

Ensemble Complex

Par Lorenzo

23 November 2024

Contents

Arrivé apres le premier CM (cours à venir)

1 Méthodes de démonstration 1

1.1 Implication

Pour démontrer un énoncé du type $P \implies Q$ (Si P alors Q)

Méthode 1.1.

*On suppose P .
raisonnement profond.
on en conclut Q .*

Exemple 1.1.

Démontrons que $x \in \mathbb{R} \implies x + 1 \in \mathbb{R}_+$

On suppose $x \in \mathbb{R}$

$$x \geq 0$$

$$x + 1 \geq 0 + 1 \geq 0$$

Donc $x + 1 \in \mathbb{R}_+$

Remarques 1.1. $A \subset B$ ($A, B \subset E$) par définition se traduit par $\forall x \in E, x \in A \implies x \in B$

1.2 Règle d'inférence ("Dédution naturelle")

Supposons A, B deux formules logiques dépendant d'énoncés élémentaires P, Q, R, \dots
Imaginons que pour chaque ligne de la table de vérité où A est vrai, B l'est également.
Ainsi lorsqu'on a A on pourra déduire B

Exemple 1.2. Supposons $P \implies P \vee Q$

Quand P est vrai $P \vee Q$ est vrai.

1.3 Disjonction de cas

De même une tautologie est une règle qui est toujours vraie. Un exemple $(P \vee \neg Q)$.

Exemple 1.3. *Théorème si $x \in \mathbb{N}$ alors $x(x+1)$ pair.*

Si x est pair alors $x = 2k, k \in \mathbb{N}$.

$x(x+1) = 2(k(x+1))$ est pair.

Si x est impair $x+1$ est pair implique $\exists k \in \mathbb{N}, (x+1) = 2k$.

$x(x+1) = x+2k = 2(kx)$ implique $x(x+1)$ pair.

Conclusion: Dans tous les cas $x(x+1)$ est pair.

C'est un raisonnement par disjonction de cas.

Méthode 1.2.

Plus généralement si $A \vee B \vee C \vee \dots$ est une tautologie alors la méthode de la démonstration

1) Suppose A

raisonnement profond

conclusion

2) Suppose B

raisonnement profond

même conclusion

3) ...

Donc la conclusion est vrai dans tous les cas

Remarques 1.2. *Pour trouver des synonyme en regardant toute les valeurs dans une table de vérités, on utilise une disjonction de cas.*

Exemple 1.4. *Soit un entier n , n est impair ou n^2 est un multiple de 4.*

Supposons que n ne soit pas impair.

Alors n est pair, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$

Ainsi $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$.

n^2 est un multiple de 4.

1.4 La double implication

Si vous souhaitez montrer que $P \iff Q$, il suffit de montrer $P \implies Q$ et $Q \implies P$.

Exemple 1.5. $x \in \mathbb{N} \iff x+1 \in \mathbb{N}^*$

1) Supposons que $x \in \mathbb{N}$, donc $x \geq 0 \implies x+1 \geq 1$

Ainsi $x+1 \in \mathbb{N}^*$

2) Supposons que $x+1 \in \mathbb{N}^*$, donc $x+1 \geq 1 \implies x+1-1 \geq 1-1 \implies x \geq 0$.

La soustraction est stable sur \mathbb{Z} , de plus $x \geq 0$ donc $x \in \mathbb{Z}_+ \equiv \mathbb{N}$

Remarques 1.3. *Régulièrement utilisé pour montre que deux ensembles sont égaux, on montre $A \subset B$ et $B \subset A$. Cela s'appelle la **double inclusion**.*

1.5 Raisonnement par contraposée

$P \implies Q$ est synonyme à $\neg Q \implies \neg P$, ça se prouve facilement en comparant leurs tables de vérités.

Exemple 1.6. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que si n^2 alors n est pair.

Supposons que n est impair, alors il existe $k \in \mathbb{Z}, n = 2k + 1$

Ainsi $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ est impair.

n impair implique n^2 impair donc n^2 pair implique n pair (la proposition de base).

1.6 Raisonnement par l'absurde

Pour montrer que P est vrai, on peut supposer P faux et arriver à une contradiction.

Exemple 1.7. Montrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration.

On suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel, i.e. on peut écrire $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$ (et $\text{pgcd}(a, b) = 1$).

