

【大学物理 (2): 电磁场复习 (Chapter 10~13)】

Galaxies

1. **库仑定律 (Coulomb's law):** 库伦在 1785 年做了电斥力扭秤实验和电引力单摆实验, 提出了电力平方反比律, 即

$$F \propto \frac{1}{r^{2 \pm \delta}} \quad (\delta < 4 \times 10^{-2})$$

真空中, 真空介电常量 $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$, 则电力

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{21}$$

- 库仑定律是静电现象的基本实验规律, 在 $10^{-15} \sim 10^7 \text{m}$ 范围内均适用。
- 库仑定律适用于点电荷, 是一个理想模型。
- **推广** 只要施力点电荷保持静止即可。
- 若点电荷 q_1 以速度 v 匀速运动, 点电荷 q_2 静止不动, 则

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{21}, \quad \vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \left(\frac{\vec{v} \cdot \hat{r}_{21}}{cr}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \hat{r}_{12}$$

其中, \vec{F}_{12} 为点电荷 q_2 对点电荷 q_1 的作用力, \hat{r}_{21} 为点电荷 q_2 到点电荷 q_1 的方向。

【注】库仑定律满足平方反比律, 因此球壳对内部的作用力为 0。

2. **电场** 电荷周围的空间中存在的一种特殊形态的物质, 电荷的相互作用通过电场实现。对电荷有作用力是电场的特征性质。试验电荷 q_0 (电量充分小, 线度充分小) 放在场点 P 上, 试验电荷受力 \vec{f} , 则对任意确定场点, 定义**电场强度 (场强)**:

$$\vec{E} = \frac{\vec{f}}{q_0}$$

- 点电荷 q 的电场具有球对称性

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

- **场强叠加原理** $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n$ 。

3. 典型带电体产生的电场 1

- a) 均匀带电细棒在任一垂面上的电场分布 (线电荷密度 λ) (推导用换元)

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 d} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1), E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 d} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

当细棒无限长时 (或 $d \ll L$), $\theta_1 \rightarrow 0, \theta_2 \rightarrow \pi$, 则

$$E_x = 0, E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \vec{j}$$

- b) 均匀带电细圆环轴线上电场分布 (圆环带电总量 Q)

$$E_x = \frac{xQ}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}, E_y = 0$$

$$\vec{E} = E_x \vec{i}$$

- c) 均匀带电薄圆盘轴线上的电场分布 (面电荷密度 σ)

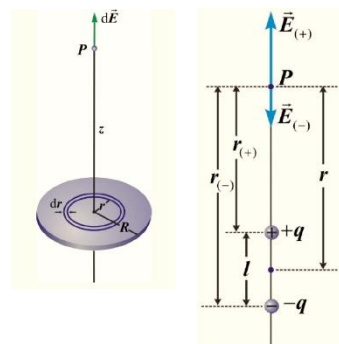
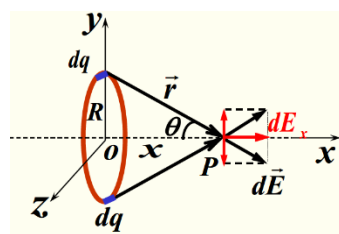
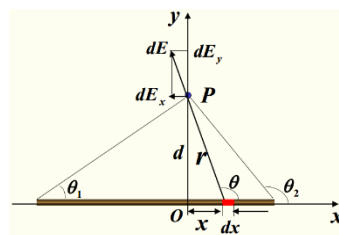
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right] \vec{k}$$

- d) **电偶极子** 轴线上的电场分布 (推导用场强叠加原理泰勒展开)

电偶极子是一对相距 l 的正负电荷, 分别为 $+q, -q$, 则定义**电偶极矩 (电矩)**

$\vec{p} = q\vec{l}$ 其中 \vec{l} 的方向从负电荷指向正电荷。轴线上距离电偶极子 r 的点处的电场强度大小 ($r \gg l$):

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{r^3}$$



4. **电场线** 电场区域内的一组曲线，满足：

- 电场区域内这些曲线上每一点处的切线方向都与该点处电场强度方向一致；
- 电场区域内每一点处的电场强度大小和该点处通过单位面积电场线条数成正比，即 $E \propto \frac{dN}{dS}$ 。

5. **电通量** 通过面积元 $d\vec{S}$ 的电通量 $d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}$ ；通过任意曲面 S 的电通量：

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

对于闭合曲面，即将积分符号化成闭合曲面积分即可。

6. **高斯定理** 在真空静电场中，通过任意一个闭合曲面的电通量等于该闭合曲面所包围的电荷电量的代数和的 $1/\epsilon_0$ 倍，与闭合曲面外的电荷无关，即

