

width=10cm,compat=1.9

## 0.1 Propriété d'Archimède

L'ensemble  $\mathbb{R}$  est dit archimédien, i.e.  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, x < n$

### Proposition 0.1

Il existe un unique entier dans  $\mathbb{Z}$ , appelé la partie entière  $E$ , tel que  $E(x) \leq x < E(x) + 1$

#### Démonstration 0.1.

**Existence:** Supposons que  $x \geq 0$ . Comme  $\mathbb{R}$  est archimédien il existe un entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $x < n$ .

Ainsi on peut trouver un autre entier  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $n \leq x$  et  $m < n$ . Il suffit de choisir  $m$  comme le plus grand entier inférieur ou égal à  $x$  et tel que  $m \leq x < m + 1$

**Unicité:** Supposons qu'il existe 2 entiers tel que  $k \leq x < k+1$  et  $l \leq x < l+1$

Par transitivité, il vient  $k \leq x < l+1$  et  $k < l+1$ ,

de même,  $l \leq x < k+1$  et  $l < k+1 \implies l-1 < k$

Finalement  $l-1 < k < l+1$  et comme entre les entiers l'entier  $l-1$  et  $l+1$  il n'y a que  $l$ , alors  $k = l$

□

#### Exemple 0.1.

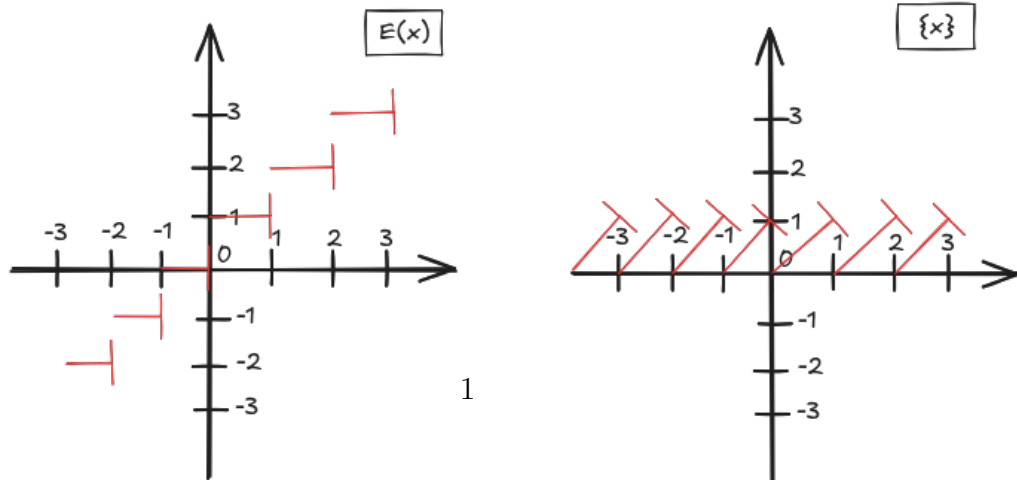
$x = 3.14$ ,  $E(x) = 3$ .

$x = -12.2$ ,  $E(x) = -13$ .

#### Remarque 0.1.

On note parfois  $E(x) = [x] = \lfloor x \rfloor$

On note  $\{x\}$ , la partie fractionnaire (e.g.  $\{3.14\} = 0.14$ )



## 0.2 La valeur absolue

### Définition 0.1.

### Propriétés 0.1

1.  $|a| \geq 0, \quad a \leq |a|, \quad -|a| \leq a, \quad |-a| = |a|$
2.  $\sqrt{a^2} = |a|$
3.  $|ab| = |a||b|$
4.  $\forall n \in \mathbb{Z}, |a^n| = |a|^n$
5. si  $a \neq 0, \left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|}$  et  $\left|\frac{b}{a}\right| = \frac{|b|}{|a|}$
6. Pour  $b \geq 0$ ,  
 $|a| = b$ , si et seulement si  $a = b$  ou  $a = -b$   
 $|a| \leq b$  si et seulement si  $-b \leq a \leq b$  (beaucoup utilisé pour passer de  $a$  à  $|a|$ )  
 $|a| \geq b$  si et seulement si  $a \leq -b$  ou  $a \geq b$
7.  $|a + b| \leq |a| + |b|$  (l'inégalité triangulaire)
8.  $||a| - |b|| \leq |a - b|$  (l'inégalité triangulaire inversée)

Les propriétés 1 à 6 sont démontrés par la définition de la valeur absolue  
Démontrons la propriété 7.

