Université de Saint Etienne **Arithmétique**
L1 MISPIC **Année 2024/2025**

TD 4 : Arithmétique des polynômes

Exercice 1 (F) *Calculer* $P = (-X^2 + 4X + 1)(X^2 - 2) + (X - 1)^2$ *dans* $\mathbb{R}[X]$.
Est-ce que 0 *est une racine de* P *?*
Est-ce que 1 *est une racine de* P *?*

Exercice 2 (*) *Calculer* $(X^2 + X + 1)(X^2 + X + 2) + (X + 1)^2$ *dans* $\mathbb{k}[X]$ *avec* $\mathbb{k} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
Déterminer ses racines.

Exercice 3 (F) *Calculer le degré des polynômes suivants :*

$$X^5+3X, \qquad (X^3+1)(X^4-3X^2) \qquad (X^3+1)(X^4-3X^2)+X, \qquad (X^3+1)(X^4-3X^2)-X^7$$

Exercice 4 (F) *Effectuer la division euclidienne de*

a) X^7 *par* $X^2 + 1$,
b) X^7 *par* $X^2 + 2X + 3$,
c) $180X$ *par* $3X^2$,
d) $4X^4 + 2X^3 + 3$ *par* $3X + 1$.

Exercice 5 (F) *Déterminer le pgcd et écrire une relation de Bézout pour les couples suivants dans* $\mathbb{R}[X]$ *:*

1. $X^5 + 2X^3 + X^2 + 2X$ *et* $X^3 + X + 1$,
2. $2X^5 + 4X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 4X - 2$ *et* $X^3 - X^2 + X - 1$,
3. $X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2$ *et* $X^3 - X^2 - X - 2$.

Exercice 6 (*) *Déterminer le pgcd et écrire une relation de Bézout pour les couples suivants dans* $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$ *:*

1. $X^5 + 2X^3 + X^2 + 2X$ *et* $X^3 + X + 1$,
2. $2X^5 + 4X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 4X - 2$ *et* $X^3 - X^2 + X - 1$,
3. $X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2$ *et* $X^3 - X^2 - X - 2$.

Exercice 7 (F) *Soit* $P(X) = X^4 - 5X^3 + 13X^2 - 19X + 10 \in R[X]$. *Calculer* $P(1)$ *et* $P(2)$.
En déduire une factorisation de $P(X)$ *dans* $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 8 (*) *Montrer que* $X^2 + 1$ *est irréductible dans* $\mathbb{R}[X]$.
En déduire une décomposition en facteurs irréductibles de $X^3 - X^2 + X - 1$.
Déterminer ses racines.
Est-il scindé ?

Exercice 9 (*) *Soit $P(X) = X^4 + X^3 - X^2 + 6 \in \mathbb{R}[X]$. Calculer $P(1+i)$. En déduire une factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.*

Exercice 10 (F) *Soient $P, Q \in \Bbbk[X]$.*
Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies :

1. *Si $P|Q$ et Q est scindé alors P est scindé.*
2. *Si $P|Q$ et P est scindé alors Q est scindé.*
3. *Si $P|Q$ et α est une racine simple de Q alors α est une racine simple de P.*
4. *Si $P|Q$ et α est une racine simple de P alors α est une racine simple de Q.*
5. *Si P est scindé à racines simple, alors $PGCD(P,Q)$ est scindé à racines simples.*

Exercice 11 (*) *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, a et b deux réels distincts. Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)$, (respectivement par $(X-a)(X-b)$, puis par $(X-a)^2$) en fonction de $P(a)$, $P(b)$ et $P'(a)$.*

Exercice 12 (*) *Montrer que $a \in \Bbbk$ est une racine double d'un polynome P si et seulement si $P(a) = P'(a) = 0$. Généraliser ce résultat pour les racines n-ièmes*

Exercice 13 (*) *Montrer que le polynome $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1$ admet une racine double. En déduire la décomposition en produit de polynomes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$*
Meme question pour $P(X) = X^4 + 2X^2 - 8X + 5$

Exercice 14 (*) *a et b étant des nombres réels, déterminer tous les polynomes de $\mathbb{R}[X]$ de la forme $P(X) = 3X^5 - 10X^3 + ax + b$ ayant un zéro d'ordre de multiplicité égal à 3.*

Exercice 15 (**) *Soit $(k,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}^*$. Soit q (resp. r) le quotient (resp. le reste) de la division euclidienne de n par k (c'est-à-dire que $n = qk + r$ avec $0 \leq r < k$). Montrer que le reste de la division euclidienne de*

1. *X^n par $X^k - a$ est $a^q X^r$,*
2. *$X^n - a^n$ par $X^k - a^k$ est $a^{kq}(X^r - a^r)$.*

Exercice 16 (**) *Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $pgcd(X^n - 1, X^p - 1) = X^{pgcd(n,p)} - 1$*

Exercice 17 (**) *Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 7 tel que $(X-1)^4$ divise $P+1$ et $(X+1)^4$ divise $P-1$?*

Exercice 18 (***) *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n.*

1. *Montrer que $a \in \mathbb{R}$ est une racine double de P si et seulement si $P(a) = 0$ et $P'(a) = 0$*
2. *Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$*

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} P^{(k)}(a)(X-a)^k$$

3. *En déduire que a est racine de P de multiplicité $m \geqslant 1$ si et seulement si $\forall i \in [\![1, m-1]\!]$, $P^{(i)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$*