截面的几何性质

重心、质心和形心

1. 重心

$$\tilde{x}=\frac{\int_W xdW}{\int_W dW},\tilde{y}=\frac{\int_W ydW}{\int_W dW},\tilde{z}=\frac{\int_W zdW}{\int_W dW}.$$

2. 质心：

$$\tilde{x}=\frac{\int_m xdm}{\int_m dm},\tilde{y}=\frac{\int_m ydm}{\int_m dm},\tilde{z}=\frac{\int_m zdm}{\int_m dm}.$$

3. 形心：

$$\tilde{x}=\frac{\int_V xdV}{\int_V dV},\tilde{y}=\frac{\int_V ydV}{\int_V dV},\tilde{z}=\frac{\int_V zdV}{\int_V dV}.$$

性质

1. $dW=g(x,y,z)dm,dm=\rho(x,y,z)dV$。
2. 若物体尺寸相对于地球足够小，则 g 相同，从而重心和质心重合。
3. 若密度分布均匀，则 ρ 相同，从而质心和形心重合。
4. 若为平面图形，则形心也可表示为

$$\tilde{x}=\frac{\int_A xdA}{\int_A dA},\tilde{y}=\frac{\int_A ydA}{\int_A dA}.$$

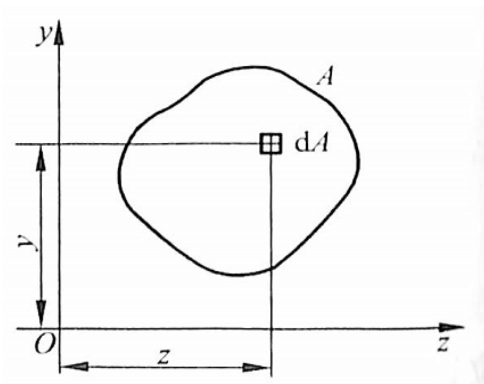
组合图形的形心

分别求出每个简单图形的形心，$x_1,x_2,...,x_n$，每个部分面积分别为 $A_1,A_2,...,A_n$，则

$$\tilde{x}=\frac{\sum_{i=1}^n x_iA_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

惯性矩

截面对某一轴的面积的二次矩称为惯性矩。



$$I_z = \int_A y^2 dA$$
$$I_y = \int_A z^2 dA$$

对形心轴的惯性矩称为**主惯性矩**。

惯性矩的平移轴公式

$$I_z = I_z' + A(\Delta y)^2$$
$$I_y = I_y' + A(\Delta z)^2$$

不同截面的惯性矩

1. 矩形截面的惯性矩：矩形边长分别为 b, h，以长度为 h 的一边中线为轴时，
$$I = \frac{bh^3}{12}$$
2. 箱型截面的惯性矩：惯性矩具有**可加性**，将两个矩形截面惯性矩相减即可。
3. 圆形截面的惯性矩：若直径为d，则
$$I = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0.05d^4$$
4. 环形截面的惯性矩：惯性矩具有**可加性**，将两个圆形截面惯性矩相减即可。

应力

正应力、剪应力

基本假设 均匀性假设、连续性假设

注：下面设截面法向为 z 方向。

正应力 沿截面法向的力的集度。

$$\sigma_z = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A}$$

剪应力 沿着截面切向的力的集度。

$$\tau_{zx} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A}$$
$$\tau_{zy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A}$$

