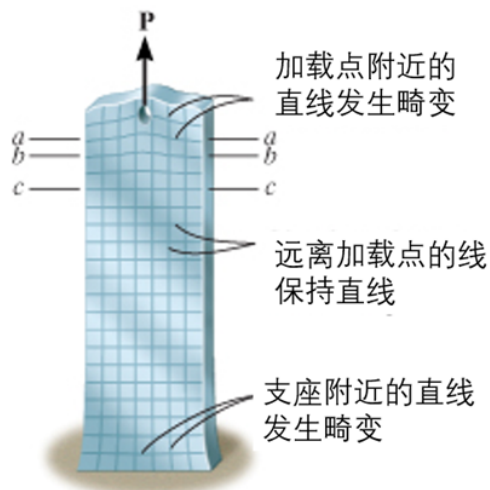


轴向力

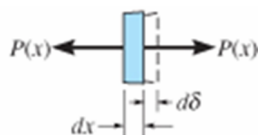
圣维南原理



圣维南原理指出，物体上任何由荷载引起的局部效应都将在荷载作用的一定范围外消散或趋于平滑。

一般地，最小距离至少等于加载横截面的长边尺寸。对图示杆件来说，最小距离为杆件宽度。

弹性变形



$$\sigma = \frac{P(x)}{A(x)} \quad \varepsilon = \frac{d\delta}{dx} \quad \sigma = E(x)\varepsilon \implies d\delta = \frac{P(x)dx}{A(x)E(x)}$$

$$\delta = \int_0^L \frac{P(x)dx}{A(x)E(x)}$$

其中， δ 为两点之间相对位移， L 为两点间距离， $P(x)$ 为与一端距离 x 的截面轴力， $A(x)$ 为杆件的截面积， $E(x)$ 为材料的弹性模量。

其中，符号规定为 $\delta > 0$ 为伸长； $\delta < 0$ 为缩短。

等轴力作用的匀质杆件

$$\delta = \frac{PL}{AE}$$

分段叠加作用

$$\delta = \sum_{i=1}^n \delta_i = \sum_{i=1}^n \frac{P_i L_i}{A_i E_i}$$

叠加原理

将荷载分为几部分，先将各部分荷载分别作用在构件上，求出每部分荷载引起的应力或位移，将以上结果相加，即可得到总的应力或位移。

适用条件

1. 荷载不显著改变构件的原始几何形状（外力和内力之间线性关系）；
2. 内力与所求应变或位移呈线性关系（应力与应变线性关系，应变与位移线性关系）。

超静定轴向受力杆件

新增条件 $\delta_{total} = x$ （变形协调方程）

温度应力

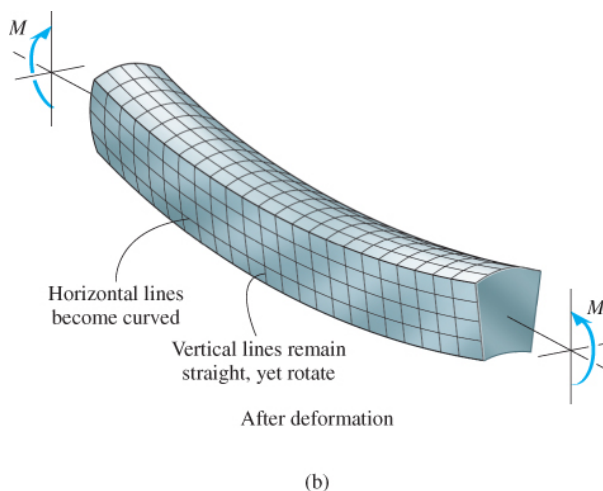
$$\delta_T = \alpha \Delta T L$$

其中， δ_T 为杆长改变量； α 为线性膨胀系数； ΔT 为杆件温度变化量； L 为初始杆长。

弯曲

直杆的弯曲变形

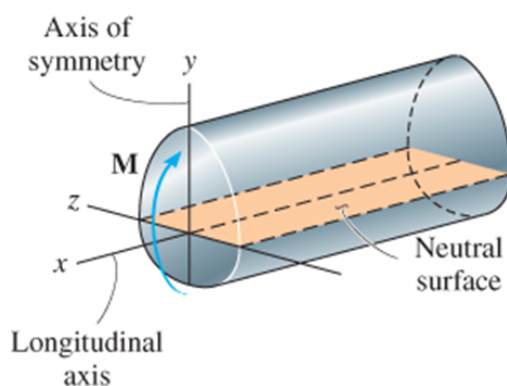
纯弯作用：当弯矩作用在直方梁上，其轴向水平线发生弯曲而垂直于轴向的线仍然保持直线但发生了转动。



