

# Arithmétique | CM: 5

Par Lorenzo

04 octobre 2024

## 1 Arithmétique avancée dans $\mathbb{Z}$

### 1.1 Bézout, Gauss

**Proposition 1.1** (Bézout).

*Soient  $a, b \in \mathbb{Z}^*$ . Il existe  $u, v \in \mathbb{Z}$  tels que  
 $au + bv = \text{PGCD}(a, b)$*

**Lemme 1.1.** *Les sous-groupes de  $\mathbb{Z}$  sont les  $n\mathbb{Z} := \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$  avec  $n \in \mathbb{Z}$*

**Démonstration 1.1.**

- 1)  $\{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$  sous groupe de  $(\mathbb{Z}, +)$  (cf TD1)
- 2) Soit  $H$  un sous groupe de  $(\mathbb{Z}, +)$  alors  $0 \in H$   
si  $H = \{0\}$  alors  $H = 0\mathbb{Z}$

□