Analyse — CM: 3

Par Lorenzo

19 septembre 2024

0.1 Propriété d'Archimède

L'ensemble $\mathbb{R}$ est dit archimédien, i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N},\ x < n$

Proposition 0.1.

Il existe un unique entier dans $\mathbb{Z}$, appelé la partie entière E, tel que $E(x) \leq E(x) + 1$

Démonstration 0.1.

Existence: *Supposons que $x \geq 0$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $x < n$.*

Ainsi on peut trouver un autre entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq x$ et $m < n$. Il suffit de choisir m comme le plus grand entier inférieur ou égal à x et tel que $m \leq x < m+1$

Unicité: *Supposons qu'il existe 2 entiers tel que $k \leq x < k + 1$ et $l \leq x < l + 1$*
Par transitivité, il vient $k \leq x < l + 1$ et $k < l + 1$,
de même, $l \leq x < k + 1$ et $l < k + 1 \implies l - 1 < k$

Finalement $l - 1 < k < l + 1$ et comme entre les entiers l'entier l-1 et l+1 il n'y a que l, alors $k = l$

$\square$

Example 0.1.

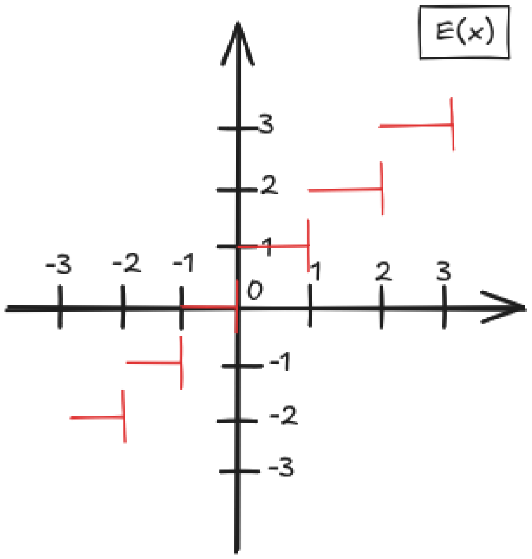
x = 3.14, E(x) = 3.

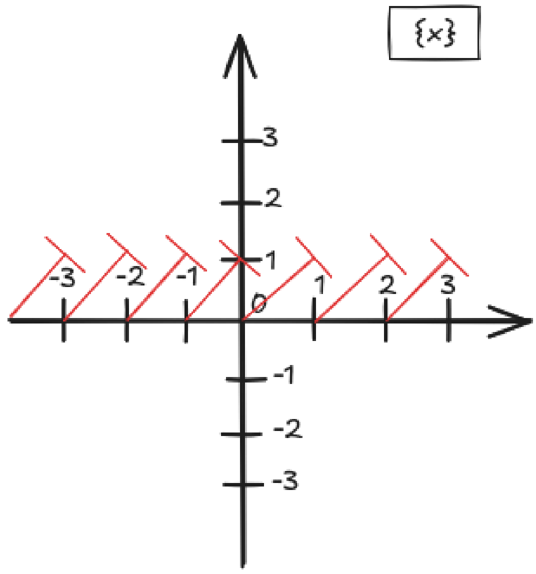
x = -12.2, E(x) = -13.

Remarques 0.1.

On note parfois $E(x) = [x] = \lfloor x \rfloor$

On note $\{x\}$, la partie fractionnaire (e.g. $\{3.14\} = 0.14$)

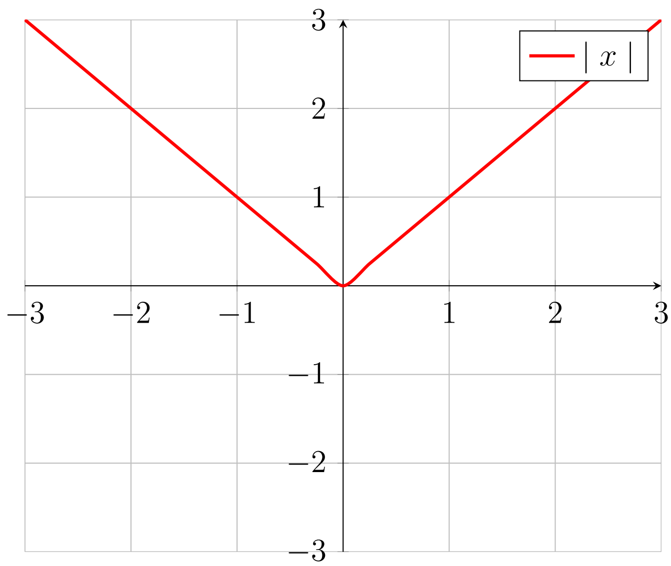




0.2 La valeur absolue

Définition 0.1. *Soit x un nombre réel. La valeur absolue de x est le nombre réel positif défini par*

