Analyse — CM: 8

Par Lorenzo

07 novembre 2024

0.1 Suites adjacentes

Définition 0.1. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites. Elles sont adjacentes si.*

(i) (u_n) *est croissante,* v_n *décroissante*

(ii) $\forall n \in N, u_n \leq v_n$

(iii) $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$

Théorème 0.1. *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont deux suites adjacentes, alors elles convergent vers la même limite.*

Démonstration 0.1.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *croissante et une suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *décroissante.*

Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée par* v_0 *donc elle converge vers une limite* l_1 *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est minorée par* u_0 *donc elle converge vers une limite* l_2

comme $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0 \implies l_2 - l_1 = 0 \implies l_2 = l_1$

$\square$

0.2 Les Sous-suites

Définition 0.2. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Une sous-suite ou suite extraite est une suite* $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *où*

$$\phi : \substack{\mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N} \\ n \longmapsto \phi(n)}$$

est une fonction croissante.

Proposition 0.1.

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers l, alors toute suite extraite convergent vers l.*

Démonstration 0.2.

$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \iff \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon$

Comme ϕ *est croissante, en particulier si* $n \geq N$ *alors* $\phi(n) \geq \phi(N)$ *et* $|u_{\phi(n)} - l| < \varepsilon$.

Autrement dit, $\lim_{n\to+\infty} u_{\phi(n)} = l$

$\square$

Corollaire 0.1. *Si il existe une sous-suite qui diverge, ou deux sous-suites qui convergent vers deux limites différentes, alors la suite diverge.*

Théorème 0.2. *Le théorème de Bolzano-Weierstrass dit que toute suite bornée admet au moins une sous-suite qui converge.*

Démonstration 0.3.

On procède par dichotomie. Comme la suite est bornée, on peut supposer qu'elle prend ses valeurs dans l'intervalle [a, b]

On pose $a_0 = a$, $b_0 = b$ *et* $\phi(0) = 0$ *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *a une infinité de valeurs dans* $[a, \frac{a+b}{2}]$ *ou* $[\frac{a+b}{2}, b]$.

On note $[a_1, b_1]$ *cet intervalle* $a_0 = a_1$ *et*

$a_1 = a$ *si* (u_n) *a une infinité de valeurs dans* $[a_1, \frac{a+b}{2}]$ *sinon* $a_1 = \frac{a+b}{2}$

$b_1 = \frac{a+b}{2}$ *si* (u_n) *a une infinité de valeurs dans* $[\frac{a+b}{2}, b_1]$ *sinon* $b_1 = b$

On peut ensuite construire un intervalle $[a_n, b_n]$ *de longeur* $\frac{b-a}{2^n}$ *et un entier* $\phi(n) \geq \phi(n-1)$ *avec* $u_{\phi(n)} \in [a_n, b_n]$.

Par construction la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante et la suite* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante, et* $a_n \leq b_n$

De plus $\lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$.

Donc xna et xnb sont adjacentes, elles convergent vers la même limite l.

Mais $u_{\phi(n)} \in [a_n, b_n]$, *ou encore* $a_n \leq u_{\phi(n)} \leq b_n$

et d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} u_{\phi(n)} = l$

□

1 Etude de fonctions

1.1 Notion de fonction

Définition 1.1. *Une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles est une application* $f : {}^{U \longmapsto \mathbb{R}}_{x \longmapsto f(x)}$ *où U est une partie de* $\mathbb{R}$ *appelée ensemble de définition de f.*

Le graphe Γ est la partie du plan $\mathbb{R}^2$ défini par $\Gamma = \{(x, f(x)); x \in U\}$. Pour $x \in U$, f(x) est l'image de x par f.

1.2 Opérations sur les fonctions

Soient $f : U \longmapsto \mathbb{R}$ et $g : U \longmapsto \mathbb{R}$ définies sur le même domaine U.

On définit la somme de deux fonctions $h = f + g$ comme

$$\forall x \in U, h(x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

On définit le produit de 2 fonctions $h = f \times g$ comme

$$\forall x \in U, h(x) = (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

Remarques 1.1. *La multiplication par un scalaire* $\lambda \in \mathbb{R}$ *est définie comme,*

$\forall x \in U, (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

1.3 Fonction monotone, bornée

Définition 1.2. *Soient* $f : U \longmapsto \mathbb{R}$ *et* $g : U \longmapsto \mathbb{R}$

1. $f \leq g$ *si* $\forall x \in U, f(x) \leq g(x)$
2. $f \geq 0$ *si* $\forall x \in U, f(x) \geq 0$
3. f *est constante si* $\exists C \in \mathbb{R}$ *tel que* $\forall x \in U, f(x) = C$

Définition 1.3.

1. *la fonction* f *est croissante si* $\forall x, y \in U, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$.
2. *la fonction* f *est strictement croissante si* $\forall x, y \in U, x < y \implies f(x) < f(y)$.
3. *la fonction* f *est décroissante si* $\forall x, y \in U, x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$.
4. *la fonction* f *est strictement décroissante si* $\forall x, y \in U, x < y \implies f(x) > f(y)$.
5. f *est monotone si elle est croissante ou décroissante.*

Définition 1.4.

1. *On dit que* f *est majorée si* $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in U, f(x) \leq M$.
2. *On dit que* f *est minorée si* $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in U, f(x) \geq m$.
3. *On dit que* f *est bornée si elle est majorée et minorée, ou encore si* $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in U, |f(x)| \leq M$

1.4 Parité et périodicité

Définition 1.5. *Soit* I *un intervalle symétrique par rapport à 0 (*$I =]-a; a[$*) et* $f : I \longmapsto \mathbb{R}$.

1. *On dit que* f *est paire si* $\forall x \in I, f(-x) = f(x)$
2. *On dit que* f *est impaire si* $\forall x \in I, f(-x) = -f(x)$

Définition 1.6. *Soient* $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ *et* T *un nombre réel strictement positif.*

La fonction f *est périodique de période* T *si* $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)$