Démonstration 0.1.

Soit F un sev de E et $m_0 \in \mathscr{E}$.

On pose $\mathscr{F} = \{m \in \mathscr{E} \mid \vec{m_0 m} \in F\}$ c'est à dire $\mathscr{F}$ est le sous-espace affine passant par m_0 et de direction F.

Montrons que $\mathscr{F}$ est un espace affine de direction F.

Soit θ' la restriction de $\theta : \mathscr{E} \times \mathscr{E} \to E$ à $\mathscr{F} \times \mathscr{F}$. c'est-à-dire $\theta' : \begin{array}{l} \mathscr{F} \times \mathscr{F} \to E \\ (m, m') \mapsto \theta(m, m') = \vec{mm'} \end{array}$.

Montrons que: $\forall (m, m') \in \mathscr{F} \times \mathscr{F}, \theta'(m, m') \in F$.

Soit $(m, m') \in \mathscr{F} \times \mathscr{F}$.

$$\begin{aligned} \vec{mm'} &= \vec{m, m_0} + \vec{m_0, m'} \in F \\ &= -\vec{m_0, m} + \vec{m_0, m'} \in F \text{ car } F \text{ est un sev de } E \end{aligned}$$

D'où $\theta' : \begin{array}{l} \mathscr{F} \times \mathscr{F} \to F \\ (m, m') \mapsto \theta'(m, m') = \vec{mm'} \end{array}$ *est une application et vérifie la relation de Chasles car θ la vérifie.*

Soit $a \in \mathscr{F}$

On a $\theta'_a : \begin{array}{l} \mathscr{F} \to F \\ m \mapsto \theta'(a, m) = \vec{am} \end{array}$

Montrons que θ'_a est bijective.

Soit $\vec{v} \in F$, donc $\vec{v} \in E$.

Comme θ_a est bijective, il existe un unique $m \in \mathscr{E}$ tel que $\theta_a(m) = \vec{v}$.

Reste à montrer que $m \in \mathscr{F}$.

En utilisant Chasles, on a:

$$\vec{m_0 m} = \vec{m_0 a} + \vec{am} = \vec{m_0 a} + \theta_a(m) = \vec{m_0 a} + \vec{v} \in F$$

$\square$

Démonstration 0.2.

Avec $\mathscr{F} = \{m \in \mathscr{E} \mid \vec{m_0 m} \in F\}$

Soit $m_1 \in \mathscr{F}$.

Montrons que $\mathscr{F} = \{m \in \mathscr{E} \mid \vec{m_1 m} \in F\}$

Soit $m \in \mathscr{F}$

$$\begin{aligned} \vec{m_1 m} &= \vec{m_1 m_0} + \vec{m_0 m} \in F \\ &= -\vec{m_0 m_1} + \vec{m_0 m} \in F \text{ car } F \text{ est un sev de } E \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{F} \subset \{m \in \mathscr{E} \mid \vec{m_1 m} \in F\}$

Réciproquement, soit $m \in \mathscr{E}$ *tel que* $\vec{m_1 m} \in F$.

$$\begin{aligned} \vec{m_0 m} &= \vec{m_0 m_1} + \vec{m_1 m} \in F \\ &= \vec{m_0 m_1} + \vec{m_1 m} \in F \text{ car } F \text{ est un sev de } E \end{aligned}$$

Ainsi $\mathscr{F} = \{m \in \mathscr{E} \mid \vec{m_1 m} \in F\}$

□

Démonstration 0.3.

Soient $m_0 \in \mathscr{E}$, F *un sev de* E.

Soit $\mathscr{F} = \{m \in \mathscr{E} \mid \vec{m_0 m} \in F\}$

Alors $\mathscr{F}$ *est un sous espace de* $\mathscr{E}$ *de direction* F *passant par* m_0. *d'où l'existence.*

Pour l'unicité, si $\mathscr{F}'$ *est un sous-espace affine de* $\mathscr{E}$ *de direction* F *passant par* m_0.

Ainsi $\mathscr{F}' = m_0 + F = \mathscr{F}$

□