正应力均匀分布需要满足的条件

1. 构件是由均匀且各向同性的材料制成；
2. 受到一系列轴向荷载作用；
3. 荷载作用在构件截面的形心上。

平均正应力

基本假设 *（平截面假定）* 杆件在加载前后始终保持直线，且变形时横截面维持为平面状态。

适用范围 一般为细长杆件。

平均正应力

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

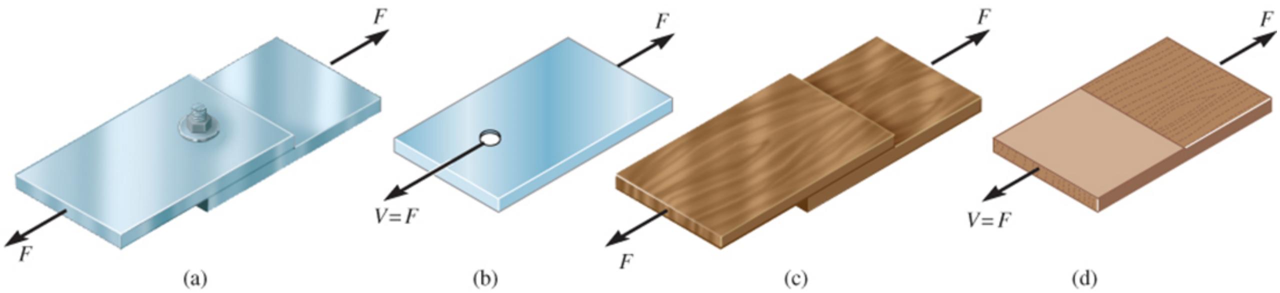
最大平均正应力：即上式最大值。

平均剪应力

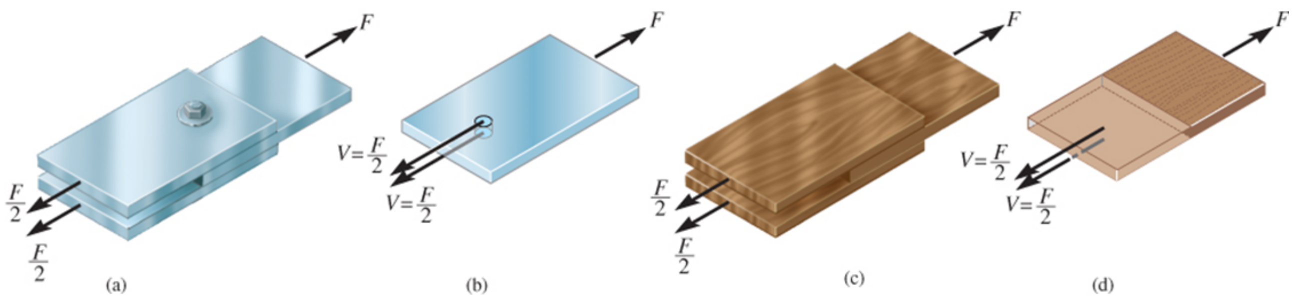
平均剪应力

$$\tau_{avg} = \frac{V}{A}$$

单面剪切 $V = F$



双面剪切 $V = \frac{F}{2}$



剪应力互等定理 当单元体顶面受到剪应力作用时，另外三个面也会有相应的剪应力。这四个剪应力必须具有相等的大小，并且在单元体的相对边缘处彼此相向或背离。

许用应力

安全系数 $F.S.$

$$F.S. = \frac{F_{fail}}{F_{allow}} = \frac{\sigma_{fail}}{\sigma_{allow}} = \frac{\tau_{fail}}{\tau_{allow}}$$

性质 安全系数必须大于1。

应变

正应变

正应变 单位长度线段的伸长量或缩短量。

$$\varepsilon = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s}$$

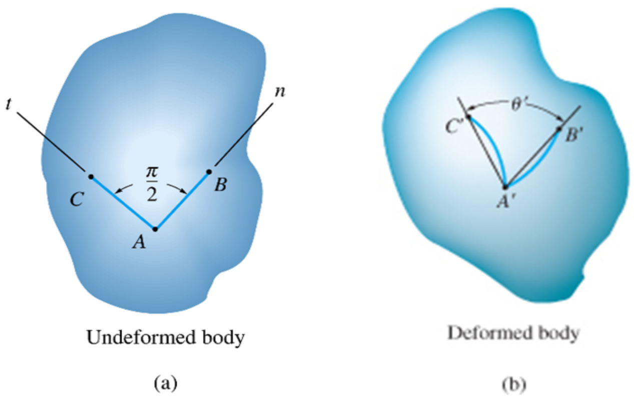
平均正应变

$$\varepsilon_{avg} = \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s}$$

变形后的长度计算

$$\Delta s' = (1 + \varepsilon_{avg})\Delta s$$

剪应变

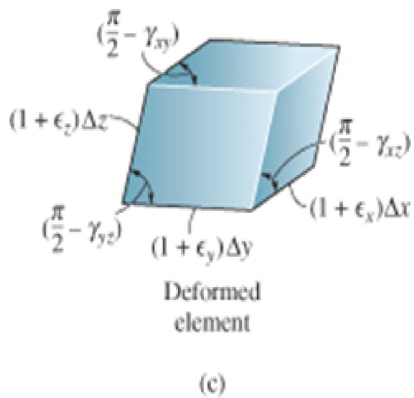


剪应变 彼此垂直的两个线段之间发生的角度变化

$$\gamma_{nt} = \frac{\pi}{2} - \lim_{B \xrightarrow{n} A, C \xrightarrow{t} A} \theta'$$

笛卡尔应变分量

一个点的应变应该由三个正应变分量和三个且切应变分量$(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z; \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy})$构成。



小变形假设

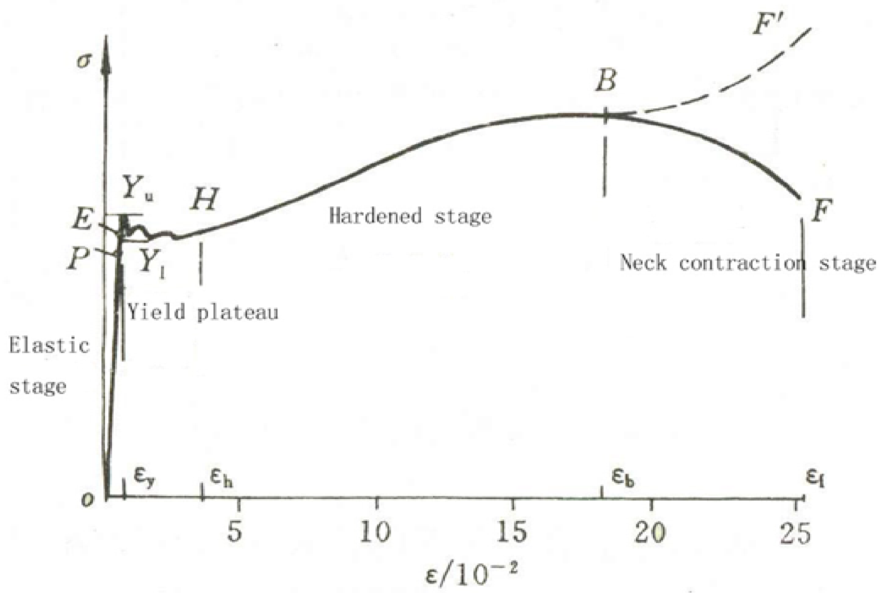
假设在材料中发生的正应变与1相比要小很多，即 $\varepsilon << 1$。

