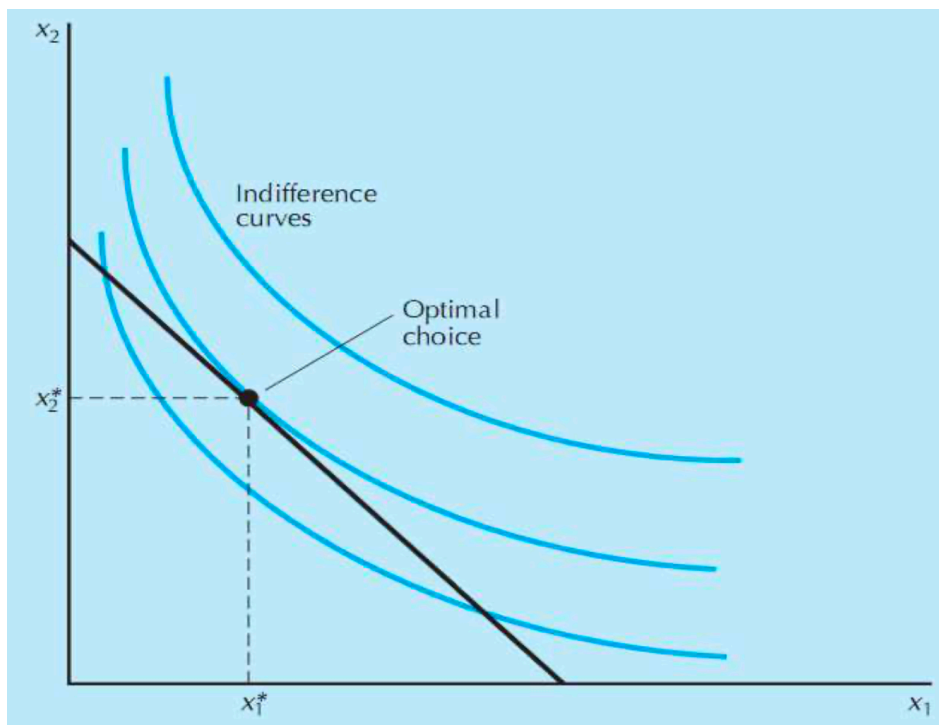


5. 选择

选择：消费者总是购买他所能负担的最佳物品（消费束）。



$$\begin{aligned} \max_{\{x_1, x_2\}} \quad & u(x_1, x_2) \\ \text{s. t.} \quad & \begin{cases} p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

上图中，最优解 (x_1^*, x_2^*) 为预算线与无差异曲线的切点。

解释（数学） 若商品越多越好，那么最优情况下一定把钱用完，则上述数学问题等价于

$$\begin{aligned} \max_{\{x_1, x_2\}} \quad & u(x_1, x_2) \\ \text{s. t.} \quad & \begin{cases} p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

利用拉格朗日求极值，可以得到

$$\frac{\partial u / \partial x_1}{\partial u / \partial x_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