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{net}}{\epsilon_0}$$

其中， S 为高斯面。高斯定理说明了静电场是一个有源场。

7. 典型带电体产生的电场 2（具有高度对称性）（高斯面选取如图所示）

a) 无限大均匀带电平面（设面电荷密度 σ ）

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

其中，电场强度方向垂直于平面向外。

b) 无限长均匀带电细棒（设线电荷密度 λ ）

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

和通过场强叠加原理算出来的结果相同。

c) 均匀带电薄球壳产生的电场（总电荷 q ，半径 R ）

$$\vec{E} = 0 \quad (r < R)$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (r > R)$$

注：利用到了平方反比律的性质！

d) 均匀带电球体产生的电场（总电荷 q ，半径 R ）

$$\vec{E} = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \hat{r} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \quad (r < R)$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (r > R)$$

注：讨论 $r < R$ 时候，仅有 r 以内的电荷有效，利用体密度换算。

e) 半径为 R 的均匀带电球体空腔（半径为 a ）内的电场强度

在空腔处增补 $\pm\rho$ 的电荷分布，转化为半径为 R ，体电荷密度 $+\rho$ 的大球和半径为 a ，体电荷密度 $-\rho$ 的小球。

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{+\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}_1 + \frac{-\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{b}$$

为均匀电场！

8. **静电场的环路定理** 试验电荷在静电场中移动时，电场力所做的功只与试验电荷的起点和终点的位置有关，与路径无关，即静电场力是保守力。因此有

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

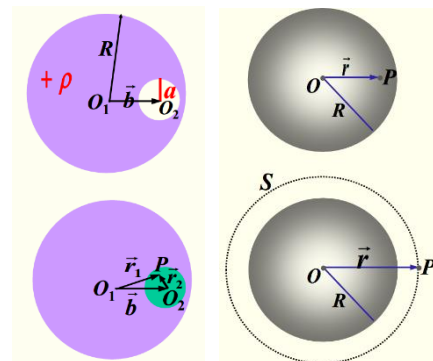
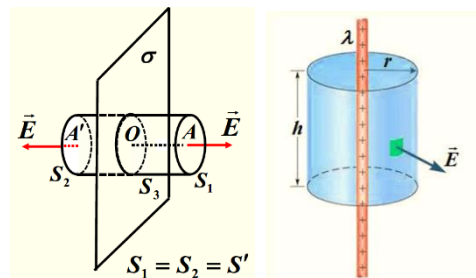
静电场中，电场强度沿任意闭合路径的环流为 0。说明了静电场是无旋场。

9. **电势和电势能** 保守力做功等于势能增量负值，当场源电荷为有限带电体时，电势能的零点通常选取在无穷远处。

$$A = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} q\vec{E} \cdot d\vec{l} = -[W(\vec{r}_b) - W(\vec{r}_a)]$$

当 $r_b = \infty$ 时，

$$W(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} q\vec{E} \cdot d\vec{l}$$



规定电势为电势能和电量 q 的比值，若选取无穷远处为电势零点，则也可以写出电势计算式

$$V(\vec{r}) = \frac{W(\vec{r})}{q} \Rightarrow V(\vec{r}) = W(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

实际问题中，常常选择大地或电器外壳的电势为 0。

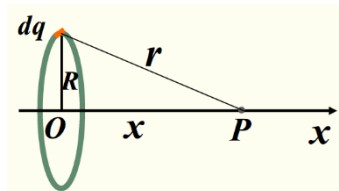
- **电势叠加原理** 点电荷系的电场的某点的电势，等于各个电荷单独存在时的电场在该点的电势代数和

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r}$$

10. 典型带电体产生的电势

- a) 半径为 R ，电量为 q 的均匀带电细圆环产生的电场在轴线上的电势（利用电势叠加定理求）

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + x^2}}$$

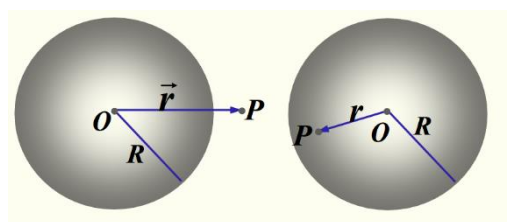


- b) 半径为 R ，电量为 q 的均匀带电球壳所产生的电场电势（利用电势定义以及已求得电场计算）

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (r < R), \quad V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (r > R)$$

- c) 半径为 R ，电量为 q 的均匀带电球体所产生的电场电势（利用电势定义以及已求得电场计算）

$$V = \frac{q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3} \quad (r < R), \quad V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (r > R)$$



