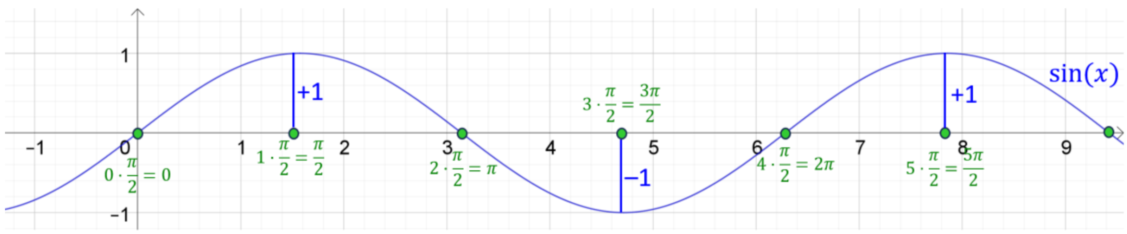
$f^{(3)}(x) = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \qquad f^{(3)}(x) = \sin\left(0 + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$

$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ *

$$T_\infty(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n = \frac{\sin(0)}{0!} \cdot x^0 + \frac{\sin\left(0 + 1 \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{1!} \cdot x^1 + \frac{\sin\left(0 + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{2!} \cdot x^2 + \ldots\ldots.$$

$$= 0 + \frac{1}{1} \cdot x + 0 - \frac{1}{6} \cdot x^3 + . \; . \; . \; .$$

*



$n =$	0	1	2	3	4	5	6	7
$sin\left(0 + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1

Nur für **un**gerade n erhalten wir für den sin Werte ungleich null. $n \in \mathbb{N} \rightarrow 2\,k$ ist gerade $\rightarrow 2\,n + 1$ ist ungerade

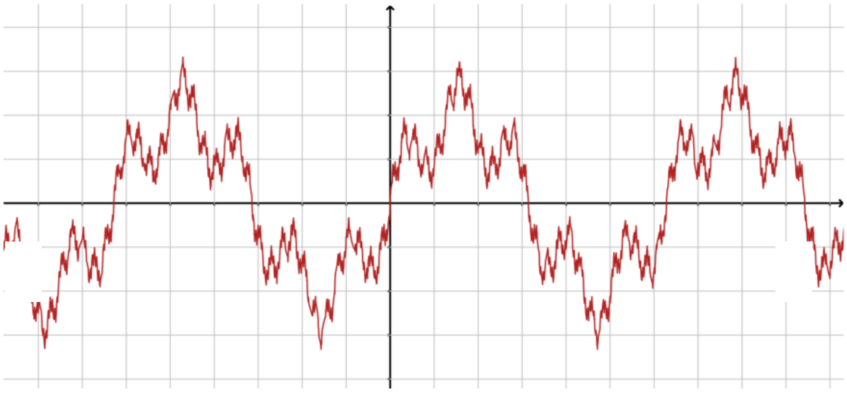
$$T_\infty(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2\,n + 1)!} \cdot x^{2\,n+1} = x - \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{120}\,x^5 - \frac{1}{5\,040}\,x^7 + \; . \; . \; .$$

Bleibt die Frage, warum man eine schon bekannte Funktion, in unserem Beispiel $\sin(x)$, näherungsweise durch eine andere Funktion darstellen soll.

Weil Potenzfunktionen einfachere Eigenschaften besitzen bzw. einfachere Berechnungen erlauben als z.B. Wurzelfunktionen oder transzendente Funktionen (z.B. Winkel–, Exponential– oder Logarithmusfunktionen). Potenzfunktionen sind beispielsweise glatt, also unendlich oft differenzierbar. Der Fehler, der durch die näherungsweise Darstellung durch Taylorpolynome entsteht, lässt sich zudem auch abschätzen.

Das dient auch der Programmierung solcher Funktionen. Ein klassisches Beispiel ist die WEIERSTRAß-Funktion [79] :

[79] Karl Theodor Wilhelm WEIERSTRAß (1815–1897), deutscher Mathematiker



Quelle: Weierstraß-Funktion - Bing images

Sie ist für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig, aber nirgends differenzierbar.

Mit dieser Funktion lassen sich Modelle der BROWNschen Bewegung (heute als Fraktalkurven bekannt) entwickeln.

Als TAYLORpolynom dargestellt, ist die WEIERSTRAß-Funktion mathematisch handhabbar und dadurch auch programmierbar.

Ein anderes

Beispiel: Berechnen Sie das Taylorpolynom 3. Ordnung mit dem Entwicklungspunkt (der Entwicklungsstelle) $x_0 = 0$ der Funktion $f(x) = \tan(x)$.

$$T_{3,tan(x)} = \sum_{n=0}^{3} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

$$f^{(0)}(x) = \tan(x)$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = (\cos(x))^{-2}$$

$$f^{(2)}(x) = -2 \cdot (\cos(x))^{-3} \cdot (-\sin(x)) = \frac{2 \cdot \sin(x)}{\cos^3(x)}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2 \cdot \cos(x) \cdot \cos^3(x) - 2 \cdot \sin(x) \cdot 3 \cdot \cos^2(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^6(x)} =$$

$[\cos^3(x)]' = [\,(\cos(x))^3\,]' = 3 \cdot (\cos(x))^2 \cdot (-\sin(x))$

$$= \frac{2 \cdot \cos^4(x) + 6 \cdot \sin^2(x) \cdot \cos^2(x)}{\cos^6(x)} = \frac{2 \cdot \cancel{\cos^2(x)}^{1} \cdot [\cos^2(x) + 3 \cdot \sin^2(x)]}{\underset{\cos^4(x)}{\cancel{\cos^6(x)}}} = \frac{2 \cdot [\,1 - \sin^2(x) + 3 \cdot \sin^2(x)\,]}{\cos^4(x)} =$$

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \;\rightarrow \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$

$$= \frac{2 \cdot [\,1 + 2 \cdot \sin^2(x)]}{\cos^4(x)}$$

$$f(0) = f^{(0)}(0) = \tan(0) = 0$$

$$f'(0) = f^{(1)}(0) = \frac{1}{\cos^2(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$f''(0) = f^{(2)}(0)\frac{2 \cdot \sin(0)}{\cos^3(0)} = \frac{2 \cdot 0}{1} = 0$$

$$f'''(0) = f^{(3)}(0)\frac{2 \cdot [\,1 + 2 \cdot \sin^2(0)]}{\cos^4(0)} = \frac{2 \cdot [\,1 + 2 \cdot 0\,]}{1} = 2$$

$$T_{3,tan(x)} = \sum_{n=0}^{3} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n = \frac{f^{(0)}(0)}{0!} \cdot x^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!} \cdot x^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f^{(0)}(3)}{3!} \cdot x^3 =$$

$$= \frac{0}{1} \cdot x^0 + \frac{1}{1} \cdot x^1 + \frac{0}{2} \cdot x^2 + \frac{2}{6} \cdot x^3 = x + \frac{1}{3} \cdot x^3$$

```
from sympy import *
```

```
x = symbols('x')
```

```
def taylor(function, x0, n):
    return function.series(x,x0,n).removeO()

print( 'tan(x) =' , taylor(tan(x), 0, 4))
```

```
tan(x) = x**3/3 + x
```

Beispiel:

$f(x) = \frac{1}{x}$ mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = a > 0$

$$f^{(0)}(x) = \frac{1}{x} \qquad f^{(1)}(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad f^{(2)}(x) = \frac{2}{x^3} \qquad f^{(3)}(x) = -\frac{6}{x^4}$$

$$f^{(0)}(x) = \frac{1}{x} \qquad f^{(1)}(x) = -\frac{1 \cdot 1}{x^2} \qquad f^{(2)}(x) = \frac{2 \cdot 1}{x^3} \qquad f^{(3)}(x) = -\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{x^4}$$

$$f^{(0)}(x) = \frac{0!}{x} \qquad f^{(1)}(x) = -\frac{1!}{x^2} \qquad f^{(2)}(x) = \frac{2!}{x^3} \qquad f^{(3)}(x) = -\frac{3!}{x^4}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}} \rightarrow f^{(n)}(a) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{a^{n+1}}$$

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n = \frac{f^{(0)}(a)}{0!} \cdot (x-a)^0 + \frac{f^{(1)}(a)}{1!} \cdot (x-a)^1 + \frac{f^{(2)}(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$$

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{(-1)^n \cdot n!}{a^{n+1}}}{n!} \cdot (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{(-1)^n \cdot n!}{a^{n+1}}}{\frac{n!}{1}} \cdot (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n!}{a^{n+1}} \cdot \frac{1}{n!} \cdot (x-a)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} \cdot (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^n \cdot a} \cdot (x-a)^n = \frac{1}{a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^n} \cdot (x-a)^n = \frac{1}{a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{a} \cdot (x-a)\right)^n =$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{a} \cdot (x-a) \right)^n = \frac{1}{a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{1 \cdot q^{\,n}}_{\text{unendlich geometrische Reihe}} =$$

Eine unendlich geometrische Reihe konvergiert, wenn $-1 < \quad q \quad < 1$

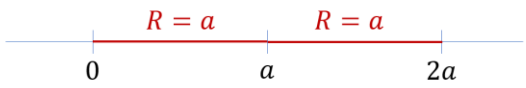
$$-1 < \frac{-1}{a} \cdot (x-a) < 1$$

$$-1 < \frac{1}{-a} \cdot (x-a) < 1 \;|\, . (-a)$$

$$a > \quad x-a \quad > -a \,|+a$$

$$(2\,a > x) \;\; \text{bzw.} \;\; (x < 2\,a) \vee (x > 0)$$

Da a vorausgesetzt größer null ist, lautet das Konvergenzintervall $(0, 2a)$ und der Konvergenzradius $R = a$.



Überprüfen wir noch, ob die Reihe auch an den Intervallrändern konvergent ist:

$$x = 0\colon\; \frac{1}{a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{a} \cdot (0-a) \right)^n = \frac{1}{a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{a} \cdot (-a) \right)^n = \frac{1}{a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (1)^n = \frac{1}{a} \cdot (1^0 + 1^1 + 1^2 + 1^3 + \,.\,.\,.\,) \to \infty$$

$$x = 2a\colon\; \frac{1}{a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{a} \cdot (2a-a) \right)^n = \frac{1}{a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{a} \cdot a \right)^n = \frac{1}{a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \frac{1}{a} \cdot (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \,.\,.\,.\,)$$

konvergiert nicht, da die Reihenglieder nicht gegen Null gehen (sie gehen gegen Null oder 1)
2 Häufungspunkte, aber kein Grenzwert.

Übung Berechnen Sie das Taylorpolynom 3. Ordnung mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$

1) der Funktion $f(x) = 2^{x}$,
2) der Funktion $f(x) = \ln(x)$
3) der Funktion $f(x) = 3^{-x}$

4) Ermitteln Sie die MACLAURIN-Reihe als Summenformel (TAYLORreihe im Punkt $x = x_0$) durch schrittweises Ableiten. Schreiben Sie die ersten vier Ableitungen (sauber) an und leiten Sie daraus die TAYLORreihe ab.

5) Geben Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ als MACLAURIN-Reihe als Summenformel an.

Lösungen:

1) $T_{3,2^x} = \frac{1}{6}\ln^3(2) \cdot x^3 + \frac{1}{2}\ln^2(2) \cdot x^2 + \ln(x) + 1$

2) $T_{3,\ln(x)} = 1 - \frac{x^2}{2}$

3) $T_{3,3^{-x}}$ = `-x**3*log(3)**3/6 + x**2*log(3)**2/2 - x*log(3) + 1`

4) $T_\infty(x) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^n$

5) $T_\infty(x) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot (n+1) \cdot x^n$

12.2.3.4.2. Restglied

Die Taylorreihe T_∞ beschreibt exakt die Funktion $f(x)$.

Computer und Taschenrechner stellen transzendente Funktionen als endliche Taylorpolynome T_n dar. Das heißt, die Taylorreihe wird nach $n+1$ Gliedern abgebrochen. Dabei interessiert der Fehler (die Abweichung zur exakten Darstellung), der dabei begangen wird.

Der Fehler heißt Restglied $R_n(x)$.

Somit gilt $f(x) = T_\infty = T_n(x) + R_n(x)$

Das Restglied nach LAGRANGE[80] wird folgendermaßen berechnet:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

wobei ξ zwischen x und $\boldsymbol{x_0}$ liegt.

Beispiel: Taylorpolynom (Lagrange-) Restgliedabschätzung + Beispiel: Kleinwinkelnäherung - Bing video

$f(x) = \sin(x)$ und $\boldsymbol{x_0 = 0}$

Wählen wir $T_2(x) = x$

Siehe Beispiel S 609

$\sin(x) = T_2(x) + R_2(x) = x - \frac{\cos(\xi)}{6} \cdot x^3$

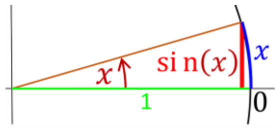
$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} \cdot (x-0)^3 = \frac{-\cos(\xi)}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot x^3 = -\frac{\cos(\xi)}{6} \cdot x^3$

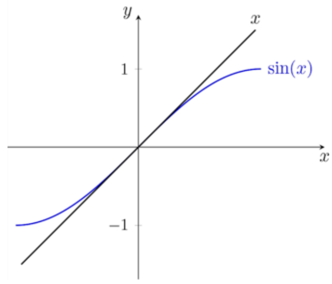
$$\begin{aligned} f^{(0)}(\xi) &= \sin(\xi) \\ f^{(1)}(\xi) &= \cos(\xi) \\ f^{(2)}(\xi) &= -\sin(\xi) \\ f^{(3)}(\xi) &= -\cos(\xi) \end{aligned}$$

Betrachten wir das Restglied: $-\frac{\cos(\xi)}{6} \cdot x^3$

[80] Joseph-Louis de LAGRANGE (1736–1813), geboren als Giuseppe Lodovico LAGRANGIA, italienischer Mathematiker

Für kleine Winkel im Bogenmaß $\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{36}\right)$ gilt: $\sin(x) \approx x$

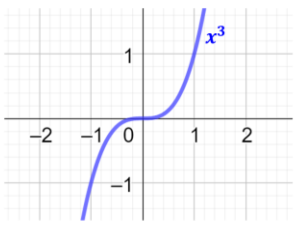


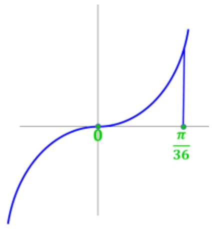


Wir wollen den größtmöglichen Fehler $(\max)$ bezüglich x bestimmen, wobei es gleichgültig ist, ob die Abweichung nach oben oder unten erfolgt. Deshalb wählen wir den Betrag:

$$\max_{x \in \left[0,\frac{\pi}{36}\right]} |R_2(x)| = \max_{x \in \left[0,\frac{\pi}{36}\right]} \left|-\frac{\cos(\xi)}{6} \cdot x^3\right| = \max_{x \in \left[0,\frac{\pi}{36}\right]} \frac{|-\cos(\xi)|}{|6|} \cdot |x^3| = \max_{x \in \left[0,\frac{\pi}{36}\right]} \frac{|-\cos(\xi)|}{6} \cdot |x|^3 =$$

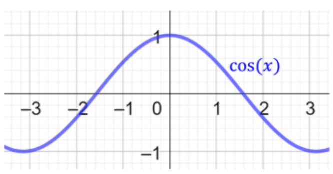
$$= \frac{\cos(\xi)}{6} \cdot \left(\frac{\pi}{36}\right)^3 =$$

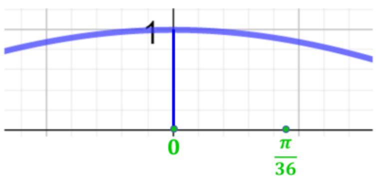




Damit wir den maximalen Wert erhalten, schauen wir zuerst, wo die Funktion x^3 im Intervall $\left[0,\frac{\pi}{36}\right]$ den größten Funktionswert besitzt. Das ist bei $x = \frac{\pi}{36}$ der Fall.

$$= \max_{\xi \in \left[0,\frac{\pi}{36}\right]} \frac{\cos(0)}{6} \cdot \left(\frac{\pi}{36}\right)^3 \qquad = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{\pi}{36}\right)^3 \approx 0.0001108 \quad \ldots \text{ absoluter Fehler}$$





$\xi \in \left[0,\frac{\pi}{36}\right]$

Danach suchen wir auch den maximalen Wert für den Cosinus: Im Intervall $\left[0,\frac{\pi}{36}\right]$ besitzt $\cos(x)$ den größten Funktionswert bei $x = 0$.

Zuerst den maximalen x-Wert für die **Potenzfunktion** (x^3) suchen, denn ξ muss **zwischen** x_0 und diesem x-Wert liegen.

Aussagekräftiger ist der relative Fehler: $\frac{|\text{absoluter Fehler}|}{|f(\text{x–Wert}_{max})|} = \frac{0.0001108}{f\left(\frac{\pi}{36}\right)} = \frac{0.0001108}{sin\left(\frac{\pi}{36}\right)} = \frac{0.0001108}{0.087} =$

$$= 0.00127 = 0.127\ \%$$

Beispiel: Gegeben sind die Funktion $f(x) = e^x$ und das Intervall $[0; 0.1]$

Ermitteln Sie das Restglied für $T_3(x, 0)$ und den größtmöglichen Fehler, der dadurch im angegebenen Intervall entstehen kann.

$$T_3(x, 0) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

$f^{(0)}(x) = e^x \quad f^{(0)}(0) = e^0 = 1$

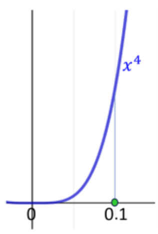
$f^{(1)}(x) = e^x \quad f^{(1)}(0) = e^0 = 1$

$f^{(2)}(x) = e^x \quad f^{(2)}(0) = e^0 = 1$

$f^{(3)}(x) = e^x \quad f^{(3)}(0) = e^0 = 1$

Somit gilt für $R_3(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} \cdot (x - 0)^{n+1} = \frac{e^\xi}{4!} \cdot x^4$

$f^{(4)}(\xi) = e^\xi$



x^4 ist (streng) monoton wachsend, hat so bei 0.1 seinen größten Wert.

