1 Recurrent Problems

经典问题（汉诺塔问题）找到递推式并进行求解。

- 寻找递推式的方法：考虑分割步骤（考虑移动最大的盘到目标位置）；
- 递推式 $T_n = 2T_{n-1} + 1$，起始项 $T_0 = 0$;
- 通项公式 $T_n = 2^n - 1$。

经典问题（用线分割平面问题）找到递归式并进行求解。

- 寻找递归式的方法：考虑新增贡献（考虑最新加入的一条线的贡献）；
- 递推式 $L_n = L_{n-1} + n$，起始项 $L_0 = 1$;
- 通项公式 $L_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$。

经典问题变式（V形分割平面问题）与线分割平面问题相联系。

- V 形看成两条相交直线，按照最优情况，每条线仅损失两个平面。
- 通项公式 $Z_n = L_{2n} - 2n = 2n^2 - n + 1$。

经典问题（约瑟夫问题，每2人处决版本）找到递推式并进行求解。

- 寻找递推式的方法：寻找 $2n$ 与 $2n+1$ 的情况与 n 的情况的关系;
- 递推式 $J(2n) = 2J(n) - 1$ 与 $J(2n+1) = 2J(n) + 1$，起始项 $J_1 = 1$;
- 通项公式 $J(2^m + l) = 2l + 1$;
- 事实上，$J((b_m b_{m-1} \cdots b_1 b_0)_2) = (b_{m-1} \cdots b_1 b_0 b_m)_2$。

经典问题推广（约瑟夫问题+）求解如下递推式:

$$
\begin{aligned}
f(1) &= \alpha; \\
f(2n) &= 2f(n) + \beta; \\
f(2n+1) &= 2f(n) + \gamma.
\end{aligned}
$$

解：设 $f(n) = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma$。

- （**对参数取特殊值**）取 $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 0)$，则有

  $$
  \begin{aligned}
  A(1) &= 1; \\
  A(2n) &= 2A(n); \\
  A(2n+1) &= 2A(n).
  \end{aligned}
  $$

  于是 $A(2^m + l) = 2^m$;

- （**对函数取特殊值**）令 $f(n) = 1$，则有

  $$
  \begin{aligned}
  1 &= \alpha; \\
  1 &= 2 + \beta; \\
  1 &= 2 + \gamma.
  \end{aligned}
  $$

  从而 $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, -1, -1)$，代入 $f(n)$ 表达式，有

  $$A(n) - B(n) - C(n) = 1$$

  注：本质也是对参数取特殊值，只不过参数特殊值由函数特殊值解出。

- 类似的，令 $f(n) = n$ 可以得到 $A(n) + C(n) = n$。

联立方程组即可解得（令 $n = 2^m + l$ ）

$$
\begin{aligned}
A(n) &= 2^m; \\
B(n) &= 2^m - 1 - l; \\
C(n) &= l.
\end{aligned}
$$

事实上，这个问题通项可以表示为：

$$f((b_m b_{m-1} \cdots b_1 b_0)_2) = (\alpha \beta_{b_{m-1}} \beta_{b_{m-2}} \cdots \beta_{b_1} \beta_{b_0})_2$$

其中，$\beta_0 = \beta, \beta_1 = \gamma$。

经典问题推广（约瑟夫问题++）**重要问题结论** 求解如下递推式：

$$\begin{aligned}
f(j) &= \alpha_j, && \text{for } 1 \le j < d; \\
f(dn+j) &= cf(n) + \beta_j, && \text{for } 0 \le j < d \text{ and } n \ge 1
\end{aligned}$$

解：利用类似思路，并且看成一个 d 进制向 c 进制的转化，可得通项公式：

$$f((b_m b_{m-1} \cdots b_1 b_0)_d) = (\alpha_{b_m} \beta_{b_{m-1}} \beta_{b_{m-2}} \cdots \beta_{b_1} \beta_{b_0})_c$$

2 Sums

重要问题结论 已知 T_0，求解如下递推式：

$$a_n T_n = b_n T_{n-1} + c_n$$

解 选取 s_n 使得 $s_n b_n = s_{n-1} a_{n-1}$，并在式子两边同乘 s_n，得到

$$s_n a_n T_n = s_n b_n T_{n-1} + c_n = s_{n-1} a_{n-1} T_{n-1} + c_n$$

将 $\{s_n a_n T_n\}$ 看成新数列求通项即可，结论为：

$$\begin{aligned}
T_n &= \frac{1}{s_n a_n} \left(s_1 b_1 T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k c_k \right); \\
\text{where} \quad s_n &= \frac{a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_1}{b_n b_{n-1} \cdots b_2}.
\end{aligned}$$

求和的基本性质

$$\begin{aligned}
&\sum_{k \in K} c a_k = c \sum_{k \in K} a_k; && \text{(distributive law)} \\
&\sum_{k \in K} (a_k + b_k) = \sum_{k \in K} a_k + \sum_{k \in K} b_k; && \text{(associative law)} \\
&\sum_{k \in K} a_k = \sum_{p(k) \in K} a_{p(k)}; && \text{(commutative law)} \\
&\sum_{j} \sum_{k} a_{j,k} [P(j,k)] = \sum_{k} \sum_{j} a_{j,k} [P(j,k)]; && \text{(interchanging the order of summation)} \\
&\sum_{j \in J, k \in K} a_j b_k = \left(\sum_{j \in J} a_j \right) \left(\sum_{k \in K} b_k \right). && \text{(general distributive law)}
\end{aligned}$$

切比雪夫单调不等式

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) \left(\sum_{b=1}^{n} b_k \right) \le n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k; \quad \text{if } a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \text{ and } b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n \\
&\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) \left(\sum_{b=1}^{n} b_k \right) \ge n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k; \quad \text{if } a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \text{ and } b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n
\end{aligned}$$

调和级数重要性质

$$\sum_{0 \le k < n} H_k = nH_n - n$$

可以通过用不同方式求 $S_n = \sum_{1 \le j < k \le n} \frac{1}{k-j}$ 证明。

求解和式的一般方法

- **查表**，如
$$\sum_{0\le k\le n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1);\quad \text{for } n\ge 0.$$
- **猜结论+归纳证明**；
- **微扰法**（P44）：
$$t_{n+1}+\sum_{0\le k\le n} t_k=\sum_{0\le k\le n+1} t_k=t_0+\sum_{0\le k\le n} t_{k+1}$$
由于 $\sum_{0\le k\le n} t_{k+1}$ 一般含有 $\sum_{0\le k\le n} t_k$，因此两边可以消去，得到 t_{n+1}。不过一般需要设置辅助级数消去；
- **观察级数，建立递推式**，用取特殊值与取特殊函数解出答案（P44，见第一章 约瑟夫问题+）；
- **利用积分得到大致答案，再利用误差项求精确值**（误差项利用递推求解，P46）；
- **将一维求和升维后，在不同方向降维化简**（P46）
- **利用离散积分**（后文介绍）；
- **利用生成函数**（后文介绍）；

下降幂和上升幂

- 下降幂：$x^{\underline{m}}=x(x-1)\cdots(x-m+1)\quad(m\ge 0)$;
- 上升幂：$x^{\overline{m}}=x(x+1)\cdots(x+m-1)\quad(m\ge 0)$;
- 负数推广：
$$x^{\underline{-m}}=\frac{1}{(x+1)^{\overline{m}}},\quad x^{\overline{-m}}=\frac{1}{(x-1)^{\underline{m}}}\qquad(m>0)$$

离散积分

- 定义：$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$，$\sum_a^b g(x)\delta x=\sum_{a\le k<b} g(k)$;
- 公式：
$$\begin{aligned}
\Delta x^{\underline{m}}&=mx^{\underline{m-1}}, & \sum_a^b x^{\underline{m}}\delta x&=\left.\frac{x^{\underline{m+1}}}{m+1}\right|_a^b\\
\Delta H_x&=x^{\underline{-1}}, & \sum_a^b x^{\underline{-1}}\delta x&=H_b-H_a\\
\Delta c^x&=(c-1)c^x, & \sum_a^b c^x&=\frac{c^b-c^a}{c-1}
\end{aligned}$$
- 规则：
$$\begin{aligned}
&\Delta(cf)=c\Delta f\\
&\Delta(f+g)=\Delta f+\Delta g\\
&\Delta(fg)=f\Delta g+Eg\Delta f=g\Delta f+Ef\Delta g\qquad(Ef(x)=f(x+1))
\end{aligned}$$

无限求和

- 定义：$\sum_{k\ge 0} a_k=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^n a_k$。
- **多组求和基本定理**（p61）：绝对收敛的关于多变量的和式总是可以对于任一变量先进行求和。

3 Integer Functions

上取整和下取整

$$\begin{aligned}\lfloor x \rfloor &= \text{the greatest integer less than or equal to } x;\\ \lceil x \rceil &= \text{the least integer greater than or equal to } x.\end{aligned}$$

