# Science Decision

Par Lorenzo

23 November 2024

## Contents

Arrivé apres le premier CM (cours à venir)

## 1 Relations binaires

**Définition 1.1.** *Une relation binaire $R$ sur un ensemble $X$ est un sous-ensemble de paires ordonnées $(x, y) \in X^2$, on simplifie la notation par $xRy$ (resp. $\neg xRy$) pour $(x, y) \in R$ (resp. $(x, y) \notin R$).*

**Propriétés 1.1.**

***réflexive*** *si*

$$\forall x \in X,\ xRx$$

***irréflexive*** *si*

$$\forall x \in X,\ \neg(xRx)$$

***symétrique*** *si*

$$\forall x, y \in X,\ xRy \implies yRx$$

***asymétrique*** *si*

$$\forall x, y \in X,\ xRy \implies \neg(yRx)$$

***antisymétrique*** *si*

$$\forall x, y \in X,\ xRy \wedge yRx \implies x = y$$

***transitive*** *si*

$$\forall x, y, z \in X,\ xRy \wedge yRz \implies xRz$$

***négativement transitive*** *si*

$$\forall x, y, z \in X,\ \neg(xRy) \wedge \neg(yRz) \implies \neg(xRz)$$

***complète (ou totale)*** *si*

$$\forall x, y \in X,\ xRy \vee yRx$$

**Remarques 1.1.** *la notation $xRy$ peut être remplacé par $(x, y) \in R$, par exemple pour la réflexivité, ($\forall x \in X,\ (x, x) \in R$).*

Une relation qui satisfait certaines propriétés peut porter un nom.

**Définition 1.2.**

1. *Une **relation d'équivalence** si elle est rérféxive, symétrique et transitive.*
2. *Un **préordre (ou quasi ordre)** si elle est réflexive et transitive.*
3. *Un **ordre faible (ou préordre total)** si elle est transitive et complète.*
4. *Un **ordre faible strict** si elle est asymétrique et négativement transitive.*
5. *Un **ordre partiel** si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.*
6. *Un **ordre partiel (ou ordre, ordre linéaire, chaîne)** si elle est antisymétrique, transitive et complète.*

**Example 1.1.**

1. *$\mathbb{R}$ est totalement ordonnées par $\geq$ et est appelé l'ordre naturel sur $\mathbb{R}$.*
2. *$\mathbb{N}$ avec $>$ est un ordre faible strict.*
3. *Deux entiers relatifs $x$ et $y$ sont congrus modulo $p \in \mathbb{N}$, s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x = y + kp$, ce que l'on note $x \equiv y[p]$. La relation de congruence modulo sur $\mathbb{Z}$ est une relation d'équivalence.*

**Proposition 1.1.**

*Si $R$ est asymétrique alors $R$ est réflexive.*

Démontré trivialement par les définitions d'asymétrie et de réflexivité.

**Proposition 1.2.**

*Si $R$ est irréflexive et transitive alors $R$ est asymétrique.*

**Démonstration 1.1.**

*On suppose que $R$ est irréflexive, transitive et non asymétrique.*

*La non asymétrie se traduit par*

$$\neg(\forall x, y \in X,\ xRy \implies \neg(yRx)) \quad \equiv \quad \exists x, y \in X,\ xRy \wedge yRx$$

*Ainsi avec la non asymétrie et la transitivité on arrive à*

$$\begin{aligned} & \exists x, y \in X,\ xRy \wedge yRx \quad \wedge \quad \forall x, y, z \in X,\ xRy \wedge yRz \implies xRz \\ \equiv \quad & \exists x, y \in X,\ xRy \wedge yRx \implies xRx \end{aligned}$$

*Ce qui est absurde car ça contredit l'irréflexivité !!!*

*Donc Si R est irréflexive et transitive alors R est asymétrique.*

□

**Proposition 1.3.**

*R est négativement transitive ssi*

$$\forall x, y, z \in X,\ xRz \implies xRy \vee yRz$$

**Démonstration 1.2.**

*Utilisons la contraposée du négativement transitive*
*(Rappel la contraposée de $P \implies Q$ est $\neg Q \implies \neg P$),*

$$\begin{aligned} & \forall x, y, z \in X,\ \neg(\neg(xRz)) \implies \neg(\neg xRy \wedge \neg yRz) \\ \equiv \quad & \forall x, y, z \in X,\ xRz \implies xRy \vee yRz \end{aligned}$$

*Ainsi R est négativement transitive ssi*

$$\forall x, y, z \in X,\ xRz \implies xRy \vee yRz$$

□

**Proposition 1.4.**

*Si R est complète alors R est réflexive*

Démontré facilement par définition en prenant un x et un $y = x$.

