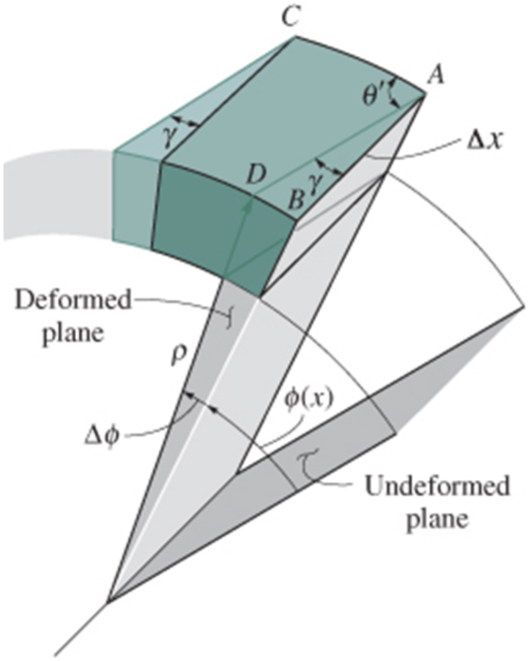
扭转

圆轴扭转变形

一圆轴，一端固定，一端施加扭矩，距离固定端 x 处的半径线旋转角度 $\phi(x)$ 。

基本假定 线弹性变形；横截面依然保持平面（平截面假定）



$$BD = \rho\Delta\phi = \gamma\Delta x$$

令 $\Delta x \to dx, \Delta\phi \to d\phi$ 有

$$\rho d\phi = \gamma dx \implies \gamma = \rho\frac{d\phi}{dx}$$

横截面上切应变线性变化，于是有

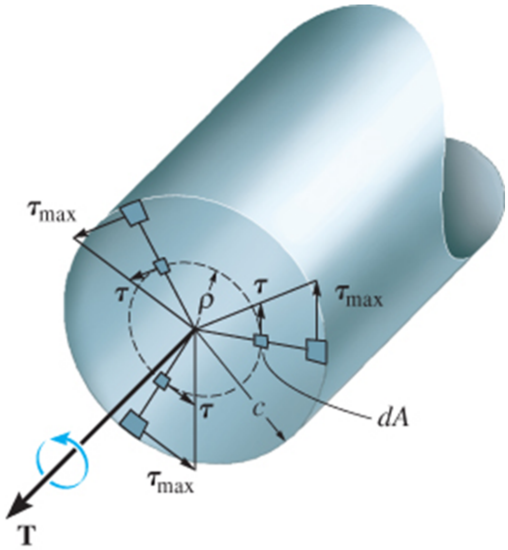
$$\gamma = \left(\frac{\rho}{c}\right)\gamma_{max}$$

根据胡克定律 $\tau = G\gamma$ 有

$$\tau = \left(\frac{\rho}{c}\right)\tau_{max}$$

因此，切应力沿横截面的每条半径方向均线性变化。

扭转公式



$$\tau = \left(\frac{\rho}{c}\right)\tau_{max}$$
$$T = \int_A \rho(\tau dA) = \frac{\tau_{max}}{c}\int_A \rho^2 dA$$

令 $J = \int_A \rho^2 dA$ 为**极惯性矩**，于是有**扭转公式**:

$$\tau_{max} = \frac{Tc}{J}, \quad \tau = \frac{T\rho}{J}$$

其中，τ_{max} 为轴上最大切应力，T 为作用在横截面 A 上的扭矩，J 为横截面面积对于其形心的极惯性矩，c 为轴的外半径。

实心圆轴的极惯性矩 $J = \frac{\pi}{2}c^4$

空心圆轴的极惯性矩 $J = \frac{\pi}{2}(c_o^4 - c_i^4)$

功率传递

当轴所传递的功率与旋转频率已知时，作用在轴上的外加力矩可以由前述公式确定。

如果轴的材料是线弹性的，则已知T和材料的许用切应力 τ_{allow}， 即可设计轴的横截面尺寸。

$$P = T\frac{d\theta}{dt} = T\omega = 2\pi fT$$
$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{allow}}$$

扭转角

$$d\phi = \gamma\frac{dx}{\rho} = \frac{\tau dx}{G\rho} = \frac{T\rho dx}{JG\rho} = \frac{Tdx}{JG}$$