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \implies 2 = \frac{a^2}{b^2} \implies 2b^2 = a^2$$

Ainsi a^2 est pair et avec le raisonnement précédent a est aussi pair (donc $a = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$).

$$2b^2 = (2k)^2 \implies 2b^2 = 4k^2 \implies b^2 = 2k^2$$

Ainsi b^2 est pair et b aussi.

Absurde a et b sont premiers entre eux, ils ne peuvent pas être tous les deux multiple de 2.

□

2 Logique avec quantificateurs

Quand on utilise des quantificateurs il y a des règles à suivre:

Règle numéro 1: Toute lettre dans un énoncé doit être introduite par un quantificateur.

Règle numéro 2: Cette introduction doit se faire avant la première occurrence de la variable.

Règle numéro 3: On doit toujours préciser à quel ensemble appartient la variable.

Méthode 2.1.

Quand on veut montrer un énoncé universel ($\forall x \in X, P(x)$)

1) **"Soit $x \in X$, montrons $P(x)$."**

2) **raisonnement profond.**

3) **On montre $P(x)$.**

Exemple 2.1. $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{x}{x^2 + 1} \geq \frac{-1}{2}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^2 + 1} \geq -\frac{1}{2} &\implies 2x \geq -(x^2 + 1) \\ &\implies (x^2 + 2x + 1) \geq 0 \\ &\implies (x + 1)^2 \geq 0\end{aligned}$$

Pour donner un nom à une quantité/un objet mathématique, on écrit:

Posons $A := \dots$, **Notons** A le \dots ou **Soit** $A := \dots$.

Méthode 2.2.

*Quand on veut montrer qu'il existe x appartenant à A vérifiant $P(x)$,
Soit on a en tête un exemple d'élément x dans A vérifiant $P(x)$*

Posons $x = \dots$

Vérifions $x \in A$

Vérifions $P(x)$

Soit on essaye d'utiliser des théorèmes d'existence pour montrer qu'un tel x existe.

Remarques 2.1. Les mêmes quantificateurs peuvent être intervertis mais pas quand ils sont différents (un \forall avec un \exists).

3 Méthodes de démonstration 2

3.1 Unicité d'un objet

Nous croiserons régulièrement des énoncés du type: "Il y a au plus un élément $x \in X$ vérifiant $P(x)$ ".

Méthode 3.1.

Pour montrer qu'un ensemble X contient au plus un élément vérifiant une propriété P , on peut procéder ainsi.

1) **Soient x et x' deux éléments de X vérifiant P , montrons $x = x'$**

2) **Raisonnement profond.**

3) **On en conclut l'unicité d'un élément vérifiant P .**

Remarques 3.1. L'unicité ne veut pas dire qu'on a montré l'existence.

Exemple 3.1. Soit $n \in \mathbb{N}$ Montrer qu'il existe au plus un multiple de 10 dans $X = \{n, n + 1, \dots, n + 5\}$

Démonstration 3.1.

Soient $k, k' \in [0, 5]$ tel que $10 \mid n + k$ et $10 \mid n + k' \implies \exists p \in \mathbb{Z}, n + k = 10p$ et $\exists p' \in \mathbb{Z}, n + k' = 10p'$

Par soustraction $(n + k) - (n + k') = 10m - 10m' \implies (k - k') = 10(m - m')$

Or $-5 \leq (k - k') \leq 5$ et le seul multiple de 10 dans cette intervalle est 0.

Donc $k = k'$ et $n + k = n + k'$.

□

3.2 Analyse synthèse

Méthode 3.2.

Pour déterminer l'ensemble des éléments d'un ensemble E vérifiant une propriété P , on peut raisonner par analyse/synthèse.

Analyse: soit $x \in E$. on suppose que x vérifie P .

... on regarde les forme possible de x .

Synthèse: Posons $x = \dots$ les différente formes possibles trouvées.

Vérifions que x vérifie P (et appartient bien à E).

Exemple 3.2. Trouvons les couples de nombres réels non-nuls (x, y) , solutions du système

$$(S) \begin{cases} xy = 2 \\ \frac{y}{x} = 2 \end{cases}$$

Démonstration.

