

Analyse

Par Lorenzo

20 November 2024

Contents

1 L'ensemble des nombres rationnels \mathbb{Q}

1.1 Ecriture décimale

Définition 1.1. On définit l'ensemble des nombres rationnels \mathbb{Q} par $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\}$, optionnellement $\text{pgcd}(p, q) = 1$ peut être rajouté dans la définition. Cela ajoute le fait que p et q sont premiers entre eux et donc $\frac{p}{q}$ une fraction irréductible. (rappel: $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, i.e. \mathbb{N} privé de 0).

Remarques 1.1. Les nombres décimaux sont des nombres de la forme $\frac{p}{10^n}$ avec $p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ (e.g. $1.234 = \frac{1234}{10^3}$).

Proposition 1.1.

Un nombre est rationnel si et seulement si il admet une écriture décimale finie ou périodique.

Démonstration 1.1.

Démontrons que si un nombre a une partie décimale finie ou périodique, alors il est rationnel.

a) partie décimale finie

1. Supposons que x soit un nombre réel avec une partie décimale finie. x peut s'écrire sous la forme:

$$x = a.b_1b_2\dots b_n$$

Où $a \in \mathbb{Z}$ est la partie entière et $b_1b_2\dots b_n$ avec $n \in \mathbb{N}$ représente les chiffres de la partie décimale finie.

2. On peut écrire x comme:

$$x = a + \frac{b_1b_2\dots b_n}{10^n}$$

Ici, a est un entier et $\frac{b_1b_2...b_n}{10^n}$ un nombre rationnel.

La somme d'un entier (nombre rationnel) et d'un nombre rationnel est un nombre rationnel.

b) partie décimale périodique

1. Supposons que x soit un nombre réel avec une partie décimale périodique. x peut s'écrire sous la forme:

$$x = a.b_1b_2...b_n\overline{c_1c_2...c_m}$$

où $a \in \mathbb{Z}$ est la partie entière, $b_1b_2...b_n$ sont les chiffres non répétitifs initiaux, et $\overline{c_1c_2...c_m}$ est le bloc périodique.

2. Pour simplifier la démonstration, on peut isoler la partie périodique. Posons:

$$y = 0.\overline{c_1c_2...c_m}$$

3. On multiplie y par 10^m , où m est la longueur de la période.

$$\begin{aligned} 10^m y &= c_1c_2...c_m + y \\ \iff 10^m y - y &= c_1c_2...c_m \\ \iff y(10^m - 1) &= c_1c_2...c_m \\ \iff y &= \frac{c_1c_2...c_m}{10^m - 1} \end{aligned}$$

y est donc rationnel.

4. On peut réexprimer x

$$x = a + \frac{b_1b_2...b_n}{10^n} + y$$

La somme de nombre rationnel donne un nombre rationnel.

Ainsi si un nombre à une partie décimale finie ou périodique, alors il est rationnel.

□

Démonstration 1.2.

Démontrons que si un nombre est rationnel, alors sa partie décimale est finie ou périodique.

Supposons que x est un nombre rationnel ainsi il s'écrit sous la forme $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$

Lorsque qu'on effectue la division euclidienne $\frac{p}{q}$ deux cas se présentent:
 La division se termine par un nombre fini d'étapes.
 La division ne se termine pas et répète une séquence de chiffres.

Ainsi si un nombre est rationnel, alors sa partie décimale est finie ou périodique.

□

Exemple 1.1. Prenons $x = 12.34202320232023\dots$

Etape 1: faire apparaître la partie périodique à la virgule. Ici on multiplie par 100
 $100x = 1\,234.202320232023\dots$ (1)

Etape 2: on décale d'une période vers la gauche. Ici la période est de longueur 4 donc on multiplie par 10 000.

$$10\,000 \times 100x = 12\,342\,023.20232023\dots$$
 (2)

Etape 3: on soustrait (2) par (1) pour que la partie décimale s'annule.

$$10\,000 \times 100x - 100x = 12\,342\,023 - 1\,234$$
 (3)

$$\iff 999\,900x = 12\,340\,789$$
 (4)

$$\iff x = \frac{12\,340\,789}{999\,900}$$
 (5)

(6)

2 $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel

Il existe des nombres qu'on ne peut pas écrire sous la forme d'une fraction de deux entiers, on les nomme les irrationnels. Ils apparaissent naturellement (e.g. La diagonale d'un carré de longueur 1).

Proposition 2.1.

Pour la suite nous avons besoin de démontrer que

$$p \in \mathbb{Z}, 2 \mid p^2 \implies 2 \mid p$$

si p^2 est pair alors p est pair

Démonstration 2.1.

Supposons que le carré d'un nombre impair est pair:

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{Z}, p = 2k + 1 &\iff p^2 = (2k + 1)^2 \\ &= (2k)^2 + 2 * 2k * 1 + 1^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$

Ici p^2 est impair, Absurde p^2 ne peut pas être à la fois pair et impair!

Donc si le carré d'un entier relatif (p^2) est pair p est aussi pair.

□

Proposition 2.2.

$\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ($\sqrt{2}$ est irrationnel).

Démonstration 2.2.