基本性质

- $\lfloor x \rfloor = x \iff \text{integer } x \iff x = \lceil x \rceil$;
- $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = [x \text{ is not an integer}]$（3.2）；
- $x - 1 < \lfloor x \rfloor \le x \le \lceil x \rceil < x + 1$（3.3）；
- 取整符号与相反数（3.4）：$\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil, \quad \lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$;
- 将上取整和下取整符号转化为不等式（3.5）：
$$\begin{aligned}\lfloor x \rfloor = n &\iff n \le x < n+1\\ \lfloor x \rfloor = n &\iff x - 1 < n \le x\\ \lceil x \rceil = n &\iff n - 1 < x \le n\\ \lceil x \rceil = n &\iff x \le n < x + 1\end{aligned}$$
- 将整数与取整符号分离（3.6）：$\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$;
- 消去取整符号的等价转换（3.7）
$$\begin{aligned}x < n &\iff \lfloor x \rfloor < n\\ n < x &\iff n < \lceil x \rceil\\ x \le n &\iff \lceil x \rceil \le n\\ n \le x &\iff n \le \lfloor x \rfloor\end{aligned}$$

取小数部分 定义：$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$

重要定理：如果 $f(x)$ 是一个连续、严格单调递增的函数，且有如下性质：

$$f(x) \text{ integer} \Longrightarrow x \text{ integer}$$

那么，我们有

$$\begin{aligned}\lfloor f(x) \rfloor &= \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor\\ \lceil f(x) \rceil &= \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil\end{aligned}$$

证明：我们选取第二个式子证明，第一个式子的证明类似。首先如果 $x = \lceil x \rceil$，那么显然成立；下面考虑 $x < \lceil x \rceil$ 的情况，由于 $f(x)$ 严格单调递增，于是我们有 $f(x) < f(\lceil x \rceil)$，从而 $\lceil f(x) \rceil \le \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$。如果取等号则定理得证。如果取小于号，即 $\lceil f(x) \rceil < \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$，与基本的性质 $f(x) \le \lceil f(x) \rceil$ 联立有

$$f(x) \le \lceil f(x) \rceil < \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$$

利用 (3.7b)，有

$$f(x) \le \lceil f(x) \rceil < f(\lceil x \rceil)$$

从而，根据 $f(x)$ 与 $f(\lceil x \rceil)$ 中存在整数点，根据介值性，存在 $y \in [x, \lceil x \rceil)$，使得 $f(y) = \lceil f(x) \rceil$。于是根据性质，$y$ 为整数，而根据 $\lceil x \rceil$ 定义，$[x, \lceil x \rceil)$ 不存在整数，矛盾。故定理得证。

区间内的整数个数

- $[\alpha, \beta]$：$\lfloor \beta \rfloor - \lceil \alpha \rceil + 1$;
- $[\alpha, \beta)$：$\lceil \beta \rceil - \lceil \alpha \rceil$;
- $(\alpha, \beta]$：$\lfloor \beta \rfloor - \lfloor \alpha \rfloor$;
- (α, β)：$\lceil \beta \rceil - \lfloor \alpha \rfloor - 1$。

Spectrum：$Spec(\alpha) = \{\lfloor \alpha \rfloor, \lfloor 2\alpha \rfloor, \lfloor 3\alpha \rfloor, \cdots\}$

- 没有两个 Spectrum 是相同的（p77）；

- $Spec(\sqrt{2})$ 和 $Spec(2+\sqrt{2})$ 构成了所有正整数的划分（只需要证明对于任意 n，两个集合中小于等于 n 的数等于 n 即可，证明见p77）。

取模

- 定义：$x \mod y = x - y\lfloor x/y \rfloor$；
- 定义：$x \,\mathrm{mumble}\, y = y\lceil x/y \rceil - x$；
- 基本性质：
  - $0 \le x \mod y < y \quad (y > 0)$；
  - $y \le x \mod y \le 0 \quad (y < 0)$；
  - 规定：$x \mod 0 = x$；
  - **分配律**：$c(x \mod y) = (cx) \mod (cy)$；

重要性质（3.24 与 3.25）

$$n = \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil + \left\lceil \frac{n-1}{m} \right\rceil + \cdots + \left\lceil \frac{n-m+1}{m} \right\rceil$$
$$n = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{m} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n+m-1}{m} \right\rfloor$$

推论（3.26）

$$\lfloor mx \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{m} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor x + \frac{m-1}{m} \right\rfloor$$

取整求和方法

- 引入新变量 $m = \lfloor k \rfloor$，然后加入限制 $[m = \lfloor k \rfloor]$并将其化简为 $[m \le k < m+1]$；
- 引入新和式 $\sum_j [1 \le j \le x] = \lfloor x \rfloor$。

定理 如果 α 是无理数，随着 $n \to +\infty$ $\{n\alpha\}$ 等概率分布在 $(0,1)$ 之间，即

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{0 \le k < n} f(\{k\alpha\}) = \int_0^1 f(x)dx$$

重要结论（3.32）

$$\sum_{0 \le k < m} \left\lfloor \frac{nk+x}{m} \right\rfloor = d\left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor + \frac{(m-1)(n-1)}{2} + \frac{d-1}{2} = \sum_{0 \le k < n} \left\lfloor \frac{mk+x}{n} \right\rfloor$$

其中，$d = \gcd(m,n)$。

证明概要（p90-94）：首先进行如下拆分

$$\left\lfloor \frac{nk+x}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x + kn \mod m}{m} \right\rfloor + \frac{kn}{m} - \frac{kn \mod m}{m}$$

然后猜想答案拥有 $a\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor + bn + c$ 形式。然后先证明 $b = \frac{m-1}{2}$，接着利用 (3.26) 证明 $a = d = \gcd(m,n)$，最后证明 $c = \frac{d-m}{2}$ 即可。化简后发现答案是关于 m, n 对称的，因此结论证毕。

4 Number Theory

整除：$m \mid n \iff m > 0$ and $n = mk$ for some integer k，即 n 能被 m 整除。

最大公约数：$\gcd(m,n) = \max\{k \mid k \mid m \text{ and } k \mid n\}$。

- (4.6) $k \mid m$ and $k \mid n \iff k \mid \gcd(m,n)$;

最小公倍数：$\mathrm{lcm}(m,n) = \min\{k \mid k > 0, m \mid k \text{ and } n \mid k\}$。

欧几里得算法：$\gcd(0,n) = 0; \quad \gcd(m,n) = \gcd(n \mod m, m)$。

扩展欧几里得算法：找到 m' 与 n' 满足

$$m'm + n'n = \gcd(m,n)$$

这样的 m' 与 n' 一定存在（欧几里得定理，4.5），且这个算法具有自证性（说明了欧几里得算法的正确性）。

运算结论（4.7 ~ 4.9）

- $$\sum_{m \mid n} a_m = \sum_{m \mid n} a_{n/m}$$
- $$\sum_{m \mid n} a_m = \sum_{k} \sum_{m>0} a_m [n = mk]$$
- $$\sum_{m \mid n} \sum_{k \mid m} a_{k,m} = \sum_{k \mid n} \sum_{l \mid (n/k)} a_{k,kl}$$

  （这里我们令 $m = kl$，然后交换求和符号，先枚举 k 再枚举 l。）

质因数分解（4.11）

$$n = \prod_p p^{n_p} \qquad (n_p \geq 0)$$

- 质因数分解是唯一的（归纳证明前 i 个一定相等）；
- (4.12) $k = mn \iff k_p = m_p + n_p$ for all p;
- (4.13) $m \mid n \iff m_p \leq n_p$ for all p;
- (4.14) $k = \gcd(m,n) \iff k_p = \min(m_p, n_p)$ for all p;
- (4.15) $k = \mathrm{lcm}(m,n) \iff k_p = \max(m_p, n_p)$ for all p;

质数的性质

- 有无限多质数;
- 第 n 个质数的大致估计：$P_n \sim n \ln n$;
- 不超过 x 的质数个数估计：$\pi(x) = \frac{x}{\ln x}$;
- 求质数的一个方法：筛法。

阶乘：$n! = \prod_{k=1}^{n} k$，特别地 $0! = 1$。

- 估计式（4.22）：$n^{n/2} \leq n! \leq \frac{(n+1)^n}{2^n}$;
- 估计式（4.23）：$n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$
- (4.25) 令 $\epsilon_p(n)$ 表示 n 中 p 的因子个数，那么

$$\epsilon_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \cdots \leq \frac{n}{p}\left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots\right) = \frac{n}{p-1}$$

互质： (4.26) $m \perp n \iff m, n$ are integers and $\gcd(m,n) = 1$;

- (4.27) $\frac{m}{\gcd(m,n)} \perp \frac{n}{\gcd(m,n)}$;
- (4.28) $m \perp n \iff \min(m_p, n_p) = 0$ for all p;
- (4.29) $m \perp n \iff m_p n_p = 0$ for all p;
- (4.30) $k \perp m$ and $k \perp n \iff k \perp mn$。