或者，在计算 $r < R$ 时，以半径为 r 球面为界，将球体分成内外两部分，分别计算。内层球体产生的电场的电势和 $r > R$ 的情况相同；外层球体产生的电场的电势可以通过 b) 积分求得，两部分叠加即可。

11. 等势面 静电场内电势相等的点所组成的曲面为等势面。

- 等势面与电场线处处正交。（证明： $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp d\vec{l}$ ）
- 等势面较密集的地方场强较大，等势面较稀疏的地方场强较小。（由于 $\Delta V = \left| \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} \right| = \left| \int_P^Q E dl \right| \approx E \Delta s$ ，所以 $E \approx \frac{\Delta V}{\Delta s}$ ， $E = \left| \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta s} \right| = \left| \frac{\partial V}{\partial s} \right|$ 。

- 电势梯度的大小等于电势在该点的最大空间变化率，沿着等势面法向指向电势增加的方向，因此可以推得

$$\vec{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \right)$$

球坐标系下，

$$\vec{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{e}_\phi \right)$$

12. 电偶极子的电场 ($l \ll r$ ，电偶极矩 $\vec{p} = q\vec{l}$)

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_-} = \frac{q(r_- - r_+)}{4\pi\epsilon_0 r_+ r_-} = \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{p \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}, E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, E_\phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$

从而，

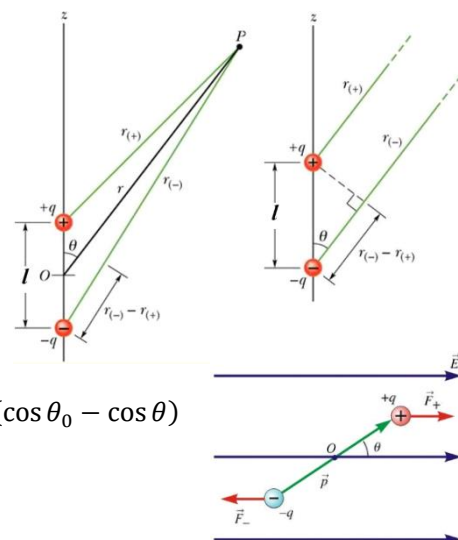
$$\vec{E} = E_r \hat{e}_r + E_\theta \hat{e}_\theta + E_\phi \hat{e}_\phi = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{e}_r + \sin \theta \hat{e}_\theta)$$

电偶极子的电势能（由于电偶极子， $E_+ \approx E_-$ ）

$$M = \frac{l}{2} (qE_+ + qE_-) \sin \theta = lqE \sin \theta = \vec{p} \times \vec{E}, \quad A = -\int_{\theta_0}^{\theta} M d\theta = -pE (\cos \theta_0 - \cos \theta)$$

令 $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ 时， $W_0 = 0$ ，则电偶极子在电场中的电势能为

$$W = -pE \cos \theta = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$



13. **静电场中的导体** 导体上电荷分布不随时间变化时, 自由电子不再出现宏观运动, 电场分布不随时间变化, 导体达到了静电平衡状态。导体是等势体, 导体表面是等势面。

- 导体静电平衡条件: 导体内部场强处处为 0。

- 达到静电平衡条件时导体上的电荷分布:

- 导体内部处处没有未抵消的净电荷 (即体电荷密度 $\rho = 0$), 电荷仅分布在导体的表面。

- 导体表面外侧附近空间的电场强度的方向与导体表面垂直, 电场强度大小与该处导体表面的面电荷密度有如下关系: (证明时选取一个上底在导体内部、下底在导体外的圆柱表面作为高斯面即可)

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

- 在一个孤立导体的表面上, 面电荷密度的大小与其表面的曲率有关。表面曲率大处的面电荷密度大, 表面曲率小处的面电荷密度小, 凹面处更小。

- 若导体内部有空腔存在, 而在空腔内没有其他带电体, 则 ①空腔内表面上处处没有电荷, 电荷只分布在导体表面上; ②空腔内没有电场。(证明: 以空腔为主体选取高斯面即可)

- 若导体内部有空腔存在, 而在空腔内有其他带电体, 则 ①空腔内表面上的电荷电量与腔内电荷的电量的代数和为 0; ②若导体接地, 则金属壳内、壳外电场被金属壳完全屏蔽, 互不影响。(证明: ①以空腔及空腔内表面为包围内容选取高斯面即可; ②将导体、大地看成一个大导体, 则壳外空间可以看作新空腔, 从而由上条知, 新空腔内 (即壳外) 没有电场, 即两部分互相屏蔽)

