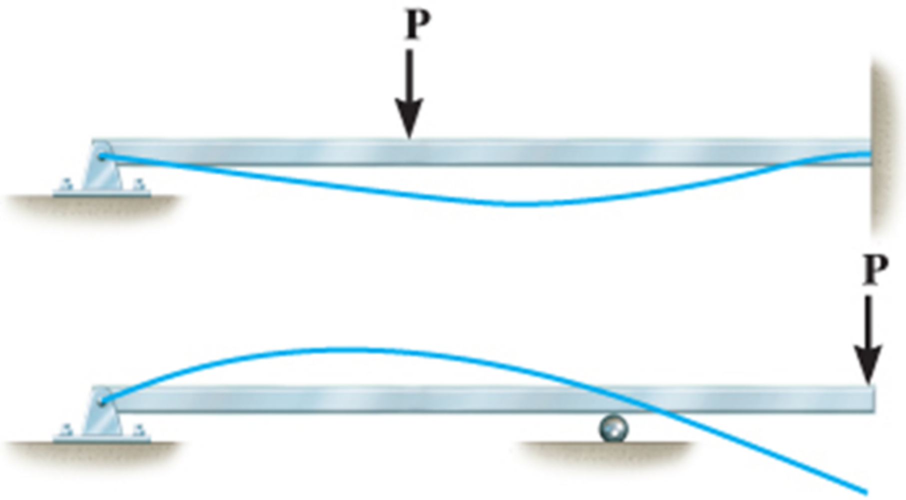
梁的挠度和转角

弹性曲线

梁横截面形心所在的纵向轴线的变形图称为弹性曲线。

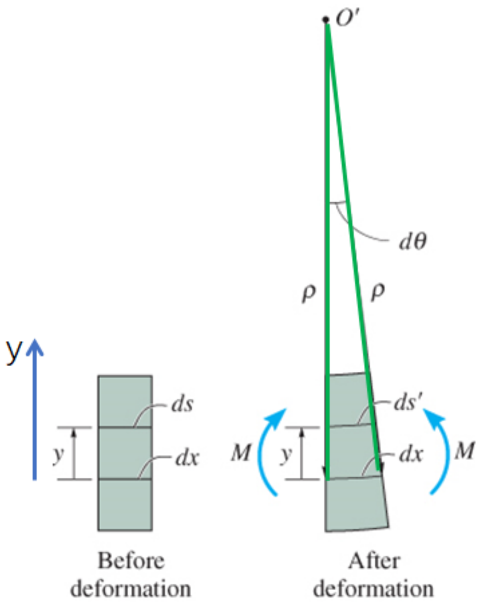


铰支座提供支座反力，同时限制位移；

固定制作提供支座反力和力矩，同时限制位移和转角。

弯矩与曲率

令 ρ 表示曲率半径，则 $\frac{1}{\rho}$ 表示曲率。曲率 $\frac{1}{\rho}$ 越小，弯曲变形越小。在小变形情况下，$\theta = \frac{1}{\rho}$。



(b)

以形心轴为原点，建立 y 轴，设距离中和轴 y 处弧 ds 的应变为 ε。

$$\varepsilon = \frac{ds' - ds}{ds} = \frac{(\rho - y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\rho} = -\frac{\varepsilon}{y} = -\frac{\sigma}{Ey} = \frac{M}{EI}$$

