Discrete Et Geometrique | CM: 5

Par Lorenzo

25 février 2025

Proposition 0.1.

Soit $A, B \subset \Omega$ *alors* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Démonstration 0.1.

$A \cup B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \cup (A \cap B)$
et $(A \backslash B) \cap (B \backslash A) = \emptyset$
Ainsi (d'après la proposition d'union disjointe) $P(A \cup B) = P(A \backslash B) + P((B \backslash A) \cup (A \cap B))$
D'autre part $A = (A \backslash B) \cup (A \cap B)$ *(1)*
donc $P(A) = P(A \backslash B) + P(A \cap B)$ *(2)*
de même $P(B) = P(B \backslash A) + P(A \cap B)$ *(3)*

$\square$

Proposition 0.2.

Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega$ *et* $k \neq j \implies A_k \cap A_j = \emptyset$
Alors

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

Démonstration 0.2.

Par récurrence:
si $n = 2$, *c'est la proposition précédente.*
Supposons $P\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$.
si $k \neq j \implies A_k \cap A_j = \emptyset$
Soit $A_{n+1} \subset \Omega$ *tel que* $A_{n+1} \cap A_k = \emptyset$ *pour tout* $k \in \{1, \ldots, n\}$
Alors

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) &= P\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cup A_{n+1}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + P(A_{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} P(A_k) \end{aligned}$$

$\square$

Corollaire 0.1. *Soit $A \subset \Omega$ alors $P(A) = \sum\limits_{w \in A} P(\{w\})$*

Remarques 0.1. *pour connaitre $P(A)$ pour tout $A \subset \Omega$, il suffit de connaître $P(\{w\}))$ pour tout $w \in \Omega$.*

Définition 0.1. *D'où viennent les valeurs de P*

1. *Peut être donné*
2. *Hypothèse d'équiprobabilité*

   Les probabilités de tout les singletons de l'univers sont égales.

   D'autre part, $\sum\limits_{k=1}^{n} P(\{w_k\}) = 1$ donc $P(\{w_k\}) = \frac{1}{n}$.

1 Probabilité conditionnelle

Définition 1.1. *Soit un univers Ω et une probabilité $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$.*
Soit $A \subset \Omega$ un événement de probabilité non nulle.
Par tout événement $B \subset \Omega$ introduisons $P_A(B)$ - probabilité conditionnelle de B sachant A.
$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Remarques 1.1. *La notation $P(B|A)$ est aussi acceptée, mais ne sera pas utilisée pour éviter de penser que $B|A$ est un événement.*

Proposition 1.1.

Dans les condition de la définition avec $A \neq \emptyset$, on a:

1. $P_A(\Omega) = 1$
2. $P_A(B_1 \cup B_2) = P_A(B_1) + P_A(B_2)$ *si* $B_1 \cap B_2 = \emptyset$
3. $P_A(\bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} P_A(B_k)$ *si* $k \neq j \implies B_k \cap B_j = \emptyset$

Démonstration 1.1.

1. $P_A(\Omega) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$
2. $P_A(B_1 \cup B_2) = \frac{P(A \cap (B_1 \cup B_2))}{P(A)} = \frac{P((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2))}{P(A)} = \frac{P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)} + \frac{P(A \cap B_2)}{P(A)} = P_A(B_1) + P_A(B_2)$
3. *Par récurrence:*

   si $n = 2$, c'est la proposition précédente.

   Supposons $P_A\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P_A(B_k)$.

$$
\begin{aligned}
P_A\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} B_k\right) &= P_A\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) \cup B_{n+1}\right) \\
&= P_A\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) + P_A(B_{n+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P_A(B_k) + P_A(B_{n+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} P_A(B_k)
\end{aligned}
$$

□

Théorème 1.1 (formule des probabilités totales)**.** *Soit l'univers* Ω *et la probabilité* $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$.

Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega$ *tels que* $k \neq j \implies A_k \cap A_j = \emptyset$ *et* $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k = \Omega$ *(partition de* Ω*). Soit* B *un événement.*

Alors $P(B) = \sum\limits_{k=1}^{n} P_{A_k}(B)P(A_k)$

Démonstration 1.2.

$B = \bigcup\limits_{k=1}^{n} (B \cap A_k)$

Alors

$P(B) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(B \cap A_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} P_{A_k}(B)P(A_k)$

□