# Science Decision | CM: 4

Par Lorenzo

26 septembre 2024

## 0.1 Opérations sur les relations

Puisque une relation R sur X est un sous ensemble de $X \times X$, on peut facilement utiliser des opérations ensemblistes.

**Définition 0.1.** *Étant donné deux relation $R_1$ et $R_2$ sur un ensemble $X$.*

- *la relation* ***complémentaire*** *de $R_1$, la relation binaire $R_1^c$ sur $X$ telle que*
  $\forall x, y \in X,\ xR_1^c y$ *si* $\neg(xR_1y)$
- *la* ***réunion*** *de $R_1$ et $R_2$ est la relation binaire $R_1 \cup R_2$ sur $X$ telle que*
  $\forall x, y \in X,\ xR_1 \cup R_2 y$ *si* $xR_1y \vee xR_2y$
- *l'****intersection*** *de $R_1$ et $R_2$ est la relation binaire $R_1 \cap R_2$ telle que*
  $\forall x, y \in X,\ xR_1 \cap R_2 y$ *si* $xR_1y \wedge xR_2y$
- *la relation $R_1$ est* ***compatible*** *avec $R_2$ si*
  $\forall x, y \in X,\ xR_1y \implies xR_2y$ *ou de manière équivalente* $R_1 \subset R_2$
- *la relation* ***réciproque*** *(ou duale, inverse) de $R_1$, la relation binaire $R_1^{-1}$ sur $X$ telle que*
  $\forall x, y \in X,\ yR_1^{-1}x$ *si* $xR_1y$
- *la* ***composée*** *de $R_1$ et $R_2$, la relation binaire $R_1 \circ R_2$ sur $X$ telle que*
  $\forall x, y \in X,\ xR_1 \circ R_2 y$ *si* $\exists z \in X, xR_2z \wedge zR_1y$

## 0.2 Relations d'équivalence

### Proposition 0.1.

*L'intersection $R_1 \cap R_2$ de deux relations d'équivalences $R_1$ et $R_2$ sur un ensemble $X$ est une relation d'équivalence.*

### Démonstration 0.1.

- ***Réflexive*** *car* $\forall x \in X,\ xR_1x \wedge xR_2x$, *ainsi* $xR_1 \cap R_2x$ *pour tout* $x \in X$.
- ***Symétrie*** *car* $\forall x, y \in X,\ (xR_1y \wedge yR_1x) \wedge (xR_2y \wedge yR_2x)$, *ainsi* $\forall x, y \in X,\ xR_1y \wedge xR_2y$ *ce qui implique que* $yR_1x \wedge yR_2x$ *soit* $\forall x, y \in X,\ (xR_1y \wedge yR_2x) \wedge (xR_2y \wedge yR_1x)$.
- ***Transitive*** *car* $\forall x, y \in X, xR_1y \wedge xR_2y \wedge yR_1z \wedge yR_2z \implies xR_1z \wedge xR_2z \implies xR_1 \cap R_2z$

$$\boxed{R_1 \cap R_2 \text{ est Réflexive, Symétrique, Transitive donc c'est une relation d'équivalence.}}$$

□