14. **静电场边值问题的唯一性** ① 给定静电场中各导体的几何形状和相对位置, 已知该空间内的自由电荷分布, 如果再给定每个导体上的总电量, 则空间各点场强唯一确定; ② 给定静电场中各导体的几何形状和相对位置, 已知该空间内的自由电荷分布, 如果再给定每个导体上的电势, 则空间各点场强唯一确定。

【例】无限大接地导体平板附近有一个点电荷 q , 求场强分布、面电荷密度。(由于导体电势为 0, 虚设镜像电荷后导体电势同样为 0, 因此二者电场强度相等, 利用新静电场的 $\vec{E} = -\nabla V$ 来计算场强分布, 再通过 $E_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (z \rightarrow 0)$ 求出面电荷密度)

15. **电容和电容器** 孤立导体电量和电势的比值只和导体形状、大小有关, 因此引入电容的概念

$$C = \frac{q}{V}$$

一般情况下, 非孤立导体的电量与其电势不成正比。

两个导体 (电容器的两极板) 分别带电 $+q, -q$, 两极板电势差 $V_A - V_B$, 则电容器的电容定义为

$$C = \frac{q}{V_A - V_B}$$

几种形状的电容器及其电容

- 平板电容器: 两块面积为 S 的平板, 分别均匀带电 $+q, -q$, 且 $d \ll \sqrt{S}$ (可看作无限大)

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = Ed = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} \Rightarrow C = \frac{q}{V_A - V_B} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

- 球形电容器: 两个同心导体球壳 A, B , 分别均匀带电 $+q, -q$

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \Rightarrow C = \frac{q}{V_A - V_B} = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{r_A r_B}{r_B - r_A} \right)$$

- 圆柱形电容器: 两个长直同轴导体圆筒 A, B , 且 $r_A < r_B \ll l$, 线密度分别为 $+\lambda, -\lambda$, $\lambda = \frac{q}{l}$ 。

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{r_A}^{r_B} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_B}{r_A} \Rightarrow C = \frac{q}{V_A - V_B} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{r_B}{r_A}}$$

16. **电介质** 电介质为绝缘体, 由中性分子组成。分为有极分子 (有固有电偶极矩)、无极分子。在有电场时, 有极分子发生取向极化, 无极分子发生位移极化, 导致了 $\sum_i \vec{p}_i = 0$ 变为 $\sum_i \vec{p}_i \neq 0$ 。于是会产生束缚电荷 (极化电荷)。

均匀介质极化后, 极化电荷只出现在介质分界处; 非均匀介质一般介质内部各处均出现极化电荷。

- 极化电荷的作用相当于减小自由点电荷的电量, 因此介质中两点之间相互作用力比真空中小。

$$\vec{f} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}$$

其中, $\epsilon_r \geq 1$ 为相对介电常量 (相对电容率)。

- 定义极化强度

$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V}$$

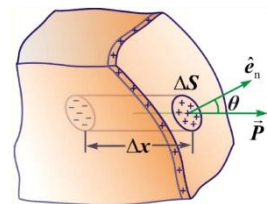
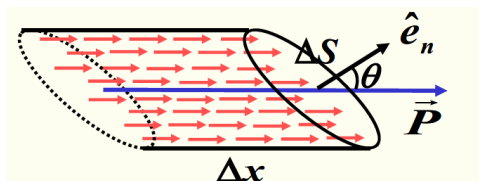
对于各向同性线性电介质, $\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$ 。 $\chi_e = \epsilon_r - 1$ 为电介质的极化率, $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ 为介电常量。

- 极化电荷面密度和极化强度之间的关系:

$$\Delta V = \Delta S \Delta x \cos \theta$$

由于各个分子如图横向排列, 相互抵消, 最后斜柱体两个底面的电荷形成电偶极子, 故

$$P \Delta V = \left| \sum_i \vec{p}_i \right| = (\sigma' \Delta S) \Delta x$$



因此 $\sigma' = P \cos \theta = \vec{P} \cdot \hat{e}_n$, 即极化电荷面密度和极化强度之间的关系。其中 \hat{e}_n 从介质指向真空 (或另一介质)。

对于两个介质的分界面, $\sigma' = \vec{P}_1 \cdot \hat{e}_{n1} + \vec{P}_2 \cdot \hat{e}_{n2}$, 一般 $\hat{e}_{n1} = -\hat{e}_{n2}$, 因此 $\sigma' = (\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \cdot \hat{e}_{n1}$ 。(不考虑厚度)

