0.1 Critères de d'Alembert et de Cauchy

Proposition 0.1: Critère de d'Alembert

Soit $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)$ une série atp telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to l$:

1. Si $l < 1$ la série converge.
2. Si $l > 1$ la série diverge.

Démonstration 0.1.

(Pour 2)

$\exists M, n \geq M, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ *ainsi* $u_{n+1} \geq u_n$ *donc* (u_n) *ne converge pas vers 0, la série diverge.*

(Pour 1)

Par la définition de la limite,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \geq N, n \geq M \implies l - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \varepsilon + l$$

en particulier pour $\varepsilon = \frac{1-l}{2} > 0$

$$\exists M, n \geq M \implies \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{l+1}{2}$$

Sans perte de généralité puisqu'on ne change pas la convergence en changeant un nombre fini de termes $M = 0$ *et donc*

$$\forall n, u_{n+1} < \frac{l+1}{2} u_n$$

puis par récurence

$$\forall n, u_n < \left(\frac{l+1}{2}\right)^n u_0$$

Comme $\frac{l+1}{2} \in [0, 1[$ *la série de terme général* $\left(\frac{l+1}{2}\right)^n u_0$ *converge (c'est une série géométrique convergente), d'après la proposition de comparaison ci-dessus la série de terme général* u_n *converge également*

à revoir

$\square$

faire des exemples

Faire la même avec critère de Cauchy

Proposition 0.2

Soit $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)$ série numérique atp et telle que $u_n > 0$ pour n assez grand. $\exists L \in [0, +\infty[, \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \to L \implies (\sqrt[n]{u_n})$...