1. 科里奥利力：$\overrightarrow{F_c}=2m\vec{v}\times\vec{\omega}$.

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d(r\hat{r})}{dt}=\frac{dr}{dt}\hat{r}+\frac{d\hat{r}}{dt}r=\frac{dr}{dt}\hat{r}+r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}\quad\left(\frac{d\hat{r}}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta},\frac{d\hat{\theta}}{dt}=-\frac{d\theta}{dt}\hat{r}\right)$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2r}{dt}\hat{r}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}+r\left(\frac{d^2\theta}{dt}\hat{\theta}-\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\hat{r}\right)=-r\omega^2\hat{r}+2v\omega\hat{\theta}\quad\left(\frac{dr}{dt}=v,\frac{d\theta}{dt}=\omega\right)$$

$$\vec{a}=-\omega^2\vec{r}+2\vec{v}\times\vec{\omega},\quad\vec{F}=m\vec{a}=-m\omega^2r+2m\vec{v}\times\vec{\omega}=\overrightarrow{F_r}+\overrightarrow{F_c}$$

2. 一对作用力与反作用力所做功的和：

$$dA=F_{ij}d\vec{r_i}+F_{ji}d\vec{r_j}=F_{ij}d\vec{r_i}-F_{ij}d\vec{r_j}=F_{ij}d\overrightarrow{r_{ji}}$$

3. 质点系的动能定理：$A_e+A_I=K-K_0$（A_e外力对质点系做功，A_I内力对质点系做功）。

4. 势能U定义及一些公式推导：$d\vec{U}=-Fd\vec{r}$，则$dU(x,y,z)=-\left(F_x\vec{\imath},F_y\vec{\jmath},F_z\vec{k}\right)\left(dx\vec{\imath},dy\vec{\jmath},dz\vec{k}\right)$

$$dU=-F_xdx-F_ydy-F_zdz=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz\ \Longrightarrow\frac{\partial U}{\partial x}=-F_x,\frac{\partial U}{\partial y}=-F_y,\frac{\partial U}{\partial z}=-F_z$$

- 势能曲线时，$F_r(r_0)=-\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r_0},E=U(r)+K$

5. 功能原理及其推导：两质点在相互作用的保守内力作用下，处在一定位置的时候具有一定的势能，称为**两质点的相互作用势能**。在相对位置发生改变的时候，相互作用势能减少等于这一对保守内力做功之和。于是，设 i 和 j 质点相互作用势能为U_{ij}，则

$$U=\sum_i\sum_{j>i}U_{ij}\Longrightarrow A_{CI}=-\Delta U$$

$$A_e+A_I=A_e+A_{CI}+A_{NI}=A_e-\Delta U+A_{NI}=\Delta K\ \Longrightarrow A_e+A_{NI}=\Delta(U+K)=\Delta E$$

对于孤立系统，$A_e=0\ \Longrightarrow A_{NI}=\Delta E$；若$A_e=A_{NI}=0$，则$\Delta E=0,\ E=const.$

6. 动量守恒定律：对于孤立系统，n 个质点，

$$\vec{p}=\sum_{i=1}^n m_i\vec{v_i},\quad\frac{d\vec{p}}{dt}=0,\ \vec{p}=const.$$

7. 质点系的动量定理：设$\vec{f_i}$表示内力，$\vec{F_i}$表示外力，于是根据质点动量定理相加有：

$$\sum_{i=1}^n(\vec{f_i}+\vec{F_i})dt=\sum_{i=1}^n d\vec{p_i}\ \Longrightarrow\ \sum_{i=1}^n\vec{f_i}dt+\sum_{i=1}^n\vec{F_i}dt=\sum_{i=1}^n\vec{F_i}dt=d\sum_{i=1}^n\vec{p_i}$$

令$\vec{F}=\sum_{i=1}^n\vec{F_i}$，$p=\sum_{i=1}^n\vec{p_i}$，则$\vec{F}dt=d\vec{p}$（$F$ 表示仅外力）