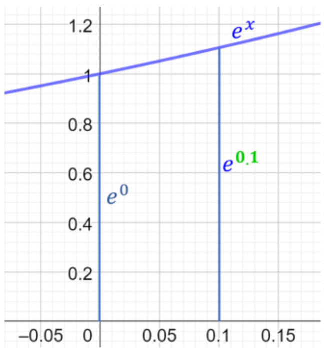
Der maximale Fehler im Intervall $[0; 0.1]$:

Somit beträgt der maximale absolute Fehler

$\frac{e^{0.1}}{4!} \cdot 0.1^4 \approx 0{,}000005$

und der maximale relative Fehler

$\frac{0.000005}{e^{0.1}} = 0.000045 = 0.0045\ \%$



Im Intervall $[0; 0.1]$ hat e^x bei 0.1 den maximalen Wert.

Übung

1. Gegeben sind die Funktion $f(x) = 2^{x}$ und das Intervall $[0.5; 1]$

   Ermitteln Sie das Restglied für $T_3(x, 0)$ und den größtmöglichen absoluten und relativen Fehler, der dadurch im angegebenen Intervall entstehen kann.

2. Gegeben sind die Funktion $f(x) = \cos(x)$ und das Intervall $[0; 1]$

   Ermitteln Sie das Restglied für $T_3(x, 0)$ und den größtmöglichen absoluten Fehler, der dadurch im angegebenen Intervall entstehen kann.

3. Gegeben sind die Funktion $f(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{x}$ und das Intervall $[0; 0.2]$

   Ermitteln Sie das Restglied für $T_3(x, 0)$ und den größtmöglichen absoluten relativen Fehler, der dadurch im angegebenen Intervall entstehen kann.

4. a) Entwickeln Sie die MACLAURINreihe der Funktion f durch schrittweises Ableiten:

   $$f(x) \coloneqq (x-1) \cdot e^{x}$$

   b) Bestimmen Sie diese Reihe durch Reihenmultiplikation mit Hilfe der MACLAURINreihe von e^{x} .

   c) Welchen Abstand hat diese Funktion vom MACLAURINpolynom vom Grad 2 an der Stelle x = 1?

Lösungen:

1. $R_3 = \frac{2^{\xi} \cdot \ln^4(2)}{4!} \cdot x^4$ maximaler absoluter Fehler = maximaler relativer Fehler = 0.0192

2. $R_3 = \frac{\cos(\xi)}{4!} \cdot x^4$ maximaler absoluter Fehler = 0.0417

3. $R_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{\xi}}{4!} \cdot x^4$ maximaler absoluter Fehler = 0.00004

4. a) $T_4(x) = -1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{30}$ b) $(x-1) \cdot \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots\right)$

   c) $f(1) = (1-1) \cdot e^1 = 0$ $T_2(1) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ Abstand= $\frac{1}{2}$

11.2.3.5. FOURIER-Reihen

Jean-Babtiste Joseph FOURIER
(1768–1830)

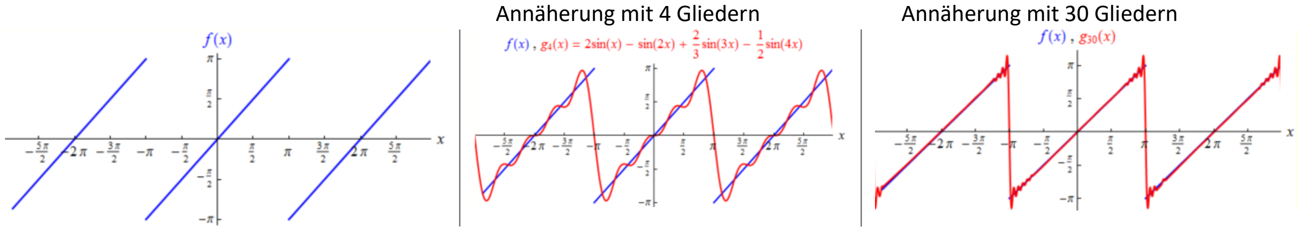
Als FOURIER-Reihe bezeichnet man die Reihenentwicklung einer periodischen, abschnittsweise stetigen Funktion in eine Funktionenreihe aus Sinus- und Cosinus-Funktionen.

Es sollen demnach Funktionen, die zumindest abschnittsweise stetig und differenzierbar sind, durch eine Reihe, bestehend aus Sinus- bzw. Cosinus-Funktionen dargestellt werden.

Fourier entwickelte als erster die These, dass die Erdatmosphäre eine Art Treibhaus darstelle.

Beispiel: Sägezahnfunktion

Annäherung mit 4 Gliedern Annäherung mit 30 Gliedern



Grafiken: Fourierreihen - Mathematische Hintergründe (mathe-online.at)

L … Intervall-Länge (der Bereich, in dem die Funktion stetig (und differenzierbar) ist.

Jede auf dem Intervall $[-\frac{L}{2}; \frac{L}{2}]$ definierte stückweise stetige und beschränkte Funktion f kann als Fourierreihe in folgender Form dargestellt werden:

$$\boxed{\tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(n\,\omega_0\,x) + b_n \cdot \sin(n\,\omega_0\,x)]}$$

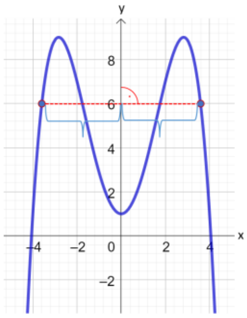
$$= \frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \cos(1\omega_0 x) + a_2 \cdot \cos(2\omega_0 x) + \ldots + a_n \cdot \cos(n\omega_0 x) + b_1 \cdot \sin(1\omega_0 x) + b_2 \cdot \sin(2\omega_0 x) + \ldots + b_n \cdot \sin(n\omega_0 x)$$

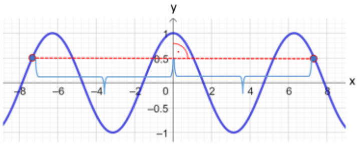
mit

$$\boxed{a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \cdot dx \qquad a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \cdot \cos(n\,\omega_0\,x) \cdot dx \qquad b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \cdot \sin(n\,\omega_0\,x) \cdot dx}$$

T … Periode $\quad \omega_0 = 2\,\pi\,f$ (Siehe 1.3.4., S 47 f) $\quad f = \frac{1}{T} \quad \omega_0 = \frac{2\,\pi}{T}$

Als Integral-Grenzen werden die Grenzen des periodischen Intervalls gewählt.

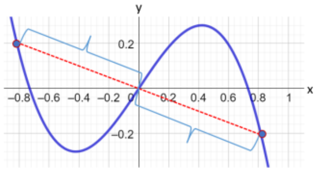


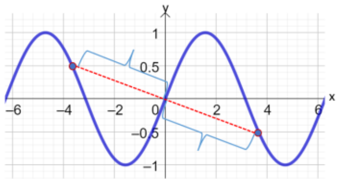


Für symmetrische (**gerade**) Funktionen gilt:

$$b_n = 0$$

In diesem Fall ist a_0 zu bestimmen.





Für punktsymmetrische (**ungerade**) Funktionen gilt:

$$a_n = 0$$

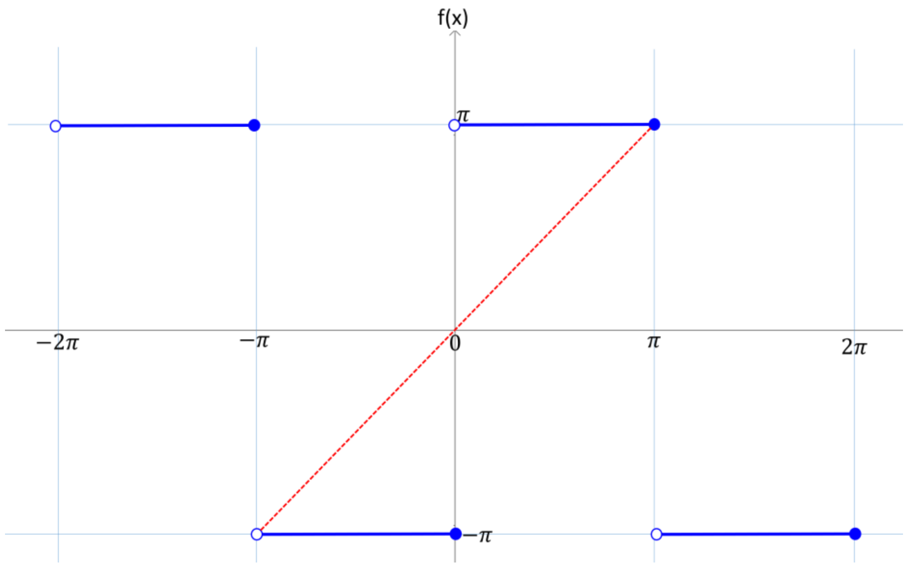
a_0 kann $\neq 0$ sein!

Merkregel: **g**erade Funktionen: $\boldsymbol{a_n}$ berechnen **u**ngerade Funktionen: $\boldsymbol{b_n}$ berechnen

g *kommt im Alphabet vor* ***u*** *und* ***a*** *kommt im Alphabet vor* ***b***

Beispiel: Rechteckfunktion - rect

$$h(x) := \begin{cases} -\pi & \text{für} \quad -\pi < x \leq 0 \\ \pi & \text{für} \quad 0 < x \leq \pi \\ \text{periodisch fortgesetzt sonst} & \end{cases}$$



Im Intervall $[-\pi\,;\,0\,]$ lautet $f(x) = -\pi$, im Intervall $]0\,;\,\pi]$ lautet die Funktion $f(x) = \pi$ $T = 2\pi$

Da diese Funktion offensichtlich punktsymmetrisch (**u**ngerade) ist, gilt $a_n = 0 \rightarrow$ $\boldsymbol{b_n}$ berechnen.

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{0} -\pi \cdot \sin(n\,x) \cdot dx + \frac{1}{\pi} \cdot \int_{0}^{\pi} \pi \cdot \sin(n\,x) \cdot dx = \frac{-\pi}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{0} \sin(n\,x) \cdot dx + \frac{\pi}{\pi} \cdot \int_{0}^{\pi} \sin(n\,x) \cdot dx =$$

mit $T = 2\pi$ gilt $\frac{2}{T} = \frac{2}{2\,\pi} = \frac{1}{\pi}$ $\quad \omega_0 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

$$= -1 \cdot \int_{-\pi}^{0} \sin(n\,x) \cdot dx + 1 \cdot \int_{0}^{\pi} \sin(n\,x) \cdot dx = *$$

$$\int \sin(n\,x) \cdot dx = \int \sin(z) \cdot \frac{dz}{n} = \frac{1}{n} \cdot \int \sin(z) \cdot dz = \frac{1}{n} \cdot (-\cos(z)) = -\frac{1}{n} \cdot \cos\,(n\,x)$$

$$z = n\,x \rightarrow \frac{dz}{dx} = n \,|\cdot dx \rightarrow \quad dz = n \cdot dx \;\; |:n \;\rightarrow\;\; dx = \frac{dz}{n}$$

$$* = -1 \cdot \left(-\frac{1}{n} \cdot \cos(n\,x)\right) \Big|_{-\pi}^{0} + 1 \cdot \left(-\frac{1}{n} \cdot \cos(n\,x)\right) \Big|_{0}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot [\cos(n \cdot 0) - \cos(-n \cdot \pi)] - \frac{1}{n} \cdot [\cos(n \cdot \pi) - \cos\,(n \cdot 0)] =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot [\cos(0) - \cos(-n \cdot \pi)] - \frac{1}{n} \cdot [\cos(n \cdot \pi) - \cos\,(0)] = \frac{1}{n} \cdot [1 - \cos(-n \cdot \pi)] - \frac{1}{n} \cdot [\cos(n \cdot \pi) - 1]$$

$\cos(0) = 1$ Siehe 7.7.2, S 373 f

Für die Werte des $\cos(n\,\pi)$ müssen wir unterscheiden, ob n gerade oder ungerade ist:

n gerade: $\cos(n\,\pi) = 1$

n ungerade: $\cos(n\,\pi) = -1$ ... Siehe 7.7.2, S 373 f

n gerade: $\frac{1}{n} \cdot [1 - \mathbf{1}] - \frac{1}{n} \cdot [\,\mathbf{1} - 1] = \mathbf{0} = b_n$

n ungerade: $\frac{1}{n} \cdot [1 - (-\mathbf{1})] - \frac{1}{n} \cdot [-\mathbf{1} - 1] = \frac{4}{n} = b_n$

Ungerade natürlichen Zahlen erhält man, wenn man von allen natürlichen Zahlen jeweils $2\,n + 1$ oder $2\,n - 1$ bildet. Denn das Doppelte jeder natürlichen Zahl ist gerade, davon 1 addiert oder subtrahiert, ist immer eine ungerade natürliche Zahl.

n	1	2	3	4 ...	
$2n+1$	3	5	7	9 ...	
$2n-1$	1	3	5	7 ...	Wir wollen die ungeraden Zahlen ab **1**

Somit lautet die als Fourier-Reihe dargestellte Funktion f:

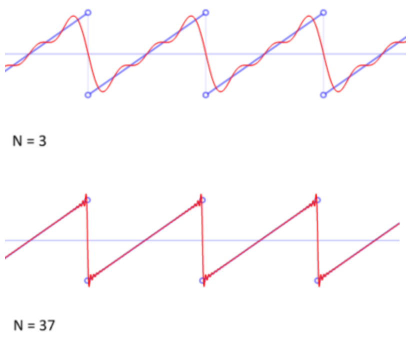
$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2\,n-1} \cdot \sin\big((2\,n-1)\cdot x\big) = 4 \cdot \left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + ...\right)$$

Wir müssen sowohl bei b_n als auch bei $\sin\,(n\cdot x)$ das n durch $2n-1$ ersetzen.

Möglich wäre auch: $\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{2\,n+1} \cdot \sin\big((2\,n+1)\cdot x\big)$

Beispiel: Kippschwingung

$$\text{Fourier-Reihe für } f(x) = \begin{cases} x \quad \text{für } x \in (-\pi\,;\,\pi) \\ 0 \quad \text{für } x = -\pi, \\ \text{periodisch fortgesetzt sonst} \end{cases}$$



© Kippschwingung – Wikipedia

$$T = 2\pi \rightarrow \frac{2}{T} = \frac{1}{\pi}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

Funktion ist **u**ngerade -> $a_n = 0 \rightarrow$ $\boldsymbol{b_n}$ berechnen

$$\boldsymbol{b_n} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin(n\,x) \cdot dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left(-\frac{1}{n} \cdot x \cdot \cos(nx) \quad + \frac{1}{n^2} \cdot \sin(nx)\right) |_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi\, n} \cdot \left(-x \cdot cos(nx) + \frac{1}{n} \cdot \sin\,(nx)\right) |_{-\pi}^{\pi}$$

Partielle Integration mit Polynomfunktion: D I – Regel:

D	I
x	$\sin\,(n\,x)$
1	$-\frac{1}{n}\cos\,(n\,x)$
0	$-\frac{1}{n^2}\sin\,(n\,x)$

$$\int \sin(n\,x) \cdot dx = \int \sin(z) \cdot \frac{dz}{n} = \frac{1}{n} \cdot \int \sin(z) \cdot dz = \frac{1}{n} \cdot (-\cos(z)) = -\frac{1}{n} \cdot \cos\,(n\,x)$$

$$z = n\,x \rightarrow \frac{dz}{dx} = n \,|\cdot dx \rightarrow \quad dz = n \cdot dx \;\; |:n \rightarrow \quad dx = \frac{dz}{n}$$

$$\int \cos(n\,x) \cdot dx = \frac{1}{n}\sin(n\,x) \rightarrow \; -\frac{1}{n} \cdot \int \cos(n\,x) \cdot dx = -\frac{1}{n^2}\sin(n\,x)$$

$$z = n\,x \rightarrow \quad dx = \frac{dz}{n}$$

$$\int x\,.\sin(n\,x)\,dx = x \cdot \left(-\frac{1}{n}\cos\,(n\,x)\right) - 1 \cdot \left(-\frac{1}{n^2}\sin(n\,x)\right) = \frac{1}{n} \cdot \left[-x \cdot \cos(n\,x) + \frac{1}{n} \cdot \sin\,(n\,x)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi\,n} \cdot \left[-\pi \cdot cos(n\pi) + \frac{1}{n} \cdot \sin(n\pi) - \left(-\pi \cdot \cos(-n\pi) + \frac{1}{n} \cdot \sin(-n\pi)\right)\right]$$

$\sin(n\pi)$ bzw. $\sin(-n\pi)$ ist für alle Vielfachen von π **null**.

