

Analyse — CM: 1

Par Lorenzo

12 septembre 2024

1 L'ensemble des nombres rationnels \mathbb{Q}

1.1 Ecriture décimale

Définition 1.1. On définit l'ensemble des nombres rationnels \mathbb{Q} par $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\}$, optionnellement $\text{pgcd}(p, q) = 1$ peut être rajouté dans la définition. Cela ajoute le fait que p et q sont premiers entre eux et donc $\frac{p}{q}$ une fraction irréductible. (rappel: $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, i.e. \mathbb{N} privé de 0).

Remarques 1.1. Les nombres décimaux sont des nombres de la forme $\frac{p}{10^n}$ avec $p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ (e.g. $1.234 = \frac{1234}{10^3}$).

Proposition 1.1.

Un nombre est rationnel si et seulement si il admet une écriture décimale finie ou périodique.

Démonstration 1.1.

Démontrons que si un nombre a une partie décimale finie ou périodique, alors il est rationnel.

a) partie décimale finie

1. Supposons que x soit un nombre réel avec une partie décimale finie. x peut s'écrire sous la forme:

$$x = a.b_1b_2\dots b_n$$

Où $a \in \mathbb{Z}$ est la partie entière et $b_1b_2\dots b_n$ avec $n \in \mathbb{N}$ représente les chiffres de la partie décimale finie.

2. On peut écrire x comme:

$$x = a + \frac{b_1b_2\dots b_n}{10^n}$$

Ici, a est un entier et $\frac{b_1b_2\dots b_n}{10^n}$ un nombre rationnel.

La somme d'un entier (nombre rationnel) et d'un nombre rationnel est un nombre rationnel.

b) partie décimale périodique

1. Supposons que x soit un nombre réel avec une partie décimale périodique. x peut s'écrire sous la forme:

$$x = a.b_1b_2...b_n\overline{c_1c_2...c_m}$$

où $a \in \mathbb{Z}$ est la partie entière, $b_1b_2...b_n$ sont les chiffres non répétitifs initiaux, et $\overline{c_1c_2...c_m}$ est le bloc périodique.

2. Pour simplifier la démonstration, on peut isoler la partie périodique. Posons:

$$y = 0.\overline{c_1c_2...c_m}$$

3. On multiplie y par 10^m , où m est la longueur de la période.

$$\begin{aligned} 10^m y &= c_1c_2...c_m + y \\ \iff 10^m y - y &= c_1c_2...c_m \\ \iff y(10^m - 1) &= c_1c_2...c_m \\ \iff y &= \frac{c_1c_2...c_m}{10^m - 1} \end{aligned}$$

y est donc rationnel.

4. On peut réexprimer x

$$x = a + \frac{b_1b_2...b_n}{10^n} + y$$

La somme de nombre rationnel donne un nombre rationnel.

Ainsi si un nombre à une partie décimale finie ou périodique, alors il est rationnel.

□

Démonstration 1.2.

Démontrons que si un nombre est rationnel, alors sa partie décimale est finie ou périodique.

Supposons que x est un nombre rationnel ainsi il s'écrit sous la forme $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$

Lorsque qu'on effectue la division euclidienne $\frac{p}{q}$ deux cas se présentent:

La division se termine par un nombre fini d'étapes.

La division ne se termine pas et répète une séquence de chiffres.

Ainsi si un nombre est rationnel, alors sa partie décimale est finie ou périodique.

□

Exemple 1.1. Prenons $x = 12.34202320232023\dots$

Etape 1: faire apparaitre la partie périodique à la virgule. Ici on multiplie par 100

$$100x = 1\,234.202320232023\dots \quad (1)$$

Etape 2: on décale d'une période vers la gauche. Ici la période est de longueur 4 donc on multiplie par 10 000.

$$10\,000 \times 100x = 12\,342\,023.20232023\dots \quad (2)$$

Etape 3: on soustrait (2) par (1) pour que la partie décimale s'annule.

$$10\,000 \times 100x - 100x = 12\,342\,023 - 1\,234 \quad (3)$$

$$\iff 999\,900x = 12\,340\,789 \quad (4)$$

$$\iff x = \frac{12\,340\,789}{999\,900} \quad (5)$$

$$(6)$$