

Ensemble Complex

Par Lorenzo

24 November 2024

Contents

1	Méthodes de démonstration 1	1
1.1	Implication	1
1.2	Règle d'inférence ("Dédution naturelle")	1
1.3	Disjonction de cas	2
1.4	La double implication	2
1.5	Raisonnement par contraposée	3
1.6	Raisonnement par l'absurde	3
2	Logique avec quantificateurs	3
3	Méthodes de démonstration 2	4
3.1	Unicité d'un objet	4
3.2	Analyse synthèse	5
3.3	Définition de \mathbb{N} par récurrence	5
4	Théorie des ensembles	6
4.1	Opérations sur les ensembles	6
5	Relation et permutations	9
6	Permutations	10
7	Ensemble et nombres complexes	10
	Arrivé apres le premier CM (cours à venir)	

1 Méthodes de démonstration 1

1.1 Implication

Pour démontrer un énoncé du type $P \implies Q$ (Si P alors Q)

Méthode 1.1.

*On suppose P .
raisonnement profond.
on en conclut Q .*

Exemple 1.1.

Démontrons que $x \in \mathbb{R} \implies x + 1 \in \mathbb{R}_+$

On suppose $x \in \mathbb{R}$

$$x \geq 0$$

$$x + 1 \geq 0 + 1 \geq 0$$

Donc $x + 1 \in \mathbb{R}_+$

Remarques 1.1. $A \subset B$ ($A, B \subset E$) par définition se traduit par $\forall x \in E, x \in A \implies x \in B$

1.2 Règle d'inférence ("Dédution naturelle")

Supposons A, B deux formules logiques dépendant d'énoncés élémentaires P, Q, R, ... Imaginons que pour chaque ligne de la table de vérité où A est vrai, B l'est également. Ainsi lorsqu'on a A on pourra déduire B

Exemple 1.2. *Supposons $P \implies P \vee Q$*

Quand P est vrai $P \vee Q$ est vrai.

1.3 Disjonction de cas

De même une tautologie est une règle qui est toujours vraie. Un exemple $(P \vee \neg Q)$.

Exemple 1.3. *Théorème si $x \in \mathbb{N}$ alors $x(x + 1)$ pair.*

Si x est pair alors $x = 2k, k \in \mathbb{N}$.

$x(x + 1) = 2(k(x + 1))$ est pair.

Si x est impair $x + 1$ est pair implique $\exists k \in \mathbb{N}, (x + 1) = 2k$.

$x(x + 1) = x + 2k = 2(kx)$ implique $x(x + 1)$ pair.

Conclusion: Dans tous les cas $x(x + 1)$ est pair.

C'est un raisonnement par disjonction de cas.

Méthode 1.2.

Plus généralement si $A \vee B \vee C \vee \dots$ est une tautologie alors la méthode de la démonstration

1) Suppose A

raisonnement profond

conclusion

2) Suppose B

raisonnement profond

même conclusion

3) ...

Donc la conclusion est vrai dans tous les cas

Remarques 1.2. Pour trouver des synonyme en regardant toute les valeurs dans une table de vérités, on utilise une disjonction de cas.

Exemple 1.4. Soit un entier n , n est impair ou n^2 est un multiple de 4.

Supposons que n ne soit pas impair.

Alors n est pair, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$

Ainsi $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$.

n^2 est un multiple de 4.

1.4 La double implication

Si vous souhaitez montrer que $P \iff Q$, il suffit de montrer $P \implies Q$ et $Q \implies P$.

Exemple 1.5. $x \in \mathbb{N} \iff x + 1 \in \mathbb{N}^*$

1) Supposons que $x \in \mathbb{N}$, donc $x \geq 0 \implies x + 1 \geq 1$

Ainsi $x + 1 \in \mathbb{N}^*$

2) Supposons que $x + 1 \in \mathbb{N}^*$, donc $x + 1 \geq 1 \implies x + 1 - 1 \geq 1 - 1 \implies x \geq 0$.

La soustraction est stable sur \mathbb{Z} , de plus $x \geq 0$ donc $x \in \mathbb{Z}_+ \equiv \mathbb{N}$

Remarques 1.3. Régulièrement utilisé pour montre que deux ensembles sont égaux, on montre $A \subset B$ et $B \subset A$. Cela s'appelle la **double inclusion**.

1.5 Raisonnement par contraposée

$P \implies Q$ est synonyme à $\neg Q \implies \neg P$, ça se prouve facilement en comparant leurs tables de vérités.

