离散数学复习纲要 I （命题逻辑部分）

第1章. 命题逻辑的基本概念(Basic Concepts of Propositional Logic)

1. **命题**：非真即假的陈述句。（注意区分“尚未知真假”和“无法判定真假”）
   - (a) **真值**：命题可能的取值，用T/F或0/1表示。（有两种取值的命题逻辑称为二值逻辑）
   - (b) **命题常项**：有确定真值的命题。
   - (c) **命题变项**：用大写字母如P，Q表示命题。当P表示任意命题时，称为命题变项。
   - (d) **简单命题**：又称原子命题，是不可再分割的命题。
   - (e) **复合命题**：复合命题是一个或几个简单命题用联结词联结所构成的新命题。
2. **命题联结词及真值表**
   - (a) **命题联接词**：定义复合命题的联接符号。（常用联接词“$\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$”）
     - i. 否定词：$\neg$，一元联结词。$\neg P$表示对命题P的否定。
     - ii. 合取词：$\wedge$，二元联结词。$P\wedge Q$表示“P与Q”。
     - iii. 析取词：$\vee$，二元联结词。$P\vee Q$表示“P或Q”。
     - iv. 蕴含词：$\to$，二元联结词，表示命题间的推理。$P \to Q$表示“P蕴含Q”、“如果P那么Q”。P称为前项/条件，Q称为后项/结论。$P\to Q$ 与$\neg P\wedge Q$真值相同。
     - v. 双条件词：$\leftrightarrow$，二元联结词，表示命题间的等价。$P \leftrightarrow Q$表示“P等价于Q”。$P\leftrightarrow Q$ 与$(P\to Q)\wedge(Q\to P)$真值相同。
   - (b) **真值表**：用表格表示命题之间的真值关系。（复合命题的真值依赖命题变项的真值）

P	Q	$\neg P$	$P\wedge Q$	$P\vee Q$	$P\to Q$	$P\leftrightarrow Q$
T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

注：自然用语里的联结词表示两种同类有关事物的并列关系，而逻辑语言中仅考虑命题间的形式关系，并不顾及自然用语中是否有此说，逻辑联结词是自然用语中联结词的抽象，两者并不等同。

   - (c) 命题A依赖$P_1,\ldots,P_n$时有2^n种解释。联结词$\wedge,\vee,\neg$与数字电路中与门,或门,非门对应。
3. **合式公式(Well-Formed Formula, wff)**
   - (a) 简单命题是合式公式。
   - (b) 如果A是合式公式，那么$\neg A$也是合式公式。
   - (c) 如果A，B是合式公式,那么$(A\wedge B)$，$(A\vee B)$，$(A\to B)$，$(A\leftrightarrow B)$是合式公式。
   - (d) 当且仅当经过有限次使用上面三条规则所组成的符号串才是合式公式。
   - (e) 符号优先级：按$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\to$，$\leftrightarrow$的顺序安排优先级别。
4. **重言式(Tautology)**
   - (a) **重言式**：在任一解释I下其真值都为真的公式称为重言式(永真式)。
   - (b) **矛盾式**：在任一解释I下其真值都为假的公式称为矛盾式(永假式或不可满足式)。
   - (c) **可满足式**：在某个解释I_0下其真值为真的公式称为可满足式。
   - (d) A为真当且仅当$\neg A$永假；A可满足当且仅当$\neg A$非永真；
     不可满足的公式必永假；不是永假的公式必可满足。
   - (e) **代入规则**：对公式A使用代入规则得公式B，若A是重言式，则B也是重言式。
     要求：公式中被代换的只能是命题变元，而不能是复合命题；对公式中某命题变项施以代入，必须对该公式中出现的所有同一命题变项代换同一公式。
5. **命题形式化**（将自然语言形式化为逻辑语言）
   - (a) 简单语句的形式化：引入一些命题符号P,Q,·用来表示自然语句出现的简单命题。
   - (b) 复杂语句的形式化：依自然语句通过命题联结词将命题符号联结起来。

