Ensemble Complex — CM: 3

Par Lorenzo

20 septembre 2024

1 Logique avec quantificateurs

Quand on utilise des quantificateurs il y a des règles à suivre:

Règle numéro 1: Toute lettre dans un énoncé doit être introduite par un quantificateur.

Règle numéro 2: Cette introduction doit se faire avant la première occurence de la variable.

Règle numéro 3: On doit toujours préciser à quel ensemble appartient la variable.

Méthode 1.1.

Quand on veut montrer un énoncé universel ($\forall x \in X, P(x)$)

1) ***"Soit*** $x \in X$***, montrons P(x)."***

2) ***raisonnement profond.***

3) ***On montre P(x).***

Example 1.1. $\forall x \in \mathbb{R}, \dfrac{x}{x^2+1} \geq \dfrac{-1}{2}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2+1} \geq -\frac{1}{2} &\implies 2x \geq -(x^2+1) \\ &\implies (x^2+2x+1) \geq 0 \\ &\implies (x+1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Pour donner un nom à une quantité/un objet mathématique, on écrit:
Posons A := ..., **Notons A le ...** ou **Soit A := ...**.

Méthode 1.2.

Quand on veut montrer qu'il existe x appartenant à A vérifiant P(x),
Soit on a en tête un exemple d'élément x dans A vérifiant P(x)

Posons x ***= ...***

Vérifions $x \in A$

Vérifions P(x)

Soit on essaye d'utiliser des théorèmes d'existence pour montrer qu'un tel x existe.

Remarques 1.1. *Les mêmes quantificateurs peuvent être intervertis mais pas quand ils sont différent (un $\forall$ avec un $\exists$).*

2 Méthodes de démonstration 2

2.1 Unicité d'un objet

Nous croiserons régulièrement des énoncés du type: "Il y a au plus un élément $x \in X$ vérifiant P(x)".

Méthode 2.1.

Pour montrer qu'un ensemble X contient au plus un élément vérifiant une propriété P, on peut procédé ainsi.

1) ***Soient x et x' deux élément de X vérifiant P, montrons x = x'***

2) ***Raisonnement profond.***

3) ***On en conclut l'unicité d'un élément vérifiant P****.*

Remarques 2.1. *L'unicité ne veut pas dire qu'on a montré l'existence.*

Example 2.1. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *Montrer qu'il existe au plus un multiple de 10 dans* $X = \{n, n+1, ..., n+5\}$

Démonstration 2.1.

Soient $k, k' \in [0, 5]$ *tel que* $10 \mid n+k$ *et* $10 \mid n+k' \implies \exists p \in \mathbb{Z}, n+k = 10p$ *et* $\exists p' \in \mathbb{Z}, n+k' = 10p'$
Par soustraction $(n+k) - (n+k') = 10m - 10m' \implies (k-k') = 10(m-m')$
Or $-5 \leq (k-k') \leq 5$ *et le seul multiple de 10 dans cette intervalle est 0.*

Donc $k = k'$ *et* $n+k = n+k'$.

$\square$

2.2 Analyse synthèse

Méthode 2.2.

Pour déterminer l'ensemble des éléments d'un ensemble E vérifiant une propriété P, on peut raisonner par analyse/synthèse.

Analyse: *soit* $x \in E$*. on suppose que x vérifie P.*

... on regarde les forme possible de x.

Synthèse: *Posons x = ... les différente formes possibles trouvées.*

Vérifions que x vérifie P (et appartient bien à E).

Example 2.2. *Trouvons les couples de nombres réels non-nuls (x, y), solutions du système*

$$(S) \begin{cases} xy = 2 \\ \dfrac{y}{x} = 2 \end{cases}$$

Démonstration.

Analyse: *Soit* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
$xy \times \frac{y}{x} = 2 \times 2 \implies y^2 = 4 \implies y = 2 \vee y = -2$
La ligne 1 (de S) donne $x = \frac{2}{y}$
Donc les seuls couples possibles pour (x, y) sont (1, 2) et (-1, -2)

Synthèse: *On vérifie les deux couples trouvés.*
$1 = 2$ *et* $\frac{2}{1} = 2$ *puis* $-1 \times (-2) = 2$ *et* $\frac{-2}{-1} = 2$

Donc (1, 2) et (-1, -2) sont l'ensemble des couples qui sont solutions de S.

□

2.3 Définition de $\mathbb{N}$ par récurence

Définition 2.1. $\mathbb{N}$ *est l'ensemble construit par*

$\mathbb{N}$ *contient un élément noté 0.*

Chaque élément $n \in \mathbb{N}$ *admet un unique successeur noté succ(n) = n + 1.*

$\forall x \in \mathbb{N}, [succ(x) \neq 0]$.

$\forall x, y \in \mathbb{N}, [succ(x) = succ(y) \implies x = y]$.

$\forall A \subset \mathbb{N}, [(0 \in A \wedge (n \in A \implies succ(n) \in A)) \implies A = \mathbb{N}]$ *(important pour la récurence).*

Remarques 2.2. *Avec cette notation par récurence on peut définir* $\sum$ *par*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \begin{cases} 0 & si\ n = 0 \\ (\sum_{i=1}^{n-1} a_i) + a_n & si\ n \geq 1 \end{cases}$$

Méthode 2.3.

Pour montrer une propriété P_n *est vrai pour tout entier* $n \geq n_0$.

Donner explicitement la propriété P_n.

Initialisation: *On montre* P_{n_0}.

Hérédité: *Soit* $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, *tel que* P_n *est vraie.*

Montrons que P_{n+1}.

Remarques 2.3. *Il peut arrivé qu'on ne puisse pas déduire* P_{n+1} *de* P_n *mais seulement* P_{n+2} *à partir de* P_{n+1} *et* P_n, *on fait alors une récurence double.*

Méthode 2.4.

Si P_{n_0} *et* P_{n_0+1} *sont vraies et si* $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, (P_n \wedge P_{n+1} \implies P_{n+2})$
Alors $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, P_n$ *est vrai.*

Il existe aussi une récurence forte.

Méthode 2.5.

Si P_{n_0} *est vraie et si* $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, (\forall k \in \mathbb{N}, n_0 \leq k \leq n, P_k \implies P_{n+1})$
Alors $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, P_n$ *est vrai.*