积分后有

$$\phi = \int_0^L \frac{T(x)dx}{J(x)G(x)}dx$$

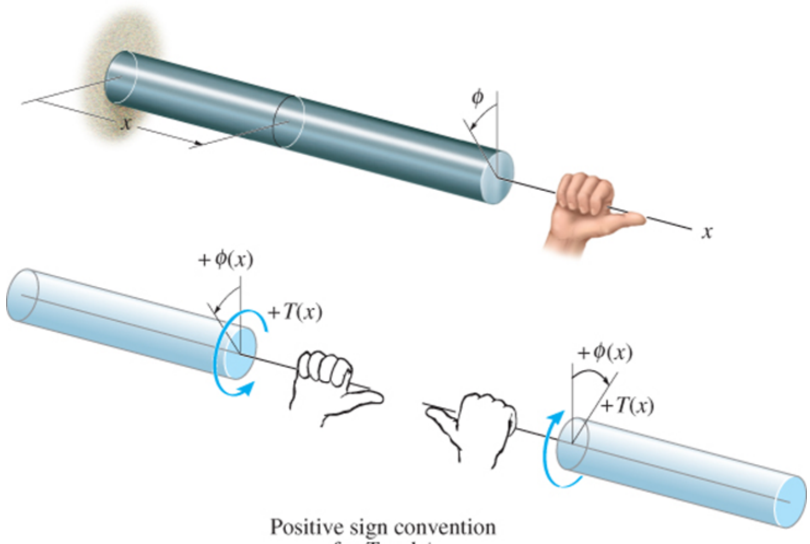
当材料均质，且沿轴长度方向横截面积与扭转力矩不变时，

$$\phi = \frac{TL}{JG}$$

扭转角分段计算

$$\phi = \sum_i \phi_i = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G_i}$$

正负号规定 右手定则



Positive sign convention
for T and ϕ.

扭转超静定问题

新增条件 $\phi_{total} = 0$ （变形协调方程）

非圆实心截面轴

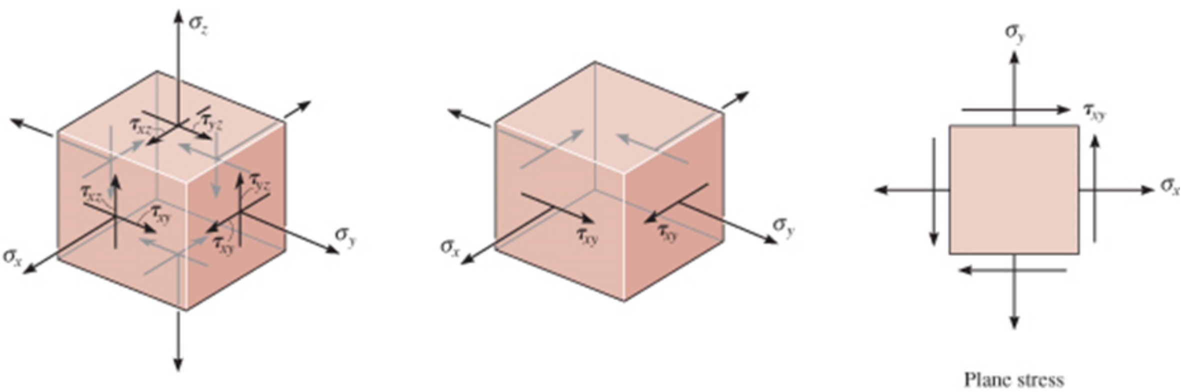
非轴对称截面轴承受扭转荷载后，横截面会发生**凸起**或**翘曲**。

最大切应力发生在横截面边缘距离轴中心线最近的点处。

角点处切应力为0。

一点应力状态

一般情况下，一点应力状态可以由六个独立的应力分量（三个正应力、三个剪应力）表示。



General state of stress
(a)

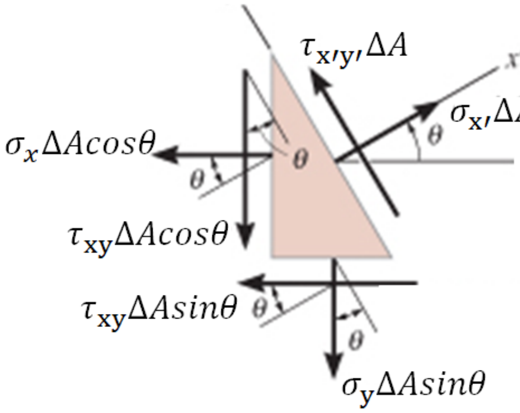
Plane stress
(b)

