4. 关系数据库设计理论：函数依赖

函数依赖 $X \to Y$：如果两个元组在关系 X 中的属性相同，那么它们在关系 Y 中的属性必须相同（给定 X，“函数”值 Y 唯一确定）。

- 称为 X 函数决定 Y 或 Y 函数依赖于 X；
- 函数依赖是一个唯一值限制 (unique-value constraints)；
- 函数依赖等约束是对关系模式的限制（一般是根据语义确定的，而不是根据实例中的值确定的）；
- 如果 $Y \subseteq X$，那么 Y 依赖于 X 称为***平凡***的函数依赖；
- 表示：$A_1, A_2, \cdots, A_n \to B_1, B_2, \cdots, B_m$；
  - 另一种常用的表示方法：$X \to A_1, A_2, \cdots, A_n$ 等价于 $X \to A_1$，$X \to A_2$，......，$X \to A_n$。

关系的键值：K 是关系 R 的键值当：1️⃣ $K \to \text{all attributes of } R$；2️⃣ K 是极小的，即没有 K 的真子集满足条件 1️⃣。

- 例如，在表 `sc` 中，`(sno, cno)` 是键值，而 `sno` 或 `cno` 均不是。

超级键值 (superkey) 包含键值 (key) 的集合为超级键值 (superkey)。

候选键值 (candidate key)：关系 R 可能有多个键值，他们都被称为候选键值。

首选键值 (primary key)：可以从候选键值中选定一些称为首选键值，在首选键值下方划线表示。

蕴含于：函数依赖集合 S 蕴含于函数依赖集合 T；如果关系实例满足函数依赖集合 T，那么一定满足函数依赖集合 S。

- 函数依赖集合 T “大”，所以关系实例的范围“小”。

等价：如果函数依赖集合 S 蕴含函数依赖集合 T，且函数依赖集合 T 蕴含函数依赖集合 S，则函数依赖 S 与函数依赖 T 等价。

- 分离规则：若 $x \to A_1, A_2, \cdots, A_n$，则 $x \to A_1$，$x \to A_2$，......，$x \to A_n$；
- 组合规则：若 $x \to A_1$，$x \to A_2$，......，$x \to A_n$，则 $x \to A_1, A_2, \cdots, A_n$；
- 平凡依赖关系：如果 $X \to Y$，则 $X \to (Y - X)$ （去掉平凡关系）；
  - 平凡：$\forall i, A_i \in X$；
  - 非平凡：$\text{some } A_i \in X$；
  - 完全非平凡：$\forall i, A_i \notin X$。
- 传递规则：若 $X \to Y, Y \to Z$，则$X \to Z$。

闭包 (closure)：给定关系 R 和属性集合 X 以及函数依赖集合 S，那么 X 在 S 下的闭包是属性集合 Y，其中 $\{X \to Y\}$ 蕴含于 S，记作 X^+。

- 平凡地，$X \subseteq X^+$。

一些问题

- 如何判定 $\{X \to A\}$ 是否蕴含于 S?