其中，左式为无差异曲线的斜率，右式为预算线的斜率。

解释（经济学） 当 $MRS = E$ 时，则

$$\frac{MU_1}{MU_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

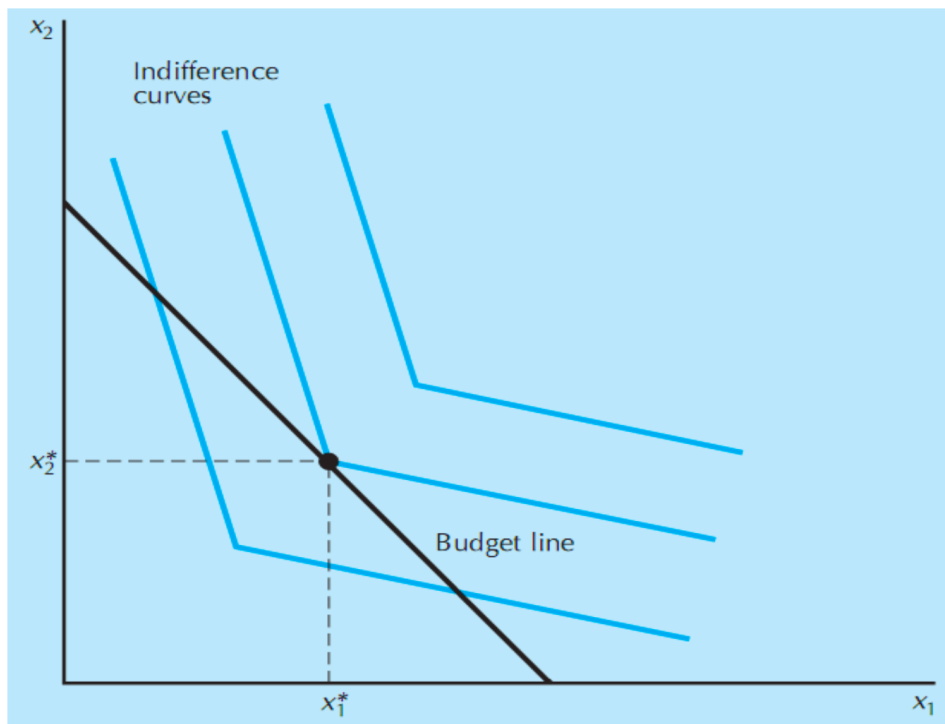
即

$$\frac{MU_1}{p_1} = \frac{MU_2}{p_2}$$

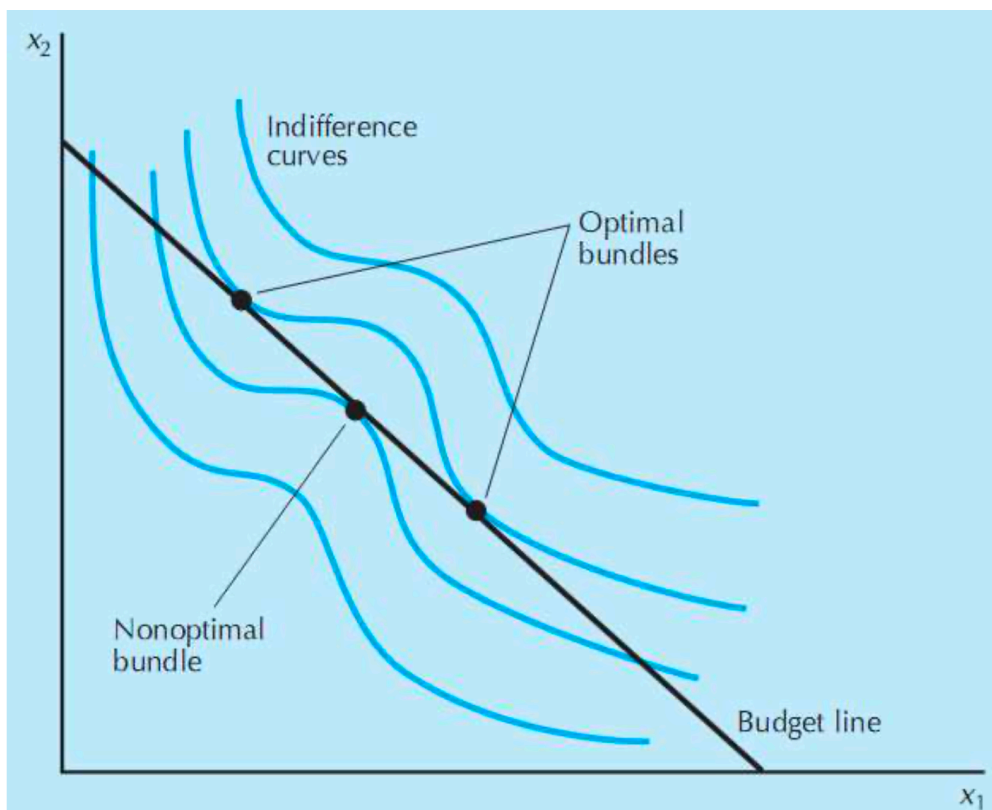
每单位价格商品1的边际效用等于每单位商品2的边际效用（否则可以通过交换得到更优解）。

