1 L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$

1.1 Ecriture décimale

Définition 1.1.
On definit l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ *par* $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\}$*, optionellement* $pgcd(p,q) = 1$ *peut être rajouté dans la définition. Cela ajoute le fait que* p *et* q *sont premier entre eux et donc* $\frac{p}{q}$ *un fraction irréductible. (rappel:* $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \backslash \{0\}$*, i.e.* $\mathbb{N}$ *privé de 0).*

Remarque 1.1. *Les nombres décimaux sont des nombres de la forme* $\frac{p}{10^n}$ *avec* $p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ *(e.g.* $1.234 = \frac{1234}{10^3}$*).*

Proposition 1.1

Un nombre est rationnel si et seulement si il admet une écriture décimale finie ou périodique.

Démonstration 1.1.

Démontrons que si un nombre à une partie décimale finie ou périodique, alors il est rationnel.

a) partie décimale finie

1. Supposons que x *soit un nombre réel avec une partie décimale finie.* x *peut s'écrire sous la forme:*

$$x = a.b_1 b_2 ... b_n$$

Ou $a \in \mathbb{Z}$ *est la partie entière et* $b_1 b_2 ... b_n$ *avec* $n \in \mathbb{N}$ *représente les chiffres de la partie décimale finie.*

2. On peut écrire x *comme:*

$$x = a + \frac{b_1 b_2 ... b_n}{10^n}$$

Ici, a *est un entier et* $\frac{b_1 b_2 ... b_n}{10^n}$ *un nombre rationnel.*

La somme d'un entier (nombre rationnel) et d'un nombre rationnel est un nombre rationnel.

b) partie décimale périodique

1. Supposons que x soit un nombre réel avec une partie décimale périodique. x peut s'écrire sous la forme:

$$x = a.b_1 b_2 ... b_n \overline{c_1 c_2 ... c_m}$$

où $a \in \mathbb{Z}$ est la partie entière, $b_1 b_2 ... b_n$ sont les chiffres non répétitifs initiaux, et $\overline{c_1 c_2 ... c_m}$ est le bloc périodique.

2. Pour simplifier la démonstration, on peut isoler la partie périodique. Posons:

$$y = 0.\overline{c_1 c_2 ... c_m}$$

3. On multiplie y par 10^m, où m est la longeur de la période.

$$\begin{aligned} & 10^m y = c_1 c_2 ... c_m + y \\ \iff & 10^m y - y = c_1 c_2 ... c_m \\ \iff & y(10^m - 1) = c_1 c_2 ... c_m \\ \iff & y = \frac{c_1 c_2 ... c_m}{10^m - 1} \end{aligned}$$

y est donc rationnel.

4. On peut réexprimer x

$$x = a + \frac{b_1 b_2 ... b_n}{10^n} + y$$

La somme de nombre rationnel donne un nombre rationnel.

Ainsi si un nombre à une partie décimale finie ou périodique, alors il est rationnel.

□

Démonstration 1.2.

Démontrons que si un nombre est rationnel, alors sa partie décimale est finie ou périodique.

Supposons que x est un nombre rationnel ainsi il s'écrit sous la forme $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$

Lorsque qu'on effectue la division euclidienne $\frac{p}{q}$ deux cas se présentent:

La division se termine par un nombre fini d'étapes.

La division ne se termine pas et répète une séquence de chiffres.

Ainsi si un nombre est rationnel, alors sa partie décimale est finie ou périodique.

$\square$

Exemple 1.1. *Prenons $x = 12.34202320232023...$*

Etape 1: faire apparaitre la partie périodique à la virgule. Ici on multiplie par 100

$$100x = 1\,234.202320232023... \tag{1}$$

Etape 2: on décale d'une période vers la gauche. Ici la période est de longeur 4 donc on multiplie par 10 000.

$$10\,000 \times 100x = 12\,342\,023.20232023... \tag{2}$$

Etape 3: on soustrait (2) par (1) pour que la partie décimale s'annule.

$$\begin{aligned} & 10\,000 \times 100x - 100x = 12\,342\,023 - 1\,234 && (3)\\ \iff & 999\,900x = 12\,340\,789 && (4)\\ \iff & x = \frac{12\,340\,789}{999\,900} && (5)\\ & && (6) \end{aligned}$$