Ensemble Complex | CM: 7

Par Lorenzo

18 octobre 2024

Définition 0.1. *Soient E et F deux ensembles arbitraires On dit que E et F ont même cardinal s'il existe une bijection entre E et F.*

Soit E un ensemble. On dit que E est dénombrable s'il existe une injection de E dans $\mathbb{N}$

Proposition 0.1.

$\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}, \mathbb{N}^2, \mathbb{Q}, \mathbb{N}^n$ *sont dénombrables.*
$\mathbb{R}, P(\mathbb{N})$ *ne sont pas dénombrables*
$P(\mathbb{N})$ *et* $\mathbb{R}$ *ont même cardinal.*

1 Relation et permutations

Définition 1.1. *Soit E un ensemble non vide. Une relation binaire R sur E est la donnée d'une application* $E \times E \to$ *Vrai, Faux.*

On dit que x est en relation avec y lorsque l'image de (x, y) par l'application est "Vrai" et on note alors xRy

Remarques 1.1.

Définition 1.2. *Soit E un ensemble non vide et R une relation binaire sur E. On dit que R est*

réflexive *lorsque* $\forall x \in E, xRx$

symétrique *lorsque* $\forall (x, y) \in E^2, xRy \iff yRx$

antisymétrique *lorsque* $\forall (x, y) \in E^2, (xRy \land yRx) \implies x = y$

transitive *lorsque* $\forall (x, y, z) \in E^3, xRy \land yRz \implies xRz$

Définition 1.3. *Soit R une relation sur un ensemble E. On dit que R est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.*

Définition 1.4. *Soit* $E \neq \emptyset$ *un ensemble muni d'une rel. d'équivalence R.*
Soit $x \in E$.
On appelle classe d'équivalence modulo R de x et on note $\overline{x}$ *l'ensemble* $\{x \in E, xRy\}$.

Théorème 1.1. *L'ensemble des classes d'équivalence de E modulo R forme une partition de E.*

Démonstration 1.1.

$\square$

Définition 1.5. *L'ensemble des classes d'équivalence de E modulo R s'appelle l'ensemble quotient de E par R. On le note E/R.*

Définition 1.6. *Soit R une relation sur un ensemble E.*

On dit que R est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive. Notée souvent $\preccurlyeq$ cursif. On dit que $(E, \preccurlyeq)$ est un ensemble ordonné.

Relation d'ordre totale lorsque R est complète $(\forall x, y \in E, (xRy \vee yRx))$

Définition 1.7. *Soit $(E, \preccurlyeq)$ ensemble ordonné. Soit $A \in P(E)$. On dit que*

A admet un minimum lorsque
$\exists a_0 \in A, \forall A, a_0 \preccurlyeq a$ *On note* $min(A) := a_0$

A admet un maximum lorsque
$\exists a_0 \in A, \forall a \in A, a \preccurlyeq a_0$ *On note* $max(A) := a_0$

A est minoré lorsque
$\exists m \in E, \forall a \in A, m \preccurlyeq a$

Remarques 1.2. *Si A admet un minimum (resp. un maximum) alors A est minoré (resp. majoré)*

Remarques 1.3. *Si A admet un minimum (resp. maximum), il est unique.*

Proposition 1.1.

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre totale $\preccurlyeq$. Soit $A \in P(E)$ un ensemble fini non-vide. Alors A admet un minimum et un maximum.