### Démonstration 0.2.

*D'après (1)  $-|a| \leq a \leq |a|$  et  $-|b| \leq b \leq |b|$   
En additionnant, on obtient  $-|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b|$   
 $-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$  avec (6) on arrive à  
 $|a + b| \leq |a| + |b|$*

□

Démontrons la propriété 8.

### Démonstration 0.3.

$a = a - b + b$  et  $|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$  (propriété 7)  
 $|a| \leq |a - b| + |b| \implies |a| - |b| \leq |a - b|$

de même,

$b = b - a + a$  et  $|b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a|$   
 $|b| \leq |b - a| + |a| \implies |b| - |a| \leq |b - a|$   
 $|b - a| = |-(a - b)| = |a - b|$  et

$$|a| - |b| \leq |a - b| \quad \text{et} \quad |b| - |a| = -(|a| - |b|) \leq |a - b|$$

Finalement par définition

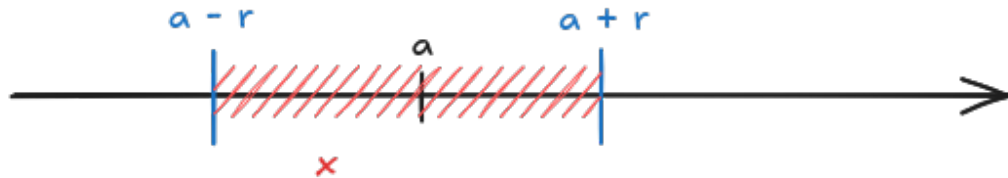
$$||a| - |b|| = \begin{cases} |a| - |b|, & \text{si } |a| - |b| \geq 0 \\ -(|a| - |b|), & \text{si } |a| - |b| < 0 \end{cases}$$

Ainsi  $||a| - |b|| \leq |a - b|$

□

Corollaire: Soit  $r$  un réel positif  $\forall x, a \in \mathbb{R}$ , on a  $|x - a| < r \implies -r < x - a < r \implies a - r < x < a + r$

**Remarque 0.2.** La valeur absolue  $|b - a|$  représente la distance entre  $a$  et  $b$



## 1 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

### 1.1 Intervalles de $\mathbb{R}$

#### Définition 1.1.

On appelle intervalle de  $\mathbb{R}$ , tout sous-ensemble  $I$  de  $\mathbb{R}$  vérifiant  $\forall a, b \in I, a \leq b$  et  $x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b \implies x \in I$

**Remarque 1.1.** Un sous-ensemble ou partie  $I$  de  $\mathbb{R}$ , se note  $I \subset \mathbb{R}$

#### Définition 1.2.

Soient  $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$

On appelle intervalle fermé et borné (ou segment) de  $\mathbb{R}$  tout l'ensemble de la forme

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

On appelle intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  tout l'ensemble de la forme

$$]a, b[ = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \quad \text{ou} \quad ]a, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$

$$\text{ou} \quad ]-\infty, b[ = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

**Remarque 1.2.** L'ensemble qui contient aucun élément est l'ensemble vide, noté  $\emptyset$

**Remarque 1.3.** L'ensemble qui contient un seul élément est le singleton, noté  $\{a\} = [a, a]$

**Remarque 1.4.**  $x \in [a, b] \equiv \exists t \in [0, 1], x = (1 - t)a + tb$

**Définition 1.3.**

On dit que  $V$  est un voisinage de  $a$  si  $\exists \epsilon > 0, [a - \epsilon, a + \epsilon] \subset V$

## 1.2 Densité

**Théorème 1.1**

$\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , tout intervalle ouvert, non vide de  $\mathbb{R}$  contient une infinité de nombres rationnels