## 1.1 Opérations sur les relations

Puisque une relation R sur X est un sous ensemble de $X \times X$, on peut facilement utiliser des opérations ensemblistes.

**Définition 1.3.** *Étant donné deux relation $R_1$ et $R_2$ sur un ensemble X.*

- *la relation **complémentaire** de $R_1$, la relation binaire $R_1^c$ sur X telle que*
  $\forall x, y \in X,\ xR_1^c y$ *si* $\neg(xR_1y)$
- *la **réunion** de $R_1$ et $R_2$ est la relation binaire $R_1 \cup R_2$ sur X telle que*
  $\forall x, y \in X,\ xR_1 \cup R_2 y$ *si* $xR_1y \vee xR_2y$
- *l'**intersection** de $R_1$ et $R_2$ est la relation binaire $R_1 \cap R_2$ telle que*
  $\forall x, y \in X,\ xR_1 \cap R_2 y$ *si* $xR_1y \wedge xR_2y$

- *la relation $R_1$ est **compatible** avec $R_2$ si*
  $\forall x, y \in X,\ xR_1y \implies xR_2y$ *ou de manière équivalente* $R_1 \subset R_2$
- *la relation **réciproque** (ou duale, inverse) de $R_1$, la relation binaire $R_1^{-1}$ sur X telle que*
  $\forall x, y \in X,\ yR_1^{-1}x$ *si* $xR_1y$
- *la **composée** de $R_1$ et $R_2$, la relation binaire $R_1 \circ R_2$ sur X telle que*
  $\forall x, y \in X,\ xR_1 \circ R_2y$ *si* $\exists z \in X, xR_2z \wedge zR_1y$

## 1.2 Relations d'équivalence

**Proposition 1.5.**

*L'intersection $R_1 \cap R_2$ de deux relations d'équivalences $R_1$ et $R_2$ sur un ensemble X est une relation d'équivalence.*

**Démonstration 1.3.**

- ***Réflexive*** *car* $\forall x \in X,\ xR_1x \wedge xR_2x$, *ainsi* $xR_1 \cap R_2x$ *pour tout* $x \in X$.
- ***Symétrie*** *car* $\forall x, y \in X,\ (xR_1y \wedge yR_1x) \wedge (xR_2y \wedge yR_2x)$, *ainsi* $\forall x, y \in X,\ xR_1y \wedge xR_2y$ *ce qui implique que* $yR_1x \wedge yR_2x$ *soit* $\forall x, y \in X,\ (xR_1y \wedge yR_2x) \wedge (xR_2y \wedge yR_1x)$.
- ***Transitive*** *car* $\forall x, y \in X, xR_1y \wedge xR_2y \wedge yR_1z \wedge yR_2z \implies xR_1z \wedge xR_2z \implies xR_1 \cap R_2z$

$$\boxed{R_1 \cap R_2 \text{ est Réflexive, Symétrique, Transitive donc c'est une relation d'équivalence.}}$$

□

Soit $x \in X$ l'ensemble $\{y \in X \mid xRy\}$ est appelé classe d'équivalence de x notée $C_x$.

**Example 1.2.** *"=" sur* $\mathbb{N}$

- $\forall a \in \mathbb{N}, a = a$ *(Réflexive)*
- $\forall a, b \in \mathbb{N}, a = b \implies b = a$ *(Symétrique)*
- $\forall a, b, c \in \mathbb{N}, a = b \wedge b = c \implies a = c$ *(Transitive)*
  *"=" est une relation d'équivalence sur* $\mathbb{N}$
  $C_2 = \{y \in \mathbb{N}, 2 = y\} = \{2\}$

  $\{C_x \mid x \in X\}$ est l'ensemble quotient de X par R noté X/R.

