1. Найдите определитель матрицы $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

2. При каком значении параметра λ определитель матрицы A равен 4:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 4 & 5 \end{pmatrix}?$$

3. Найдите наименьший элемент в произведении матриц:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

4. В произведении матриц найдите наиболее часто встречающийся элемент:

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & -3 & -4 \\ 7 & 6 & -4 & -5 \\ 6 & 4 & -3 & -2 \\ 8 & 5 & -6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

5. Найдите наибольший элемент в произведении матриц:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6. В обратной матрице к данной:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

найдите сумму элементов.

7. В обратной матрице к данной:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

найдите модуль наименьшего элемента.

8. В обратной матрице к данной

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

найдите наибольший элемент.

9. Рассмотрим линейный оператор $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найдите угол между линейно независимыми векторами, которые соответствуют кратному собственному значению линейного оператора A. (Ответ дайте в градусах из диапазона $[0; 360)$).

10. Рассмотрим линейный оператор $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$. Найдите Евклидову длину собственного вектора с целочисленными положительными координатами, ровно одна координата которого равна 1.

11. Пусть $u(x, y, z) = \frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{1-e^{-y}}{1+e^{-y}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$. Найдите минимальную координату вектора $grad\, u(x, y, z)$ в точке $M = (0; 0; 0)$.

12. Найти угол между градиентами поля

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$$

в точках $A_1(1; 2; 2)$ и $A_2(-3; 1; 0)$.

13. Найти угол между градиентами функций $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$:

$$u(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ и } v(x, y, z) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2 + z^2)$$

в точке $A(-2; 1; 3)$ (Ответ дайте в градусах из диапазона $[0; 360)$).

14. Пусть дано отображение $\Phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, которое определяется формулой:

$$\Phi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ \frac{z}{y} \end{pmatrix}.$$

Найдите $\|D\Phi(M)h\|_2$, если $D\Phi(M)-$ производная отображения Φ в точке $M(2; 1; 2)$, а $h = (4; 2; 10)^T$.

15. Пусть дано отображение $\Phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, которое определяется формулой:

$$\Phi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz + x \\ xz + y \\ xy + z \end{pmatrix}.$$

Найдите точку M, в которой $D\Phi(M)h = (5; -1; 1)^T$ при $h = (1; 1; 1)^T$. В ответе укажите наименьшую координату точки M.

16. Найти Якобиан отображения $\Phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$\Phi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x(x^2-3y^2)\\y(3x^2-y^2)\end{pmatrix}$$

в точке $M(0.6; 0.8)$.

17. Рассмотрим отображение $\Phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, которое определяется формулой:

$$\Phi\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

Найти Якобиан отображения Φ в точке $M\left(\frac{3}{13}; 0; \frac{4}{13}\right)$. Ответ округлите до трех цифр после запятой.

18. Найти $J^{-1}(1; 2; 2)$, где J − якобиан замены переменных

$$u = 2xy - xyz, \qquad v = xyz, \qquad w = -y + 3xy$$

19. Найти $J^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, где J − якобиан замены переменных

$$u=\frac{x}{\sqrt{1-r^2}}, \qquad v=\frac{y}{\sqrt{1-r^2}}, \qquad w=\frac{z}{\sqrt{1-r^2}}, \qquad r^2=x^2+y^2+z^2$$

20. Найдите $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ в точке $M(2023; 2024)$, если $u(x_1, x_2) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right)$. Здесь $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$.

21. Пусть $u(X) = r^{-k}$, здесь $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$. Определите значение k, при котором $\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ имеет место равенство

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(X) = 0.$$

22. Найдите явно константы эквивалентности для норм

$$\|X\|^{\star}=\sum_{j=1}^{n}\frac{|x_j|}{j+n}, \qquad \|X\|_2=\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

которые заданы для вектора $X \in \mathbb{R}^n$.

23. Найдите явно константы эквивалентности для норм

$$\|X\|^{\star\star}=\sum_{j=1}^{n}\frac{|x_j|}{j^j}, \qquad \|X\|_\infty=\max_{j\in\{1,2,\dots,n\}}|x_j|,$$

которые заданы для вектора $X \in \mathbb{R}^n$.

24. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_{-4}^{4} \left(\cos^2 \frac{\pi x}{2} + \sin^4 \frac{\pi x}{4}\right).$$

25. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (2x^7 - x^5 + 2x^3 - x + 1)(1 + \operatorname{tg}^2 x)\, dx.$$

26. Вычислить интеграл:

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-3x} \sin 4x\, dx.$$

27. Вычислить интеграл:

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\, dx.$$

28. Найти значение выражения:

$$\frac{8}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+\infty} x^4 e^{-x^2}\, dx.$$

29. Пусть для $\forall x \in \mathbb{R}$ задана плотность распределения непрерывной случайной величины X: $f_X(x) = \gamma x^{2024} e^{-7x^2}$, где $\gamma \in \mathbb{R}$. Определить дисперсию X.

30. Пусть задана плотность распределения непрерывной случайной величины X: $f_X(x) = \begin{cases} \gamma x^{2024} e^{-42x}, x \geq 0 \\ 0,\ x < 0 \end{cases}$, где $\gamma \in \mathbb{R}$. Определить дисперсию X.

31. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид (закон арксинуса):

$$p_X(x) = \begin{cases} 0, |x| \geq a \\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}, |x| < a' \end{cases}$$

где $a > 0$. Определите дисперсию X.

32. Случайная величина ξ принимает неотрицательные целые значения k с вероятностью $P(\xi = k) = \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^k$. Найдите дисперсию ξ.

