Analyse2 | CM: 6

Par Lorenzo

27 février 2025

Proposition 0.1 (Unicité d'un développement limité)**.**

Soient $n \in \mathbb{N}$, f une fonction définie sur I et $a \in I$.
Si f admet un $DL_n(a)$, alors ce DL est unique. Autrement dit:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k + o((x-a)^n) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x-a)^k + o((x-a)^n) \implies \forall k \in [\![0,n]\!], a_k = b_k$$

Démonstration 0.1.

Par l'absurde, supposons que $a_k \neq b_k$ pour un certain $k \in [\![0,n]\!]$. Soit k le plus petit tel que $a_k \neq b_k$.
On a alors:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} b_k(x-a)^k + o((x-a)^n) \end{aligned}$$

En prenant le plus petit k_0 dans $[\![0,n]\!]$ tel que $a_{k_0} \neq b_{k_0}$, on a:

$$\begin{aligned} f(x) &= c_{k_0}(x-a)^k_0 + o((x-a)^{k_0}) \\ &= b_{k_0}(x-a)^k_0 + o((x-a)^{k_0}) \\ &\implies (c_{k_0} - b_{k_0})(x-a)^{k_0} \underset{x \to a}{=} o((x-a)^{k_0}) \end{aligned}$$

Ainsi on a $c_{k_0} - b_{k_0} \underset{x \to a}{=} o(1) \implies c_{k_0} - b_{k_0} = 0 \implies a_{k_0} = b_{k_0}$, ce qui est absurde.

$\square$

Proposition 0.2.

Démonstration 0.2.

Soit f une fonction paire admettant un $DL_n(0)$ tel qu'au voisinage de 0,
$f(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + o(x^n)$ alors au voisinage de 0,
$f(-x) = c_0 - c_1 x + \ldots + (-1)^n c_n x^n + o(x^n)$

Ainsi par la parité de f et l'unicité d'un DL on peut identifier les coefficients correspondants:

$c_1 = -c1, c_3 = -c_3, \ldots, c_n = (-1)^n c_n$ *ou encore* $c_1 = c_3 = \ldots = c_n = 0$.

Ainsi tous les coefficients impairs du DL de f sont nuls. D'où la partie principale est paire.

Faire le même raisonnement pour une fonction impaire.

$\square$