

# Analyse | CM: 3

Par Lorenzo

19 septembre 2024

## 0.1 Propriété d'Archimède

L'ensemble  $\mathbb{R}$  est dit archimédien, i.e.  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, x < n$

### Proposition 0.1.

*Il existe un unique entier dans  $\mathbb{Z}$ , appelé la partie entière  $E$ , tel que  $E(x) \leq x < E(x) + 1$*

### Démonstration 0.1.

**Existence:** Supposons que  $x \geq 0$ . Comme  $\mathbb{R}$  est archimédien il existe un entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $x < n$ .

*Ainsi on peut trouver un autre entier  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $n \leq x$  et  $m < n$ . Il suffit de choisir  $m$  comme le plus grand entier inférieur ou égal à  $x$  et tel que  $m \leq x < m + 1$*

**Unicité:** Supposons qu'il existe 2 entiers tel que  $k \leq x < k + 1$  et  $l \leq x < l + 1$

Par transitivité, il vient  $k \leq x < l + 1$  et  $k < l + 1$ ,  
de même,  $l \leq x < k + 1$  et  $l < k + 1 \implies l - 1 < k$

*Finalement  $l - 1 < k < l + 1$  et comme entre les entiers l'entier  $l-1$  et  $l+1$  il n'y a que  $l$ , alors  $k = l$*

□

### Exemple 0.1.

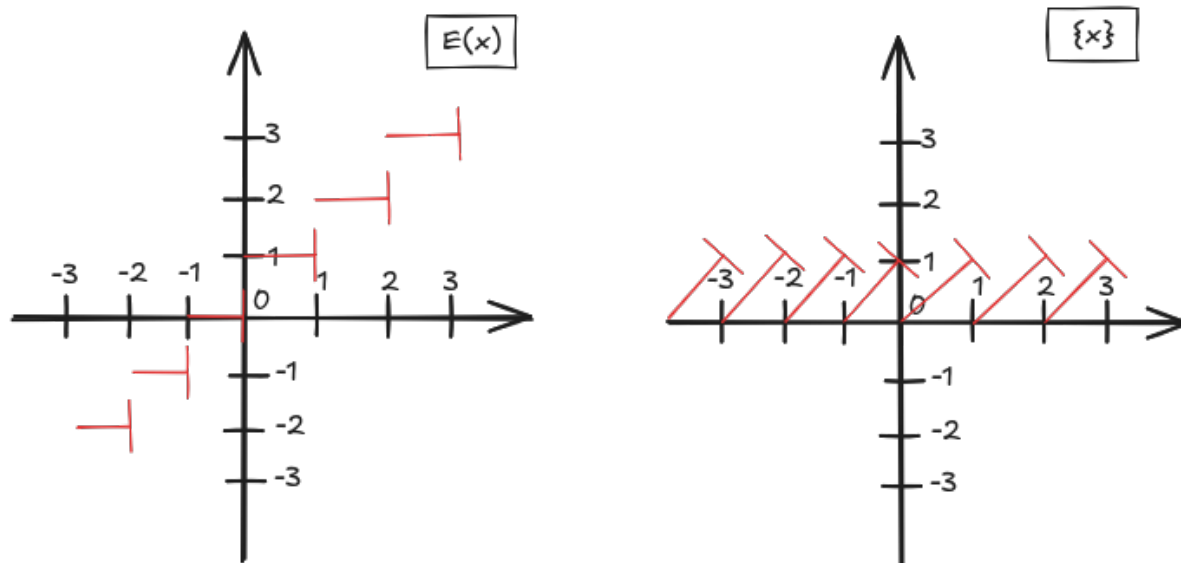
$x = 3.14, E(x) = 3.$

$x = -12.2, E(x) = -13.$

### Remarques 0.1.

On note parfois  $E(x) = [x] = \lfloor x \rfloor$

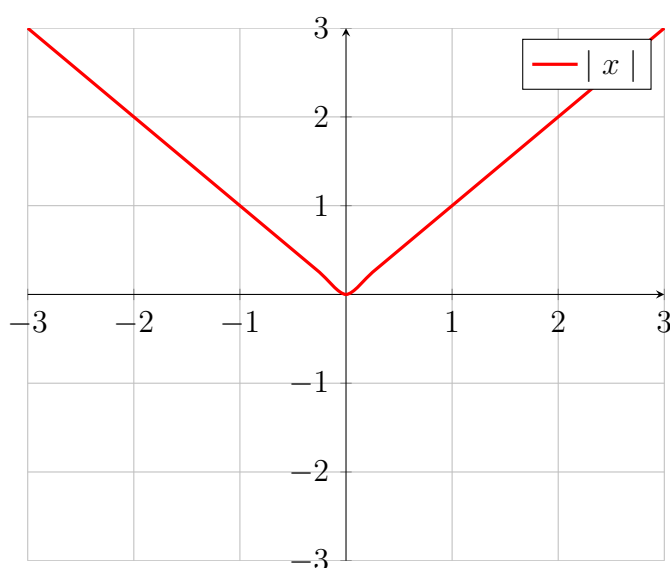
On note  $\{x\}$ , la partie fractionnaire (e.g.  $\{3.14\} = 0.14$ )