且切应变较小，有

$$\sin\alpha \approx \alpha, \cos\alpha \approx 1, \tan\alpha \approx \alpha$$

材料的力学性能

正应力-正应变关系

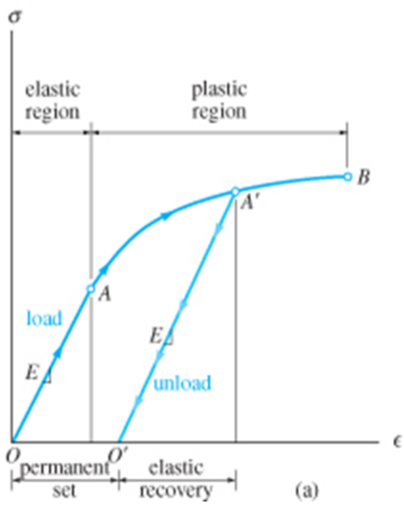


胡克定律

$$\sigma = E\varepsilon$$

由弹性模量 E 建立起来的应力与应变之间的关系只有材料的应力处于线弹性阶段时才适用。当材料中的应力超过比例极限，则应力 - 应变图不再是直线，则胡克定律失效。

应变硬化



应变能密度 每单位体积材料应变能的量

$$u = \int \sigma d\varepsilon$$

弹性能模量 当应力达到比例极限时，应变能量密度称为弹性能模量

$$u_r = \frac{\sigma_{pl}\varepsilon_{pl}}{2} = \frac{\sigma_{pl}^2}{2E}$$

韧性模量 材料断裂前的应变能密度。

屈服强度 0.2%应变下，将OA平行的线（虚线）向外平移直至它与 A' 处的应力 - 应变曲线相交。

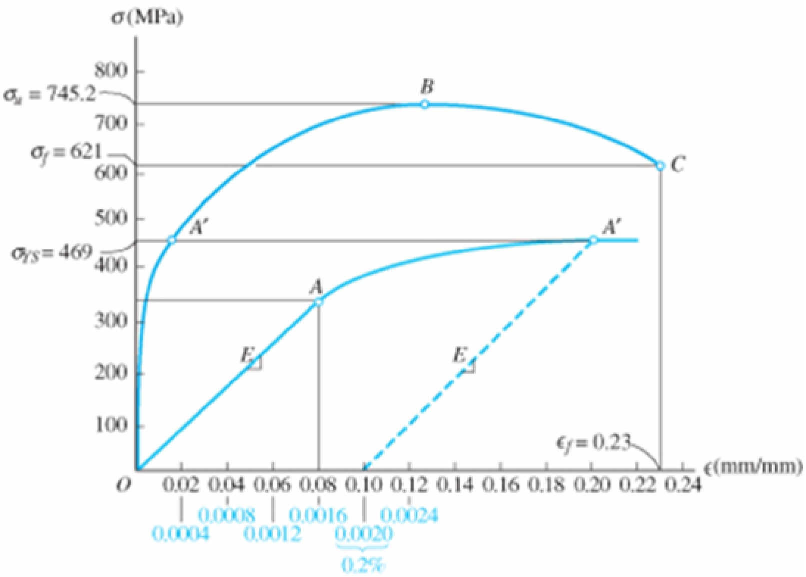
$$\sigma_{YS} = 469MPa$$

极限应力 将曲线最高点（B点）的应力定义为极限应力

$$\sigma_u = 745.2MPa$$

断裂应力 当构件达到最大应变，在C点处发生断裂时候的应力

$$\sigma_f = 621MPa$$



泊松比

$$\varepsilon_{long} = \frac{\delta}{L}, \varepsilon_{lat} = \frac{\delta'}{d}$$
$$\nu = -\frac{\varepsilon_{lat}}{\varepsilon_{long}}$$

泊松比无量纲，$0 \leq \nu \leq 0.5$

切应力-切应变关系

材料在达到其比例极限τ_{pl}前，都将表现出线弹性；在达到极限切应力τ_u前，材料将持续应变硬化；材料抗剪强度将持续减小直到剪坏，断裂切应力为τ_f。

剪切胡克定律

$$\tau = G\gamma$$

与泊松比的关系

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$