Beispiel: Schaltalgebra

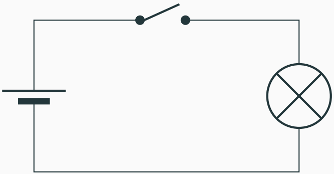
- Ohne logische Schaltungen würde heute kein Taschenrechner, kein Handy oder kein Computer funktionieren.

- Basis:
  - Binärsystem: erste vollständige Beschreibung von Gottfried Leibniz (1705)
- ab Mitte des 19. Jhdt. Versuche logische Operationen mechanisch umzusetzen
- Ende des 19. Jhdt bis Mitte des 20 Jhdt. über elektromagnetische Relais umgesetzt
- Heute sind logische Schaltungen mit Hilfe von CMOS-Technik (Halbleiter) umgesetzt.

Beispiel: Schaltalgebra

- Grundidee:
  - Elektronische (auch elektrische) Schaltungen bestehen aus elektrischen Leitungen und aus Schaltern.
  - Jede Leitung kann sich in zwei Zuständen befinden:
    - Strom U liegt an, $U > U_{toleranz}$
    - Strom U liegt nicht an, also $U < U_{toleranz}$
  - Ähnlich dazu hat jeder Schalter zwei Zustände (Stellungen):
    - "Ein (w - 1)"
    - "Aus (f - 0)"

Beispiel: Schaltalgebra



- Serienschaltung $\hat{=}$ Konjunktion
- Parallelschaltung $\hat{=}$ Disjunktion

- Schalter offen $\hat{=}$ 0 $\Rightarrow$ kein Stromfluss $\Rightarrow$ kein Licht
- Schalter geschlossen $\hat{=}$ 1 $\Rightarrow$ Stromfluss $\Rightarrow$ Licht

Wahrheitstabelle

Logische Operationen kann man mit Hilfe einer Wahrheitstabelle definieren:

P	Q		$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
0	0		1	0	0	1	1
0	1		1	0	1	1	0
1	0		0	0	1	0	0
1	1		0	1	1	1	1

Abwechslungsreiches zum Üben

Logic Traffic

https://logictraffic.ch/

Weiterführende Aufgabenstellungen

1. Welchen Wahrheitswert weisen die folgenden Ausdrücke für Aussagen A und B auf:
   - $(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$
   - $(A \vee B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$
   - $D := (A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$
     Rechenweg → Selbststudium

2. Bestimme den Wahrheitswert der Aussage:

$$((\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0) \wedge (\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 1)) \wedge (\forall x \in \mathbb{N} : |x| \geq -2)$$

   - Auflösung: UE

Logik in Anwendung

Anwendungen aus den Bereichen:

1. Aussagenlogik $\Rightarrow$ Syllogismus
2. logische Operationen $\Rightarrow$ Ungleichungen

Exaktes Schlussfolgern (Syllogismus)

- ”or” (OR) und ”und” (UND) werden meist für komplexere Prämissen oder Behauptungen verwendet

- Prominenter Anwendungsfall:

  Logische Folgerung - Logisches Schließen - Argumentation bzw Syllogistik

Exaktes Schlussfolgern (Syllogismus)

- Prämisse 1 (P1): Alle Logiker sind Menschen.
- Prämisse 2 (P2): Alle Menschen sind schlafbedürftig.
- Konklusion (K): Alle Logiker sind schlafbedürftig.

$\rightarrow$ Zwei "und"-verknüpfte Prämissen und eine Konklusion

- P1 ist wahr
- P2 ist wahr

  $\Rightarrow$ K ist wahr
- Da beide Prämissen wahr sind und Abhängigkeiten zwischen den Aussagen bestehen muss auch die Konklusion wahr sein: Wahrheitstransfer

Exaktes Schlussfolgern (Syllogismus)

- Prämisse 1 (P1): Einige Pflanzen sind Fleischfresser.
- Prämisse 2 (P2): Einige Fleischfresser sind Katzen.
- Konklusion (K): Einige Pflanzen sind Katzen.

$\rightarrow$ Zwei "und"-verknüpfte Prämissen und eine Konklusion

- P1 ist wahr
- P2 ist wahr

  $\Rightarrow$ K ist nicht wahr
- Beide Prämissen sind zwar wahr allerdings haben die in der Konklusion verwendeten Individuen keine Beziehung zu einander.

Exaktes Schlussfolgern (Syllogismus)

- Prämisse 1 (P1): Alle Minister sind Politiker.
- Prämisse 2 (P2): Einige Politiker sind kriminell.
- Konklusion (K): Einige Minister sind kriminell.

Gilt $(P1 \land P2) \Rightarrow K$?