Plane stress
(two dimensional view)
(c)

平面应力状态 可以由三个独立应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 表达。

平面应力转换

正负规定 σ_x 和 σ_y 以指向作用面外法线方向为正；使单元体逆时针旋转切应力为正；以 θ 表示截面角度的转动，则 θ 以逆时针转动为正。



$$(\sigma_x \Delta A\cos\theta)\cos\theta+(\tau_{xy}\Delta A\cos\theta)\sin\theta+(\tau_{xy}\Delta A\sin\theta)\cos\theta+(\sigma_y\Delta A\sin\theta)\sin\theta=\sigma_{x'}\Delta A$$
$$\sigma_{x'}=\sigma_x\cos^2\theta+\sigma_y\sin^2\theta+2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta$$

另一方面，

$$-(\sigma_x \Delta A\cos\theta)\sin\theta+(\tau_{xy}\Delta A\cos\theta)\cos\theta-(\tau_{xy}\Delta A\sin\theta)\sin\theta+(\sigma_y\Delta A\sin\theta)\cos\theta=\tau_{x'y'}\Delta A$$
$$\tau_{x'y'}=(\sigma_y-\sigma_x)\sin\theta\cos\theta+\tau_{xy}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

根据二倍角公式，则有

$$\sigma_{x'}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta+\tau_{xy}\sin 2\theta$$
$$\tau_{x'y'}=-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta+\tau_{xy}\cos 2\theta$$

直接用 $\theta+\frac{\pi}{2}$ 代入 θ 得到

$$\sigma_y'=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta-\tau_{xy}\sin 2\theta$$

平面应力莫尔圆

上述三式有

$$\sigma_{x'}-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta+\tau_{xy}\sin 2\theta$$
$$\tau_{x'y'}=-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta+\tau_{xy}\cos 2\theta$$

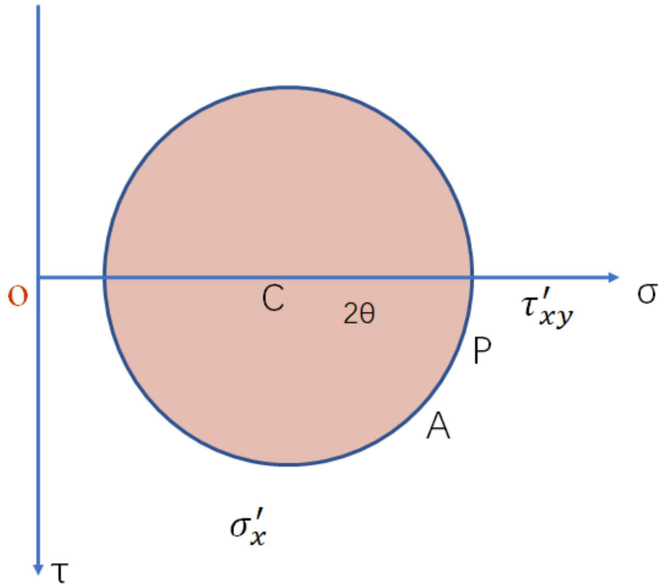
于是，两边平方后相加，

$$\left[\sigma_{x'}-\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)\right]^2+\tau_{x'y'}^2=\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2$$

令$\sigma_{avg}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}, R^2=\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2$，则

