Analyse2 | CM: 1

Par Lorenzo

21 janvier 2025

1 Notion de convexité et application

Définition 1.1. .

- *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ est **convexe** si:*

$$\forall x, y \in A, \forall \lambda \in [0,1], \lambda x + (1-\lambda)y \in A$$

- *On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **convexe** si:*

$$\forall (x,y) \in I, \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

- *On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **strictement convexe** si:*

$$\forall (x,y) \in I, x \neq y, \forall \lambda \in]0,1[, f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

- *On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **concave** si $-f$ est convexe.*

$$\forall (x,y) \in I, \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

- *On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **strictement concave** si $-f$ est strictement convexe.*

$$\forall (x,y) \in I, x \neq y, \forall \lambda \in]0,1[, f(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Remarques 1.1. *Les fonctions affines sont convexes et concaves.*

Proposition 1.1.

Une partie $A \subset \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si A est un intervalle.

Démonstration 1.1.

À faire.

$\square$

Corollaire 1.1.

- *Soit $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Alors $[x,y] = \{\lambda x + (1-\lambda)y \in \mathbb{R}; \lambda \in [0,1]\}$.*
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, x_1, ..., x_n \in I$ et $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, alors $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in I$.*

Remarques 1.2. $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ *est appelé* ***une combinaison convexe*** *d'élements de I.*

Démonstration 1.2.

À faire.

$\square$

Définition 1.2. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.*

- *On appelle* ***graphe*** *(ou* ***courbe représentative****) de la fonction f, l'ensemble de points:*
$$\mathscr{C}_f = \{(x, f(x)); x \in I\}$$
- *L'équation $y = f(x)$ est appelée équation cartésienne du graphe de f.*
- *Soit $a, b \in I$ avec $a < b$. Soient A le point du plan de coordonnées $(a, f(a))$ et B celui de coordonnées $(b, f(b))$. La droite passant par A et B est appelée* ***corde*** *du graphe de f. La portion de $\mathscr{C}_f$ comprise entre A et B est appelée* ***arc*** *de f entre A et B.*

Proposition 1.2.

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $a, b \in I$ avec $a < b$. A le point de coordonnées $(a, f(a))$ et B celui de coordonnées $(b, f(b))$ et $\lambda \in [0, 1]$.

1. *L'équation de la corde $[A, B]$ est:*
$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$
2. *Le point G du segment $[A, B]$ ayant pour abscisse $\lambda a + (1 - \lambda)b$ a pour ordonnée $\lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$.*

Démonstration 1.3.

À faire.

$\square$

Interprétation graphique de la convexité. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, de courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

- Soient $a, b \in I$ avec $a < b$ et A le point de coordonnées $(a, f(a))$ et B celui de coordonnées $(b, f(b))$.
- Soit G le point du segment [A, B] ayant pour abscisse $\lambda a + (1 - \lambda)b$ et pour ordonnée $\lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$.
- Le point P de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $\lambda a + (1 - \lambda)b$ a pour ordonnée $f(\lambda a + (1 - \lambda)b)$.

Ainsi la définition de convexité de f exprime que le point G est situé au-dessus de P.

1.1 Inégalité de Jensen

Proposition 1.3.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction convexe,* $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, ..., x_n \in I$ *et* $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ *tels que* $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. *Alors:*

$$f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

Démonstration 1.4.

À faire.

$\square$

1.2 Convexité et dérivabilité

1.2.1 Inégalité des pentes

Proposition 1.4.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction définie sur I. f est convexe sur I si et seulement si pour tout* $a \in I$, *la fonction:*

$$\tau_a : \begin{cases} I \backslash \{a\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{cases}$$

est croissante.

Démonstration 1.5.

À faire.

$\square$

Corollaire 1.2. *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction. f est convexe si et seulement si, pour tout* $x_1, x_2, x_3 \in I$ *avec* $x_1 < x_2 < x_3$, *on a:*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

Démonstration 1.6.

Montrons $(\Longrightarrow)$
À faire.
Montrons $(\Longleftarrow)$
Supposons aue $\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3$.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

Montrons que f est convexe, c'est à dire
$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$
Posons $a = \lambda x + (1 - \lambda)y \in [x, y]$ *donc* $x < a < y$.
Par hypothèse, on a:

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a}$$

On a $a - x = \lambda x + (1-\lambda)y - x = (1-\lambda)(y-x)$ *et* $y - a = y - \lambda x - (1-\lambda)y = \lambda(y-x)$. *On a alors:*

$$\begin{aligned}
\frac{f(a)-f(x)}{(1-\lambda)(y-x)} \leq \frac{f(y)-f(a)}{\lambda(y-x)} &\implies \lambda(f(a)-f(x)) \leq (1-\lambda)(f(y)-f(a)) \\
&\implies f(a) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \\
&\implies f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)
\end{aligned}$$

Donc f *est convexe.*

□

Corollaire 1.3 (Inégalité des trois pentes)**.** *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction convexe. Alors pour tout* $x_1, x_2, x_3 \in I$ *avec* $x_1 < x_2 < x_3$*, on a:*

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

Démonstration 1.7.

À faire.

□

1.2.2 Caractérisation des fonctions convexes dérivables

Définition 1.3. *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction. On dit que* f *est deux fois dérivable sur I, si* f *est dérivable et* f' *est aussi dérivable. On note alors* f'' *la dérivé de* f'. f'' *est appelée dérivée seconde de f.*

Théorème 1.1 (Convexité des fonctions dérivables)**.** *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable. f est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante.*

En particulier une fonction deux fois dérivable est convexe si et seulement si sa dérivée seconde est positive sur I.

Démonstration 1.8.

À faire.

□

Définition 1.4. *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *un fonction. En un point où la dérivée seconde de f s'annule en changeant de signe, la courbe* $\mathscr{C}_f$ *change de concavité : on dit que c'est* ***un point d'inflexion***.

Remarques 1.3. *Grâce à ce théorème il est très rapide de déterminer la convexité d'une fonction dérivable deux fois.*

1.2.3 Position par rapport à une tangente

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f est dérivable en $a \in I$. Alors la courbe $\mathscr{C}_f$ possède une tangente au point de coordonnées $(a, f(a))$ d'équation $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.

Proposition 1.5.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Alors f est convexe si et seulement si elle est au-dessus de chacune de ses tangentes.

Démonstration 1.9.

À faire.

$\square$