受到正向弯曲的梁，其底部受拉而其顶部受压。

中性层 杆件轴向长度不发生改变的一层纤维。

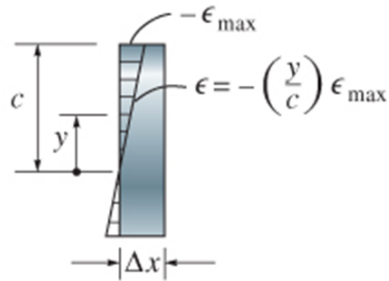
中性轴 横截面上位于中性层上的横轴。



假定

1. 与中性轴相交的纵轴x的长度不发生变化，但会变成位于x-y平面（对称面）内的曲线；
2. **平截面假定** 变形过程中所有横截面依旧保持为平面且垂直于变形之后的纵轴。

变形协调关系



Normal strain distribution

$$\varepsilon = -\left(\frac{y}{c}\right) \varepsilon_{max}$$

其中， c 为中性轴到截面上边缘的距离。

弯曲公式

本构关系 假设材料处于线弹性状态，且为单轴应力状态，则有

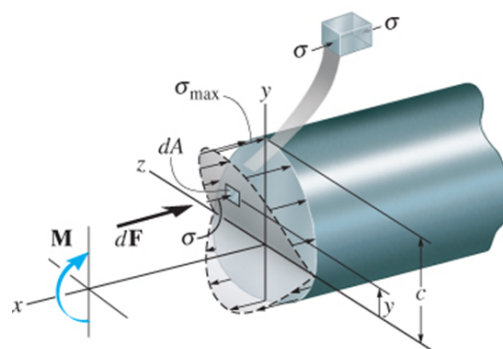
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

从而，由变形协调关系，有

$$\sigma = -\left(\frac{y}{c}\right) \sigma_{max}$$

即正应力线性分布。

平衡关系



Bending stress variation

(c)

沿纵轴方向力平衡：

$$F_x = \int_A \sigma dA = -\left(\frac{\sigma_{max}}{c}\right) \int_A y dA = 0 \implies \int_A y dA = 0$$

从而**中性轴通过形心**。

另一方面，根据力矩平衡，有

$$M = - \left(\frac{\sigma_{max}}{c} \right) \int_A y^2 dA \implies \sigma_{max} = - \frac{Mc}{I}$$

将变形协调关系代入后，有

$$\sigma = - \frac{My}{I}$$

上两式称为**弯曲公式**

使用假定条件

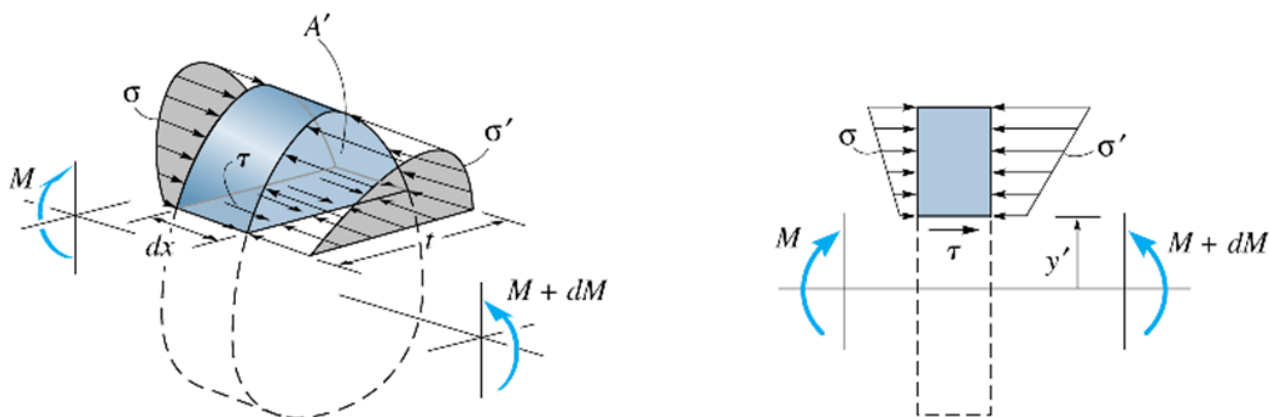
1. 截面变形符合平截面假定；
2. 材料为线弹性，受拉、受压弹性模量相同；
3. 材料为单轴应力状态。