Für die Werte des $\cos(n\,\pi)$ müssen wir unterscheiden, ob $\boldsymbol{n}$ **gerade oder ungerade** ist:

$\boldsymbol{n}$ **gerade:** $\cos(\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{\pi}) = \mathbf{1}$

$\boldsymbol{n}$ **ungerade:** $\cos(\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{\pi}) = -\mathbf{1}$ ... Siehe 7.7.2, S 373 f

$\boldsymbol{n}$ **gerade:** $\quad \boldsymbol{b_n} = \frac{1}{\pi\,n}\cdot\left[-\pi\cdot\mathbf{1}+\frac{1}{n}\cdot\mathbf{0}-\left(-(-\pi)\cdot\mathbf{1}+\frac{1}{n}\cdot\mathbf{0}\right)\right] = \frac{1}{\pi\,n}\cdot(-\pi+0-\pi-0) = \frac{1}{\pi\,n}\cdot(-2\pi) = -\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{n}}$

$\boldsymbol{n}$ **ungerade:** $\boldsymbol{b_n} = \frac{1}{\pi\,n}\cdot\left[-\pi\cdot(-\mathbf{1})+\frac{1}{n}\cdot\mathbf{0}-\left(-(-\pi)\cdot(-\mathbf{1})+\frac{1}{n}\cdot 0\right)\right] = \frac{1}{\pi\,n}\cdot(\pi+0+\pi-0) = \frac{1}{\pi\,n}\cdot 2\pi = \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{n}}$

Bei geradem n wird das Vorzeichen negativ, bei **ungeradem n** wird es **positiv**.

Die Potenz, die nur das Vorzeichen verändert ist jene mit der Basis (-1):

n	1	2	3	4	5	6	$.\,.\,.\,.\,.$	
$(-1)^n$	-1	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	$.\,.\,.\,.\,.$	das passt NICHT
$(-1)^{n+1}$	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	-1	$.\,.\,.\,.\,.$	das PASST

Damit lautet die FOURIERreihe $\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2}{n}\cdot\sin(nx) = 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\sin(nx)$

```
In [1]:  from sympy import fourier_series, pi

In [2]:  from sympy.abc import x

In [3]:  f = x

In [4]:  s = fourier_series(f, (x, -pi, pi))

In [5]:  s.a0
Out[5]:  0

In [7]:  s.an
Out[7]:  [0, 0, 0, 0, …]

In [8]:  s.bn
```

Out[8]: $\left[2\sin(x),\,-\sin(2x),\,\frac{2\sin(3x)}{3},\,-\frac{\sin(4x)}{2},\,\ldots\right]$

Vorgang zur Bestimmung einer FOURIERreihe:

① $T = ?$ $\omega_0 = ?$

② **g**erade oder **u**ngerade Funktion?

$\downarrow$ $\boldsymbol{a_n}$ berechnen $\downarrow$ $\boldsymbol{b_n}$ berechnen

③ Folgende Integrale beherrschen:

$$\int \sin(nx) \cdot dx = -\frac{1}{n} \cdot \cos(nx)$$

$$\int \cos(nx) \cdot dx = \frac{1}{n} \cdot \sin(nx)$$

$$\int (\mathrm{k}+\mathrm{x}) \cdot \cos(nx) \cdot dx = \frac{n \cdot (k+x) \cdot \sin(nx) + \cos(nx)}{n^2}$$

$$\int (\mathrm{k}-\mathrm{x}) \cdot \cos(nx) \cdot dx = \frac{n \cdot (k-x) \cdot \sin(nx) - \cos(nx)}{n^2}$$

$$\int (k+x) \sin(nx) \cdot dx = -\frac{n \cdot (k+x) \cdot \cos(nx) - \sin(nx)}{n^2}$$

$$\int (k-x) \sin(nx) \cdot dx = -\frac{n \cdot (k-x) \cdot \cos(nx) + \sin(nx)}{n^2}$$

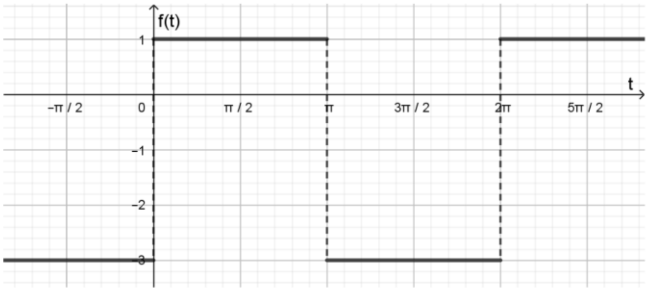
(Siehe 10.1.3., S 477 f und 10.1.4., S 481 f)

Übung

1. Stellen Sie folgende Funktionen als Fourier-Reihen dar:

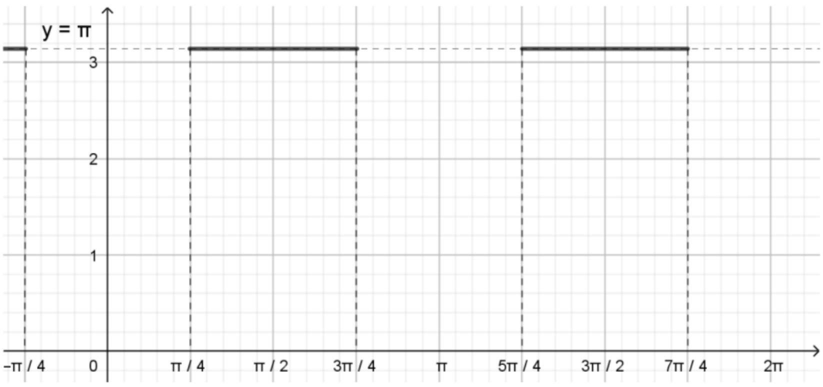
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x \in [-\pi\,;\,0\,] \\ \ \ 1 & \text{für } x \in]\,0\,;\,\pi\,] \\ \text{periodisch fortgesetzt sonst} & \end{cases}$$

2. Ermitteln Sie Schritt für Schritt und in sauberer Form die reelle FOURIERreihe der periodischen Funktion $f(t)$ die in dieser Abbildung dargestellt ist



Grafik: Prof. ENTACHER

3. Ermitteln Sie die reelle FOURIERreihe der periodischen Funktion f die in der Abbildung dargestellt ist (Schritt für Schritt in sauberer Form).



Grafik: Prof. ENTACHER

a) Periode und Grundfrequenz:

b) Gleichanteil:

c) FOURIERkoeffizienten (inkl. einzelner Werte):

d) FOURIERreihe

4. Ermitteln Sie die reelle Fourierreihe der periodischen Funktion f, die in der Abbildung dargestellt ist.

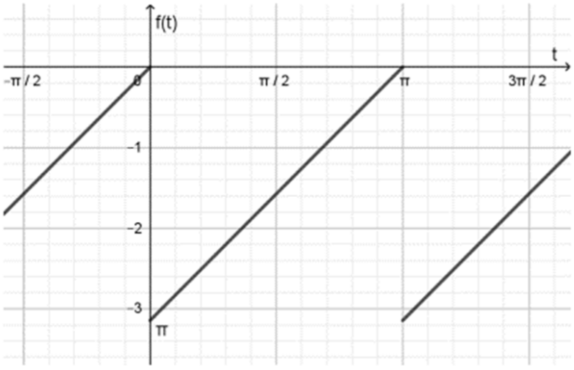


Abbildung: Prof. ENTACHER

Lösungen: 1. $\tilde{f}(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \left[\sin(x) - \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \ . \ . \ . \right] = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\,n-1} \cdot \sin\left((2\,n-1) \cdot x\right)$

2. $\tilde{f}(x) = -1 + \frac{8}{\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(2n+1).x]}{2n+1} = -1 + \frac{8}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[(2n-1).x]}{2n-1}$

3. a) $T = \pi \qquad \omega_0 = 2$

b) $a_0 = \pi$

c) $a_n = \frac{1}{n} \cdot \left(\sin\left(\frac{3}{2}\pi n\right) - sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right)\right) \quad b_n = 0$

d) $\tilde{f}(x) = \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{2n-1} \cdot \cos\left[\, 2(2n-1) \cdot x\right]$

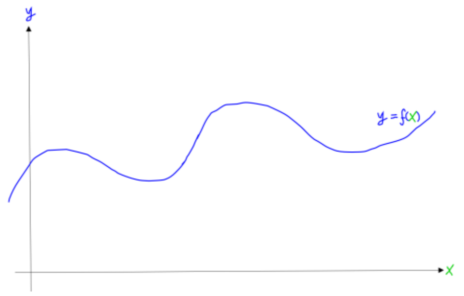
4. $\tilde{f}(x) = -\frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\,n\,x)}{n}$

„Man muss diese Welt begriffen haben, um sie zeichnen zu können.“

Kurt Tucholsky
(1890–1935)

XIII GRAPHENTHEORIE

13.1. Grundbegriffe



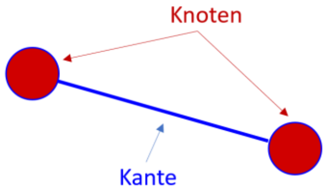
... Funktionsgraph

Hat aber nichts mit Graphentheorie zu tun!

13.1.1. Knoten und Kanten

Ein Graph G ist ein Paar (V, E) bestehend aus einer Menge V von Knoten (*vertex (englisch: Knoten, Eckpunkt*) und einer Menge E von Kanten (*edge (englisch): Kante*), zusammen mit einer Zuordnung, die jedem Element der Menge E genau zwei Elemente der Menge K zuordnet.

$$\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$$



Eine **Kante** verbindet (verknüpft) immer 2 **Knoten**.

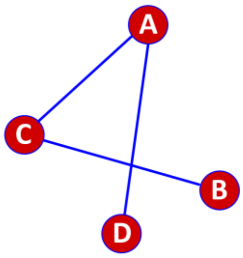
Bemerkung: Knoten werden auch Ecken genannt.

Mathematisch konkretisiert:

Ein Graph G ist ein Paar $G = (V, E)$ mit

- V als einer nicht leeren Menge von Knoten (Ecken)
- E als einer nicht leeren Menge von zwei-elementigen Teilmengen von V.

Beispiel:



$V = \{A, B, C, D\}$

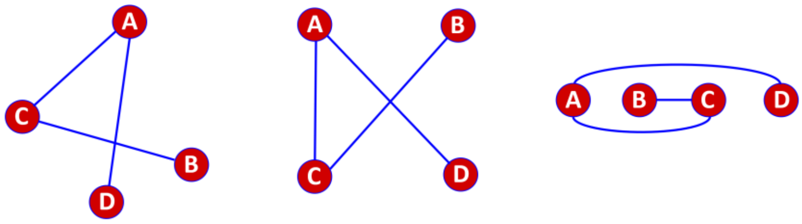
$E = \{\{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}\}$ $\{A, C\} = \{C, A\}$

Aus Gründen der einfacheren Schreibweise ist auch folgende Darstellung zulässig:

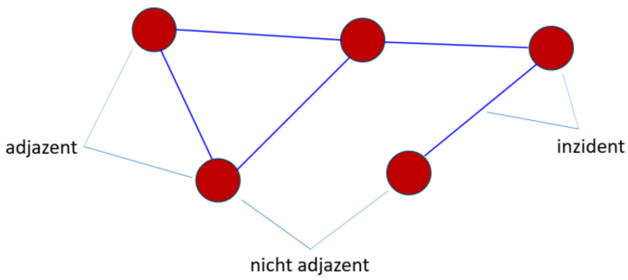
$E = \{AC, AD, BC\}$

Über die konkrete Lage der Knoten und Kanten sagt die im oberen Beispiel angegebene Art des Graphen nichts aus.

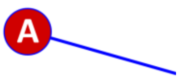
Beispiel: Der Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{A, B, C, D\}$ und $E = \{\{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}\}$ beschreibt unter anderem folgende Darstellungen:



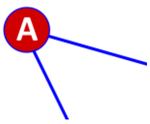
Weitere Begriffe:



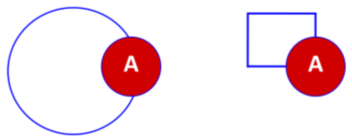
2 Knoten heißen benachbart (adjazent), wenn sie durch eine Kante verbunden sind.



Ein Knoten und eine Kante heißen inzident, wenn der Knoten ein Anfangs- oder Endpunkt der Kante ist.



2 Kanten heißen inzident, wenn sie an einem Knoten zusammentreffen.



Eine Schlinge, wie links abgebildet, gilt als Kante,

Bei manchen Autoren nicht, weil, wenn man bei einer Kante von einer zwei-elementigen Teilmenge von V ausgeht, es bei einer Schlinge nicht erfüllt ist: $\{A, A\} = \{A\}$ [81].

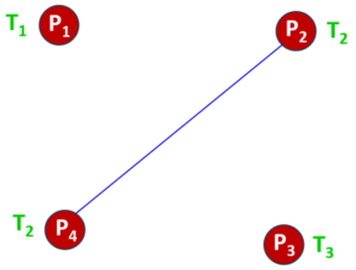
Zwei Kanten zwischen denselben Knoten heißen parallel.

Graphen, die weder Schlingen noch parallele Kanten besitzen, nennt man schlichte Graphen.

Wozu werden Graphen im Sinne dieser Theorie benötigt?

Neben Netzwerken können Sie auch bei der Unterrichts- oder Prüfungsplanung helfen

Beispiel: [82] Im 1. Semester müssen Studierende 4 Prüfungen P_1, P_2, P_3 und P_4 ablegen.
Dafür stehen 3 Termine T_1, T_2 und T_3 zur Verfügung.
Zwei Prüfungen benötigen verschiedenen Termine, wenn die Prüfung mindestens ein Student beide dieser Prüfungen ablegen möchte.



Bei dieser Aufteilung könnte sich ein Konflikt ergeben: **P_2 P_4**

[81] https://de.wikipedia.org/wiki/Schleife_(Graphentheorie)#:~:text=Als%20Schleife%20oder%20Schlinge%20wird,L%C3%A4nge%20eins%20in%20dem%20Graphen.

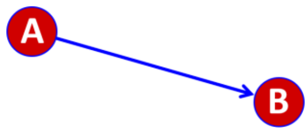
[82] Beispiel: https://cadmo.ethz.ch/education/lectures/HS18/DA/vorlesung/graphentheorie1.pdf

13.1.2. ungerichtete und gerichtete Graphen

ungerichteter Graph

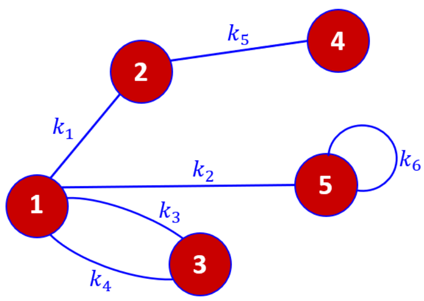
- Kante ist kein Pfeil
- Kante darf in beiden Richtungen verwendet werden

gerichteter Graph



- Kante ist ein Pfeil
- Kante darf nur in Pfeilrichtung verwendet werden

Beispiel eines ungerichteten, nicht schlichten Graphen:



Bemerkung: Hier wird die Schlinge als Kante aufgefasst.

Man kann den Graphen durch die Angabe seiner Knoten- und Kantenmenge und der Endknoten jeder Kante beschrieben:

$G = (V, E) = (\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\})$

mit $k_1 = \{1, 2\},\ k_2 = \{1, 5\},\ k_3 = \{1, 3\},\ k_4 = \{1, 3\},\ k_5 = \{2, 4\},\ k_6 = \{5, 5\}$

Die hier angegebene Schreibweise $k_3 = \{1, 3\}$ und $k_4 = \{1,3\}$ könnte zu dem Schluss führen, dass $k_3 = k_4$ ist. Dann wären aber parallele Kanten nicht unterscheidbar!

Das lässt sich dadurch lösen, indem man eine sogenannte Inzidenzfunktion i einführt, die jeder Kante die Menge ihrer Endknoten zuordnet:

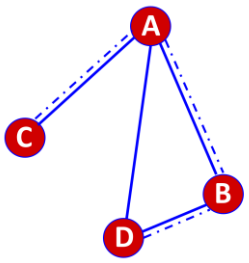
$$
\begin{aligned}
i:\ \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\} &\to \mathbb{N} \\
k_1 &\to \{1, 2\} \\
k_2 &\to \{1, 5\} \\
k_3 &\to \{1, 3\} \\
k_4 &\to \{1, 3\} \\
k_5 &\to \{2, 4\} \\
k_6 &\to \{5, 5\}
\end{aligned}
$$

Man kann die Inzidenzfunktion auch in Form einer Tabelle angeben:

Kante	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6
Endknoten	1 2	1 5	1 3	1 3	2 4	5 5

13.1.3. Eigenschaften von Graphen

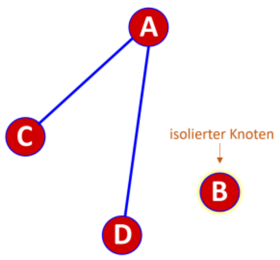
13.1.3.1. ungerichtete Graphen



Ein ungerichteter Graph ist **zusammenhängend**, wenn es zu jedem beliebigen Knotenpaar einen Weg von einem zum anderen Knoten gibt. Somit ist jeder Knoten erreichbar.

Zum Beispiel ist das Knotenpaar AC direkt über die Kante erreichbar.

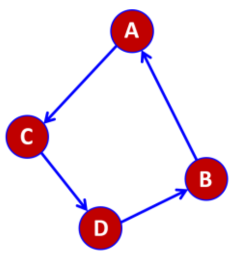
Das Knotenpaar CD ist z.B. über den Kantenweg erreichbar, also über die Knoten A und B (oder auch umgekehrt).



Ein ungerichteter Graph ist **nicht** zusammenhängend, wenn mindestens ein Knoten über die dargestellten Kanten nicht erreichbar ist.

Ein solcher Knoten, wie links abgebildet B, heißt isolierter Knoten.

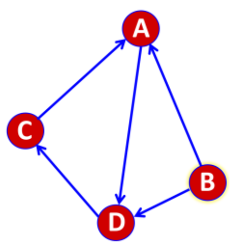
13.1.3.2. gerichtete Graphen

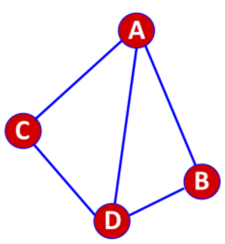


Ein gerichteter Graph heißt **stark zusammenhängend**, wenn jedes beliebige Knotenpaar in Pfeilrichtung erreichbar ist.

