Analyse — CM: 5

Par Lorenzo

03 octobre 2024

Example 0.1.

- $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est la suite des entiers.*
- $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est la suite alternant entre 1 et -1.*
- $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $F_0 = 1, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ *est la suite de Fibonacci.*

Remarques 0.1. *Ne pas confondre la fonction avec une suite (*$(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ *différent de* $f(x) = \sqrt{x}$*)*

0.0.1 Suites majorées, minorées, bornées

Définition 0.1. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombre réels.*

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* ***majorée*** *si* $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* ***minorée*** *si* $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, M \leq u_n$.

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* ***bornée*** *si la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée et minorée.*
(i.e. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$*)*

Définition 0.2.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* ***croissante*** *si* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* ***strictement croissante*** *si* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* ***décroissante*** *si* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* ***strictement décroissante*** *si* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$.

On dit que la suite est ***monotone*** *si elle est croissante ou décroissante.*

Remarques 0.2. *Pour vérifier la monotonie d'une suite:*

Soit $u_{n+1} - u_n \geq 0 \implies$ *croissante*

Soit on calcule (avec $u_n \neq 0$*)* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \implies$ *croissante*

On préfère la première pour les suites arithmétiques et la deuxième pour les suites géométriques.

0.1 Limites

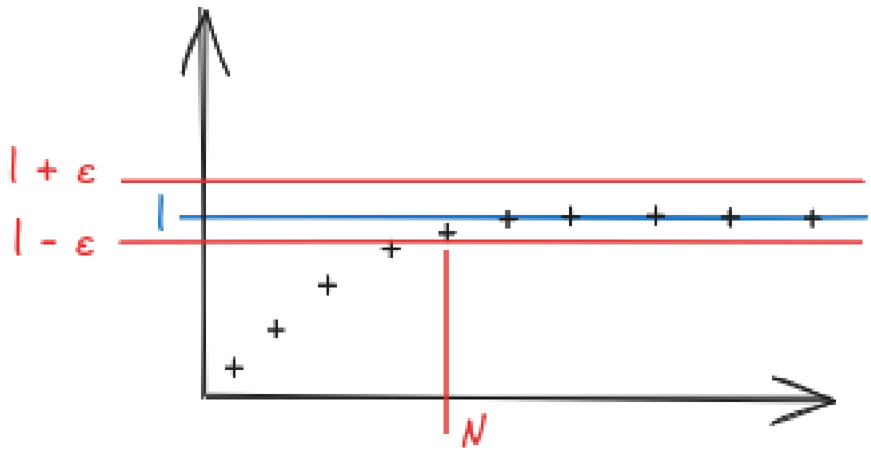
0.1.1 Limit finie, limite infinie

Définition 0.3. *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet pour limite* $l \in \mathbb{R}$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon$$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* l *quand* n *tend vers l'infini, ou*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = l$$



Remarques 0.3. *On utilise* ε *pour parler d'un nombre très petit.*

Définition 0.4. *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $+\infty$ *si elle devient aussi grande que l'on souhaite quand* n *devient grand, autrement dit*

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $-\infty$ *si elle devient aussi petite que l'on souhaite quand* n *devient grand, autrement dit*

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq -A$$

Définition 0.5.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge*** *si elle admet une limite finie.*

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***diverge*** *si elle admet l'infini comme limite ou si elle n'a pas de limite.*

Proposition 0.1.

Si une suite converge, alors sa limite est unique.

Démonstration 0.1.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite qui admet deux limite,* $l_1 \neq l_2$*.*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l_1 \implies \forall \varepsilon_1, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, |u_n - l_1| \leq \varepsilon_1$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l_2 \implies \forall \varepsilon_2, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2, |u_n - l_2| \leq \varepsilon_2$$

Pour $\varepsilon_1 = \varepsilon = \varepsilon_2 > 0$
$\exists N = max(N_1, N_2), \forall n \geq \mathbb{N}, |u_n - l_1| < \varepsilon$ *et* $|u_n - l_2| < \varepsilon$
Donc $|l_1 - l_2| = |l_1 - u_n + u_n - l_2| = |(l_1 - u_n) + (u_n - l_2)| \leq |l_1 - u_n| + |u_n - l_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$
Il suffit de prendre $\varepsilon < \dfrac{|l_1 - l_2|}{2}$, *ainsi*

$$|l_1 - l_2| < 2\varepsilon \leq |l_1 - l_2|$$

Ce qui est absurde, Finalement $l_1 = l_2$

□

0.1.2 Propriétés des limites

Propriétés

1. $\lim_{n\to+\infty} u_n = l \iff \lim_{n\to+\infty}(u_n - l) = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} |u_n - l| = 0$
2. $\lim_{n\to+\infty} u_n = l \implies \lim_{n\to+\infty} |u_n| = |l|$

Remarques 0.4. *C'est en général faux dans l'autre sens. Par exemple pour* $u_n = (-1)^n$, $|u_n| = 1$ *donc* $\lim_{n\to\infty} |u_n| = 1$ *mais* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'a pas de limite (-1, 1, -1, 1, ...).*

Proposition 0.2.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites convergentes.*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \implies \forall \delta \in \mathbb{R}, \lim_{n\to+\infty} (\delta u_n) = \delta l$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_n = l' \implies \lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = l + l' \text{ et } \lim_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = l \times l'$$

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N, l \neq 0 \text{ et } u_n \neq 0 \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{l}$$

Démonstration 0.2.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} u_n = l &\implies \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon \\
&\implies \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N, |\delta||u_n - l| \leq |\delta|\varepsilon \\
&\implies \forall \varepsilon' > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N, |\delta u_n - \delta l| \leq |\delta|\varepsilon = \varepsilon' \\
&\implies \lim_{n\to+\infty} \delta u_n = \delta l
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} u_n = l &\implies \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon \\
\lim_{n\to+\infty} v_n = l' &\implies \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N, |v_n - l'| \leq \varepsilon \\
|u_n - l| + |v_n - l'| \geq |u_n - l + v_n - l'| &= |(u_n + v_n) - (l + l')| \\
&\implies |(u_n + v_n) - (l + l')| \leq 2\varepsilon = \varepsilon'
\end{aligned}
$$

À compléter

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} u_n = l &\implies \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon \\
\lim_{n\to+\infty} v_n = l' &\implies \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N, |v_n - l'| \leq \varepsilon
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|u_n \times v_n - l \times l'| &= |u_n \times v_n - l \times v_n + l \times v_n - l \times l'| \\
&= |v_n(u_n - l) + l(v_n - l')| \\
&\leq |v_n(u_n - l)| + |l(v_n - l')| \\
&= |v_n||u_n - l| + |l||v_n - l'|
\end{aligned}
$$

À faire

$$
\lim_{n\to+\infty} u_n = l \implies \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon
$$

$\square$