

Rechengesetze

Für reelle Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Rechengesetze.

Kommutativität

In welcher Reihenfolge wir Zahlen zueinander addieren oder in welcher Reihenfolge wir sie multiplizieren, spielt keine Rolle.

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Assoziativität

Auf die Reihenfolge der Klammerung bei der Addition und Multiplikation von reellen Zahlen kommt es nicht an.

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Distributivität

Auf folgende Weise spielen Addition und Multiplikation zusammen.

$$a \cdot (b + c) = ab + ac$$

$$(a + b) \cdot c = ac + bc$$

Bruchrechnung

Brüche $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ werden miteinander addiert, indem sie auf einen gemeinsamen Nenner gebracht werden:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Brüche werden miteinander multipliziert, indem das Produkt der Zähler und Nenner gebildet wird:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Schließlich wird bei Division zweier Brüche mit dem Kehrwert des Divisors multipliziert:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Mit *Kürzen eines Bruches* ist die Vereinfachung eines Bruches gemeint, bei der ein gemeinsamer Faktor von Zähler und Nenner gestrichen wird:

$$\frac{r \cdot a}{r \cdot b} = \frac{a}{b}.$$

Binomische Formeln

Mit Hilfe der Distributivitätsgesetze erhält man die bekannten *binomischen Formeln*.

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a + b)(a - b) &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Potenzgesetze

Für das Potenzieren gelten die folgenden Gesetze und Regeln.

$$\begin{aligned}a^x \cdot a^y &= a^{x+y} \\ (a^x)^y &= a^{x \cdot y} \\ a^{-x} &= \frac{1}{a^x} \\ a^{\frac{p}{q}} &= \sqrt[q]{a^p}\end{aligned}$$

Exponential- und Logarithmusfunktion

Wenden wir die Potenzgesetze auf Exponentialfunktion an, so erhalten wir:

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y}.$$

Und mit $a = e^x$ und $b = e^y$ erhalten wir somit Rechenregeln für den natürlichen Logarithmus:

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b),$$

denn

$$\ln(a \cdot b) = \ln(e^x \cdot e^y) = \ln(e^{x+y}) = x + y = \ln(a) + \ln(b).$$

Mit ähnlicher Rechnung erhalten wir aus $(e^x)^z = e^{x \cdot z}$ die Regel

$$\ln(a^z) = z \ln(a).$$

Prozentrechnung

Ein *Prozent* steht für *ein Hundertstel*. Das Prozentzeichen % ist also gleichbedeutend mit dem Wert $\frac{1}{100}$. Wir nutzen die Prozentrechnung, um eine Größe W in Relation zu einer Bezugsgröße G auszudrücken.

Angenommen ein Schuhmacher habe ein Monatsnettoeinkommen von 2200 Euro und seine Wohnungsmiete beträgt monatlich 528 Euro. Dann beträgt der Anteil der Miete an seinem Nettoeinkommen

$$\frac{W}{G} = \frac{528}{2200} = 0.24 = 24 \cdot \frac{1}{100} = 24\%.$$

Wir nennen dies den *Prozentsatz*.

Der erhaltene Wert vor dem Prozentzeichen – in diesem Beispiel der Wert 24 – wird auch *Prozentfuß* p genannt. Für ihn gilt dann offenbar

$$p = \frac{W}{G} \cdot 100.$$

8.1 Aufgaben

1. Der Bruch $\frac{2x \sin(x) + 6x^2}{2x \sin(x) + 6x^2 - 8x}$ kann durch Kürzen vereinfacht werden zu:
 - ☐ $-8x$.
 - ☐ $-\frac{1}{8x}$.
 - ☐ $\frac{1}{1-8x}$.
 - ☐ $\frac{\sin(x)+3x}{\sin(x)+3x-2}$.
2. $\ln(e^3 \cdot e^\pi)$ hat den Wert
 - ☐ $3 \cdot \pi$.
 - ☐ $3 + \pi$.
 - ☐ $e^{3 \cdot \pi}$.
 - ☐ $e^{3+\pi}$.

3. Ein Konto, welches zu Beginn eines Jahres einen Kontostand von 3275 Euro aufweist, hat bei jährlicher nachschüssiger Verzinsung (also am Ende des Jahres) mit einem Zinssatz von 2% zu Beginn des Folgejahres den Kontostand

- ☐ $0.02 \cdot 3275$ Euro.
☐ $2 \cdot 100 \cdot 3275$ Euro.
☐ $3275 + 2 \cdot 100 \cdot 3275$ Euro.
☐ $1.02 \cdot 3275$ Euro.

4. Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck:

$$-e^0 + 6e^{-3}e^{\frac{5}{2}}\sqrt{\frac{e}{36}}.$$

5. Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck:

$$(x + 2y)(y - 3z) + 3x(y + z) - y(2y - 6z).$$

6. Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck:

$$\frac{28 \cdot x^2 \cdot 2 \cdot x^4 - 4 \cdot x \cdot 35 \cdot x^5}{49(x^5)^2}.$$

7. Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck:

$$\frac{7x^3 + 5x^2}{7x^3 + 5x^2 + 2x}.$$

8. Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck:

$$\frac{r_1^2 \cdot r_2^4 \cdot \frac{p_1}{3\lambda}}{r_1^3 \cdot r_2^3 \cdot \frac{p_2}{4\lambda}}.$$

9. Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck:

$$\frac{45p^3\sqrt{p^7}}{3\sqrt{p^{13}}}.$$

10. Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck:

$$\frac{\pi}{3} \ln \left(2^{\frac{5\pi^2}{\ln(2\pi)}} \cdot 2^{\frac{3-5\pi}{\ln(2)}} \right).$$

11. Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck:

$$\cos \left(3(e^{\frac{1}{2}\ln(\pi)})^2 \right).$$

12. Sie haben eine Werkzeugbestellung über einen Rechnungsbetrag von 175 Euro aufgegeben. Der Steuersatz der darin enthaltenen Mehrwertsteuer betrug 19%. Wie groß war der Anteil der Steuer an dem Rechnungsbetrag?
13. Sie haben ein Regalsystem bestellt und zahlen den Rechnungsbetrag per Vorabüberweisung. Dafür erhalten Sie 2.5% Skonto. Wenn Ihr Rechnungsbetrag 1413.75 Euro beträgt, wie hoch war dann der Preis des Regalsystems?