Université de Saint Etienne **ENC**
L1 MISPIC **Année 2024/2025**

TD 1 : Fondements

Ne pas hésiter à
- **se référer au premier chapitre du cours à chaque fois que c'est nécessaire.**
- **faire vérifier votre réponse au professeur**
- **aller chercher les exercices complexes si vous êtes à l'aise**

Exercice 1 *Traduire en toutes lettres les phrases mathématiques suivantes (en bonus : les comprendre !).*

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ *t.q.* $y^3 = x$,
2. $\forall x \in \mathbb{R}, (x \neq 0 \Leftrightarrow (\exists y \in \mathbb{R}, yx = 1))$
3. $\{m \in \mathbb{Q} \,|\, m \times (m+1) \in \mathbb{Z}\}$
4. *Soit* $A = \{x^2 | x \in \mathbb{N}\}$
5. $\forall x \in \mathbb{N}, (x > 0 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{N}$ *t.q.* $x = y + 1)$
6. $\{x^2 + y^2 | \, x, y \in \mathbb{Z}$ *et* x, y *impairs* $\} \subset \{4k + 1 \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$
7. $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geqslant 3 \Rightarrow [\forall a, b, c \in \mathbb{N}, (a^n + b^n = c^n \Rightarrow (a = 0$ *ou* $b = 0))]$

Exercice 2 *Traduire en symboles mathématiques les phrases suivants :*

1. *A est l'ensemble des nombres rationnels inférieurs ou égaux à* $\sqrt{2}$.
2. *Soit A l'ensemble des nombres réels dont le carré est strictement supérieur à 3.*
3. *A, B et C sont trois sous-ensembles de l'ensemble E vérifiant : tout élément appartenant simultanément à A et B est aussi élément de C.*
4. *Quel que soit le réel a, il suffit qu'il soit non nul pour que son inverse existe.*
5. *Soit f une fonction. Pour que* $f(x)$ *soit égal à* 7*, il faut donner à x la valeur 2.*
6. *Il est nécessaire que* x^2 *soit strictement inférieur à 1 pour que x soit strictement positif et strictement inférieur à 1.*
7. *Pour tout nombre réel x,* $f(x) \geqslant 2$ *si et seulement si x est inférieur ou égal à 0.*

Exercice 3 *Pour les ensembles A et les éléments x suivants, déterminer si* $x \in A$.

1. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $x = 4$
2. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $x = 5$
3. $A = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 2\}$, $x = -3$
4. $A = \{z \in \mathbb{Q} \mid z^2 = 2\}$, $x = -\sqrt{2}$
5. $A = \{w \in \mathbb{N} \mid 3w < 25$ *et* $w \geqslant 6\}$, $x = 9$
6. $A = \{w \in \mathbb{N} \mid 3w < 25$ *ou* $w \geqslant 6\}$, $x = 9$

Exercice 4 *Pour chacune des phrases suivantes, lorsqu'il s'agit d'un énoncé, donner sa négation. (au besoin, on pourra d'abord mettre en évidence la structure de l'énoncé à base de connecteurs logiques $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, ...)*

1. *"La nuit, tous les chats sont gris.*
2. *"Parmi les enseignants de L1 MIPC, il y en a un qui ne donne aucun contrôle."*
3. *"Au bac, j'ai eu 7,5/20 en philo et 12,5 en maths"*
4. *"Pour avoir mon année, il me suffit d'avoir 10 au dernier controle de chimie"*
5. *"Si je mange équilibré, je n'aurai pas de problèmes de santé plus tard"*

Exercice 5 *Même exercice avec les phrases mathématiques des exercices 1 et 2*

Exercice 6 (Tables de vérité) *Donner la table de vérité des formules suivantes :*

$(a)\, P \wedge \neg Q$, $\quad (b)\, P \Leftrightarrow \neg Q$, $\quad (b')\, \neg P \Leftrightarrow Q$, $\quad (c)\, P \vee (Q \wedge \neg P)$, $\quad (c')\, P \vee Q$,

$(d)\, P \wedge (Q \wedge R)$, $\quad (d')\, (Q \wedge P) \wedge R$, $\quad (e)\, \neg P \vee (R \Rightarrow (Q \Rightarrow P))$ $\quad (f)\, (P \vee Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

Déterminer lesquelles sont des tautologies ?
Déterminer lesquelles sont équivalentes (synonymes*) entre elles ?*

Exercice 7 1. *Montrer que $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ est synonyme de $P \Leftrightarrow Q$.*

2. *Montrer que $(P \Rightarrow Q)$ est synonyme de $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$.*

Exercice 8 *Soit $A = \{x \in \mathbb{N} \setminus \{0\} |\, x \text{ est pair }\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} |\, x \text{ est un multiple de } 3\}$.*
On considère la formule suivante dépendant de $x \in \mathbb{Z}$.

