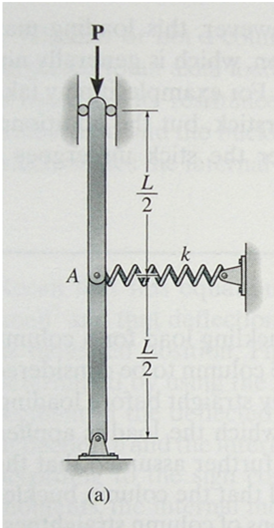
压杆稳定

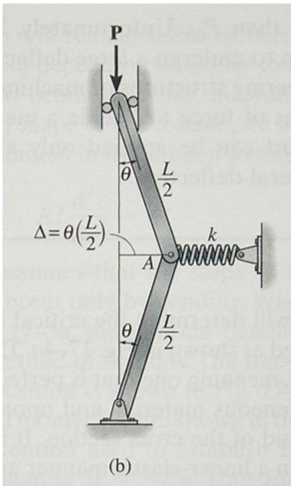
临界荷载

压杆在将要失稳时所能承受的最大轴向荷载称为**临界荷载** P_{cr}。



有一结构如上所示，当A点在水平方向发生向右的小扰动时，则有可能有三种情况：

1. 弹簧恢复，A 点恢复原状态；
2. 弹簧停止，A 点静止在该状态；
3. 弹簧一直被压缩，A 点不断向右移动；



状态 2 是临界状态，此时力 P 即为临界压力 P_{cr}。

弹簧恢复力 $F = k\Delta = k\frac{L}{2}\sin\theta \approx k\theta\frac{L}{2}$

干扰力：$F' = 2P_x = 2P\sin\theta = 2P\theta$

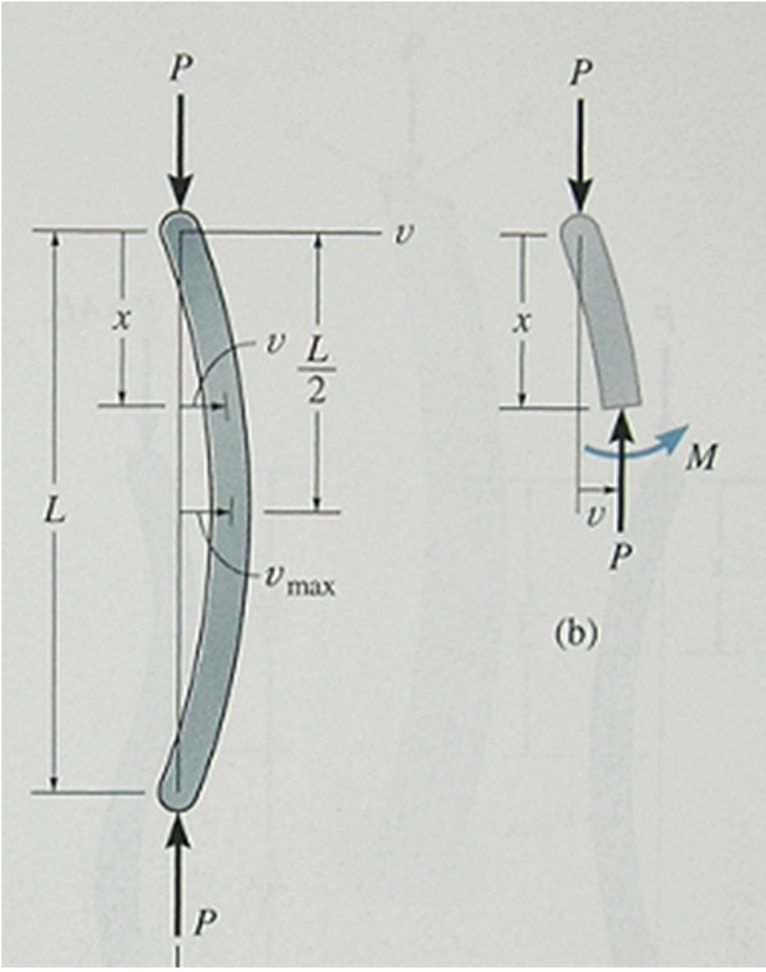
当 $F = F'$ 时，$P_{cr} = \frac{kL}{4}$，处于临界状态。