$$(\sigma_{x'}-\sigma_{avg})^2+\tau_{x'y'}^2=R^2$$

即为莫尔圆。



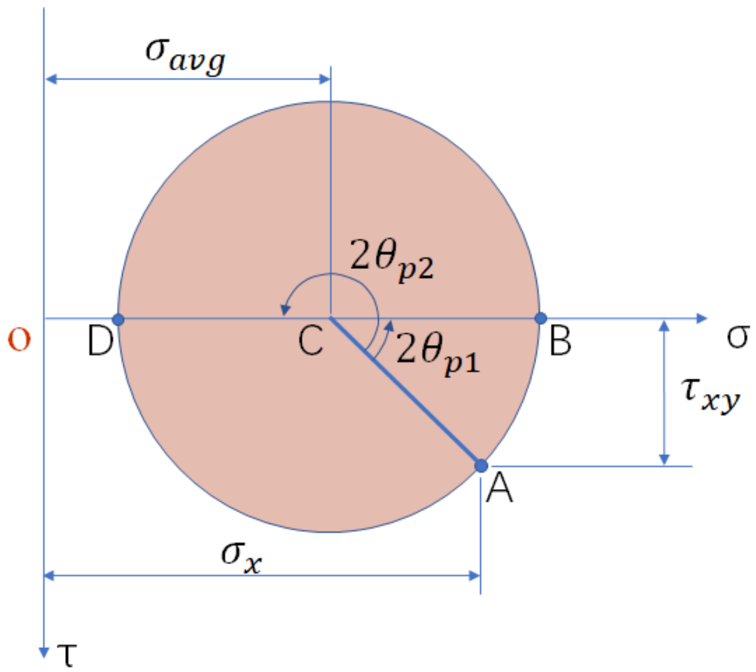
一般步骤

1. 建立坐标系，横坐标轴代表正应力σ （向右为正），纵坐标轴代表切应力τ，（向下为正）。
2. 画圆心C，坐标 $C(\tau_{avg},0)$。
3. 画A点，坐标 $A(\sigma_x,\tau_{xy})$。A点表示单元x面上作用的应力。
4. 以C点为圆心，CA为半径绘制圆。

任意面上的应力

与X面夹角为 θ 的面上应力可通过作图法得到，通过P点坐标表示。过圆心C，做与CA夹角为 2θ 的直线（转向与面的转向相同），得到与圆的交点P。

主应力

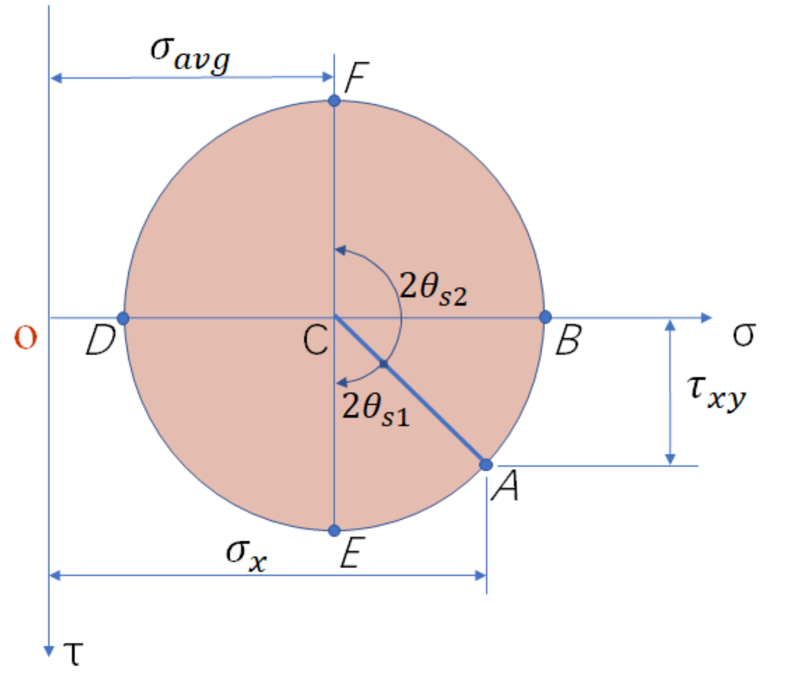


B点（σ_1 ）和D点（σ_2）分别表示最大最小主应力，夹角分别为 θ_{p1},θ_{p2}。

$$\sigma_{1,2}=\sigma_{avg}\pm R=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

$$\tan 2\theta_{p1}=\frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}}$$

最大 平面切应力



E点和F点均表示最大平面切应力。

$$\tau_{max} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tan 2\theta_{s1} = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)}{2\tau_{xy}}$$

性质

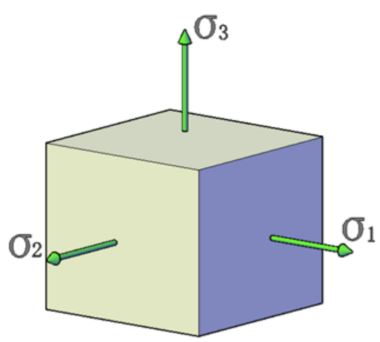
1. 最大和最小正应力为主应力。
2. 主应力作用面上无切应力。
3. 最大切应力面上作用着平均正应力。
4. 最大切应力作用面与主应力作用面之间的夹角为45°。

