

8. 斯勒茨基方程

斯勒茨基方程 为什么（什么条件下）需求曲线向下倾斜？

假设商品 1 的价格发生变化，从 p_1 变化为 p'_1 （假设价格下降）。

替代效应：由相对价格变化所引起的需求变化，用 Δx_1^s 表示；

收入效应：由购买力变化所引起的需求变化，用 Δx_1^m 表示。

斯勒茨基方程 (Slutsky Equation)

$$\Delta x_1 = \Delta x_1^s + \Delta x_1^m$$

假设原来的点是 A 点，先考虑替代效应达到 B 点，再考虑收入效应达到 C 点。

则上述方程反映出 $A \rightarrow C$ 的变化等于 $A \rightarrow B$ 的变化加上 $B \rightarrow C$ 的变化。

对每个点分析：

- A 点： $p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$ ，解得 $x_1^A = x_1(p, m)$ ；
- C 点： $p'_1 x_1 + p_2 x_2 = m$ ，解得 $x_1^C = x_1(p', m)$ ；
- B 点： $p'_1 x_1 + p_2 x_2 = m'$ ，其中 $m' = p'_1 x_1^A + p_2 x_2^A$ ，所以

$$m' - m = (p'_1 - p_1)x_1^A \implies \Delta m = \Delta p_1 \cdot x_1^A$$

类似的，解得 $x_1^B = x_1(p', m')$ 。

根据显示偏好原理，B 点一定在 A 点的右侧；即若价格下降，替代效应一定引起需求增加。

进一步，若商品为正常商品，则 C 点一定在 B 点右侧（由于收入增加， $m - m' > 0$ ）；故**正常商品需求曲线向下倾斜，价格下降需求增加**（需求法则）。将所有价格下降、需求增加的商品称之为普通商品；与之相对应为“吉芬商品”，价格下降，需求也下降。

- 吉芬商品一定是低档品，而且收入效应必须超过替代效应。

几种“品”的区分（正常商品、普通商品、吉芬商品、低档商品、奢侈品、必需品、中性品、厌恶品、喜好品）

- 首先，按照喜好关系分为：中性品、厌恶品、喜好品三大类；
- 喜好品中，按照收入增加对需求的关系，分为低档品、正常品两大类；
- 正常品中，分为奢侈品、必需品两大类；
- 低档品中，存在一类“吉芬商品”；
- 喜好品中，存在一类“普通品”，其可能涉及除“吉芬商品”以外的其余各类商品。

如何计算 Δx_1^s ， Δx_1^m 以及 Δx_1

【例】给定 $x_1 = 10 + \frac{m}{10p_1}$ ， $m = 120$ ， $p_1 = 3$ ， $p'_1 = 2$ 。

解 $x_1(p, m) = 14$, $x_1(p', m) = 16$;

故 $\Delta x_1 = x_1(p', m) - x_1(p, m) = 2$;

$\Delta m = \Delta p_1 \cdot x_1^A = -1 \cdot 14 = -14 \implies m' = m - 14 = 106$;

因此 $x_1(p', m') = 15.3$

从而 $\Delta x_1^s = x_1(p', m') - x_1(p, m) = 1.3$, $\Delta x_1^n = x_1(p', m) - x_1(p', m') = 0.7$ 。

【例】给定 $u = x_1 x_2$, $m = 100$, $p_1 = 3$, $p'_1 = 2$ 。

解 $x_1(p_1, m) = \frac{1}{2} \frac{m}{p_1} = \frac{50}{3}$;

$x_1(p'_1, m) = \frac{1}{2} \frac{m}{p'_1} = 25$;

$m' = m + \Delta p_1 \cdot x_1(p_1, m) = \frac{250}{3}$;

$x_1(p'_1, m') = \frac{1}{2} \frac{m'}{p'_1} = \frac{125}{6}$;

从而 $\Delta x_1^s = x_1(p'_1, m') - x_1(p_1, m) = \frac{125}{6} - \frac{50}{3} = \frac{25}{6}$

$\Delta x_1^n = x_1(p'_1, m) - x_1(p'_1, m') = 25 - \frac{125}{6} = \frac{25}{6}$