**Théorème 1.2**

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , tout intervalle ouvert, non vide de  $\mathbb{R}$  contient une infinité de nombres irrationnels

**Démonstration 1.1.**

On cherche  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$  tel que  $a < \frac{p}{q} < b \implies aq < p < bq$

comme  $\mathbb{R}$  est archimédien, il existe un entier  $q$  tel que  $q > \frac{1}{b-a} \implies \frac{1}{q} < b-a$

Prenons  $p = E(aq) + 1$

$p = E(aq) + 1 \implies p - 1 = E(aq) \leq aq < E(aq) + 1 = p$

On divise par  $q$  l'inégalité  $p - 1 \geq aq < p + 1$

$\implies \frac{p-1}{q} = \frac{p}{q} - \frac{1}{q} \leq a < \frac{p}{q}$

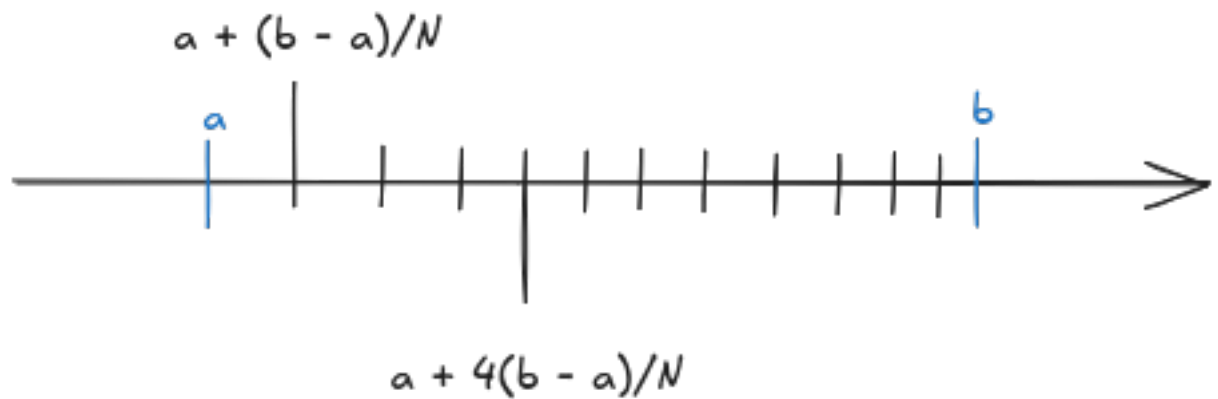
Ainsi  $\frac{p}{q} - \frac{1}{q} \leq a \implies \frac{p}{q} \leq a + \frac{1}{q} < a + (b-a) = b$

Finalement  $a < \frac{p}{q} < b$

Il existe un nombre rationnels  $\frac{p}{q}$  compris entre  $a$  et  $b$ .

On divise l'intervalle  $]a, b[$  en  $N$  sous-intervalles disjoints 2 à 2

$]a, b[ = ]a, a + \frac{b-a}{N} \cup ]a + \frac{b-a}{N}, a + 2\frac{b-a}{N} \cup \dots \cup ]a + (N-1)\frac{b-a}{N}, b[$



*Donc pour chaque intervalle on peut trouver un rationnels, on peut ensuite faire tendre  $N$  vers l'infini pour trouver un infinité de rationnels*

□

### Démonstration 1.2.

*D'après notre démonstration précédente il existe un infinité de rationnels pour*

$$a - \sqrt{2} < \frac{p}{q} < b - \sqrt{2} \implies a < \frac{p}{q} + \sqrt{2} < b$$

*On en arrive avec la même logique que la démonstration précédente qu'il existe une infinité d'irrationnels entre deux réels.*

□

## 2 Bornes sur $\mathbb{R}$

### 2.1 Maximum et minimum

#### Définition 2.1.

*Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ . Un réel  $M$  est le plus grand (resp. le plus petit) élément de  $A$  si  $M \in A$  et  $\forall x \in A, x \leq M$  (resp.  $\forall x \in A, x \geq m$ ).*

*Si il existe, le plus grand élément est unique et on le note  $\max A$ .*

*Si il existe, le plus petit élément est unique et on le note  $\min A$ .*