0.1 Séries de Taylor et de Riemann

On peut fabriquer des séries à partir des formules de Taylor.

Exemple 0.1. *La série* $(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!})$ *converge et* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$.

On écrit la formule de Taylor Lagrange entre 0 et 1 à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ *pour la fonction* $x \mapsto e^x$*:*

$$\begin{aligned} e^1 &= \sum_{k=0}^{n} \frac{e^0}{k!}(1-0)^k + \frac{e^c}{(n+1)!}(1-0)^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{e^c}{(n+1)!} \end{aligned}$$

où $c \in]0,1[$ *et* $|e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}| = \frac{e^c}{(n+1)!} \leq \frac{e}{(n+1)!} \to 0$ *Donc par le théorème des gendarmes* $e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \to 0 \implies \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \to e$.

Définition 0.1. *Série de Riemann*
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$*, on appelle* ***série de Riemann*** *la série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

Proposition 0.1: Convergence des séries de Riemann

La série de Riemann converge si et seulement si $\alpha > 1$.

mettre un label vers le cas déjà fait dans CM1

Démonstration 0.1.

Pour $\alpha >= 2$ *c'est déjà fait.*

Soit $\alpha \in]1,2[$.

Soit $f_\alpha : x \mapsto \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

En appliquant le théorème des accroissements finis entre n *et* $n+1$ *pour* $n \geq 1$*:*

$$f_\alpha(n+1) - f_\alpha(n) = f'_\alpha(c_n)$$

c'est à dire:

$$\frac{(n+1)^{1-\alpha}-n^{1-\alpha}}{1-\alpha}=\frac{1}{c_n^{\alpha}}$$
$$\frac{1}{1-\alpha}(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}-\frac{1}{n^{\alpha-1}})=\frac{1}{c_n^{\alpha}}\geq\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}$$

où $c_n \in]n, n+1[$ *puis en sommant (avec téléscopage à gauche) on a:*

$$\frac{1}{1-\alpha}(\frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}}-1)\geq\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}$$

À continuer

$\square$