Université de Saint Etienne **Arithmétique**
L1 MISPIC **Année 2024/2025**

TD 1 : Groupes, Anneaux, Corps

Légende : **F** : Exercice Fondamental (à comprendre impérativement),
* demande un peu de raisonnement,
** demande un peu plus de raisonnement,
*** volontairement plus coriace.

Exercice 1 (F) *Déterminer les propriétés (associativité, élément neutre, existence de symétriques, commutativité) des lois de composition internes suivantes :*

$$+ : \begin{cases} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{cases} \qquad +_2 : \begin{cases} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+_2 y = 2x+2y \end{cases}$$

$$\Box : \begin{cases} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x-y \end{cases}, \qquad \cup : \begin{cases} \mathcal{P}(E)\times\mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ (A,B) & \mapsto & A\cup B \end{cases}, \qquad \cap : \begin{cases} \mathcal{P}(E)\times\mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ (A,B) & \mapsto & A\cap B \end{cases}$$

$$\hat{} : \begin{cases} \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ (a,b) & \mapsto & a^b \end{cases}, \qquad (*)\ \lhd : \begin{cases} \mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ (x,y) & \mapsto & \frac{xy}{x+y} \end{cases}, \qquad (*)\nabla : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{R}}\times\mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ (f,g) & \mapsto & f(0)\times g+g(0)\times f \end{cases}$$

Exercice 2 (*) *Soit $G := \mathbb{Z}^2$ muni des lois de composition interne*

$$+ : \begin{cases} \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ ((x_1,x_2),(y_1,y_2) & \mapsto & (x_1+y_1, x_2+y_2) \end{cases} \quad et \times : \begin{cases} \mathbb{Z}^2\times\mathbb{Z}^2 & \to & \mathbb{Z}^2 \\ ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) & \mapsto & (x_1\times y_1, x_2\times y_2) \end{cases}$$

1. *Déterminer les propriétés des lois $+$ et $\times$ (associativité, élément neutre, existence de symétriques, commutativité)*
2. *Est-ce que $(\mathbb{Z}^2,+)$ est un groupe ? Même question pour $(\mathbb{R}^2,\times)$*

Exercice 3 (F) *Dans chaque cas ci-dessous, déterminer s'il s'agit d'un sous-groupe.*

1. $\{1,2,3\}$ *dans* $(\mathbb{Z},+)$
2. $[1,+\infty[$ *dans* $(\mathbb{R}^*,\times)$.
3. $\{nk | k\in\mathbb{Z}\}$ *dans* $(\mathbb{Z},+)$ *(où $n\in\mathbb{Z}$ est fixé)*
4. $\{2^n | n\in\mathbb{Z}\}$ *dans* $(\mathbb{R}^*,\times)$.
5. **(*)** $\{\frac{p}{q} \mid p\in\mathbb{Z},\, q\in\mathbb{N}^*,\, q\leqslant 10\}$ *dans* $(\mathbb{Q},+)$.
6. **(**)** *l'ensemble des rotations dans* $(Bij(\mathbb{R}^2),\circ)$.

Exercice 4 (F) *Déterminer si les applications suivantes sont des morphismes de groupes :*

$$f_1 : \begin{cases} (\mathbb{Z},+) & \to & (\mathbb{Z},+) \\ x & \mapsto & 3x \end{cases}, \qquad f_2 : \begin{cases} (\mathbb{Z},+) & \to & (\mathbb{Z},+) \\ x & \mapsto & x+1 \end{cases}, \qquad f_3 : \begin{cases} (\mathbb{R}^*,\times) & \to & (\mathbb{R}^*,\times) \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases},$$

,

$$f_4 : \begin{cases} (\mathbb{Z},+) & \to & (\mathbb{R}^*,\times) \\ x & \mapsto & 1 \end{cases}, \qquad f_5 : \begin{cases} (\mathbb{Z},+) & \to & (\mathbb{R},+) \\ x & \mapsto & 1 \end{cases}, \qquad f_6 : \begin{cases} (\mathbb{R}^*,\times) & \to & (\mathbb{R}^*,\times) \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$f_7 : \begin{cases} (G,*) & \to & (H,\Box) \\ x & \mapsto & e_H \end{cases}$$

Exercice 5 (*) *Dans un groupe $(G, *)$, étant donnés a, $b \in G$, on appelle a-conjugué de b, l'élément $conj_a(b) = aba^{-1}$.*

1. *Montrer que $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$*
2. *Soient $a, b, c \in G$. Montrer que $conj_a(conj_c(b)) = conj_{ac}(b)$.*
3. *Dans un groupe abélien, montrer que $conj_a$ est l'application identité sur G.*
4. *Montrer que $conj_a : G \to G$ est un morphisme de groupe.*
5. *Montrer que $conj_a$ et $conj_{a^{-1}}$ sont des fonctions réciproques.*

Exercice 6 (*) *Soient H_1, H_2 deux sous-groupes d'un groupe G donné.*

1. *Montrer que $H_1 \cap H_2$ est un sous-groupe de G*
2. *Montrer que $H_1 \cup H_2$ n'est pas nécessairement un sous-groupe de G*
3. **(**)** *Montrer que $H_1 \cup H_2$ est un sous-groupe de G si et seulement si ($H_1 \subset H_2$ ou $H_2 \subset H_1$)*

Exercice 7 (*) *Soit $G := \{a, b\}$ et soit $* : G \times G \to G$ définie par $a * a = a = b * b$, $a * b = b * a = b$.*

1. *Montrer que $(G, *)$ est un groupe abélien.*
2. *Trouver un morphisme de groupe bijectif entre $(G, *)$ et $(\{-1, +1\}, \times)$*

Exercice 8 (**) *Soit X un ensemble. Soit $E = \mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E.*
On définit la différence symétrique Δ via :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

où $A \setminus B$ est l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B ("A privé de B")

1. *Montrer que (E, Δ) est un groupe.*
2. *Montrer que $(E, \Delta, \cap)$ est un anneau.*
3. *A quelle condition sur E est-ce un corps ?*

Exercice 9 *Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Soient $x, y, z \in A$. La notation $-x$ désigne le symétrique de x par rapport à $+$.*

1. **(F)** *Montrer que $(x + z) \times (y + z) = x \times y + z \times y + x \times z + z \times z$.*
2. **(F)** *En définissant $a^2 := a \times a$ et $2 \times a = a + a$,*
   a-t-on nécessairement l'identité remarquable $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2 \times x \times y$.
3. **(*)** *Supposons que $\times$ admette un élément neutre noté 1_A.*
   Montrer que $(-1_A) \times y = -y$ On pourra calculer de deux manières différentes $(-1_A) \times y + 1_A \times y$
4. **(*)** *Montrer que $x \times (-y) = -(x \times y)$*
5. **(*)** *Montrer que $(-x) \times (-y) = x \times y$*

Exercice 10 (*) *Déterminer les anneaux et les corps parmi les ensembles suivants (munis des lois $+$ et $\times$ habituelles).*

(a) $\mathbb{N}$ *(b)* $\mathbb{Z}$ *(c)* $\mathbb{Q}$ *(d)* $\mathbb{R}$ *(e)* $\mathbb{R}_+^*$

(f) $\mathbb{R}^2$ *(muni de lois $+$ et $\times$ comme définies dans l'exercice 2)*