33. Найдите минимальное значение функции

$$u(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - x_1 + 2x_3$$

34. Найдите $\mathrm{l}ock\mathrm{max}\, u(x, y) - \mathrm{l}ock\mathrm{min}\, u(x, y)$, если

$$u(x, y) = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y + 3.$$

35. Найдите $\left|\mathrm{l}ock\mathrm{max}\, u(x, y) + \mathrm{l}ock\mathrm{min}\, u(x, y)\right|$, если

$$u(x, y) = 3x^3 + y^3 - 3y^2 - x - 1.$$

36. Пусть X^* − точка экстремума функции

$$u(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_3.$$

Найдите $\|OX^*\|_\infty$.

37. Найдите значение функции в точке экстремума:

$$u(x, y, z) = xyz(16 - x - y - 2z)$$

38. Рассмотрим функцию $u: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 + (x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 1)^4 \\ &+ (x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - 2)^6 + (x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + 3)^8. \end{aligned}$$

Найдите $\|OX^*\|_1$, где X^* −точка экстремума.

39. У функции

$$u(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)(2x_1^4 + 4x_1^2x_2^2 + 2x_2^4 - 30x_1^2 - 30x_2^2 + 54)$$

точки локальных минимумов и максимумов располагаются на линиях на плоскости. Найдите расстояние между точками локального минимума и локального максимума на луче $y = 3x, x \geq 0$.

40. Реализуйте метод скорейшего спуска на python и найдите минимум функции: $f(y) = (Ay, y) - 2(b, y)$, где $y, b \in \mathbb{R}^6$,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = (0 \quad 5 \quad 0 \quad 6 \quad -2 \quad 6)^T.$$

Разрешается использовать матричные и векторные операции. Готовый функционал, в котором реализованы методы оптимизации использовать запрещено. В ответ с точностью 4 знака после запятой напишите $\|OX^*\|_2$, где X^* – точка экстремума.

41. По данным измерения двух переменных напишите приложение для нахождения уравнения линейной регрессии Y на X. В ответе укажите сумму модулей найденных параметров.

X	51	67	84	81	101	109	71	97	109	51	105	89
Y	25	30	43	44	57	58	43	46	62	45	55	45

42. Считая, что зависимость между переменными X и Y имеет вид

$$y = \sum_{j=0}^{m} \beta_j x^j$$

напишите приложение для нахождения оценок параметров $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_m$ по следующей выборке (m – натуральный параметр, определяемый пользователем).

X	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0
Y	0,4	0,3	1,0	1,7	2,1	3,4	4,1	5,8	7,7	9,4	11,4	13,6	15,6	18,6	21,2	24,1

43. Напишите приложение для нахождения оценок параметров модели $y = \beta_0 + \beta_1 \ln x$ по следующей выборке.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Y	2,11	2,45	2,61	2,73	2,75	2,81	2,87	2,91	2,96	3,03	3,05	3,12

44. Напишите приложение для нахождения оценок параметров модели $y = \beta_0 + \beta_1 e^{0,1x}$ по следующей выборке.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Y	0,10	0,21	0,43	0,51	0,62	0,81	1,01	1,23	1,47	1,53	1,75	2,25

45. Напишите приложение для нахождения оценок параметров модели $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 \sin 8x$ по следующей выборке.

X	2,11	2,45	2,61	2,73	2,75	2,81	2,87	2,91	2,96	3,03	3,05	3,12
Y	0,10	0,21	0,43	0,51	0,62	0,81	1,01	1,23	1,47	1,53	1,75	2,25

46. Преобразование строк матрицы, основанное на исключении неизвестных (приведении к треугольному виду), используется при вычислении определителя, поиска решений системы линейных алгебраических уравнений, нахождении обратной матрицы, вычислении ранга матрицы.

Разработайте приложение, в котором разработана функция, реализующая это преобразование. С помощью этой функции реализуйте методы вычисления определителя квадратной матрицы, нахождения обратной матрицы, поиска единственного решения системы линейных алгебраических уравнений, проверку совместности системы с помощью теоремы Кронекера-Капелли. Ваша программа на вход получает файл, в котором содержаться матрицы или системы (размерность, количество матриц или систем произвольно и не фиксировано). Элементы матриц записаны построчно.

Примерный формат входного файла:

A=(2 5 7; 6 3 4; 5 -2 -3)

%

A=(2 3 -1; 1 -2 1; 1 0 2)

B=(9 3 2)

%

Записи разделяются %. Если запись содержит только матрицу, то для этой матрицы, если это возможно, необходимо найти определитель, обратную матрицу, ранг матрицы. Если запись содержит матрицу и вектор свободных слагаемых, то данная запись соответствует СЛАУ. Для заданной системы необходимо проверить совместность, если решение единственно, найти это решение методом Гаусса.

Результатом работы вашей программы является файл, в котором для каждой записи из исходного файла приведен результат нахождения соответствующих задач.

47. Напишите приложение, которое для заданного линейного оператора A строит $Ker\ A$. Ваша программа на вход получает файл, в котором содержаться матрицы (размерность, количество матриц произвольно и не фиксировано).

Примерный формат входного файла:

A=(2 5 7 1; 6 3 4 2; 5 -2 -3 3)

%

Записи разделяются %. Результатом работы вашей программы является файл, в котором для каждой записи из исходного файла приведен результат для соответствующего оператора. Реализуйте возможность описания $Ker\,A$ векторами:

a. С целочисленными координатами;
b. Единичной длины (нормированными векторами).

Форму представления результата можете задать любым образом (дополнительный флаг во входном файле, получение информации от пользователя или одновременный вывод в обоих форматах).