Nombres rationnels, Nombres irrationnels

Exercice 1 :

1. Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction : $0,1212; 0,1212...; 78,33456456....$
2. Soit $N_n = 0,19971997...1997$ (n fois). Donner N_n sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$.
3. Soit $N = 0,199719971997...$ (une infinité de fois). Donner le rationnel dont l'écriture décimale est N.
4. Même question avec $P = 0,1111...+0,2222...+0,3333...+0.4444...+0,5555...+0,6666...+0,7777...+0,8888...+0,9999.....$

Exercice 2 :

1. Montrer que la somme de deux rationnels est un rationnel. Montrer que le produit de deux rationnels est un rationnel. Montrer que l'inverse d'un rationnel non nul est un rationnel.
2. Montrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est irrationnelle.
3. Montrer que le produit d'un nombre rationnel non nul et d'un nombre irrationnel est irrationnel.
4. Montrer que la racine carrée d'un nombre irrationnel positif est irrationnelle.
5. Trouver un exemple de deux irrationnels positifs dont la somme est irrationnelle. Puis trouver un exemple de deux irrationnels positifs dont la somme est ou rationnelle.

Exercice 3 :

1. Sachant que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, montrer que $2 - 3\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.
2. Monter que $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \notin \mathbb{Q}$.
3. Monter que $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.
4. Monter que $\frac{\ln 3}{\ln 2} \notin \mathbb{Q}$.
5. Monter que $\log(2) \notin \mathbb{Q}$ ($\log(2)$ est le logarithme décimal de 2 définie comme le nombre réel tel que $10^{\log 2} = 2$).

Exercice 4 : Soit $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ où tous les a_i sont des entiers.

1. Montrer que si p a une racine rationnelle $\frac{\alpha}{\beta}$, avec α et β premiers entre eux, alors α divise a_0 et β divise a_n.
2. On considère le nombre $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. En calculant son carré, montrer que ce carré est racine d'un polynôme de degré 2. En déduire que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ n'est pas rationnel.

Valeur absolue, Partie entière

Exercice 5 :

1. Soient x, y des réels. Comparer $E(x+y)$ avec $E(x)+E(y)$.
2. Soient x, y des réels. Comparer $E(x \times y)$ avec $E(x) \times E(y)$.
3. Soit $x > 0$ un réel. Encadrer $\frac{E(x)}{x}$.
4. On note $\{x\} = x - E(x)$ la partie fractionnaire de x. Représenter les graphes des fonctions $x \to E(x); x \to \{x\}$ et $x \to E(x) - \{x\}$.

Exercice 6 : Le maximum de deux nombres x, y est le plus grand des deux nombres et est noté $\max(x, y)$. Le minimum est le plus petit des deux nombres et est noté $\min(x, y)$.

1. Montrer que $\max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$.
2. Montrer que $\min(x, y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$.
3. Trouver une formule pour $\max(x, y, z)$.

Exercice 7 : Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $|x| = 5$.
2. a) $|x+3| = 5$. b) $|x+3| \leq 5$.
3. a) $|x+2| = 7$. b) $|x+2| > 7$.
4. a) $|2x-4| = |x+2|$. b) $|2x-4| \leq |x+2|$.
5. a) $|x+12| = |x^2-8|$. b) $|x+12| \leq |x^2-8|$.
6. $|x+1| + |x-3| \leq 6$ en distinguant les cas $x \geq 3; -1 \leq x \leq 3$; et $x \leq -1$.

Exercice 8 : On suppose que $x \geq 1$.

1. Montrer que x est solution de $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$ si et seulement si $|\sqrt{x-1}-2| + |\sqrt{x-1}-3| = 1$.
2. Résoudre l'équation $|u-2|+|u-3| = 1$ en distinguant les cas $u \geq 3; 2 \leq u \leq 3; 0 \leq u \leq 2$.
3. En déduire la solution x.

Intervalles, Densité

Exercice 9 :

1. Montrer qu'une intersection d'intervalles est un intervalle.
2. Qu'en est-il pour une réunion d'intervalles ? Trouver une condition nécessaire et suffisante afin que la réunion de deux intervalles soit un intervalle.

Exercice 10 :

1. Montrer que l'ensemble des nombres décimaux, c'est à dire de la forme $\frac{p}{10^n}$, est dense dans $\mathbb{R}$.

2. Construire un rationnel compris strictement entre 123 et $123,001$.
3. Ensuite construire un irrationnel.
4. Comment en construire une infinité ?
5. Mêmes questions entre π et $\pi + 0,001$.

Bornes

Exercice 11 : Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. On note $A+B = \{a+b; a \in A \text{ et } b \in B\}$.

1. Montrer que $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A + B$.
2. Montrer que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Exercice 12 : Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. Vérifier si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si $A \subset B$, alors $\sup A \leq \sup B$.
2. Si $A \subset B$, alors $\inf A \leq \inf B$.
3. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

Exercice 13 :

1. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On note $-A = \{-x; x \in A\}$. Montrer que $\min A = -\max(-A)$.
2. Montrer que A admet un plus petit élément si et seulement si A adment une borne inférieure qui appartient à A.
3. Mêmes questions en remplaçant min par inf et max par sup.

Exercice 14 : Déterminer, s'ils existent, le plus grand élément, le plus petit élément, les majorants, les minorants, la borne supérieure et la borne inférieure des ensembles suivants.

1. $A = \left\{\frac{1}{1+x}; x \in [0, +\infty[\right\}$
2. $A = \{x^2 + y^2; x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \text{ et } xy = 1\}$
3. $A = \left\{\frac{x+1}{x+2}; x \in \mathbb{R} \text{ et } x \leq -3\right\}$
4. $A = \left\{\frac{x^3}{|x^3-1|}; x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[\right\}$
5. $A = \left\{\frac{x^n}{|x^n-1|}; x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[\right\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
6. $A = \left\{\frac{2xy}{x^2+y^2}; x, y \in \mathbb{R}^*\right\}$
7. $A = \left\{\frac{2^n}{2^n-1}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$
8. $A = \left\{\frac{1}{1-2^{-n}}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$
9. $A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$
10. $A = \left\{\frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$
11. $A = \left\{\frac{mn}{(m+n)^2}; n, m \in \mathbb{N}^*\right\}$
12. $A = \left\{\frac{2m}{2mn+3}; n, m \in \mathbb{N}^*\right\}$