$$x \in B \Rightarrow x^2 - 1 \in A \qquad (\mathcal{Q})$$

1. *Pour $x = 2$, la formule $(\mathcal{Q})$ est-elle vraie ?*
2. *Même question pour $x = -3$ puis pour $x = -1$.*
3. *La formule $\forall x \in \mathbb{Z}, (x \in B \Rightarrow x^2 - 1 \in A)$ est-elle vraie ?*
4. *La formule $\exists x \in \mathbb{Z}, (x \in B \Rightarrow x^2 - 1 \in A)$ est-elle vraie ?*

Exercice 9 (Des démonstrations)
Théorème. *Soit $x \in \mathbb{N}$. Pour que x soit un multiple de 6, il suffit que x soit à la fois un multiple de 2 et de 3.*

1. *Traduire cet énoncé sous la forme d'un "Si ... alors..."*
2. *Parmi les démonstrations suivantes, lesquels sont valables*
   (a) *Supposons que x soit un multiple de 6.*
   Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x = 6k$.
   Donc $x = 2 \times 3 \times k$.
   Comme $3k \in \mathbb{N}$, on obtient que x est un multiple de 2.
   Le même raisonnement en inversant le rôle de 2 et de 3 montre que x est aussi un multiple de 3.

(b) *Supposons que x soit un multiple de 2 et de 3.*
Comme $2 \times 3 = 6$, on en déduit que x est un multiple de 6.

(c) *Supposons que x soit un multiple de 2*
Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x = 2k$.
Si x est également un multiple de 3, alors $x = 3k$.
Donc $2k = 3k$, i.e. *$3k - 2k = 0$.*
D'où $k = 0$, ce qui implique $x = 0$.
Donc x est un multiple de 6 (car $0 = 6 \times 0$).

(d) *On prend $x = 42$. C'est un multiple de 2, de 3 et aussi de 6, donc le théorème est vrai.*

(e) *Supposons que x soit un multiple de 3.*
Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x = 3k$.
Imaginons que k soit impair. Alors x serait le produit de deux nombre impairs, donc un nombre impair.
On en déduit que, si x est un multiple de 2, alors k ne peut être impair.
C'est donc un nombre pair et il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $k = 2p$.
D'où $x = 3k = 3 \times (2p) = 6p$ avec $p \in \mathbb{N}$.
En conclusion, x est un multiple de 6.

Exercice 10 (Spécialisation) *1. Soient a, b deux nombres réels. Montrer :*

$$\big(\forall n \in \mathbb{N}, a2^n + b3^n = a\big) \Longrightarrow a = b = 0$$

2. *On suppose que f est une fonction réelle vérifiant*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ (x > A \Rightarrow f(x) < \epsilon).$$

Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 1000$ et $f(x) < 1$.

3. *Soit f une fonction réelle vérifiant $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x) + f(y) < x + y$.*
Montrer que $f(0) < 0$.
Puis montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) < x$.

Exercice 11 (Disjonction de cas) *Pour tout nombre réel x, on note :* $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

1. *Calculer $|x|$ pour $x = 1$ puis $x = -2$ et enfin $x = 0$.*
2. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|x| \geqslant 0$*
3. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|3x| = 3|x|$.*
4. *Montrer que pour tout x, y dans $\mathbb{R}$:*
   (a) $|xy| = |x||y|$;
   (b) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$;
   (c) $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|$.
5. *Pour tout a et b dans $\mathbb{R}$, a-t-on $a^2 \leqslant b^2 \iff |a| \leqslant |b|$?*

Exercice 12 *Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux pour tous nombres réels a, b, c, d ?*
Quand un énoncé est faux, peut-on obtenir un énoncé vrai avec des hypothèses supplémentaires ?

1. $a + 2 \leqslant b \Longrightarrow a \leqslant b$;
2. $a \leqslant b \iff ac \leqslant bc$;
3. $a \leqslant b \iff a + c \leqslant b + c$;
4. $a \leqslant b$ *et* $c \leqslant d \iff a + c \leqslant b + d$;
5. *Si a, b, c et d sont strictement positifs et* $b > d$, *alors* $\dfrac{a-c}{b-d} < \dfrac{a}{b} \iff \dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$.

Exercice 13 *Ecrire la négation des propositions suivantes :*

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$;
2. $t \in]-\infty\,;1[\cap]0\,;5]$;
3. $\exists x \in]a\,;b[$ *t.q.* $f(x) = 0$;
4. $\forall a \in [0\,;4],\ (a > 1 \Longrightarrow f(a) < 0)$;
5. $\exists m \in \mathbb{N},\ \forall t \in]0\,;+\infty[,\ f(t) \leqslant m$;
6. *énoncé 4 de l'exercice 12*
7. $\exists \ell \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon \in]0\,;+\infty[,\ \exists m \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant m \Longrightarrow |u(n) - \ell| < \varepsilon)$.