第2章. 命题逻辑的等值和推理演算(Propositional Equivalences & Calculus)

1. **等值定理(Equivalence Theory)**
   (a) 给定公式A和B（$P_1, \ldots, P_n$是其中所有命题变项），如果在它们的2^n个解释中的任一解释下，A和B的真值都相等，就称A和B是等值的(或等价)。记作$A = B$或$A \Leftrightarrow B$.
   (b) **定理.** 对公式A和B，$A = B$的充分必要条件是$A \leftrightarrow B$是重言式.
2. **等值公式**（等值十八式——包括10个基本等值公式和8个常用等值公式）

基本等值公式（命题定律）

(a) 双重否定律
$\neg\neg P = P$.

(b) 结合律
$(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$.
$(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$.
$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R = P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)$.
$(P \to Q) \to R \neq P \to (Q \to R)$.

(c) 交换律
$P \vee Q = Q \vee P$. $P \leftrightarrow Q = Q \leftrightarrow P$.
$P \wedge Q = Q \wedge P$. $P \to Q \neq Q \to P$.

(d) 分配律
$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.
$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.
$P \to (Q \to R) = (P \to Q) \to (P \to R)$.
$P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R) \neq (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow R)$.

(e) 等幂律(恒等律)
$P \vee P = P$. $P \to P = T$.
$P \wedge P = P$. $P \leftrightarrow P = T$.

(f) 吸收律
$P \vee (P \wedge Q) = P$.
$P \wedge (P \vee Q) = P$.

(g) 同一律
$P \vee F = P$. $T \to P = P$. $P \to F = \neg P$.
$P \wedge T = P$. $T \leftrightarrow F = P$. $F \leftrightarrow P = \neg P$.

(h) 零律
$P \vee T = T$. $P \to T = T$.
$P \wedge F = F$. $F \to P = T$.

(i) 补余律
$P \vee \neg P = T$. $P \to \neg P = \neg P$.
$P \wedge \neg P = F$. $\neg P \to P = P$.
$P \leftrightarrow \neg P = F$.

(j) 摩根律
$\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$.
$\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$.
$\neg(P \to Q) = P \wedge \neg Q$.
$\neg(P \leftrightarrow Q) = \neg P \leftrightarrow Q$
$= P \leftrightarrow \neg Q$
$= (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$.

常用等值公式

(k) $P \to Q = \neg P \vee Q$.
(l) $P \to Q = \neg Q \to \neg P$.
(m) $P \to (Q \to R) = (P \wedge Q) \to R)$.
(n) $P \leftrightarrow Q = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$.
(o) $P \leftrightarrow Q = (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$.
(p) $P \leftrightarrow Q = (P \to Q) \wedge (Q \to P)$.
(q) $P \to (Q \to R) = Q \to (P \to R)$.
(r) $(P \to R) \wedge (Q \to R) = (P \vee Q) \to R$.

3. **置换规则**（等值演算使用规则，与代入规则进行区分）
   (a) **置换：** 对公式A的子公式,用与之等值的公式代换称为置换。
   (b) **置换规则：** 公式A的子公式置换后，A化为公式B，必有$A = B$。
4. **命题公式与真值表的关系**（从真值表反推命题公式的方法）
   (a) 从T来列写：析取范式型，命题变项P为真时用P表示，为假时用$\neg P$表示。
   (b) 从F来列写：合取范式型，命题变项P为真时用$\neg P$表示，为假时用P表示。
5. **联结词的完备集**
   (a) 几种常用联结词
      i. 异或$\bar{\vee}$: $P \bar{\vee} Q = (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$
      ii. 与非$\uparrow$: $P \uparrow Q = \neg(P \wedge Q)$
      iii. 或非$\downarrow$: $P \downarrow Q = \neg(P \vee Q)$

P	Q	$P \bar{\vee} Q$	$P \uparrow Q$	$P \downarrow Q$
T	T	F	F	F
T	F	T	T	F
F	T	T	T	F
F	F	F	T	T