## 0.2 La valeur absolue

**Définition 0.1.** Soit  $x$  un nombre réel. La valeur absolue de  $x$  est le nombre réel positif défini par

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (1)$$



Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}$

**Propriétés 0.1.**

$$|a| \geq 0, \quad a \leq |a|, \quad -|a| \leq a, \quad |-a| = |a|$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$|ab| = |a||b|$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, |a^n| = |a|^n$$

si  $a \neq 0$ ,  $|\frac{1}{a}| = \frac{1}{|a|}$  et  $|\frac{b}{a}| = \frac{|b|}{|a|}$

Pour  $b \geq 0$ ,

$$|a| = b, \text{ si et seulement si } a = b \text{ ou } a = -b$$

$$|a| \leq b \text{ si et seulement si } -b \leq a \leq b \text{ (beaucoup utilisé pour passer de } a \text{ à } |a|)$$

$$|a| \geq b \text{ si et seulement si } a \leq -b \text{ ou } a \geq b$$

$$|a + b| \leq |a| + |b| \text{ (l'inégalité triangulaire)}$$

$$||a| - |b|| \leq |a - b| \text{ (l'inégalité triangulaire inversée)}$$

Les propriétés 1 à 6 sont démontrés par la définition de la valeur absolue

Démontrons la propriété 7.

### Démonstration 0.2.

D'après (1)  $-|a| \leq a \leq |a|$  et  $-|b| \leq b \leq |b|$

En additionnant, on obtient  $-|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b|$

$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$  avec (6) on arrive à

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

□

Démontrons la propriété 8.

### Démonstration 0.3.

$$a = a - b + b \quad \text{et} \quad |a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b| \text{ (propriété 7)}$$

$$|a| \leq |a - b| + |b| \implies |a| - |b| \leq |a - b|$$

de même,

$$b = b - a + a \quad \text{et} \quad |b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a|$$

$$|b| \leq |b - a| + |a| \implies |b| - |a| \leq |b - a|$$

$$|b - a| = |-(a - b)| = |a - b| \text{ et}$$

$$|a| - |b| \leq |a - b| \quad \text{et} \quad |b| - |a| = -(|a| - |b|) \leq |a - b|$$

Finalement par définition

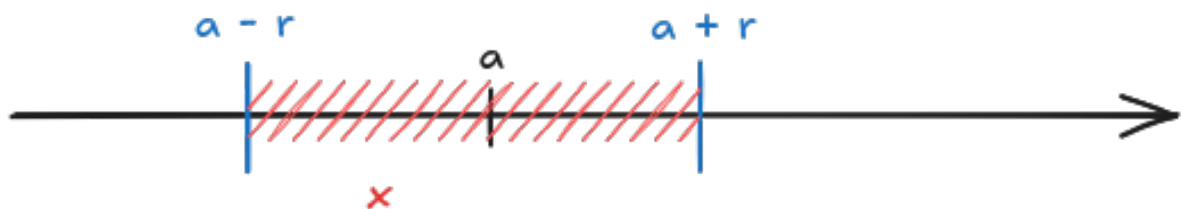
$$||a| - |b|| = \begin{cases} |a| - |b|, & \text{si } |a| - |b| \geq 0 \\ -(|a| - |b|), & \text{si } |a| - |b| < 0 \end{cases}$$

Ainsi  $||a| - |b|| \leq |a - b|$

□

Corollaire: Soit  $r$  un réel positif  $\forall x, a \in \mathbb{R}$ , on a  $|x - a| < r \implies -r < x - a < r \implies a - r < x < a + r$

**Remarques 0.2.** La valeur absolue  $|b - a|$  représente la distance entre  $a$  et  $b$



# 1 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

## 1.1 Intervalles de $\mathbb{R}$

**Définition 1.1.** On appelle intervalle de  $\mathbb{R}$ , tout sous-ensemble  $I$  de  $\mathbb{R}$  vérifiant  $\forall a, b \in I, a \leq b$  et  $x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b \implies x \in I$

**Remarques 1.1.** Un sous-ensemble ou partie  $I$  de  $\mathbb{R}$ , se note  $I \subset \mathbb{R}$

**Définition 1.2.** Soient  $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$

On appelle intervalle fermé et borné (ou segment) de  $\mathbb{R}$  tout l'ensemble de la forme  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

On appelle intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  tout l'ensemble de la forme  $]a, b[ = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$  ou  $]a, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$  ou  $]-\infty, b[ = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

