Discrete Et Geometrique | CM: 2

Par Lorenzo

04 février 2025

Définition 0.1. *Le nombre de combinaisons de m parmi n* $(n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z})$ *noté* $\binom{n}{m}$ *(ou* C_n^m*) est le nombre de sous-ensembles de m éléments d'un ensemble à n éléments.*

Remarques 0.1. .

- $C_n^m = 0$ *si* $m < 0$ *ou* $m > n$.
- $C_n^0 = 1$.
- $C_n^n = n$.
- $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ *(si* $n \geq 2$*).*

Proposition 0.1.

Soit $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$. *Alors* $C_n^m = 0$ *si* $m < 0$ *ou* $m > n$. *Et* $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ *si* $0 \leq m \leq n$.

Démonstration 0.1.

Supposons $0 < m < n$ *(sinon le résultat est évident).*
A_n^m *est le nombre de façons de choisir m éléments parmi n éléments.*
et aussi $A_n^m =$ *(nombre de façons de choisir un sous-ensemble de m éléments dans* $\{1, \cdots, n\}$*)* $\times$ *(nombre de façons d'ordonner m éléments).*
Donc $A_n^m = C_n^m \times m!$. *Donc* $C_n^m = \frac{A_n^m}{m!}$.

$\square$

Remarques 0.2. *à* $m = 0$
$C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$.

Remarques 0.3. *à* $m = n$
$C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!} = 1$.

Proposition 0.2.

Soit $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$. *Alors* $C_n^m = C_n^{n-m}$.

Démonstration 0.2 (1).

$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ *et* $C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$.
Donc $C_n^m = C_n^{n-m}$.

$\square$

Démonstration 0.3 (2).

C_n^m = nombre de façons de choisir m éléments parmi n = nombre de façons de choisir les $n-m$ éléments à laisser = C_n^{n-m}.

□

Proposition 0.3 (identité de Pascal).

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ et $0 \leq m \leq n$. Alors $C_{n+1}^m = C_n^{m-1} + C_n^m$.

Remarques 0.4. *Le triangle de Pascal est une représentation graphique des coefficients binomiaux. Chaque nombre est la somme des deux nombres situés au-dessus de lui.*

$$\begin{array}{ccccccc} & & & C_0^0 & & & \\ & & C_1^0 & & C_1^1 & & \\ & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & \\ C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 \end{array}$$

Démonstration 0.4 (1).

$$\begin{aligned}
C_n^m + C_n^{m-1} &= \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!} \\
&= \frac{n!}{m(m-1)!(n-m)!} + \frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)(n-m)!} \\
&= \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n-m+1}\right) \\
&= \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!}\left(\frac{n+1}{n(n-m+1)}\right) \\
&= \frac{n!(n+1)}{(m-1)!(n-m)!m(n-m+1)} \\
&= \frac{(n+1)!}{m!((n+1)-m)!} = C_{n+1}^m
\end{aligned}$$

□

Démonstration 0.5 (2).

C_{n+1}^m = nombre de façons de choisir m éléments dans $\{1, \cdots, n+1\}$ = Nombre de façons de sous ensembles contenant l'éléments $n+1$ + Nombre de façons de sous ensembles ne contenant pas l'éléments $n+1$ = #dfc $m-1$ éléments parmi $\{1, \cdots, n\}$ = $C_n^{m-1} + C_n^m$.

□

Théorème 0.1 (Binôme de Newton).

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x, y \in \mathbb{C}, (x+y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k}$.

Démonstration 0.6.

À faire.

$\square$

Proposition 0.4.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *Alors le nombre de tous les sous-ensembles de* $\{1, \cdots, n\}$ *noté* B_n *est* 2^n.

Démonstration 0.7 (1)**.**

$B_n = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = (1+1)^n = 2^n$.

$\square$