1. 稳定状态，静力平衡：恢复力大于干扰力，$F > F' \Longrightarrow P < \frac{kL}{4}$
2. 分叉点，随遇平衡：回复里等于干扰力，临界状态，$F = F' \Longrightarrow P = P_{cr} = \frac{kL}{4}$。
3. 失稳状态，不平衡：恢复力小于干扰力，$F < F' \Longrightarrow P > \frac{kL}{4}$。

铰接理想压杆

理想压杆 压杆加载前笔直、均质，且压力作用在横截面形心处。

这个情况下，压杆的恢复力来源于 **压杆自身抗弯的自我恢复能力。**



施加扰动后，恢复力

$$EI\frac{d^2\nu}{dx^2}=M$$

干扰下轴力 P 产生的附加弯矩：

$$M‘=-P\nu$$

临界状态：

$$M'=M\Longrightarrow EI\frac{d^2\nu}{dx^2}+P\nu=0$$

解微分方程，有

$$\nu=C_1\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)+C_2\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)$$

由于挠度限制，$\nu(0)=0$，从而

$$C_2=0\Longrightarrow\nu=C_1\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)$$

另一端有 $\nu(L)=0$，解得 $C_1=0$或 $\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right)=0$。前者是理想解，即荷载超过临界荷载后仍然保持笔直（不受任何微小干扰），舍去；后者继续化简，则

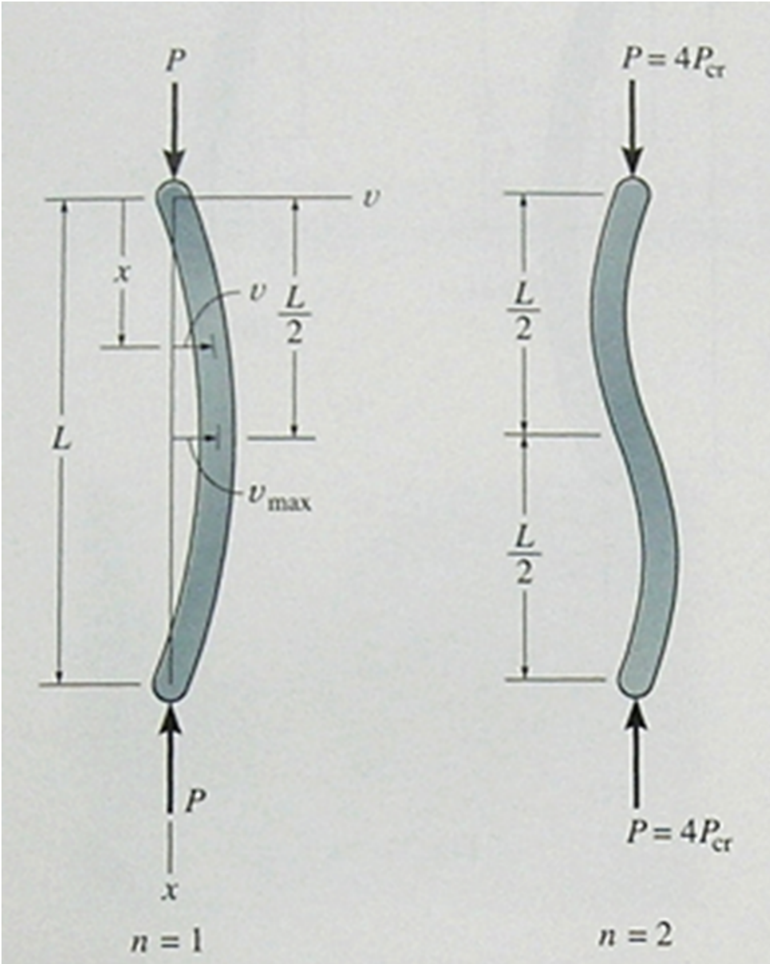
$$\sqrt{\frac{P}{EI}}L = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