Exemple 1.6. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que si n^2 alors n est pair.

Supposons que n est impair, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$, $n = 2k + 1$

Ainsi $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ est impair.

n impair implique n^2 impair donc n^2 pair implique n pair (la proposition de base).

1.6 Raisonnement par l'absurde

Pour montrer que P est vrai, on peut supposer P faux et arriver à une contradiction.

Exemple 1.7. Montrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration 1.1.

On suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel, i.e. on peut écrire $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ (et $\text{pgcd}(a, b) = 1$).

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \implies 2 = \frac{a^2}{b^2} \implies 2b^2 = a^2$$

Ainsi a^2 est pair et avec le raisonnement précédent a est aussi pair (donc $a = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$).

$$2b^2 = (2k)^2 \implies 2b^2 = 4k^2 \implies b^2 = 2k^2$$

Ainsi b^2 est pair et b aussi.

Absurde a et b sont premiers entre eux, ils ne peuvent pas être tous les deux multiple de 2.

□

2 Logique avec quantificateurs

Quand on utilise des quantificateurs il y a des règles à suivre:

Règle numéro 1: Toute lettre dans un énoncé doit être introduite par un quantificateur.

Règle numéro 2: Cette introduction doit se faire avant la première occurrence de la variable.

Règle numéro 3: On doit toujours préciser à quel ensemble appartient la variable.

Méthode 2.1.

Quand on veut montrer un énoncé universel $(\forall x \in X, P(x))$

1) **"Soit $x \in X$, montrons $P(x)$."**

2) ***raisonnement profond.***

3) ***On montre $P(x)$.***

Exemple 2.1. $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{x}{x^2 + 1} \geq \frac{-1}{2}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2 + 1} \geq -\frac{1}{2} &\implies 2x \geq -(x^2 + 1) \\ &\implies (x^2 + 2x + 1) \geq 0 \\ &\implies (x + 1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Pour donner un nom à une quantité/un objet mathématique, on écrit:

Posons $A := \dots$, Notons A le \dots ou Soit $A := \dots$

Méthode 2.2.

Quand on veut montrer qu'il existe x appartenant à A vérifiant $P(x)$,

Soit on a en tête un exemple d'élément x dans A vérifiant $P(x)$

Posons $x = \dots$

Vérifions $x \in A$

Vérifions $P(x)$

Soit on essaye d'utiliser des théorèmes d'existence pour montrer qu'un tel x existe.

Remarques 2.1. *Les mêmes quantificateurs peuvent être intervertis mais pas quand ils sont différents (un \forall avec un \exists).*

3 Méthodes de démonstration 2

3.1 Unicité d'un objet

Nous croiserons régulièrement des énoncés du type: "Il y a au plus un élément $x \in X$ vérifiant $P(x)$ ".

Méthode 3.1.

Pour montrer qu'un ensemble X contient au plus un élément vérifiant une propriété P , on peut procéder ainsi.

- 1) *Soient x et x' deux élément de X vérifiant P , montrons $x = x'$*
- 2) *Raisonnement profond.*
- 3) *On en conclut l'unicité d'un élément vérifiant P .*

Remarques 3.1. *L'unicité ne veut pas dire qu'on a montré l'existence.*

Exemple 3.1. *Soit $n \in \mathbb{N}$ Montrer qu'il existe au plus un multiple de 10 dans $X = \{n, n+1, \dots, n+5\}$*

Démonstration 3.1.

Soient $k, k' \in [0, 5]$ tel que $10 \mid n+k$ et $10 \mid n+k' \implies \exists p \in \mathbb{Z}, n+k = 10p$ et $\exists p' \in \mathbb{Z}, n+k' = 10p'$

Par soustraction $(n+k) - (n+k') = 10m - 10m' \implies (k-k') = 10(m-m')$

Or $-5 \leq (k-k') \leq 5$ et le seul multiple de 10 dans cette intervalle est 0.

Donc $k = k'$ et $n+k = n+k'$.

□

3.2 Analyse synthèse

Méthode 3.2.

Pour déterminer l'ensemble des éléments d'un ensemble E vérifiant une propriété P , on peut raisonner par analyse/synthèse.

Analyse: *soit $x \in E$. on suppose que x vérifie P .*

... on regarde les forme possible de x .

Synthèse: *Posons $x = \dots$ les différente formes possibles trouvées.*

Vérifions que x vérifie P (et appartient bien à E).

Exemple 3.2. *Trouvons les couples de nombres réels non-nuls (x, y) , solutions du système*

$$(S) \begin{cases} xy = 2 \\ \frac{y}{x} = 2 \end{cases}$$

Démonstration 3.2.

