Algebre Lineaire | CM: 2

Par Lorenzo

24 janvier 2025

Remarques 0.1. .

- *Le produit de deux matrices n'est pas commutatif.*
- *On peut multiplier deux matrices non nulls et obtenir une matrice nulle.*

Ainsi on dit que l'ensemble $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ possède des diviseurs de zéro.

0.1 Partitionnement par blocs

Définition 0.1. *Les sous matrices permettent un partitionnement par blocs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, on peut écrire A sous la forme:*

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{1,1} & \cdots & A_{1,p} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{q,1} & \cdots & A_{q,p} \end{array}\right)$$

où pour chaque $i \in \{1, \cdots r\}$, les matrice A_{ik} ont le même nombre de lignes pour tout $k \in \{1, \cdots m\}$.

0.2 Inverse et puissance

Définition 0.2. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $A^0 = Id_n$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, A^k est défini par récurrence par : $A^k = AA^{k-1}$*

Propriétés 0.1.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $k \in \mathbb{N}^*$, alors $A^k = A \times A \times \cdots \times A$ (k fois). où le facteur A intervient k fois.

Définition 0.3. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que A est inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = BA = Id_n$. Dans ce cas, on note $B = A^{-1}$. On note $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Remarques 0.2. *La notation $\mathcal{GL}$ veut dire "Groupe Linéaire" et provient du fait que l'ensemble des matrices inversibles muni de la multiplication des matrices est un groupe.*

Proposition 0.1.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si A est inversible, il existe une unique matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = Id_n$. Cette matrice s'appelle l'inverse de A et est notée A^{-1}.

Démonstration 0.1.

S'il existe deux matrices B et B' telles que $AB = BA = Id_n = AB' = B'A$ alors $B' = B'Id_n = B'(AB) = (B'A)B = Id_nB = B$

$\square$

Proposition 0.2.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = Id_n$, alors A est inversible et $B = A^{-1}$. Il suffit donc de vérifier le produit d'un seul coté.

Proposition 0.3.

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si AB est inversible alors $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Démonstration 0.2.

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1}A^{-1}) = AId_nA^{-1} = AA^{-1} = Id_n$

$\square$

Proposition 0.4.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ possède une unique solution $X = A^{-1}B$

Démonstration 0.3.

$AX = B \implies A^{-1}(AX) = A^{-1}B \implies (A^{-1}A)X = A^{-1}B \implies X = A^{-1}B$

$\square$

0.3 Système linéaire

Définition 0.4. *Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. Un système linéaire de n équations linéaire à p inconnues (à coefficients dans $\mathbb{K}$) s'écrit:*

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

Les coefficients $a_{i,j}$ et b_i pour $i \in \{1, \cdots, n\}$ et $j \in \{1, \cdots, p\}$ sont des éléments de $\mathbb{K}$. Les coefficients $x_1, \cdots, x_p$ sont les inconnues du système.

On appelle solution du système linéaire tout p-uplet $(x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que les équations du système sont vérifiées.

Définition 0.5. *Un système linéaire de n équations à n équations est régulier ou de Cramer, s'il possède une unique solution. Un système linéaire de n équations linéaires à p inconnues est dit compatible quand il a au moins une solution.*

Définition 0.6. *Deux système linéaire (L1) et (L2) à p inconnues $x_1, \cdots, x_p$ sont équivalents si $S(L1) = S(L2)$.*

Définition 0.7. *Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\alpha, \lambda \in \mathbb{K}, \alpha \neq 0$*

1. *Notons A' la matrice obtenue à partir de A en multipliant par la α la qième ligne de A, $q \in \{1, \cdots, n\}$. Les autres lignes restant inchangées.*

2. *Notons A" (resp A"') la matrice obtenue à partir de A en échangeant les lignes q et k de A (resp. en ajotant à la qième ligne de A le produit de λ de la kième ligne de A). $q, k \in \{1, \cdots, n\}$, $q \neq k, n \geq 2$, les autres lignes restant inchangées. On dit que les matrices A', A", A"' se déduisent de A par opération élémentaire sur les lignes.*