Théorie de la décision
Semestre 2

Exercice 1 *Preuve*

Soit R une relation binaire transitive sur un ensemble X. Montrez que la relation S définie par $\forall x \in X, \forall y \in X, xSy$ lorsque $xRy \wedge \neg(yRx)$ est transitive.

Exercice 2 *Propriétés*

Soit $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ et la relation binaire R définie sur X par :

$$R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(e,e),(f,f),(d,d),(f,b),(f,e),(d,e),(c,b),(c,d),(c,e),(a,d),(a,b),(a,e)\}$$

.

1. Représentez la relation R par un graphe orienté, dont les sommets sont les éléments de X, et où un arc du sommet $x \in X$ au sommet $y \in X$ représente xRy.
2. R est-elle réflexive ? Antisymétrique ? Justifiez.
3. R est-elle une relation d'ordre ? Si c'est le cas, dessinez son diagramme de Hasse.
4. R a-t-elle un élément maximal ? un plus grand élément ?
5. R a-t-elle un élément minimal ? un plus petit élément ?
6. Proposez une partition de X en un nombre de chaînes minimal.

Exercice 3 *Propriétés*

Soit $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ et la relation binaire R définie sur X par :

$$\begin{aligned} R \;=\; & \{(a,a),(b,b),(c,c),(e,e),(f,f),(d,d),(b,a),(b,c),(b,d),(b,e),(a,c),\ldots \\ & (a,e),(a,d),(c,e),(c,d),(c,a),(e,d),(f,e),(e,f),(a,f),(c,f),(b,f),(f,d)\} \end{aligned}$$

1. Représentez la relation R par un graphe orienté, dont les sommets sont les éléments de X, et où un arc du sommet $x \in X$ au sommet $y \in X$ représente xRy.
2. R est-elle réflexive ? Complète ? Symétrique ? Transitive ? Antisymétrique ?
3. R est-elle une relation d'ordre ?
4. Soit la relation I définie sur X par $\forall x \in X, y \in X, xIy \Leftrightarrow xRy \wedge yRx$. Quels sont les éléments de X/I ?
5. Soit la relation R^* définie sur X/I par $\forall C_x \in X/I, \forall C_y \in X/I, \quad C_xR^*C_y$ si xRy, où C_x est la classe d'équivalence contenant l'élément x. Donnez une représentation graphique de R^*.