Analyse — CM: 4

Par Lorenzo

26 septembre 2024

0.1 Majorants et minorants

Définition 0.1. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, un réel M est dit majorant de A si il vérifie* $\forall x \in A,\ M \geq x$

Définition 0.2. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, un réel m est dit minorant de A si il vérifie* $\forall x \in A,\ m \leq x$

Remarques 0.1. *Le majorant et minorant n'appartiennent pas forcément à l'ensemble A.*

Définition 0.3. *Si un majorant (resp. minorant) de A existe, on dit que A est majorée (resp. minorée). On dit que A est bornée si A est majorée et minorée.*

0.2 Bornes supérieures et bornes inférieures

Définition 0.4. *Soit A un partie non vide de $\mathbb{R}$.*

1. *On dit que M est la borne supérieure de A, si M est un majorant de A et que M est le plus petit des majorants. Si il existe on note $M = sup\ A$.*

2. *On dit que m est la borne inférieure de A, si m est un minorant de A et que m est le plus grand des minorant. Si il existe on note $m = inf\ A$.*

Remarques 0.2. *sup A et inf A n'appartiennent pas forcément à A. Mais si ils appartiennent à l'ensemble ils deviennent max A et min A respectivement.*

Example 0.1. *Posons* $A := [0, 1[$,
$minA = 0$ *et* $maxA$ *n'existe pas.*
les minorants de A sont $]-\infty, 0]$ *et les majorants de A sont* $[1, +\infty[$
$infA = 0$ *et* $supA = 1$

Proposition 0.1.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et majorée. La borne supérieure est l'unique réel sup A, tel que

(i)$\forall x \in A,\ x \leq supA$ *et*

(ii) $\forall y \in \mathbb{R},\ y < supA \implies (\exists x \in A, y < x)$

Démonstration 0.1.

Montrons que sup A vérifie (i) et (ii).

Comme sup A est un majorant, elle vérifie (i)

Posons $y < supA$, comme sup A est le plus petit des majorants, y ne peut pas être un majorant de A.

Donc $\exists x \in A,\ y < x$

Soit M un réel qui vérifie (i) et (ii), supposons que M n'est pas le plus petit des majorants. Il existe un autre majorant y, tel que $y < M$.

Mais d'après (ii) $\exists x \in A,\ y < x$, donc y n'est pas un majorant de A.

□

Théorème 0.1. *Toute partie non vide de $\mathbb{R}$ majorée admet une borne supérieure.*

Théorème 0.2. *Toute partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée admet une borne inférieure.*

Proposition 0.2.

Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. La borne supérieure est l'unique réel sup A, tel que

(i) sup A est un majorant de A

(ii) il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers sup A.

1 Les suites

1.1 Définition d'une suite

Définition 1.1. *Une suite est l'application*

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u(n) \end{aligned}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u(n)$, ou plus souvent u_n, le n-ième terme de la suite. On écrit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$