Zum Beispiel ist das Knotenpaar AB über die Knoten C und D erreichbar.

Das Knotenpaar BA ist direkt erreichbar.



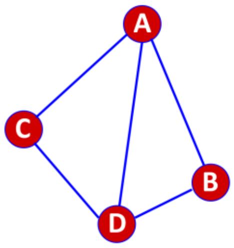


Ein gerichteter Graph heißt **schwach zusammenhängend**, wenn mindestens ein Knoten im gerichteten Graphen **nicht** erreichbar ist, jedoch **un**gerichtet jeder Knoten erreichbar ist.

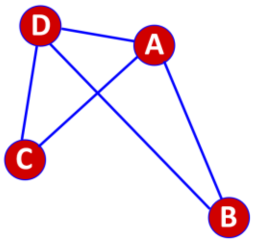
13.1.3.3. Ebene Graphen

Ein Graph heißt eben, wenn sich keine Kanten überschneiden.

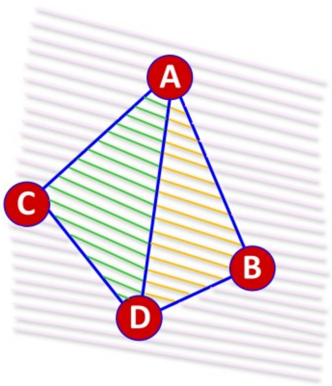
Beispiel:



Durch Verlagerung
der Knoten kann es
bei gleichen Kanten-Verbindungen zu
Überschneidungen der Kanten kommen.
(siehe rechtes Beispiel).



Bei ebenen Graphen spricht man bei von Kanten eingeschlossenen Bereichen von Flächen:



Bei dem abgebildeten Graphen handelt es sich um 3 Flächen, weil die nicht begrenzte äußere Fläche mitgezählt wird (das gesamte Äußere).

Es gilt:

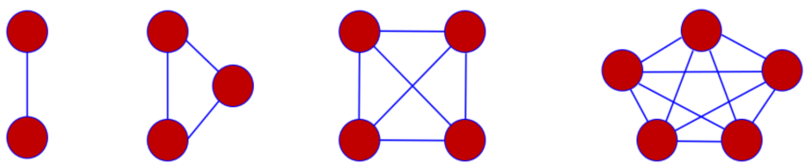
Anzahl **Ecken (e)** + Anzahl **Flächen (f)** – Anzahl **Kanten (k)** = **konstant**

Für ebene Graphen gilt: $\boxed{e + f - k = 2}$ ...EULERsche Formel

13.1.3.4. Vollständige Graphen

Ein vollständiger Graph mit n Knoten besitzt zwischen je zwei seiner Knoten genau eine Kante.

Beispiele vollständiger Graphen:

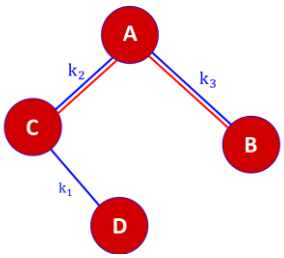


In vollständigen ungerichteten Graphen mit n Knoten gehen von jedem Knoten $n-1$ Kanten ab.

Damit besitzt ein vollständiger ungerichteter Graph mit n Knoten $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ Kanten, weil von jedem der n Knoten $n-1$ Kanten abgehen, aber die Kante, die z.B. von Knoten 1 zu Knoten 2 verläuft, dieselbe ist, die von Knoten 2 zu Knoten 1 verläuft.

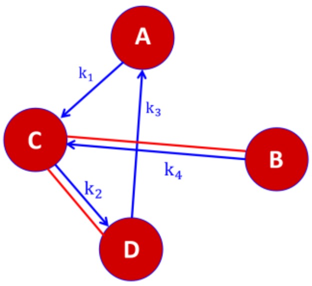
$$\frac{n\cdot(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$$ [83]

13.1.3.5. Wege



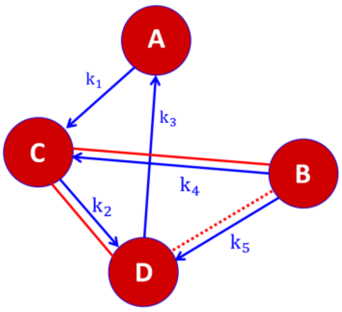
Der Weg von Knoten (Ecke) C nach dem Knoten (Ecke) B führt über den Knoten A bzw. über die Kanten k_2 und k_3 : (C, A, B)

Ein weiteres **Beispiel**:



Der Weg von Knoten (Ecke) B nach dem Knoten (Ecke) D führt über den Knoten C bzw. über die Kanten k_4 und k_2.

Es kann auch mehrere Wege geben:



Der Weg von Knoten B nach dem Knoten D führt über den Knoten C bzw. über die Kanten k_4 und k_2 : (B, C, D)

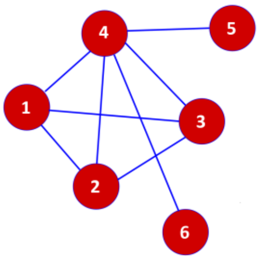
oder:

Der Weg von Knoten (Ecke) B nach dem Knoten D führt direkt zum Knoten D bzw. (nur) über die Kante k_5 : (B, D)

[83] Siehe 2.2.5., S 87 f

Eine wesentliche Eigenschaft eines Weges ist, dass zwei aufeinander folgende Knoten (Ecken) immer durch eine Kante verbunden sein müssen.

In der Folge sind die Knoten (Ecken) statt mit Buchstaben mit Zahlen gekennzeichnet.



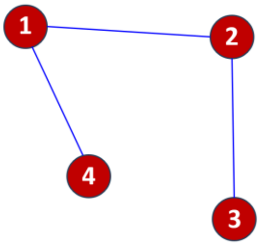
Ein möglicher Weg von 2 nach 5: (2, 3, 1, 2, 3, 4, 5)

In einem Weg dürfen Knoten auch mehrmals auftreten.

Auch das gilt als Weg: (2)

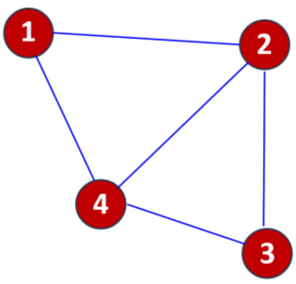
Ein Weg ist auch die Verbindung eines Knoten zu sich selbst, ohne dass andere Knoten durchquert werden.

13.1.3.6. Pfade



Sind alle Knoten (Ecken) eines Weges verschieden, so spricht man von einem Pfad.

13.1.3.7. Zyklen



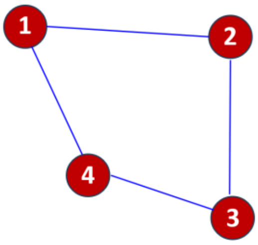
Ein Zyklus ist eine Weg, der bei jenem Knoten (Eck) endet, bei dem er begonnen hat.

Beispiel für Zyklen: (2, 3, 4, 1, 2)

(2, 4, 1, 2, 3, 4, 2)

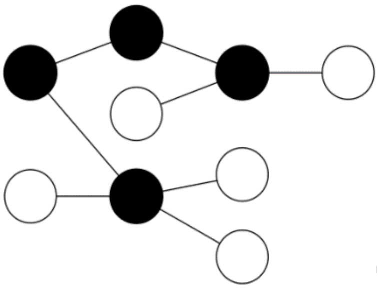
Ein Zyklus kann kein Pfad sein, weil beim Pfad alle Knoten verschieden sein müssen.

13.1.3.8. Kreise



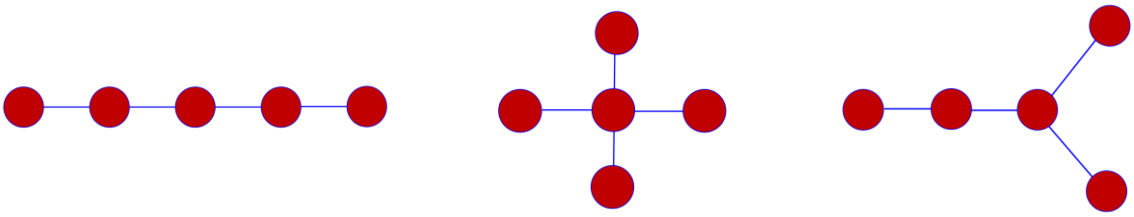
Ein Zyklus der außer dem Anfangs- und Endknoten aus lauter verschiedenen Knoten besteht, ist ein Kreis.

13.1.3.9. Bäume



Ein Baum ist ein zusammenhängender Graph, der keinen Kreis besitzt.

Beispiele von Bäumen mit 5 Knoten



Wie obige Beispiele zeigen, können Bäume mit gleicher Knotenzahl unterschiedliche Formen (Strukturen) aufweisen. Ein Baum mit n Knoten, T_n, besitzt $n-1$ Kanten

T … tree (englisch: Baum)

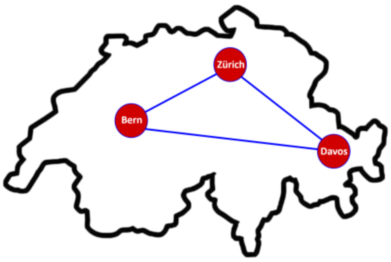
13.1.4. gewichtete Graphen

13.1.4.1. Kanten-gewichtete Graphen

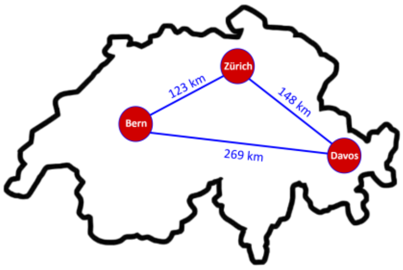
Ein ungerichteter oder gerichteter Graph ist kanten-gewichtet, wenn jeder Kante eine reelle Zahl als Kantengewicht zugeordnet ist.

Beispiel:

Wir betrachten Schweizer Städte und ihre Entfernungen (in Straßen-km).



Bei diesem Graphen lässt sich nicht feststellen, wie weit die Knoten (Städte) voneinander entfernt sind.



Indem man die sogenannten Kantengewichte (hier die Distanzen in km) hinzufügt, lassen sich die unterschiedlichen Entfernungen klar erkennen. (kanten-gewichteter Graph)

13.1.4.2. Minimaler Spannbaum

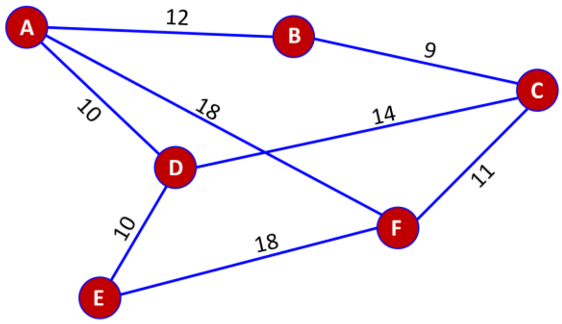
Minimaler Spannbaum: Ein (Teil-) Graph des zusammenhängenden Graphen, der mindestens notwendig ist, um alle Knoten möglichst gering gewichtet zu verbinden.

Man fügt die jeweils gewichteten Kanten in aufsteigender Gewichtung in den Graphen, aber nur dann, wenn sich kein Kreis ergibt.

Bei Kanten gleicher Gewichtung kann man die Kante auswählen.

Beispiel:

Folgender kanten-gewichteter Graph ist gegeben:

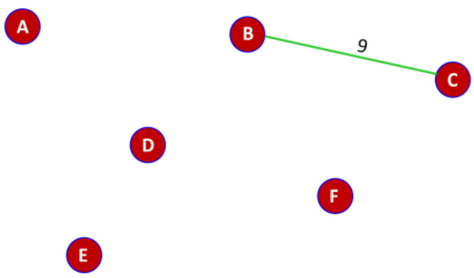


Wir ordnen die Kanten nach Gewichtung von klein nach groß:

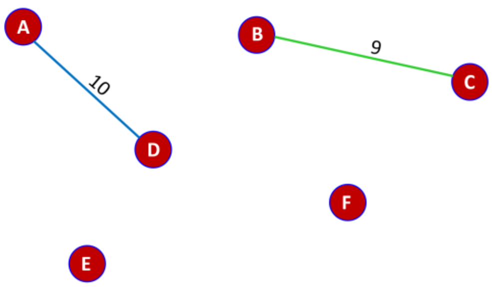
Kante	Gewichtung
BC	9
AD	10
DE	10
FC	11
AB	12
CD	14
AF	18
EF	18

Kante	Gewichtung
BC	9
AD	10
DE	10
FC	11
AB	12
CD	14
AF	18
EF	18

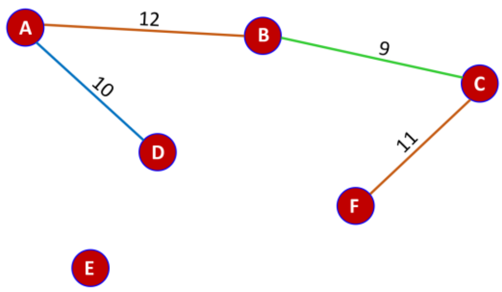
Zunächst zeichnen wir die Kante mit der niedrigsten Gewichtung, das ist BC.



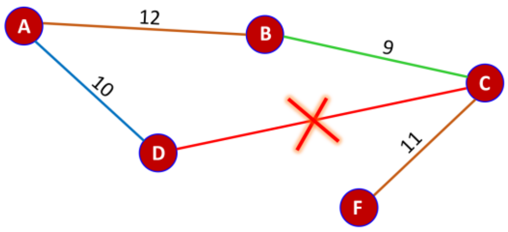
Bei den gelichgewichteten Kanten AD und DE haben wir die Wahl.



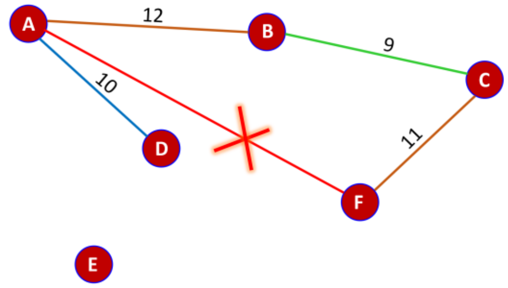
Weiters zeichnen wir die Kanten FC und AB ein.



Die Kante CD kommt nicht infrage, weil sich ansonsten ein Kreis bildet!

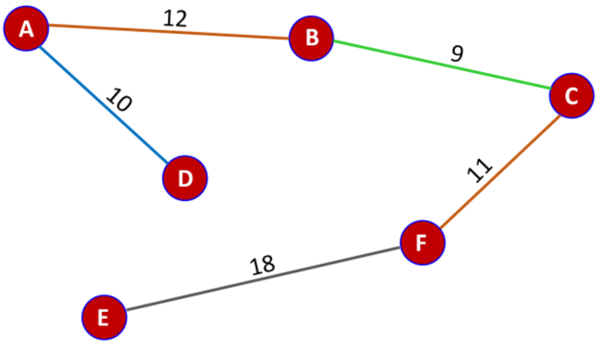


Gleiches gilt für die Kante AF.



Hier wurde der sog. KRUSKAL-Algorithmus angewandt, benannt nach dem US-amerikanischen Mathematiker und Statistiker Joseph KRUSKAL (1928 – 2010). Dieser Algorithmus ist ein *Greedy*-Algorithmus, der schrittweise jenen Folgezustand ermittelt, der das beste Ergebnis liefert (z.B. die niedrigsten Kosten).

Bleibt noch die Kante EF.



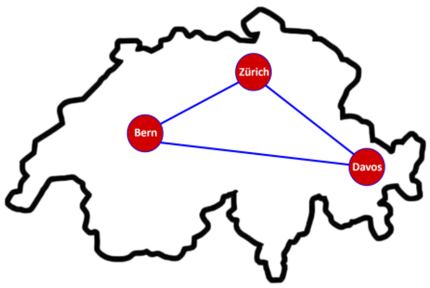
Damit besitzt der minimale Spannbaum die nebenstehende Gestalt.

13.1.4.3. Knoten-gewichtete Graphen

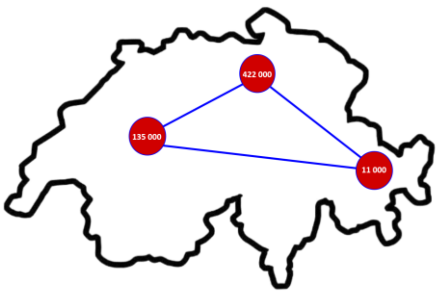
Ein ungerichteter oder gerichteter Graph ist knoten-gewichtet, wenn jedem Knoten eine reelle Zahl als Knotengewicht zugeordnet ist.

Beispiel:

Wir betrachten Schweizer Städte und ihre Einwohnerzahlen (Stand 2020, gerundet auf 1 000).



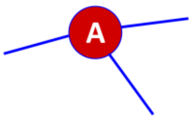
Bei diesem Graphen lässt sich nicht feststellen, wie viele Menschen in den Knoten (Städten) leben.



Indem man die sogenannten Knotengewichte (hier die Einwohnerzahlen) hinzufügt, lassen sich die unterschiedlichen Bevölkerungsgrößen klar erkennen.(knoten-gewichteter Graph)

13.1.5. Knoten-Grad

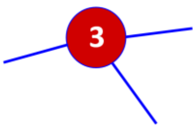
ungerichtete Graphen:



Knoten-Grad:

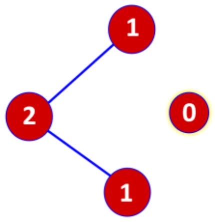
Anzahl der Kanten, die mit dem Knoten verbunden sind.

Bei dem abgebildeten Knoten ist demnach der Knoten-Grad = 3.

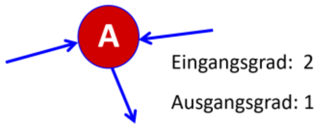


Bei den folgenden Beispielen ist der Knoten-Grad im Knoten vermerkt.

