# Sprache der Mathematik: Mengen und Logik

# Literaturhinweise: Bibliothek

Dieses Kapitel basiert zum Teil auf Inhalten des folgenden Buches:

- Rudolf Berghammer: Mathematik für die Informatik, Springer Vieweg, *(Kapitel 1,2)*

# Mathematische Notation

| Symbol | Bedeutung | | Symbol | Bedeutung |
|---|---|---|---|---|
| $\{\}$ | Mengenklammer | | $\in$ | ist Element von |
| $\lvert\{\}\rvert$ | Anz. der Elemente | | $\mid$ oder $:$ | für die gilt |
| $\subseteq$ | ist Teilmenge von | | $\cup$ | vereinigt mit |
| $\setminus$ | ohne | | $\times$ | Kartes. Produkt |
| $=$ | ist gleich | | $:=$ | ist definiert durch |
| $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{I}} A_i$ | bel. Vereinigung | | $\bigcap\limits_{i\in\mathbb{I}} A_i$ | bel. Schnitt |
| $\sum_{i=1}^n x_i$ | Summe | | $\prod_{i=1}^n b_i$ | Produkt |
| $W(a)$ | Wahrheitswert v. a | | $\neg$ | nicht |
| $\wedge$ | und | | $\vee$ | oder |
| $\Rightarrow$ | daraus folgt | | $\Leftrightarrow$ | genau dann wenn |
| $\forall$ | für alle | | $\exists$ | es gibt |

# Mathematische Notation

- Die Operatoren $\sum$, $\prod$, $\bigcup$ und $\bigcap$ verwendet man zur verkürzten Darstellung von häufig auftretenden Rechen- oder Mengenoperationen.
- Für alle diese Operatoren ist es wichtig den Bereich (Grenzen) anzugeben in welchen diese Operationen durchgeführt werden.
- Summenzeichen wird für Zahlen $a_i$ verwendet, $m, n$ bilden die Grenzen, $i$ bezeichnet man als Laufindex

$$\sum_{i=m}^{n} a_i := a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$$

# Mathematische Notation

- Produktzeichen wird ebenso für Zahlen $a_i$ verwendet

$$\prod_{i=m}^{n} a_i := a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n$$

- Beliebige Vereinigungsmenge (Details folgen später)

$$\bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i := \ldots$$

  Die Menge $\mathbb{I}$ bezeichnet man als Indexmenge, welche oftmals einen Teil der natürlichen Zahlen darstellt.

- Beliebige Schnittmenge (Details folgen später)

$$\bigcap_{i \in \mathbb{I}} A_i := \ldots$$

# Mengentheoretische Grundlagen

- Mengenlehre entwickelt zwischen 1870 und 1900

- Definition einer Menge nach Georg Cantor (1885):

  > Unter einer **Menge** versteht man jede Zusammenfassung $M$ von bestimmten wohlunterscheidbaren Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die **Elemente** von $M$ genannt werden) zu einem Ganzen.

# Beispiele von Mengen - Mathematische Sprache

Folgende Mengen kann man bilden:

- Die Menge aller Studierenden im Hörsaal 110 der FH Salzburg.
- Die Menge der natürlichen Zahlen.
- Die Menge der Lösungen einer Ungleichung.
- Die leere Menge (z.B. ”ein leerer Jutesack”)

# Beispiele von Mengen - Mathematische Sprache

Folgende Mengen kann man bilden - oder?:

- ... der Teiler von 6
- ... die positive reelle Zahl
- ... die Basis des $\mathbb{R}^3$

# Beispiele von Mengen - Mathematische Sprache

Richtig wäre es dagegen zu sagen:

- Sei $p$ die kleinste Primzahl, die ...
- ... die leere Menge.
- ... die Menge der natürlichen Zahlen.

