0.1 Série à termes de signe non fixé

Définition 0.1.
Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *une série. On dit qu'elle converge* ***absolument*** *si la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ *converge.*

Proposition 0.1

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ une série qui converge absolument. Alors elle converge.

Démonstration 0.1.
Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ *et* $S'_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k|$*. Comme* $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ *converge, la suite* $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy. Donc, pour tout* $\epsilon > 0$*, il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour tous* $m, n \geq N$*, on a*

$$|S'_n - S'_m| = \sum_{k=m+1}^{n} |u_k| < \epsilon.$$

Or, par inégalité triangulaire, on a

$$|S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} u_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |u_k| = |S'_n - S'_m|.$$

Donc, pour tous $m, n \geq N$*, on a*

$$|S_n - S_m| < \epsilon.$$

Ainsi, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy et donc converge. Par conséquent, la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *converge.*

□

Définition 0.2.
Soit $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)$ *une série est dite alternée si pour tout* $n, u_n \times u_{n+1} \leq 0$.

Théorème 0.1

Démonstration 0.2.

Soit S_n *la suite des sommes partielles. On va démontrer que* (S_{2n}, S_{2n+1}) *sont adjacentes.*

Sans perte de généralité la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ *avec* $a_n \geq 0$ *et* $u_n = (-1)^n a_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ *on a*

$$\begin{aligned} S_{2n+1} - S_{2n} &= a_{2n+1} \to 0 \\ S_{2n+2} - S_{2n} &= a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq 0 \\ S_{2n+3} - S_{2n+1} &= a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq 0 \end{aligned}$$

Ce qui démontre que les deux suites sont effectivement adjacentes. Donc la suite des sommes partielles converge, et la série converge.

On a alors $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$ *et donc* $|S - S_n| \leq a_{n+1} = |u_{n+1}|$.

□

Exemple 0.1. *La série* $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ *converge*