$$|x| = \begin{cases} x, & si\ x \geq 0 \\ -x, & si\ x < 0 \end{cases} \tag{1}$$



Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$

Propriétés

1. $|a| \geq 0, \quad a \leq |a|, \quad -|a| \leq a, \quad |-a| = |a|$
2. $\sqrt{a^2} = |a|$
3. $|ab| = |a||b|$
4. $\forall n \in \mathbb{Z}, |a^n| = |a|^n$

5. si $a \neq 0, |\frac{1}{a}| = \frac{1}{|a|}$ et $|\frac{b}{a}| = \frac{|b|}{|a|}$

6. Pour $b \geq 0$,

   $|a| = b,$ si et seulement si $a = b$ ou $a = -b$

   $|a| \leq b$ si et seulement si $-b \leq a \leq b$ (beaucoup utilisé pour passer de a à $|a|$)

   $|a| \geq b$ si et seulement si $a \leq -b$ ou $a \geq b$

7. $|a+b| \leq |a| + |b|$ (l'inégalité triangulaire)

8. $||a| - |b|| \leq |a - b|$ (l'inégalité triangulaire inversée)

Les propriétés 1 à 6 sont démontrés par la définition de la valeur absolue
Démontrons la proprétée 7.

Démonstration 0.2.

D'après (1) $\quad -|a| \leq a \leq |a|$ *et* $-|b| \leq b \leq |b|$
En additionnant, on obtient $-|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b|$
$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$ *avec (6) on arrive à*
$|a+b| \leq |a| + |b|$

□

Démontrons la propriétée 8.

Démonstration 0.3.

$a = a - b + b \quad$ *et* $\quad |a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$ *(propriétée 7)*
$|a| \leq |a - b| + |b| \implies |a| - |b| \leq |a - b|$

de même,

$b = b - a + a \quad$ *et* $\quad |b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a|$
$|b| \leq |b - a| + |a| \implies |b| - |a| \leq |b - a|$

$|b - a| = |-(a - b)| = |a - b|$ *et*
$|a| - |b| \leq |a - b| \quad$ *et* $\quad |b| - |a| = -(|a| - |b|) \leq |a - b|$
Finalement par définition

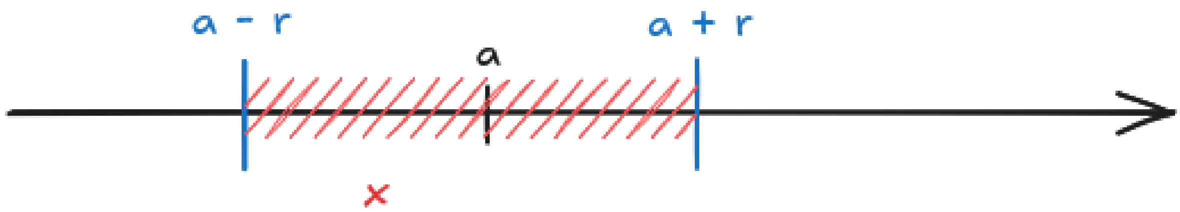
$$||a| - |b|| = \begin{cases} |a| - |b|, & si\ |a| - |b| \geq 0 \\ -(|a| - |b|), & si\ |a| - |b| < 0 \end{cases}$$

Ainsi $||a| - |b|| \leq |a - b|$

□

Corollaire: Soit r un réel positif $\forall x, a \in \mathbb{R}$, on a $|x - a| < r \implies -r < x - a < r \implies a - r < x < a + r$

Remarques 0.2. *La valeur absolue* $|b - a|$ *représent la distance entre a et b*



1 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

1.1 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 1.1. *On appelle intervalle de $\mathbb{R}$, tout sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall a, b \in I, a \leq b$ et $x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b \implies x \in I$*

Remarques 1.1. *Un sous-ensemble ou partie I de $\mathbb{R}$, se note $I \subset \mathbb{R}$*

Définition 1.2. *Soient $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$*

On appelle intervalle fermé et borné (ou segment) de $\mathbb{R}$ tout l'ensemble de la forme $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} |\ a \leq x \leq b\}$

On appelle intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tout l'ensemble de la forme
$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} |\ a < x < b\}$ ou $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} |\ a < x\}$
ou $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} |\ x < b\}$

Remarques 1.2. *L'ensemble qui contient aucun élément est l'ensemble vide, noté $\emptyset$*