Analyse: Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$xy \times \frac{y}{x} = 2 \times 2 \implies y^2 = 4 \implies y = 2 \vee y = -2$$

La ligne 1 (de S) donne $x = \frac{2}{y}$

Donc les seuls couples possibles pour (x, y) sont $(1, 2)$ et $(-1, -2)$

Synthèse: On vérifie les deux couples trouvés.

$$1 = 2 \text{ et } \frac{2}{1} = 2 \text{ puis } -1 \times (-2) = 2 \text{ et } \frac{-2}{-1} = 2$$

Donc $(1, 2)$ et $(-1, -2)$ sont l'ensemble des couples qui sont solutions de S .

□

3.3 Définition de \mathbb{N} par récurrence

Définition 3.1. \mathbb{N} est l'ensemble construit par

\mathbb{N} contient un élément noté 0.

Chaque élément $n \in \mathbb{N}$ admet un unique successeur noté $\text{succ}(n) = n + 1$.

$$\forall x \in \mathbb{N}, [\text{succ}(x) \neq 0].$$

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, [\text{succ}(x) = \text{succ}(y) \implies x = y].$$

$$\forall A \subset \mathbb{N}, [(0 \in A \wedge (n \in A \implies \text{succ}(n) \in A)) \implies A = \mathbb{N}] \text{ (important pour la récurrence).}$$

Remarques 3.2. Avec cette notation par récurrence on peut définir \sum par

$$\sum_{i=1}^n a_i = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ (\sum_{i=1}^{n-1} a_i) + a_n & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Méthode 3.3.

Pour montrer une propriété P_n est vrai pour tout entier $n \geq n_0$.

Donner explicitement la propriété P_n .

Initialisation: On montre P_{n_0} .

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, tel que P_n est vraie.

Montrons que P_{n+1} .

Remarques 3.3. Il peut arrivé qu'on ne puisse pas déduire P_{n+1} de P_n mais seulement P_{n+2} à partir de P_{n+1} et P_n , on fait alors une récurrence double.

Méthode 3.4.

Si P_{n_0} et P_{n_0+1} sont vraies et si $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, (P_n \wedge P_{n+1} \implies P_{n+2})$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, P_n$ est vrai.

Il existe aussi une récurrence forte.

Méthode 3.5.

Si P_{n_0} est vraie et si $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, (\forall k \in \mathbb{N}, n_0 \leq k \leq n, P_k \implies P_{n+1})$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, P_n$ est vrai.

4 Théorie des ensembles

4.1 Opérations sur les ensembles

Définition 4.1. *Un ensemble est une collection d'éléments. Il est défini par la connaissance de ses éléments.*

Soit A un ensemble $a \in A$ signifie que a appartient à A . On dit alors que a est un élément de A .

Remarques 4.1. *La définition d'un ensemble peut se faire des façon suivante:*

- *liste exhaustive ($1, 2, 3$)*
- *paramétrique ($\{2x + 1 \mid x \in \mathbb{N}\}$)*
- *implicite ($\{x \in \mathbb{R} \mid x(x + 1) > 0\}$)*

Remarques 4.2. *Dans un ensemble l'ordre et la répétition n'a pas son importance.*

Définition 4.2. *Soient A et B deux ensembles. On dit que A est un sous-ensemble de B lorsque $\forall x \in A, x \in B$, on note plus $A \subset B$.*

Soit A un ensemble fini, le cardinal de A est le nombre d'éléments de A , noté $\text{card}A$.

Un ensemble avec un seul élément est un singleton.

Un ensemble qui ne contient aucun éléments est appelé l'ensemble vide (noté \emptyset ou $\{\}$), c'est un sous ensemble de tout les ensembles.

Remarques 4.3. *Un quantificateur universelle sur l'ensemble vide est automatiquement vérifié. (e.g. $\forall x \in \emptyset, P(x)$)*

Définition 4.3. *Soient A, B des parties d'un ensemble E .*

La réunion de A et de B , notée $A \cup B$ est la partie de E dont les éléments sont éléments de A ou de B .

$$A \cup B = \{x \in E, x \in A \vee x \in B\}$$

Définition 4.4. *Soient A, B des parties d'un ensemble E .*

L'intersection de A et de B , notée $A \cap B$ est la partie de E dont les éléments sont éléments de A et de B .