Stern-Brocot Tree：从 $(\frac{0}{1}, \frac{1}{0})$ 开始，每次在相邻两个数 $\frac{m}{n}$ 与 $\frac{m'}{n'}$ 间插入一个数 $\frac{m+m'}{n+n'}$，设 $\frac{1}{1}$ 为树根。

- **重要性质**：（4.31）$m'n - mn' = 1$（归纳证明）；
- **重要性质**：任意一个正有理数 $\frac{a}{b}$ 都可以在有限层 Stern-Brocot Tree 中被构造出来（证明见 p118）；
- 从单位矩阵 I 开始，将 Stern-Brocot Tree 的路径转化为矩阵乘法，向左走即右乘一个 L 矩阵，向右走即右乘一个 R 矩阵（其中 L, R 矩阵参考书 4.33），最终的结果按照 (4.34) 即可得到。
  - 在这个过程中，我们可以发现：
$$\frac{m}{n} = f(RS) \iff \frac{m-n}{n} = f(S), \text{ when } m > n;$$
$$\frac{m}{n} = f(LS) \iff \frac{m}{n-m} = f(S), \text{ when } m < n.$$
    也就是
$$f(RS) = f(S) + 1, \qquad \frac{1}{f(LS)} = \frac{1}{f(S)} + 1$$
- 通过以上性质，我们可以把一个正整数 $\frac{m}{n}$ 转化为 Stern-Brocot Tree 上的路径（p122）。
- 一种更简单的转化方法见 p123，不过这种转化方法的尾部会有一个 L^∞，需要特判以消除。

Farey Series：N-order Farey Series F_N 包含了所有 0 到 1 的分母小于等于 N 的有理数，并按照升序排序。

- Farey Series 是 Stern-Brocot Tree 的一个子树（把分母大于 N 的点删去、且整体大于）；
- 于是，Farey Series 也满足 Stern-Brocot Tree 的重要性质，即 $m'n - mn' = 1$。

同余：（4.35）$a \equiv b \pmod m \iff a \mod m = b \mod m$；

- （4.36）$a \equiv b \pmod m \iff (a-b) \text{ is a multiple of } m$；
- **同余的基本性质**
  - 同余是个等价关系，满足自反、传递以及对称性；
  - $a \equiv b \text{ and } c \equiv d \implies a + c \equiv b + d \pmod m$；
  - $a \equiv b \text{ and } c \equiv d \implies a - c \equiv b - d \pmod m$；
  - $a \equiv b \text{ and } c \equiv d \implies ac \equiv bd \pmod m$；
  - $a \equiv b \implies a^n \equiv b^n \pmod m$；
  - （4.37）若 $d \perp m$，则有 $ad \equiv bd \iff a \equiv b \pmod m$；
  - （4.38）若 $d \neq 0$，则 $ad \equiv bd \pmod{md} \iff a \equiv b \pmod m$；
  - （4.39）$ad \equiv bd \pmod m \iff a \equiv b \pmod{\frac{m}{\gcd(d,m)}}$；
  - （4.40）$a \equiv b \pmod{md} \implies a \equiv b \pmod{\mathrm{m}}$；
  - （4.41）$a \equiv b \pmod{\mathrm{m}} \text{ and } a \equiv b \pmod{\mathrm{n}} \iff a \equiv b \pmod{\mathrm{lcm}(m,n)}$；
  - （4.42）若 $m \perp n$，则 $a \equiv b \pmod{\mathrm{m}} \text{ and } a \equiv b \pmod{\mathrm{n}} \iff a \equiv b \pmod{mn}$；
  - 取模的拆分：$a \equiv b \pmod m \iff a \equiv b \pmod{p^{m_p}} \qquad \text{for all } p$。

二次剩余：设 m 有 r 个不同的质因数，则 $x^2 \equiv 1 \pmod m$ 的解的个数为

$$2^{r+[8|m]+[4|m]-[2|m]}$$

- 对于除 2 以外的其他质因数有两解：$x = \pm 1$；
- 对于 $p = 2, m_2 = 1$ 有一解：$x = 1$；
- 对于 $p = 2, m_2 = 2$ 有两解：$x = 1, x = 3$；
- 对于 $p = 2, m_2 \geq 3$ 有四解：$x = \pm 1, x = 2^{m_2 - 1} \pm 1$。

费马小定理：（4.46）若 $n \perp p$，则

$$n^{p-1} \equiv 1 \pmod{\mathrm{p}}$$

威尔逊定理：（4.49）若 $n > 1$，则

$$n \text{ is prime} \iff (n-1)! \equiv 1 \pmod n$$

欧拉函数：$\varphi(n)$ 定义为 $\{0, 1, \cdots, m-1\}$ 内与 m 互质的数的个数。

积性函数：满足 "若 $m_1 \perp m_2$ 则 $f(m_1 m_2) = f(m_1) f(m_2)$ " 性质的函数。

欧拉定理：如果 $n \perp m$，那么

$$n^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$$

欧拉函数的计算与性质：根据欧拉函数是积性函数的性质。

- 显然有 $\varphi(1) = 1, \varphi(p) = p - 1$;
- $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$;
- (4.53)

$$\varphi(m) = \prod p \mid m(p^{m_p} - p^{m_p - 1}) = m \prod_{p \mid m} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

莫比乌斯函数：$\mu(m)$ 定义为满足 $\sum_{d \mid m} \mu(d) = [m = 1]$ 的函数;

- **莫比乌斯函数的计算**：根据莫比乌斯函数是积性函数的性质，且有 $\mu(p) = -1, \mu(p^k) = 0\ (k > 1)$;
- 莫比乌斯函数与欧拉函数的关系（莫比乌斯反演推论）：$\varphi(m) = \sum_{d \mid m} \mu(d) \frac{m}{d}$;

和式函数：定义 $g(m) = \sum_{d \mid m} f(d)$ 为 f 的和式函数;

- **重要性质** 若和式函数是积性函数，则原函数 f 也是积性函数；反之亦然;
- (4.54) $\sum_{d \mid m} \varphi(d) = m$;
-

莫比乌斯反演（实数形式与整数形式）

$$g(x) = \sum_{d \ge 1} f\left(\frac{x}{d}\right) \iff f(x) = \sum_{d \ge 1} \mu(d) g\left(\frac{x}{d}\right)$$
$$g(n) = \sum_{d \mid n} f(d) \iff f(n) = \sum_{d \mid n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$$

重要结论（4.64）

$$\sum_{d \mid m} \varphi(d) n^{m/d} \equiv 0 \pmod m$$

首先证明对于 $m = p^k$ 成立（需要用到费马小定理及归纳），然后用积性函数性质即可，见 p142-144。

5 Binomial Coefficient

二项式系数

$$\binom{r}{k} = \begin{cases} \frac{r^{\underline{k}}}{k!}, & \text{integer } k \ge 0 \\ 0, & \text{integer } k < 0 \end{cases}$$

整数形式的二项式系数（5.3）：

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad \text{integer } n, k$$

特殊的二项式系数：

$$\binom{r}{0} = 1, \quad \binom{r}{1} = r, \quad \binom{r}{2} = \frac{r(r-1)}{2}$$

性质

- （5.4）**对称性**（需要满足条件 integer $n \geq 0$！）
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \text{integer } n \geq 0$$
- （5.5）**吸收律**（需要满足条件 integer $k \neq 0$！）
$$\binom{r}{k} = \frac{r}{k}\binom{r-1}{k-1}, \quad \text{integer } k \neq 0$$
- （5.6，5.7）**吸收律**
$$k\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k-1}, \quad \text{integer } k$$
$$(r-k)\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k}, \quad \text{integer } k$$
- （5.8）**加法公式**
$$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1},, \quad \text{integer } k$$
- （5.9）**加法公式推论**
$$\sum_{k \leq n} \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}, \quad \text{integer } n$$
证明：加入 $\binom{r}{-1}$ 一项（值为0），用加法公式。
- （5.10）**加法公式推论（枚举上标求和公式）**
$$\sum_{0 \leq k \leq n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}, \quad \text{integer } m, n \geq 0$$
证明：加入 $\binom{0}{m+1}$ 一项（值为0），用加法公式。
- （5.11）**离散求导 / 离散积分公式**
$$\Delta\left(\binom{x}{m}\right) = \binom{x+1}{m} - \binom{x}{m} = \binom{x}{m-1}$$
$$\sum_a^b \binom{x}{m} \delta x = \binom{b}{m+1} - \binom{a}{m+1}$$
- （5.12）**广义二项式定理1**
$$(x+y)^r = \sum_k \binom{r}{k} x^k y^{r-k}, \qquad \text{integer } r \geq 0 \text{ or } |x/y| < 1$$
推论（分别代入 $(x, y) = (1, 1)$ 与 $(x, y) = (-1, 1)$）
$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$$
$$0^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}$$
- （5.13）**广义二项式定理2**

$$(1+z)^r=\sum_k\binom{r}{k}z^k,\quad |z|<1$$

证明：令 $z=x/y$ 并且两边同时乘 y^r，运用广义二项式定理1。

- （5.14）**负上标的二项式系数**（二项式系数，负）

$$\binom{r}{k}=(-1)^k\binom{k-r-1}{k},\quad \text{integer } k$$

推论（5.15）

$$(-1)^m\binom{-n-1}{m}=(-1)^n\binom{-m-1}{n},\quad \text{integer } m,n\geq 0$$

证明：两边都等于 $\binom{n+m}{n}$。

推论（5.16）

$$\sum_{k\leq m}\binom{r}{k}(-1)^k=(-1)^m\binom{r-1}{m},\quad \text{integer } m$$