    - **算法**：计算出 X 在 S 下的闭包 X^+，并判断 A 是否完全包含在 X^+ 中。若是，则 $\{X \to A\}$ 蕴含于 S；若否，则 $\{X \to A\}$ 不蕴含于 S。
- $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 是否是键值？
    - $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 是超级键值当且仅当 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}^+$ 包含了 R 的全部属性；
    - **算法**：先判断是否是超级键值；接着，若对于所有 i，令 $S = \{A_1, \cdots, A_n\} - \{A_i\}$，$S^+$ 不包含 R 的全部属性；则 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 为键值。
- 函数依赖的**闭集** (closing set)？（给定函数依赖集合，找到其可以推导出的所有函数依赖）
    - **算法1**：找到属性集合所有子集的闭包；
    - **算法2**：利用**阿姆斯特朗公理**：对于任意属性集合 X, Y, Z,
        - 自反性：如果 $Y \subseteq X$，那么 $X \to Y$ 在闭集中；
        - 增补性：如果 $X \to Y$，那么 $XZ \to YZ$ 在闭集中；
        - 传递性：如果 $X \to Y$ 且 $Y \to Z$，则 $X \to Z$ 在闭集中。
    - 精简的结果：$X \to Y$，则可以省略 $Z \to Y$，其中 $Z \subseteq X$。
    - 函数依赖集合与自己的闭集等价。
- 找到函数依赖集合的**最小基 (minimal basis)**：
    - 给定一个关系 R 上的函数依赖集合 S，找到一个函数依赖集合 T 与 S 等价，使得 $T^+ = S^+$，则称 T 是 S 的**基**。
    - **最小基**：一个满足下面三个条件的基，
        - 所有函数依赖的右部分是单属性；
        - 其的任何非空真子集均不是基；
        - 没有函数依赖的左部分是多余的（例如 $AB \to C$ 与 $A \to C$ 应该去掉前者）。
    - **算法**
        - 分离所有依赖的右部分。
        - 不断尝试能否去掉一个函数依赖；
        - 不断尝试能否去掉函数依赖的左部分的属性。
- 找到函数依赖集合的**投影** (projection)
    - 给定 R 上的函数依赖 F，找到函数依赖在 $R_1 = \pi_L(R)$ 上的投影（最小基） F_1，其中
        - F_1 蕴含于 F；
        - F_1 仅仅包含 R_1 中的属性。
    - **算法**：
        - 对于所有 R_1 中属性集合的子集 X，计算 X^+ 在 F 下的闭包。可以省略 $X = \varnothing, X = \{\text{all attributes}\}$；如果 $X^+ = \{\text{all attributes}\}$，则跳过 X 的所有超集。
        - 将所有满足 $A \in (X^+ - X) \cap R_1$ 的 $X \to A$ 加入 F_1。
        - 于是我们得到了一个基 F_1，利用上面的算法计算出最小基即可。

5. 关系数据库设计理论：范式

假设有数据库 `StuCourse(sno, name, age, dept, cno, title, credit)`

冗余 (redundancy)：一个信息重复出现多次，如上述数据库中，`name, age, dept` 与 `title, credit` 等等出现多次。

异常 (anomalies)：更新异常（修改某个学生的年龄可能要修改许多数据项）、删除异常（如果只有一名学生选了某个课程，当这门学生退课后将会丢失课程信息）、插入异常（如果一个学生暂时还未选择任何课程，那么当前数据库中将不会有这个学生的信息）。

解决方案：将关系分解成更多的小关系，将不同的事物放入不同的表中（如将上述数据库分成 `Student, Course, SC` 三个数据库）。

分解 (decomposing relations)

- 将一个关系分解成许多更小的关系来消除冗余。
- 将 $R(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ 分解成 $S(B_1, B_2, \cdots, B_m)$ 与 $T(C_1, C_2, \cdots, C_k)$，满足
    - $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\} = \{B_1, B_2, \cdots, B_m\} \cup \{C_1, C_2, \cdots, C_k\}$；
    - $S = \pi_{B_1, B_2, \cdots, B_m}(R)$；
    - $T = \pi_{C_1, C_2, \cdots, C_k}(R)$。

Boyce-Codd 范式 (BCNF)：R 是一个 BCNF 当且仅当对于任意非平凡的函数依赖 $X \to Y$，X 都是 R 的超级键值 (superkey)。

