Discrete Et Geometrique | CM: 1

Par Lorenzo

28 janvier 2025

1 Maths discrètes

1.1 Dénombrement

Définition 1.1. *Soit A un ensemble de N éléments ($N \in \mathbb{N}$). Une permutation de A est une application bijective entre A et A.*

Remarques 1.1. *Ici N sert à que A soit fini.*

Définition 1.2. *Soit A, B deux ensembles. f est une fonction de A dans B si et seulement si:*

- $f \subset A \times B$
- $(a, b) \in f \land (a, b') \in f \implies b = b'$

Proposition 1.1.

Soit A un ensemble de N éléments. Soit $f : A \to A$ une application alors, f est bijective si et seulement si f injective si et seulement si f surjective.

Démonstration 1.1.

- *f **bijective** $\implies$ f **injective.** Par définition de la bijection.*
- *f **surjective** $\implies$ f **injective.** On suppose f n'est pas injective. Alors $\exists a, a' \in A, f(a) = f(a')$ et $a \neq a'$ On sépare A en deux parties: $\{a, a'\}$ et $A \setminus \{a, a'\}$ On a $f(A) = f(\{a, a'\}) \cup f(A \setminus \{a, a'\}) = f(a) \cup f(A \setminus \{a, a'\})$. Or $f(\{a, a'\})$ contient exactement un élément et $f(A \setminus \{a, a'\})$ contient au plus $N - 2$ éléments. Ainsi $f(A)$ contient au plus $N - 1$ éléments. Donc f n'est pas surjective. Donc f est injective.*
- *f **injective** $\implies$ f **bijective.** À faire DM.*
- *f **injective** $\implies$ f **bijective.** f est injective donc f est surjective ainsi par definition f est bijective.*

□

Proposition 1.2.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et A un ensemble de N éléments. L'ensemble de toutes les permutation de A contient $N!$ éléments.

Démonstration 1.2.

Soit $A = \{1, \cdots N\}$ *et* $f : A \mapsto A$ *une permutation. Le nombre de façon de choisir* $f(1)$ *est* N*, puis* $f(2)$ *est* $N-1$ *et ainsi de suite. Remplacer par une récurence.*

$\square$

Remarques 1.2. *Une permutation peut être vu comme une relation d'order total.*

Définition 1.3. *Soit* $n, m \in \mathbb{N}^*$*. Le nombre d'arrangements de* m *parmi* n*, noté* A_n^m*. Le nombre d'application injective* $f : \{1, \cdots, m\} \to \{1, \cdots, n\}$

Proposition 1.3.

- *Si* $m > n$ *alors* $A_n^m = 0$*.*
- *Si* $m = n$ *alors* $A_n^m = n! = m!$*.*

Proposition 1.4.

Si $n \geq m$ *alors* $A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \dfrac{n!}{(n-m)!}$*.*