证明：利用 （5.14），然后利用 （5.9），再利用 （5.14） 即可。

- （5.18）**对下标加权求和**（二项式系数，加权）

$$\sum_{k\leq m}\binom{r}{k}\left(\frac{r}{2}-k\right)=\frac{m+1}{2}\binom{r}{m+1},\quad \text{integer } m$$

证明：对于 m 归纳。

- （5.19）**结论**

$$\sum_{k\leq m}\binom{m+r}{k}x^k y^{m-k}=\sum_{k\leq m}\binom{-r}{k}(-x)^k(x+y)^{m-k},\quad \text{integer } m$$

证明：寻找递推式并且归纳（p166-167）。

推论（5.20）（二项式系数，2的次幂）

$$\sum_{k\leq m}\binom{m+k}{k}2^{-k}=2^m$$

证明：在 5.19 中令 $r=m+1,x=1,y=1$ 化简即可（需要利用二项式系数的对称性）（p167）。

- （5.21）**二项式系数乘积**（常用于对 m 求和时化简）

$$\binom{r}{m}\binom{m}{k}=\binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k},\quad \text{integer } m,k$$

证明：可以先说明整数 r 的正确性，实数 r 也可以按照定义说明。

- **三项式系数与三项式定理**

$$(x+y+z)^n=\sum_{\substack{0\leq a,b,c\leq n\\ a+b+c=n}}\binom{a+b+c}{a,b,c}x^a y^b z^c$$

其中，三项式系数 $\binom{a+b+c}{a,b,c}$ 定义为

$$\binom{a+b+c}{a,b,c}=\frac{(a+b+c)!}{a!b!c!}=\binom{a+b+c}{b+c}\binom{b+c}{c}$$

推广：n 项式系数与 n 项式定理。

$$\begin{aligned}\binom{a_1+a_2+\cdots+a_m}{a_1,a_2,\cdots,a_m}&=\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_m)!}{a_1!a_2!\cdots a_m!}\\&=\binom{a_1+a_2+\cdots+a_m}{a_2+a_3+\cdots+a_m}\binom{a_2+a_3+\cdots+a_m}{a_3+a_4+\cdots+a_m}\cdots\binom{a_{m-1}+a_m}{a_{m-1}}\end{aligned}$$

- **二项式系数乘积求和表**（Table 169， p169）

Table 169 Sums of products of binomial coefficients.		
$$\sum_k \binom{r}{m+k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{m+n},$$	integers m,n.	(5.22)
$$\sum_k \binom{l}{m+k}\binom{s}{n+k} = \binom{l+s}{l-m+n},$$	integer $l \geqslant 0$, integers m,n.	(5.23)
$$\sum_k \binom{l}{m+k}\binom{s+k}{n}(-1)^k = (-1)^{l+m}\binom{s-m}{n-l},$$	integer $l \geqslant 0$, integers m,n.	(5.24)
$$\sum_{k \leqslant l} \binom{l-k}{m}\binom{s}{k-n}(-1)^k = (-1)^{l+m}\binom{s-m-1}{l-m-n},$$	integers $l,m,n \geqslant 0$.	(5.25)
$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant l} \binom{l-k}{m}\binom{q+k}{n} = \binom{l+q+1}{m+n+1},$$	integers $l,m \geqslant 0$, integers $n \geqslant q \geqslant 0$.	(5.26)

其中，（5.22）被称为范德蒙德卷积 (Vandermonde's convolution)；

（5.23）的证明可以通过（5.14）与（5.22）结合得到；

（5.24）可以直接利用对 l 归纳证明（p170）；

- **三个二项式系数的乘积求和**（5.28，5.29）

$$\sum_k \binom{m-r+s}{k}\binom{n+r-s}{n-k}\binom{r+k}{m+n} = \binom{r}{m}\binom{s}{n}, \quad \text{integer } m,n \geq 0$$

$$\sum_k \binom{a+b}{a+k}\binom{b+c}{b+k}\binom{c+a}{c+k}(-1)^k = \frac{(a+b+c)!}{a!b!c!} = \binom{a+b+c}{a,b,c}, \quad \text{integer } a,b,c \geq 0$$

类似的，也有（5.30）

$$\sum_k \binom{a+b}{a+k}\binom{b+a}{b+k}(-1)^k = \frac{(a+b)!}{a!b!} = \binom{a+b}{a}, \quad \text{integer } a,b \geq 0$$

- **其他复杂的二项式系数求和式**（5.31，5.32）见书 p171-172。

【重要】 10个最重要的二项式系数公式（Table 174）

Table 174 The top ten binomial coefficient identities.

$\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$,	integers $n \geqslant k \geqslant 0$.	*factorial expansion*
$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,	integer $n \geqslant 0$, integer k.	*symmetry*
$\binom{r}{k} = \dfrac{r}{k}\binom{r-1}{k-1}$,	integer $k \neq 0$.	*absorption/extraction*
$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}$,	integer k.	*addition/induction*
$\binom{r}{k} = (-1)^k \binom{k-r-1}{k}$,	integer k.	*upper negation*
$\binom{r}{m}\binom{m}{k} = \binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}$,	integers m, k.	*trinomial revision*
$\sum_k \binom{r}{k} x^k y^{r-k} = (x+y)^r$,	integer $r \geqslant 0$, or $\lvert x/y \rvert < 1$.	*binomial theorem*
$\sum_{k \leqslant n} \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$,	integer n.	*parallel summation*
$\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$,	integers $m, n \geqslant 0$.	*upper summation*
$\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$,	integer n.	*Vandermonde convolution*

几个小技巧

- 熟练掌握 Table 174 的公式;
- 利用 trinomial revision 使得求和变量仅出现一次（p173，problem 1）；
- 利用 absorption 吸收二项式系数乘以的变量（p175，problem 2）；
- 利用小数据尝试找到 pattern，从而利用归纳解决（p178，problem 3）；
- 变量替换，寻找更通用的解（p178，problem 3）；
- 有时候可以化成两个二项式系数相乘，利用 Table 169 内容化简（p180，problem 4）；
- 寻找合适的吸收对象（以适应公式需求）（p181，problem 5）；
- 综合技巧（p181-185，problem 6-8）。

重要技巧

- **复制公式**（5.34）

$$r^{\underline{k}}\left(r-\frac{1}{2}\right)^{\underline{k}} = \frac{(2r)^{\underline{2k}}}{2^{2k}}, \quad \text{integer } k \geq 0$$

推论（5.35）

$$\binom{r}{k}\binom{r-1/2}{k} = \frac{1}{2^{2k}}\binom{2r}{2k}\binom{2k}{k}, \quad \text{integer } k$$

推论（5.36）（化简 1/2）

$$\binom{n-1/2}{n} = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}, \quad \text{integer } n$$

推论（5.37）（化简 1/2）

$$\binom{-1/2}{n} = \left(-\frac{1}{4}\right)^n \binom{2n}{n}, \quad \text{integer } n$$

推论（5.38）

$$\sum_k \binom{n}{2k}\binom{2k}{k}2^{-2k} = \binom{n-1/2}{\lfloor n/2 \rfloor}$$

重要推论（5.39），中间元素公式

$$\sum_k \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = 4^n$$

证明：利用范德蒙德卷积（5.22），再利用（5.37）即可。

- **【重要！！！】高阶离散导数**（5.40）

$$\Delta^n f(x) = \sum_k \binom{n}{k}(-1)^{n-k} f(x+k)$$

证明：归纳。

也可以利用算子 E 来表示为

$$\Delta^n = (E-1)^n = \sum_k \binom{n}{k} E^k (-1)^{n-k}$$

多项式表示为二项式系数与常数乘积的和（p189，牛顿序列）

牛顿序列的 n 次项系数 c_n 与实际多项式的 n 次项系数 a_n 有如下关系：$c_n = n!a^n$ （其中 n 为多项式次数）

$$f(x) = f(0)\binom{x}{0} + \Delta f(0)\binom{x}{1} + \Delta^2 f(0)\binom{x}{2} + \cdots$$

可以看作离散形式的泰勒公式。

任意数的阶乘（p192，利用牛顿序列与 $\ln x!$ 的展开推导）

- **反演**（5.48）

$$g(n) = \sum_k \binom{n}{k}(-1)^k f(k) \Longleftrightarrow f(n) = \sum_k \binom{n}{k}(-1)^k g(k)$$

