Science Decision | CM: 6

Par Lorenzo

17 octobre 2024

0.1 Ordre faible et ordre total

Soit R une relation binaire sur l'ensemble X.

On définit I et S sur X par
$\forall x \in X, y \in X, xIy$ si $xRy \wedge yRx$
$\forall x \in X, y \in X, xSy$ si $xRy \wedge \neg yRx$

Example 0.1. $A = \{a, b, c\}$
$R = \{(a, b), (b, a), (a, c), (b, c)\}$
$I = \{(a, b), (b, a)\}$
$S = \{(a, c), (b, c)\}$

Proposition 0.1.

si R est un ordre faible sur X, alors

1. *I est une relation d'équivalence*
2. *S est irréflexive et transitive*

Démonstration 0.1.

I relation d'équivalence:

I reflexive
Soit $x \in X, xIx \iff xRx \wedge xRX \iff xRx$ *vrai car R est complète*

I symétrique
Soient $x \in X, y \in X, xIy \implies xRy \wedge yRx \implies yRx \wedge xRy \implies yIx$

I transitive
Soient $x, y, z \in X, xIy \wedge yIz \implies xRy \wedge yRx \wedge yRz \wedge zRy \implies xRy \wedge yRz \wedge zRy \wedge yRx \implies xRz \wedge zRx \implies xIz$

□

On définit R^* sur X/I par
$\forall C_x \in X/I, C_y \in X/I, C_x R^* C_y$ lorsque xRy
R^* sur X/I est la réduction (relation quotient) de R sur X

Proposition 0.2.

Si R est un ordre faible alors R^* *est un ordre total sur X/I*

Démonstration 0.2.

R^* antisymétrique

Soient $C_x, C_y \in X/I, C_xR^*C_y \wedge C_yR^*C_x \implies C_x = C_y \implies xIy \implies y \in C_x \implies C_x = C_y$

R^* transitive

Soient $C_x, C_y, C_z \in X/I$

$C_xR^*C_y \wedge C_yR^*C_z \implies xRy \wedge yRz \implies xRz \implies C_xR^*C_z$

R^* complète

$C_x, C_y \in X/I, C_xR^*C_y \vee C_yR^*C_x$ *car R complète*

$\square$

0.1.1 Irréflexive et transitive

voir plus tard