Université de Saint Etienne — **Arithmétique**

L1 MISPIC — **Année 2024/2025**

TD 2 : Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Légende : **F** : Exercice Fondamental (à comprendre impérativement),

* demande un peu de raisonnement,

** demande un peu plus de raisonnement,

*** volontairement plus coriace.

Exercice 1 (F) *Réaliser le crible d'Eratosthène pour les nombres jusqu'à* 50.
On pourra directement le faire directement dans le tableau ci-dessous :

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Exercice 2 (F) *Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres*

$$a = 5544, \qquad b = 2352, \qquad c = 5940$$

Exercice 3 (F) *Soient a, b, c trois entiers tels que $a + b = c$.*

1. *Montrer que, si a et b sont multiples de* 17*, alors c l'est également.*
2. *Montrer que, si a et c sont multiples de* 17*, alors b l'est également.*
3. *Montrer que, si a est multiple de* 17 *et b ne l'est pas, alors c n'est pas multiple de* 17.
4. *Peut-on avoir c multiple de* 17 *sans que a et b ne le soient ?*

Exercice 4 (F) *Faire la division euclidienne de a par b pour les couples (a, b) suivants :*

$$(10, 3), \quad (556, 5), \quad (-10, 3), \quad (12, 3), \quad (-12, 3), \quad (3, 10)$$

Puis, pour $c \in \mathbb{N}^*$, $(c+1, c)$, (c^2+3c+1, c) **(*)** *et $(c^2+3c+1, c+1)$* **(**)** *suivant la valeur de c*

Exercice 5 (F)

1. *Calculer avec l'algorithme d'Euclide :*
   PGCD(84,129), PGCD(112,-147), PGCD(256,70)
2. *Calculer :*
   PPCM(52,120), PPCM(121,55), PPCM(2520,462)

Exercice 6 (F) *Trouver une relation de Bézout pour les paires de nombres suivants :*

$$(84, 129), \quad (112, -147), \quad (256, 70)$$

Exercice 7 (F) *Dans $\mathbb{Z}^2$, résoudre les équations diophantiennes suivantes :*

1. $11u + 25v = 1$
2. $14u + 105v = 7$
3. $35u + 20v = 1$
4. $84u + 129v = 6$

Exercice 8 (*) *Montrer que pour tout $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$, on a*

1. $PGCD(a, b) = PGCD(|a|, |b|)$
2. $PGCD(ac, bc) = |c| PGCD(a, b)$

Exercice 9 (F) *Trouver le pgcd et le ppcm des deux nombres suivants :*
$a = 2^3 \times 5^2 \times 7 \times 11^2 \times 17$ *et* $b = 2^2 \times 5 \times 73 \times 11 \times 13$.
Idem pour : $a = 2^2 \times 5^2 \times 13 \times 19^2$ *et* $b = 2 \times 5^3 \times 7 \times 13$.

Exercice 10 (*) *Déterminer le nombre de diviseurs de 660.*

Exercice 11 (*) *Soient a et b deux entiers relatifs premiers entre eux. Montrer que a et $a + b$ sont premiers entre eux.*

Exercice 12 (*) *Trouver a et b dans $\mathbb{N}^*$ dans les deux cas suivants :*

1. $PGCD(a, b) = 18$ *et* $a + b = 360$.
2. $PGCD(a, b) = 7$ *et* $PPCM(a, b) = 504$.

Exercice 13 (*) *Montrer qu'il n'existe pas d'entiers m et n tels que $m + n = 101$ et $PGCD(m, n) = 3$.*

Exercice 14 (*) *Démontrer que deux nombres entiers consécutifs sont premiers entre eux.*

Exercice 15 (*)

1. *Déterminer le PGCD de 2873 et 1001, ainsi que deux entiers relatifs u et v tels que* $2873u + 1001v = PGCD(2873, 1001)$
2. *Décomposer 2873 et 1001 en facteurs premiers.*
3. *Existe-t-il des entiers relatifs u et v vérifiant* $2873u + 1001v = 15$ *?*

Exercice 16

1. **(*)** *Dans un jeu de ballon ovale, on ne peut marquer que 3 ou 5 points suivant les actions.*
   (a) *Montrer que l'on peut atteindre les scores* 8, 9, 10
   (b) *Montrer que l'on peut atteindre tout score n supérieur ou égal à* 8.
2. *Dans un autre jeu de ballon, on ne peut marquer que a ou b points suivant les actions ($a, b \in \mathbb{N}^*$ fixés). On suppose que $PGCD(a, b) = 1$.*
   (a) **(*)** *Soit $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ donnant une relation de Bézout entre a et b. Montrer que ($u \leqslant 0$ et $v \geqslant 0$) ou ($u \geqslant 0$ et $v \leqslant 0$)*
   (b) **(**)** *On suppose $u \leqslant 0$. Montrer que $-au$ et $-au + 1$ sont des scores accessibles.*
   (c) **(***)** *Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que tout $n \geqslant N$ est un score accessible.*