Ensemble Complex | CM: 5

Par Lorenzo

04 octobre 2024

Définition 0.1. *Soient X, Y deux ensembles.*

• *Une application de X dans Y est la donnée, pour tout point $x \in X$ d'un unique point $y \in Y$ associé à x. On dit que y est l'image de x par l'application.*

• *Soit f est une application de X dans Y.*

◇ *on note f(x) l'image de x par f*

◇ *X est appelé espace de départ de f.*

◇ *Y est appelé espace d'arrivée de f.*

Remarques 0.1. *Deux applications f et g sont égales si elles ont même ensemble de départ, même ensemble d'arrivée et si*
$\forall x \in X,\ f(x) = g(x)$

Remarques 0.2. *On ne change pas une application en modifiant la (les) variable(s) muette(s) permettant de la définir. Ainsi les applications suivantes sont égales:*
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}(x, y) \to x + y, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \to x_1 + x_2$

Remarques 0.3. *Pour toute fonction f, si $x_1 = x_2$ alors $f(x_1) = f(x_2)$, la réciproque est fausse en général.*

Remarques 0.4. *Etant donnée une application $f : X \to Y x \to f(x)$ et $X' \subset X$, on peut créer une application restreinte $f_{|X'} : X' \to Y x \to f(x)$*

Définition 0.2. *Soient X, Y des ensembles.*

• *On appelle graphe dans $X \times Y$ toute partie G de $X \times Y$ telle que $\forall x \in X, \exists ! y \in Y, (x, y) \in G$*

• *Si f est une application de X dans Y, alors le graphe de f est $G_f := \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$*

Remarques 0.5. *Réciproquement si G est un graph*

Remarques 0.6. *Une fonction n'étant pas nécessairement définie sur tout l'ensemble de départ considéré (souvent $\mathbb{R}$).*

Définition 0.3. *Soit $f \in Y^X$*

• *On dit que $x \in X$ est un antécédent de $y \in Y$ par f lorsque $f(x) = y$, i.e. lorsque y est l'image de x par f.*

• *Si A est un sous ensemble de X, on appelle image de A l'ensemble* $f(A) := \{f(a) \mid a \in A\} = \{y \in Y \mid \exists a \in A, f(a) = y\} \subset Y$

• *Si B est un sous ensemble de Y, on appelle image réciproque de B l'ensemble des antécédents d'éléments de B:* $f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\} \subset X$

Remarques 0.7. *Attention à la notation, f(a) et f(A) ne sont pas de même nature. Pour tout* $x \in X, f(\{x\}) = \{f(x)\}$

Théorème 0.1. *Soit* $f \in Y^X$

• *Pour toutes parties A et B de Y on a,*

$\diamond$ $A \subset B \implies f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$

$\diamond$ $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

$\diamond$ $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

• *Pour toutes parties A et B de X, on a*

$\diamond$ $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$

$\diamond$ $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

$\diamond$ $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Démonstration 0.1.

□