

# Analyse | CM: 5

Par Lorenzo

03 octobre 2024

## Exemple 0.1.

- $(n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite des entiers.
- $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite alternant entre 1 et -1.
- $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $F_0 = 1, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$  est la suite de Fibonacci.

**Remarques 0.1.** Ne pas confondre la fonction avec une suite  $((\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$  différent de  $f(x) = \sqrt{x}$ )

## 0.0.1 Suites majorées, minorées, bornées

**Définition 0.1.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombre réels.

On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **majorée** si  $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$ .

On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **minorée** si  $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, M \leq u_n$ .

On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **bornée** si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée et minorée.  
(i.e.  $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$ )

## Définition 0.2.

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **croissante** si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$ .

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **strictement croissante** si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$ .

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **décroissante** si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$ .

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **strictement décroissante** si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$ .

On dit que la suite est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

**Remarques 0.2.** Pour vérifier la monotonie d'une suite:

Soit  $u_{n+1} - u_n \geq 0 \implies$  croissante

Soit on calcule (avec  $u_n \neq 0$ )  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \implies$  croissante

On préfère la première pour les suites arithmétiques et la deuxième pour les suites géométriques.

## 0.1 Limites

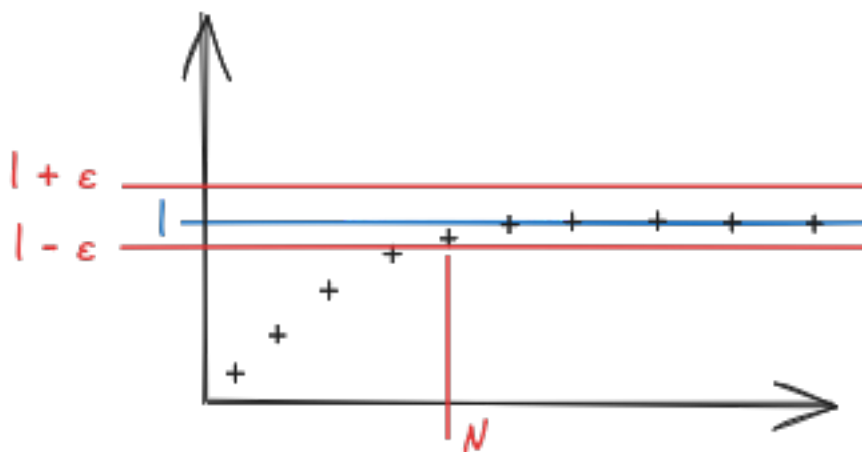
### 0.1.1 Limit finie, limite infinie

**Définition 0.3.** La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet pour limite  $l \in \mathbb{R}$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon$$

On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $l$  quand  $n$  tend vers l'infini, ou

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$$



**Remarques 0.3.** On utilise  $\varepsilon$  pour parler d'un nombre très petit.

**Définition 0.4.** La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$  si elle devient aussi grande que l'on souhaite quand  $n$  devient grand, autrement dit

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A$$

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $-\infty$  si elle devient aussi petite que l'on souhaite quand  $n$  devient grand, autrement dit

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq -A$$

**Définition 0.5.**

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **converge** si elle admet une limite finie.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **diverge** si elle admet l'infini comme limite ou si elle n'a pas de limite.

**Proposition 0.1.**

Si une suite converge, alors sa limite est unique.

**Démonstration 0.1.**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite qui admet deux limites,  $l_1 \neq l_2$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l_1 \implies \forall \varepsilon_1, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, |u_n - l_1| \leq \varepsilon_1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l_2 \implies \forall \varepsilon_2, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2, |u_n - l_2| \leq \varepsilon_2$$

Pour  $\varepsilon_1 = \varepsilon = \varepsilon_2 > 0$

$\exists N = \max(N_1, N_2), \forall n \geq N, |u_n - l_1| < \varepsilon$  et  $|u_n - l_2| < \varepsilon$

Donc  $|l_1 - l_2| = |l_1 - u_n + u_n - l_2| = |(l_1 - u_n) + (u_n - l_2)| \leq |l_1 - u_n| + |u_n - l_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$

Il suffit de prendre  $\varepsilon < \frac{|l_1 - l_2|}{2}$ , ainsi

$$|l_1 - l_2| < 2\varepsilon \leq |l_1 - l_2|$$

Ce qui est absurde, Finalement  $l_1 = l_2$

□

### 0.1.2 Propriétés des limites

#### Propriétés 0.1.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - l) = 0 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - l| = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = |l|$$

**Remarques 0.4.** C'est en général faux dans l'autre sens. Par exemple pour  $u_n = (-1)^n$ ,  $|u_n| = 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 1$  mais  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'a pas de limite  $(-1, 1, -1, 1, \dots)$ .

#### Proposition 0.2.

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites convergentes.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \implies \forall \delta \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} (\delta u_n) = \delta l$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l' \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = l + l' \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) = l \times l'$$

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N, l \neq 0 \text{ et } u_n \neq 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{l}$$

#### Démonstration 0.2.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \implies \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon$$

$$\implies \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N, |\delta| |u_n - l| \leq |\delta| \varepsilon$$

$$\implies \forall \varepsilon' > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N, |\delta u_n - \delta l| \leq |\delta| \varepsilon = \varepsilon'$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \delta u_n = \delta l$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l &\implies \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon \\
\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l' &\implies \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N, |v_n - l'| \leq \varepsilon \\
|u_n - l| + |v_n - l'| &\geq |u_n - l + v_n - l'| = |(u_n + v_n) - (l + l')| \\
&\implies |(u_n + v_n) - (l + l')| \leq 2\varepsilon = \varepsilon'
\end{aligned}$$

*À compléter*

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l &\implies \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon \\
\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l' &\implies \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N, |v_n - l'| \leq \varepsilon \\
|u_n \times v_n - l \times l'| &= |u_n \times v_n - l \times v_n + l \times v_n - l \times l'| \\
&= |v_n(u_n - l) + l(v_n - l')| \\
&\leq |v_n(u_n - l)| + |l(v_n - l')| \\
&= |v_n||u_n - l| + |l||v_n - l'|
\end{aligned}$$

*À faire*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \implies \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon$$

□