Science Decision — CM: 2

Par Lorenzo

13 septembre 2024

1 Relations binaires

Définition 1.1. *Une relation binaire R sur un ensemble X est un sous-ensemble de paires ordonnées $(x, y) \in X^2$, on simplifie la notation par xRy (resp. $\neg xRy$) pour $(x, y) \in R$ (resp. $(x, y) \notin R$).*

Propriétés

1. **réflexive** si
$$\forall x \in X,\ xRx$$
2. **irréflexive** si
$$\forall x \in X,\ \neg(xRx)$$
3. **symétrique** si
$$\forall x, y \in X,\ xRy \implies yRx$$
4. **asymétrique** si
$$\forall x, y \in X,\ xRy \implies \neg(yRx)$$
5. **antisymétrique** si
$$\forall x, y \in X,\ xRy \wedge yRx \implies x = y$$
6. **transitive** si
$$\forall x, y, z \in X,\ xRy \wedge yRz \implies xRz$$
7. **négativement transitive** si
$$\forall x, y, z \in X,\ \neg(xRy) \wedge \neg(yRz) \implies \neg(xRz)$$
8. **complète (ou totale)** si
$$\forall x, y \in X,\ xRy \vee yRx$$

Remarques 1.1. *la notation xRy peut être remplacé par $(x, y) \in R$, par exemple pour la réflexivité, ($\forall x \in X$, $(x, x) \in R$).*

Une relation qui satisfait certaines propriétés peut porter un nom.

Définition 1.2.

1. *Une* ***relation d'équivalence*** *si elle est réfléxive, symétrique et transitive.*
2. *Un* ***préordre (ou quasi ordre)*** *si elle est réflexive et transitive.*
3. *Un* ***ordre faible (ou préordre total)*** *si elle est transitive et complète.*
4. *Un* ***ordre faible strict*** *si elle est asymétrique et négativement transitive.*
5. *Un* ***ordre partiel*** *si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.*
6. *Un* ***ordre partiel (ou ordre, ordre linéaire, chaîne)*** *si elle est antisymétrique, transitive et complète.*

Example 1.1.

1. $\mathbb{R}$ *est totalement ordonnées par* $\geq$ *et est appelé l'ordre naturel sur* $\mathbb{R}$.
2. $\mathbb{N}$ *avec* $>$ *est un ordre faible strict.*
3. *Deux entiers relatifs x et y sont congrus modulo $p \in \mathbb{N}$, s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x = y + kp$, ce que l'on note $x \equiv y[p]$. La relation de congruence modulo sur $\mathbb{Z}$ est une relation d'équivalence.*