当跨高比大于5时，弯曲公式计算结构偏低，误差不大于1%，满足工程应用要求。

剪切

剪切公式

注：讨论弯曲时假设梁变形后横截面仍保持平面且垂直于梁弯曲后的纵轴，即平截面假定。严格地说，当梁同时受到弯矩和剪力作用时，实际情况与平截面假定不符。但是对于细长梁（与其长度相比，梁高很小）来说，由于翘曲很小，可以忽略不计，仍可使用**平截面假定**。



根据**弯曲公式**有（负号消失由于图中 σ 方向已经向内）

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

平衡条件

$$\begin{aligned}
\sum F_x = 0 &\Rightarrow \int_{A'} \sigma' dA - \int_{A'} \sigma dA - \tau(tdx) = 0 \\
\int_{A'} \left(\frac{M + dM}{I} \right) y dA - \int_{A'} \frac{M}{I} y dA - \tau(tdx) &= 0 \\
\left(\frac{dM}{I} \right) \int_{A'} y dA &= \tau(tdx) \\
\tau &= \frac{1}{It} \left(\frac{dM}{dx} \right) \int_{A'} y dA = \frac{V}{It} \int_{A'} y dA
\end{aligned}$$

由此导出**剪切公式**

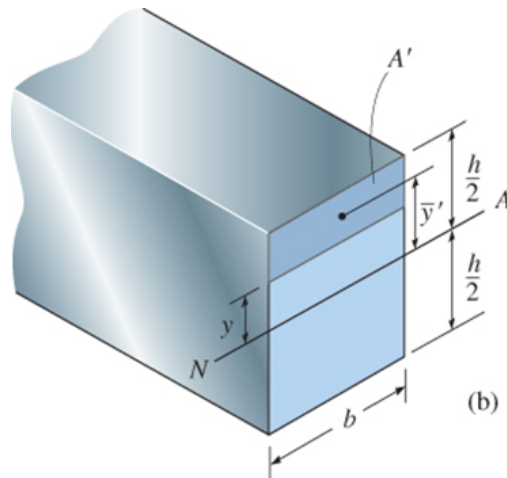
$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

其中， V 为截面总剪力； τ 为杆件中距离中性轴 y' 处的剪应力，假设在截面宽度 t 上平均分布； I 为整个横截面对中性轴惯性矩， t 为杆件在要求 τ 的点处的横截面宽度。 $Q = \int_{A'} y dA = \bar{y}' A'$ 为 A' 对中和轴的静矩， \bar{y}' 为 A' 面积的形心。

适用条件 材料必须是线弹性的；且受拉与受压时弹性模量相同。（与弯曲公式相同）

梁的剪切应力

设有宽度 b 高度 h 的矩形横截面梁

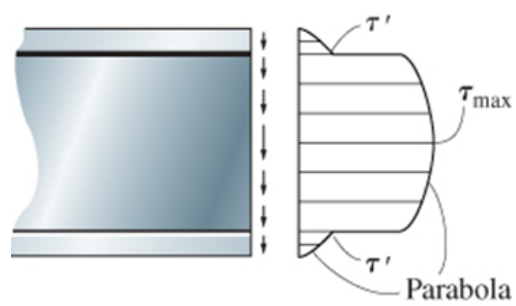


$$\begin{aligned}
Q &= \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) b \\
\tau &= \frac{VQ}{It} = \frac{VQ}{Ib} = \frac{6V}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)
\end{aligned}$$

在 $y = 0$ 时有 $\tau_{max} = 1.5 \frac{V}{A}$ ，即 τ_{max} 比 τ_{avg} 大50%。

局限性

1. 剪切公式推导过程中一条主要假设是在欲求剪应力处，剪应力在截面宽度 t 上的分布是均匀的（如宽翼缘梁不适合，会产生突变；对于宽翼缘截面梁，翼缘上的剪应力远小于腹板，因此可不必计算）



Intensity of shear-stress distribution
(profile view)

(c)

2. 与基于弹性力学的精确解相比， τ_{max} 的误差（其值出现在横截面边缘处）在宽高比 b/h 为 2 时可以达到 40%，而宽高比 b/h 为 0.5 时仅为 3%。
3. 剪切公式不应用于确定扁截面，或横截面突然变化点处，或倾斜边界上的点处的剪应力。对于这些情况，剪应力应使用基于弹性理论的方法来求解。