- 有介质存在时的环路定理 (将静电场分解成正常电荷形成的和极化电荷形成的推导容易得到)

$$\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_L (\vec{E}_0 + \vec{E}') \cdot d\vec{l} = 0$$

其中, E' 为极化电荷产生的电场强度, E_0 为原有电荷产生的电场强度。

- 有介质存在时的高斯定理 (将电荷分解成正常电荷和极化电荷)

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{net} + q'_{net}}{\epsilon_0}$$

对各向同性均匀线性电介质, 闭合曲面上任意面积元 dS 外侧的极化电荷 $\sigma' dS$, 由于电偶极子的特性 (正电荷穿出, 负电荷即在内部; 反之亦然), 因此内侧极化电荷 $dq' = -\sigma' dS$, 因此 $q'_{net} = \int_S dq' = -\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}$,

故

$$\oint_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} = q_{net} = \sum_i q_i$$

令 $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E}$ 为电位移矢量, 则将高斯定理表述为:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_i q_i \quad \text{or} \quad \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}$$

17. 电场能量

- 电容器的静电能: 电容器充电时候电源做功 $A = \int_0^Q U dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(CU)^2}{2C} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} QU$, 忽略介质损耗则电容

器静电能则等于这个电源做功, 即 $W = A = \frac{1}{2} QU$ 。

- 电场能量 即储藏在电场中的能量。(以平行板电容器为例推导)

$$W = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} \sigma S \cdot Ed = \frac{1}{2} \epsilon ES \cdot Ed = \frac{1}{2} DEV$$

- 静电场的能量密度 $w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} DE = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$ 。

18. 安培认为, 磁现象的本质是电流, 物质的磁性来源于其中的分子电流, 即分子电流假说; 从而磁体间的相互作用可以归结为电流之间的相互作用。

19. 根据小磁针或载流导线或运动电荷在磁场中受力情况来描述磁场, 引入描述磁场的物理量: 磁感应强度 B 。

$$B = \frac{F}{qv \sin \theta}$$

定义磁感应强度的方向为小磁针 N 极的指向。

20. 洛伦兹力公式 带电物体在磁场中受到力的作用

$$F = q\vec{v} \times \vec{B}$$

21. 磁力线 (磁感应线) 和电场线类似, 描述磁感应强度的分布情况。

22. 毕奥-萨伐尔定律 电流元对磁极的作用力的定量关系

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

其中, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{T} \cdot \text{m/A}$ 为真空磁导率。

• 一个带电运动物体产生的磁场: 设截面积 S , 带电量 q , 电量密度为 n , 则 $Id\vec{l} = nqSv d\vec{l} = nqS\vec{v} d\vec{l}$, 因此

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{nqSd\vec{l} \vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

而, $d\vec{B}$ 是由 $dN = nSdl$ 个电量为 q 的物体产生的, 于是

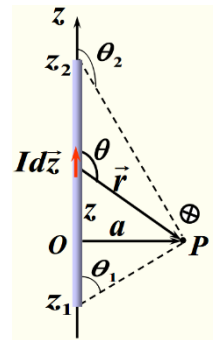
$$\vec{B} = \frac{d\vec{B}}{dN} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(q\vec{v} \times \vec{r})}{r^3}$$

23. 典型物体的磁场 1

a) 载流直导线, 电流为 I 。(利用换元积分可得)

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{z} \times \vec{r}}{r^3} \Rightarrow dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idz \sin \theta}{r^2}$$

$$B = \int_{z_1}^{z_2} dB = \dots = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$



b) 圆电流轴线上的磁场 (将磁场沿着 z 方向和 xOy 平面分解, xOy 平面分量合作用为 0)

$$dB_z = dB \sin \alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \sin \alpha$$

$$B = B_z = \int_0^{2\pi R} dB_z = \dots = \frac{\mu_0 R^2 I}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

当 $z \gg R$ 时候, $B = \frac{\mu_0 R^2 I}{2z^3}$, 即对于磁偶极子 (圆电流, $S \rightarrow 0$), 定义磁矩

$$\vec{m} = SI\vec{e}_n = \pi R^2 I \vec{e}_n$$

其中, \vec{e}_n 根据右手螺旋定则确定, 则上述式子可以化为

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\vec{m}}{z^3}$$

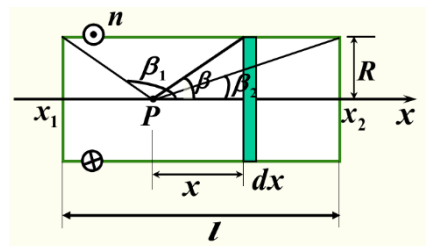
即为磁偶极子的磁场。

c) 载流螺线管轴线上的磁场 (看成许许多多圆电流组成), n 为匝数密度, 即单位长度有多少匝; (换元积分)

$$dB_p = \frac{\mu_0 R^2 I}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} \cdot ndx$$

$$B_p = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1)$$

对于无限长 ($l \gg R$) 的载流螺线管, $\beta_1 \rightarrow \pi, \beta_2 \rightarrow 0, B = \mu_0 n I$ 。



