0.1 Séries de Taylor et de Riemann

On peut fabriquer des séries à partir des formules de Taylor.

Exemple 0.1. *La série* $(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!})$ *converge et* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$.

On écrit la formule de Taylor Lagrange entre 0 et 1 à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ *pour la fonction* $x \mapsto e^x$*:*

$$\begin{aligned} e^1 &= \sum_{k=0}^{n} \frac{e^0}{k!}(1-0)^k + \frac{e^c}{(n+1)!}(1-0)^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{e^c}{(n+1)!} \end{aligned}$$

où $c \in]0,1[$ *et* $|e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}| = \frac{e^c}{(n+1)!} \leq \frac{e}{(n+1)!} \to 0$ *Donc par le théorème des gendarmes* $e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \to 0 \implies \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \to e$.

Définition 0.1. *Série de Riemann*
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, *on appelle* ***série de Riemann*** *la série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

Proposition 0.1: Convergence des séries de Riemann

La série de Riemann converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration 0.1.

Pour $\alpha \geq 2$ *c'est déjà fait.*

Pour $\alpha \in]1,2[$, *posons* $f_\alpha : x \mapsto \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ *(donc* $f'_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}$*).*

En utilisant le théorème des accroissements finis sur $[n, n+1]$.

$$\exists c_n \in]n, n+1[, f_\alpha(n+1) - f_\alpha(n) = f'_\alpha(c_n)(n+1-n) = \frac{1}{c_n^\alpha}$$

Comme $c_n < n+1 \implies c_n^\alpha < (n+1)^\alpha$ *et que la fonction* $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ *est décroissante sur* $\mathbb{R}_+^*$, *on a:*

$$f_\alpha(n+1) - f_\alpha(n) = \frac{1}{c_n^\alpha} > \frac{1}{(n+1)^\alpha}$$

En sommant pour n allant de 1 à N:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)^\alpha} &< \sum_{n=1}^{N} \left(f_\alpha(n+1) - f_\alpha(n)\right) \\ &= f_\alpha(N+1) - f_\alpha(1) \text{ \textit{(par télescopage)}}\end{aligned}$$

Autrement dit:

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n^\alpha} &< \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \\ &< \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}}\right)\end{aligned}$$

On décale l'indice de sommation:

$$\begin{aligned}S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} &= 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{(n+1)^\alpha} \\ &< 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)^\alpha}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}S_N &< 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)^\alpha} \\ &< 1 + \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}}\right) \\ &< 1 + \frac{1}{\alpha-1}\end{aligned}$$

la suite (S_N) est croissante et majorée donc elle converge.

$\square$

Définition 0.2.
On définit la somme de deux séries $(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n)$ *et* $(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n)$ *par:*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n)\right)$$

On définit la multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ *par:*

$$\lambda \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n\right)$$

Proposition 0.2: Espace vectoriel des séries numériques convergentes

Soit $E = \left\{ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) | u_n \in \mathbb{K}, \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \text{ converge} \right\}$.
alors E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et

$$L : E \to \mathbb{K}, \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

est linéaire.

Démonstration à faire, mais c'est facile.