0.1 Séries à termes positifs

Définition 0.1. *Série à termes positifs (atp)*
On appelle série à termes positifs (atp) toute série numérique dont les termes sont positifs à partir d'un certain rang, c'est-à-dire
Soit $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)$, *on dit que c'est une série atp si*

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq 0$$

Remarque 0.1. *Comme on l'a vu l'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel, donc en multipliant par -1 une série à termes négatifs on obtient une série à termes positifs.*

Proposition 0.1: Critère de comparaison pour les séries atp

Soit $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)$ et $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$ deux séries atp telles que

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq v_n$$

Alors

1. Si $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$ converge alors $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)$ converge.
2. Si $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)$ diverge alors $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$ diverge.

Démonstration 0.1.
On a par hypothèse $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$ *(en négligeant les premiers termes).*

1. *Si* $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$ *converge alors* $(S_n(v))$ *converge et est majorée par sa limite (car c'est une suite croissante). Comme* $(S_n(u))$ *est croissante et majorée par* $(S_n(v))$*, elle converge également.*
2. *Si* $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)$ *diverge alors* $(S_n(u))$ *diverge vers* $+\infty$ *(car c'est une suite croissante). Comme* $(S_n(v))$ *est croissante et minorée par* $(S_n(u))$*, elle diverge également vers* $+\infty$.

$\square$

Exemple 0.1. *Étudier la convergence de la série* $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n+1}\right)$.

On a $0 \leq \frac{1}{n^2+n+1} \leq \frac{1}{n^2}$ *Or la série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ *est une série de Riemann convergente (car* $2 > 1$*). Donc par le critère de comparaison, la série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n+1}$ *converge également.*

Remarque 0.2. *Le critère ne nous dit rien sur la somme de la série, ça nous dit juste si elle converge ou diverge.*

Définition 0.2.
Deux suites (u_n) *et* (v_n) *sont dites équivalentes si*

$$\exists\, (w_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, w_n \to 1, u_n = v_n w_n$$

Proposition 0.2: Critère par équivalents pour les séries atp

Soit $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)$ et $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$ deux séries atp telles que

$$u_n \sim v_n$$

Alors les deux séries sont de même nature (convergentes ou divergentes en même temps).

Démonstration à faire

Exemple 0.2. *Étudier la convergence de la série* $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)$.

On a $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$. *Or la série* $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\right)$ *est la série harmonique qui est divergente. Donc par le critère par équivalents, la série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ *diverge également.*