证明：代入，利用 trinomial revision 化简以及（5.12）推论2。这里简单描述一下（5.12）推论2：

$$\sum_k (-1)^k \binom{n}{k} = 0^n = [n=0]$$

错排问题与阶乘：错排问题 D_n 与阶乘有如下关系（考虑 n 个人的所有排列）

$$n! = \sum_k \binom{n}{k} D_k$$

根据反演，有

$$D_n = (-1)^n \sum_k \binom{n}{k}(-1)^k k! = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

继续化简（p195），有

$$D_n = \left\lfloor \frac{n!}{e} + \frac{1}{2} \right\rfloor + [n=0]$$

当然，错排问题也有递推式，可以根据通项来推导：

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$$

生成函数

- **范德蒙德卷积推导**：生成函数 $(1+z)^r$ 与 $(1+z)^s$ 相乘，得到 $(1+z)^{r+s}$，写出系数对应的卷积形式即为范德蒙德卷积。
- 利用生成函数求解二项式系数问题，常用 $(1+z)^m$ 类函数。如下（5.56），（5.57）：

$$\frac{1}{(1-z)^{n+1}} = \sum_{k\ge 0}\binom{n+k}{n} z^k$$
$$\frac{z^n}{(1-z)^{n+1}} = \sum_{k\ge 0}\binom{k}{n} z^k$$

- **错排问题的指数型生成函数** $D(z)$

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{D_{n-k}}{(n-k)!}$$

  于是，

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n\ge 0} z^n = \sum_{n\ge 0}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{D_{n-k}}{(n-k)!}z^n = D(z)e^z \quad \Longrightarrow \quad D(z) = \frac{1}{1-z}e^{-z}$$

  其中，$D(z) = \sum_{n\ge 0}\frac{D_n}{n!}z^n$ 为指数型生成函数。
- **普遍二项式序列** $\mathscr{B}_t(z)$ 与**普遍指数序列** $\mathscr{E}(z)$（5.58）

$$\mathscr{B}_t(z) = \sum_{k\ge 0}(tk)^{\underline{k-1}}\frac{z^k}{k!}$$
$$\mathscr{E}_t(z) = \sum_{k\ge 0}(tk+1)^{k-1}\frac{z^k}{k!}$$

  一些基本性质（5.59）

$$\mathscr{B}_t^{1-t}(z) - \mathscr{B}_t^{-t}(z) = z$$
$$\mathscr{E}_t^{-t}(z)\ln\mathscr{E}_t(z) = z$$

  令 $t=0$ 可以得到 $\mathscr{B}_0(z) = 1+z$ 和 $\mathscr{E}_0(z) = e^z$。

  令 $t=1$ 可以得到 $\mathscr{B}_1(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{k\ge 0} z^k$；$\mathscr{E}(t) = \mathscr{E}_1(z) = \sum_{k\ge 0}(k+1)^{k-1}\frac{z^k}{k!}$ 满足（5.67）：

$$\mathscr{E}(z) = e^{z\mathscr{E}(z)}$$

  一些其他性质（5.60）与（5.61）

$$\mathscr{B}_t^r(z) = \sum_{k\ge 0}\binom{tk+r}{k}\frac{r}{tk+r}z^k$$
$$\mathscr{E}_t^r(z) = \sum_{k\ge 0} r\frac{(tk+r)^{k-1}}{k!}z^k$$
$$\frac{\mathscr{B}_t^r(z)}{1-t+t\mathscr{B}_t^{-1}(z)} = \sum_{k\ge 0}\binom{tk+r}{k}z^k$$
$$\frac{\mathscr{E}_t^r(z)}{1-zt\mathscr{E}_t^t(z)} = \sum_{k\ge 0}\frac{(tk+r)^k}{k!}z^k$$

  普遍卷积性质（Table 202）注意条件为 $n\ge 0$！

Table 202 General convolution identities, valid for integer $n \geqslant 0$.

$$\sum_k \binom{tk+r}{k}\binom{tn-tk+s}{n-k}\frac{r}{tk+r} = \binom{tn+r+s}{n}. \tag{5.62}$$

$$\sum_k \binom{tk+r}{k}\binom{tn-tk+s}{n-k}\frac{r}{tk+r}\cdot\frac{s}{tn-tk+s} = \binom{tn+r+s}{n}\frac{r+s}{tn+r+s}. \tag{5.63}$$

$$\sum_k \binom{n}{k}(tk+r)^k(tn-tk+s)^{n-k}\frac{r}{tk+r} = (tn+r+s)^n. \tag{5.64}$$

$$\sum_k \binom{n}{k}(tk+r)^k(tn-tk+s)^{n-k}\frac{r}{tk+r}\cdot\frac{s}{tn-tk+s} = (tn+r+s)^n\frac{r+s}{tn+r+s}. \tag{5.65}$$

一些特殊值（Table 203） （5.68） ~ （5.73）

$$\mathcal{B}_2(z) = \sum_k \binom{2k}{k}\frac{z^k}{1+k} = \sum_k \binom{2k+1}{k}\frac{z^k}{1+2k} = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}. \tag{5.68}$$

$$\mathcal{B}_{-1}(z) = \sum_k \binom{1-k}{k}\frac{z^k}{1-k} = \sum_k \binom{2k-1}{k}\frac{(-z)^k}{1-2k} = \frac{1+\sqrt{1+4z}}{2}. \tag{5.69}$$

$$\mathcal{B}_2(z)^r = \sum_k \binom{2k+r}{k}\frac{r}{2k+r}z^k. \tag{5.70}$$

$$\mathcal{B}_{-1}(z)^r = \sum_k \binom{r-k}{k}\frac{r}{r-k}z^k. \tag{5.71}$$

$$\frac{\mathcal{B}_2(z)^r}{\sqrt{1-4z}} = \sum_k \binom{2k+r}{k}z^k. \tag{5.72}$$

$$\frac{\mathcal{B}_{-1}(z)^{r+1}}{\sqrt{1+4z}} = \sum_k \binom{r-k}{k}z^k. \tag{5.73}$$

将（5.72）与（5.73）联立可以推导出（5.74），推导过程见p203-204；同理，（5.70）与（5.71）结合可以推导出（5.75）

$$\sum_{k\leqslant n} \binom{n-k}{k}z^k = \frac{1}{\sqrt{1+4z}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{1+4z}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{1+4z}}{2}\right)^{n+1}\right), \quad \text{integer } n \geqslant 0. \tag{5.74}$$

$$\sum_{k<n} \binom{n-k}{k}\frac{n}{n-k}z^k = \left(\frac{1+\sqrt{1+4z}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{1+4z}}{2}\right)^n, \quad \text{integer } n > 0. \tag{5.75}$$

6 Special Numbers

6.1 Sterling Numbers

第二类斯特林数 ${n \brace k}$ 将 n 个数分成 k 个非空集合的方案数（考虑最后一个元素的放置方法）。

$$
\begin{aligned}
{0 \brace 0} &= 1 \\
{n \brace k} &= k{n-1 \brace k} + {n-1 \brace k-1}, \qquad \text{integer } n > 0
\end{aligned}
$$

- 特殊值（解释参考p258）：

$$
\begin{aligned}
{n \brace 0} &= [n = 0] \\
{n \brace 1} &= [n > 0] \\
{n \brace 2} &= 2^{n-1} - 1 \\
{n \brace n-1} &= \binom{n}{2} \\
{n \brace n} &= 1
\end{aligned}
$$

第一类斯特林数 ${n \brack m}$ 将 n 个数分成 k 个环的方案数。

$$
\begin{aligned}
{0 \brack 0} &= 1 \\
{n \brack k} &= (n-1){n-1 \brack k} + {n-1 \brack k-1}, \qquad \text{integer } n > 0
\end{aligned}
$$

- 特殊值（解释参考p260）：

$$
\begin{aligned}
{n \brack 0} &= [n = 0] \\
{n \brack 1} &= (n-1)! \\
{n \brack 2} &= (n-1)!H_{n-1}[n > 0] \\
{n \brack n-1} &= \binom{n}{2} \\
{n \brack n} &= 1
\end{aligned}
$$

- 与第二类斯特林数的基本性质

$$
{n \brack k} \geq {n \brace k}
$$

- **重要性质**（6.9）（与排列一一对应）

$$
\sum_{k=0}^{n} {n \brack k} = n!
$$

斯特林数与幂次的联系

- (6.10)

$$x^n = \sum_k {n \brace k} x^{\underline{k}}, \quad \text{integer } n \geq 0$$

- (6.11)

$$x^{\overline{n}} = \sum_k {n \brack k} x^k, \quad \text{integer } n \geq 0$$

- (6.12)

$$x^n = \sum_k {n \brace k} (-1)^{n-k} x^{\overline{k}}, \quad \text{integer } n \geq 0$$

- (6.13)

$$x^{\underline{n}} = \sum_k {n \brack k} (-1)^{n-k} x^k, \quad \text{integer } n \geq 0$$

- (6.14)

$$x^{\underline{n}} = (-1)^n (-x)^{\overline{n}}$$

斯特林数基本公式（Table 264）

Table 264 Basic Stirling number identities, for integer $n \geqslant 0$.