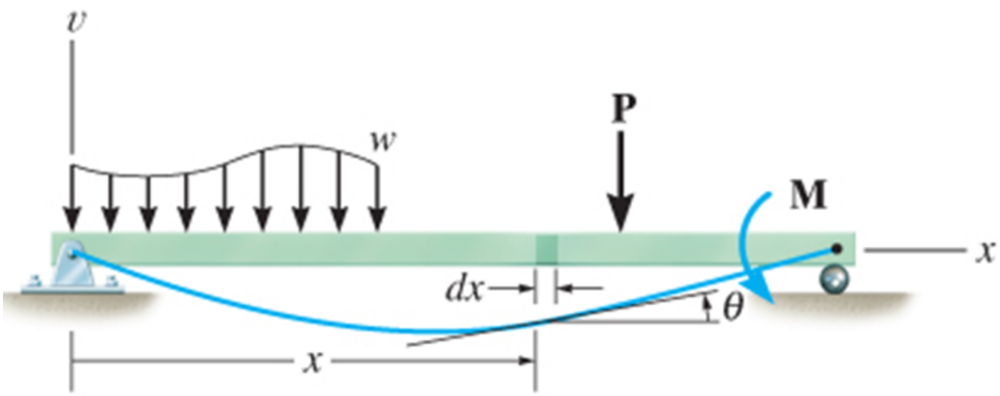
即得**曲率-弯矩关系**，其中 EI 称为抗弯刚度。

转角和挠度

挠度 ν：弯曲后横截面形心的竖向位移，**向上为正**；

转角 θ：弯曲后横截面相对原来位置转过的角度，**逆时针为正。**

注意 这里的转角 θ 和上一节中的 θ 不一样。



转角和曲率的关系

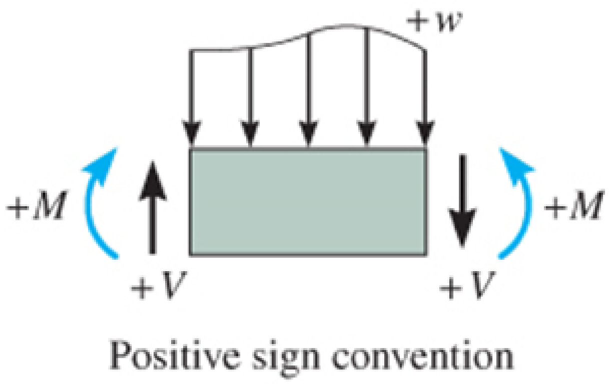
$$\frac{d\theta}{dx}=\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI}$$

挠度和曲率的关系

$$\theta\approx\frac{d\nu}{dx}$$

$$\frac{d^2\nu}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{d\nu}{dx}\right)}{dx}=\frac{d\theta}{dx}=\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI}$$

各类关系梳理



(a)

$$\theta \approx \frac{d\nu}{dx}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} \approx \frac{d^2\nu}{dx^2}$$

$$\frac{M}{EI} = \frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2\nu}{dx^2}$$

$$\frac{V}{EI} = \frac{dM}{EIdx} \approx \frac{d^3\nu}{dx^3}$$

$$-\frac{w}{EI} = \frac{dV}{EIdx} \approx \frac{d^4\nu}{dx^4}$$

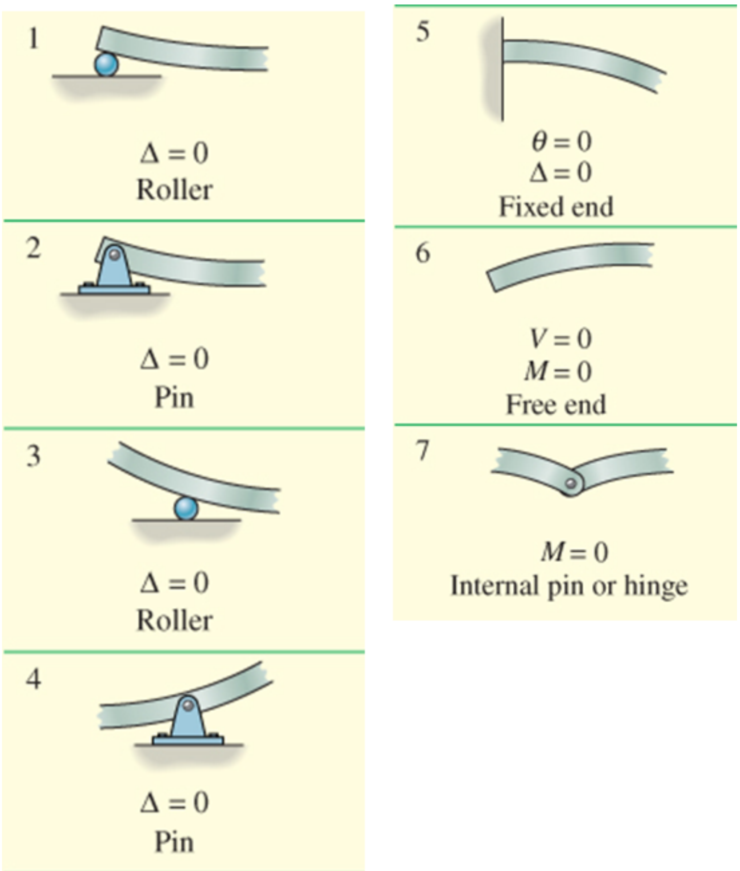
一般地，我们用

$$\theta = \int \frac{M(x)}{EI} dx + C$$

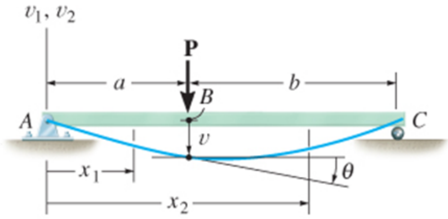
$$\nu = \int \left(\int \frac{M(x)}{EI} dx \right) dx + Cx + D$$

