0.1 Compacité et équivalence des normes en dimension finie

Dans la suite on considère les evn $(E, ||.||), (F, ||.||')$.

En essayant de généraliser le théorème des borns atteintes, c'est à dire

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, alors f est bornée et atteint ses bornes.

On peut définir la notion suivante

Définition 0.1.
Soit $K \subset E$.
*On dit que K est **compacte** si*

$$\forall (x_n) \in K^{\mathbb{N}}, \exists \phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \phi \text{ strictement croissante}, \lim_{n\to+\infty} x_{\phi(n)} \in K$$

C'est à dire que toute suite à valeur dans K admet une sous-suite convergente vers un élément de K.

Remarque 0.1. *Une reformulation plus simple est:*

*Une partie K de E est **compacte** si toute suite d'éléments de K possède au moins une valeur d'adhérence dans K.*

Définition 0.2.
*Une partie $V \subset E$ est **bornée** si $\exists M > 0, \forall x \in V, ||x|| \leq M$.*

Proposition 0.1

Si K est une partie compacte de $\mathbb{R}$, alors $\exists a, b \in K, a = \inf K, b = \sup K$.
On peut donc écrire $a = \min K, b = \max K$.

Démonstration à faire

Proposition 0.2: S

ient $U \subset E, V \subset F$ et $f : U \to V$ continue. Si $K \subset U$ est compacte, alors $f(K)$ est compacte.

Démonstration à faire

Proposition 0.3

Un ensemble compacte K d'un env est fermé et borné.

Théorème 0.1: Bolzano-Weierstrass

Soit V une partie fermée et bornée de $(\mathbb{R}, \|.\|)$ alors V est compacte.

Exemple 0.1. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *avec* $x_n := \dfrac{1}{n} + (-1)^n$ *suite dans* $[-2, 2]$