1 Matrices

Définition 1.1.
Soit $\mathbb{K}$ un corps. Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. Une matrice de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $I = \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, p\}$. On la représente par un tableau rectangulaire :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Définition 1.2.
On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. ou encore $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si $n = p$.

Définition 1.3.
Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite carrée d'ordre n.

1. *les termes $a_{i,i}$ sont les éléments diagonaux de A.*
2. *A est dite diagonale si $a_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$.*
3. *A est dite triangulaire supérieure si $a_{i,j} = 0$ pour $i > j$.*
4. *A est dite triangulaire inférieure si $a_{i,j} = 0$ pour $i < j$.*

Définition 1.4.
La matrice nulle de taille $n \times p$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls.

Définition 1.5.
La matrice identité de taille $n \times n$ est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont tous égaux à 1.

$$Id_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 1.6.
La matrice transposée de A est la matrice obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad et \quad {}^tA = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,p} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Notée aussi A^t ou ${}^tA$.

Définition 1.7.
Une matrice $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite symétrique si $A =^t A$.

Remarque 1.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*

1. ${}^t({}^tA) = A$.
2. ${}^t(A + B) =^t A +^t B$.
3. ${}^t(\lambda A) = \lambda^t A$.
4. ${}^t(AB) =^t B \cdot^t A$.

Définition 1.8.
On a les opérations

1. *Deux matrice $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont égales si elles ont les mêmes coefficients.* $A = B \iff \forall i \in \{1, ..., n\}, \forall j \in \{1, ..., p\}, a_{i,j} = b_{i,j}$
2. *Si $\lambda \in \mathbb{K}$, on note λA la matrice obtenue en multipliant chaque coefficient de A par λ.*
3. *Si $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on note $A + B$ la matrice obtenue en additionnant les coefficients correspondants.* $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})$

Propriétés 1.1

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. A + (B + C) = (A + B) + C
2. A + B = B + A
3. A + 0 = A
4. A + (-A) = 0
5. $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ et $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$
6. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

Définition 1.9.
Soit m matrices $A_1, ..., A_m \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, soit $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$. On appelle combinaison linéaire de $A_1, ..., A_m$ pondérée par $\lambda_1, ..., \lambda_m$ la matrice $\lambda_1 A_1 + ... + \lambda_m A_m$.

Définition 1.10.
Soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le produit de A par B est la matrice $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

Remarque 1.2. *On peut utilise l'aide mémoire suivante pour se rappeler de la formule du produit de deux matrices.*

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & b_{1,1} & \cdots & b_{1,q} \\
 & & & \vdots & \ddots & \vdots \\
 & & & b_{p,1} & \cdots & b_{p,q} \\
a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} & c_{1,1} & \cdots & c_{1,q} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} & c_{n,1} & \cdots & c_{n,q}
\end{array}$$

Définition 1.11.
On appelle sous-matrice de A la matrice obtenue en supprimant une ou plusieurs lignes et/ou colonnes de A. Ainsi on peut décomposer A en blocs. Soit en lignes :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_p \end{pmatrix}$$

Soit en colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_p \end{pmatrix}$$

Propriétés 1.2

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a $A \times Id_p = A$ et $Id_n \times A = A$.

Remarque 1.3. *On voit que l'identité n'est pas unique si $n \neq p$ (la matrice n'est pas carrée).*

Propriétés 1.3

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. $\lambda(\mathrm{AB}) = (\lambda\mathrm{A})\mathrm{B} = \mathrm{A}(\lambda\mathrm{B})$
2. $A(B+C) = AB + AC$ et $(A+B)C = AC + BC$
3. $AB \neq BA$ en général
4. $A(BC) = (AB)C$

Remarque 1.4. .

- *Le produit de deux matrices n'est pas commutatif.*
- *On peut multiplier deux matrices non nulls et obtenir une matrice nulle. Ainsi on dit que l'ensemble $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ possède des diviseurs de zéro.*