Recurrences:

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}.$$

$$\left[{n \atop k} \right] = (n-1) \left[{n-1 \atop k} \right] + \left[{n-1 \atop k-1} \right].$$

Special values:

$$\left\{ {n \atop 0} \right\} = \left[{n \atop 0} \right] = [n=0].$$

$$\left\{ {n \atop 1} \right\} = [n>0]; \qquad \left[{n \atop 1} \right] = (n-1)!\,[n>0].$$

$$\left\{ {n \atop 2} \right\} = (2^{n-1}-1)[n>0]; \qquad \left[{n \atop 2} \right] = (n-1)!\,H_{n-1}\,[n>0].$$

$$\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \left[{n \atop n-1} \right] = \binom{n}{2}.$$

$$\left\{ {n \atop n} \right\} = \left[{n \atop n} \right] = \binom{n}{n} = 1.$$

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left[{n \atop k} \right] = \binom{n}{k} = 0, \qquad \text{if } k > n.$$

Converting between powers:

$$x^n = \sum_k \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}} = \sum_k \left\{ {n \atop k} \right\} (-1)^{n-k} x^{\overline{k}}.$$

$$x^{\underline{n}} = \sum_k \left[{n \atop k} \right] (-1)^{n-k} x^k;$$

$$x^{\overline{n}} = \sum_k \left[{n \atop k} \right] x^k.$$

Inversion formulas:

$$\sum_k \left[{n \atop k} \right] \left\{ {k \atop m} \right\} (-1)^{n-k} = [m=n];$$

$$\sum_k \left\{ {n \atop k} \right\} \left[{k \atop m} \right] (-1)^{n-k} = [m=n].$$

斯特林数附加公式（Table 265）

Table 265 Additional Stirling number identities, for integers $l, m, n \geqslant 0$.

$$ {n+1 \brace m+1} = \sum_k \binom{n}{k} {k \brace m}. \tag{6.15} $$

$$ {n+1 \brack m+1} = \sum_k {n \brack k} \binom{k}{m}. \tag{6.16} $$

$$ {n \brace m} = \sum_k \binom{n}{k} {k+1 \brace m+1} (-1)^{n-k}. \tag{6.17} $$

$$ {n \brack m} = \sum_k {n+1 \brack k+1} \binom{k}{m} (-1)^{m-k}. \tag{6.18} $$

$$ m! {n \brace m} = \sum_k \binom{m}{k} k^n (-1)^{m-k}. \tag{6.19} $$

$$ {n+1 \brace m+1} = \sum_{k=0}^{n} {k \brace m} (m+1)^{n-k}. \tag{6.20} $$

$$ {n+1 \brack m+1} = \sum_{k=0}^{n} {k \brack m} n^{\underline{n-k}} = n! \sum_{k=0}^{n} {k \brack m} / k!. \tag{6.21} $$

$$ {m+n+1 \brace m} = \sum_{k=0}^{m} k {n+k \brace k}. \tag{6.22} $$

$$ {m+n+1 \brack m} = \sum_{k=0}^{m} (n+k) {n+k \brack k}. \tag{6.23} $$

$$ \binom{n}{m} = \sum_k {n+1 \brace k+1} {k \brack m} (-1)^{m-k}. \tag{6.24} $$

$$ n^{\underline{n-m}} [n \geqslant m] = \sum_k {n+1 \brack k+1} {k \brace m} (-1)^{m-k}. \tag{6.25} $$

$$ {n \brace n-m} = \sum_k \binom{m-n}{m+k} \binom{m+n}{n+k} {m+k \brack k}. \tag{6.26} $$

$$ {n \brack n-m} = \sum_k \binom{m-n}{m+k} \binom{m+n}{n+k} {m+k \brace k}. \tag{6.27} $$

$$ {n \brace l+m} \binom{l+m}{l} = \sum_k {k \brace l} {n-k \brace m} \binom{n}{k}. \tag{6.28} $$

$$ {n \brack l+m} \binom{l+m}{l} = \sum_k {k \brack l} {n-k \brack m} \binom{n}{k}. \tag{6.29} $$

重要性质：利用（6.11）与（6.12）可得（6.31）

$$ \sum_k {n \brace k} {k \brack m} (-1)^{n-k} = [m=n], \quad \text{integer } m, n \ge 0 $$

同理，也有

$$ \sum_k {n \brack k} {k \brace m} (-1)^{n-k} = [m=n], \quad \text{integer } m, n \ge 0 $$

推广斯特林数：规定 ${0 \brace k} = {0 \brack k} = [k=0]$，${n \brace 0} = {n \brack 0} = [n=0]$，则可以得到负数的斯特林数，可以参考 Table 267 （p267），而且有一个重要性质：

$$ {n \brack k} = {-k \brace -n}, \quad \text{integer } k, n $$

6.2 Eulerian Numbers

欧拉数 $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ n 个数的排列有 k 个"上升"相邻段的个数。

- **基本性质**（6.34）：由于 k 个上升段即为 $(n-1-k)$ 个下降段，故有

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \left\langle {n \atop n-1-k} \right\rangle$$

- **递推式**（6.35）与（6.36）：考虑元素 n 的插入位置，有

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = (k+1)\left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle + (n-k)\left\langle {n-1 \atop k-1} \right\rangle, \quad \text{integer } n > 0$$

$$\left\langle {0 \atop k} \right\rangle = [k=0], \quad \text{integer } k$$

- **与斯特林数的联系**（6.37）

$$x^n = \sum_k \left\langle {n \atop k} \right\rangle \binom{x+k}{n}, \quad \text{integer } n \geq 0$$

- **其他联系**（6.38）~（6.40）

$$\left\langle {n \atop m} \right\rangle = \sum_{k=0}^{m} \binom{n+1}{k}(m+1-k)^n(-1)^k\,; \tag{6.38}$$

$$m!\left\{ {n \atop m} \right\} = \sum_k \left\langle {n \atop k} \right\rangle \binom{k}{n-m}; \tag{6.39}$$

$$\left\langle {n \atop m} \right\rangle = \sum_k \left\{ {n \atop k} \right\} \binom{n-k}{m}(-1)^{n-k-m}\,k!\,. \tag{6.40}$$

- 一些特殊值：p269。

第二类欧拉数：从可重集合 $\{1,1,2,2,\cdots,n,n\}$ 中选取元素进行排列，使得任意一个数字 i 的两次出现之间的所有数都大于 i，这样的排列数目。

- **递推式**

$$\left\langle\!\left\langle {n \atop k} \right\rangle\!\right\rangle = (k+1)\left\langle\!\left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle\!\right\rangle + (2n-1-k)\left\langle\!\left\langle {n-1 \atop k-1} \right\rangle\!\right\rangle. \tag{6.41}$$

- **基本性质**

$$\sum_k \left\langle\!\left\langle {n \atop k} \right\rangle\!\right\rangle = (2n-1)(2n-3)\ldots(1) = \frac{(2n)^{\underline{n}}}{2^n} \tag{6.42}$$

- **与斯特林数的关系**

$$\left\{ {x \atop x-n} \right\} = \sum_k \left\langle\!\left\langle {n \atop k} \right\rangle\!\right\rangle \binom{x+n-1-k}{2n}, \quad \text{integer } n \geqslant 0; \tag{6.43}$$

$$\left[{x \atop x-n} \right] = \sum_k \left\langle\!\left\langle {n \atop k} \right\rangle\!\right\rangle \binom{x+k}{2n}, \quad \text{integer } n \geqslant 0. \tag{6.44}$$

斯特林多项式 $\sigma_n(x)$

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{x(x-1)\cdots(x-n)}\left[{x \atop x-n} \right]$$

斯特林卷积公式（Table 272, p272）

Table 272 Stirling convolution formulas.

$$rs\sum_{k=0}^{n}\sigma_k(r+tk)\,\sigma_{n-k}(s+t(n-k)) = (r+s)\sigma_n(r+s+tn) \tag{6.46}$$

$$s\sum_{k=0}^{n}k\sigma_k(r+tk)\,\sigma_{n-k}(s+t(n-k)) = n\sigma_n(r+s+tn) \tag{6.47}$$

$$\left\{ {n \atop m} \right\} = (-1)^{n-m+1}\frac{n!}{(m-1)!}\sigma_{n-m}(-m) \tag{6.48}$$

$$\left[{n \atop m} \right] = \frac{n!}{(m-1)!}\sigma_{n-m}(n) \tag{6.49}$$

It turns out that these polynomials satisfy two very pretty identities:

$$\left(\frac{ze^z}{e^z-1}\right)^x = x\sum_{n\geq 0}\sigma_n(x)\,z^n\,; \tag{6.50}$$

$$\left(\frac{1}{z}\ln\frac{1}{1-z}\right)^x = x\sum_{n\geq 0}\sigma_n(x+n)\,z^n\,. \tag{6.51}$$