Supposons que $\sqrt{2}$ est un rationnel, c'est à dire,

$$\exists p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*, \text{ pgcd}(p, q) = 1, \quad \sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

Ici, $\text{pgcd}(p, q) = 1$ signifie que p et q sont premiers entre eux. Cette condition est importante pour assurer que la fraction est irréductible.

$$\begin{aligned} \sqrt{2} = \frac{p}{q} &\iff 2 = \frac{p^2}{q^2} \\ &\iff p^2 = 2q^2 \end{aligned}$$

Ici on peut voir que p^2 est pair et grace à (**la proposition 1.1**) on sait que p l'est aussi. Donc on peut réécrire p par $\exists k \in \mathbb{Z}, 2k = p$ et ainsi remplacer p^2 .

$$\begin{aligned} 2q^2 = p^2 &\iff 2q^2 = (2k)^2 \\ &\iff q^2 = \frac{4p^2}{2} \\ &\iff q^2 = 2p^2 \end{aligned}$$

Donc q^2 est pair et q également.

Finalement 2 divise p et q est absurde car p et q sont premier entre eux, ils ne peuvent pas être tout les deux multiple de 2.

L'hypothèse de départ $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est fausse, ainsi $\sqrt{2}$ est irrationnel.

□

3 Propriété de \mathbb{R}

On nomme \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels, il contient \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ (les réels et l'infini)

3.1 Règle de calcul

Soient a , b et c des nombres réels quelconques. On note $+$ l'addition et \times la multiplication.

Propriétés 3.1.

l'associativité.

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

l'élément neutre.

$$\exists e \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, e + x = x + e = x$$

$$\exists e' \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, e' \times x = x \times e' = x$$

Pour l'addition et la multiplication dans \mathbb{R} , leur élément neutre est 0 et 1 respectivement. e et e' seront pour la suite, les éléments neutres de l'addition et de la multiplication respectivement.

l'élément inverse.

$$\exists i \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, i + x = x + i = e$$

$$\exists i \in \mathbb{R}^*, \forall x \in \mathbb{R}^*, i \times x = x \times i = e'$$

commutativité.

$$a + b = b + a$$

$$a \times b = b \times a$$

distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

$$(a + b) \times c = c \times (a + b) = ac + bc$$

Remarques 3.1. $(\mathbb{R}, +, *)$ est un corps abélien/commutatif

3.2 L'ordre sur \mathbb{R}

Soient a , b et c des nombres réels quelconques.

Propriétés 3.2.

réflexivité.

$$a \leq a$$

l'antisymétrie.

$$a \leq b \text{ et } b \leq a \implies a = b$$

transitivité.

$$a \leq b \text{ et } b \leq a \implies a = b$$

comparabilité

quelque soit a et b dans \mathbb{R} , on a toujours $a \leq b$ or $b \leq a$

Les propriétés 1, 2 et 3 signifie que leq est une relation d'ordre, ajouté la 4, on parle de relation d'ordre totale.

Remarques 3.2. On définit la relation d'ordre supérieur ou égale (\geq) par $a \geq b \iff b \leq a$

Remarques 3.3. On définit la relation d'ordre strictement inférieur ($<$) par $a < b \iff a \leq b$ et $a \neq b$

Remarques 3.4. On définit la relation d'ordre strictement supérieur ($>$) par $a > b \iff a \geq b$ et $a \neq b$

Remarques 3.5. $<$ et $>$ ne vérifient pas 1 et 2, ils ne sont donc pas des relations d'ordres mais des relations d'ordres stricts.

Propriétés 3.3.

$$a \leq b \implies a + c \leq b + c$$

$$a \leq b \text{ et } c \geq 0 \implies ac \leq bc$$

$$ab = 0 \implies a = 0 \text{ ou } b = 0$$

On définit le maximum entre deux réels comme

$$\max(a, b) = \begin{cases} a, & \text{si } b \leq a \\ b, & \text{sinon} \end{cases}$$

3.3 Propriété d'Archimède

L'ensemble \mathbb{R} est dit archimédien, i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, x < n$

Proposition 3.1.

Il existe un unique entier dans \mathbb{Z} , appelé la partie entière E , tel que $E(x) \leq E(x) + 1$

Démonstration 3.1.

Existence: Supposons que $x \geq 0$. Comme \mathbb{R} est archimédien il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $x < n$.

Ainsi on peut trouver un autre entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq x$ et $m < n$. Il suffit de choisir m comme le plus grand entier inférieur ou égal à x et tel que $m \leq x < m + 1$

Unicité: Supposons qu'il existe 2 entiers tel que $k \leq x < k + 1$ et $l \leq x < l + 1$

Par transitivité, il vient $k \leq x < l + 1$ et $k < l + 1$,

de même, $l \leq x < k + 1$ et $l < k + 1 \implies l - 1 < k$

Finalement $l - 1 < k < l + 1$ et comme entre les entiers l'entier $l-1$ et $l+1$ il n'y a que l , alors $k = l$

□

Exemple 3.1.

