

# Ensemble Complex | CM: 2

Par Lorenzo

13 septembre 2024

## 1 Méthodes de démonstration 1

### 1.1 Implication

Pour démontrer un énoncé du type  $P \implies Q$  (Si P alors Q)

**Méthode 1.1.**

*On suppose P.  
raisonnement profond.  
on en conclut Q.*

**Exemple 1.1.**

*Démontrons que  $x \in \mathbb{R} \implies x + 1 \in \mathbb{R}_+$*

*On suppose  $x \in \mathbb{R}$*

$$x \geq 0$$

$$x + 1 \geq 0 + 1 \geq 0$$

*Donc  $x + 1 \in \mathbb{R}_+$*

**Remarques 1.1.**  $A \subset B$  ( $A, B \subset E$ ) par définition se traduit par  $\forall x \in E, x \in A \implies x \in B$

### 1.2 Règle d'inférence ("Dédution naturelle")

Supposons A, B deux formules logiques dépendant d'énoncés élémentaires P, Q, R, ...  
Imaginons que pour chaque ligne de la table de vérité où A est vrai, B l'est également.  
Ainsi lorsqu'on a A on pourra déduire B

**Exemple 1.2.** *Supposons  $P \implies P \vee Q$   
Quand P est vrai  $P \vee Q$  est vrai.*

### 1.3 Disjonction de cas

De même une tautologie est une règle qui est toujours vraie. Un exemple  $(P \vee \neg Q)$ .

**Exemple 1.3.** *Théorème si  $x \in \mathbb{N}$  alors  $x(x+1)$  pair.*

*Si  $x$  est pair alors  $x = 2k, k \in \mathbb{N}$ .*

*$x(x+1) = 2(k(x+1))$  est pair.*

*Si  $x$  est impair  $x+1$  est pair implique  $\exists k \in \mathbb{N}, (x+1) = 2k$ .*

*$x(x+1) = x+2k = 2(kx)$  implique  $x(x+1)$  pair.*

*Conclusion: Dans tous les cas  $x(x+1)$  est pair.*

*C'est un raisonnement par disjonction de cas.*

#### Méthode 1.2.

*Plus généralement si  $A \vee B \vee C \vee \dots$  est une tautologie alors la méthode de la démonstration*

**1) Suppose  $A$**

**raisonnement profond**

**conclusion**

**2) Suppose  $B$**

**raisonnement profond**

**même conclusion**

**3) ...**

**Donc la conclusion est vrai dans tous les cas**

**Remarques 1.2.** *Pour trouver des synonyme en regardant toute les valeurs dans une table de vérités, on utilise une disjonction de cas.*

**Exemple 1.4.** *Soit un entier  $n$ ,  $n$  est impair ou  $n^2$  est un multiple de 4.*

*Supposons que  $n$  ne soit pas impair.*

*Alors  $n$  est pair, donc il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $n = 2k$*

*Ainsi  $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$ .*

*$n^2$  est un multiple de 4.*

### 1.4 La double implication

Si vous souhaitez montrer que  $P \iff Q$ , il suffit de montrer  $P \implies Q$  et  $Q \implies P$ .

**Exemple 1.5.**  $x \in \mathbb{N} \iff x+1 \in \mathbb{N}^*$

**1) Supposons que  $x \in \mathbb{N}$ , donc  $x \geq 0 \implies x+1 \geq 1$**

**Ainsi  $x+1 \in \mathbb{N}^*$**

**2) Supposons que  $x+1 \in \mathbb{N}^*$ , donc  $x+1 \geq 1 \implies x+1-1 \geq 1-1 \implies x \geq 0$ .**

**La soustraction est stable sur  $\mathbb{Z}$ , de plus  $x \geq 0$  donc  $x \in \mathbb{Z}_+ \equiv \mathbb{N}$**

**Remarques 1.3.** *Régulièrement utilisé pour montre que deux ensembles sont égaux, on montre  $A \subset B$  et  $B \subset A$ . Cela s'appelle la **double inclusion**.*

## 1.5 Raisonnement par contraposée

$P \implies Q$  est synonyme à  $\neg Q \implies \neg P$ , ça se prouve facilement en comparant leurs tables de vérités.

**Exemple 1.6.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ , montrer que si  $n^2$  alors  $n$  est pair.

*Supposons que  $n$  est impair, alors il existe  $k \in \mathbb{Z}, n = 2k + 1$*

*Ainsi  $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$  est impair.*

*$n$  impair implique  $n^2$  impair donc  $n^2$  pair implique  $n$  pair (la proposition de base).*

## 1.6 Raisonnement par l'absurde

Pour montrer que  $P$  est vrai, on peut supposer  $P$  faux et arriver à une contradiction.

**Exemple 1.7.** Montrons que  $\sqrt{2}$  est irrationnel.

**Démonstration 1.1.**

*On suppose que  $\sqrt{2}$  est rationnel, i.e. on peut écrire  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$  avec  $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$  (et  $\text{pgcd}(a, b) = 1$ ).*

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \implies 2 = \frac{a^2}{b^2} \implies 2b^2 = a^2$$

*Ainsi  $a^2$  est pair et avec le raisonnement précédent  $a$  est aussi pair (donc  $a = 2k$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ ).*

$$2b^2 = (2k)^2 \implies 2b^2 = 4k^2 \implies b^2 = 2k^2$$

*Ainsi  $b^2$  est pair et  $b$  aussi.*

*Absurde  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux, ils ne peuvent pas être tous les deux multiple de 2.*

□