Algebre Lineaire | CM: 3

Par Lorenzo

29 janvier 2025

Définition 0.1. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est dite sous forme échelonnée si:*

1. *toutes ses lignes non identiquement nulles sont situées au dessus de ses lignes identiquement nulles.*
2. *chaque élément de tête d'une ligne (élément non nul le plus ç gauche d'une ligne non identiquement nulle) se trouve dans une colonne à droite de l'élément de tête de la ligne précédente.*

Remarques 0.1. *La condition (2) implique que tous les éléments en dessous d'un élément de tête sont nuls.*

Définition 0.2 (Échelonnement d'une matrice)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Il existe une matrice $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, produit de matrice élémentaires, telle que la matrice $E \times A$ est échelonnée. Autrement dit, toute matrice est équivalente par rapport aux lignes à une matrice échelonnée.*

Lemme 0.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), n \geq 2$ et $i \in \{1, \cdots, n-1\}$, tels que l'un des coefficients a_j pour indice $j \in \{i, \cdots, n\}$ soit non nul, alors il existe $E_A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ produit de matrice élémentaires. $a \in \mathbb{K}, a \neq 0$ tel que si:*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ a_i \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

alors

$$E_A \times A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ a_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Démonstration 0.1.

Quitte à échanger la ligne i avec une ligne j en dessius (ce qui revient à faire le produit $E_{i,j} \times A$), on se ramène au cas $a = a_i \neq 0$, on fait les opérations: $I_j \leftarrow I_j - \frac{a_j}{a_i} I_i, j \in \{i+1, \cdots, n\}$.

$\square$