8. **二维弹性碰撞：当两物体质量相同且一个物体初始静止时，** $m_1=m_2,\ \overrightarrow{v_2}=\vec{0}$

$$\begin{cases}m_1\overrightarrow{v_1}+m_2\overrightarrow{v_2}=m_1\overrightarrow{v_1'}+m_2\overrightarrow{v_2'}\\ \frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}m_1v_1'^2+\frac{1}{2}m_2v_2'^2\end{cases}$$

化简有$\overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{v_1'}+\overrightarrow{v_2'}$，$v_1^2=v_1'^2+v_2'^2\ \ \Longrightarrow v_1'\perp v_2'$

9. 质心和质心运动定理：对孤立系统，动量守恒，即$\frac{d\vec{p}}{dt}=0$

$$\vec{p}=m_1\frac{d\overrightarrow{r_1}}{dt}+m_2\frac{d\overrightarrow{r_2}}{dt}=\frac{d}{dt}(m_1\overrightarrow{r_1}+m_2\overrightarrow{r_2})=(m_1+m_2)\frac{d}{dt}\left(\frac{m_1\overrightarrow{r_1}+m_2\overrightarrow{r_2}}{m_1+m_2}\right)=(m_1+m_2)\frac{d\overrightarrow{r_c}}{dt}$$

$$\overrightarrow{p_c}=(m_1+m_2)\frac{d\overrightarrow{r_c}}{dt}=const,\frac{d\overrightarrow{p_c}}{dt}=(m_1+m_2)\frac{d^2\overrightarrow{r_c}}{dt}=0$$

$$\overrightarrow{r_c}=\frac{\sum_{i=1}^n m_i\vec{r_i}}{\sum_{i=1}^n m_i}=\frac{\sum_{i=1}^n m_i\vec{r_i}}{M}\ \Longrightarrow M\frac{d^2\overrightarrow{r_c}}{dt^2}=0,v_c=\frac{d\overrightarrow{r_c}}{dt}=const\ vector.$$

孤立系统的质心做匀速直线运动或处于静止状态。

- 若物体质量连续分布，则$\overrightarrow{r_c}=\frac{\int\vec{r}dm}{\int dm}$，其中dm为质元质量。
- 将参考系坐标原点选取在质心系质心，则质心速度为 0，即$\sum_{i=1}^n m_i\vec{v_i}=0$（零动量系）。

$$\vec{v}_c=\frac{d\vec{r}_c}{dt}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{d\vec{r_i}}{dt}}{M},\frac{d\vec{v_c}}{dt}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{d^2\vec{r_i}}{dt}}{M}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}\vec{F_i}$$

由于质点系内力成对出现大小相同方向相反，因此

$$\frac{d\vec{v_c}}{dt}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\vec{F_{ie}}}{M}=\frac{\vec{F_e}}{M}\Longrightarrow\vec{F_e}=M\frac{d\vec{v_c}}{dt}$$

10. 角动量定理与角动量守恒定律：角动量定义$\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}$。

• 角动量定理：由于$\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}$，故

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d\vec{r}}{dt}\times m\vec{v}+\vec{r}\times\frac{d(m\vec{v})}{dt}=\vec{r}\times\vec{F}=\vec{M}\Longrightarrow d\vec{L}=\vec{M}dt$$

• 质点系的角动量定理：由于$\vec{M}=\vec{M_e}+\vec{M_I}=\vec{r_{ie}}\times\vec{F_{ie}}+\vec{r_{Ii}}\times\vec{F_{iI}}$，且对于相互作用力：

$$\vec{F_{ij}}=-\vec{F_{ji}}\Longrightarrow\vec{r_i}\times\vec{F_{ij}}+\vec{r_j}\times\vec{F_{ji}}=(\vec{r_i}-\vec{r_j})\times\vec{F_{ij}}=\vec{0}$$

从而$\vec{M_I}=\sum_{i=1}^{n}\vec{r_i}\times\left(\sum_{j\neq i}\vec{F_{ij}}\right)=\vec{0}$，从而$\vec{M}=\vec{M_e}$，故$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M_e}$，$d\vec{L}=\vec{M_e}dt$

