Analyse — CM: 6

Par Lorenzo

10 octobre 2024

Propriétés 0.1.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, tel que* $lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{v_n} = 0$$

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est minorée, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$$

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est minorée par un réel strictement positif, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = +\infty$$

Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$*, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$$

Théorème 0.1. *Toute suite convergente est bornée.*

Démonstration 0.1.

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui converge vers* l*.*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon$$

On écrit $u_n = u_n - l + l$ *ainsi* $|u_n| = |(u_n - l) + l| \leq |u_n - l| + |l|$
En outre $\forall n \geq N, |u_n| \leq \varepsilon + |l|$
De plus $\forall n < N, |u_n| \leq \max(u_0, u_1, ..., u_{n-1})$

$$\boxed{\textit{Finalement } \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq \max(u_0, u_1, ..., u_{n-1}, \varepsilon + |l|)}$$

$\square$

Corollaire 0.1. *Si la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée et* $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$ *alors* $\lim_{n\to\infty}(u_n \times v_n) = 0$

0.0.1 Formes indéterminées

On parle de formes indéterminées, lorsque à priori on ne peut rien dire sur la limite.
Il s'agit de limite de type:

- $+\infty - \infty$
- $0 \times \infty$
- $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, a^{∞}

Dans ce cas il faut étudier plus précisement la suite.
Par exemple en utilisant les croissances comparées

0.0.2 Quelques innégalités

Propriétés 0.2.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites convergentes telles que* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n$$

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telles que* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \implies \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$$