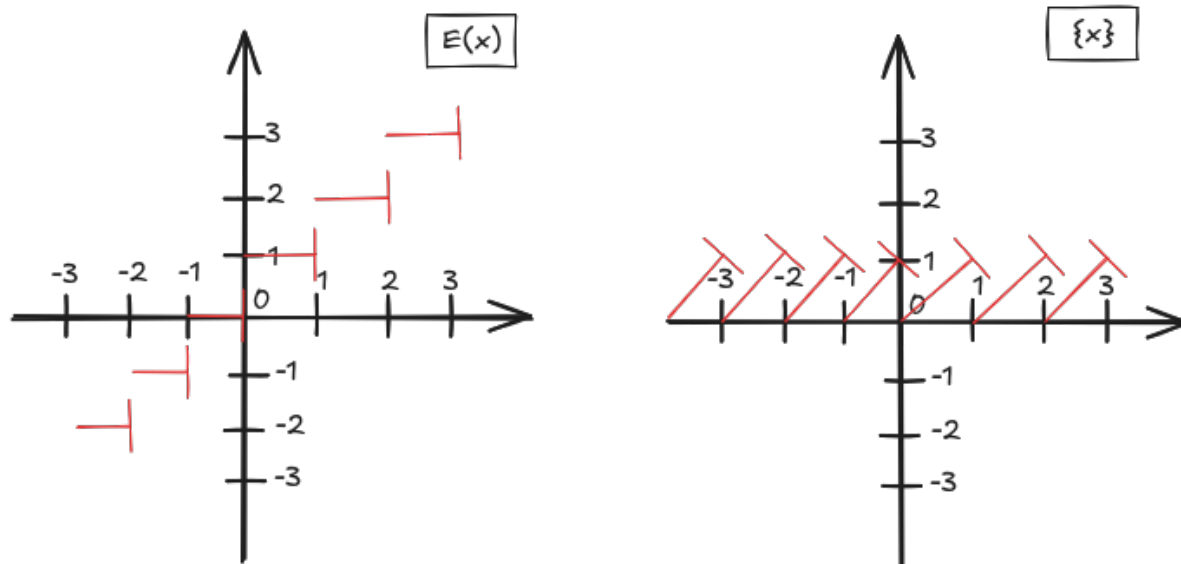
$$x = 3.14, E(x) = 3.$$

$$x = -12.2, E(x) = -13.$$

Remarques 3.6.

On note parfois $E(x) = [x] = \lfloor x \rfloor$

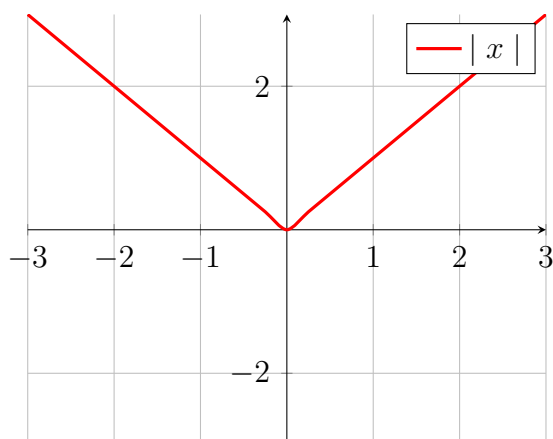
On note $\{x\}$, la partie fractionnaire (e.g. $\{3.14\} = 0.14$)



3.4 La valeur absolue

Définition 3.1. Soit x un nombre réel. La valeur absolue de x est le nombre réel positif défini par

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (7)$$



Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$

Propriétés 3.4.

$$|a| \geq 0, \quad a \leq |a|, \quad -|a| \leq a, \quad |-a| = |a|$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$|ab| = |a||b|$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, |a^n| = |a|^n$$

$$\text{si } a \neq 0, \left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|} \text{ et } \left|\frac{b}{a}\right| = \frac{|b|}{|a|}$$

Pour $b \geq 0$,

$$|a| = b, \text{ si et seulement si } a = b \text{ ou } a = -b$$

$$|a| \leq b \text{ si et seulement si } -b \leq a \leq b \text{ (beaucoup utilisé pour passer de } a \text{ à } |a|)$$

$$|a| \geq b \text{ si et seulement si } a \leq -b \text{ ou } a \geq b$$

$$|a + b| \leq |a| + |b| \text{ (l'inégalité triangulaire)}$$

$$||a| - |b|| \leq |a - b| \text{ (l'inégalité triangulaire inversée)}$$

Les propriétés 1 à 6 sont démontrés par la définition de la valeur absolue

Démontrons la propriété 7.

Démonstration 3.2.

$$D'après (1) \quad -|a| \leq a \leq |a| \text{ et } -|b| \leq b \leq |b|$$

$$\text{En additionnant, on obtient } -|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b|$$

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b| \text{ avec (6) on arrive à}$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

□

Démontrons la propriété 8.