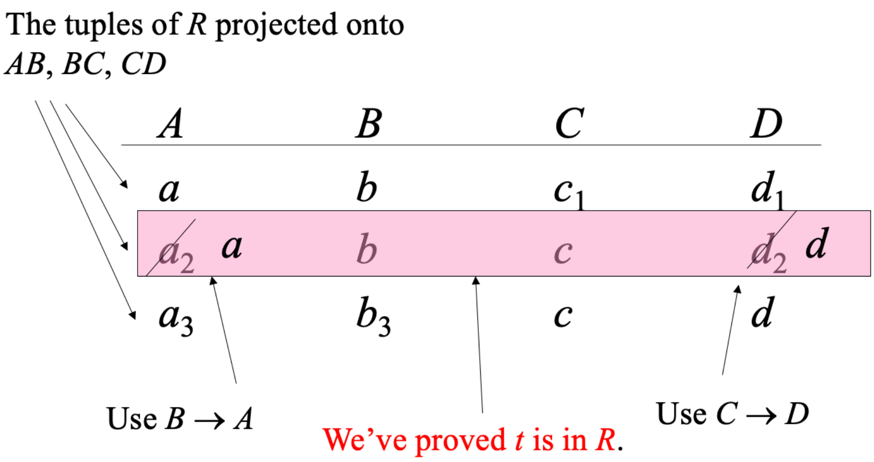
- 例如，在本章最初的数据库中，存在 $sno \to name, age, dept$，而 sno 不是超级键值，故该数据库不是 BCNF。
- 任何关系 R 都可以分解成若干关系 $R_1, R_2, \cdots, R_n$ 满足
    - 每个 R_i 都是 BCNF；
    - R 可以通过 $R_1, R_2, \cdots, R_n$ 重新构成。
- **分解策略**：
    - 找到一个违反 BCNF 的函数依赖 $X \to Y$；
    - 计算出 X^+；
    - 将 R 分解成 R_1 与 R_2，其中 $R_1 : X^+$，$R_2 : (R - X^+) \cup X$；
    - 重复这个过程直到任何 R_i 都是 BCNF，其中可能需要用到函数依赖的投影；
    - 可以证明，这个算法一定能够成功。
    - 【注意】给定 R 与函数依赖集合 F，我们只需要考虑 F 中的函数依赖，而不需要考虑 F 能推出的函数依赖。

无损分解：将原始表分解成若干表，将分解后的结果进行自然连接能够恰好得到原始表（元组不增多、也不遗漏），则这个分解称为无损分解，这个连接称为无损连接 (lossless join)。

- 将 R 分解成 Boyce-Codd 范式的方法是无损分解。
    - 因为我们是按照函数依赖 $B^+ \to C$ 分解的，对于任意 (A, B^+, C)，其中 A 为其他无关属性。那么 (A, B) 中 B 的值唯一决定 (B^+, C) 中的 B^+ 的值（闭包的性质）；因此，两个集合进行自然连接不会出现多余的元素。
- **追逐测试 (chase test)**：我们将原始表分解而成的若干表进行自然连接，任取结果的一个元组 t，我们要判断 t 是否在原来的 R 中。一般地，设 $t = (a, b, c, \cdots)$。我们按照如下步骤进行测试：
    - 维护一个列表 $A, B, C, \cdots$；
    - 对于一个分解表，将其含有的属性用不带下标的小写字母表示，其余属性用带下标的（下标和之前不重复的）小写字母表示，加入列表中。例如一个分解表含有 AB，则将 $(a, b, c_1, \cdots)$ 加入列表中。
    - 对于每一个函数依赖，如 $B \to C$，将所有列表中 B 属性相同的行的 C 属性设为相同值（若存在无下标的元素，则优先设为无下标元素）。如由于函数依赖的唯一性，$(a_1, b, c, \cdots), (a, b, c_1, \cdots)$ 被修改成 $(a_1, b, c, \cdots), (a, b, c, \cdots)$。