Analyse: Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$xy \times \frac{y}{x} = 2 \times 2 \implies y^2 = 4 \implies y = 2 \vee y = -2$$

La ligne 1 (de S) donne $x = \frac{2}{y}$

Donc les seuls couples possibles pour (x, y) sont $(1, 2)$ et $(-1, -2)$

Synthèse: On vérifie les deux couples trouvés.

$$1 = 2 \text{ et } \frac{2}{1} = 2 \text{ puis } -1 \times (-2) = 2 \text{ et } \frac{-2}{-1} = 2$$

Donc $(1, 2)$ et $(-1, -2)$ sont l'ensemble des couples qui sont solutions de S .

□

3.3 Définition de \mathbb{N} par récurrence

Définition 3.1. \mathbb{N} est l'ensemble construit par

\mathbb{N} contient un élément noté 0.

Chaque élément $n \in \mathbb{N}$ admet un unique successeur noté $\text{succ}(n) = n + 1$.

$\forall x \in \mathbb{N}, [\text{succ}(x) \neq 0]$.

$\forall x, y \in \mathbb{N}, [\text{succ}(x) = \text{succ}(y) \implies x = y]$.

$\forall A \subset \mathbb{N}, [(0 \in A \wedge (n \in A \implies \text{succ}(n) \in A)) \implies A = \mathbb{N}]$ (important pour la récurrence).

Remarques 3.2. Avec cette notation par récurrence on peut définir \sum par

$$\sum_{i=1}^n a_i = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ (\sum_{i=1}^{n-1} a_i) + a_n & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Méthode 3.3.

Pour montrer une propriété P_n est vrai pour tout entier $n \geq n_0$.

Donner explicitement la propriété P_n .

Initialisation: On montre P_{n_0} .

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, tel que P_n est vraie.

Montrons que P_{n+1} .

Remarques 3.3. Il peut arrivé qu'on ne puisse pas déduire P_{n+1} de P_n mais seulement P_{n+2} à partir de P_{n+1} et P_n , on fait alors une récurrence double.

Méthode 3.4.

Si P_{n_0} et P_{n_0+1} sont vraies et si $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, (P_n \wedge P_{n+1} \implies P_{n+2})$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, P_n$ est vrai.

Il existe aussi une récurrence forte.

Méthode 3.5.

Si P_{n_0} est vraie et si $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, (\forall k \in \mathbb{N}, n_0 \leq k \leq n, P_k \implies P_{n+1})$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, P_n$ est vrai.

4 Théorie des ensembles

4.1 Opérations sur les ensembles

Définition 4.1. Un ensemble est une collection d'éléments. Il est défini par la connaissance de ses éléments.

Soit A un ensemble $a \in A$ signifie que a appartient à A . On dit alors que a est un élément de A .

Remarques 4.1. La définition d'un ensemble peut se faire des façon suivante:

- liste exhaustive $(1, 2, 3)$
- paramétrique $(\{2x + 1 \mid x \in \mathbb{N}\})$
- implicite $(\{x \in \mathbb{R} \mid x(x + 1) > 0\})$

Remarques 4.2. Dans un ensemble l'ordre et la répétition n'a pas son importance.

Définition 4.2. Soient A et B deux ensembles. On dit que A est un sous-ensemble de B lorsque $\forall x \in A, x \in B$, on note plus $A \subset B$.

Soit A un ensemble fini, le cardinal de A est le nombre d'éléments de A , noté $\text{card}A$.

Un ensemble avec un seul élément est un singleton.

Un ensemble qui ne contient aucun éléments est appelé l'ensemble vide (noté \emptyset ou $\{\}$), c'est un sous ensemble de tout les ensembles.

Remarques 4.3. Un quantificateur universelle sur l'ensemble vide est automatiquement vérifié. (e.g. $\forall x \in \emptyset, P(x)$)

Définition 4.3. Soient A, B des parties d'un ensemble E .

La réunion de A et de B , notée $A \cup B$ est la partie de E dont les éléments sont éléments de A ou de B .

$$A \cup B = \{x \in E, x \in A \vee x \in B\}$$

Définition 4.4. Soient A, B des parties d'un ensemble E .

L'intersection de A et de B , notée $A \cap B$ est la partie de E dont les éléments sont éléments de A et de B .

$$A \cap B = \{x \in E, x \in A \wedge x \in B\}$$

Remarques 4.4. La réunion n'est pas un ou exclusive.

Remarques 4.5. $A \cup B$ est le plus petit ensemble contenant A et B

Remarques 4.6. $A \cap B$ est le plus grand ensemble contenu dans A et B

Remarques 4.7. Comme un élément peut seulement être ou ne pas être dans un ensemble, on peut faire une disjonction de cas.