Démonstration 3.3.

$$a = a - b + b \quad \text{et} \quad |a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b| \text{ (propriété 7)}$$

$$|a| \leq |a - b| + |b| \implies |a| - |b| \leq |a - b|$$

de même,

$$b = b - a + a \quad \text{et} \quad |b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a|$$

$$|b| \leq |b - a| + |a| \implies |b| - |a| \leq |b - a|$$

$$|b - a| = |-(a - b)| = |a - b| \text{ et}$$

$$|a| - |b| \leq |a - b| \quad \text{et} \quad |b| - |a| = -(|a| - |b|) \leq |a - b|$$

Finalement par définition

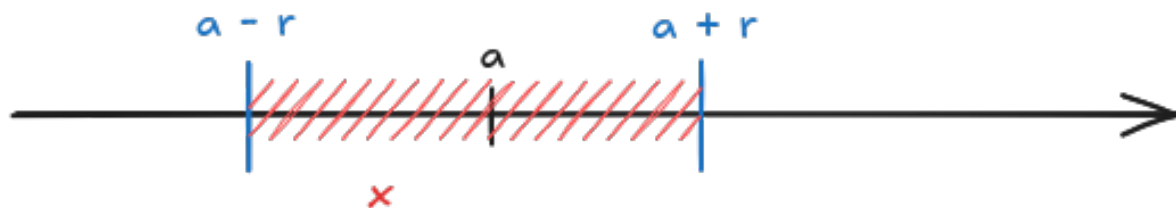
$$||a| - |b|| = \begin{cases} |a| - |b|, & \text{si } |a| - |b| \geq 0 \\ -(|a| - |b|), & \text{si } |a| - |b| < 0 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } ||a| - |b|| \leq |a - b|$$

□

Corollaire: Soit r un réel positif $\forall x, a \in \mathbb{R}$, on a $|x - a| < r \implies -r < x - a < r \implies a - r < x < a + r$

Remarques 3.7. La valeur absolue $|b - a|$ représente la distance entre a et b



4 Densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R}

4.1 Intervalles de \mathbb{R}

Définition 4.1. On appelle intervalle de \mathbb{R} , tout sous-ensemble I de \mathbb{R} vérifiant $\forall a, b \in I, a \leq b$ et $x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b \implies x \in I$

Remarques 4.1. Un sous-ensemble ou partie I de \mathbb{R} , se note $I \subset \mathbb{R}$

Définition 4.2. Soient $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$

On appelle intervalle fermé et borné (ou segment) de \mathbb{R} tout l'ensemble de la forme $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

On appelle intervalle ouvert de \mathbb{R} tout l'ensemble de la forme

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ ou $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$

ou $] - \infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

Remarques 4.2. L'ensemble qui contient aucun élément est l'ensemble vide, noté \emptyset

Remarques 4.3. L'ensemble qui contient un seul élément est le singleton, noté $\{a\} = [a, a]$

Remarques 4.4. $x \in [a, b] \equiv \exists t \in [0, 1], x = (1 - t)a + tb$

Définition 4.3. On dit que V est un voisinage de a si $\exists \epsilon > 0, [a - \epsilon, a + \epsilon] \subset V$

4.2 Densité

Théorème 4.1. \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , tout intervalle ouvert, non vide de \mathbb{R} contient une infinité de nombres rationnels

Théorème 4.2. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans \mathbb{R} , tout intervalle ouvert, non vide de \mathbb{R} contient une infinité de nombres irrationnels

Démonstration 4.1.

On cherche $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$ tel que $a < \frac{p}{q} < b \implies aq < p < bq$

comme \mathbb{R} est archimédien, il existe un entier q tel que $q > \frac{1}{b - a} \implies \frac{1}{q} < b - a$

Prenons $p = E(aq) + 1$

$p = E(aq) + 1 \implies p - 1 = E(aq) \leq aq < E(aq) + 1 = p$

On divise par q l'inégalité $p - 1 \geq aq < p + 1$

$\implies \frac{p - 1}{q} = \frac{p}{q} - \frac{1}{q} \leq a < \frac{p}{q}$

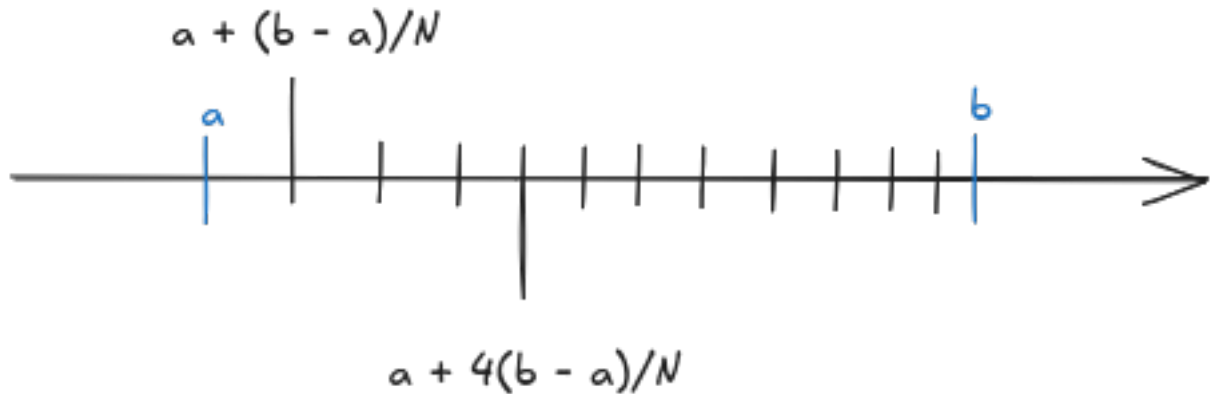
$$\text{Ainsi } \frac{p}{q} - \frac{1}{q} \leq a \implies \frac{p}{q} \leq a + \frac{1}{q} < a + (b - a) = b$$

Finalemment $a < \frac{p}{q} < b$

Il existe un nombre rationnels $\frac{p}{q}$ compris entre a et b .

