

4. 效用

效用 (utility) 是通过赋值（数字）的方式描述消费者对不同消费束的喜好关系，值称为**效用值**（具有较大的主观性）。

此时，只关注效用值的次序关系，其具体数字无（经济）意义，也称**序数效用论**。

在**基数效用论**中，数值有具体的经济含义；但是由于效用具有较大主观性，该观点存在一定缺陷。

若能找到一个二元函数 $u(x_1, x_2)$ 且在该函数下，相同偏好的消费束得到相同的函数值，更受偏好的消费束得到更大的函数值，则该函数 $u(x_1, x_2)$ 即为描述对应偏好的**效用函数**。

- 对 $u(\cdot, \cdot)$ 做任意的单调增变换，不改变其对偏好的描述；即若函数 $f' > 0$ ，则 $f(u(x_1, x_2)) \triangleq v(x_1, x_2)$ 仍然描述了原来的偏好。
- 对 $u(\cdot, \cdot)$ 做任意复合变换，不改变无差异曲线的形状（因为 MRS 不变，推导类似下文数学推导，链式法则约去导数项）。

边际效用 (Marginal Utility, MU) 以商品 1 为例，商品 1 的边际效用等于效用函数 $u(x_1, x_2)$ 对 x_1 的偏导数，即 $\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}$ ；度量了单位商品 1 的增加所带来的效用的增加量。

- 虽然边际效用 MU 依然为主观值，但边际效用之比 $\frac{MU_1}{MU_2}$ 具有客观含义，即**边际替代率** MRS，又称消费者意愿性交换律。

数学推导：对无差异曲线 $u(x_1, x_2) = \bar{u}$ 做全微分，得

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 = 0$$

故

$$MRS = -\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{MU_1}{MU_2}$$

偏好 \rightarrow 无差异曲线 \rightarrow 效用函数 \rightarrow 选择特性 \rightarrow 需求

完全替代：总是愿以 $a : b$ 的比例进行商品 1 和商品 2 的交换。

- 效用函数 $u = bx_1 + ax_2$ ， $MRS = \frac{MU_1}{MU_2} = \frac{b}{a}$ 。

完全互补：总是以 $a : b$ 的比例同时消费商品 1 和商品 2（或消费商品的数量有方程关系）。

- 效用函数 $u = \min(bx_1, ax_2)$ 。

中性商品：中性商品的数量不影响偏好，假设商品 2 为中性商品。

- 效用函数 $u = f(x_1)$ 。

厌恶品：厌恶品越少越好，假设商品 1 为厌恶品。

- 效用函数 $u = -bx_1 + ax_2$ ($a, b > 0$), $MRS = -\frac{b}{a}$ 。

满足：消费者对某个最偏爱的消费束 (\bar{x}_1, \bar{x}_2) 有最大的偏好（满足点），离满足点越近的消费束偏好越高。

- 效用函数可以是 $u = -((x_1 - \bar{x}_1)^2 + (x_2 - \bar{x}_2)^2)$ 。

Cobb-Douglas效用函数： $u = x_1^a x_2^b$, 边际替代率 $MRS = \frac{MU_1}{MU_2} = \frac{ax_2}{bx_1}$ 。

- 从原点引出任意一条射线，与所有无差异曲线的交点处的切线互相平行，边际替代率相等。
- 良性偏好，边际替代率递减。

拟线性偏好： $u = x_2 + v(x_1)$, 边际替代率 $MRS = \frac{MU_1}{MU_2} = v'(x_1)$ 。

- 做一条垂直 x_1 轴的直线，与所有无差异曲线的交点处的切线互相平行，边际替代率相等。
- 若 $v'(\cdot) > 0$ 且 $v''(\cdot) < 0$ 则为良性偏好。
 - 一阶导数大于 0，保证越多越好；
 - 二阶导数小于 0，保证 MRS 递减。