Exercice 14 (Contraposée)

1. (a) *Écrire la réciproque, la contraposée, la négation des énoncés suivants (où A, B sont des ensembles ; a, b des nombres réels non-nuls et n est un entier) :*

   $$(i)\ A \subset B \Rightarrow (\forall x \in A,\ x \in B)\ ; \quad (ii)\ a \leqslant b \Rightarrow \frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}\ ; \quad (iii)\ n \text{ impair} \Rightarrow \exists p \in \mathbb{N},\ n = 2p+1,$$

   (b) *Parmi les douze énoncés écrits, lesquels sont vrais, lesquels sont faux.*
2. *Soit la propriété pour* $n \in \mathbb{N}^*$:

   $$n^2 - 1 \text{ n'est pas un multiple de } 8 \Rightarrow n \text{ pair.}$$

   (a) *Écrire sa contraposée.*
   (b) *Démontrer que tout entier n impair s'écrit :* $n = 4k + r,\ k \in \mathbb{N},\ r \in \{1, 3\}$.
   (c) *Démontrer que pour tout* $k \in \mathbb{N}$, $(4k+1)^2 - 1$ *est un multiple de* 8.
   (d) *Démontrer que pour tout* $k \in \mathbb{N}$, $(4k+3)^2 - 1$ *est un multiple de* 8.
   (e) *La propriété énoncée ci-dessus est-elle vraie ?*

Exercice 15 (Par l'absurde)

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}$.
   (a) *Démontrer qu'il n'existe pas d'entier strictement entre* $2\sqrt{n}\sqrt{n+1}$ *et* $2n+1$.
   (b) *Démontrer qu'il n'existe pas d'entier strictement entre* $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ *et* $\sqrt{4n+2}$.
2. (a) *Démontrer que* $9x^5 - 12x^3 + 3x - \sqrt{2} = 0$ *n'a pas de solution entière.*

(b) *Démontrer que* $x^5 - 12x^3 + 3x - 3 = 0$ *n'a pas de solution entière.*

3. *Démontrer que :* $3 + 2\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. *Et* $\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ *?*

Exercice 16 (Analyse-Synthèse)
On cherche les paires de nombres entiers (n, m) *vérifiant* $2n + 3m = 1$.

1. **Analyse :** *Soit* (n, m) *une solution au problème ci-dessus*
   (a) *Montrer que* m *est impair.*
   (b) *Montrer qu'il existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $m = 2k + 1$ *et* $n = -3k - 1$ *et*
2. **Synthèse :**
   (a) *Montrer que lorsque* $k \in \mathbb{Z}$, *poser* $n = -3k - 1$ *et* $m = 2k + 1$ *donne une solution au problème de départ.*
   (b) *Conclure.*

Exercice 17 *Ceci est un exercice de logique faisant intervenir des objets mathématiques que vous ne connaissez pas et sur lesquels aucune connaissance préalable n'est requise.*
On s'intéresse aux "schémas (affines de type fini sur $\mathbb{C}$*)" dont l'ensemble est noté Sch. Ainsi, dire que* $X \in Sch$ *signifie que* X *est un tel "schéma".*
Certains de ses schémas on des propriétés particulières. Ils peuvent être
— *"normaux" (abrévié "*X *est* (N)*")*
— *"Cohen-Macaulay" (abr : "*X *est* (CM)*")*
— *"réguliers" (abr : "*X *est* (R)*")*
— *"réguliers en codimension 1 " (abr "*X *est* (R_1)*)*

1. *Traduire en français l'énoncé mathématique suivant :*
$$\forall X \in Sch, (X \text{ est } (R) \Rightarrow (X \text{ est } (CM) \text{ et } X \text{ est } (R_1))) \tag{1}$$
2. *Traduire en langage mathématique l'énoncé suivant :*

   Si un schéma X *est à la fois Cohen-Macaulay et régulier en codimension 1, alors il est normal* (2)
3. *Enoncer la contraposée de l'énoncé* (1)
4. *Donner la table de vérité de l'énoncé* (2) *(en fonction des valeurs de vérité possibles Vrai/Faux des trois propriétés "*X *est* (CM)*", "*X *est* (R_1)*", "*X *est* (N)*")*
5. *On admet que les énoncés* (1) *et* (2) *sont vrais (théorèmes de niveau M2). Pour les énoncés suivants, dire si l'énoncé est vrai, s'il est faux ou si vous ne pouvez rien déduire à partir des affirmations données (et, dans tous les cas, justifiez)*
   (a) *Si* X *est un schéma régulier alors il est normal.*
   (b) *Si un schéma n'est pas Cohen-Macaulay alors il n'est pas normal.*
   (c) *Si un schéma n'est pas Cohen-Macaulay alors il n'est pas régulier.*
   (d) *Il existe des schémas normaux qui ne sont pas réguliers en codimension 1.*

(e) Il existe des schémas réguliers qui ne sont pas réguliers en codimension 1.

Exercice 18 (Méta-Mathématiques) *On considère deux formules logiques F, F' (dépendant d'énoncés variables P,Q...).*

1. *Montrer que F est synonyme de F' si et seulement si $(F \Leftrightarrow F')$ est une tautologie.*
2. *Montrer que $(F \Rightarrow F')$ est une tautologie si et seulement si l'ensemble des lignes de la table de vérité où F est vraie est inclus dans l'ensemble des lignes de la table de vérité où F' est vraie*