24. 磁通量 和电通量类似的, 仍然定义磁通量为单位面积的磁感线条数, 即

$$d\Phi_m = B dS \cos \theta = \vec{B} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

25. 磁高斯定理 在磁场中, 任取一个高斯面 S , 有

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

说明了磁场是一个无源场。

26. 磁安培环路定理 在磁场中, 任取一条闭合环路 L , 规定一个绕行方向, 则有

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$$

其中, I_i 为穿过闭合环路 L 的所有电流代数和 (电流正负由穿过方向决定, 和环路方向成右手螺旋则为正) 磁安培环路定理说明了磁场是涡旋场。

27. 典型物体的磁场 2: 无限大平面电流的磁场。

定义面电流密度 $\alpha = \frac{\Delta I}{\Delta l}$ (注意: 电流本身由于有方向, 占据了一维, 因此面电流密度实质上是一维说的, 也就是单位长度内电流的大小)
取如图所示环路, B 的方向可以通过对称性定出, 则可以求出

$$B = \frac{\mu_0 \alpha}{2}$$

方向如图所示。

28. 安培定律 磁场对载流导线的作用 (洛伦兹力的宏观表现)

$$dF = Id\vec{l} \times \vec{B}$$

两个电流元之间的作用力:

$$d\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \hat{r}_{12})}{r_{12}^2}$$

圆形导线在恒定磁场中受力矩

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

29. 带电粒子在磁场中的运动

- 磁感应强度和带电粒子速度相互平行: 匀速直线运动;
- 磁感应强度和带电粒子速度相互垂直: 圆周运动;
- 磁感应强度和带电粒子速度成任意 θ 角: 螺旋运动 (分解后为匀速直线运动和圆周运动)。

30. 电磁场的相对论性变换: S' 系相对于 S 系以速度 \vec{v} 沿着 x 轴正方向运动, 设 $t = t' = 0$ 时恰好重合。在 S' 系中点电荷 q 静止在坐标原点 O' 处, q_0 以速度 \vec{v}_0 运动。在 S 系中, q_0 当前时刻在位置 \vec{r} , 和 x 轴正半轴夹角为 θ , 求运动电荷 q_0 所受的作用力。

$$\vec{F} = q_0 \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{\frac{3}{2}}} + q_0 \vec{v}_0 \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{\frac{3}{2}}}$$

运动电荷的电场

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{\frac{3}{2}}}$$

运动电荷的磁场

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q \vec{v} \times \vec{r}}{4\pi r^3} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{\frac{3}{2}}}$$

- 磁场力是对电场力的相对论修正, 两个场力的比值 $\frac{F_m}{F_e} = \left(\frac{v}{c}\right)^2$ 。如果存在电场力, 磁场力肯定可以忽略。通电

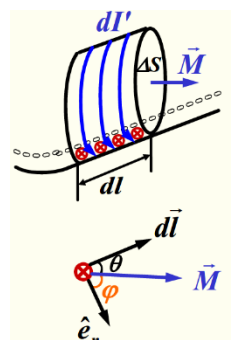
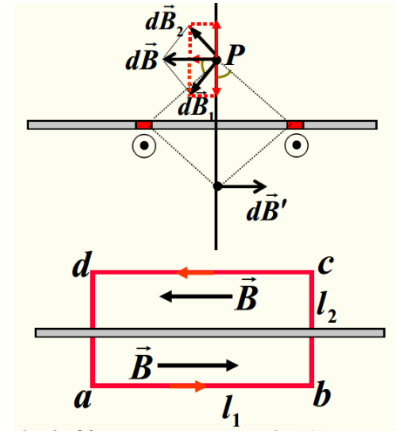
导线可以保持严格的电中性, 磁场力保留下来成为相互作用的主要项。

31. 磁介质 分子轨道有磁矩, 称为分子磁矩。顺磁质有固有磁矩 $\vec{\mu}$, 抗磁质分子磁矩为 0, 铁磁质在居里点后称为顺磁质。抗磁质在磁场中发生感应磁化, 产生的附加磁场和原磁场方向相反; 顺磁质发生取向极化产生的附加磁场和原磁场方向相同。磁化产生磁化电流。