On divise l'intervalle $]a, b[$ en N sous-intervalles disjoints 2 à 2

$$]a, b[=]a, a + \frac{b-a}{N}[\cup]a + \frac{b-a}{N}, a + 2\frac{b-a}{N}[$$



Donc pour chaque intervalle on peut trouver un rationnels, on peut ensuite faire tendre N vers l'infini pour trouver un infinité de rationnels

□

Démonstration 4.2.

D'après notre démonstration précédente il existe un infinité de rationnels pour $a - \sqrt{2} < \frac{p}{q} < b - \sqrt{2} \implies a < \frac{p}{q} + \sqrt{2} < b$

On en arrive avec la même logique que la démonstration précédente qu'il existe une infinité d'irrationnels entre deux réels.

□

5 Bornes sur \mathbb{R}

5.1 Maximum et minimum

Définition 5.1. Soit A une partie non vide de \mathbb{R} . Un réel M est le plus grand (resp. le plus petit) élément de A si $M \in A$ et $\forall x \in A, x \leq M$ (resp. $\forall x \in A, x \geq m$).

Si il existe, le plus grand élément est unique et on le note $\max A$.

Si il existe, le plus petit élément est unique et on le note $\min A$.

5.2 Majorants et minorants

Définition 5.2. Soit A une partie non vide de \mathbb{R} , un réel M est dit majorant de A si il vérifie $\forall x \in A, M \geq x$

Définition 5.3. Soit A une partie non vide de \mathbb{R} , un réel m est dit minorant de A si il vérifie $\forall x \in A, m \leq x$

Remarques 5.1. Le majorant et minorant n'appartiennent pas forcément à l'ensemble A .

Définition 5.4. Si un majorant (resp. minorant) de A existe, on dit que A est majorée (resp. minorée). On dit que A est bornée si A est majorée et minorée.

5.3 Bornes supérieures et bornes inférieures

Définition 5.5. Soit A une partie non vide de \mathbb{R} .

1. On dit que M est la borne supérieure de A , si M est un majorant de A et que M est le plus petit des majorants. Si il existe on note $M = \sup A$.

2. On dit que m est la borne inférieure de A , si m est un minorant de A et que m est le plus grand des minorant. Si il existe on note $m = \inf A$.

Remarques 5.2. $\sup A$ et $\inf A$ n'appartiennent pas forcément à A . Mais si ils appartiennent à l'ensemble ils deviennent $\max A$ et $\min A$ respectivement.

Exemple 5.1. Posons $A := [0, 1[$,
 $\min A = 0$ et $\max A$ n'existe pas.
les minorants de A sont $] -\infty, 0]$ et les majorants de A sont $[1, +\infty[$
 $\inf A = 0$ et $\sup A = 1$

Proposition 5.1.

Soit A une partie non vide de \mathbb{R} et majorée. La borne supérieure est l'unique réel $\sup A$, tel que

(i) $\forall x \in A, x \leq \sup A$ et

(ii) $\forall y \in \mathbb{R}, y < \sup A \implies (\exists x \in A, y < x)$

Démonstration 5.1.

Montrons que $\sup A$ vérifie (i) et (ii).

Comme $\sup A$ est un majorant, elle vérifie (i)

Posons $y < \sup A$, comme $\sup A$ est le plus petit des majorants, y ne peut pas être un majorant de A .

Donc $\exists x \in A, y < x$

Soit M un réel qui vérifie (i) et (ii), supposons que M n'est pas le plus petit des majorants. Il existe un autre majorant y , tel que $y < M$.

Mais d'après (ii) $\exists x \in A, y < x$, donc y n'est pas un majorant de A .

□

Théorème 5.1. *Toute partie non vide de \mathbb{R} majorée admet une borne supérieure.*

Théorème 5.2. *Toute partie non vide de \mathbb{R} minorée admet une borne inférieure.*

Proposition 5.2.

Soit A une partie non vide majorée de \mathbb{R} . La borne supérieure est l'unique réel $\sup A$, tel que

(i) $\sup A$ est un majorant de A

(ii) il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers $\sup A$.

6 Les suites

6.1 Définition d'une suite

Définition 6.1. *Une suite est l'application*

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u(n) \end{aligned}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u(n)$, ou plus souvent u_n , le n -ième terme de la suite. On écrit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Exemple 6.1.

- $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite des entiers.
- $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite alternant entre 1 et -1.
- $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 1, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ est la suite de Fibonacci.

Remarques 6.1. *Ne pas confondre la fonction avec une suite $((\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$ différent de $f(x) = \sqrt{x}$*

6.1.1 Suites majorées, minorées, bornées

Définition 6.2. *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombre réels.*

*On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **majorée** si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.*

*On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **minorée** si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, M \leq u_n$.*

*On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **bornée** si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée et minorée.
(i.e. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$)*

Définition 6.3.