Ein weiteres **Beispiel:**



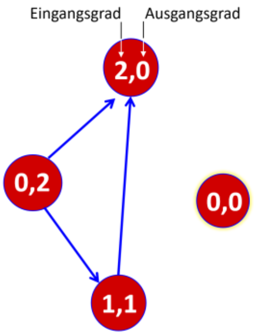
gerichtete Graphen:

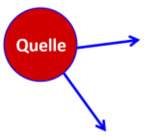


Hier muss zwischen eingehenden und ausgehenden Kanten unterschieden werden!

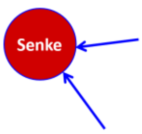
Links der Eingangs- und rechts der Ausgangsgrad im Knoten vermerkt.

Ein weiteres **Beispiel:**



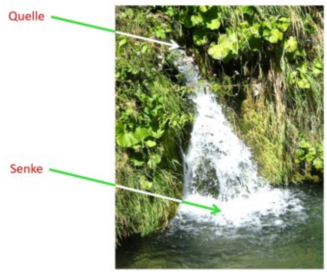


Ein Knoten der nur **Aus**gangskanten besitzt, heißt Quelle.



Ein Knoten der nur **Ein**gangskanten besitzt, heißt Senke.

Die Namen entstammen den Bezeichnungen in der Natur:



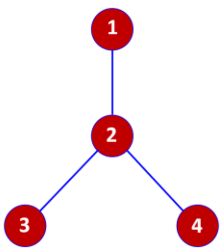
13.1.6. Graphen und Matrizen

13.1.6.1. Adjazenzmatrix

13.1.6.1.1. Adjazenzmatrix von ungerichteten Graphen

Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit n Knoten. Die Adjazenzmatrix von G, $A(G)$, ist eine n x n-Matrix mit dem Eintrag $a_{ij} = 1$, wenn eine Kante zwischen dem i-ten und j-ten Knoten existiert und $a_{ij} = 0$, wenn keine Kante zwischen dem i-ten und j-ten Knoten existiert.

Beispiel:



Die entsprechende Adjazenzmatrix:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Die Adjazenzmatrix eines ungerichteten Graphen ist immer symmetrisch.

In der Hauptdiagonale stehen nur Nullen, sofern der Graph keine Schlinge besitzt.

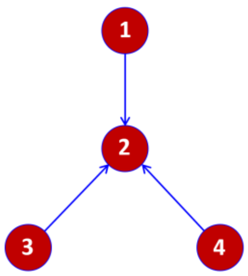
Man braucht also nur die obere bzw. untere Dreiecksmatrix zu ermitteln.

Die Summe der Elemente einer Zeile oder Spalte ist gleich dem Knotengrad: $\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} = \deg k}$

Der Knotengrad ist die Anzahl der Kanten, die mit dem Knoten verbunden sind.

13.1.6.1.2. Adjazenzmatrix von gerichteten Graphen

Beispiel:



Die entsprechende Adjazenzmatrix:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & & & & \\ 2 & & & & \\ 3 & & & & \\ 4 & & & & \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Die Adjazenzmatrix eines gerichteten Graphen ist **nicht** symmetrisch.

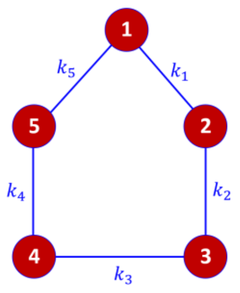
Die Summe der **Zeilen** ergibt den jeweiligen **Aus**gangs-Grad, die Summe der **Spalten** den jeweiligen **Ein**gangsgrad.

13.1.6.2. Inzidenzmatrix

13.1.6.2.1. Inzidenzmatrix von ungerichteten Graphen

Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit n Knoten und m Kanten. Die Inzidenzmatrix von G, $B(G)$, ist eine n x m-Matrix mit dem Eintrag $b_{ij} = 1$, wenn Knoten i mit der Kante j inzident (verbunden) sind und $b_{ij} = 0$, wenn Knoten i mit der Kante j nicht inzident (nicht verbunden) sind.

Beispiel:



Die entsprechende Inzidenzmatrix:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Die Inzidenzmatrix eines ungerichteten Graphen enthält in jeder Spalte genau zwei Einsen und ansonsten Nullen.

Die Summe der Elemente einer Zeile liefert auch hier den Grad des jeweiligen Knotens.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_{ik} = \deg k}$$

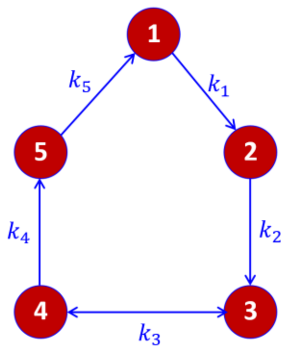
In diesem Beispiel muss die Spaltensumme jeweils 2 ergeben, weil jeder Knoten mit 2 Kanten verbunden ist.

Ist ein Punkt mit sich selbst verbunden, steht in der entsprechenden Zelle eine 2.

Die Summe jeder Zeile entspricht den Kanten, die in den dazugehörigen Punkt führen.

13.1.6.2.2. Inzidenzmatrix von gerichteten Graphen

Beispiel:



$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Kanten**aus**gang: (+)1

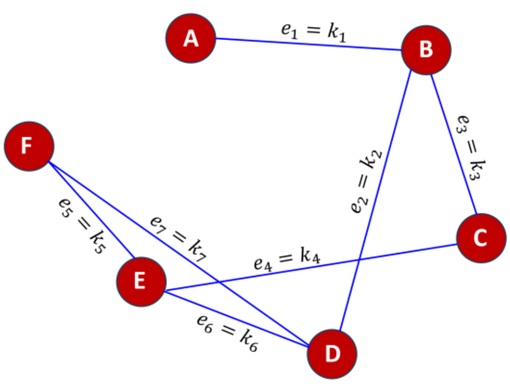
Kanten**ein**gang: -1

Beispiel: Gegeben ist folgende Inzidenzmatrix des Graphen G:

$G =$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
A	1	0	0	0	0	0	0
B	1	1	1	0	0	0	0
C	0	0	1	1	0	0	0
D	0	1	0	0	0	1	1
E	0	0	0	1	1	1	0
F	0	0	0	0	1	0	1

a) Stellen Sie den Graphen G graphisch dar.



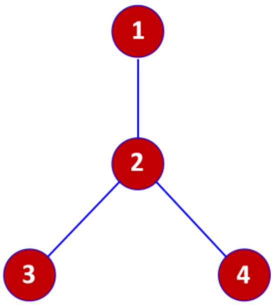
b) Stellen Sie den Graphen von G als Menge von Knoten V und kanten E dar.

$G = \{V, E\}$ mit $V = \{A, B, C, D, E, F\}$ und $E = \{AB, BD, BC, CE, EF, ED, DF\}$

13.1.6.4. Gradmatrix

Die Gradmatrix D eines ungerichteten Graphen mit n Knoten ist eine n x n-Matrix, in deren Hauptdiagonale die Grade der jeweiligen Knoten stehen, ansonsten nur Nullen.

Beispiel:



$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

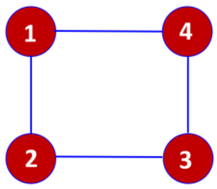
Für Adjazenzmatrizen A, Inzidenzmatrizen B und Gradmatrizen D ungerichteter Graphen gilt folgender Zusammenhang:

$$B \cdot B^T = A + D$$

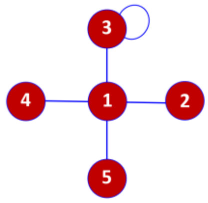
Bei Gradmatrizen gerichteter Graphen müssten bei jedem Knoten und jeder Kante der Eingangs- und Ausgangsgrad vermerkt werden.

Übung Gegeben sind folgende Graphen:

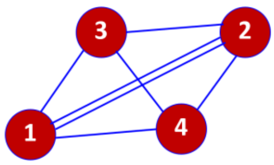
1)



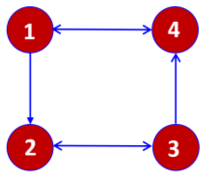
2)



3)



4)



a) Welche der Graphen sind gerichtet?

b) Welche sind schlichte Graphen?

c) Welche Graphen sind vollständig?

d) Geben Sie für die Graphen 1) bis 3) die jeweiligen Knotengrade an.

e) Geben Sie für Graph 4) die jeweiligen Eingangs- und Ausgangsgrade an.

f) Geben Sie für den Graphen 1) die Adjazenz- und die Gradmatrix an.

5) Gegeben ist folgende Inzidenzmatrix des Graphen G:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
A	1	0	0	0	0	0	0
B	1	1	1	0	0	0	0
C	0	0	1	1	0	0	0
D	0	1	0	0	0	1	1
E	0	0	0	1	1	1	0
F	0	0	0	0	1	0	1

Aus der Klausur SS 2023

a) Stellen Sie den Graphen grafisch dar.

b) Stellen Sie den Graphen als Menge von Knoten V und Kanten E dar.

c) Berechnen Sie einen minimalen Spannbaum, wenn die gewichte wie folgt festgelegt sind.

Lösungen: a) Graph 3) b) Graphen 1) und 4) c) keine

d) Graph 1) alle Knote 2 Graph 2) Knoten 1: 4 Knoten 2: 1 Knoten 3: 2 Knoten 4 u.5: 1

Graph 3) Knoten 1 u 2: 4 Knoten 3 u 4: 3

e) E … Eingangsgrad A … Ausgangsgrad

Knoten 1: E: 1 A: 1 Knoten 2: E: 2 A: 0 Knoten 3: E: 1 A: 1 Knoten 4: E: 2 A: 0

f)
$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

13.2. Lineare Optimierung

Bei diesem Aufgabentypus wird, ähnlich wie bei Extremwertaufgaben, **nach einer optimalen Größe**, z.B. dem größtmöglichen Gewinn oder den minimalen Kosten, **gesucht**.

Trotzdem lassen sich solche Berechnungen gut von Extremwertaufgaben unterscheiden, da dort meist nur *eine* Nebenbedingung erforderlich ist, wobei Aufgaben der linearen Optimierung immer **mehrerer, linearer Nebenbedingungen** bedürfen.

13.2.1. Maximum – Aufgaben

Beispiel: Ein Elektrounternehmen vertreibt zwei Arten von TV-Flachbildschirmen:
60-Zoll–Bildschirme um einen Preis von € 1 200,- und 80-Zoll–Screener um € 3 600,-.

Im Lager können höchstens 100 Geräte untergebracht werden. Der Händler möchte durch Lagerbestände höchstens € 90 000,- an Verkaufs-Wert binden und will mindestens doppelt so viele 60''–Bildschirme lagern wie jene der Größe 80''.

Der Gewinn beim Verkauf eines 60''–TV-Gerätes beträgt € 200,-, bei einem 80''-Gerät € 800,-.

Wie viele Fernseher jeder Art sollen gelagert (und verkauft) werden, damit der Gesamtgewinn möglichst groß (maximal) wird?

1. Festlegung der Variablen x und y

x und **y** sind immer **Mengenangaben**.

In unserem Beispiel: x … Anzahl der 60''-Bildschirme
y … Anzahl der 80''-Bildschirme

Bemerkung: Wir hätten auch x für die Anzahl der 80''-Bildschirme und y für die Anzahl der 60''-Bildschirme wählen können.

2. Aufstellen der Zielfunktion Z

Z ist immer jene **Größe,** die ein **Maximum** (oder **Minimum**), also den optimalen Wert, annehmen soll.

$Z = 200 \cdot x + 800 \cdot y$ Da der Gewinn maximal werden soll; stellen wir ihn als Zielfunktion auf.

Bei **einem** 60''-Gerät beträgt der Gewinn **1**mal € 200,-.
Demnach erbringen **x** solcher Geräte einen Gewinn von **x** · € 200 = € 200 · **x**

Bei **einem** 80''-Gerät beträgt der Gewinn **1**mal € 800,-.
Demnach erbringen y solcher Geräte einen Gewinn von **y** · € 800 = € 800 · **y**

3. Aufstellen der Nebenbedingungen

(1) $x \geq 0$

(2) $y \geq 0$

Die Nebenbedingungen (1) und (2) finden immer Verwendung, da sie nichts anderes ausdrücken, als dass Mengen sinnvollerweise niemals eine negative Anzahl annehmen können.

(1) und **(2)** nennt man deshalb Nichtnegativitätsbedingungen

(3) $x + y \leq 100$

Im Text steht:

Im Lager können höchstens 100 Geräte untergebracht werden.

Das heißt, die Anzahl beider Gerätetypen darf die Anzahl 100 nicht überschreiten.

(4) $1\,200 \cdot x + 3\,600 \cdot y \leq 90\,000$

Im Text steht:

Der Händler möchte durch Lagerbestände höchstens € 90 000,- an Verkaufs-Wert binden

Das bedeutet:
Ein 60''-Gerät verkauft sich um € 1 200,-. Demnach besitzen x solcher Geräte einen Wert von € 1 200 · x.
Ein 80''-Gerät verkauft sich um € 3 600,-. Demnach besitzen y solcher Geräte einen Wert von € 3 600 · y.

Insgesamt soll der Wert aller Geräte € 90 000,- nicht übersteigen.

(5) $x \geq 2 \cdot y$

Im Text steht:

… will mindestens doppelt so viele 60''–Bildschirme lagern wie jene der Größe 80''

Daraus schließen wir, dass die Anzahl x der 60''-Bildschirme mindestens 2mal so groß sein soll wie die Anzahl y der 80''-Schirme.

mindestens … $\geq$ höchstens … $\leq$

4. Umformung nach y

Wir formen alle Nebenbedingungen nach y um. Sollten sie kein y besitzen, so erfolgt die Umformung nach x.

Beachten Sie, dass die Nebenbedingungen **Un**gleichungen sind. (Siehe 3.4.1., S 165 f)

y bzw. x soll nach der Umformung immer auf der linken Seite alleine stehen.

(1) $x \geq 0$ NB (1) besitzt kein y und ist bereits nach x umgeformt.

(2) $y \geq 0$ NB (2) ist bereits auf y umgeformt

(3) $x + y \leq 100$ | $-x$ Wir formen nach y um.

(3) $y \leq 100 - x$

(4) $1\,200 \cdot x + 3\,600 \cdot y \leq 90\,000$ | $-1\,200 \cdot x$ Auch hier formen wir nach y um.

$3\,600\, y \leq 90\,000 - 1\,200 \cdot x$ | $: 3\,600$

$$\frac{3\,600 \cdot y}{3\,600} \leq \frac{90\,000}{3\,600} - \frac{1\,200 \cdot x}{3\,600}$$

(4) $y \leq 25 - \frac{1}{3}x$

(5) $x \geq 2 \cdot y$ | $-2 \cdot y$ Wir formen die Ungleichung so um, dass y alleine auf der linken Seite steht.

$-2 \cdot y + x \geq 0$ | $-x$

$-2 \cdot y \geq -x$ | $: (-2)$

(5) $y \leq \frac{1}{2}x$ [84]

5. Stellen umgeformte NB als (Geraden–) Gleichungen dar

Statt des Ungleichheitszeichens setzen wir in den nach y bzw. x umgeformten NB ein Gleichheitszeichen und schreiben aus Gründen der Übersicht alle drei Formen jeder NB in eine Tabelle:

ursprüngliche NB	nach y bzw. x umgeformt	als Gleichung angeschrieben
(1) $x \geq 0$	(1) $x \geq 0$	(1) $x = 0$
(2) $y \geq 0$	(2) $y \geq 0$	(2) $y = 0$
(3) $x + y \leq 100$	(3) $y \leq 100 - x$	(3) $y = 100 - x$
(4) $1\,200 \cdot x + 3\,600 \cdot y \leq 90\,000$	(4) $y \leq 25 - \frac{1}{3}x$	(4) $y = 25 - \frac{1}{3}x$
(5) $x \geq 2 \cdot y$	(5) $y \leq \frac{1}{2}x$	(5) $y = \frac{1}{2}x$

[84] Siehe 3.1.4., S 165 f

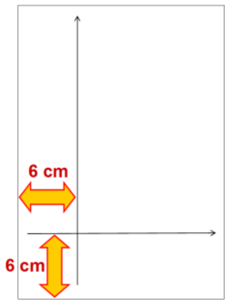
6. Graphische Darstellung

Zunächst werden alle Geraden der NB der rechten Spalte in einem Koordinatensystem von geeignetem Maßstab dargestellt.

Dafür dienen (bei diesem Beispiel) folgende Überlegungen:

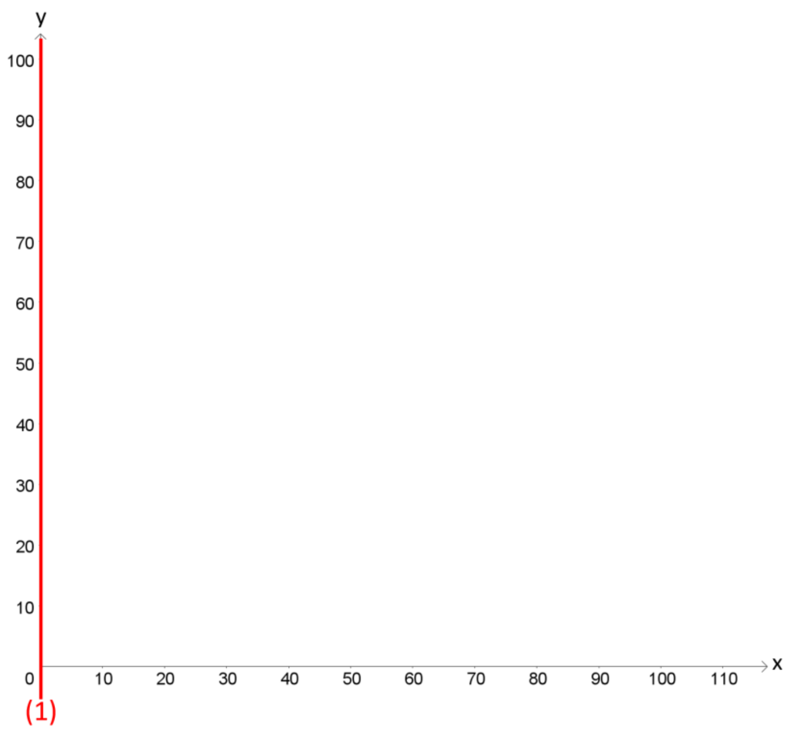
- Beide Achsen benötigt man ausgeprägt nur in positiver Richtung, da $x \geq 0$ und $y \geq 0$ sind.
- Der größte absolute Wert in den fünf Geraden ist 100 [NB (3)], also sollen in x– und y-Richtung 100 (Mengen-) Einheiten Platz finden.

