Форма 6: разбор

1:

> У вас есть динамика dp_i со следующей формулой пересчета: $dp_i = 1 + \min(dp_{i-k}, dp_{i-k+1}, dp_{i-k+2}, \dots, dp_{i-1})$. То есть динамика на массиве размера n пересчитывается через k элементов. Какая асимптотика $O(f(n,k))$ для подсчета всей динамики по определению? Можно ли ускорить с помощью поиска минимума в очереди? Если можно, до какой асипмтотики?

Асимптотика динамики это сумма количества переходов по всем состояниям. Чаще всего у нас количество переходов одинаково для каждого состояния, поэтому можно перемножить число переходов на число состояний. В нашем случае это будет равно $O(nk)$

Поскольку мы берем минимум на плавающих отрезках, то мы можем воспользоваться задачей про минимум в окне, которую мы разбирали раньше - с помощью очереди можно двигать окно и обновлять в нем минимум за $O(1)$ амортизированно. Тогда мы заполним первое окно за $O(k)$, а остальные окна будем последовательно получать за $O(1)$. Таким образом, асимптотика будет $O(n + k)$.

2:

> Мы определим у динамики из прошлого вопроса следующую базу: $dp_0 = dp_1 = \dots = dp_{k-1} = 0$. Посмотрите на переходы при вычислении динамики, уберите ненужные и научитесь считать dp_n формулой за $O(1)$

Короткий ответ: n / k

Получить этот ответ можно наблюдением: изначально наше окно содержало все нули, поэтому минимум был самым левым элементом. Потом мы добавили в него (минимум + 1)=1, минимум все еще самый левый элемент. Добавив k единиц, мы дойдем до пересчета dp_{2k}, когда в массиве останутся только единицы, и мы положим двойку. В этот момент начнется аналогичный предыдущему процесс, только числа увеличились на один.

Таким образом, для k-го числа ответом будет 1, для 2k-го числа 2 и так далее, а между k и 2k ответом будет 1. Это ровно формула n / k.

Вообще это задача про то, что у нас бывает произвольная динамика, но уточнение базы иногда очень сильно упрощает задачу.