$\Delta x_1 = x_1(p'_1, m) - x_1(p_1, m) = 25 - \frac{50}{3} = \frac{25}{3}$

变动率角度看待斯勒茨基方程：在等式两端同时除以价格变化量，则

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta p_1} = \frac{\Delta x_1^s}{\Delta p_1} + \frac{\Delta x_1^n}{\Delta p_1}$$

即

$$\frac{x_1(p'_1, m) - x_1(p_1, m)}{\Delta p_1} = \frac{x_1(p'_1, m') - x_1(p_1, m)}{\Delta p_1} + \frac{x_1(p'_1, m) - x_1(p'_1, m')}{\Delta p_1}$$

根据分析过程，我们有

$$\Delta m = \Delta p_1 \cdot x_1(p_1, m)$$

于是，

$$\frac{x_1(p'_1, m) - x_1(p_1, m)}{\Delta p_1} = \frac{x_1(p'_1, m') - x_1(p_1, m)}{\Delta p_1} + \frac{x_1(p'_1, m') - x_1(p'_1, m)}{\Delta m} \cdot x_1(p_1, m)$$

即

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta p_1} = \frac{\Delta x_1^s}{\Delta p_1} - \frac{\Delta x_1^n}{\Delta m} x_1$$

等式右边，前一项一定是负的，后一项可正可负。

希克斯方程 (Hicks Equation)：首先考虑价格变动中对收入进行调整使得效用水平不变引起的需求变化，然后考虑收入增加的变化引起的需求变化。

$$\Delta x_1 = \Delta x_1^h + \Delta x_1^n$$

假设原来的点是 A 点，先考虑达到 B' 点，再考虑收入效应达到 C 点。

【例】给定 $u = x_1 x_2$, $m = 100$, $p_1 = 3$, $p'_1 = 2$ 。

$$\text{解 } u(x_1^A, x_2^A) = x_1^A x_2^A = \frac{1}{2} \frac{m}{p_1} \cdot \frac{1}{2} \frac{m}{p_2};$$

$$u(x_1^{B'}, x_2^{B'}) = x_1^{B'} x_2^{B'} = \frac{1}{2} \frac{m'}{p'_1} \cdot \frac{1}{2} \frac{m'}{p_2};$$

$$\text{由于 } u(x_1^A, x_2^A) = u(x_1^{B'}, x_2^{B'}), \text{ 故 } m' = 100\sqrt{\frac{2}{3}}。$$

$$\text{因此 } x_1^{B'} = x_1(p'_1, m') = \frac{1}{2} \frac{m'}{p'_1} = 25\sqrt{\frac{2}{3}}。$$

$$\text{从而 } \Delta x_1^h = x_1^{B'} - x_1^A = 25\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{50}{3};$$

$$\Delta x_1^n = x_1^B - x_1^{B'} = 25 - 25\sqrt{\frac{2}{3}}。$$

【例】证明：希克斯替代效用也必然为负，即价格下降，替代效应引起需求下降。

证明 在 (p_1, p_2) 下选择 (x_1^A, x_2^A) ；在 (p'_1, p'_2) 下选择 $(x_1^{B'}, x_2^{B'})$ ，且 $A \sim B'$ 。

根据显示偏好原理， $p_1 x_1^A + p_2 x_2^A \leq p_1 x_1^{B'} + p_2 x_2^{B'}$ （否则，在 (p_1, p_2) 价格下选择 $(x_1^{B'}, x_2^{B'})$ 可剩余资金，更优）

而且 $p'_1 x_1^{B'} + p'_2 x_2^{B'} \leq p'_1 x_1^A + p'_2 x_2^A$ （否则，在 (p'_1, p'_2) 价格下选择 (x_1^A, x_2^A) 可剩余资金，更优）。

$$\text{两式相加，得到 } (p'_1 - p_1)(x_1^{B'} - x_1^A) + (p'_2 - p_2)(x_2^{B'} - x_2^A) \leq 0。$$

$$\text{由于 } \Delta p_2 = p'_2 - p_2 = 0 \text{ 且 } \Delta p_1 = p'_1 - p_1 < 0, \text{ 故 } \Delta x_1^h \geq 0; \text{ 从而 } \frac{\Delta x_1^h}{\Delta p_1} \leq 0。$$

补偿需求曲线：在价格改变的时候，对收入进行调整使得效用不变所引起的需求变化，衡量了希克斯替代效应所带来的需求影响。

原来的需求曲线称为（马歇尔）需求曲线，即收入保持不变的需求曲线。