• 角动量守恒定律：单质点时，$M=0\Longrightarrow L=const.$；质点系时，$M_e=0\Longrightarrow L=const.$。

【由角动量守恒推导关于行星的有关结论】

行星引力是有心力，因此取太阳为坐标原点，力矩 $M=0$，从而 $L=const.$。

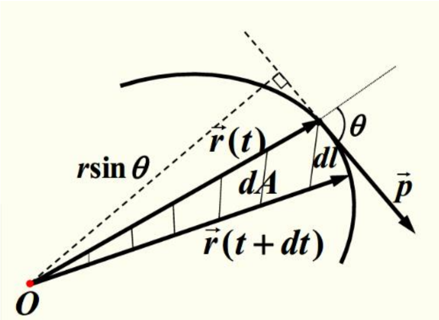
(1) 行星轨道处在一确定的平面上，是一条平面曲线。

证明：由向量混合积性质

$$L\cdot r=(r\times mv)\cdot r=(r\times r)\cdot mv=0$$

从而$\vec{L}\perp\vec{r}$，于是$\vec{r}$在同一平面内，轨道是一条平面曲线。

(2) 行星和太阳连线单位时间内扫过面积相等。



证明：设行星与太阳连线单位时间dt内扫过面积dA，行星走过的路程dl，则：

$$dA=\frac{1}{2}dl\,r\sin\theta\,,v=\frac{dl}{dt}\Longrightarrow dA=\frac{1}{2}vr\sin\theta\ dt$$

$$|\vec{L}|=|\vec{r}\times m\vec{v}|=m|\vec{r}||\vec{v}|\sin\theta=rmv\sin\theta=2m\frac{dA}{dt}=const.$$

故$\frac{dA}{dt}=const.$，即行星和太阳连线单位时间内扫过面积相等。

11. 刚体

(1) 考虑物体质量，考虑物体形状和大小，但是忽略物体形变。运动分平动和转动。

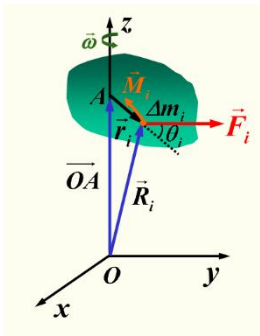
(2) 转动平面上任意一个距转轴 r 的点，其切向加速度$a_t=\frac{dv}{dt}=\frac{d(\omega r)}{dt}=r\frac{d\omega}{dt}=r\alpha$，法向加速度$a_n=\omega^2r=\frac{v^2}{r}$。

(3) $\vec{F}$对 z 轴上任意一点力矩在转轴方向上的分量即为$\vec{F}$对转轴的力矩大小（仅考虑$\vec{F}$垂直转轴分量）。

(4) 刚体定轴转动的角动量与转动惯量：

质元Δm_i对于 O 点的角动量$\vec{L_i}=\vec{R_i}\times\Delta m_i\vec{v_i}=\left(\overrightarrow{OA}+\vec{r_i}\right)\times\Delta m_i\vec{v_i}\Longrightarrow\vec{L_{iz}}=\vec{r_i}\times\Delta m_i\vec{v_i}\Longrightarrow L_{iz}=r_i\Delta m_iv_i$

对于整个刚体，



$$L_z=\sum_i L_{iz}=\sum_i r_i\Delta m_iv_i=\sum_i r_i\Delta m_ir_i\omega=\left(\sum_i\Delta m_ir_i^2\right)\omega\triangleq J\omega\Longrightarrow L_z=J\omega$$

则 J 称为刚体对转轴 z 的转动惯量。刚体对转轴角动量$\vec{L}=J\vec{\omega}$。

(5) **刚体定轴转动定理：**由$M=\frac{d\vec{L}}{dt}$知$M_z=\frac{dL_z}{dt}=\frac{d(J\omega)}{dt}=J\alpha$，则$\vec{M}=J\vec{\alpha}$