一般情况下，相切既非最优的充分条件，亦非最优的必要条件。

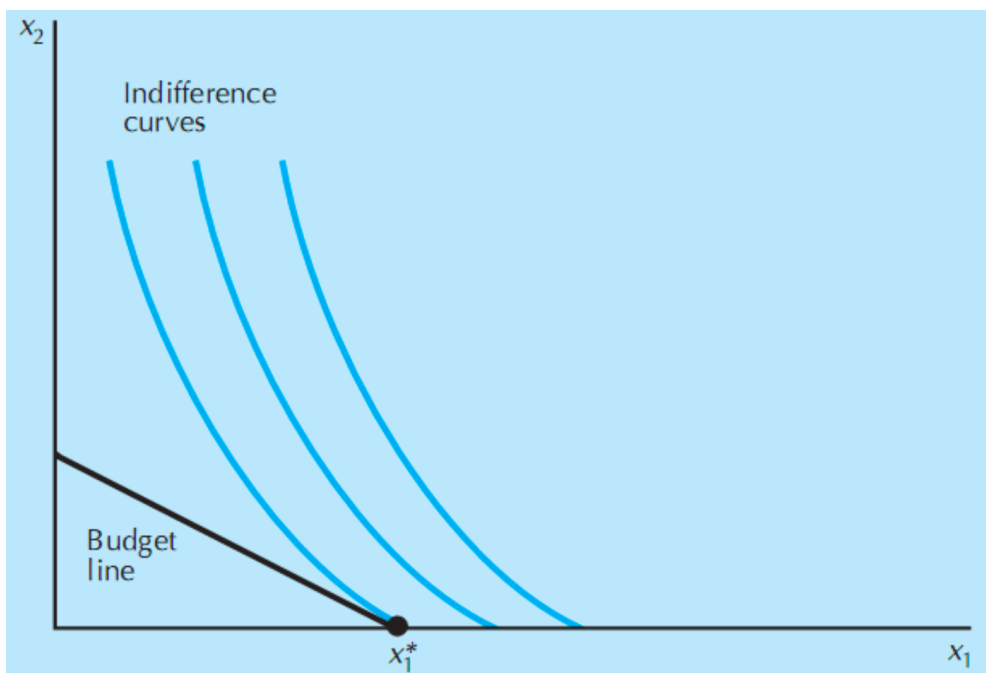
在下面的情况中，最优无需相切，因此必要性不满足。



在下面的情况中，相切不一定是最优，因此充分性不满足。



在下面的情况中，没有相切的点。



结论：只有偏好为严格凸的良性偏好，且最优解非角解的情况下，相切最优。

几种常用偏好下的最优选择

- 完全替代：总愿意以 $a : b$ 的比例交换商品 1 与商品 2。此时 $MRS = \frac{b}{a}, E = \frac{p_1}{p_2}$ ；若 $MRS > E$ ，则全部购买商品 1；若 $MRS < E$ ，则全部购买商品 2；否则任意消费束均可。
- 完全互补：总愿意以 $a : b$ 的比例同时消费商品 1 与商品 2。此时最优选择在折点处，可以解得 $\left(\frac{am}{ap_1 + bp_2}, \frac{bm}{ap_1 + bp_2}\right)$ 。
- Cobb-Douglas 效用函数

$$\begin{aligned} \max_{\{x_1, x_2\}} \quad & x_1^a x_2^b \\ \text{s. t.} \quad & \begin{cases} p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$MRS = E \implies \frac{ax_2}{bx_1} = \frac{p_1}{p_2} \implies bp_1 x_1 = ap_2 x_2 \implies \frac{p_1 x_1}{p_2 x_2} = \frac{a}{b}$$

花在商品 1 上的预算与花在商品 2 上的预算的比例恰好为 $a : b$ 。

因此解得 $\left(\frac{a}{a+b} \cdot \frac{m}{p_1}, \frac{b}{a+b} \cdot \frac{m}{p_2}\right)$ 。

- 拟线性偏好

$$\begin{aligned} \max_{\{x_1, x_2\}} \quad & x_2 + v(x_1) \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- 假设良性偏好，即 $v'(\cdot) > 0, v''(\cdot) < 0$ 。

$$MRS = E \implies v'(x_1) = \frac{p_1}{p_2}$$

假设解得 $x_1 = x_1^*$ ，则 $x_2^* = \frac{m - p_1 x_1^*}{p_2}$ ，需要满足 $x_2^* \geq 0$ ，即 $m \geq p_1 x_1^*$ 时切点才为最优选择。

结论：无论是否相切，预算线都不能穿过无差异曲线。

结论：给定市场价格，虽然人们因收入偏好不同选择也不同，但是（在良性偏好下）边际替代率总是与市场交换率保持一致。