0.1 Série à termes de signe non fixé

Définition 0.1. *(Convergence absolue)*
Soit $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)$ *une série.*
On dit qu'elle converge ***absolument*** *si la série* $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|\right)$ *converge.*

Proposition 0.1

Soit $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)$ une série qui converge absolument, alors elle converge.

Démonstration 0.1.
Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ *et* $S'_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k|$. *Comme* $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ *converge, la suite* $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy. Donc, pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour tous* $m, n \geq N$, *on a*

$$|S'_n - S'_m| = \sum_{k=m+1}^{n} |u_k| < \epsilon.$$

Or, par inégalité triangulaire, on a

$$|S_n - S_m| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} u_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |u_k| = |S'_n - S'_m|.$$

Donc, pour tous $m, n \geq N$, *on a*

$$|S_n - S_m| < \epsilon.$$

Ainsi, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy et donc converge. Par conséquent, la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *converge.*

À vérifier

□

Définition 0.2.
On dit qu'une série $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)$ *est alternée si*

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n u_{n+1} \leq 0$$

Théorème 0.1: Critère de Leibniz

Soit $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)$ une série alternée telle que

- $u_n \to 0$
- $|u_n|$ décroissante

Alors la série $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)$ converge et si S est sa somme, on a

$$|S - S_n| \leq |u_{n+1}|$$

Démonstration 0.2.
Soit S_n *la suite des sommes partielles. On va démontrer que* (S_{2n}, S_{2n+1}) *sont adjacentes.*

Sans perte de généralité la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ *avec* $a_n \geq 0$ *et* $u_n = (-1)^n a_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ *on a*

$$\begin{aligned} S_{2n+1} - S_{2n} &= a_{2n+1} \to 0 \\ S_{2n+2} - S_{2n} &= a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq 0 \\ S_{2n+3} - S_{2n+1} &= a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq 0 \end{aligned}$$

Ce qui démontre que les deux suites sont effectivement adjacentes. Donc la suite des sommes partielles converge, et la série converge.

On a alors $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$ *et donc* $|S - S_n| \leq a_{n+1} = |u_{n+1}|$.

À vérifier

□

Exemple 0.1. *Étudier la convergence de la série* $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

- *La série est alternée et* $|u_n| = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$

- $|u_n|' = -\dfrac{1}{2n^{3/2}} < 0$ *donc* $|u_n|$ *est décroissante pour* $n \geq 1$

Donc la série converge.