(6) 刚体转动惯量的计算：

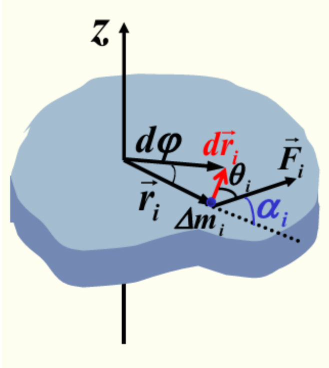
a) 平行轴定理：$J_A=J_C+md^2$

b) 组合定理：$J=J_A+J_B+\cdots$

c) 匀质量细棒，转轴位于中心时$J=\frac{1}{12}ml^2$，转轴位于端点时$J=\frac{1}{3}ml^2$。

(7) 滑轮问题中，滑轮边缘上切向加速度大小$a_t=r\alpha$和物体的加速度大小 a 相等。

(8) 刚体定轴转动的动能定理：



$$K=\sum_i \frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2=\frac{1}{2}\omega^2\sum_i \Delta m_i r_i^2=\frac{1}{2}J\omega^2, dA=\sum_i \vec{F_i}d\vec{r_i}+\sum_i\sum_{j>i}\vec{f_{ij}}d\vec{r_{ji}}=\sum_i \vec{F_i}d\vec{r_i}$$

注：$\sum_i\sum_{j>i}\vec{f_{ij}}d\vec{r_{ji}}=0$可以通过以 i 为参考系时，$d\vec{r_{ji}}\perp\vec{f_{ij}}$得到。

$$dA=\sum_i \vec{F_i}d\vec{r_i}=\sum_i F_i dr_i\cos\theta_i=\sum_i F_i dr_i\sin\alpha_i\sum_i F_i r_i\sin\alpha_i\,d\varphi=\sum_i M_i d\varphi$$

因此：$dA=Md\varphi$，由于$dA=dK$于是

$$Md\varphi=d\left(\frac{1}{2}J\omega^2\right)\ \Longrightarrow\ \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}Md\varphi=\frac{1}{2}J\omega_2^2-\frac{1}{2}J\omega_1^2$$

(9) 刚体的重力势能：$U=\frac{1}{2}mgz_c$（质心到地面距离）

(10)刚体定轴转动的功能原理：

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}(M_p+M)d\varphi=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}Md\varphi+\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}M_p d\varphi=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}Md\varphi+(-\Delta E_p)=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}Md\varphi+mgz_{c1}-mgz_{c2}=\frac{1}{2}J\omega_2^2-\frac{1}{2}J\omega_1^2$$

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}Md\varphi=\left(\frac{1}{2}J\omega_2^2+mgz_{c2}\right)-\left(\frac{1}{2}J\omega_1^2+mgz_{c1}\right)=E_2-E_1$$

其中 M 为除重力外其他力的和力矩，机械能为 E。若 $M=0$ 则$E=const.$，机械能守恒定律。

(11)刚体的角动量定理和角动量守恒定律：**形式和正常角动量定理和角动量守恒定律完全相同！**

$$d\vec{L}=\vec{M}dt$$

其中，$\vec{L}=J\vec{\omega},\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$，$L$ 即刚体角动量，M 即刚体受到的外力对转轴的力矩。

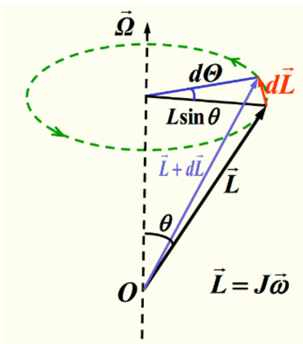
当 $M=0$ 时，$\vec{L}=J\vec{\omega}=const.$

(12)刚体的平面的平行运动可以分解为基轴的平动和绕基轴的转动。通常选取基轴过质心。刚体绕基轴转动角速度与基轴选择无关，与基点无关。因此刚体角速度具有绝对性。平面平行运动可以分解为质心的平动和相对于通过质心并且垂直于基面的轴转动。因此，刚体在任意位置的速度可表示为：$\vec{v}=\vec{v_c}+\vec{\omega}\times\vec{R}$。

