Science Decision | CM: 4

Par Lorenzo

26 septembre 2024

0.1 Opérations sur les relations

Puisque une relation R sur X est un sous ensemble de $X \times X$, on peut facilement utiliser des opérations ensemblistes.

Définition 0.1. *Étant donné deux relation R_1 et R_2 sur un ensemble X.*

- *la relation **complémentaire** de R_1, la relation binaire R_1^c sur X telle que*
  $\forall x, y \in X,\ xR_1^c y$ *si* $\neg(xR_1y)$
- *la **réunion** de R_1 et R_2 est la relation binaire $R_1 \cup R_2$ sur X telle que*
  $\forall x, y \in X,\ xR_1 \cup R_2y$ *si* $xR_1y \vee xR_2y$
- *l'**intersection** de R_1 et R_2 est la relation binaire $R_1 \cap R_2$ telle que*
  $\forall x, y \in X,\ xR_1 \cap R_2y$ *si* $xR_1y \wedge xR_2y$
- *la relation R_1 est **compatible** avec R_2 si*
  $\forall x, y \in X,\ xR_1y \implies xR_2y$ *ou de manière équivalente* $R_1 \subset R_2$
- *la relation **réciproque** (ou duale, inverse) de R_1, la relation binaire R_1^{-1} sur X telle que*
  $\forall x, y \in X,\ yR_1^{-1}x$ *si* xR_1y
- *la **composée** de R_1 et R_2, la relation binaire $R_1 \circ R_2$ sur X telle que*
  $\forall x, y \in X,\ xR_1 \circ R_2y$ *si* $\exists z \in X, xR_2z \wedge zR_1y$

0.2 Relations d'équivalence

Proposition 0.1.

L'intersection $R_1 \cap R_2$ de deux relations d'équivalences R_1 et R_2 sur un ensemble X est une relation d'équivalence.

Démonstration 0.1.

- ***Réflexive*** *car* $\forall x \in X,\ xR_1x \wedge xR_2x$, *ainsi* $xR_1 \cap R_2x$ *pour tout* $x \in X$.
- ***Symétrie*** *car* $\forall x, y \in X,\ (xR_1y \wedge yR_1x) \wedge (xR_2y \wedge yR_2x)$, *ainsi* $\forall x, y \in X,\ xR_1y \wedge xR_2y$ *ce qui implique que* $yR_1x \wedge yR_2x$ *soit* $\forall x, y \in X,\ (xR_1y \wedge yR_2x) \wedge (xR_2y \wedge yR_1x)$.
- ***Transitive*** *car* $\forall x, y \in X, xR_1y \wedge xR_2y \wedge yR_1z \wedge yR_2z \implies xR_1z \wedge xR_2z \implies xR_1 \cap R_2z$

$$\boxed{R_1 \cap R_2 \text{ est Réflexive, Symétrique, Transitive donc c'est une relation d'équivalence.}}$$

$\square$