Ensemble Complex | CM: 4

Par Lorenzo

27 septembre 2024

1 Théorie des ensembles

1.1 Opérations sur les ensembles

Définition 1.1. *Un ensemble est une collection d'éléments. Il est défini par la connaissance de ses éléments.*

Soit A un ensemble $a \in A$ signifie que a appartient à A. On dit alors que a est un élément de A.

Remarques 1.1. *La définition d'un ensemble peut se faire des façon suivante:*

- *liste exaustive (1, 2, 3)*
- *paramétrique ($\{2x + 1 \mid x \in \mathbb{N}\}$)*
- *inplicite ($\{x \in \mathbb{R} \mid x(x + 1) > 0\}$)*

Remarques 1.2. *Dans un ensemble l'ordre et la répétition n'a pas son importance.*

Définition 1.2. *Soient A et B deux ensembles. On dit que A est un sous-ensemble de B lorsque $\forall x \in A, x \in B$, on note plus $A \subset B$.*

Soit A un ensemble fini, le cardinal de A est le nombre d'éléments de A, noté card$A$.

Un ensemble avec un seul élément est un singleton.

Un ensemble qui ne contient aucun éléments est appelé l'ensemble vide (noté $\emptyset$ ou $\{\}$), c'est un sous ensemble de tout les ensembles.

Remarques 1.3. *Un quantificateur universelle sur l'ensemble vide est automatiquement vérifié. (e.g. $\forall x \in \emptyset, P(x)$)*

Définition 1.3. *Soient A, B des parties d'un ensemble E.*

La réunion de A et de B, notée $A \cup B$ est la partie de E dont les éléments sont éléments de A ou de B.

$A \cup B = \{x \in E, x \in A \vee x \in B\}$

Définition 1.4. *Soient A, B des parties d'un ensemble E.*

L'intersection de A et de B, notée $A \cap B$ est la partie de E dont les éléments sont éléments de A et de B.

$A \cap B = \{x \in E, x \in A \wedge x \in B\}$

Remarques 1.4. *La réunion n'est pas un ou exclusive.*

Remarques 1.5. *$A \cup B$ est le plus petit ensemble contenant A et B*

Remarques 1.6. *$A \cap B$ est le plus grand ensemble contenu dans A et B*

Remarques 1.7. *Comme un élement peut seulement être ou ne pas être dans un ensemble, on peut faire une disjonction de cas.*

Définition 1.5. *Soient A, B deux sous ensemble d'un ensemble E.*

- *A et B sont dits disjoints si $A \cap B = \emptyset$*

- *Le complémentaire de A dans E est la partie de E dont les éléments sont tous les éléments de E qui ne sont pas dans A. On le note $E \backslash A = \{x \in E \mid x \notin A\}$. Autres notations: $C_E A$ ou A^C*

- *La différence symétrique de A et B, notée $A \Delta B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$*

Définition 1.6. *Soit I un ensemble, Soient $(A_i)_{i \in I}$ des sous ensembles d'une ensemble E.*
L'intersection des A_i est $\Cap_{i \in I} A_i := \{x \in E, \forall i \in I, x \in A_i\}$
L'union des A_i est $\Cup_{i \in I} A_i := \{x \in E, \exists i \in I, x \in A_i\}$
Par convention: si $I = \emptyset$ alors $\Cup_{i \in I} A_i := 0$ et $I = \emptyset$ alors $\Cap_{i \in I} A_i := E$

Définition 1.7. *Soient A, B deux sous ensembles non vides de E.*
A et B sont complémentaires dans E ou forment une partition de E si $E = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$

Remarques 1.8. *Le non complémentaire vient du fait qu'une autre définition soit $A = E \backslash B \iff B = E \backslash A$*

Soit E un ensemble. On note $P(E)$ l'ensemble des parties de E.

Remarques 1.9. *Il est équivalent d'écrire $A \subset E$ ou $A \in P(E)$*

Remarques 1.10. *Pour tout ensemble E, on a $\emptyset \in P(E)$ et $E \in P(E)$*

Théorème 1.1. *Lorsque $card(E) = n$ avec $n \in \mathbb{N}$ alors $card(P(E)) = 2^n$*

Démonstration 1.1.

Initialisation: *$card(E) = 0 \implies E = \emptyset$ alors $P(E) = \{\emptyset\}$ donc $card(P(E)) = 1 = 2^0$*
Hérédité: *Soit E de cardinal $n \geq 1$. Soit $a \in E$, $F = E \backslash \{a\}$*
$card(F) = n - 1$
Les parties de E sont les X et les $X \cup \{a\}$ où $X \in P(F)$
Ainsi card(P(E)) = card(P(F)) + card(P(F))

□

Définition 1.8. *Soient E et F deux ensembles.*
Le produit cartésien de E par F est l'ensemble $E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \wedge y \in F\}$

Remarques 1.11. *Attention ce n'est pas commutatif, $E \times F \neq F \times E$*

Définition 1.9. *Soient $E_1, E_2, ..., E_n$ des ensembles.*
$E_1 \times E_2 \times ... \times E_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n), \forall i \in \{1, 2, ..., n\}, x_i \in E_i\}$
$(x_1, x_2, ..., x_n)$ est appelé un n-uplet.