（角速度与基点选择无关的证明）

由$\vec{v_p}=\vec{v_c}+\vec{\omega}\times\vec{R}=\vec{v_{c'}}+\vec{\omega'}\times\vec{R'}=\vec{v_c}+\vec{\omega}\times\vec{R_{C'}}+\vec{\omega'}\times\vec{R'}$且$\vec{R}=\vec{R_{C'}}+\vec{R'}$，化简即得$\vec{\omega}=\vec{\omega'}$

(13)刚体平面平行运动中的瞬时转轴（瞬心）$\vec{v_O}=\vec{0}$，因此$\vec{0}=\vec{v_c}+\vec{\omega}\times\vec{R_O}$（$\vec{R_O}$为瞬心位置矢量）



- 对于纯滚动，$v_c=R\omega, a_C=R\alpha$

(14)刚体的进动

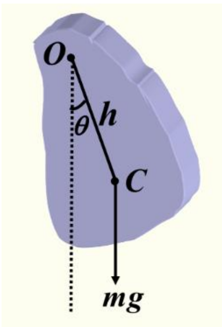
$$|d\vec{L}|=L\sin\theta\,d\Theta\ \Longrightarrow\frac{|d\vec{L}|}{dt}=L\sin\theta\frac{d\Theta}{dt}=L\sin\theta\ \Omega$$

$$|\vec{M}|=\left|\frac{d\vec{L}}{dt}\right|=\frac{|d\vec{L}|}{dt}=L\sin\theta\ \Omega\ \Longrightarrow\Omega=\frac{M}{L\sin\theta}$$

$$M=mgr_C\sin\theta\,,L=J\omega\Longrightarrow\Omega=\frac{mgr_c}{J\omega}$$

（由于进动发生后，$\vec{\omega_{total}}=\vec{\omega}+\vec{\Omega}$，仅当$\vec{\omega}\gg\vec{\Omega}$时有$\vec{\omega_{total}}\approx\vec{\omega}$）

12. **简谐振动**



以平衡位置为坐标原点，有回复力$f=-kx$，即$-kx=m\frac{d^2x}{dt^2}$，令$\omega^2=\frac{k}{m}$

物理摆（右图）：$M=J\alpha=J\frac{d^2\theta}{dt^2}\Longrightarrow mgh\sin\theta=J\frac{d^2\theta}{dt^2}\Longrightarrow J\frac{d^2\theta}{dt^2}-mgh\theta=0\ (\sin\theta\approx\theta)$

令$\omega^2=\frac{mgh}{J}$。

所有满足$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$方程的通解为：$x=A\cos(\omega t+\varphi)$

- $\omega t+\varphi$为 t 时刻的相位，φ为 $t=0$ 时刻的初相位。描述简谐振动的三个特征参量：振幅、角频率、相位。

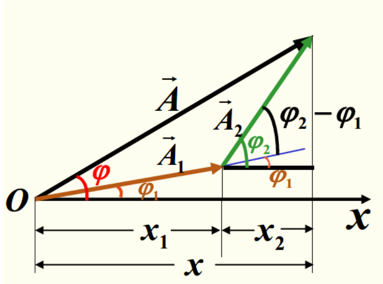
• φ减小➞图像向 t 轴正方向移动。

• 若$t=0$时有$x=x_0, v=v_0$，则$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}, \tan\varphi=-\frac{v_0}{\omega x_0}$。

• 简谐振动的能量：$K_{max}=\frac{1}{2}kA^2, K_{min}=0, U_{max}=\frac{1}{2}kA^2, U_{min}=0$。