   (b) 命题联结词的个数：一般地说,对n个命题变元$P_1, \ldots, P_n$,每个P_i有两种取值,从而共有2^n种取值情形。于是相应的真值函项就有2^{2^n}个，或者说可定义2^{2^n}个n元联结词。
   (c) 联接词的完备集
      i. **定义：** 设C是联结词的集合，如果对任一命题公式都有由C中的联结词表示出来的公式与之等值，就说C是完备的联结词集合，或说C是联结词的完备集。
      ii. **定理：** $\{\neg, \vee, \wedge\}$($\{\neg, \to\}$，$\{\uparrow\}$，$\{\downarrow\}$)是完备的联结词集合。($\{\vee, \wedge\}$，$\{\neg, \leftrightarrow\}$不是)

6. **对偶式(Dual Form)**
   (a) **对偶式**：将A中的$\vee, \wedge$以$\wedge, \vee$代换得到A^*，则A^*是A的对偶式。（A与A^*互为对偶式）
   (b) **内否式**：若$A = (P_1, \ldots, P_n)$，令$A^- = A(\neg P_1, \ldots, \neg P_n)$，则$A^-$是$A$的内否式。
   (c) **定理**：$\neg(A^*) = (\neg A)^*$，　$\neg(A^-) = (\neg A)^-$，　$\neg A = A^{*-}$，　$(A^*)^* = A$，　$(A^-)^- = A$.
   (d) **定理**. 若$A = B$，必有$A^* = B^*$。
   (e) **定理**. 若$A \to B$永真，必有$B^* \to A^*$永真。
   (f) **定理**. A与A^-同永真，同可满足；$\neg A$与A^*同永真，同可满足。
7. **范式(Normal Form)**
   (a) **文字**：简单命题P及其否定式$\neg P$统称文字。一些文字的合取(析取)称为合取(析取)式。
   (b) **析取范式**：形如$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$的公式，其中$A_i(i = 1, \ldots, n)$为合取式。
   (c) **合取范式**：形如$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$的公式，其中$A_i(i = 1, \ldots, n)$为析取式。
   (d) **范式定理**：任一命题公式都存在有与之等值的合取范式和析取范式。
   (e) 求范式的步骤：
      i. **符号消去**：消去已给公式中的联结词$\to$和$\leftrightarrow$。
      ii. **否定深入**：重复使用摩根律和双重否定律将否定词内移到直接作用于命题变项。
      iii. **等值变换**：重复使用分配律。
   (f) 利用范式判断重言式和矛盾式：（范式应用示例）
   若一公式的合取范式（析取范式）中所有析取式(合取式)都至少含有一个互补对，则该范式及相应公式必为重言式（矛盾式）。
8. **主范式(Principal Normal Form)**
   (a) **极小项**：对n个命题变项$P_1, \ldots, P_n$所组成的公式$Q_1 \wedge Q_2 \wedge \ldots \wedge Q_n$,其中$Q_i = P_i$或$\neg P_i(i = 1, \ldots, n)$，则称$Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n$为极小项，并以$m_i$表示。
   (b) **主析取范式**：仅由极小项构成的析取式为主析取范式。
   (c) **主范式存在性定理**：任意一个含有n个命题变项的公式都有唯一的一个与之等值且恰仅含这n个命题变项的主析取范式。
   (d) **极小项的性质**：
      i. 对含n个变项的公式所有可能的极小项个数和该公式的解释个数一样多，都是2^n。
      ii. 每个极小项只在一个解释下为真。
      iii. 极小项两两不等值，而且$m_i \wedge m_j = F(i \neq j)$。
      iv. 任一含有n个变项的公式，都可由k个$(k \leq 2^n)$极小项的析取来表示，或说所有的极小项可以建立一个"坐标系"。
      v. 恰由2^n个极小项的析取所构成的公式必为重言式。（$\bigvee_{i=0}^{2^n-1} m_i = T$）
      vi. 若A由k个极小项的析取组成，那么其余$2^n - k$个极小项的析取必是$\neg A$。
   (e) **极大项**：对n个命题变项$P_1, \ldots, P_n$来说，所组成的公式$Q_1 \vee Q_2 \vee \ldots \vee Q_n$，其中$Q_i = P_i$或$\neg P_i(i = 1, \ldots, n)$，则称$Q_1 \vee \ldots \vee Q_n$为极大项，并以$M_i$表示。
   (f) **主合取范式**：仅由极大项构成的析取式为主合取范式。
   (g) **主范式存在定理**：任一含有n个命题变项的公式，都有唯一的一个与之等值的恰仅含这n个命题变项的主合取范式。
   (h) **极大项的性质**：
      i. 对含n个变项的公式所有可能的极大项个数和该公式的解释个数一样多，都是2^n。
      ii. 每个极大项只在一个解释下为假。
      iii. 极大项两两不等值,而且$M_i \vee M_j = T(i \neq j)$.
      iv. 任一含有n个变项的公式,都可由k个$(k \leq 2^n)$极大项的合取来表示，或说所有的极大项可以建立一个"坐标系"。
      v. 恰由2^n个极大项的合取所构成的公式必为矛盾。（$\bigwedge_{i=0}^{2^n-1} M_i = F$）
      vi. 若A由k个极大项的合取组成，那么其余$2^n - k$个极大项的合取必是$\neg A$。
   (i) 主析取范式与主合取范式间的转换。
9. **推理形式(Deduction)**（命题推理演绎的一种方式）
   (a) **推理形式**：将自然语句描述的推理关系,引入符号抽象化并以条件式表示出来的形式。