$$A \cap B = \{x \in E, x \in A \wedge x \in B\}$$

Remarques 4.4. *La réunion n'est pas un ou exclusive.*

Remarques 4.5. *$A \cup B$ est le plus petit ensemble contenant A et B*

Remarques 4.6. *$A \cap B$ est le plus grand ensemble contenu dans A et B*

Remarques 4.7. *Comme un élément peut seulement être ou ne pas être dans un ensemble, on peut faire une disjonction de cas.*

Définition 4.5. *Soient A, B deux sous ensemble d'un ensemble E .*

- *A et B sont dits disjoints si $A \cap B = \emptyset$*
- *Le complémentaire de A dans E est la partie de E dont les éléments sont tous les éléments de E qui ne sont pas dans A . On le note $E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\}$. Autres notations: $C_E A$ ou A^C*
- *La différence symétrique de A et B , notée $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$*

Définition 4.6. Soit I un ensemble, Soient $(A_i)_{i \in I}$ des sous ensembles d'une ensemble E .

L'intersection des A_i est $\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \in E, \forall i \in I, x \in A_i\}$

L'union des A_i est $\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \in E, \exists i \in I, x \in A_i\}$

Par convention: si $I = \emptyset$ alors $\bigcup_{i \in I} A_i := \emptyset$ et $I = \emptyset$ alors $\bigcap_{i \in I} A_i := E$

Définition 4.7. Soient A, B deux sous ensembles non vides de E .

A et B sont complémentaires dans E ou forment une partition de E si $E = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$

Remarques 4.8. Le non complémentaire vient du fait qu'une autre définition soit $A = E \setminus B \iff B = E \setminus A$

Soit E un ensemble. On note $P(E)$ l'ensemble des parties de E .

Remarques 4.9. Il est équivalent d'écrire $A \subset E$ ou $A \in P(E)$

Remarques 4.10. Pour tout ensemble E , on a $\emptyset \in P(E)$ et $E \in P(E)$

Théorème 4.1. Lorsque $\text{card}(E) = n$ avec $n \in \mathbb{N}$ alors $\text{card}(P(E)) = 2^n$

Démonstration 4.1.

Initialisation: $\text{card}(E) = 0 \implies E = \emptyset$ alors $P(E) = \{\emptyset\}$ donc $\text{card}(P(E)) = 1 = 2^0$

Hérédité: Soit E de cardinal $n \geq 1$. Soit $a \in E$, $F = E \setminus \{a\}$

$\text{card}(F) = n - 1$

Les parties de E sont les X et les $X \cup \{a\}$ où $X \in P(F)$

Ainsi $\text{card}(P(E)) = \text{card}(P(F)) + \text{card}(P(F))$

□

Définition 4.8. Soient E et F deux ensembles.

Le produit cartésien de E par F est l'ensemble $E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \wedge y \in F\}$

Remarques 4.11. Attention ce n'est pas commutatif, $E \times F \neq F \times E$

Définition 4.9. Soient E_1, E_2, \dots, E_n des ensembles.

$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n), \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, x_i \in E_i\}$

(x_1, x_2, \dots, x_n) est appelé un n -uplet.

Définition 4.10. Soient X, Y deux ensembles.

- Une application de X dans Y est la donnée, pour tout point $x \in X$ d'un unique point $y \in Y$ associé à x . On dit que y est l'image de x par l'application.

- Soit f est une application de X dans Y .

◇ on note $f(x)$ l'image de x par f

◇ X est appelé espace de départ de f .

◇ Y est appelé espace d'arrivée de f .

Remarques 4.12. Deux applications f et g sont égales si elles ont même ensemble de départ, même ensemble d'arrivée et si

$\forall x \in X, f(x) = g(x)$

Remarques 4.13. On ne change pas une application en modifiant la (les) variable(s) muette(s) permettant de la définir. Ainsi les applications suivantes sont égales:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}(x, y) \rightarrow x + y, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \rightarrow x_1 + x_2$$

Remarques 4.14. Pour toute fonction f , si $x_1 = x_2$ alors $f(x_1) = f(x_2)$, la réciproque est fausse en général.

Remarques 4.15. Etant donnée une application $f : X \rightarrow Y$ $x \rightarrow f(x)$ et $X' \subset X$, on peut créer une application restreinte $f|_{X'} : X' \rightarrow Y$ $x \rightarrow f(x)$

Définition 4.11. Soient X, Y des ensembles.

