

Science Decision — CM: 4

Par Lorenzo

26 septembre 2024

0.1 Opérations sur les relations

Puisque une relation R sur X est un sous ensemble de $X \times X$, on peut facilement utiliser des opérations ensemblistes.

Définition 0.1. *Étant donné deux relation R_1 et R_2 sur un ensemble X .*

- la relation **complémentaire** de R_1 , la relation binaire R_1^c sur X telle que
 $\forall x, y \in X, xR_1^c y$ si $\neg(xR_1 y)$
- la **réunion** de R_1 et R_2 est la relation binaire $R_1 \cup R_2$ sur X telle que
 $\forall x, y \in X, xR_1 \cup R_2 y$ si $xR_1 y \vee xR_2 y$
- l'**intersection** de R_1 et R_2 est la relation binaire $R_1 \cap R_2$ telle que
 $\forall x, y \in X, xR_1 \cap R_2 y$ si $xR_1 y \wedge xR_2 y$
- la relation R_1 est **compatible** avec R_2 si
 $\forall x, y \in X, xR_1 y \implies xR_2 y$ ou de manière équivalente $R_1 \subset R_2$
- la relation **réciproque** (ou duale, inverse) de R_1 , la relation binaire R_1^{-1} sur X telle que
 $\forall x, y \in X, yR_1^{-1} x$ si $xR_1 y$
- la **composée** de R_1 et R_2 , la relation binaire $R_1 \circ R_2$ sur X telle que
 $\forall x, y \in X, xR_1 \circ R_2 y$ si $\exists z \in X, xR_2 z \wedge zR_1 y$

0.2 Relations d'équivalence

Proposition 0.1.

L'intersection $R_1 \cap R_2$ de deux relations d'équivalences R_1 et R_2 sur un ensemble X est une relation d'équivalence.

Démonstration 0.1.

- **Réflexive** car $\forall x \in X, xR_1 x \wedge xR_2 x$, ainsi $xR_1 \cap R_2 x$ pour tout $x \in X$.
- **Symétrie** car $\forall x, y \in X, (xR_1 y \wedge yR_1 x) \wedge (xR_2 y \wedge yR_2 x)$, ainsi $\forall x, y \in X, xR_1 y \wedge xR_2 y$ ce qui implique que $yR_1 x \wedge yR_2 x$ soit $\forall x, y \in X, (xR_1 y \wedge yR_2 x) \wedge (xR_2 y \wedge yR_1 x)$.
- **Transitive** car $\forall x, y \in X, xR_1 y \wedge xR_2 y \wedge yR_1 z \wedge yR_2 z \implies xR_1 z \wedge xR_2 z \implies xR_1 \cap R_2 z$

$R_1 \cap R_2$ est Réflexive, Symétrique, Transitive donc c'est une relation d'équivalence.

□