- 定义磁化强度

$$\vec{M} = \frac{\sum_i \vec{\mu}_i}{\Delta V}$$

- \vec{M} 和磁感应强度 \vec{B}_0 反方向时, 为抗磁质; \vec{M} 和磁感应强度 \vec{B}_0 同方向时, 为顺磁质。(抗磁质斥, 顺磁质吸)
- 各向同性、均匀线性磁介质中, 有磁化电流 I' 。面磁化电流密度 $\alpha' = \frac{dI'}{dl}$ 。



$$\Delta S dI' = \left| \sum_i \vec{\mu}_i \right| = M \Delta V = M \Delta S dl \cos \theta \Rightarrow \alpha' = M \cos \theta = M \sin \varphi = \vec{M} \times \widehat{e}_n$$

因此 $\alpha' = \vec{M} \times \widehat{e}_n$ ，即磁化电流面密度和磁化强度之间的关系。其中 \widehat{e}_n 从介质指向真空（或另一介质）。

对于介质的分界面， $\alpha' = \vec{M}_1 \times \widehat{e}_{n1} + \vec{M}_2 \times \widehat{e}_{n2}$ ，一般 $\widehat{e}_{n1} = -\widehat{e}_{n2}$ ，因此 $\alpha' = (\vec{M}_1 - \vec{M}_2) \times \widehat{e}_{n1}$ 。（不考虑厚度）

- 有磁介质时的磁高斯定理（将电流分解成磁化电流和正常电流）

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

- 有磁介质的磁安培环路定理

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(\sum_i I_i + \sum_i I'_i \right)$$

由于 $I' = \oint_L dI' = \oint_L \alpha' dl = \oint_L \vec{M} \times \widehat{e}_n dl = \oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l}$ ，所以化简后，有

$$\oint_L \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) \cdot d\vec{l} = \sum_i I_i$$

令**磁场强度**定义为

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

则有磁介质的安培环路定理写为

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_i I_i$$

对于各向同性、线性磁介质， $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ ，其中 χ_m 为磁化率，令 $\mu_r = 1 + \chi_m$ 为相对磁导率， $\mu = \mu_0 \mu_r$ 为磁导率，则

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

- 铁磁质（不考）：磁性来源于电子自旋磁矩的自发磁化。无外磁场时，铁磁质中电子自旋磁矩会自发形成小的自发磁化区——磁畴。

32. **法拉第电磁感应定律** 穿过回路所包围面积的磁通量发生变化时，回路中产生感应电动势

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

即

$$\oint_L \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

33. **磁链** 导体回路有 N 匝线圈，每匝的磁通量分别为 Φ_i ，则磁链定义为

$$\Psi = \sum_{i=1}^n \Phi_i$$

如果每匝磁通量相同，则 $\Psi = N\Phi$ 。

34. **动生电动势** 因为导体运动产生的电动势（如右图）

$$\Phi_B = Blvt \Rightarrow \frac{d\Phi_B}{dt} = Blv$$

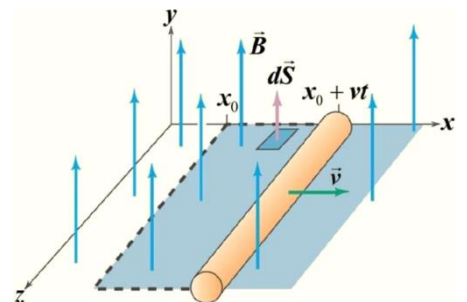
$$\varepsilon = -Blv$$

洛伦兹力提供非静电力（证明用磁高斯定律、混合积），因此

$$\vec{E}_k = \frac{\vec{F}}{q} = \vec{v} \times \vec{B}$$

从而

$$\varepsilon = \int_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$



35. **感生电动势** 因为磁场的变化产生的电动势。产生电动势的非静电力是感应电场提供的电力。

Maxwell 提出了感应电场的概念，和著名的 Maxwell 第一假设

$$\oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = - \int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

变化的磁场能够在周围空间（包括无磁场区域）激发感应电场；感应电场环流不是 0，因此又被称为**涡旋电场**。是无源场，电场线是闭合曲线。

- 感生涡电流：利用涡电流的热效应和磁效应；减小涡流损耗的方式：提高电阻率、分割导体。
- 趋肤效应：导线中通高频电流时，电流集中在导体的外表面。改善方法：镀银、分束、空心。