从而

$$P = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2}$$

P 的最小值即为临界荷载

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$



式

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu L)^2}$$

称为 **欧拉临界力**，其中 μL 为失稳情况下的正弦半波长度，称为计算长度 L_e。

常数 C_1 表示最大失稳位移，可以为任意小值。

$n = \frac{1}{\mu}$ 表示了失稳模态的正弦半波数。

临界荷载与材料强度无关，仅和弹性模量 E （材料刚度）和压杆尺寸 I, L 有关。

压杆将围绕具有最小惯性矩的横截面的主轴（最弱轴）弯曲。

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{L^2 A} = \frac{\pi^2 E\frac{I}{A}}{L^2}$$

定义 $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$ 为 **回转半径**，则

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$$

称 L/r 为**长细比**，用来度量压杆的易弯曲性。

150是工程中允许的最大压杆长细比。

不同杆件的计算长度

- 两端铰接，$L_e = L$；
- 一端固定，一端自由，$L_e = 2L$；
- 两端固定，$L_e = 0.5L$；
- 一端铰接，一端固定，$L_e = 0.7L$。

结构的位移计算

虚功原理

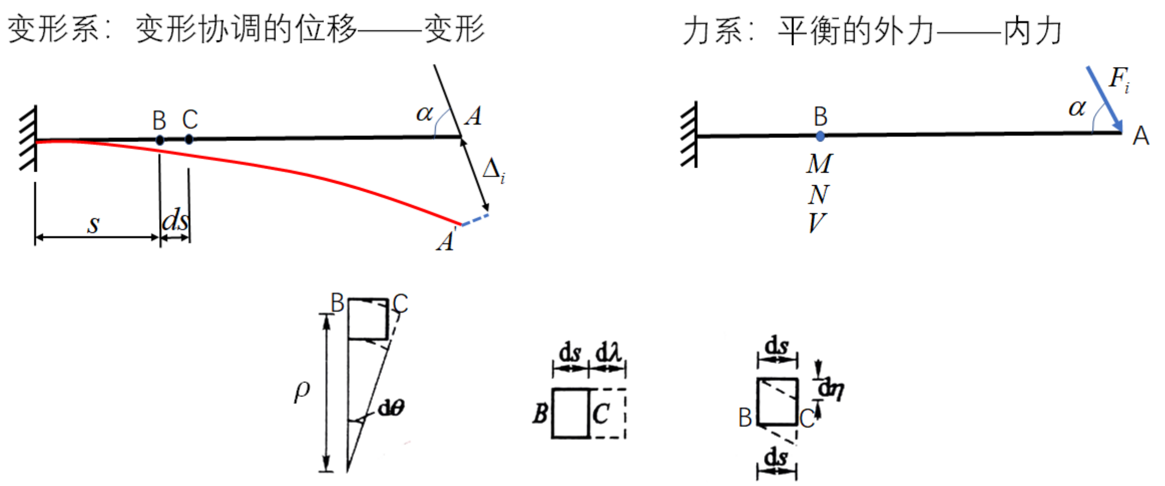
$$W_e = W_i \Longrightarrow \int_A T_i u_i^* dA + \int_V F_i u_i^* dV = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* dV$$

位移系由力系引起——实功；

位移系与力系没有因果关系——虚功；

位移应该是微小的，可以发生的，即**满足边界条件和连续性条件。**

杆件体系的虚功方程



力系和位移系相互独立

$$W_e = W_i$$

即外力虚功与内力虚功相等

$$W_e = \sum_i F_i \Delta_i$$

$$W_i = \int (M d\theta + N d\lambda + V d\eta)$$

由于

$$d\theta = \frac{1}{\rho} ds, d\lambda = \varepsilon ds, d\eta = \gamma ds$$

从而

$$\sum_i F_i \Delta_i = \int \left(\frac{M}{\rho} + N\varepsilon + V\gamma \right) ds$$