**Remarques 1.2.** L'ensemble qui contient aucun élément est l'ensemble vide, noté  $\emptyset$

**Remarques 1.3.** L'ensemble qui contient un seul élément est le singleton, noté  $\{a\} = [a, a]$

**Remarques 1.4.**  $x \in [a, b] \equiv \exists t \in [0, 1], x = (1 - t)a + tb$

**Définition 1.3.** On dit que  $V$  est un voisinage de  $a$  si  $\exists \epsilon > 0, [a - \epsilon, a + \epsilon] \subset V$

## 1.2 Densité

**Théorème 1.1.**  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , tout intervalle ouvert, non vide de  $\mathbb{R}$  contient une infinité de nombres rationnels

**Théorème 1.2.**  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , tout intervalle ouvert, non vide de  $\mathbb{R}$  contient une infinité de nombres irrationnels

**Démonstration 1.1.**

On cherche  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$  tel que  $a < \frac{p}{q} < b \implies aq < p < bq$

comme  $\mathbb{R}$  est archimédien, il existe un entier  $q$  tel que  $q > \frac{1}{b-a} \implies \frac{1}{q} < b-a$

Prenons  $p = E(aq) + 1$

$p = E(aq) + 1 \implies p - 1 = E(aq) \leq aq < E(aq) + 1 = p$

On divise par  $q$  l'inégalité  $p - 1 \geq aq < p + 1$

$\implies \frac{p-1}{q} = \frac{p}{q} - \frac{1}{q} \leq a < \frac{p}{q}$

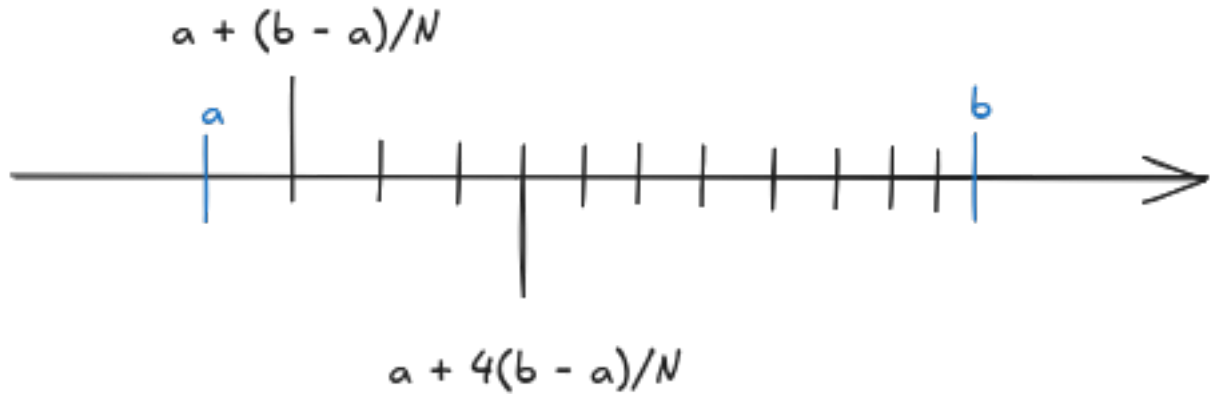
Ainsi  $\frac{p}{q} - \frac{1}{q} \leq a \implies \frac{p}{q} \leq a + \frac{1}{q} < a + (b-a) = b$

Finalemt  $a < \frac{p}{q} < b$

Il existe un nombre rationnels  $\frac{p}{q}$  compris entre  $a$  et  $b$ .

On divise l'intervalle  $]a, b[$  en  $N$  sous-intervalles disjoints 2 à 2

$$]a, b[ = ]a, a + \frac{b-a}{N} [ \cup ]\frac{b-a}{N}, a + 2\frac{b-a}{N} [$$



*Donc pour chaque intervalle on peut trouver un rationnels, on peut ensuite faire tendre  $N$  vers l'infini pour trouver un infinité de rationnels*

□

### Démonstration 1.2.

*D'après notre démonstration précédente il existe un infinité de rationnels pour*  

$$a - \sqrt{2} < \frac{p}{q} < b - \sqrt{2} \implies a < \frac{p}{q} + \sqrt{2} < b$$

*On en arrive avec la même logique que la démonstration précédente qu'il existe une infinité d'irrationnels entre deux réels.*

□

## 2 Bornes sur $\mathbb{R}$

### 2.1 Maximum et minimum

**Définition 2.1.** *Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ . Un réel  $M$  est le plus grand (resp. le plus petit) élément de  $A$  si  $M \in A$  et  $\forall x \in A, x \leq M$  (resp.  $\forall x \in A, x \geq m$ ).*

*Si il existe, le plus grand élément est unique et on le note  $\max A$ .*

*Si il existe, le plus petit élément est unique et on le note  $\min A$ .*