# Beispiele von Mengen - Mathematische Sprache

**Ein bestimmter Artikel darf nur dann vor einen Begriff gesetzt werden, wenn unzweifelhaft sicher ist, dass das bezeichnete Objekt eindeutig bestimmt ist.**

Sofern ein Objekt nicht eindeutig bestimmt ist, so verwendet man in der mathematischen Sprache unbestimmte Artikel:

- ... ein Teiler von 6
- ... eine positive reelle Zahl
- ... eine Basis des $\mathbb{R}^3$

# Mengen

Im Grunde gibt es zwei Möglichkeiten Mengen sinnvoll festzulegen:

1. aufzählende Darstellung

   Es ist möglich **alle** Elemente einer *endlichen* Menge (aufzählend) anzugeben, um diese Menge zu definieren. Dabei bezeichnet man eine Menge als *endlich*, falls sie $n$ Elemente für ein $n \in \mathbb{N}$ besitzt:

   $$M := \{0, 2, 5, 9\} \Rightarrow 5 \in M$$

   $M$ hätte man auch folgendermaßen definieren können:

   $$M := \{9, 2, 0, 5\}$$

   Die Reihenfolge ist innerhalb einer Menge ist ohne Bedeutung, **allerdings** darf jedes Element innerhalb einer Menge nur *einmal* enthalten sein.

# Mengen

Im Grunde gibt es zwei Möglichkeiten Mengen sinnvoll festzulegen:

2. beschreibende Darstellung

   Es ist möglich **alle** Elemente einer Menge dadurch zu definieren, dass die *Eigenschaften ihrer Elemente* angegeben wird. In diesem Fall ist es auch möglich *unendliche* Mengen zu definieren.

   Beispiel: Menge $\mathbb{P}$ aller Primzahlen

   $$\mathbb{P} := \{p \in \mathbb{N} : p > 1 \wedge \forall m \in \mathbb{N} : (m|p \Rightarrow (m = 1 \vee m = p))\}$$

   Alternative:

   $$\mathbb{P} := \{p \in \mathbb{N} : p > 1 \ \text{ und } \ p \text{ besitzt nur die Teiler } 1 \text{ und } p\}$$

# Mengen - wichtige Definitionen

**Leere Menge**:

Die *leere* Menge $\emptyset$ ist definiert als die Menge, die kein Element enthält.

Formal kann das z.B. so ausgedrückt werden:

$$\emptyset := \{x | x \neq x\}$$

Alternativ kann man die leere Menge statt mit $\emptyset$ auch so bezeichnen $\{\}$.

# Mengen - wichtige Definitionen

**Gleichheit von Mengen**:

Zwei Mengen $A$ und $B$ gelten genau dann als *gleich*, wenn sie dieselben Elemente haben:

$$A = B \Leftrightarrow \forall x : (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Anmerkung: $A = B \text{ genau dann wenn } \forall x : (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ ist auch als Definition in Ordnung.

Allerdings ist folgendes nicht erlaubt:

- "Menge aller Studierenden im Hörsaal + müde"

# Mengen - wichtige Definitionen

**Teilmenge**:

Eine Menge $A$ heißt *Teilmenge* der Menge $B$, wenn $A$ nur Elemente enthält, die auch in $B$ enthalten sind. Etwas formaler ausgedrückt bedeutet das:

$$\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$$

oder kürzer und etwas formal 'unsauberer':

$$\forall x \in A : x \in B$$

# Mengen - wichtige Definitionen

**Teilmenge**:

Ist $A$ eine Teilmenge von $B$, so schreibt man:

$$A \subseteq B \quad \text{oder} \quad B \supseteq A$$

Will man explizit darauf hinweisen, dass $B$ noch mindestens ein Element besitzt, das nicht zu $A$ gehört, $A$ also eine echte Teilmenge von $B$ ist, so schreibt man

$$A \subset B \quad \text{oder} \quad B \supset A$$

# Mengen - wichtige Definitionen, Mengenoperationen

**Potenzmenge**:

Die *Potenzmenge* $P(M)$ einer Menge $M$ ist die Menge aller Teilmengen von M

$$P(M) := \{A : A \subseteq M\}$$

**Vereinigungsmenge**:

$$A \cup B := \{x | x \in B \vee x \in A\}$$

**Schnittmenge**:

$$A \cap B := \{x | x \in B \wedge x \in A\}$$

# Mengen - Mengenoperationen

**Differenzmenge**: 'A ohne B'

$$A \setminus B := \{x \in A | x \notin B\}$$

**Komplementärmenge**:

> Ist $A$ eine Teilmenge von $B$, so wird $B \setminus A$ als **Komplement** von $A$ bezüglich $B$ bezeichnet. Die häufigsten Schreibweisen für das Komplement einer Menge sind $\overline{A}$ und $A^C$.