脆性材料：最大拉应力不能超过限定。

延性材料：最大剪应力不能超过限定。

一般应力状态

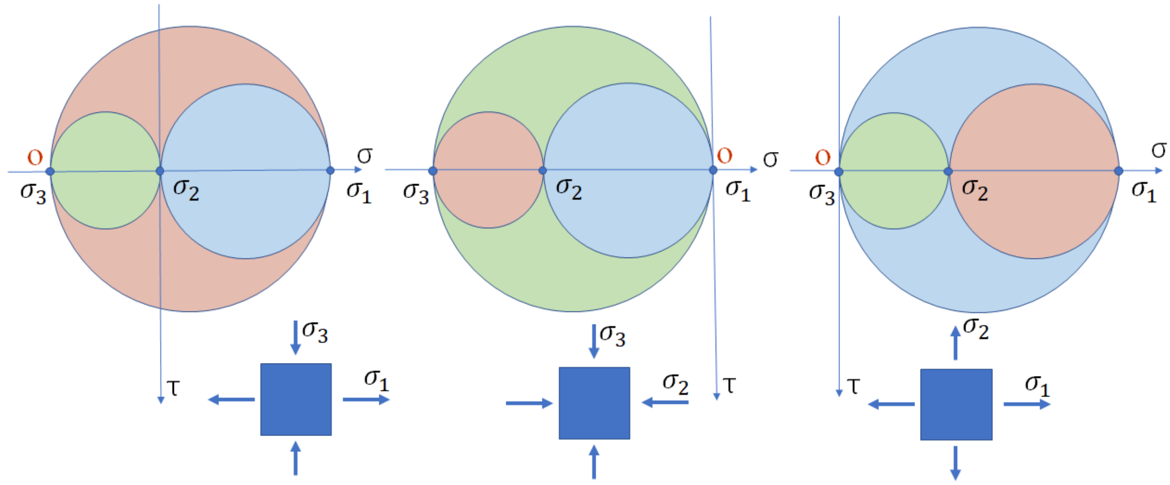
对于一个体积微元，有



$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

平面应力状态是一般应力状态的特例。

平面应力状态的三莫尔圆表达

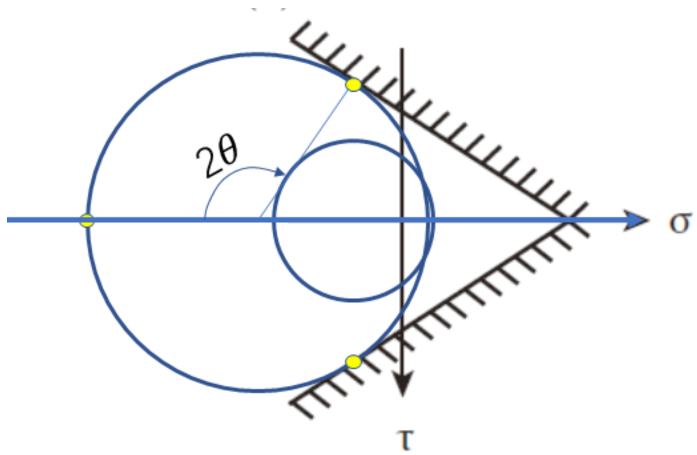


一般来说，最大莫尔圆（不一定是有应力的两个方向租场的莫尔圆）决定了材料的破坏。

强度理论

1. 脆性断裂：在没有明显**塑性变形**情况下突然断裂；通常和**受拉**有关。一般破坏非常突然。
2. 塑性屈服：明显塑性变形情况下丧失正常工作能力。

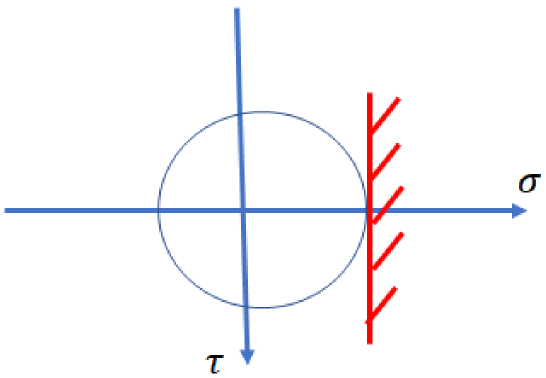
Coulomb 破坏假定



当 $|\tau| = c - \mu\sigma = c - \sigma\tan\theta$ 时，发生断裂。

适用范围：土壤、岩石、混凝土等材料。

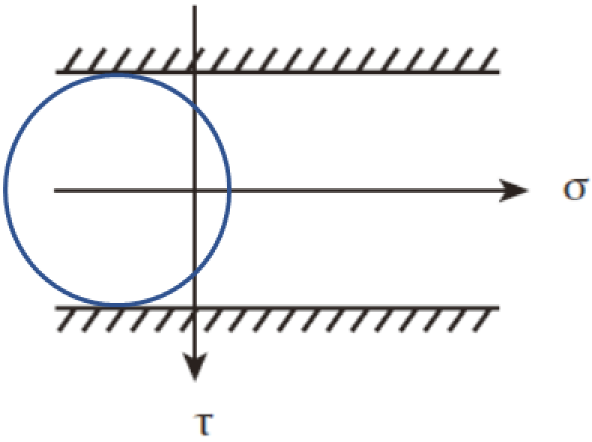
Rankine 和 Lame 破坏假定



最大主应力或最小主应力分别达到一定的特征值时发生失效的假设（主应力假设）。

适用范围：土壤、岩石、混凝土等材料。

Tresca 破坏假定



对于**软钢**，用最大切应力判断材料是否失效。

基于应变能的 Huber - von Mises 破坏准则

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]}\leq f_y$$

其中，f_y 表示单轴拉伸屈服应力。

第一类强度理论（关于脆性断裂的理论）

1. 第一强度理论：最大拉应力理论 **Rankine 和 Lame 破坏假定** $\sigma_1 << \sigma_r$；
2. 第二强度理论：最大身长线应变理论 $\sigma_1-\nu(\sigma_2+\sigma_3) << \sigma_r$。

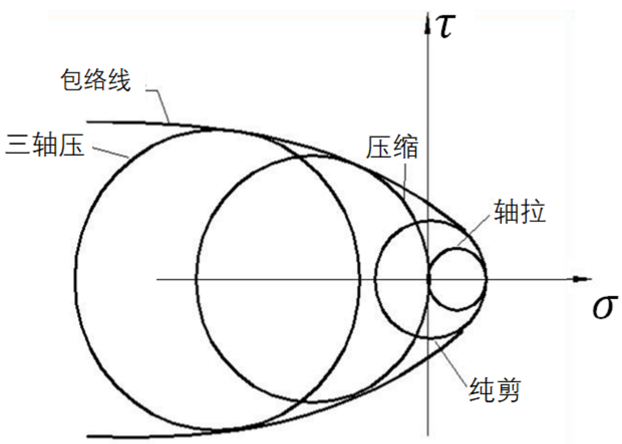
第二类强度理论（关于塑性屈服的理论）