• 简谐振动的机械能$E\propto A^2$。

13. 一维简谐运动的合成



$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2-2A_1A_2\cos(\pi-(\varphi_2-\varphi_1))}=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

$$\varphi=\tan^{-1}\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$$

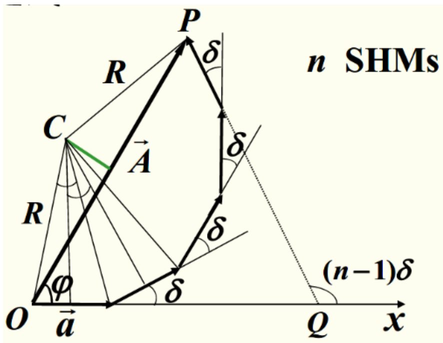
• 当$\varphi_2-\varphi_1=2k\pi$，$A=A_1+A_2$；当$\varphi_2-\varphi_1=(2k+1)\pi$，$A=|A_1-A_2|$。

【例：n 个简谐振动的合成】

振幅均为 a，角频率均为ω，相位依次差δ的若干简谐振动的合成：

$$x_1=a\cos(\omega t), x_2=a\cos(\omega t+\delta), x_3=a\cos(\omega t+2\delta), \dots, x_n=a\cos(\omega t+(n-1)\delta)$$

$$x=x_1+x_2+\cdots+x_n=A\cos(\omega t+\varphi)$$



在 PCO 中，$\sin\frac{n\pi}{2}=\frac{\frac{A}{2}}{R}\Longrightarrow A=2R\sin\frac{n\pi}{2}$

又在 POQ 中，$2\varphi=(n-1)\delta\Longrightarrow\varphi=\frac{(n-1)\delta}{2}$

又由于在每个小三角形中，$\frac{\frac{a}{2}}{R}=\sin\frac{\delta}{2}$，因此$A=\frac{a\sin\frac{n\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}$，则合振动

$$x=a\frac{\sin\frac{n\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}\cos\left(\omega t+\frac{(n-1)}{2}\delta\right)$$

• **拍**：两个振幅相同，频率较高但是相差不大的简谐振动的合成：

$$x_1=A\cos(\omega_1 t+\varphi), x_2=A\cos(\omega_2 t+\varphi)$$

$$x=x_1+x_2=2A\cos\frac{(\omega_2-\omega_1)t}{2}\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\varphi\right)\approx 2A\cos\frac{(\omega_2-\omega_1)t}{2}\cos(\omega_1 t+\varphi)$$

一个高频振动受低频振动的调制，**振幅变化周期为$2A\cos\frac{(\omega_2-\omega_1)t}{2}$周期的一半**（因为振幅有绝对值！）

$$T=\frac{1}{2}\frac{2\pi}{\frac{\omega_2-\omega_1}{2}}=\frac{2\pi}{\omega_2-\omega_1}, f=\frac{\omega_2-\omega_1}{2\pi}=f_2-f_1$$

14. 二维简谐振动的合成（李萨如图形）

$$x=A_1\cos(\omega t+\varphi_1), y=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

• $\varphi_2-\varphi_1=2k\pi\Longrightarrow\frac{y}{x}=\frac{A_2}{A_1}$

• $\varphi_2-\varphi_1=\pi+2k\pi\Longrightarrow\frac{y}{x}=-\frac{A_2}{A_1}$

• $\varphi_2-\varphi_1=\frac{\pi}{2}+2k\pi\Longrightarrow\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$（顺时针方向）

• $\varphi_2-\varphi_1=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\Longrightarrow\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$（逆时针方向）

• 其他：斜椭圆

15. 阻尼振动：$-kx-b\frac{dx}{dt}=m\frac{d^2x}{dt^2}$，令$2\alpha=\frac{b}{m}, \omega_0^2=\frac{k}{m}$（$\omega_0, \alpha$分别称为固有角频率和阻尼因子）

$$x=Ae^{-\alpha t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}t+\varphi\right)\ (\alpha<\omega_0)$$

上式为欠阻尼振动，固有角频率和阻尼因子相等时为临界阻尼，阻尼因子大于固有角频率时为过阻尼运动。

16. 受迫振动：$-kx-b\frac{dx}{dt}+F=m\frac{d^2x}{dt^2},F=F_0\cos\omega t$，$2\alpha=\frac{b}{m},\omega_0^2=\frac{k}{m},f_0=\frac{F_0}{m}$

$$x=A_0e^{-\alpha t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}t+\varphi_0\right)+A\cos(\omega t+\varphi)$$