*La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **croissante** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$.*

*La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **strictement croissante** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$.*

*La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$.*

*La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **strictement décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$.*

*On dit que la suite est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.*

Remarques 6.2. Pour vérifier la monotonie d'une suite:

Soit $u_{n+1} - u_n \geq 0 \implies$ croissante

Soit on calcule (avec $u_n \neq 0$) $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \implies$ croissante

On préfère la première pour les suites arithmétiques et la deuxième pour les suites géométriques.

6.2 Limites

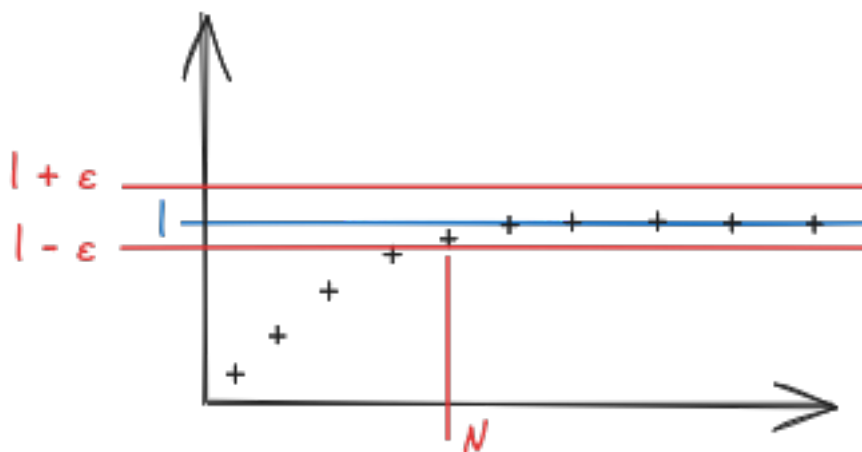
6.2.1 Limit finie, limite infinie

Définition 6.4. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet pour limite $l \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon$$

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers l quand n tend vers l'infini, ou

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$$



Remarques 6.3. On utilise ε pour parler d'un nombre très petit.

Définition 6.5. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si elle devient aussi grande que l'on souhaite quand n devient grand, autrement dit

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si elle devient aussi petite que l'on souhaite quand n devient grand, autrement dit

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq -A$$

Définition 6.6.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** si elle admet une limite finie.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **diverge** si elle admet l'infini comme limite ou si elle n'a pas de limite.

Proposition 6.1.

Si une suite converge, alors sa limite est unique.

Démonstration 6.1.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui admet deux limites, $l_1 \neq l_2$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l_1 \implies \forall \varepsilon_1, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, |u_n - l_1| \leq \varepsilon_1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l_2 \implies \forall \varepsilon_2, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2, |u_n - l_2| \leq \varepsilon_2$$

Pour $\varepsilon_1 = \varepsilon = \varepsilon_2 > 0$

$\exists N = \max(N_1, N_2), \forall n \geq N, |u_n - l_1| < \varepsilon$ et $|u_n - l_2| < \varepsilon$

Donc $|l_1 - l_2| = |l_1 - u_n + u_n - l_2| = |(l_1 - u_n) + (u_n - l_2)| \leq |l_1 - u_n| + |u_n - l_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$

Il suffit de prendre $\varepsilon < \frac{|l_1 - l_2|}{2}$, ainsi

$$|l_1 - l_2| < 2\varepsilon \leq |l_1 - l_2|$$

Ce qui est absurde, Finalement $l_1 = l_2$

□

6.2.2 Propriétés des limites

Propriétés 6.1.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - l) = 0 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - l| = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = |l|$$

Remarques 6.4. C'est en général faux dans l'autre sens. Par exemple pour $u_n = (-1)^n$, $|u_n| = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 1$ mais $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite $(-1, 1, -1, 1, \dots)$.

Proposition 6.2.

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites convergentes.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \implies \forall \delta \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} (\delta u_n) = \delta l$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l' \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = l + l' \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) = l \times l'$$

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N, l \neq 0 \text{ et } u_n \neq 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{l}$$

Démonstration 6.2.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \implies \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon$$

$$\implies \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N, |\delta| |u_n - l| \leq |\delta| \varepsilon$$

$$\implies \forall \varepsilon' > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N, |\delta u_n - \delta l| \leq |\delta| \varepsilon = \varepsilon'$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \delta u_n = \delta l$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l &\implies \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon \\
\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l' &\implies \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N, |v_n - l'| \leq \varepsilon \\
|u_n - l| + |v_n - l'| &\geq |u_n - l + v_n - l'| = |(u_n + v_n) - (l + l')| \\
&\implies |(u_n + v_n) - (l + l')| \leq 2\varepsilon = \varepsilon'
\end{aligned}$$

À compléter

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l &\implies \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon \\
\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l' &\implies \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N, |v_n - l'| \leq \varepsilon \\
|u_n \times v_n - l \times l'| &= |u_n \times v_n - l \times v_n + l \times v_n - l \times l'| \\
&= |v_n(u_n - l) + l(v_n - l')| \\
&\leq |v_n(u_n - l)| + |l(v_n - l')| \\
&= |v_n||u_n - l| + |l||v_n - l'|
\end{aligned}$$

À faire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \implies \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon$$

□

Propriétés 6.2.