Tipp:



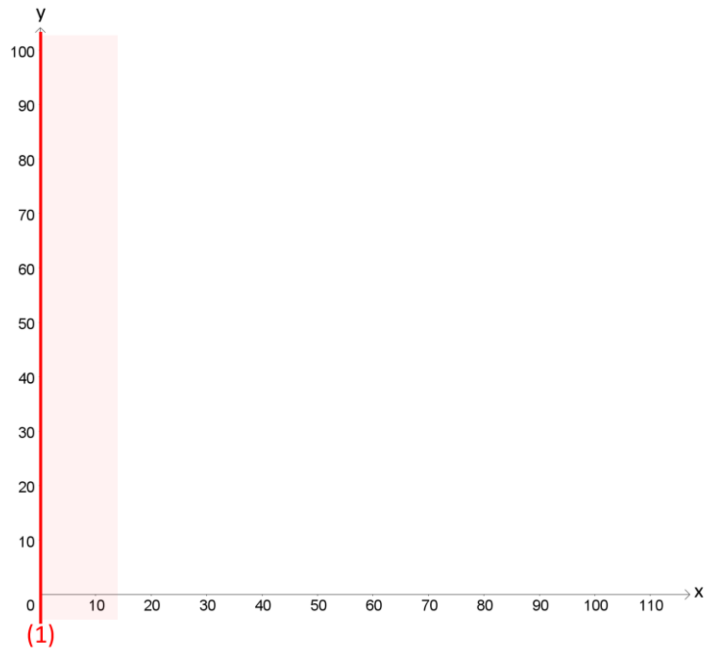
Lasse zum linken und unteren Seitenrand mindestens 6 cm Platz, da dieser Bereich noch benötigt wird!

Die Gerade (1) $x = 0$ stellt die y-Achse dar, weil auf ihr alle Punkte liegen, deren x-Koordinaten Null sind.



In Spalte 2 der Tabelle (S 652) steht die entsprechende Ungleichung (1) $x \geq 0$.

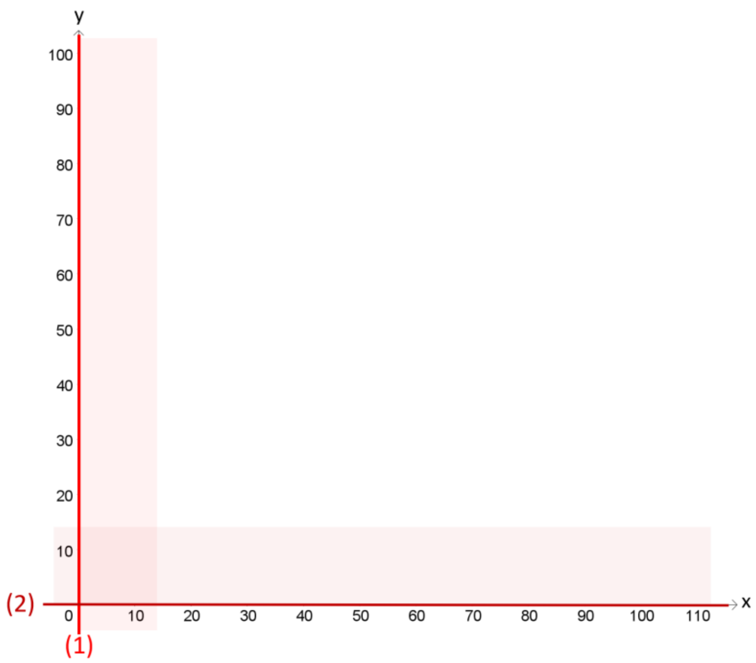
Das bedeutet, es kommen all jene x in Frage, die gleich Null oder größer als Null sind.
Diese x-Werte liegen in einer Fläche, die mit der y-Achse beginnt und nach rechts offen ist (man spricht von einer sog. **Halbebene**).



Die Gerade (2) $y = 0$ stellt die x-Achse dar, weil auf ihr alle Punkte liegen, deren y-Koordinaten Null sind.

In Spalte 2 der Tabelle steht die entsprechende Ungleichung (2) $y \geq 0$.

Das bedeutet, es kommen all jene y in Frage, die gleich Null oder größer als Null sind.
Diese y-Werte liegen in einer Fläche, die mit der x-Achse beginnt und nach oben offen ist.



Dadurch wird der für x und y in Frage kommende Bereich mehr und mehr eingegrenzt.

Entsprechend werden die anderen Geraden und ihre Halbebenen in das Koordinatensystem eingezeichnet.

Für Geraden, die x und y besitzen, legen wir entsprechende Wertetabellen an, um die Graphen zeichnen zu können:

(3) $y = 100 - x$

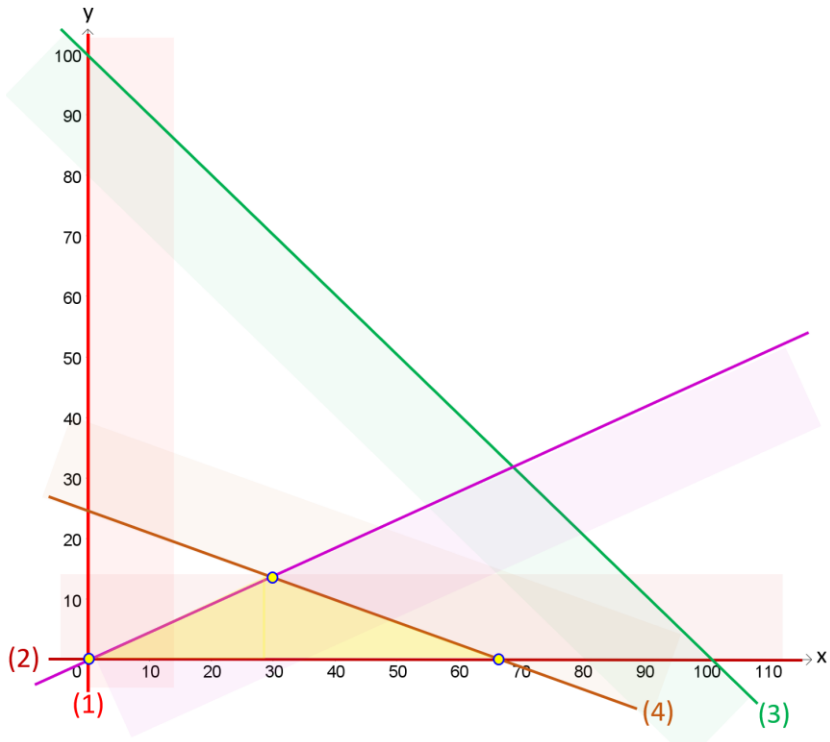
x	$y = 100 - x$
0	100
100	0

(4) $y = 25 - \frac{1}{3}x$

x	$y = 25 - \frac{1}{3}x$
0	25
30	15

(5) $y = \frac{1}{2}x$

x	$y = \frac{1}{2}x$
0	0
100	50



Alle Halbebenen eingezeichnet, liefert das infrage kommende Feld. Einer der Eckpunkte ist die Lösung.

7. Homogene Zielfunktion (Z = 0) einzeichnen

Die Zielfunktion Z wird null gesetzt und die so erhaltene Funktion in das Koordinatensystem eingezeichnet.

Z stehen für die Kosten, die in der dritten Dimension darzustellen wären. Durch das Null-Setzen projiziert man die Gerade auf die xy-Ebene.

Unsere Zielfunktion lautet: $\underbrace{Z}_{=0} = 200\,x + 800\,y$

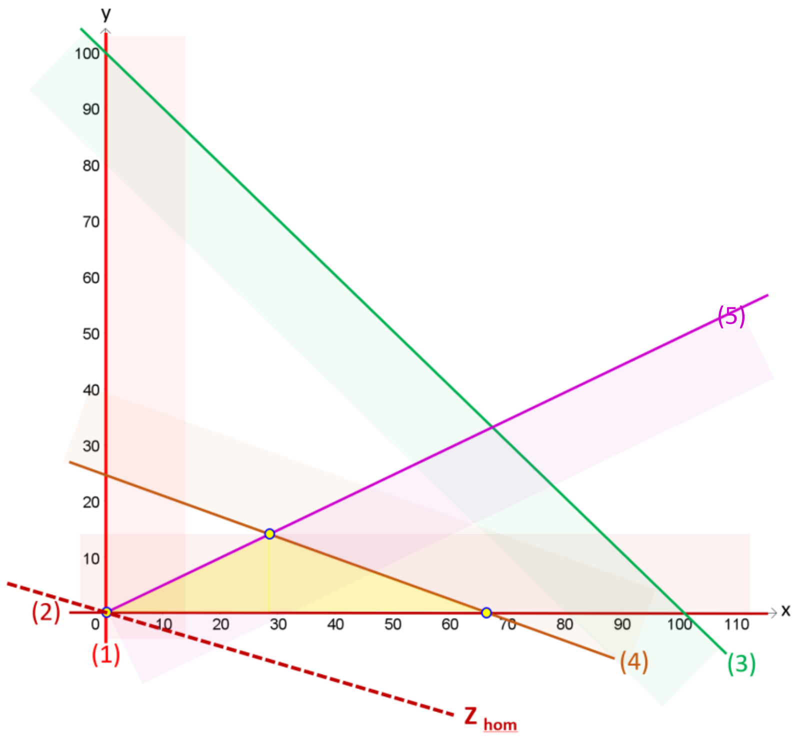
$$0 = 200\,x + 800\,y \quad |\; :200$$

$$0 = x + 4\,y \quad |\; -x$$

$$-x = 4\,y \quad |\; :4$$

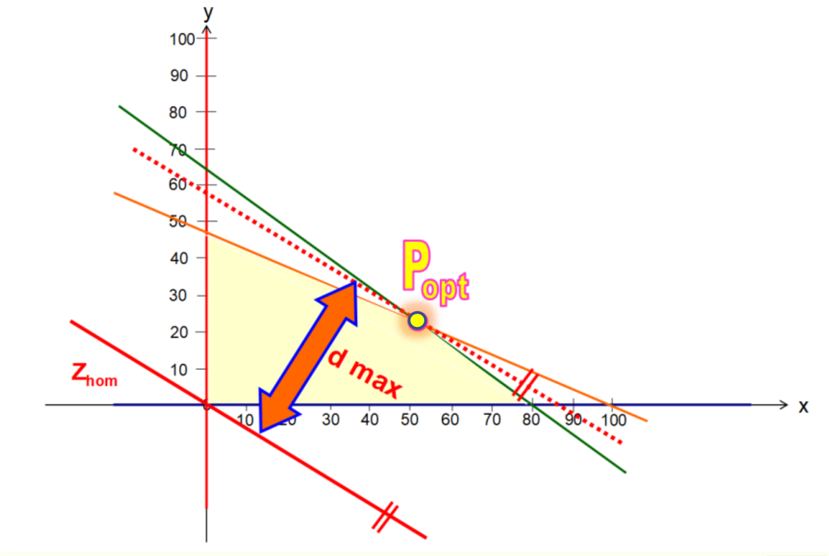
$$\underline{-\frac{1}{4}x = y} \quad \dots\ Z_{hom}$$

x	$y = -\frac{1}{4}x$
0	0
40	− 10



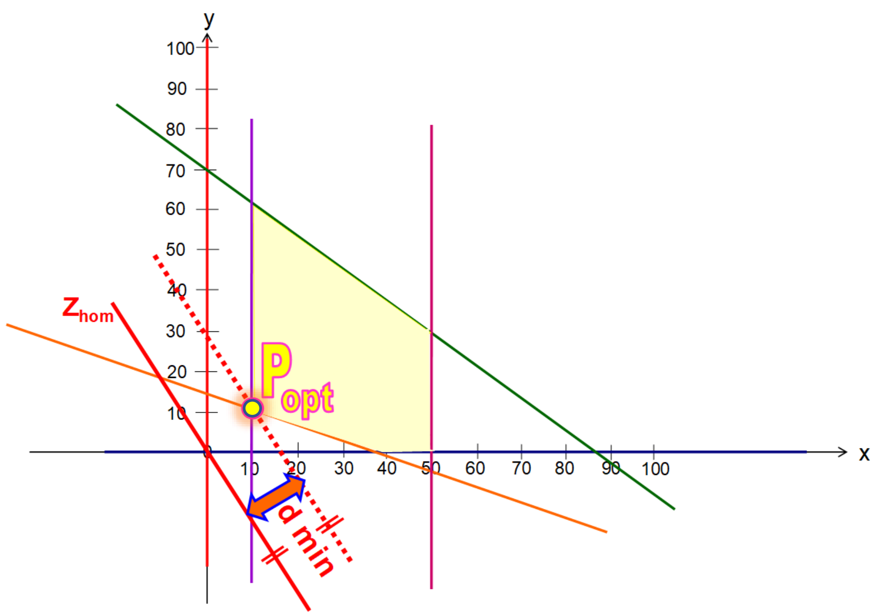
Nun gilt es zu **unterscheiden**, ob es sich um eine **Maximum**- oder **Minimumaufgabe** handelt:

Für **Maximum**–Aufgaben gilt:

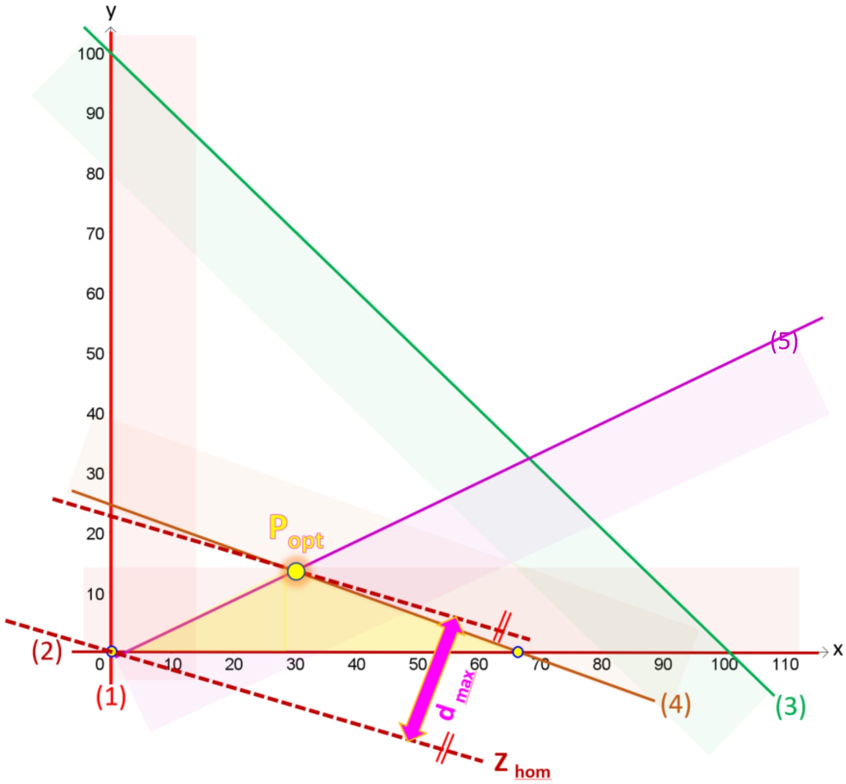


Die homogene Zielfunktion Z_{hom} **wird** zu jenem Eckpunkt des in Frage kommenden Bereiches parallel verschoben, der von Z_{hom} den **maximalen Abstand** d_{max} besitzt.

Für **Minimum**–Aufgaben gilt:



Die homogene Zielfunktion Z_{hom} **wird** zu jenem Eckpunkt des in Frage kommenden Bereiches parallel verschoben, der von Z_{hom} den **minimalen Abstand** d_{min} besitzt.



Für unser Beispiel lautet die graphische Lösung: P_{opt} (x = 30 / y = 15)

8. Rechnerische Überprüfung

Wir **schneiden** jene beiden **Geraden** derjenigen NB, **die** den **Punkt** P_{opt} **als Schnittpunkt** besitzen.

Das sind in unserem Beispiel die Geraden (4) und (5):

(4): $y = 25 - \frac{1}{3}x$

(5): $y = \frac{1}{2}x$ Hier erweist sich das **Gleichsetzverfahren** als günstig.

$$25 - \frac{1}{3}x = \frac{1}{2}x \quad \Big| \quad + \frac{1}{3}x$$

$$25 = \frac{5}{6}x \quad \Big| \quad : \frac{5}{6} = \cdot \frac{6}{5}$$

$30 = x$

(5) $y = \frac{1}{2} \cdot 30$

$y = 15$

Werden 30 TV-Geräte mit 60'' Bildgröße und 15 Geräte mit 80'' gelagert und verkauft, so ist der Gewinn maximal.

9. Berechnung von Z

Wir setzen die berechneten Werte für x und y in die Zielfunktion ein und erhalten so den maximalen Gewinn.