36. **洛伦兹力不做功**！对于导体棒切割磁感线，外力做正功输入机械能，安培力做负功吸收机械能，感应电动势在回路中做正功以电能的形式输出这份能量。

37. **自感** 自感电动势 $\varepsilon_L = -\frac{d\Phi}{dt}$ ，由于 $\Phi \propto I$ ，故设 $\Phi = LI$ ，其中 L 为自感系数，从而

$$\varepsilon_L = -\frac{d(LI)}{dt} = -L \frac{dI}{dt} - I \frac{dL}{dt}$$

如果 L 保持不变，则 $\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt}$ 。

38. **互感** 两个线圈产生互感电动势，其中回路 1 的电流 I_1 对回路 2 的磁通量 Φ_2 有贡献 $\Phi_{21} = M_{21}I_1$ ，同理 $\Phi_{12} = M_{12}I_2$ 。一般 $M_{12} = M_{21} = M$ ，称为互感系数。于是 $\Phi_{12} = MI_2$ ， $\Phi_{21} = MI_1$ 。如果 M 保持不变，那么

$$\varepsilon_{21} = -M \frac{dI_1}{dt}, \quad \varepsilon_{12} = -M \frac{dI_2}{dt}$$

39. **磁场能量** $W_m = \frac{1}{2} BHV$ 为储存在磁场中的磁场能量。

磁场能量密度 $w_m = \frac{1}{2} BH = \frac{w_m}{V}$ 。

40. **位移电流** 对于稳恒电流，有

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i = \mu_0 \int_S \vec{J}_c \cdot d\vec{S}$$

还有连续性方程（传导电流连续）

$$\oint_S \vec{J}_c \cdot d\vec{S} = 0$$

对于非稳恒电流，不满足连续性方程，但是由于电荷守恒定律，有

$$\frac{dq}{dt} + \oint_S \vec{J}_c \cdot d\vec{S} = 0$$

又

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q$$

代入后

$$\oint_S \left(\vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = 0$$

则 $\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 即为位移电流密度，位移电流

$$I_d = \int_S \vec{J}_d \cdot d\vec{S} = \int_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

另外还有运流电流，即电荷在真空中运动形成的电流，记作 I_m 和 \vec{J}_m 。

于是将安培环路定理修改如下：

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_c + I_d + I_m$$

令 $\vec{J} = \vec{J}_c + \vec{J}_d + \vec{J}_m$ ，则 \vec{J} 满足连续性方程。

位移电流、传导电流、运流电流统称为**全电流**。

41. Maxwell 方程组

两个基本假设：涡旋电场、位移电流

四个方程：麦克斯韦方程组。

$$\begin{cases} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV \\ \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \end{cases}$$

以及各向同性线性介质方程： $\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \vec{B} = \mu \vec{H}, \vec{J} = \gamma \vec{E}$ ，构成了宏观电磁现象的基本方程。

用另一个角度列写 Maxwell 方程组

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

变化的磁场产生电场，变化的电场产生磁场，形成一个统一的不可分割的整体——电磁场！

42. 电磁波 电磁波就是一种运动着的电磁场。是电磁场从波源向外扩散的方式。

$$\text{能量密度 } w = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right)$$

$$\text{能流密度 (坡印廷矢量)} \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

平面电磁波 设传播方向为 x 轴正方向，则电场和磁场分量表达式为

$$\vec{E}(x, y, z, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \hat{e}_y$$

$$\vec{B}(x, y, z, t) = \frac{E_0}{v} \cos(\omega t - kx) \hat{e}_z$$

性质：

(1) \vec{E} 与 \vec{B} 都与传播方向垂直，横波；

(2) \vec{E}, \vec{B} 互相垂直，且 $\vec{E} \times \vec{B}$ 沿电磁波传播方向；

(3) \vec{E}, \vec{B} 同相位；

(4) $\frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} = v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{c}{n}$ ，其中 $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ ， n 为折射率；

(5) $w = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) = \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{\mu} B^2$ ；

(6) $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = v \omega \hat{k}$ ；电磁波强度 $I = \langle S \rangle = \langle \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2 \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2$ ；

振荡电偶极子的电磁波 设传播方向为 x 轴正方向，则具有如下性质：

(1) \vec{E} 与 \vec{B} 都与传播方向垂直，横波；

(2) \vec{E}, \vec{B} 互相垂直，且 $\vec{E} \times \vec{B}$ 沿电磁波传播方向；

(3) \vec{E}, \vec{B} 同相位；

(4) $\frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} = v$ ；

(5) 方向性， $\theta = 0, \pi$ ，场强皆为 0； $\theta = \frac{\pi}{2}$ 场强最大；

(6) $E \propto \frac{1}{r}, B \propto \frac{1}{r}$ (辐射场的特点)；

(7) $E \sim \omega^2, B \sim \omega^2$