杆件虚功方程

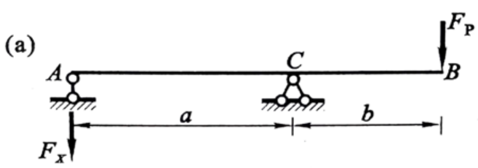
$$\sum_i F_i \Delta_i = \sum_j \int \left(\frac{M}{\rho} + N\varepsilon + V\gamma \right) ds$$

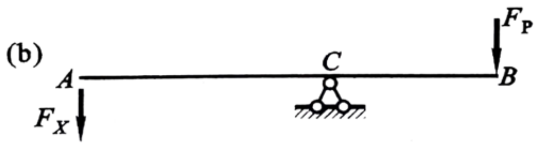
应用：虚设位移，求未知力；虚设力，求未知位移。

例：虚设位移，求未知力

1）求静定梁支座A的支座反力Fx。

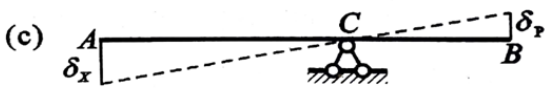
2)为求支座反力，需要给支座反力一个虚位移，对其做功。所以，可以撤除A处约束，代替以Fx，将静定结构变成机构。





3) 给A点虚位移δx，由于是机构则杆件发生刚体转动，B点产生相应虚位移δp。

4) 计算外虚功和内虚功。由于发生刚体转动，杆件并未发生变形，即内虚功为零。



$$W_e = F_x \delta_x - F_P \delta_P$$

$$W_i = 0$$

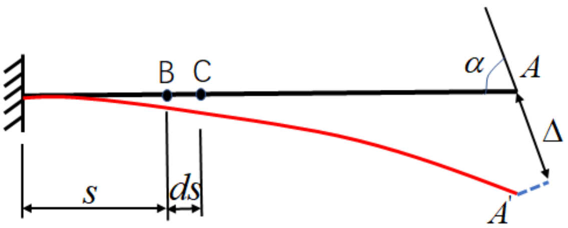
5) 求得Fx。

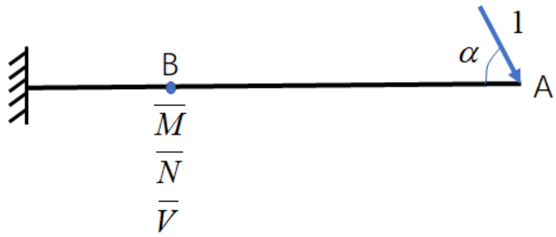
$$W_e = F_x \delta_x - F_P \delta_P = W_i = 0$$

$$F_x = \frac{F_P \delta_P}{\delta_x} = \frac{b}{a} F_P$$

虚力

$$\sum_i \bar{F}_i \Delta_i = \sum_j \int \left(\frac{\bar{M}}{\rho} + \bar{N}\varepsilon + \bar{V}\gamma \right) ds$$





设 M_p, N_p, V_p 为实际发生的力，则

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_p}{EI}, \varepsilon = \frac{N_p}{EA}, \gamma = \frac{kV_p}{GA}$$

其中，k 是截面形状系数。

可以得到位移计算的一般式：

$$\Delta = \sum_i \int \left(\frac{\bar{M} M_p}{EI} + \frac{\bar{N} N_p}{EA} + \frac{k \bar{V} V_p}{GA} \right) ds$$

各类结构的位移计算

梁和刚架 轴力和剪力影响较小，于是

$$\Delta = \sum_i \int \frac{\bar{M} M_p}{EI} ds$$

桁架 各杆件只受轴力，

$$\Delta = \sum_i \int \frac{\bar{N} N_P}{EA} ds = \sum_i \frac{\bar{N} N_P}{EA} l_i$$

