Arithmetique | CM: 8

Par Lorenzo

08 novembre 2024

0.1 Restes chinois (aka le restau chinois)

Théorème 0.1 (des restes chinois).

Soient $n_1, n_2, ..., n_k \in \mathbb{N}^*$*, tels que* $\forall i \in \mathbb{N}^*, n_i \geq 2$ *et deux à deux premiers entre eux. Alors pour tous* $a_1, ..., a_k \in \mathbb{Z}$*, il existe* $x \in \mathbb{Z}$*, unique modulo* $n := \prod n_i$*, tel que*

$$\forall i \in [\![1, k]\!], x \equiv a_i mod n_i$$

Plus formellement, on a une application bijective,

$$\varphi := \begin{cases} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}) \times ... \times (\mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}) \\ x \mod n \mapsto (x \mod n_1, ..., x \mod n_k) \end{cases}$$

Démonstration 0.1.

À faire

$\square$

Remarques 0.1. φ *est un isomorphisme d'anneau. (respecte l'addition et la multiplication).*

Méthode 0.1.

À faire

1 Polynômes et Fractions rationnelles

Définition 1.1. *Un **polynôme à coefficient dans*** $\mathbb{k}$*: une suite* $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, a_n = 0$*.*

On écrira souvent $A = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_NX^N = \Sigma_{i=0}^{N} a_iX^i = \Sigma_{i\in\mathbb{N}} a_iX^i = \Sigma a_iX^i$

$\mathbb{k}[X]$ = *{polynômes à coefficients dans* $\mathbb{k}$*}*

polynôme nul *: tous les coefficients sont nuls.*

polynôme constant *:* $\forall i > 0, a_i = 0$ *(*$A = cX^0 = c$ *où* $c \in \mathbb{k}$*)*

monôme *: polynôme de la forme*

Symbole de Kronecker $\delta_{i,j} = 1$ si i = j sinon 0