Ensemble Complex — CM: 2

Par Lorenzo

13 septembre 2024

1 Méthodes de démonstration 1

1.1 Implication

Pour démontrer un énoncé du type $P \implies Q$ (Si P alors Q)

Méthode 1.1.

On suppose P.
raisonnement profond.
on en conclut Q.

Example 1.1.

$$\textit{Démontrons que } x \in \mathbb{R} \implies x + 1 \in \mathbb{R}_+$$

On suppose $x \in \mathbb{R}$

$x \geq 0$
$x + 1 \geq 0 + 1 \geq 0$

Donc $x + 1 \in \mathbb{R}_+$

Remarques 1.1. $A \subset B$ *(*$A, B \subset E$*) par définition se traduit par* $\forall x \in E, x \in A \implies x \in B$

1.2 Règle d'inférence ("Déduction naturelle")

Supposons A, B deux formules logiques dépendant d'énoncés élémentaires P, Q, R, ... Imaginons que pour chaque ligne de la table de vérité où A est vrai, B l'est également. Ainsi lorsqu'on a A on pourra déduire B

Example 1.2. *Supposons* $P \implies P \vee Q$
Quand P *est vrai* $P \vee Q$ *est vrai.*

1.3 Disjonction de cas

De même une tautologie est une règle qui est toujours vraie. Un exemple $(P \vee \neg Q)$.

Example 1.3. *Théorème si $x \in \mathbb{N}$ alors $x(x+1)$ pair.*

Si x est pair alors $x = 2k, k \in \mathbb{N}$.
$x(x+1) = 2(k(x+1))$ est pair.

Si x est impair $x+1$ est pair implique $\exists k \in \mathbb{N}, (x+1) = 2k$.
$x(x+1) = x + 2k = 2(kx)$ implique $x(x+1)$ pair.

Conclusion: Dans tous les cas $x(x+1)$ est pair.
C'est un raisonnement par disjonction de cas.

Méthode 1.2.

Plus généralement si $A \vee B \vee C \vee ...$ est une tautologie alors la méthode de la démonstration

1) Suppose A

raisonnement profond

conclusion

2) Suppose B

raisonnement profond

même conclusion

3) ...

Donc la conclusion est vrai dans tous les cas

Remarques 1.2. *Pour trouver des synonyme en regardant toute les valeurs dans une table de vérités, on utilise une disjonction de cas.*

Example 1.4. *Soit un entier n, n est impair ou n^2 est un multiple de 4.*

Supposons que n ne soit pas impair.
Alors n est pair, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$
Ainsi $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$.
n^2 est un multiple de 4.

1.4 La double implication

Si vous souhaitez montrer que $P \iff Q$, il suffit de montrer $P \implies Q$ et $Q \implies P$.

Example 1.5. $x \in \mathbb{N} \iff x+1 \in \mathbb{N}^*$
1) Supposons que $x \in \mathbb{N}$, donc $x \geq 0 \implies x+1 \geq 1$
Ainsi $x+1 \in \mathbb{N}^*$
2) Supposons que $x+1 \in \mathbb{N}^*$, donc $x+1 \geq 1 \implies x+1-1 \geq 1-1 \implies x \geq 0$.
La soustraction est stable sur $\mathbb{Z}$, de plus $x \geq 0$ donc $x \in \mathbb{Z}_+ \equiv \mathbb{N}$

Remarques 1.3. *Régulièrement utilisé pour montre que deux ensembles sont égaux, on montre $A \subset B$ et $B \subset A$. Cela s'appelle la **double inclusion**.*

1.5 Raisonnement par contraposée

$P \implies Q$ est synonyme à $\neg Q \implies \neg P$, ça se prouve facilement en comparant leurs tables de vérités.

Example 1.6. *Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que si n^2 alors n est pair.*

Supposons que n est impair, alors il existe $k \in \mathbb{Z}, n = 2k + 1$
Ainsi $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ est impair.
n impair implique n^2 impair donc n^2 pair implque n pair (la proposition de base).

1.6 Raisonnement par l'absurde

Pour montrer que P est vrai, on peut supposer P faux et arriver à une contradiction.

Example 1.7. *Montrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel.*

Démonstration.

On suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel, i.e. on peut écrire $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$ (et pgcd$(a, b) = 1$).

$\sqrt{2} = \dfrac{a}{b} \implies 2 = \dfrac{a^2}{b^2} \implies 2b^2 = a^2$

Ainsi a^2 est pair et avec le raisonnement précédent a est aussi pair (donc $a = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$).

$2b^2 = (2k)^2 \implies 2b^2 = 4k^2 \implies b^2 = 2k^2$

Ainsi b^2 est pair et b aussi.

Absurde a et b sont premiers entre eux, ils ne peuvent pas être tous les deux multiple de 2.

$\square$