(b) **重言蕴含**：如果给定两个公式A，B，只要A取值为真B就必取值为真,便称A重言(永真)蕴含B,或称B是A的逻辑推论，并用符号$A \Rightarrow B$表示。

(c) **重言蕴含的几个结果**：

i. 如果$A \Rightarrow B$，A为重言式，则B也是重言式。

ii. 如果$A \Rightarrow B$，$B \Rightarrow A$同时成立，必有$A = B$。

iii. 如果$A \Rightarrow B$，$B \Rightarrow C$，则$A \Rightarrow B$。

iv. 如果$A \Rightarrow B$，$A \Rightarrow C$，则$A \Rightarrow B \wedge C$。

v. 如果$A \Rightarrow C$，$B \Rightarrow C$，则$A \vee B \Rightarrow C$。

10. **基本推理公式**（基本推理十八式）

(a) $P \wedge Q \Rightarrow P.$

(b) $P \wedge Q \Rightarrow Q.$

(c) $P \Rightarrow P \vee Q.$

(d) $Q \Rightarrow P \vee Q.$

(e) $\neg P \Rightarrow P \to Q.$

(f) $Q \Rightarrow P \to Q.$

(g) $\neg(P \to Q) \Rightarrow P.$

(h) $\neg(P \to Q) \Rightarrow \neg Q.$

(i) $\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q.$

(j) $P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q.$

(k) $\neg Q \wedge (P \to Q) \Rightarrow \neg P.$

(l) $(P \to Q) \wedge (Q \to R) \Rightarrow P \to R.$

(m) $(P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R) \Rightarrow P \leftrightarrow R.$

(n) $(P \to R) \wedge (Q \to R) \wedge (P \vee Q) \Rightarrow R.$

(o) $(P \to Q) \wedge (R \to S) \wedge (P \vee R) \Rightarrow Q \vee S.$

(p) $(P \to Q) \wedge (R \to S) \wedge (\neg Q \vee \neg S) \Rightarrow \neg P \vee \neg R.$

(q) $(Q \to R) \Rightarrow ((P \vee Q) \to (P \vee R)).$

(r) $(Q \to R) \Rightarrow ((P \to Q) \to (P \to R)).$

11. **证明推理公式的方法** （如何证明$A \Rightarrow B$）

(a) **定理**：$A \Rightarrow B$成立的充分必要条件是$A \to B$为重言式.

(b) **定理**：$A \Rightarrow B$成立的充分必要条件是$A \wedge \neg B$是矛盾式.