Zwei Mengen $A$ und $B$ nennt man disjunkt, wenn ihr Durchschnitt leer ist:

$$A \text{ und } B \text{ sind disjunkt} :\Leftrightarrow A \cap B = \{\}$$

# Beispiele

1. Gesucht ist die Menge aller geraden Zahlen von 1 bis einschließlich 20.
2. Seien $A = \{2, 3, 4\}$ und $B = \{1, 5\}$. In welchem Verhältnis stehen die beiden Mengen zueinander?
3. Seien $A = B = \mathbb{R}$. In welchem Verhältnis stehen die beiden Mengen zueinander?
4. Sei $M$ die Menge der geraden natürlichen Zahlen. Bilde die Teilmenge, welche alle Elemente von $M$ enthält, die durch 3 teilbar sind.
5. Bilde alle Teilmengen von $\{1, 2, 3\}$.

# Mächtigkeit einer Menge = Kardinalität

**Mächtigkeit einer Menge (Kardinalität)**:

Unter der *Mächtigkeit* bzw *Kardinalität* einer Menge versteht man für endliche Mengen, also Mengen die sich klar begrenzen lassen, die **Anzahl der Mengenelemente**:

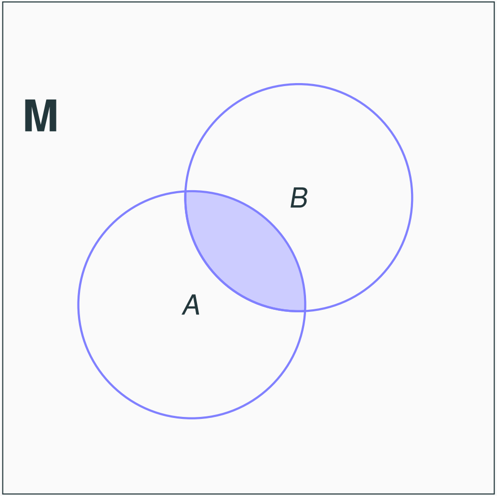
$$M = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow |M| = 4$$

Anmerkung:

- Für *unendliche Mengen* ist die Kardinalität nicht mehr so einfach definierbar:
  ”Zwei beliebige Mengen sind gleich mächtig, wenn es eine bijektive Abbildung zwischen ihnen gibt, also eine Zuordnung, die in beide Richtungen eindeutig ist und beide Mengen voll abdeckt. Jede Menge, die gleich mächtig ist wie jene der natürlichen Zahlen, wird abzählbar genannt, sonst überabzählbar.”

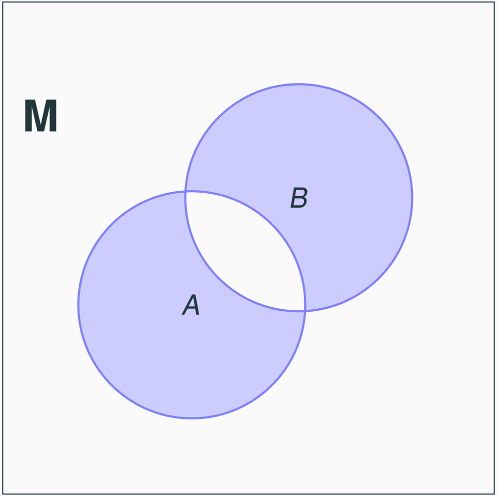
# Graphische Darstellung: Venn-Diagramme

$A \cap B$



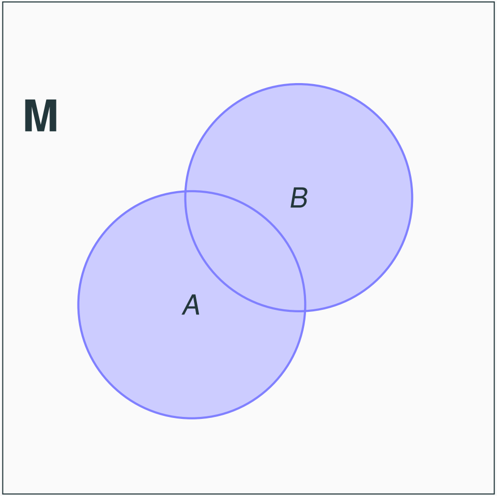
# Graphische Darstellung: Venn-Diagramme

