Analyse | CM: 13

Par Lorenzo

12 décembre 2024

0.1 Problèmes d'extrema

0.1.1 Extremum local

Définition 0.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f admet un minimum local en x_0 (respectivement un maxumum) si il existe un intervalle J qui contient x_0 (on parle de voisinage)*

$\forall x \in J \cap I, f(x_0) \leq f(x)$ *(resp $f(x_0) \geq f(x)$)*

On dit que x_0 est extremum si c'est un minimum ou un maximum. Si l'inégalité est vrai pour tout x de I, on dit que x_0 est un extremum global.

Théorème 0.1. *Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$. (x_0 est appelé point critique)*

Remarques 0.1.

1. *La réciproque est fausse.*
2. *Au point critique la tangente à la courbe est une droite horizontale.*

Démonstration 0.1.

Supposons que x_0 est un maximum local de f, c'est-à-dire $\forall x \in I \cap J, f(x) \leq f(x_0)$ Ainsi, pour $x < x_0$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ et pour $x > x_0$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$. Comme f est dérivable, $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ Donc $f'(x_0) = 0$.

□

Théorème 0.2 (de Kolle)**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Démonstration 0.2.

On cherche $c \in]a, b[$ extremmum local de f. Si f est constante, alors $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$. Sinon, f n'est pas constante $\exists x_0 \in]a, b[, f(x_0) \neq f(a) \neq f(b)$, f est continue sur $[a, b]$ donc f est bornée et admet un maximum en un point $c \in [a, b]$. Par définition du maximum, $f(c) \geq f(x_0) > f(a) = f(b)$. Et par continuité de f, $c \neq a$ et b.

□

0.1.2 Accroissements finis

Théorème 0.3 (des accroissements finis (TAF))**.** *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue et dérivable sur* $]a, b[$*. Il existe* $c \in]a, b[$ *tel que* $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$*.*

Remarques 0.2. $\lim_{b\to a} \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a)$ *(Pas le TAF)*

Démonstration 0.3.

On applique le théorème de Rolle à la fonction $g(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$*.*

On a $g(a) = f(a)$ *et* $g(b) = f(a)$*, donc* $g(a) = g(b)$ *et* g *continue sur* $[a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$ *comme somme de fonctions continues et dérivables.*

Donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ *tel que*

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

$\square$

Corollaire 0.1.

1. $\forall x \in]a, b[, f'(x) \geq 0$ *alors* f *est croissante.*
2. $\forall x \in]a, b[, f'(x) \leq 0$ *alors* f *est décroissante.*
3. $\forall x \in]a, b[, f'(x) = 0$ *alors* f *est constante.*
4. $\forall x \in]a, b[, f'(x) > 0$ *alors* f *est strictement croissante.*
5. $\forall x \in]a, b[, f'(x) < 0$ *alors* f *est strictement décroissante.*

Démonstration 0.4.

Soient $x, y \in]a, b[, x \leq y$ *alors d'après le TAF,* $\exists c \in]x, y[$ *tel que* $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y) \leq 0$*. Donc* $f(x) \leq f(y)$*,* f *est croissante.*

$\square$

Corollaire 0.2 (inégalité des accroissements finis)**.** *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *dérivable sur l'intervalle* I *ouvert. Si il existe une constante* $M > 0$ *telle que* $\forall x \in I, |f'(x)| \leq M$*, alors* $\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$*.*

Démonstration 0.5.

Soient $x, y \in I, x \leq y$ *alors d'après le TAF,* $\exists c \in]x, y[$ *tel que* $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$*. Donc* $|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y| \leq M|x - y|$*.*

$\square$

Corollaire 0.3 (règle de l'Hospital)**.** *Soit* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *dérivables en* $x_0 \in I$*. On suppose que*

1. $f(x_0) = g(x_0) = 0$
2. $\forall x \in I$ *et* $x \neq x_0, g(x) \neq 0$

Si $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$ *alors* $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$*.*

Démonstration 0.6.

On applique le théorème de Rolle à la fonction $h(x) = g(a)f(x) - f(a)g(x)$. *Pour* $a \in I, a < x_0$ $h'(x) = g(a)f'(x) - f(a)g'(x)$ *et* $h(a) = h(x_0) = 0$. *Ainsi* $\exists c \in]a, x_0[$ *tel que* $h'(c) = 0$. $g(a)f'(c) - f(a)g'(c) = 0 \iff g(a)f'(c) = f(a)g'(c) \iff \dfrac{f(a)}{g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$. *En faisant* $a \to x_0$ *on a aussi* $c \to x_0$ *car* $c \in]a, x_0[$.

$\square$