(c) **性质**：若$\neg B \Rightarrow \neg A$, 必有$A \Rightarrow B$.

(d) 解释法证明$A \Rightarrow B$. （假设A真值为真，说明B在此前提下真值也为真）

(e) 真值表法、等值演算法、求合取范式、解逻辑方程.

12. **推理演算规则** （在推理过程中的技巧）

(a) 前提引入规则：在推理过程中可以随时引入前提.

(b) 结论引用规则：在推理过程中所得到的中间结论可作为后续推理的前提.

(c) 代入规则：在推理过程中对重言式的命题变项可以使用代入规则.

(d) 置换规则：在推理过程中命题公式中的任何部分公式都可以用与之等值的公式来置换.

(e) 分离规则(假言推理)：如果已知命题公式$A \to B$和A，则有命题公式B.

(f) 条件证明规则：$A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B$与$A_1 \Rightarrow A_2 \to B$是的等价的.

13. **归结推理法(Resolution)**

(a) 归结证明过程（为证明$A \to B$(可称作定理)是重言式，等价于证明$A \wedge \neg B$是矛盾式）

i. 根据$A \wedge \neg B$的合取范式建立子句集S。（每个析取式为一个子句）

ii. 对S作归结. （不断消除P和$\neg P$）

iii. 直至归结出矛盾式$\square$.

(b) **归结推理规则** （归结法的正确性保证）

i. 归结式的定义：设$C_1 = L \vee C_1'$，$C_2 = \neg L \vee C_2'$为两个子句，有互补对L和$\neg L$。则新子句为$R(C_1, C_2) = C_1' \vee C_2'$，称作$C_1, C_2$的归结式。

ii. $C_1 \wedge C_2 \Rightarrow R(C_1, C_2)$.

14. **命题的指派（解释）**

(a) 公式A的变元组$(P_1, \ldots, P_n)$的任意一组确定的值，称为一个完全指派。

(b) 如果仅对变元组中的部分变元确定值，其余变元没有赋以确定的值，则称为部分指派.

(c) 使公式A真值为真(假)的指派，不管是完全还是部分指派，都称为A的成真(假)指派。

离散数学复习纲要II（谓词逻辑部分）

第4章. 谓词逻辑的基本概念(Basic Concepts of Predicate Logic)