- On appelle graphe dans $X \times Y$ toute partie G de $X \times Y$ telle que $\forall x \in X, \exists ! y \in Y, (x, y) \in G$
- Si f est une application de X dans Y , alors le graphe de f est $G_f := \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$

Remarques 4.16. Réciproquement si G est un graph

Remarques 4.17. Une fonction n'étant pas nécessairement définie sur tout l'ensemble de départ considéré (souvent \mathbb{R}).

Définition 4.12. Soit $f \in Y^X$

- On dit que $x \in X$ est un antécédent de $y \in Y$ par f lorsque $f(x) = y$, i.e. lorsque y est l'image de x par f .
- Si A est un sous ensemble de X , on appelle image de A l'ensemble $f(A) := \{f(a) \mid a \in A\} = \{y \in Y \mid \exists a \in A, f(a) = y\} \subset Y$
- Si B est un sous ensemble de Y , on appelle image réciproque de B l'ensemble des antécédents d'éléments de B : $f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\} \subset X$

Remarques 4.18. Attention à la notation, $f(a)$ et $f(A)$ ne sont pas de même nature. Pour tout $x \in X, f(\{x\}) = \{f(x)\}$

Théorème 4.2. Soit $f \in Y^X$

- Pour toutes parties A et B de Y on a,
 - ◊ $A \subset B \implies f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$
 - ◊ $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
 - ◊ $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
- Pour toutes parties A et B de X , on a
 - ◊ $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$
 - ◊ $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
 - ◊ $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Démonstration 4.2.

□

Définition 4.13. Soient E et F deux ensembles arbitraires. On dit que E et F ont même cardinal s'il existe une bijection entre E et F .

Soit E un ensemble. On dit que E est dénombrable s'il existe une injection de E dans \mathbb{N} .

Proposition 4.1.

$\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}, \mathbb{N}^2, \mathbb{Q}, \mathbb{N}^n$ sont dénombrables.

$\mathbb{R}, P(\mathbb{N})$ ne sont pas dénombrables.

$P(\mathbb{N})$ et \mathbb{R} ont même cardinal.

5 Relation et permutations

Définition 5.1. Soit E un ensemble non vide. Une relation binaire R sur E est la donnée d'une application $E \times E \rightarrow \text{Vrai, Faux}$.

On dit que x est en relation avec y lorsque l'image de (x, y) par l'application est "Vrai" et on note alors xRy .

Remarques 5.1.

Définition 5.2. Soit E un ensemble non vide et R une relation binaire sur E . On dit que R est

réflexive lorsque $\forall x \in E, xRx$

symétrique lorsque $\forall (x, y) \in E^2, xRy \iff yRx$

antisymétrique lorsque $\forall (x, y) \in E^2, (xRy \wedge yRx) \implies x = y$

transitive lorsque $\forall (x, y, z) \in E^3, xRy \wedge yRz \implies xRz$

Définition 5.3. Soit R une relation sur un ensemble E . On dit que R est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Définition 5.4. Soit $E \neq \emptyset$ un ensemble muni d'une rel. d'équivalence R .

Soit $x \in E$.

On appelle classe d'équivalence modulo R de x et on note \bar{x} l'ensemble $\{x \in E, xRy\}$.

Théorème 5.1. L'ensemble des classes d'équivalence de E modulo R forme une partition de E .

Démonstration 5.1.

□

Définition 5.5. L'ensemble des classes d'équivalence de E modulo R s'appelle l'ensemble quotient de E par R . On le note E/R .

Définition 5.6. Soit R une relation sur un ensemble E .

On dit que R est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive. Notée souvent \preceq cursif. On dit que (E, \preceq) est un ensemble ordonné.

Relation d'ordre totale lorsque R est complète ($\forall x, y \in E, (xRy \vee yRx)$)

Définition 5.7. Soit (E, \preceq) ensemble ordonné. Soit $A \in P(E)$. On dit que

A admet un minimum lorsque

$\exists a_0 \in A, \forall a, a_0 \preceq a$ On note $\min(A) := a_0$

A admet un maximum lorsque

$\exists a_0 \in A, \forall a \in A, a \preccurlyeq a_0$ On note $\max(A) := a_0$

A est minoré lorsque

$\exists m \in E, \forall a \in A, m \preccurlyeq a$

Remarques 5.2. *Si A admet un minimum (resp. un maximum) alors A est minoré (resp. majoré)*

Remarques 5.3. *Si A admet un minimum (resp. maximum), il est unique.*

Proposition 5.1.

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre totale \preccurlyeq . Soit $A \in P(E)$ un ensemble fini non-vidé. Alors A admet un minimum et un maximum.

6 Permutations

7 Ensemble et nombres complexes