Exaktes Schlussfolgern (Syllogismus)

- Prämisse 1 (P1): Alle Tiere sind Bäume.
- Prämisse 2 (P2): Einige Hunde sind keine Bäume.
- Konklusion (K): Einige Hunde sind keine Tiere.

Gilt $(P1 \wedge P2) \Rightarrow K$?

Logisches Verknüpfen von Aussagen - 3.Teil "Negation" $\neg$

Gegeben seien folgende Beispiele. Bilde die Negationen der Aussagen:

1. Dieses Schaf ist schwarz und mager.
2. Ein normales Schaf ist weiß oder fett.
3. Alle Programme sind fehlerlos.
4. Kein Programm ist fehlerlos.
5. Es gibt ein Programm, das fehlerlos ist.
6. $\neg(\forall x : x < 5 \wedge x \geq 1) \Leftrightarrow ?$

Lösen von Ungleichungen - Herangehensweise

Beispiel 1:

Finde alle $x \in \mathbb{R}$ für die gilt: $3x + 10 < 43$

Beispiel 2:

Finde alle $x \in \mathbb{R}$ für die gilt: $-2x < 8$

Lösen von Ungleichungen - Herangehensweise

- Bei der Anwendung von Äquivalenzumformungen von Ungleichungen gilt für a, b, c:
  1. Addition einer Konstanten auf beiden Seiten
     $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$
  2. Multiplikation beider Seiten mit Konstanten
     bei negativem c wird Ungleichheitszeichen umgedreht

$$a < b \Leftrightarrow \begin{cases} ac < bc, & c > 0 \\ ac > bc, & c < 0 \end{cases}$$

- Achtung vor falschen Schlussfolgerungen
  - Wurzelziehen ist keine Äquivalenzumformung!
  - Division durch Null?!

Beispiel: Lösen einer Ungleichung mit Variablen

Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig, fest gesetzt aber dennoch unbekannt. Gesucht sind alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ von

$$ax + 2x - x + 4 > -4$$

- Bei Ungleichungen mit Unbekannten muss man oft mehrere Fälle unterscheiden
- Diese Fallunterscheidungen ergeben sich immer automatisch aufgrund logischer Überlegungen.
  - Fallunterscheidung wegen Vorzeichen bei Umformungen mit Multiplikationen!
  - Separate Betrachtung bei Division durch Null!

Beispiel: Lösen einer Ungleichung mit Betrag

Löse folgende Betragsungleichung: $5 - 3|x - 6| \leq 3x - 7$

- Die Auflösung des Betrags $|x - 6|$ benötigt eine Fallunterscheidung:
  1. für $x \geq 6$: $L_1 = \{x | x \geq 6\}$
  2. für $x < 6$: $L_2 = \{x | x < 6\}$

  gesamte Lösungsmenge: $L = \mathbb{R}$

Rechnung siehe VL-Mitschrift

Ein Rätsel zum Schluss

Du strandest an einer Insel und wirst von Kannibalen gefangen genommen. Zunächst wirst du eingesperrt, und die Kannibalen beraten, was mit dir geschehen soll. Nach kurzer Zeit kommt einer zu dir und erklärt dir:

"Wir werden dich töten, aber du kannst indirekt bestimmen, wie wir dich töten. Du darfst eine Aussage treffen: Ist diese wahr, so wirst du gekocht. Ist die Aussage falsch, dann grillen wir dich."

Was musst du sagen, um freizukommen?

Auflösung

- Forderung: eine Aussage
- Problem: die Aussage muss weder wahr noch falsch sein

- Wie trifft man eine logische Aussage, die weder wahr noch falsch ist?

- Kontext der Aufgabenstellung betrachten!!
  - Verwende die Mitteilung der Kannibalen gegen sie.
  - Vorschlag: *"Ich werde gegrillt!"*

Auflösung

- Angenommen, die Aussage *"Ich werde gegrillt!"* ist wahr, dann müsstest du gekocht werden, die Aussage ist also falsch.
- Angenommen die Aussage ist falsch, dann müsstest du gegrillt werden, dann wäre sie aber wahr.

- Also bleibt den Kannibalen nichts anderes übrig, als dich freizulassen, da keine klare Entscheidung getroffen werden kann!

Key-Takeaways: Logik

1. Die grundlegenden Begriffe der Logik (z.B. Aussage, logische Operationen, ...) können reproduziert werde und das Konzept dahinter beispielhaft zu kann erläutern werden.
2. Auch komplexere mathematisch formulierte Aussagen und Folgerungen können verstanden werden (Mathematik als Sprache verstehen).
3. Komplexere Kombinationen grundlegender logischer Operationen können durchgeführt werden (z.B. Syllogismen, ...).
4. Ungleichungen (auch mit Variablen) mit Hilfe von Äquivalenzumformungen und klaren Fallunterscheidungen können gelöst werden.