Définition 4.5. Soient A, B deux sous ensemble d'un ensemble E .

- A et B sont dits disjoints si $A \cap B = \emptyset$
- Le complémentaire de A dans E est la partie de E dont les éléments sont tous les éléments de E qui ne sont pas dans A . On le note $E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\}$. Autres notations: $C_E A$ ou A^C
- La différence symétrique de A et B , notée $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Définition 4.6. Soit I un ensemble, Soient $(A_i)_{i \in I}$ des sous ensembles d'une ensemble E .

L'intersection des A_i est $\cap_{i \in I} A_i := \{x \in E, \forall i \in I, x \in A_i\}$

L'union des A_i est $\cup_{i \in I} A_i := \{x \in E, \exists i \in I, x \in A_i\}$

Par convention: si $I = \emptyset$ alors $\cup_{i \in I} A_i := \emptyset$ et $I = \emptyset$ alors $\cap_{i \in I} A_i := E$

Définition 4.7. Soient A, B deux sous ensembles non vides de E .

A et B sont complémentaires dans E ou forment une partition de E si $E = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$

Remarques 4.8. Le non complémentaire vient du fait qu'une autre définition soit $A = E \setminus B \iff B = E \setminus A$

Soit E un ensemble. On note $P(E)$ l'ensemble des parties de E .

Remarques 4.9. Il est équivalent d'écrire $A \subset E$ ou $A \in P(E)$

Remarques 4.10. Pour tout ensemble E , on a $\emptyset \in P(E)$ et $E \in P(E)$

Théorème 4.1. Lorsque $\text{card}(E) = n$ avec $n \in \mathbb{N}$ alors $\text{card}(P(E)) = 2^n$

Démonstration 4.1.

Initialisation: $\text{card}(E) = 0 \implies E = \emptyset$ alors $P(E) = \{\emptyset\}$ donc $\text{card}(P(E)) = 1 = 2^0$

Hérédité: Soit E de cardinal $n \geq 1$. Soit $a \in E$, $F = E \setminus \{a\}$

$\text{card}(F) = n - 1$

Les parties de E sont les X et les $X \cup \{a\}$ où $X \in P(F)$

Ainsi $\text{card}(P(E)) = \text{card}(P(F)) + \text{card}(P(F))$

□

Définition 4.8. Soient E et F deux ensembles.

Le produit cartésien de E par F est l'ensemble $E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \wedge y \in F\}$

Remarques 4.11. Attention ce n'est pas commutatif, $E \times F \neq F \times E$

Définition 4.9. Soient E_1, E_2, \dots, E_n des ensembles.

$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n), \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, x_i \in E_i\}$
 (x_1, x_2, \dots, x_n) est appelé un n -uplet.

Définition 4.10. Soient X, Y deux ensembles.

- Une application de X dans Y est la donnée, pour tout point $x \in X$ d'un unique point $y \in Y$ associé à x . On dit que y est l'image de x par l'application.

- Soit f est une application de X dans Y .

◇ on note $f(x)$ l'image de x par f

◇ X est appelé espace de départ de f .

◇ Y est appelé espace d'arrivée de f .

Remarques 4.12. Deux applications f et g sont égales si elles ont même ensemble de départ, même ensemble d'arrivée et si

$$\forall x \in X, f(x) = g(x)$$

Remarques 4.13. On ne change pas une application en modifiant la (les) variable(s) muette(s) permettant de la définir. Ainsi les applications suivantes sont égales:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$$

Remarques 4.14. Pour toute fonction f , si $x_1 = x_2$ alors $f(x_1) = f(x_2)$, la réciproque est fausse en général.

Remarques 4.15. Etant donnée une application $f : X \rightarrow Y, x \mapsto f(x)$ et $X' \subset X$, on peut créer une application restreinte $f|_{X'} : X' \rightarrow Y, x \mapsto f(x)$

Définition 4.11. Soient X, Y des ensembles.

- On appelle graphe dans $X \times Y$ toute partie G de $X \times Y$ telle que $\forall x \in X, \exists! y \in Y, (x, y) \in G$

- Si f est une application de X dans Y , alors le graphe de f est $G_f := \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$

Remarques 4.16. Réciproquement si G est un graph

Remarques 4.17. Une fonction n'étant pas nécessairement définie sur tout l'ensemble de départ considéré (souvent \mathbb{R}).