$Z = 200\,x + 800\,y$

$Z = 200 \cdot 30 + 800 \cdot 15$

$Z = 18\,000$

Der **maximale Gewinn** beträgt **€ 18 000,-**

13.2.2. Minimum – Aufgaben

Beispiel: Zwei Minen M_1 und M_2 versorgen drei Fabriken F_1, F_2 und F_3 mit Phosphaten.
M_1 kann wöchentlich 100 t Phosphate zu Tage fördern, M_2 80 t.

Fabrik F_1 benötigt pro Woche 60 t Phosphate, F_2 70 t und F_3 findet mit wöchentlich 50 t dieser Chemikalie ihr Auslangen.

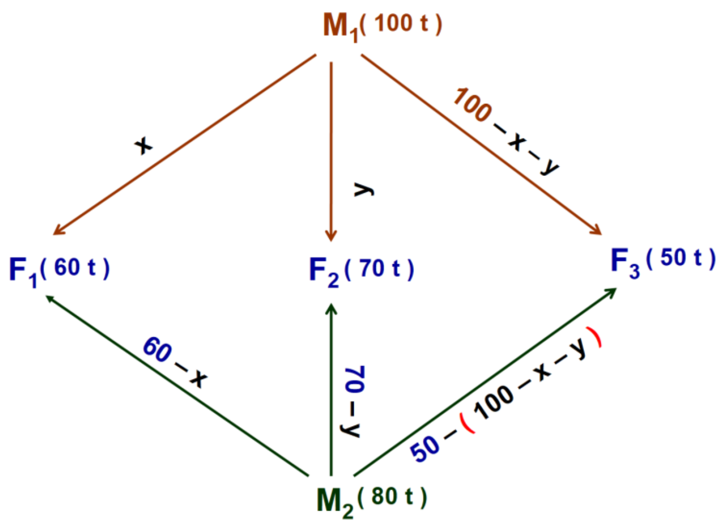
Die Transportkosten in € je Tonne von den Minen zu den Fabriken sind in nebenstehender Tabelle zusammengefasst:

nach / von	F_1	F_2	F_3
M_1	60,-	40,-	20,-
M_2	50,-	40,-	30,-

Wie viel Tonnen sind wöchentlich von den Minen zu den einzelnen Fabriken zu befördern, damit die Transportkosten möglichst gering (minimal) werden?

1. Festlegung der Variablen x und y

Beim sog. Transportproblem vergibt man die Variablen in einem Schema:



Zur Erläuterung der obigen Skizze:

Die Transportmengen der oberen Pfeile werden **von** der **Mine M_1** aus betrachtet:

Vergeben wir zunächst die Variablen x und y:

Von M_1 nach F_1 werden x Tonnen befördert, von M_1 nach F_2 sind es y Tonnen.

Insgesamt hat die Mine M_1 wöchentlich 100 Tonnen Phosphate zur Verfügung, also können zur Fabrik F_3 noch die restlichen $100 - x - y$ Tonnen befördert werden.

Die Transportmengen der unteren Pfeile werden **von** den **Fabriken** aus betrachtet:

Die Fabrik F_1 benötigt insgesamt 60 t Phosphate. Von Mine M_1 hat diese Fabrik x Tonnen erhalten, also benötigt sie noch 60 – x Tonnen von M_2.

Die Fabrik F_2 benötigt insgesamt 70 t Phosphate. Von Mine M_1 hat diese Fabrik y Tonnen erhalten, also benötigt sie noch 70 – y Tonnen von M_2.

Fabrik F_3 benötigt insgesamt 50 t Phosphate. Von Mine M_1 hat diese Fabrik 100 – x – y Tonnen erhalten, also benötigt sie noch 50 – (100 – x – y) Tonnen von M_2.

2. Aufstellen der Zielfunktion Z

Die Zielfunktion ermittelt man mit folgendem Gedankengang:

Wenn eine Tonne, von M_1 nach F_1 transportiert, € 60,- kostet (siehe Tabelle), so verursachen x Tonnen € $60 \cdot x$ an Transportkosten.

Wenn eine Tonne, von M_1 nach F_2 befördert, € 40,- kostet, so verursachen y Tonnen € $40 \cdot y$ an Kosten.

Wenn eine Tonne, von M_1 nach F_3 verfrachtet, € 20,- kostet, so verursachen 100 – x – y Tonnen € $20 \cdot (100 - x - y)$ an Kosten.

Wenn eine Tonne, von M_2 nach F_1 geliefert, € 50,- kostet, so verursachen 60 – x Tonnen € $50 \cdot (60 - x)$ an Kosten.

Wenn eine Tonne, von M_2 nach F_2 geliefert, € 40,- kostet, so verursachen 70 – y Tonnen € $40 \cdot (70 - y)$ an Kosten.

Wenn eine Tonne, von M_2 nach F_3 geliefert, € 30,- kostet, so verursachen 50 – (100 – x – y) Tonnen € $30 \cdot [50 - (100 - x - y)]$ an Kosten.

Somit lautet die Zielfunktion Z:

$$Z = 60x + 40y + 20(100 - x - y) + 50(60 - x) + 40(70 - y) + 30(x + y - 50) =$$

$50 - (100 - x - y) = 50 - 100 + x + y =$

$= x + y - 50$

$$= 60x + 40y + 2\,000 - 20x - 20y + 3\,000 - 50x + 2\,800 - 40y + 30x + 30y - 1\,500$$

$$Z = 20x + 10y + 6\,300$$

3. Aufstellen der Nebenbedingungen

Man setzt alle Liefermengen im Pfeildiagramm $\geq \mathbf{0}$.

(1) $x \geq 0$

(2) $y \geq 0$

(3) $100 - x - y \geq 0$

(4) $60 - x \geq 0$

(5) $70 - y \geq 0$

(6) $x + y - 50 \geq 0$ (*)

4. Umformung nach y

Wir formen alle Nebenbedingungen nach y um. Sollten sie kein y besitzen, so erfolgt die Umformung nach x.

(1) $x \geq 0$

(2) $y \geq 0$

(3) $100 - x - y \geq 0 \quad | -100 + x$

$-y \geq -100 + x \quad | \cdot (-1)$

$y \leq 100 - x$

(4) $60 - x \geq 0 \quad | -60$

$-x \geq -60 \quad | \cdot (-1)$

$x \leq 60$

(5) $70 - y \geq 0 \quad | -70$

$-y \geq -70 \quad | \cdot (-1)$

$y \leq 70$

(6) $x + y - 50 \geq 0 \quad | +50 - x$

$y \geq 50 - x$

(1) $x \geq 0$	(1) $x \geq 0$
(2) $y \geq 0$	(2) $y \geq 0$
(3) $100 - x - y \geq 0$	(3) $y \leq 100 - x$
(4) $60 - x \geq 0$	(4) $x \leq 60$
(5) $70 - y \geq 0$	(5) $y \leq 70$
(6) $x + y - 50 \geq 0$	(6) $y \geq 50 - x$

5. Stellen umgeformte NB als (Geraden-) Gleichungen dar

(1) $x \geq 0$	(1) $x \geq 0$	(1) $x = 0$
(2) $y \geq 0$	(2) $y \geq 0$	(2) $y = 0$
(3) $100 - x - y \geq 0$	(3) $y \leq 100 - x$	(3) $y = 100 - x$
(4) $60 - x \geq 0$	(4) $x \leq 60$	(4) $x = 60$
(5) $70 - y \geq 0$	(5) $y \leq 70$	(5) $y = 70$
(6) $x + y - 50 \geq 0$	(6) $y \geq 50 - x$	(6) $y = 50 - x$

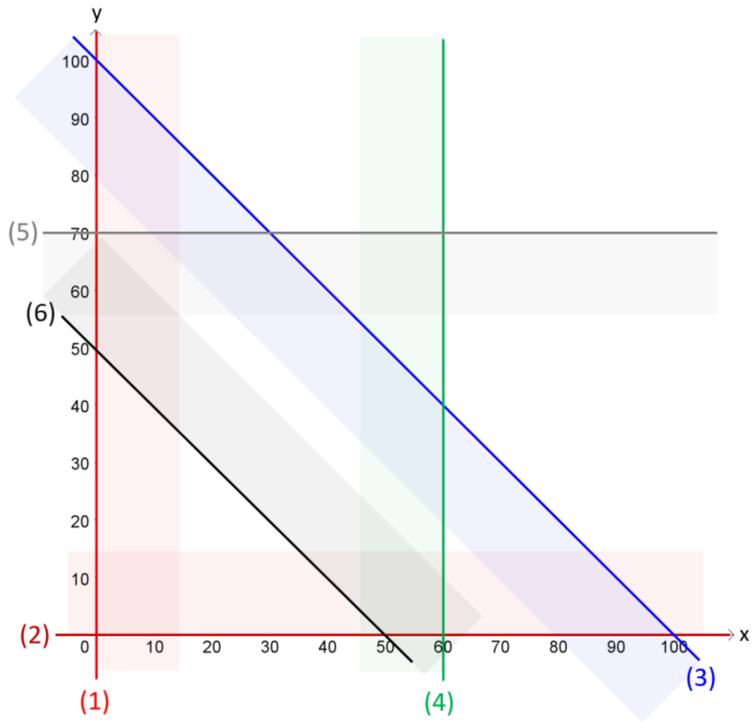
6. Graphische Darstellung

(3)

x	y = 100 – x
0	100
100	0

(6)

x	y = 50 – x
0	50
50	0



7. Homogene Zielfunktion Z_{hom} einzeichnen

$Z = 20\,x + 10\,y + 6\,300 \quad | \; -6\,300$

$\underbrace{Z - 6\,300}_{0} = 20\,x + 10\,y$

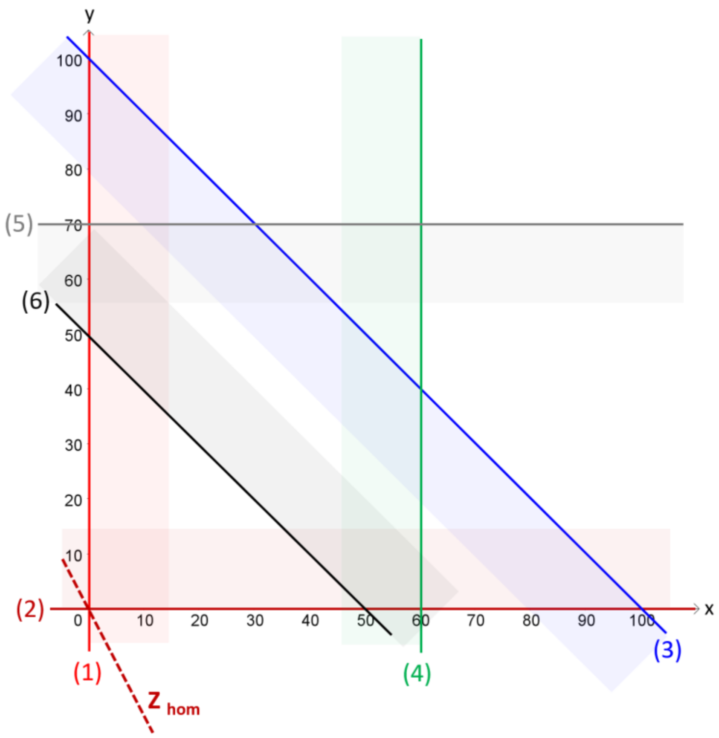
$\mathbf{0} = 20\,x + 10\,y + 6\,300 \quad | -20\,x$

$-20\,x = 10\,y \quad | \; :10$

$-2\,x = y \;\ldots\; Z_{hom}$

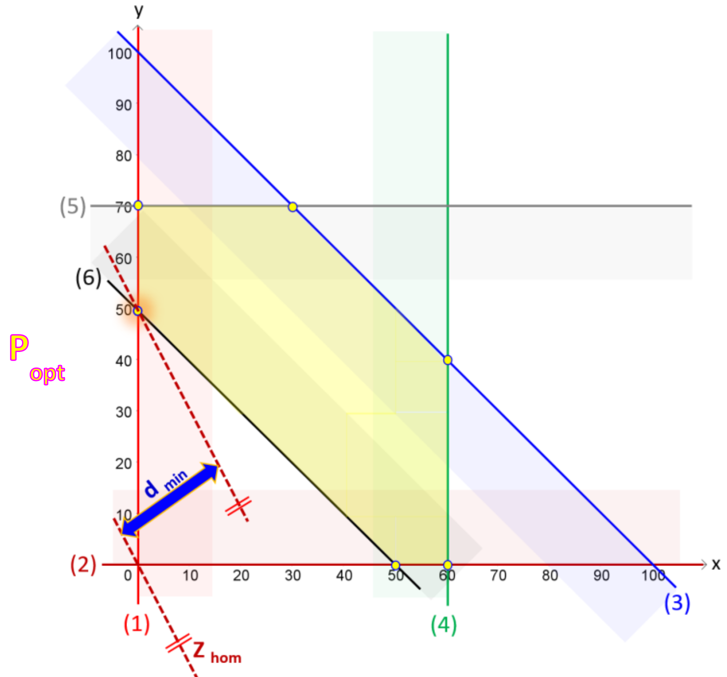
Es muss Z – 6 300 gleich null gesetzt werden, weil sowohl Z als auch 6 300 Kosten bedeuten, die beide in die z-Richtung aufzutragen wären. Durch das Null-Setzen projiziert man die Gerade auf die xy-Ebene.

x	y = –2 x
0	0
10	– 20



Wir betrachten nun den infrage kommenden Bereich und seine Eckpunkte.

Z_{hom} wir nun zu jenem **Eckpunkt** parallel verschoben, der vom Koordinatenursprung den **minimalen** Abstand (**d_{min}**) besitzt.



Das ist beim **Eckpunkt** mit den Koordinaten P_{opt} (**0** / **50**) der Fall.

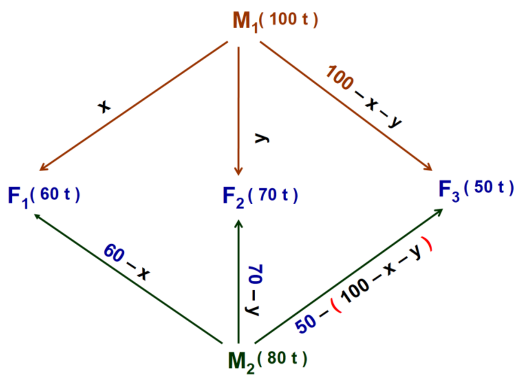
8. Rechnerische Überprüfung

Der in Frage kommende Eckpunkt ist hier der Schnittpunkt der Geraden (1) und (6):

(1) $x = 0$

(6) $y = 50 - x$ -> $y = 50 - 0 = 50$

Entsprechend lautet der Plan für minimale Transportkosten:



von M_1 nach F_1: $x = 0$ t

von M_1 nach F_2: $y = 50$ t

von M_1 nach F_3: $100 - 0 - 50 = 50$ t

von M_2 nach F_1: $60 - 0 = 60$ t

von M_2 nach F_2: $70 - 50 = 20$ t

von M_2 nach F_3: $50 - (100 - 0 - 50) = 0$ t

9. Berechnung von Z

$Z = 20\,x + 10\,y + 6\,300 = 20 \cdot 0 + 10 \cdot 50 + 6\,300 = 0 + 500 + 6\,300 = \mathbf{6\,800\ €}$

Die **minimalen Transportkosten** betragen **6 800 €**.

Übung

1) Ein Bauer mit 25 ha Weideland kann in seinen Ställen höchstens 25 Kühe und höchstens 250 Kälber halten.
Für eine Kuh sind 0.25 ha Weideland vonnöten, für ein Kalb 0.10 ha.
Pro Jahr werden für eine Kuh 100 Arbeitsstunden benötigt, für ein Kalb 10 Arbeitsstunden. Insgesamt können maximal 4 000 Arbeitsstunden aufgebracht werden.
Beim Verkauf einer Kuh beträgt der Gewinn 3 600 Euro, bei einem Kalb 450 Euro.
Ermitteln Sie, wie viele Kühe und Kälber pro Jahr gehalten und verkauft werden müssen, damit der Gewinn maximal wird.
Geben Sie den maximalen Gewinn an.

2) Ein Unternehmen stellt zwei Arten von Flatscreens her: solche mit 120'' Durchmesser und solche mit 80''.
Pro Woche können maximal 240 Flatscreens mit 120'' produziert werden und höchstens 600 Flatscreens mit 80''. Insgesamt können wöchentlich höchstens 750 Flatscreens produziert werden. Die Anzahl der monatlich produzierten Flatscreens mit 80'' soll mindestens doppelt so groß sein wie die Anzahl der monatlich produzierten Flatscreens mit 120''. Der Gewinn bei Verkauf eines Flatscreens mit 120'' beträgt 400 Euro, der Verkauf eines Flatscreens mit 80'' beträgt 250 Euro.
Wie viele Flatscreens beider Typen müssen monatlich produziert und verkauft werden, damit der Gewinn maximal wird?
Wie groß ist der maximale Gewinn?

3) Eine Baufirma hat 6 LKW in Garage I und 9 LKW in Garage II. Die LKW, alle gleichen Typs, werden an 3 verschiedenen Baustellen eingesetzt. Baustelle A benötigt 7 LKW, Baustelle B 5 LKW und Baustelle C 3 LKW.
In der folgenden Tabelle sind die Entfernungen von den Garagen zu den Baustellen angeführt:

	Baustelle A	Baustelle B	Baustelle C
Garage I	12 km	15 km	6 km
Garage II	8 km	4 km	12 km

Wie sind die LKW einzusetzen, damit die Summe der zurückgelegten Wege von den Garagen zu den Baustellen minimal wird? Wie lange ist der minimale Weg?