And in general, if $\mathcal{S}_t(z)$ is the power series that satisfies

$$\ln(1-z\mathcal{S}_t(z)^{t-1}) = -z\mathcal{S}_t(z)^t\,, \tag{6.52}$$

then

$$\mathcal{S}_t(z)^x = x\sum_{n\geq 0}\sigma_n(x+tn)\,z^n\,. \tag{6.53}$$

6.3 Harmonic Numbers

调和级数 H_n

$$H_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}, \quad \text{integer } n\geq 0$$

- 推导（p273-274）
- **与斯特林数的关系**（6.58）

$$\left[{n+1 \atop 2} \right] = n!H_n$$

- 调和级数的大致范围（6.59）$\left(\frac{\lfloor \lg n\rfloor+1}{2}, \lfloor \lg n\rfloor+1\right]$，或（6.60）$(\ln n, \ln n+1)$。
- **调和级数变种**（6.61）

$$H_n^{(r)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^r}$$

黎曼 Zeta 函数（6.62）

$$\zeta(r) = H_\infty^{(r)} = \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^r}$$

- **调和级数的极限**（6.65）与欧拉常数（6.64）

$$\lim_{n\to\infty}(H_n-\ln n) = \gamma = 0.5772156649\cdots$$

根据下式推得（6.63）

$$\ln\left(\frac{k}{k-1}\right) = \frac{1}{k}+\frac{1}{2k^2}+\frac{1}{3k^3}+\cdots$$

6.4 Harmonic Summation

在第二章中已经证明（6.67），（6.68）：

$$\sum_{0\le k<n} H_k = nH_n - n$$

$$\sum_{0\le k<n} kH_k = \frac{n(n-1)}{2}H_n - \frac{n(n-1)}{4}$$

几个技巧和方法:

- 分部离散积分（由于 H_n 求离散导得到 $\frac{1}{n+1}$；因此可以用来分部积分消去 H_n）（p279）；
- 展开定义（p280）；
- 与二项式系数中的（5.40）结合（p280-282）。

6.5 Bernoulli Numbers

伯努利数

- **定义**：假如有和式（6.77）

  $$S_m(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k^m = \sum_0^n x^m\,\delta x$$

  且可以表示为如下形式（6.78）：

  $$S_m(n) = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}B_k n^{m+1-k}$$

  那么，B_k 即为伯努利数；
- **递归定义**（6.79）

  $$\sum_{j=0}^{m}\binom{m+1}{j}B_j = [m=0], \quad \text{for all } m\ge 0$$

- **伯努利数的指数型生成函数**（6.81）

  $$\frac{z}{e^z-1} = \sum_{n\ge 0} B_n \frac{z^n}{n!}$$

- **与黎曼 zeta 函数的关系**（6.89）

  $$\zeta(2n) = (-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}\pi^{2n}B_{2n}}{(2n)!}$$

  特别地，

  $$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

- **与斯特林多项式的关系**（6.100）

  $$\frac{B_m}{m!} = -m\sigma_m(0)$$

6.6 Fibonacci Numbers

斐波那契数列

- 递推式：$F_0=0; F_1=1; F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\ (n>1)$；
- **Cassini恒等式**（6.103）

  $$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \quad (n>0)$$

- 负半轴的定义（6.107）：

$$F_{-n} = (-1)^{n-1} F_n, \quad \text{integer } n$$

- **重要性质**（6.108）

$$F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n$$

  推论： F_{kn} 是 F_n 的倍数（利用 6.108 + 归纳）。

  重要推论（6.111）

$$\gcd(F_m, F_n) = F_{\gcd(m,n)}$$

  重要推论：如果 F_m 是 F_n 的倍数，那么 m 是 n 的倍数（利用 6.111，p294）。

- **Matijasevich 引理**：若 $n > 2$，则 F_m 是 F_n^2 的倍数当且仅当 m 是 nF_n 的倍数（证明见 p295）。
- **Zeckendorf 定理** 以及 **斐波那契表示**：任意正整数可以唯一的用斐波那契数列的和表示出来（不包含相邻的斐波那契数）。
- **斐波那契数列的生成函数**（6.117）

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} F_n z^n = \frac{z}{1 - z - z^2}$$

  及其通项（6.122）与（6.123）

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - \phi z} - \frac{1}{1 - \hat{\phi} z} \right)$$

  其中，$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$。

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi^n - \hat{\phi}^n)$$

  此外，根据（6.124），

$$F_n = \left\lfloor \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} \text{ rounded to the nearest integer}$$

  还有（6.125）

$$F_{n+1} = \phi F_n + \hat{\phi}^n$$

- **应用**：1 mile 约等于 φ km，所以即可利用斐波那契表示进行进制转化。

7 Generating Functions

经典问题 （多米诺骨牌）用 2×1 的多米诺骨牌填充 $2\times n$ 的棋盘有多少种方案？

- 递推式同斐波那契数列，结果 $T_n=F_{n+1}$；
- 生成函数：

$$T=\frac{1}{1-z-z^2}$$

经典问题变式（多米诺骨牌+）用 2×1 的多米诺骨牌填充 $3\times n$ 的棋盘有多少种方案？

- 考虑多情况同时递推（见书 p325 - 327）；
- 生成函数：

$$U=\frac{1-z^3}{1-4z^3+z^6}$$

硬币找零问题（经典生成函数解法）

- 生成函数：

$$C=\frac{1}{1-z}\frac{1}{1-z^5}\frac{1}{1-z^{10}}\frac{1}{1-z^{25}}\frac{1}{1-z^{50}}$$

生成函数 具有如下形式（7.12）：

$$G(z)=g_0+g_1z+g_2z^2+\cdots=\sum_{n\geq0}g_nz^n$$

生成函数的性质

- （7.13）线性性：

$$\alpha F(z)+\beta G(z)=\sum_n(\alpha f_n+\beta g_n)z^n$$

- （7.14）

$$z^mG(z)=\sum_n g_{n-m}z^n,\quad \text{integer } m\geq0$$

- （7.15）

$$\frac{G(z)-g_0-g_1z-\cdots-g_{m-1}z^{m-1}}{z^m}=\sum_{n\geq0}g_{n+m}z^n$$

- （7.16）

$$G(cz)=\sum_n c^ng_nz^n$$

- （7.17）求导：

$$G'(z)=\sum_n(n+1)g_{n+1}z^n$$

- （7.18）求导：

$$zG'(z)=\sum_n ng_nz^n$$

- （7.19）积分：

$$\int_0^z G(t)dt=\sum_{n\geq1}\frac{1}{n}g_{n-1}z^n$$

- （7.20）卷积：

$$F(z)G(z)=\sum_n\left(\sum_k f_k g_{n-k}\right)z^n$$

- （7.21）前缀和：

$$\frac{1}{1-z}G(z)=\sum_n\left(\sum_{k\le n} g_k\right)z^n$$

序列对应的生成函数（Table 335）

Table 335 Simple sequences and their generating functions.

sequence	generating function	closed form
$\langle 1,0,0,0,0,0,\ldots\rangle$	$\sum_{n\geqslant 0}[n=0]\,z^n$	1
$\langle 0,\ldots,0,1,0,0,\ldots\rangle$	$\sum_{n\geqslant 0}[n=m]\,z^n$	z^m
$\langle 1,1,1,1,1,1,\ldots\rangle$	$\sum_{n\geqslant 0} z^n$	$\frac{1}{1-z}$
$\langle 1,-1,1,-1,1,-1,\ldots\rangle$	$\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n z^n$	$\frac{1}{1+z}$
$\langle 1,0,1,0,1,0,\ldots\rangle$	$\sum_{n\geqslant 0}[2\backslash n]\,z^n$	$\frac{1}{1-z^2}$
$\langle 1,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0,1,0,\ldots\rangle$	$\sum_{n\geqslant 0}[m\backslash n]\,z^n$	$\frac{1}{1-z^m}$
$\langle 1,2,3,4,5,6,\ldots\rangle$	$\sum_{n\geqslant 0}(n+1)\,z^n$	$\frac{1}{(1-z)^2}$
$\langle 1,2,4,8,16,32,\ldots\rangle$	$\sum_{n\geqslant 0} 2^n z^n$	$\frac{1}{1-2z}$
$\langle 1,4,6,4,1,0,0,\ldots\rangle$	$\sum_{n\geqslant 0}\binom{4}{n} z^n$	$(1+z)^4$
$\langle 1,c,\binom{c}{2},\binom{c}{3},\ldots\rangle$	$\sum_{n\geqslant 0}\binom{c}{n} z^n$	$(1+z)^c$
$\left\langle 1,c,\binom{c+1}{2},\binom{c+2}{3},\ldots\right\rangle$	$\sum_{n\geqslant 0}\binom{c+n-1}{n} z^n$	$\frac{1}{(1-z)^c}$
$\langle 1,c,c^2,c^3,\ldots\rangle$	$\sum_{n\geqslant 0} c^n z^n$	$\frac{1}{1-cz}$
$\left\langle 1,\binom{m+1}{m},\binom{m+2}{m},\binom{m+3}{m},\ldots\right\rangle$	$\sum_{n\geqslant 0}\binom{m+n}{m} z^n$	$\frac{1}{(1-z)^{m+1}}$
$\langle 0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots\rangle$	$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n} z^n$	$\ln\frac{1}{1-z}$
$\langle 0,1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\ldots\rangle$	$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$	$\ln(1+z)$
$\langle 1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{24},\frac{1}{120},\ldots\rangle$	$\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!} z^n$	e^z