1. **谓词和个体词** (Predicate and Variable)
   (a) **谓词**：一个个体的性质或多个个体间的关系。
   一元谓词，表示主词性质或属性的词（主词只有一个），形如$P(x), Q(x), \ldots$;
   多元谓词，表示主词间关系的词（主词多于一个），形如$P(x,y), Q(x,y), R(x,y,z)\ldots$。
   若谓词P已经赋有确定含义，则称为谓词常项；若P表示任一谓词，则称为谓词变项。
   抽象定义：谓词是给定的个体域到集合$\{T, F\}$上的一个映射。
   (b) **个体词**：一个命题里表示思维对象的词。(数理逻辑中不使用“主词”这个词，习惯称“个体词”)
   若个体词x赋有确定含义,则称个体常项；若x表示任一个体,则称个体变项/个体变元.
   (c) **论域**：将个体变项的变化范围称为个体域或论域，以D表示.
      i. 约定谓词逻辑的个体域除明确指明外，都认为是包括一切事物的一个最广集合.
      谓词变项的变化范围，不做特别声明时，指一切关系或一切性质的集合.
      ii. 论域是重要概念，同一谓词在不同论域下的描述形式可能不同，所取的真假值也可能不同。
   (d) **谓词逻辑与命题逻辑**：谓词逻辑是命题逻辑的推广, 命题逻辑是谓词逻辑的特殊情形。任一命题都可通过引入具有相应含义的谓词(个体词视为常项)来表示，或认为一个命题是没有个体变元的零元谓词.
2. **函数和量词** (Function and Quantifier)
   (a) **函数**：函数是某个体域(不必是实数)到另一个体域的映射，不同于将个体映射为真假值的谓词。而且函数并不单独使用，是嵌入在谓词中。
   约定函数符号用小写字母表示，如f,g,$less$等，这不会与以小写字母表示的命题相混。
   (b) **量词**：用来表示个体数量的词，也可看作是对个体词所加的限制、约束的词。
      i. 两个最通用的量词，一个是“所有的”,一个是“至少有一个”，分别称全称量词$\forall$和存在量词$\exists$。在某种意义上说，这是一对相对立的词。
      ii. **约束变元和自由变元**：受量词约束的变元，称为约束变元。不受量词约束的变元，称为自由变元。
      iii. **量词的辖域**：量词所约束的范围。
   (c) **变元易名规则**：不管$P(x)$如何，都有$(\forall x)P(x) = (\forall y)P(y)$，称为变元易名规则。
3. **合式公式(Well-Formed Formula, wff)**
   (a) 命题常项、命题变项和原子谓词公式(不含联结词的谓词)都是合式公式。
   (b) 如果A是合式公式，那么$\neg A$也是合式公式。
   (c) 如果A，B是合式公式，而无变元x在A，B的一个中是约束的而在另一个中是自由的，则$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，$(A \rightarrow B)$，$(A \leftrightarrow B)$也是合式公式（最外层括号可省略）。
   (d) 如果A是合式公式，而x在A中是自由变元，则$(\forall x)A$，$(\exists x)A$也是合式公式。
   (e) 只有适合以上4条的才是合式公式。
4. **自然语言的形式化**：先将问题分解成一些原子谓词，引入谓词符号，再使用量词、函数、联结词来构成合式公式。
5. **谓词公式的解释**：对谓词公式的解释I包括五个部分，
   (a) 非空论域D
   (b) 对命题变元指派为$\{0, 1\}$
   (c) 对个体常元和(自由)个体变元指派为D中元素
   (d) 对谓词指派为D上的谓词(关系)
   (e) 对函数指派为D上的函数
6. **谓词公式的分类和判定问题**
   (a) 谓词逻辑的公式按真假性分为三类：

i. 永真式(重言式,普遍有效式)：若一公式在任一解释下都为真，则称普遍有效的(universally valid)。普遍有效公式反映了一般逻辑规律。
ii. 永假式(矛盾式,不可满足式)：若一公式在任一解释下都为假，则称不可满足的。
iii. 可满足式：若一公式在某个解释下为真,则称可满足的。

(b) **判定问题**：谓词逻辑的判定问题，指的是任一公式的普遍有效性。
i. 谓词逻辑是不可判定的。
ii. 只含有一元谓词变项的公式是可判定的。
iii. $(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)P(x_1,\ldots,x_n)$和$(\exists x_1)\ldots(\exists x_n)P(x_1,\ldots,x_n)$型公式，若$P$中无量词和其他自由变项时也是可判定的。
iv. 个体域有穷时的谓词公式是可判定的。

第5章. 谓词逻辑的等值和推理演算(Predicate Equivalences and Calculus)

