Science Decision — CM: 3

Par Lorenzo

19 septembre 2024

Proposition 0.1.

Si R est asymétrique alors R est réflexive.

Démontré trivialement par les définitions d'asymétrie et de réflexivité.

Proposition 0.2.

Si R est irréflexive et transitive alors R est asymétrique.

Démonstration 0.1.

On suppose que R est irréflexive, transitive et non asymétrique.

La non asymétrie se traduit par

$$\neg(\forall x, y \in X,\ xRy \implies \neg(yRx)) \quad \equiv \quad \exists x, y \in X,\ xRy \wedge yRx$$

Ainsi avec la non asymétrie et la transitivité on arrive à

$$\begin{aligned} &\exists x, y \in X,\ xRy \wedge yRx \quad \wedge \quad \forall x, y, z \in X,\ xRy \wedge yRz \implies xRz \\ \equiv \quad &\exists x, y \in X,\ xRy \wedge yRx \implies xRx \end{aligned}$$

Ce qui est absurde car ça contredit l'irréflexivité !!!

Donc Si R est irréflexive et transitive alors R est asymétrique.

□

Proposition 0.3.

R est négativement transitive ssi

$$\forall x, y, z \in X,\ xRz \implies xRy \vee yRz$$

Démonstration 0.2.

Utilisons la contraposée du négativement transitive
(Rappel la contraposée de $P \implies Q$ est $\neg Q \implies \neg P$),

$$\begin{aligned} &\forall x, y, z \in X,\ \neg(\neg(xRz)) \implies \neg(\neg xRy \wedge \neg yRz) \\ \equiv \quad &\forall x, y, z \in X,\ xRz \implies xRy \vee yRz \end{aligned}$$

Ainsi R est négativement transitive ssi

$$\forall x, y, z \in X,\ xRz \implies xRy \vee yRz$$

$\square$

Proposition 0.4.

Si R est complète alors R est réflexive

Démontré facilement par définition en prenant un x et un $y = x$.