**Proposition 1.6.**

*Soit R une relation d'équivalence sur X, X/R forme une partition de X, i.e.*

- $\forall x, y \in X, C_x \cap C_y = \emptyset$ *ou* $C_x = C_y$
- $X = \bigcup_{x \in X} C_x$

**Démonstration 1.4.**

*Nous allons montrer que*
$\forall x, y \in X,\ xRy \implies C_x = C_y$
$\forall x, y \in X,\ \neg xRy \implies C_x \cap C_y = \emptyset$
*Soient* $x, y \in X$
*so* $xRy$ *soit* $z \in C_x$ *alors* $xRz$

□

**Remarques 1.2.** *Pour une relation binaire il est toujours vrai que* $\forall x, y \in X, xRy \vee \neg xRy$

## 1.3 Ordre faible et ordre total

Soit R une relation binaire sur l'ensemble X.

On définit I et S sur X par
$\forall x \in X, y \in X, xIy$ si $xRy \land yRx$
$\forall x \in X, y \in X, xSy$ si $xRy \land \neg yRx$

**Example 1.3.** $A = \{a, b, c\}$
$R = \{(a, b), (b, a), (a, c), (b, c)\}$
$I = \{(a, b), (b, a)\}$
$S = \{(a, c), (b, c)\}$

**Proposition 1.7.**

*si R est un ordre faible sur X, alors*

***1.*** *I est une relation d'équivalence*

***2.*** *S est irréflexive et transitive*

**Démonstration 1.5.**

*I relation d'équivalence:*

*I reflexive*
*Soit* $x \in X, xIx \iff xRx \land xRX \iff xRx$ *vrai car R est complète*

*I symétrique*
*Soient* $x \in X, y \in X, xIy \implies xRy \land yRx \implies yRx \land xRy \implies yIx$

*I transitive*
*Soient* $x, y, z \in X, xIy \land yIz \implies xRy \land yRx \land yRz \land zRy \implies xRy \land yRz \land zRy \land yRx \implies xRz \land zRx \implies xIz$

□

On définit $R^*$ sur $X/I$ par
$\forall C_x \in X/I, C_y \in X/I, C_xR^*C_y$ lorsque $xRy$
$R^*$ sur X/I est la réduction (relation quotient) de R sur X

**Proposition 1.8.**

*Si R est un ordre faible alors* $R^*$ *est un ordre total sur X/I*

**Démonstration 1.6.**

$R^*$ *antisymétrique*
*Soient* $C_x, C_y \in X/I, C_xR^*C_y \land C_yR^*C_x \implies C_x = C_y \implies xIy \implies y \in C_x \implies C_x = C_y$

$R^*$ *transitive*
*Soient* $C_x, C_y, C_z \in X/I$
$C_xR^*C_y \land C_yR^*C_z \implies xRy \land yRz \implies xRz \implies C_xR^*C_z$

$R^*$ *complète*
$C_x, C_y \in X/I, C_xR^*C_y \lor C_yR^*C_x$ *car R complète*

□

### 1.3.1 Irréflexive et transitive

voir plus tard

## 1.4 Ordre total, Ordre partiel

R ordre partiel sur X
Soit $x \in X$, x est:

- un élément maximal si $\forall y \in X \backslash \{x\}, \neg(yRx)$
- le plus grand élément si $\forall y \in X, xRy$
- un élément minimal si $\forall y \in X \backslash \{x\}, \neg(xRy)$
- le plus petit élément si $\forall y \in X, yRx$

**Proposition 1.9.**

*Il y a au plus un plus grand (resp. petit) élément.*

**Démonstration 1.7.**

*Soit x et x' deux plus grand (resp. petit) éléments avec $x \neq x'$.*
*Ainsi $\forall y \in X, xRy$ et $x'Ry \implies xRx'$ et $x'Rx \implies x = x'$*
*Absurde car on a supposé $x \neq x'$*

□

Construction de diagramme de Hasse

- si xRy : x au dessus de y
- et si x **couvre** y : il n'existe pas $z \in X \backslash \{x, y\}$ tel que $xRz \wedge zRy$
- alors il y a une arête qui relie x et y