特殊的生成函数

- 仅包含偶数项（7.22）：

$$\frac{G(z)+G(-z)}{2}=\sum_n g_{2n}z^{2n}$$

- 仅包含奇数项（7.23）：

$$\frac{G(z)-G(-z)}{2}=\sum_n g_{2n+1}z^{2n+1}$$

- **斐波那契级数的偶数项组成的数列的生成函数**（7.24）

$$\sum_n F_{2n} z^n = \frac{z}{1-3z+z^2}$$

特殊的生成函数（Table 351）

Table 351 Generating functions for special numbers.

$$\frac{1}{(1-z)^{m+1}} \ln \frac{1}{1-z} = \sum_{n\geqslant 0} (H_{m+n} - H_m) \binom{m+n}{n} z^n \tag{7.43}$$

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n\geqslant 0} B_n \frac{z^n}{n!} \tag{7.44}$$

$$\frac{F_m z}{1-(F_{m-1}+F_{m+1})z+(-1)^m z^2} = \sum_{n\geqslant 0} F_{mn} z^n \tag{7.45}$$

$$\sum_k {m \brace k} \frac{k!\, z^k}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{n\geqslant 0} n^m z^n \tag{7.46}$$

$$(z^{-1})^{\overline{-m}} = \frac{z^m}{(1-z)(1-2z)\ldots(1-mz)} = \sum_{n\geqslant 0} {n \brace m} z^n \tag{7.47}$$

$$z^{\overline{m}} = z(z+1)\ldots(z+m-1) = \sum_{n\geqslant 0} \left[{m \atop n}\right] z^n \tag{7.48}$$

$$(e^z - 1)^m = m! \sum_{n\geqslant 0} {n \brace m} \frac{z^n}{n!} \tag{7.49}$$

$$\left(\ln \frac{1}{1-z}\right)^m = m! \sum_{n\geqslant 0} \left[{n \atop m}\right] \frac{z^n}{n!} \tag{7.50}$$

$$\left(\frac{z}{\ln(1+z)}\right)^m = \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!} {m \brace m-n} \Big/ \binom{m-1}{n} \tag{7.51}$$

$$\left(\frac{z}{1-e^{-z}}\right)^m = \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!} \left[{m \atop m-n}\right] \Big/ \binom{m-1}{n} \tag{7.52}$$

$$e^{z+wz} = \sum_{m,n\geqslant 0} \binom{n}{m} w^m \frac{z^n}{n!} \tag{7.53}$$

$$e^{w(e^z-1)} = \sum_{m,n\geqslant 0} {n \brace m} w^m \frac{z^n}{n!} \tag{7.54}$$

$$\frac{1}{(1-z)^w} = \sum_{m,n\geqslant 0} \left[{n \atop m}\right] w^m \frac{z^n}{n!} \tag{7.55}$$

$$\frac{1-w}{e^{(w-1)z} - w} = \sum_{m,n\geqslant 0} \left\langle{n \atop m}\right\rangle w^m \frac{z^n}{n!} \tag{7.56}$$

- （7.43）的推导可以对下式两边对 x 求导得到：

$$\frac{1}{(1-z)^{x+1}} = \sum_n \binom{x+n}{n} z^n$$

  然后再令 $x=m$。（具体见p352）；
- 此外，令（7.43）的 $m=1$，得到调和数列的生成函数（7.57）

$$\frac{1}{1-z} \ln \frac{1}{1-z} = \sum_n H_n z^n$$

解生成函数的一般方法

- 将递推式改写成一般形式；
- 带入生成函数定义；
- 化简求出生成函数的 closed form；
- 将生成函数重新展开得到数列。

对称多项式：设多项式 $Q(z)=q_0+q_1z+q_2z^2+\cdots+q_mz^m$，则其对称多项式 $Q^R(z)$ 定义如下

$$Q^R(z)=q_0z^m+q_1z^{m-1}+\cdots+q_m$$

- 如果 $Q^R(z)=q_0(z-\rho_1)(z-\rho_2)\cdots(z-\rho_m)$，那么 $Q(z)=q_0(1-\rho_1z)(1-\rho_2z)\cdots(1-\rho_mz)$；于是就可以进行生成函数的展开。

生成函数的单根展开（7.29）

$$[z^n]R(z)=a_1\rho_1^n+a_2\rho_2^n+\cdots+a_l\rho_l^n$$

其中，

$$a_k=-\frac{\rho_kP(1/\rho_k)}{Q'(1/\rho_k)}$$

重根展开 需要参考 Table 335。

多个数列的递推 全部写为生成函数的形式，相同做法。

利用技巧进行生成函数展开（7.39，example 4），找出生成函数各部分分母的公共倍数。

利用超几何数列进行展开（example 5）略。

卷积

- 多重卷积、无穷卷积（Example 3，以及作业 P10/16）。

卡特兰数

$$\begin{gathered}C_0=1\\ C_n=C_0C_{n-1}+C_1C_{n-2}+\cdots+C_{n-1}C_0,\quad \text{integer } n>0\end{gathered}$$

- 生成函数：

$$C(z)=\frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}$$

- 通项公式：

$$C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

- 其他形式：
  - n 个 +1，n 个 -1，前缀和非负的方案数；
  - Mountain range（p359）
- **m-Raney Sequence**：长度为 nm 的数列由 1 与 $1-m$ 构成，前缀和均非负，且总和为0的方案数。

  根据 Raney 引理（p360），答案为

  $$\binom{mn+1}{n}\frac{1}{mn+1}$$

  可以通过此证明（5.60）（p363-364）。

指数型生成函数 具有如下形式 （7.72）

$$\hat{G}(z)=\sum_{n\geq 0}g_n\frac{z^n}{n!}$$

指数型生成函数的性质

- （7.73）求导：

$$\hat{G}'(z) = \sum_{n\ge 0} g_{n+1}\frac{z^n}{n!}$$

- （7.74）积分：

$$\int_0^z \hat{G}(t)dt = \sum_{n\ge 1} g_{n-1}\frac{z^n}{n!}$$

- （7.75）卷积：

$$\hat{F}(z)\hat{G}(z) = \sum_n \left(\sum_k \binom{n}{k} f_k g_{n-k}\right)\frac{z^n}{n!}$$

伯努利数列进阶 考虑和式

$$S_m(n) = \sum_{0\le k<n} k^m$$

生成函数为：

$$S(z) = \sum_{m\ge 0} S_m(n) z^m$$

则经过化简得（7.77）

$$S(z) = \sum_{0\le k<n}\frac{1}{1-kz} = \frac{1}{z}(H_{z^{-1}} - H_{z^{-1}-n})$$

指数型生成函数为：

$$\hat{S}(z,n) = \sum_{m\ge 0} S_m(n)\frac{z^m}{m!}$$

则经过化简得（7.78）

$$\hat{S}(z,n) = \sum_{0\le k<n} e^{kz} = \frac{e^{nz}-1}{e^z-1}$$

于是和伯努利数列得生成函数联系在一起，得到

$$\hat{S}(z,n) = \hat{B}(z)\frac{e^{nz}-1}{z}$$

看成卷积，于是可以得到（7.79）

$$S_{m-1}(n) = \frac{1}{n}(B_m(n) - B_m(0))$$

其中，$B_m(x)$ 为伯努利多项式

$$B_m(x) = \sum_k \binom{m}{k} B_k x^{m-k}$$

从而也可以得到伯努利多项式的指数型生成函数

$$\hat{B}(z,x) = \frac{ze^{xz}}{e^z-1}$$

经典问题 n 个点完全图的生成树个数：n^{n-2}；

狄利克雷生成函数（7.86）常用于数论（由于卷积的特性）

$$\tilde{G}(z) = \sum_{n\ge 1}\frac{g_n}{n^z}$$

- 数列 $<1,1,1,\cdots>$ 的狄利克雷生成函数是黎曼 zeta 函数

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^z}=\zeta(z)$$

- **狄利克雷卷积**:

$$h_n=\sum_{d|n}f_d g_{n/d}$$

那么，$\tilde{H}(z)=\tilde{F}(z)\tilde{G}(z)$。

- **黎曼 zeta 函数的另一种表示**（7.91）

$$\zeta(z)=\prod_{p\text{ prime}}\frac{1}{1-p^{-z}}$$

- **莫比乌斯函数的狄利克雷生成函数**（7.92）

$$\tilde{\mathrm{M}}(z)=\prod_{p\text{ prime}}(1-p^{-z})=\frac{1}{\zeta(z)}$$

- **欧拉函数的狄利克雷生成函数**（7.93）

$$\tilde{\Phi}(z)=\prod_{p\text{ prime}}\frac{1-p^{-z}}{1-p^{1-z}}=\frac{\zeta(z-1)}{\zeta(z)}$$