桁架混合结构 受弯，受轴力，于是

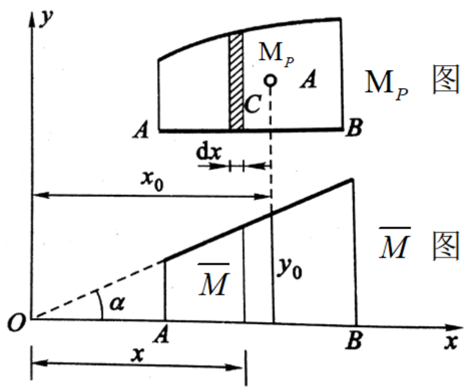
$$\Delta = \sum_i \left(\left(\int \frac{\bar{M} M_p}{EI} ds \right) + \frac{\bar{N} N_p}{EA} l_i \right)$$

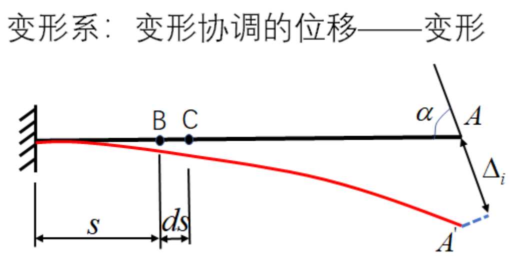
图乘法

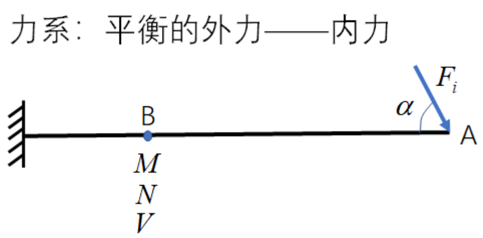
对于梁系体系，由于需要计算积分，因此采取一种图形解法——图乘法。

若 AB 段抗弯刚度 EI 是常数，则

$$\int \frac{\bar{M} M_p}{EI} dx = \frac{1}{EI} A y_0$$

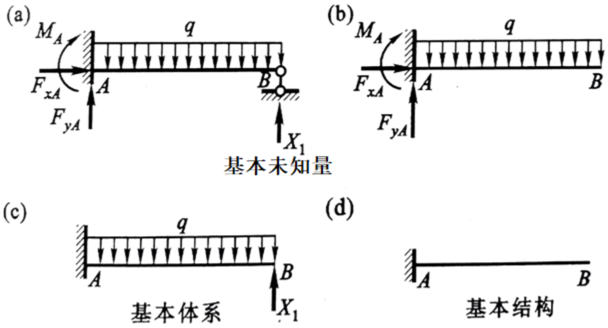




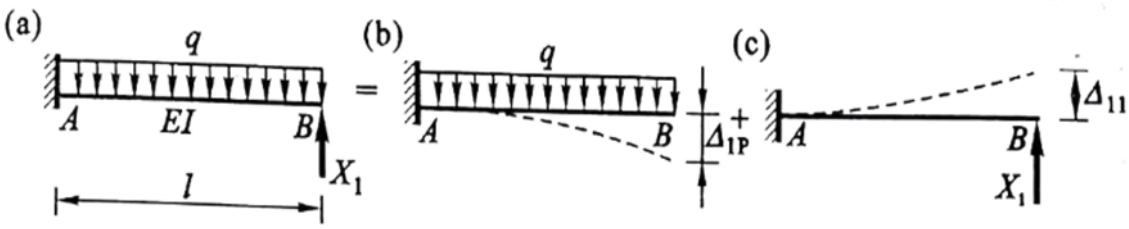


超静定结构

力法



原结构和基本体系的差别为：基本未知量是主动力还是被动力。



基本方程：

$$\delta_{1P} + X_1\delta_1 = 0$$

其中，δ_1 为 (c) 图中的 X_1 替换为单位力时，产生的位移。