**Définition 1.4.** *Une **chaîne** est un ensemble d'éléments de X totalement ordonné*

**Définition 1.5.** *Une **antichaîne** si $\forall x, xRy \vee yRx \implies x = y$*

Soit c le nombre minimal de chaînes pour partitionner X
Soit A une anti-chaîne de cardinal maximal a

**Remarques 1.3.** *partition avec le plus grand nombre de chaînes : {{a}, {b}, ..., {g}}*

**Proposition 1.10.**

*X ensemble partiellement ordonné par R.*
*Le nombre d'éléments d'une antichaîne de cardianl maximal (a) est égale au nombre minimum de chaînes pour partitionner X.*

**Démonstration 1.8.**

*Preuve par récurrence sur* $|x|$
*Init.* $|x| = 1$
*X est une chaîne et une antichaîne a = 1*
*on partitionne X en 1 chaîne c = a = 1*
*here. Suppose que ça marche pour tous jusqu'a n*
*2 cas:*

*(a) si X contient une antichaîne de cardinal a contenant au moins un element non mimimal et au moins un element maximal*

*(b) si X contient une antichaîne de cardinal a contenant que des elements maximaux ou minimaux*

*(a) Soient* $H = \{x \in X | \exists z \in A, xRz\}$ *et* $B = \{x \in X | \exists z \in A, zRx\}$

*du fait de (a)* $\exists w \in A$ *non maximal implique* $\exists y \in X, yRw$ *et* $y \notin B$ *donc* $|B| \leq n - 1$ *donc B peut être partitionné en a chaînes*

□

Suite de démonstration

**Démonstration 1.9.**

□

# 2 Préférence et utilité

## 2.1 Définition

**Définition 2.1.** *Soit* $(X, \gtrsim)$ *une structure de préférence (voir chap 2)*
$\gtrsim$ *est une relation binaire sur X*

On veut une application $f : (X \gtrsim) \to (\mathbb{R}, \geq)$ telle que $x \gtrsim y \iff f(x) \geq f(y)$
f est une fonction d'utilité.
Soient $f : (X, R_1) \to (Y, R_2)$, On dira que f est isotone si $\forall x, z \in X, xR_1z \implies f(x)R_2f(z)$
Un homomorphisme de $(X, R_1)$ vers $(Y, R_2)$ si $\forall x, z \in X, xR_1z \iff f(x)R_2f(z)$

**Remarques 2.1.** *Homomorphisme implique isotone*

## 2.2 Représentation de type $(X, \succeq) \to (\mathbb{R}, \geq)$: cas fini

Soit $\succ$ sur X

**Proposition 2.1.**

*Soit X fini, une codition nécessaire et suffisante (C.N.S) pour qu'existe une fonction* $\exists f : (X, \succ) \to (\mathbb{R}, >)$ *tel que* $x \succ y \iff f(x) > f(y)$ *si et seulement si* $\succ$ *est un ordre faible stricte.*

**Démonstration 2.1.**

*Preuve condition nécessaire, on montre* $\neg Q \implies \neg P \equiv P \implies Q$

*Asymétrie: Soient* $x, y \in X$ *tel que* $x \succ y \implies f(x) < f(y) \implies \neg f(x) < f(y) \implies \neg y \succ x$ *donc asymétrique.*

*Negativement transitive: Soient* $x, y, z \in X$ *tels que* $\neg x \succ y \wedge \neg y \succ z \implies \neg f(x) > f(y) \wedge \neg(y) > f(z) \implies f(x) \leq f(y) \wedge f(y) \leq f(z) \implies f(x) \leq f(z) \implies \neg(x) > f(z) \implies \neg x \succ z$ *Finalement negativement transitive.*

*Preuve condition suffisante, on montre* $Q \implies P$*, Soit* $\succ$ *un o.f.s sur* $X$

*Soit* $x \in X$ *on définit:* $\curlyvee x = \{y \in X \mid x \succ y\}$

*Soit* $f(x) = Card(\curlyvee x)$ *si* $X = \mathbb{Z}$

$\square$