Remarques 1.3. *L'ensemble qui contient un seul élément est le singleton, noté $\{a\} = [a, a]$*

Remarques 1.4. $x \in [a, b] \equiv \exists t \in [0, 1], x = (1 - t)a + tb$

Définition 1.3. *On dit que V est un voisinage de a si $\exists \epsilon > 0,\ [a - \epsilon, a + \epsilon] \subset V$*

1.2 Densité

Théorème 1.1. *$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, tout intervalle ouvert, non vide de $\mathbb{R}$ contient une infinité de nombres rationnels*

Théorème 1.2. *$\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, tout intervalle ouvert, non vide de $\mathbb{R}$ contient une infinité de nombres irrationnels*

Démonstration 1.1.

On cherche $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$ tel que $a < \frac{p}{q} < b \implies aq < p < bq$

comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe un entier q tel que $q > \frac{1}{b-a} \implies \frac{1}{q} < b - a$

Prenons $p = E(aq) + 1$
$p = E(aq) + 1 \implies p - 1 = E(aq) \leq aq < E(aq) + 1 = p$

On divise par q l'inégalité $p - 1 \geq aq < p + 1$

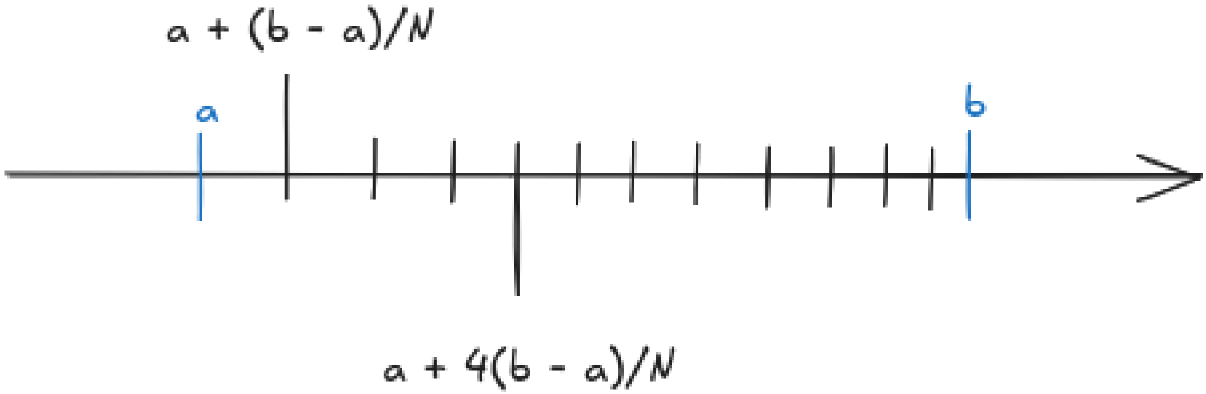
$$\implies \frac{p-1}{q} = \frac{p}{q} - \frac{1}{q} \leq a < \frac{p}{q}$$

Ainsi $\frac{p}{q} - \frac{1}{q} \leq a \implies \frac{p}{q} \leq a + \frac{1}{q} < a + (b-a) = b$

> *Finalement* $a < \frac{p}{q} < b$
> *Il existe un nombre rationnels* $\frac{p}{q}$ *compris entre* a *et* b.

On divise l'intervalle $]a,b[$ *en* N *sous-intervalles disjoints 2 à 2*

$]a,b[=]a,a+\frac{b-a}{N}[\cup]\frac{b-a}{N}, a+2\frac{b-a}{N}[$



> *Donc pour chaque intervalle on peut trouver un rationnels, on peut ensuite faire tendre* N *vers l'infini pour trouver un infinité de rationnels*

□

Démonstration 1.2.

D'apres notre démonstration précédente il existe un infinité de rationnels pour

$a - \sqrt{2} < \frac{p}{q} < b - \sqrt{2} \implies a < \frac{p}{q} + \sqrt{2} < b$

> *On en arrive avec la même logique que la démonstration précédente qu'il existe une infinité d'irrationnels entre deux réels.*

□

2 Bornes sur $\mathbb{R}$

2.1 Maximum et minimum

Définition 2.1. *Soit* A *une partie non vide de* $\mathbb{R}$. *Un réel* M *est le plus grand (resp. le plus petit) élément de* A *si* $M \in A$ *et* $\forall x \in A, x \leq M$ *(resp.* $\forall x \in A, x \geq m$*).*

Si il existe, le plus grand élément est unique et on le note $\max A$.

Si il existe, le plus petit élément est unique et on le note $\min A$.