M 以逆时针转动为正。

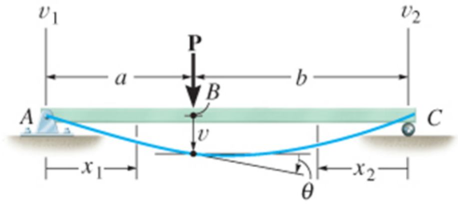
边界条件和连续性条件



当弹性曲线方程无法使用单一坐标描述的时候，需要利用连续条件求解某些积分常数。



(a)



(b)

$$0 \le x_1 \le a \qquad a \le x_2 \le (a+b)$$
$$\theta_1(a) = \theta_2(a) \qquad v_1(a) = v_2(a)$$

$$0 \le x_1 \le a \qquad 0 \le x_2 \le b$$
$$\theta_1(a) = -\theta_2(b) \qquad v_1(a) = v_2(b)$$

分析过程

1. 画弹性曲线
2. 写荷载和分布方程
3. 计算转角和挠度，和弹性曲线对比。

注意：如果 x 轴指向左边，转角以顺时针为正。

叠加原理

一根梁上任意点的最终位移可以由梁上各个单独荷载产生的位移叠加而成。

适用条件：线弹性材料。

超静定梁及其求解方法（力法）

不管什么种类的梁，当其所受未知反力的个数多于可列出平衡方程的个数，则该梁为**超静定梁**。

梁所受的不需要其来保证稳定和平衡的额外支反力称为**冗余约束**；冗余约束的个数称为**超静定次数**。

首先去除冗余约束，然后利用叠加法求解，节点处需要满足**变形协调方程** $\sum_i \nu_i = 0$。

对于不同的问题，变形协调方程可能不同，总之形式为 $\sum_i \nu_i = \nu_0$。

梁的设计

梁设计基础

安全性（强度问题）、适用性（挠度限制）、耐久性。

梁的设计要求

梁的抵抗矩

$$S = \frac{I}{c}$$

那么，

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{S} \Longrightarrow S = \frac{M}{\sigma}$$
$$S_{req'd} = \frac{M}{\sigma_{allow}}$$

抗剪能力要求：

$$\tau = \frac{VQ}{It} \le \tau_{max} \le \tau_{allow}$$

刚度要求：

$$\nu_{max} \leq [\nu], \theta_{max} \leq [\theta]$$

梁的设计

正应力 如果梁比较长，则通过使用弯曲公式

$$S_{req'd} = \frac{M_{max}}{\sigma_{allow}}$$

求出截面抵抗矩后，用

$$I = S_{req'd}c$$

来确定梁的横截面。

剪应力 当梁长度较短、荷载较大，尤其木制梁。要先通过抗剪进行设计，再验证其许用弯曲应力。

$$\frac{V_{max}Q}{It} \leq \tau_{allow}$$

若梁为实心矩形截面，剪切公式为

$$\tau_{allow} \geq 1.5\frac{V_{max}}{A}$$

宽翼缘梁，认为剪应力在梁腹板的横截面上恒定，因此

$$\tau_{allow} \geq \frac{V_{max}}{A_{web}}$$

其中 A_{web} 由梁腹板部分的高和厚度求得。

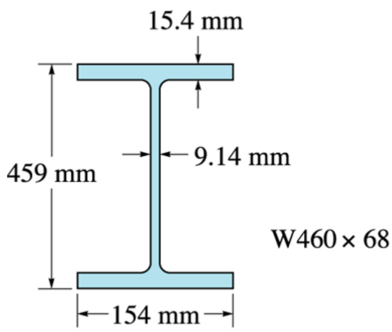
挠度验算

$$\theta = \int \frac{M(x)}{EI}dx + C_1$$

$$\nu = \int \left(\int \frac{M(x)}{EI}dx \right) dx + C_2x + D_2$$

截面选择

钢截面：AISC 标准



$W460 \times 48$ （高度：459~460mm，自重 0.68kN/m）