Lösungen:

1) 20 Kühe   200 Kälber   maximaler Gewinn: 162 000 €

2) Flatscreens mit 120'': 150   Flatscreens mit 80'': 277 500 €

3) Anzahl der LKW, die von/nach fahren:

von/nach	Baustelle A	Baustelle B	Baustelle C
Garage I	3	0	3
Garage II	4	5	0

minimaler Weg: 106 km

13.2.3. Simplex-Verfahren

13.2.3.1. Simplex-Verfahren für Maximum-Aufgaben

Das Simplex-Verfahren (der Simplex-Algorithmus) dient zur Lösung linearer Optimierungsprobleme und wird bei elektronischer Berechnung angewandt.

Da die Schritte anfänglich etwas diffizil wirken, wählte ich ein Beispiel, das in YouTube erläutert wird:

oder: https://www.youtube.com/watch?v=kEzR47ND__U

Im YouTube-Beitrag sind zwei Fehler, die sich mit Hilfe dieses Skripts leicht erkennen lassen.

Beispiel:

NB 1: $x_1 + x_2 \leq 3$

NB 2: $2\,x_1 + 4\,x_2 \leq 8$

Zielfunktion: $2\,x_1 + 3\,x_2 = z$

Bemerkungen:

1) Hier wurden statt x und y die Bezeichnungen x_1 und x_2 gewählt.
2) Die Nicht-Negativitätsbedingungen $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$ gelten natürlich, bleiben aber in dem Schema unberücksichtigt.
3) Alle NB müssen in der Form $\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{b}\,\boldsymbol{x_2} \leq \boldsymbol{c}$ dargestellt sein!

   Kommen NB mit $\geq$ vor, so müssen diese mit (–1) multipliziert werden, um die obige Form zu erhalten!

Für den Simplex-Algorithmus benötigen wir Gleichungen. Aus den Ungleichungen der NB werden Gleichungen, indem wir sogenannte Schlupfvariabel s_i einführen:

NB 1: $x_1 + x_2 \quad + \boldsymbol{s_1} \quad = 3$

NB 2: $2\,x_1 + 4\,x_2 \quad + \boldsymbol{s_2} = 8$

Zielfunktion: $2\,x_1 + 3\,x_2 \quad = z$

Damit können wir das sogenannte Simplex-Tableau (die Simplex-Tabelle) aufstellen:

In die Spalten von x_1 bis s_2 kommen die jeweiligen Koeffizienten, in die letzte Spalte die Konstanten.
In die letzte Zeile kommen die entsprechenden Werte der Zielfunktion .

x_1	x_2	s_1	s_2	Konstanten
1	1	1	0	3
2	4	0	1	8
2	3	0	0	Z

x_1	x_2	s_1	s_2	Konstanten
1	1	1	0	3
2	4	0	1	8
2	3	0	0	Z

① Die größte Zahl in der Z–Zeile (hier 3) liefert die PIVOT-Spalte.

1	1	1	0	3	$3:1=3$
2	4	0	1	8	$8:4=2$
2	3	0	0	Z	

② Die Konstanten jeder NB-Zeile werden durch jene Zahl der PIVOT-Spalte dividiert, die in der betreffenden Zeile steht.

1	1	1	0	3	$3:1=3$
2	**4**	0	1	8	$8:4=\mathbf{2}$
2	3	0	0	Z	

③ Das kleinste Ergebnis dieser Divisionen (hier **2**) liefert die PIVOT-Zeile.

④ Dort, wo PIVOT-Spalte und PIVOT-Zeile einander schneiden, liegt das **Pivot-Element** (hier **4**).

1	1	1	0	3	
2	**4**	0	1	8	**| : 4**
2	3	0	0	Z	

⑤ Mittels GAUßschem Algorithmus werden solche Umformungen durchführen, dass das **PIVOT-Element** gleich **1** wird und alle anderen Zahlen in der PIVOT-**Spalte** gleich **0**.

Dabei darf nur ein Vielfaches der PIVOT-Zeile von den anderen Zeilen subtrahiert werden. Die PIVOT-Zeile selbst bleibt unverändert.

1	1	1	0	3	−
$\frac{1}{2}$	**1**	0	$\frac{1}{4}$	2	
2	3	0	0	Z	

$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	1	
$\frac{1}{2}$	**1**	0	$\frac{1}{4}$	2	**| · 3**
2	3	0	0	Z	−

$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	1
$\frac{1}{2}$	**1**	0	$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{3}{4}$	$Z-6$

⑥ Stünden in der Z-Zeile nur negative Zahlen, (außer den Nullen) wären wir mit diesen Umformungen fertig und wir hätten das Maximum erreicht.

Da das in unserem Beispiel nicht der Fall ist, sind die Schritte ① bis ⑥ zu wiederholen.

x_1	x_2	s_1	s_2	Konstanten
$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	1
$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{3}{4}$	$Z-6$

Wenn es in der Pivot-Spalte keine positiven Zahlen gibt, dann gibt es kein Maximum (das Optimierungsproblem ist nicht lösbar).

$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	1	$1 : \frac{1}{2} = 2$
$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{4}$	2	$2 : \frac{1}{2} = 4$
$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{3}{4}$	$Z-6$	

①

$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	1	$\mid \cdot 2$
$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{4}$	2	
$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{3}{4}$	$Z-6$	

② und ③ und ④

1	0	2	$-\frac{1}{2}$	2	$\mid \cdot \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{4}$	2	$-$
$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{3}{4}$	$Z-6$	$-$

⑤

*	1	0	2	$-\frac{1}{2}$	2
**	0	1	-1	$\frac{1}{2}$	1
	0	0	-1	$-\frac{1}{2}$	$Z-6-1$

⑥ Jetzt sind alle Koeffizienten der Z-Zeile negativ. (außer den Nullen).

⑦ Nun setzen wir $Z-6-1=\mathbf{0}$ und bestimmen so den Wert für Z.

$Z-6-1=0$

$Z-7=0 \mid +7$

$\mathbf{Z=7}$ . . . das Maximum beträgt **7**.

⑧ Abschließend bestimmen wir noch die Werte für x_1 und x_2:

$\boxed{*}$ $1\,x_1+0\,x_2=2 \rightarrow \mathbf{x_1=2}$

$\boxed{**}$ $0\,x_1+1\,x_2=1 \rightarrow \mathbf{x_2=1}$

Bemerkung: Die Spalten der Schlupfvariablen bleiben unberücksichtigt.

13.2.3.2. Simplex-Verfahren für Minimum-Aufgaben

Den Simplex-Algorithmus gibt es eigentlich nur für Maximum-Aufgaben!

Beispiel:

NB 1: $20\,x_1 + 3\,x_2 \geq 120$

NB 2: $10\,x_1 + 5\,x_2 \geq 100$

$30\,x_1 + 40\,x_2 = Z_{min}$

Zunächst stellen wir die Koeffizienten und Konstanten der NB und Zielfunktion als Matrix dar.

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 3 & 120 \\ 10 & 5 & 100 \\ 30 & 40 & Z \end{pmatrix}$$

Nun transformieren wir diese Matrix (Zeilen und Spalten vertauschen):

$$A^T = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 30 \\ 3 & 5 & 40 \\ 120 & 100 & Z \end{pmatrix}$$

Somit lauten die NB und die Zielfunktion für die Maximum-Aufgabe:

NB 1: $20\,x_1 + \;\; 10\,x_2 \leq 30$

NB 2: $\;\;3\,x_1 + \;\;\; 5\,x_2 \leq 40$

$120\,x_1 + 100\,x_2 = Z_{max}$

Als Gleichungen dargestellt:

NB 1: $20\,x_1 + \;\; 10\,x_2 + s_1 \qquad = 30$

NB 2: $\;\;3\,x_1 + \;\;\; 5\,x_2 \qquad + s_2 = 40$

$120\,x_1 + 100\,x_2 \qquad\qquad = Z$

Damit lautet das Simplex-Tableau:

x_1	x_2	s_1	s_2	Konstanten
20	10	1	0	30
3	5	0	1	40
120	100	0	0	Z

x_1	x_2	s_1	s_2	Konstanten
4 **20**	10	1	0	30
3	5	0	1	40
120	100	0	0	Z

1 2

$30 : 20 = 1.5$ 3 $| : 20$ 5

$40 : 3 = 13.\dot{3}$

x_1	x_2	s_1	s_2	Konstanten
1	0.5	0.05	0	1.5
3	5	0	1	40
120	100	0	0	Z

$| \cdot 3$ – $| \cdot 120$ – 5

x_1	x_2	s_1	s_2	Konstanten
1	**0.5**	0.05	0	1.5
0	3.5	-0.15	1	35.5
0	**40**	-6	0	$Z-180$

6

$1.5 : 0.5 = 3$ $| : 0.5 = \cdot\ 2$

$35.5 : 3.5 = 10.14 \ldots$

x_1	x_2	s_1	s_2	Konstanten
2	**1**	0.1	0	3
0	3,5	-0.15	1	35.5
0	40	-6	0	$Z-180$

$| \cdot 3.5$ –

x_1	x_2	s_1	s_2	Konstanten
2	**1**	0.1	0	3
-7	0	-0.5	1	25
-80	0	-10	0	$Z-180-120$

$| \cdot 40$ –

$Z - 180 - 120 = 0$

$Z - 300 = 0$

$\boldsymbol{Z = 300}$

$2\,x_1 + 1\,x_2 = 3 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x_2 = 3}$

$-7\,x_1 + 0\,x_2 = 25 \rightarrow \quad x_1 = -\frac{25}{7} \notin \mathbb{R}^+ \rightarrow \quad \boldsymbol{x_1 = 0}$

Übung Lösen Sie die Beispiele auf S 647 mit dem Simplex-Algorithmus.

Am Ende möchte ich einige Beispiele einer indischen Aufnahmeprüfung [85] für MINT-Studien anführen.

Folgende Aufgaben entstammen dem *Advanced Exam*, zu dem man nur dann antreten darf, wenn man das *Main Exam* bestanden hat. Es handelt sich um eine Papier-Stift-Prüfung, also ohne elektronische Unterstützung.
Für die 18 gestellten Aufgaben sind 3 Stunden Zeit.

Considering only the principal values of the inverse trigonometric functions, the value of

$$\frac{3}{2}\cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{2+\pi^2}}+\frac{1}{4}\sin^{-1}\frac{2\sqrt{2}\,\pi}{2+\pi^2}+\tan^{-1}\frac{\sqrt{2}}{\pi}$$

is ___________ .

Let α be a positive real number. Let $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $g: (\alpha, \infty) \to \mathbb{R}$ be the functions defined by

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{12}\right) \qquad \text{and} \qquad g(x) = \frac{2\log_e\left(\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}\right)}{\log_e\left(e^{\sqrt{x}}-e^{\sqrt{\alpha}}\right)}.$$

Then the value of $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(g(x))$ is __________.

Let z be a complex number with non-zero imaginary part. If

$$\frac{2+3z+4z^2}{2-3z+4z^2}$$

is a real number, then the value of $|z|^2$ is __________.

Let $\bar{z}$ denote the complex conjugate of a complex number z and let $i = \sqrt{-1}$. In the set of complex numbers, the number of distinct roots of the equation

$$\bar{z} - z^2 = i(\bar{z} + z^2)$$

is __________.

[85] https://jeeadv.ac.in/past_qps/2022_1_English.pdf

Consider the equation

$$\int_1^e \frac{(\log_e x)^{1/2}}{x\left(a-(\log_e x)^{3/2}\right)^2}dx = 1, \quad a \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty).$$

Which of the following statements is/are TRUE ?

(A) **No** a satisfies the above equation

(B) An integer a satisfies the above equation

(C) An irrational number a satisfies the above equation

(D) More than one a satisfy the above equation

Let P_1 and P_2 be two planes given by

$$P_1: \ 10x + 15y + 12z - 60 = 0\,,$$
$$P_2: \ -2x + 5y + 4z - 20 = 0\ .$$

Which of the following straight lines can be an edge of some tetrahedron whose two faces lie on P_1 and P_2 ?

(A) $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{5}$

(B) $\frac{x-6}{-5} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$

(C) $\frac{x}{-2} = \frac{y-4}{5} = \frac{z}{4}$

(D) $\frac{x}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z}{3}$

Let $|M|$ denote the determinant of a square matrix M. Let $g\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ be the function defined by

$$g(\theta) = \sqrt{f(\theta)-1} + \sqrt{f\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-1}$$

where

$$f(\theta) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & \sin\theta & 1 \\ -\sin\theta & 1 & \sin\theta \\ -1 & -\sin\theta & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin\pi & \cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) & \tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) & -\cos\frac{\pi}{2} & \log_e\left(\frac{4}{\pi}\right) \\ \cot\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) & \log_e\left(\frac{\pi}{4}\right) & \tan\pi \end{vmatrix}.$$

Let $p(x)$ be a quadratic polynomial whose roots are the maximum and minimum values of the function $g(\theta)$, and $p(2) = 2-\sqrt{2}$. Then, which of the following is/are TRUE ?

(A) $p\left(\frac{3+\sqrt{2}}{4}\right) < 0$

(B) $p\left(\frac{1+3\sqrt{2}}{4}\right) > 0$

(C) $p\left(\frac{5\sqrt{2}-1}{4}\right) > 0$

(D) $p\left(\frac{5-\sqrt{2}}{4}\right) < 0$

© Pixabay

" Am Ende gilt doch nur,
was wir getan und gelebt –
und nicht,
was wir ersehnt haben. "

Arthur SCHNITZLER
(1862 – 1931)

SCHLUSSBEMERKUNGEN

Ziel dieses Skripts ist, sich mit allen notwendigen Lerninhalten vertraut zu machen und sie bei der Prüfung richtig anwenden zu können. Auch mit jenen, die aus Zeitgründen in der Vorlesung, in den Übungen oder im Tutorial nicht behandelt werden können. Einen wesentlichen Teil dieser Unterlagen nehmen mathematische Grundkenntnisse ein. Ohne diese zu beherrschen ist es wie bei einem Hausbau, den man im ersten Stock startet: Ohne Fundament fällt alles zusammen!

Mit der Hoffnung, dass mir dieser Anspruch im Wesentlichen gelungen ist, wünsche ich Ihnen für Ihr weiteres Studium viel Erfolg und beruflich sowie privat ein erfülltes und damit glückliches Leben!

Für Wünsche, Anregungen, entdeckte Fehler und Kritikpunkte bin ich dankbar: manfred.ambach@pro-test.at

Bilder und Grafiken stammen entweder von Martina MEVEN, von mir oder sind einer offiziellen Website mit lizenzfreien, kostenlosen Bildern mit Quellenangabe entnommen.

Salzburg, im Herbst 2024 — Manfred Ambach

© Martina Meven

飲水思源 饮水思源

Gedenke der Quellen, wenn du trinkst.

DANK

Danken möchte ich Herrn FH-Prof. Doz. Dr. Stefan WEGENKITTL für die Unterstützung, die mir im Rahmen dieser Skriptenerstellung zuteil wurde.

Herrn FH-Prof. Dr (habil) Günther EIBL, Dr. Doz. Karl ENTACHER, wie Herrn Dr. Simon KIRCHGASSER danke ich für Aufschlüsse über den relevanten Inhalt des Mathematikstoffes sowie für organisatorische Hinweise und Auskünfte über verwendete Fachliteratur.

Ich danke Frau Martina MEVEN für ihre kontinuierliche Hilfe und Begleitung solcher Vorhaben. Seien es (photo-) graphische Belange oder Fragen der Gestaltung.
Seien es die vielen Gespräche, die die Koordinaten für Richtung und Wertung meiner Pläne legen. Vor allem danke ich für ihr Verständnis, für den Raum und die Zeit, die solche Arbeiten beanspruchen.
Ich habe dir überhaupt so vieles zu verdanken!

Salzburg, im Herbst 2024 Manfred Ambach

LITERATURQUELLEN

P. GRUBER: **Analysis I und II**
Skripten
JKU Linz 1970 / 71

L. PAPULA: **Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaften** Band 1
Verlag Springer Vieweg, Wiesbaden 2018
ISBN: 978-3-658-21745-7 bzw. 978-3-658-21746-4 (eBook)

G. PILZ: **Lineare Algebra und Geometrie I und II**
Skripten
JKU Linz 1970 / 71

T. RIEßINGER: **Übungsaufgaben zur Mathematik für Ingenieure**
Verlag Springer Vieweg, Wiesbaden 2017
ISBN: 978-3-662-54802-8 bzw. 978-3-658-54803-5 (eBook)

J. SCHWARZE: **Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler**
Verlag Neue Wirtschafts-Briefe·Herne/Berlin, 1992
ISBN: 3-482-56339-X

G. TESCHL et.al.: **Mathematik für Informatiker** Band 1
Verlag Springer Vieweg, Berlin, Heidelberg 2013
ISBN: 978-3-642-37971-0 bzw. 978-3-642-37972-7 (eBook)

G. TESCHl et.al.: **Mathematik für Informatiker** Band 2
Verlag Springer Vieweg, Berlin, Heidelberg 2014
ISBN: 978-3-642-54273-2 bzw. 978-3-642-54274-9 (eBook)

P. TITTMANN: **Graphentheorie** Eine anwendungsorientierte Einführung
Carl Hanser Verlag, München 2022
ISBN: 978-3-446-47196-2 bzw. 978-3-446-47247-1 (eBook)

C.W. TURTUR: **Prüfungstrainer Mathematik**
Verlag Springer Spektrum, Wiesbaden 2014
ISBN: 978-3-658-03198-5 bzw. 978-3-658-03199-2 (eBook)

E. WEITZ: **Konkrete Mathematik (nicht nur) für Informatiker**
Verlag Springer Spektrum, Springer Nature 2021
ISBN: 978-3-662-62617-7 bzw. 978-3-662-62618-4 (eBook)

M. AMBACH: **Mathe in Wirtschaft und Technik**
Skript, Ausgabe 2015

M. AMBACH: **Mathe für die BRP**
Skript, Ausgabe 2024

Internetquellen sind situativ angegeben.