1. **等值式**：若给定了两个谓词公式A，B，若在公式A，B的任一解释下，都有相同的真值，则称A和B等值。记做$A=B$或$A\Leftrightarrow B$。
2. **由命题公式移植来的等值式**：若将命题公式的等值式，直接以谓词公式代入命题变项便可得谓词等值式。由$\neg\neg p=p, p\to q=\neg p\vee q, (p\wedge q)\vee r=(p\vee r)\wedge(q\vee r)$可得
   (a) $\neg\neg P(x)=P(x), \neg\neg(\forall x)P(x)=(\forall x)P(x)$
   (b) $P(x)\to Q(x)=\neg P(x)\vee Q(x), (\forall x)P(x)\to(\exists x)Q(x)=\neg(\forall x)P(x)\vee(\exists x)Q(x)$
   (c) $(P(x)\wedge Q(x))\vee R(x)=(P(x)\vee R(x))\wedge(Q(x)\vee R(x))$
   (d) $((\forall x)P(x)\wedge Q(y))\vee(\exists z)R(z)=((\forall x)P(x)\vee(\exists z)R(z))\wedge(Q(y)\vee(\exists z)R(z))$
3. **否定型等值式**
   (a) 否定转移：$\neg(\forall x)P(x)=(\exists x)\neg P(x)$ ；$\neg(\exists x)P(x)=(\forall x)\neg P(x)$
   (b) 注：否定词$\neg$可越过量词深入到量词的辖域内，但要把所越过的量词转换为另一个。
4. **量词分配等值式** （证明）
   (a) **量词对$\vee$、$\wedge$的分配律**
   $(\forall x)(P(x)\vee q)=(\forall x)P(x)\vee q$ ；$(\exists x)(P(x)\vee q)=(\exists x)P(x)\vee q$
   $(\forall x)(P(x)\wedge q)=(\forall x)P(x)\wedge q$ ；$(\exists x)(P(x)\wedge q)=(\exists x)P(x)\wedge q$
   注：以上是量词对$\vee$、$\wedge$的分配律，其中q是命题变项，与个体变元x无关。
   (b) **量词对$\to$的分配律**
   $(\forall x)(P(x)\to q)=(\exists x)P(x)\to q$；$(\exists x)(P(x)\to q)=(\forall x)P(x)\to q$
   $(\forall x)(p\to Q(x))=p\to(\forall x)Q(x)$；$(\exists x)(p\to Q(x))=p\to(\exists x)Q(x)$
   注：以上是量词对$\to$的分配律，其中q是命题变项，与个体变元x无关。
   (c) **量词$\forall$对$\wedge$、$\exists$对$\vee$的分配律**
   $(\forall x)(P(x)\wedge Q(x))=(\forall x)P(x)\wedge(\forall x)Q(x)$；$(\exists x)(P(x)\vee Q(x))=(\exists x)P(x)\vee(\exists x)Q(x)$
   注：这是当$P(x),Q(x)$都含有个体变元x时，量词$\forall$对$\wedge$、$\exists$对$\vee$的分配律。
   然而量词$\forall$ 对$\vee$、$\exists$对$\wedge$的分配律一般并不成立。
   (d) **变元易名后的分配律**
   $(\forall x)(\forall y)(P(x)\vee Q(y))=(\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x)$
   $(\exists x)(\exists y)(P(x)\wedge Q(y))=(\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)$
   以上两个等值式，说明了通过变元的易名，仍可实现量词$\forall$对$\vee$、$\exists$对$\wedge$的分配律。
5. **范式** (Normal Form) （范例）
   (a) **前束范式**
   i. **定义**：公式A是一个前束范式, 如果A中的一切量词都位于该公式的最左边(不含否定词)，且这些量词的辖域都延伸到公式的末端。

ii. 前束范式的一般形式为$(Q_1x_1)\dots(Q_nx_n)M(x_1,\dots,x_n)$，其中$Q_i$为量词$\forall$或$\exists(i=1,\dots,n)$，$M$称作公式$A$的母式（基式），$M$中不再有量词($M$中不含自由变元)。

iii. **定理：**谓词逻辑的任一公式都可化为与之等值的前束范式，但并不唯一。

(b) **Skolem标准形**

前束范式对前束量词没有次序要求, 也没有其他要求. 如果对前束范式进而要求所有存在量词都在全称量词之左, 或是只保留全称量词而消去存在量词, 便得Skolem标准形。

i. **$\exists$前束范式：**$(\exists x_1)\dots(\exists x_i)(\forall x_{i+1})\dots(\forall x_n)M(x_1,\dots,x_n)$,
即存在量词都在全称量词的左边，且可保持至少有一个存在量词$(i\geqslant 1)$，其中$M(x_1,\dots,x_n)$中不再含有量词也无自由个体变项。
定理1：谓词逻辑的任一公式A, 都可化成相应的$\exists$前束范式，并且A是普遍有效的当且仅当其$\exists$前束范式是普遍有效的。