3. 第三强度理论：最大切应力理论 **Tresca 破坏假定** $\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3) << \sigma_r$
4. 第四强度理论：形状改变能密度理论 **Huber - von Mises 破坏准则** $\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]}\leq f_y$

Mohr 破坏准则

当界面上的应力满足下式时，就会发生破坏：

$$f(\sigma,\tau)=0$$



其中，常选用 $f(\cdot,\cdot)=0$ 为抛物线。

一点应力分析

注：以下内容均不包含符号。

1. 求截面的内力，包括剪力 V，弯矩 M， 扭矩 T，以及轴向力 P。
2. 求轴向力引起的正应力：设截面面积为 A，则
$$\sigma_{x1} = \frac{P}{A}$$
3. 求剪力引起的剪切应力：设所求应力点在截面上有性质 Q, t，且截面惯性矩 I，则
$$\tau_{xy1} = \frac{VQ}{It}$$
4. 求弯矩引起的正应力：设所求应力点距离中性轴坐标为 y，则
$$\sigma_{x2} = \frac{My}{I}$$
5. 求扭矩引起的剪切应力：如果为圆形截面，设极惯性矩 J，所求点距离圆心 ρ，则
$$\tau_{xy2} = \frac{T\rho}{J}$$
6. 综合
$$\sigma_x = \sigma_{x1} + \sigma_{x2}$$
$$\tau_{xy} = \tau_{xy1} + \tau_{xy2}$$
7. 根据莫尔圆来求主应力以及最大切应力（注意方向）
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$
$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

   一般地，$\sigma_y = 0$，于是有
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2}$$
$$\tau_{max} = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2}$$