左项为暂态项，右项为定态项。$A=\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2}},\tan\varphi=-\frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$

振幅和外力的频率有关，当外力频率$\omega=\sqrt{\omega_0^2-2\alpha^2}$（共振频率）时，$A_{max}=\frac{f_0}{2\alpha\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}}$，共振。

17. 波（机械波需要介质，电磁波不需要介质；横波和纵波）**波是振动状态在空间的传播**。

(1) 简谐波：具有空间周期性，用波长λ（一个周期内传播距离）来表示空间周期性，则波速$v=\frac{\lambda}{T}=f\lambda=\frac{\omega\lambda}{2\pi}$.

(2) 某一时刻振动相位相同的各点构成的曲面称波（阵）面。

(3) 平面简谐波 波函数$y=y(x,t)$，在不考虑介质吸收的情况下

$$y(0,t)=A\cos(\omega t+\varphi),\quad y(x,t)=A\cos\left(\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\varphi\right)=A\cos(\omega t-kx)$$

$k=\frac{\omega}{v}=\frac{2\pi}{\lambda}$ 称角波数。上式为波沿 x 轴正方向传播的波函数，若波沿 x 轴负方向，则改为$\omega t+kx$。

(4) 平面波的波动方程（弦上的横波，设线密度为μ，则$dm=\mu dx,dx\approx dl$

水平方向视为长度不变，加速度为 0：

$$T_2\cos\alpha_2=T_1\cos\alpha_1=T$$

$$T_2\sin\alpha_2-T_1\sin\alpha_1=\frac{T}{\cos\alpha_2}\sin\alpha_2-\frac{T}{\cos\alpha_1}\sin\alpha_1=T(\tan\alpha_2-\tan\alpha_1)=T\left(\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x+dx}-\left(\frac{dy}{dx}\right)_x\right)=T\frac{d^2y}{dx^2}dx$$

因此，$T\frac{d^2y}{dx^2}dx=\mu dx\frac{d^2y}{dt^2}\Longrightarrow\frac{\partial^2y}{\partial t^2}=\frac{T}{\mu}\frac{\partial^2y}{\partial x^2}=v^2\frac{\partial^2y}{\partial x^2}$即为波动方程。

因此，弦或绳上横波波速$v=\sqrt{\frac{T}{\mu}}$；细棒中纵波波速$v=\sqrt{\frac{Y}{\rho}}$；固体中横波波速$v=\sqrt{\frac{G}{\rho}}$。

（Y杨氏模量，G切变模量，ρ体密度）

(5) 平面简谐波的能量密度：考虑弦上距 O 为 x 的原长 dx 的线元 ab，线密度为μ，T为张力。

$$dK=\frac{1}{2}\mu dx\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2,dU=T(dl-dx)=T\left(\sqrt{dx^2+dy^2}-dx\right)=T\left(dx\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\cdots\right)-dx\right)\approx\frac{1}{2}Tdx\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

故$dE+dK+dE$，由于平面简谐波中，$v^2=\frac{T}{\mu},k=\frac{\omega}{v}$从而$dK=dU$。

由于$y=A\cos(\omega t-kx)$，故$dK=\frac{1}{2}\mu dx\omega^2A^2\sin^2(\omega t-kx)=\frac{1}{2}Tdxk^2A^2\sin^2(\omega t-kx)=dU$有

$$dE=\mu dx\omega^2A^2\sin^2(\omega t-kx),\qquad \overline{dE}=\frac{1}{2}\mu dx\omega^2A^2$$

设弦横截面积为 S，则$\mu\times1=\rho(S\times1)$

$$dE=\rho Sdx\omega^2A^2\sin^2(\omega t-kx)$$

$$w=\frac{dE}{Sdx}=\rho\omega^2A^2\sin^2(\omega t-kx),\overline{w}=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2$$