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{v_n} = 0$$

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = +\infty$$

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par un réel strictement positif, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) = +\infty$$

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$$

Théorème 6.1. Toute suite convergente est bornée.

Démonstration 6.3.

Soit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers l .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon$$

On écrit $u_n = u_n - l + l$ ainsi $|u_n| = |(u_n - l) + l| \leq |u_n - l| + |l|$

En outre $\forall n \geq N, |u_n| \leq \varepsilon + |l|$

De plus $\forall n < N, |u_n| \leq \max(u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$

Finalement $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq \max(u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, \varepsilon + |l|)$

□

Corollaire 6.1. Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n \times v_n) = 0$

6.2.3 Formes indéterminées

On parle de formes indéterminées, lorsque à priori on ne peut rien dire sur la limite.

Il s'agit de limite de type:

- $+\infty - \infty$
- $0 \times \infty$
- $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, a^\infty$

Dans ce cas il faut étudier plus précisément la suite.

Par exemple en utilisant les croissances comparées

6.2.4 Quelques inégalités

Propriétés 6.3.

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites convergentes telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

6.3 Suites adjacentes

Définition 6.7. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites. Elles sont adjacentes si.

(i) (u_n) est croissante, v_n décroissante

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$

(iii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$

Théorème 6.2. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes, alors elles convergent vers la même limite.

Démonstration 6.4.

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante et une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante.

Ainsi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par v_0 donc elle converge vers une limite l_1 et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par u_0 donc elle converge vers une limite l_2

comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0 \implies l_2 - l_1 = 0 \implies l_2 = l_1$

□

6.4 Les Sous-suites

Définition 6.8. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Une sous-suite ou suite extraite est une suite $(u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ où

$$\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto \phi(n)$$

est une fonction croissante.

Proposition 6.3.

Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l , alors toute suite extraite converge vers l .

Démonstration 6.5.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon$$

Comme ϕ est croissante, en particulier si $n \geq N$ alors $\phi(n) \geq \phi(N)$ et $|u_{\phi(n)} - l| < \varepsilon$.

Autrement dit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\phi(n)} = l$

□

Corollaire 6.2. Si il existe une sous-suite qui diverge, ou deux sous-suites qui convergent vers deux limites différentes, alors la suite diverge.

Théorème 6.3. Le théorème de Bolzano-Weierstrass dit que toute suite bornée admet au moins une sous-suite qui converge.

Démonstration 6.6.

On procède par dichotomie. Comme la suite est bornée, on peut supposer qu'elle prend ses valeurs dans l'intervalle $[a, b]$

On pose $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $\phi(0) = 0$ La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une infinité de valeurs dans $[a, \frac{a+b}{2}]$ ou $[\frac{a+b}{2}, b]$.

On note $[a_1, b_1]$ cet intervalle $a_0 = a_1$ et

$a_1 = a$ si (u_n) a une infinité de valeurs dans $[a_1, \frac{a+b}{2}]$ sinon $a_1 = \frac{a+b}{2}$

$b_1 = \frac{a+b}{2}$ si (u_n) a une infinité de valeurs dans $[\frac{a+b}{2}, b_1]$ sinon $b_1 = b$

On peut ensuite construire un intervalle $[a_n, b_n]$ de longueur $\frac{b-a}{2^n}$ et un entier $\phi(n) \geq \phi(n-1)$ avec $u_{\phi(n)} \in [a_n, b_n]$.

Par construction la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, et $a_n \leq b_n$

De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$.

Donc xna et xnb sont adjacentes, elles convergent vers la même limite l .
 Mais $u_{\phi(n)} \in [a_n, b_n]$, ou encore $a_n \leq u_{\phi(n)} \leq b_n$
 et d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\phi(n)} = l$

□

7 Etude de fonctions

7.1 Notion de fonction

Définition 7.1. Une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles est une application $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ où U est une partie de \mathbb{R} appelée ensemble de définition de f .

Le graphe Γ est la partie du plan \mathbb{R}^2 défini par $\Gamma = \{(x, f(x)); x \in U\}$. Pour $x \in U$, $f(x)$ est l'image de x par f .

7.2 Opérations sur les fonctions

Soient $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ définies sur le même domaine U .

On définit la somme de deux fonctions $h = f + g$ comme

$$\forall x \in U, h(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

On définit le produit de 2 fonctions $h = f \times g$ comme

$$\forall x \in U, h(x) = (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

Remarques 7.1. La multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est définie comme,

$$\forall x \in U, (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

7.3 Fonction monotone, bornée

Définition 7.2. Soient $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : U \rightarrow \mathbb{R}$

1. $f \leq g$ si $\forall x \in U, f(x) \leq g(x)$
2. $f \geq 0$ si $\forall x \in U, f(x) \geq 0$
3. f est constante si $\exists C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in U, f(x) = C$

Définition 7.3.

1. la fonction f est croissante si $\forall x, y \in U, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$.
2. la fonction f est strictement croissante si $\forall x, y \in U, x < y \implies f(x) < f(y)$.
3. la fonction f est décroissante si $\forall x, y \in U, x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$.
4. la fonction f est strictement décroissante si $\forall x, y \in U, x < y \implies f(x) > f(y)$.
5. f est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Définition 7.4.