$\overline{A \cap B}$



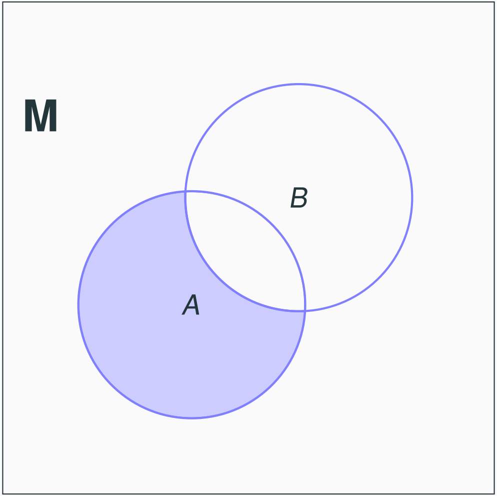
# Graphische Darstellung: Venn-Diagramme

$A \cup B$



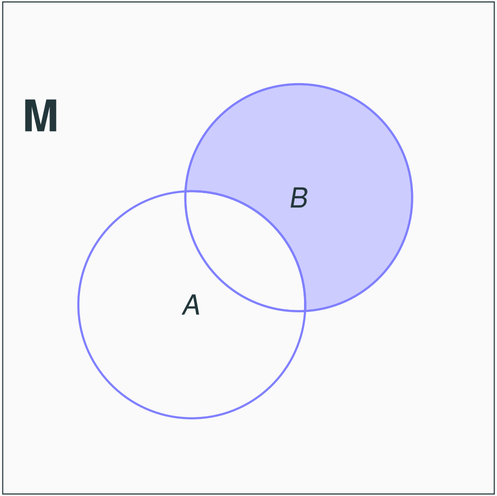
# Graphische Darstellung: Venn-Diagramme

$A \setminus B$



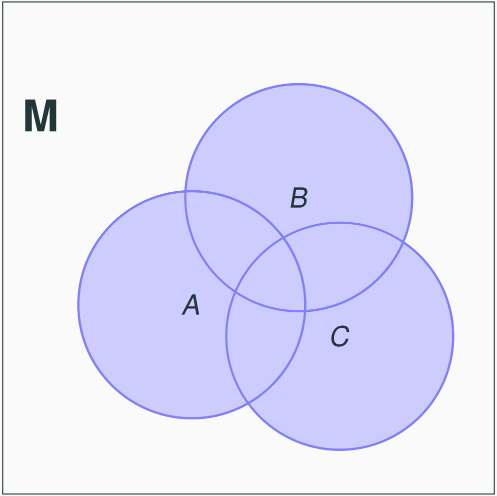
# Graphische Darstellung: Venn-Diagramme

$B \setminus A$



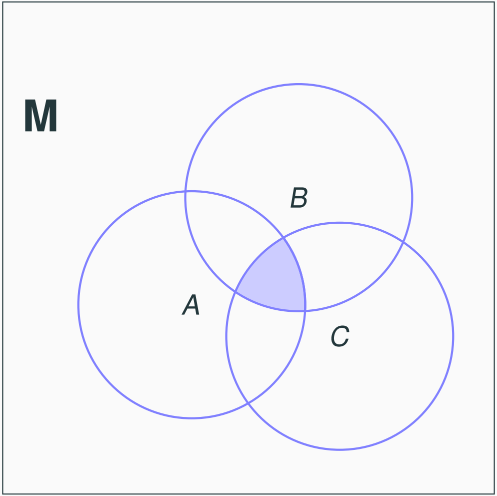
# Graphische Darstellung: Venn-Diagramme

$A \cup B \cup C$



# Graphische Darstellung: Venn-Diagramme

$A \cap B \cap C$



# Graphische Darstellung: Venn-Diagramme

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$