则 w 被称为**能量密度**。

(6) 平面简谐波的能流密度：单位时间内通过垂直于波的传播方向上单位面积的机械波的能量$\vec{S}$。

$$\vec{S}=w\vec{v},\qquad S=wv=\rho\omega^2A^2\sin^2(\omega t-kx)v$$

机械波的强度用平均能流密度 I 来表示，

$$I=\bar{S}=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2v$$

【用能流密度推导球面简谐波的波动式】方法：利用通过两个球面的能流相等，即

$$I_14\pi r_1^2=I_24\pi r_2^2$$

(7) 声强级：$L_I = \lg\frac{I}{I_0}$，$I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$ 。

(8) 干涉：相干条件（频率相同，振动方向平行，相位差恒定）

$$y_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1 - kr_1), y_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2 - kr_2)$$

$$y = y_1 + y_2 = A\cos(\omega t + \varphi), A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi, \Delta\varphi = \left(\varphi_1 - \varphi_2 - k(r_1 - r_2)\right)$$

由于$I \propto A^2$，于是$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}\cos\Delta\varphi$

- $\Delta\varphi = 2n\pi, A = A_1 + A_2, I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}$（干涉相长）
- $\Delta\varphi = 2n\pi + \pi, A = |A_1 - A_2|, I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1I_2}$（干涉相消）

当$\varphi_1 = \varphi_2$时，$\Delta\varphi = k(r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$，则$r_2 - r_1 = n\lambda$时干涉相长，$r_2 - r_1 = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$时干涉相消。

- 波疏介质➞波密介质，反射时相位突变π，称半波损失。

(9) 驻波：两列振幅相同的相干波在同一直线上沿相反方向传播时叠加，一种特殊的干涉现象，各振动质元振幅各不相同，但保持不变。有波节和波腹。

$$y_1 = A\cos(\omega t - kx), y_2 = A\cos(\omega t + kx)$$

$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos kx\cos\omega t = \left(2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\cos\omega t$$

称左项为振幅因子，右项为谐振因子。

- 波腹：$\cos\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm1$，$x = n\frac{\lambda}{2}(n = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$
- 波节：$\cos\frac{2\pi x}{\lambda} = 0$，$x = (2n+1)\frac{\lambda}{4}(n = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$

能量情况：总平均能流密度为 0，平均来说没有能量的传播，只有能量在波腹和波节中流动。

(10)衍射：（惠更斯原理）波动传到的各点都可视为发射球面子波的波源，在其后的任一时刻，这些子波波阵面的包络面就决定新的波阵面。

(11)简正模：两端固定紧张的弦，在一些频率下可以形成驻波。

$$n\frac{\lambda}{2} = l\ (n = 1,2,3,\ldots), f = \frac{v}{\lambda} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}\frac{1}{\lambda}$$

基频$f_1 = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$；n 次谐频$f_n = nf_1$。

弦的振动可以看成多个简正模的叠加。

(12)多普勒效应

a) 观测者运动：观测者接收到的频率为单位时间内通过观察者的完整波长数。波以速度$u + v_r$通过观察者，

$$f_r = \frac{u + v_r}{\lambda} = \frac{u + v_r}{u/f} = \frac{u + v_r}{u}f, \qquad v_r\text{相对运动取正，相背运动取负}$$

b) 波源运动：

$$f_r = \frac{u}{\lambda'} = \frac{u}{uT - v_sT} = \frac{u}{(u - v_s)}f, \qquad v_s\text{相对运动取正，相背运动取负}$$

c) 一起运动：

$$f_r = \frac{u \pm v_r}{uT \mp v_sT} = \frac{u \pm v_r}{u \mp v_s}f$$

d) 波源和观测者不是沿着连线方向移动，则均分解至连线方向计算（纵向多普勒效应）。

(13)波源的速度超过波速：马赫锥$\sin\theta = \frac{u}{v_s}$；

波源的速度等于波速：所有的波面在一点相切，$f_r \to +\infty$