Discrete Et Geometrique | CM: 7

Par Lorenzo

25 mars 2025

0.1 Variables aléatoires

Définition 0.1. *X une variable aléatoire réelle c'est à dire $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$*

Définition 0.2. *Soient X une variable aléatoire et A un événement en termes de X. C'est à dire de forme $\{w \in \Omega | X(w) \in S\}$ avec $S \subset \mathbb{R}$.*

Notation correcte:

- $\{X \in S\} = \{w \in \Omega | X(w) \in S\}$
- $\{X = 3\} = \{w \in \Omega | X(w) \in \{3\}\}$
- $\{X \geq 7\} = \{w \in \Omega | X(w) \in [7, +\infty[\}$

Remarques 0.1. *Tout ensemble d'événements résultant d'une variable aléatoire est d'ordre multiplie de quelque chose (dans un lancé de dé, des multiple de 6)*

Remarques 0.2. *Premières questions à se poser:*

- $P(X \in S) =?$

Définition 0.3. *Soit X une variable aléatoire. La loi de X (notée P_X) est une fonction $P_X : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$*

définie par $P_X(S) = P(\{X \in S\})$ avec $S \subset \mathbb{R}$

Proposition 0.1.

Etant donné une variable aléatoire X d'un univers fini Ω. Soit $S, S' \subset \Omega$.
Supposons $S \cap X(\Omega) = S' \cap X(\Omega)$ alors $P_X(S) = P_X(S')$

Démonstration 0.1.

$$\begin{aligned} P_X(S) = P(\{X \in S\}) &= P(\{w \in \Omega | X(w) \in S\}) \\ &= P(\{w \in \Omega | X(w) \in S \cap X(\Omega)\}) \\ &= P(\{w \in \Omega | X(w) \in S' \cap X(\Omega)\}) \\ &= \cdots = P_X(S') \end{aligned}$$

$\square$

Proposition 0.2.

Soit X une variable aléatoire d'un univers fini Ω. Soit $S \subset \mathbb{R}$.
Alors $P_X(S) = \sum_{x \in S \cap X(\Omega)} P_X(\{x\})$

Démonstration 0.2.

$$\begin{aligned}
P_X(S) &= P(\{w \in \Omega | X(w) \in S\}) \\
&= P(\{w \in \Omega | X(w) \in S \cap X(\Omega)\}) \\
&= P(\bigcup_{x \in S \cap X(\Omega)} \{w \in \Omega | X(w) = x\}) \\
&= \sum_{x \in S \cap X(\Omega)} P(\{w \in \Omega | X(w) = x\})
\end{aligned}$$

□

Remarques 0.3. *Pour définir la loi d'une variable aléatoire, il suffit de donner* $P(\{X = x\}) = P_X(\{x\})$ *pour tout* $x \in X(\Omega)$

Proposition 0.3.

Soit X une variable aléatoire d'un univers fini Ω.
$\sum_{x \in X(\Omega)} P_X(\{x\}) = 1$

Démonstration 0.3.

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in X(\Omega)} P_X(\{x\}) &= \sum_{x \in X(\Omega) \cap \mathbb{R}} P(\{x\}) \\
&= P_X(\mathbb{R}) \\
&= P(\{X \in \mathbb{R}\}) \\
&= P(\Omega) = 1
\end{aligned}$$

□

Proposition 0.4.

Soit X une variable aléatoire.
Soit $S, S' \subset \mathbb{R}$ tels que $S \cap S' = \emptyset$.
$P_X(S \cup S') = P_X(S) + P_X(S')$

Démonstration 0.4.

$$\begin{aligned}
P_X(S \cup S') &= P(\{w \in \Omega | X(w) \in S\} \cup \{w \in \Omega | X(w) \in S\}) \\
&= P(\{w \in \Omega | X(w) \in S\}) + P(\{w \in \Omega | X(w) \in S'\}) \\
&= P_X(S) + P_X(S')
\end{aligned}$$

□