Définition 4.12. Soit $f \in Y^X$

- On dit que $x \in X$ est un antécédent de $y \in Y$ par f lorsque $f(x) = y$, i.e. lorsque y est l'image de x par f .

- Si A est un sous ensemble de X , on appelle image de A l'ensemble $f(A) := \{f(a) \mid a \in A\} = \{y \in Y \mid \exists a \in A, f(a) = y\} \subset Y$

- Si B est un sous ensemble de Y , on appelle image réciproque de B l'ensemble des antécédents d'éléments de B : $f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\} \subset X$

Remarques 4.18. Attention à la notation, $f(a)$ et $f(A)$ ne sont pas de même nature. Pour tout $x \in X$, $f(\{x\}) = \{f(x)\}$

Théorème 4.2. Soit $f \in Y^X$

- Pour toutes parties A et B de Y on a,

$$\diamond A \subset B \implies f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$$

$$\diamond f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

$$\diamond f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

- Pour toutes parties A et B de X , on a

$$\diamond A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$$

$$\diamond f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$$\diamond f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

Démonstration 4.2.

□

Définition 4.13. Soient E et F deux ensembles arbitraires On dit que E et F ont même cardinal s'il existe une bijection entre E et F .

Soit E un ensemble. On dit que E est dénombrable s'il existe une injection de E dans \mathbb{N}

Proposition 4.1.

$\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}, \mathbb{N}^2, \mathbb{Q}, \mathbb{N}^n$ sont dénombrables.

$\mathbb{R}, P(\mathbb{N})$ ne sont pas dénombrables

$P(\mathbb{N})$ et \mathbb{R} ont même cardinal.

5 Relation et permutations

Définition 5.1. Soit E un ensemble non vide. Une relation binaire R sur E est la donnée d'une application $E \times E \rightarrow \text{Vrai, Faux}$.

On dit que x est en relation avec y lorsque l'image de (x, y) par l'application est "Vrai" et on note alors xRy

Remarques 5.1.

Définition 5.2. Soit E un ensemble non vide et R une relation binaire sur E . On dit que R est

réflexive lorsque $\forall x \in E, xRx$

symétrique lorsque $\forall (x, y) \in E^2, xRy \iff yRx$

antisymétrique lorsque $\forall (x, y) \in E^2, (xRy \wedge yRx) \implies x = y$

transitive lorsque $\forall (x, y, z) \in E^3, xRy \wedge yRz \implies xRz$

Définition 5.3. Soit R une relation sur un ensemble E . On dit que R est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Définition 5.4. Soit $E \neq \emptyset$ un ensemble muni d'une rel. d'équivalence R .

Soit $x \in E$.

On appelle classe d'équivalence modulo R de x et on note \bar{x} l'ensemble $\{x \in E, xRy\}$.

Théorème 5.1. L'ensemble des classes d'équivalence de E modulo R forme une partition de E .

Démonstration 5.1.

□

Définition 5.5. L'ensemble des classes d'équivalence de E modulo R s'appelle l'ensemble quotient de E par R . On le note E/R .

Définition 5.6. Soit R une relation sur un ensemble E .

On dit que R est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive. Notée souvent \preceq cursif. On dit que (E, \preceq) est un ensemble ordonné.

Relation d'ordre totale lorsque R est complète ($\forall x, y \in E, (xRy \vee yRx)$)

Définition 5.7. Soit (E, \preceq) ensemble ordonné. Soit $A \in P(E)$. On dit que

A admet un minimum lorsque

$\exists a_0 \in A, \forall a \in A, a_0 \preceq a$ On note $\min(A) := a_0$

A admet un maximum lorsque

$\exists a_0 \in A, \forall a \in A, a \preceq a_0$ On note $\max(A) := a_0$

A est minoré lorsque

$\exists m \in E, \forall a \in A, m \preceq a$

Remarques 5.2. Si A admet un minimum (resp. un maximum) alors A est minoré (resp. majoré)

Remarques 5.3. Si A admet un minimum (resp. maximum), il est unique.

Proposition 5.1.

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre totale \preceq . Soit $A \in P(E)$ un ensemble fini non-vide. Alors A admet un minimum et un maximum.

6 Permutations

7 Ensemble et nombres complexes