Discrete Et Geometrique | CM: 3

Par Lorenzo

11 février 2025

Théorème 0.1 (Formule du binôme de Newton)**.**
Soit $x, y \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}^*$.
$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$.

Démonstration 0.1.

Par récurrence. Soit $P_n : (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$.
Initialisation : $n = 1$.
$C_1^0 x^0 y^1 + C_1^1 x^1 y^1 = x + y = (x+y)^1$.
Hérédité : Supposons P_n *vraie pour un certain* $n \in \mathbb{N}^*$. *Montrons* P_{n+1}.

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \\
&= (x+y)\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} x^k y^{n-k+1} + C_n^n x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^k y^{n-k+1} + C_n^0 x^0 y^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} x^k y^{n-k+1} + x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^k y^{n-k+1} + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} [(C_n^{k-1} + C_n^k) x^k y^{(n+1)-k}] \\
&= x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k x^k y^{(n+1)-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k x^k y^{(n+1)-k}
\end{aligned}$$

Donc P_{n+1} *est vraie.*
Par le principe de récurrence, P_n *est vraie pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

□

Remarques 0.1. *Idée de la démonstration combinatorienne:*

- $(x+y)^n$ *il y a* 2^n *termes.*
- $x^n + x^{n-1}y\times$ *nombre de façon de choisir* $y = C_n^1 = x^{n-2}y^2\times$ *nombre de façon de choisir 2* $y = C_n^2 \cdots$

Corollaire 0.1.
- $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$
- $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0$

Démonstration 0.2.

$0 = (-1+1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k 1^{n-k}$

□

Example 0.1. *Calculons* $\sum_{k=0}^n kC_n^k =: S_n$

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=0}^n kC_n^k &= \sum_{k=1}^n kC_n^k \\ &= \sum_{k=1}^n k\frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{n!}{((n-1)-(k-1))!(k-1)!} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1)!}{((n-1)-(k-1))!(k-1)!} \\ &= n\sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} \\ &= n\times 2^{n-1} \end{aligned}$$

Example 0.2.

$$((x+1)^n)' = (\sum_{k=0}^n x^k)'$$

$$\begin{aligned} &= (C_n^0 x^0)' + (\sum_{k=1}^n C_n^k x^k)' \\ &= 0 + \sum_{k=1}^n kC_n^k x^{k-1} \end{aligned}$$

DM calculer $\sum_{k=0}^n k^2 C_n^k$ Indication: $k^2 = k(k-1)+k$

Example 0.3. *Packet de 32 cartes, nombres (N) de mains de 5 cartes contenant un roi et un carreau.*

$N = C_2^4 1 + C_3^1 \times C_7^1 \times C_2^3 1$