1. On dit que f est majorée si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in U, f(x) \leq M$.
2. On dit que f est minorée si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in U, f(x) \geq m$.
3. On dit que f est bornée si elle est majorée et minorée, ou encore si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in U, |f(x)| \leq M$

7.4 Parité et périodicité

Définition 7.5. Soit I un intervalle symétrique par rapport à 0 ($I =]-a; a[$) et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

1. On dit que f est paire si $\forall x \in I, f(-x) = f(x)$
2. On dit que f est impaire si $\forall x \in I, f(-x) = -f(x)$

Définition 7.6. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et T un nombre réel strictement positif.
La fonction f est périodique de période T si $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)$

7.5 Limites d'une fonction

7.5.1 Définition

Définition 7.7. On dit qu'une fonction f admet une limite $l \in \mathbb{R}$ en x_0 si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$
On note $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

Remarques 7.2.

On peut remplacer $<$ par \leq

L'ordre est important, δ dépend de ε

Définition 7.8. Soient f définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , et $x_0 \in \mathbb{R}$ dans I ou aux extrémités de I .

On dit que f admet par limite $+\infty$ en x_0 si $\forall M > 0, \exists \delta > 0, |x - x_0| < \delta \implies f(x) \geq M$

On dit que f admet par limite $-\infty$ en x_0 si $\forall M > 0, \exists \delta > 0, |x - x_0| < \delta \implies f(x) \leq -M$

Définition 7.9. On dit que f admet une limite $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists n > 0, x > n \implies |f(x) - l| < \varepsilon$

Définition 7.10. f admet une limite en $+\infty$ si $\forall M > 0, \exists m > 0, x > m \implies f(x) > M$

Définition 7.11. On appelle limite à droite en x_0 de f , la limite de f en x_0 restreinte aux valeurs $x > x_0$ et on note $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x > x_0} f(x)$

Remarques 7.3.

Si $x > x_0, |x - x_0| = x - x_0$ et $|x - x_0| < \delta$ devient $x_0 < x < x_0 + \delta$

Si $x < x_0, |x - x_0| = -(x - x_0)$ et $|x - x_0| < \delta$ devient $x_0 - \delta < x < x_0$

Proposition 7.1.

Si f admet une limite en x_0 alors f admet une limite en x_0^+ et en x_0^- et les limites coïncident.

Si une fonction admet une limite à gauche et une limite à droite en x_0 et qu'elles sont égales, alors f admet cette même limite en x_0 .

Démonstration 7.1.

À faire (juste les définitions)

□

7.5.2 Propriétés

Théorème 7.1. *Si f admet une limite, elle est unique.*

Démonstration 7.2.

Pareil que pour les suite (supposer deux limites différentes puis absurde)

□

Corollaire 7.1. *Si la limite à gauche est différente de la limite à droite, alors f n'admet pas de limite.*

7.5.3 Règles de calcul

Notons $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l'$

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow x_0} \lambda f(x) = \lambda l$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = l + l'$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \times g)(x) = l \times l'$
- Si $l \neq 0, \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{l'}{l}$
- Si $f \leq g$ alors $l \leq l'$

Remarques 7.4. *Si $f < g$ alors $l \leq l'$*

Théorème 7.2. *Théoreme des gendarmes*

Si $f \leq g \leq h$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$

Propriétés 7.1.

On note $g \circ f$ la composition des fonctions f et g définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

7.6 Continuité en 1 point

Définition 7.12. *On dit que f est continue en x_0 si f admet une limite en x_0 et cette limite vaut $f(x_0)$ autrement dit $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$*

7.6.1 Règles de calcul

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue dans x_0 .

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda f$ est continue en x_0
- $f + g$ est continue en x_0
- $f \times g$ est continue en x_0
- Si $f(x) \neq 0$ alors $\frac{g}{f}$ est continue en x_0

Proposition 7.2.

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$.

Si f est continue en x_0 et g aussi alors $g \circ f$ est continue en x_0 .

$\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x_0)$

7.7 Prolongement par continuité

Définition 7.13. Soit f une fonction définie sur l'intervalle I privé de x_0 $f : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 si f admet une limite finie l en x_0 .

On note $\overline{f:I \rightarrow \mathbb{R}}$ le prolongement défini par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

7.8 Continuité sur un intervalle

Définition 7.14. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite continue sur l'intervalle I si elle est continue en tout point de I .

7.9 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 7.3. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a, b]$.

Alors pour toute valeur y comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un $c \in [a, b]$ tel que $y = f(c)$

Démonstration 7.3.

Comme f est continue sur $[a, b]$, f est continue en tout point $c \in [a, b]$ Autrement dit $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.

Supposons que $f(a) \leq f(b)$. Alors $y \in [f(a), f(b)]$ signifie $f(a) \leq y \leq f(b) \iff f(a) \leq \lim_{x \rightarrow c} f(x) \leq f(b)$

□

Corollaire 7.2. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $f(a)f(b) < 0$ alors $\exists c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$

Corollaire 7.3. Si f est continue sur un intervalle I alors $f(I) = \{y = f(x) | x \in I\}$ est aussi un intervalle.

Remarques 7.5.

c n'est pas forcément unique.

en général $f([a, b]) \neq [f(a), f(b)]$