Форма 9: разбор

1:

> Приведите примеры ациклических графов, у которых топологическая сортировка зависит / не зависит от того, в каком порядке ребра были в списке смежности. Иначе говоря, если ребра перемешать в другом порядке, порядок топсорта не изменится

Первый пример:

$1 \to 2$

$1 \to 3$

В таком графе валидными будут топсорты $1,2,3$ и $1,3,2$ в зависимости от того, в каком порядке перебирать ребра из 1.

Второй пример:

$1 \to 2$

$2 \to 3$

$1 \to 3$

В таком графе валиден только топсорт $1,2,3$.

2:

> Может ли быть такое, что после конденсации графа мы получили две КСС, и между ними есть ребра в обе стороны?

Такого не может быть, потому что тогда нарушается свойство алгоритма выделения КСС: Если между компонентами V и U есть такие ребра (произвольные $v_1 \to u_1$ и $u_2 \to v_2$), то тогда из любой v достижимо v_1 (по свойствам КСС), за ней достижимо u_1 (по ребру), из нее достижимо u_2 (по свойствам КСС), из нее достижимо v_2 (по второму ребру), из нее достижимо v (по свойствам КСС). Аналогично для произвольной вершины u. Значит, произвольные v, u связаны в обе стороны и на самом деле граф содержал компоненту сильной связности большего размера.

3:

> Если в полном графе ребра есть между каждой парой вершин, и они направлены от меньшего номера вершины к большему номеру вершины (1 -> 2, 2 -> 3, 1 -> 3, итд), то с каким порядком будет совпадать топсорт?

По определению топсорта, если есть ребро $v \to u$, то в топсорте v находится раньше u, если в графе нет циклов. Наш граф ацикличный (что легко показать, потому что любой цикл нарушает цепочку неравенств), а значит в нем существует топсорт. В этом топсорте любое ребро идет слева направо, значит числа отсортированы по возрастанию: 1, 2, 3, $\ldots, n$.