- 最后，如果存在一行 $(a, b, c, \cdots)$ 全部为无下标的小写字母，那么所有元组都能够在原表中找到，分解是无损分解。

- 一个追逐测试的例子：



依赖保持：在对数据库进行更改时，我们需要高效验证依赖关系是否保持，如果依赖关系的左右部分被分为两个子关系中，那么验证依赖保持将低效（需要进行自然连接后再判断）。

主元素 (prime) A 被称为主元素当且仅当其是一些键值的成员。

第三范式 (3NF)：一个关系 R 是第三范式当且仅当对于任意不平凡的函数依赖 $X \to Y$，有以下两条件至少之一成立：

- X 是超级键值 (superkey)；
- 对于所有 $A \in Y - X$ 都被某些键值包含，即 A 是主元素。
- 【注】X 是超级键值意味着保持 $X \to Y$ 依赖要求我们不能分割（否则依赖保持将低效）；$\forall A \in Y - X$，A 都被某些键值包含意味着保持 $X \to Y$ 要求我们不能分割 Y（否则依赖保持将低效）；但是如果 $\exists A \subseteq Y - X$，$A$ 不被某些键值包含，我们可以分离出 $X \to A$ 同时满足依赖保持的条件。
- **分解策略**
  - 找到给定函数依赖的最小基 (minimal basis)；
  - 为最小基中的每一个函数依赖创建一个表，如有 $X \to A$，则创建 $T(X, A)$；
  - 如果这些表中不包含 R 的键值（即不存在超级键值），则构造一个仅包含 R 键值的关系；
  - 将这些表中平凡的表删除（被包含于另一个表）。

3NF v.s. BCNF

- BCNF 满足无损分解，但不一定满足依赖保持。
- 3NF 满足无损分解与依赖保持。

多值依赖 (multivalued dependency, MVD)：如果任意两个 R 中的元组在 X 上有着相同的值，那么交换他们的 Y 值得到的两个新的元素都在 R 中，则 R 上存在一个多值依赖 $X \to\to Y$。

- 若 $R(X, Y, Z)$ 且 $X \to\to Y$，则 Y 与 Z 独立。
- **平凡的多值依赖**：
  - 若 $Y \subseteq X$，则 $X \to\to Y$；
  - 如果 $R = X \cup Y$，则 $X \to\to Y$。
- **非平凡的多值依赖**：$X \to\to Y$ 时，Y 中的属性不出现在 X 中且 $X \cup Y$ 不是 R 中的全部元素。

- **函数依赖是多值依赖的特例**，即若 $X \to Y$，则 $X \to\to Y$。
- **传递性**：若 $X \to\to Y$ 且 $Y \to\to Z$，那么 $X \to\to Z$。
- **补集性质**：若 $X \to\to Y$，那么 $X \to\to Z$，其中 Z 是所有不在 X 与 Y 中的参数。
- 不具有分离性！即 $X \to\to YZ$ 不能推出 $X \to\to Y$ 且 $X \to\to Z$。

第四范式 (4NF)：目标是消除由于 MVD 产生的冗余。一个关系 R 是第四范式当且仅当对于任意不平凡的 MVD $X \to\to Y$，X 都是超级键值，这时候所有不平凡的 MVD 都是函数依赖。

- 若 R 为 4NF，则其一定为 BCNF。（根据 4NF 定义，所有的 MVD 都是函数依赖；同时违反 BCNF 的必定违反 4NF）
- **分解策略**
    - 找到一个违反 4NF 的多值依赖 $X \to\to Y$；若找不到，则 R 已为 4NF；
    - 将 R 分成 $R_1(X, Y)$ 与 $R_2(X, Z)$，其中 $Z = R - (X \cup Y)$；
    - 继续分解 R_1, R_2。

范式的关系：$4NF \Rightarrow BCNF \Rightarrow 3NF \Rightarrow 2NF \Rightarrow 1NF$。

多值依赖与函数依赖

- 函数依赖得到 Y 中的值相等；
- 多值依赖得到 R 中必然含有某些其他元组（形成新的元组）。

通过追逐测试推导函数依赖 $X \to Y$（给定 FD 与 MVD）

- 一开始，用一个有两行的表来代表任意两个元组，其中两行中 X 中属性相同；
- 通过 FD、MVD 进行推导（FD 时使得元素相同往无下标的情况靠近，MVD 时增加行数）；
- 最后两行的 Y 若相等，则有 $X \to Y$。

通过追逐测试推导多值依赖 $X \to\to Y$（给定 FD 与 MVD）

- 一开始，用一个有两行的表来代表任意两个元组，其中两行中 X 中属性相同不带下标；第一行 Y 中元素不带下标，第二行 $R - (X \cup Y)$ 中元素不带下标，其余元素带有不同的下标；
- 通过 FD、MVD 进行推导（FD 时使得元素相同往无下标的情况靠近，MVD 时增加行数）；
- 最后若产生全部无下标元组，那么说明 $X \to\to Y$；否则去重后就构造了一个反例。

投影情况下的追逐测试：可以先写出全部属性，最后只检查投影中含有的属性即可。