

Analyse — CM: 1

Par Lorenzo

12 septembre 2024

1 L'ensemble des nombres rationnels \mathbb{Q}

1.1 Ecriture décimale

Définition 1.1. On définit l'ensemble des nombres rationnels \mathbb{Q} par $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\}$, optionnellement $\text{pgcd}(p, q) = 1$ peut être rajouté dans la définition. Cela ajoute le fait que p et q sont premier entre eux et donc $\frac{p}{q}$ une fraction irréductible. (rappel: $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, i.e. \mathbb{N} privé de 0).

Remarques 1.1. Les nombres décimaux sont des nombres de la forme $\frac{p}{10^n}$ avec $p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ (e.g. $1.234 = \frac{1234}{10^3}$).

Proposition 1.1.

Un nombre est rationnel si et seulement si il admet une écriture décimale finie ou périodique.

Exemple 1.1. Prenons $x = 12.34202320232023\dots$

Etape 1: faire apparaître la partie périodique à la virgule. Ici on multiplie par 100

$$100x = 1\,234.202320232023\dots \quad (1)$$

Etape 2: on décale d'une période vers la gauche. Ici la période est de longueur 4 donc on multiplie par 10 000.

$$10\,000 \times 100x = 12\,342\,023.20232023\dots \quad (2)$$

Etape 3: on soustrait (2) par (1) pour que la partie décimale s'annule.

$$10\,000 \times 100x - 100x = 12\,342\,023 - 1\,234 \quad (3)$$

$$\iff 999\,900x = 12\,340\,789 \quad (4)$$

$$\iff x = \frac{12\,340\,789}{999\,900} \quad (5)$$

$$(6)$$