ii. **Skolem标准形：**即全称型前束范式，$(\forall x_1)\dots(\forall x_n)M(x_1,\dots,x_n,a,b,\dots,f,g,\dots)$
定理2：谓词逻辑的任一公式A, 都可化成相应的Skolem标准形(只保留全称量词的前束形)，并且A是不可满足的当且仅当其Skolem标准形是不可满足的。

iii. **$\forall$前束范式：**$(\forall x_1)\dots(\forall x_i)(\exists x_{i+1})\dots(\exists x_n)M(x_1,\dots,x_n)$.
定理3：谓词逻辑的任一公式A, 都可化成相应的$\forall$前束范式，并且A是可满足的当且仅当其$\forall$前束范式是可满足的。

6. **基本的推理公式** （范例和说明）

(a) $(\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x)\Rightarrow(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$
(b) $(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))\Rightarrow(\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)$
(c) $(\forall x)(P(x)\to Q(x))\Rightarrow(\forall x)P(x)\to(\forall x)Q(x)$
(d) $(\forall x)(P(x)\to Q(x))\Rightarrow(\exists x)P(x)\to(\exists x)Q(x)$
(e) $(\forall x)(P(x)\leftrightarrow Q(x))\Rightarrow(\forall x)P(x)\leftrightarrow(\forall x)Q(x)$
(f) $(\forall x)(P(x)\leftrightarrow Q(x))\Rightarrow(\exists x)P(x)\leftrightarrow(\exists x)Q(x)$
(g) $(\forall x)(P(x)\to Q(x))\wedge(\forall x)(Q(x)\to R(x))\Rightarrow(\forall x)(P(x)\to R(x))$
(h) $(\forall x)(P(x)\to Q(x))\wedge P(a)\Rightarrow Q(a)$
(i) $(\forall x)(\forall y)P(x,y)\Rightarrow(\exists x)(\forall y)P(x,y)$
(j) $(\exists x)(\forall y)P(x,y)\Rightarrow(\forall y)(\exists x)P(x,y)$

7. **推理规则** （范例）

(a) **全称量词消去规则：**$(\forall x)P(x)\Rightarrow P(y)$，其中$y$是论域中的一个体。
意指如果所有的$x\in D$都具有性质P，那么D中任一个体y 必具有性质P。
(b) **全称量词引入规则：**$P(y)\Rightarrow(\forall x)P(x)$，其中$y$是论域中的任一个体。
意指如果任一个体y(自由变项)都具有性质P，那么所有个体x都具有性质P。
(c) **存在量词消去规则：**$(\exists x)P(x)\Rightarrow P(c)$，其中$c$是论域中的一个体常项。
意指如果论域中存在有个体具有性质P，那么必有某个个体c 具有性质P。
(d) **存在量词引入规则：**$P(c)\Rightarrow(\exists x)P(x)$，其中$c$是论域中的一个体常项。
意指如果有个体常项c具有性质P，那么$(\exists x)P(x)$ 必真。

说明：$(\forall x)(\exists y)P(x,y)\Rightarrow(\exists y)P(x,y)$的右端, 不允许写成$(\exists y)P(y,y)$，
$(\forall x)P(x,c)\Rightarrow(\exists y)(\forall x)P(x,y)$的右端, 不允许写成$(\exists x)(\forall x)P(x,x)$。
$(\forall x)(\exists y)P(x,y)\Rightarrow(\exists y)P(x,y)\Rightarrow P(x,a)$但不允许再推演出$(\forall x)P(x,a)$ 和$(\exists y)(\forall x)P(x,y)$。

8. **谓词逻辑的归结推理法**

(a) 出发点：为证明$A\to B$是定理(A,B 为谓词公式)，等价于证明$A\wedge\neg B$是矛盾式。
(b) 建立$A\wedge\neg B$的子句集S。
(c) 对S作归结(若L_1,$\neg L_2$有合一置换σ,则$(C_1\sigma-\{L_1\sigma\})\cup(C_2\sigma-\{L_2\sigma\})$为$C_1$,$C_2$的归结式)
(d) 直至归结出空子句$\square$，证明结束。