# Algebre Lineaire | CM: 2

Par Lorenzo

24 janvier 2025

## 0.1 Partitionnement par blocs

**Définition 0.1.** *Les sous matrices permettent un partitionnement par blocs. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on peut écrire $A$ sous la forme:*

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{1,1} & \cdots & A_{1,m} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{r,1} & \cdots & A_{r,m} \end{array}\right)$$

*où pour chaque $i \in \{1, \cdots r\}$, les matrice $A_{ik}$ ont le même nombre de lignes pour tout $k \in \{1, \cdots r\}$, et où pour chaque $j \in \{1, \cdots, m\}$, les matrices $A_{kj}$ ont le même nombre de colonnes pour tout $k \in \{1, \cdots r\}$.*

**Définition 0.2.** *On peut faire un **produit par blocs**.*

*Soit*

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{1,1} & \cdots & A_{1,m} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{r,1} & \cdots & A_{r,m} \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

*et*

$$B = \left(\begin{array}{c|c|c} B_{1,1} & \cdots & B_{1,s} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline B_{m,1} & \cdots & B_{m,s} \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$$

*Avec le nombre de colonnes de $A_{i,k}$ égal au nombre de lignes de $B_{k,j}$ pour tout $i \in \{1, \cdots, r\}, j \in \{1, \cdots, s\}, k \in \{1, \cdots, m\}$ Alors*

$$AB = \left(\begin{array}{c|c|c} \sum_{k=1}^m A_{1,k}B_{k,1} & \cdots & \sum_{k=1}^m A_{1,k}B_{k,s} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \sum_{k=1}^m A_{r,k}B_{k,1} & \cdots & \sum_{k=1}^m A_{r,k}B_{k,s} \end{array}\right)$$

**Remarques 0.1.** *Avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ partitionnée par lignes et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ partitionnée par colonnes, alors on a:*

*$r = n, m = 1$ et $s = q$. ainsi $AB = (c_{i,j})$ avec $c_{i,j} = A_{i,1}B_{1,j} = l_i(A)c_j(B)$ pour $i \in \{1, \cdots, n\}$ et $j \in \{1, \cdots, q\}$.*

## 0.2 Inverse et puissance

**Définition 0.3.** *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, on note* $A^0 = Id_n$ *et pour* $k \in \mathbb{N}^*$*,* $A^k$ *est défini par récurrence par :* $A^k = AA^{k-1}$

**Propriétés 0.1.**

*Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $k \in \mathbb{N}^*$*, alors* $A^k = A \times A \times \cdots \times A$ *(k fois).*

**Définition 0.4.** *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, on dit que* $A$ *est inversible s'il existe* $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *tel que* $AB = BA = Id_n$*. On note* $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ *l'ensemble des matrices inversibles de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*.*

**Remarques 0.2.** *La notation* $\mathcal{GL}$ *veut dire "Groupe Linéaire" et provient du fait que l'ensemble des matrices inversibles muni de la multiplication des matrices est un groupe.*

**Proposition 0.1.**

*Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, si* $A$ *est inversible, il existe une unique matrice* $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *telle que* $AB = BA = Id_n$*. Cette matrice s'appelle l'inverse de* $A$ *et est notée* $A^{-1}$*.*

**Démonstration 0.1.**

*S'il existe deux matrices* $B$ *et* $B'$ *telles que* $AB = BA = Id_n = AB' = B'A$ *alors* $B' = B'Id_n = B'(AB) = (B'A)B = Id_nB = B$

$\square$

**Proposition 0.2.**

*Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, s'il existe une matrice* $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *telle que* $AB = Id_n$*, alors* $A$ *est inversible et* $B = A^{-1}$*. Il suffit donc de vérifier le produit d'un seul coté.*

**Proposition 0.3.**

*Soit* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, si* $AB$ *est inversible alors* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$*.*

**Démonstration 0.2.**

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1}A^{-1}) = AId_nA^{-1} = AA^{-1} = Id_n$

$\square$

**Proposition 0.4.**

*Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *possède une unique solution* $X = A^{-1}B$

**Démonstration 0.3.**

$AX = B \implies A^{-1}(AX) = A^{-1}B \implies (A^{-1}A)X = A^{-1}B \implies X = A^{-1}B$
*et réciproquement* $X = A^{-1}B \implies A(A^{-1}B) = B \implies (AA^{-1})B = B$

$\square$

## 0.3 Système linéaire

**Définition 0.5.** *Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. Un système linéaire de $n$ équations linéaire à $p$ inconnues (à coefficients dans $\mathbb{K}$) s'écrit:*

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

*Les coefficients $a_{i,j}$ et $b_i$ pour $i \in \{1, \cdots, n\}$ et $j \in \{1, \cdots, p\}$ sont des éléments de $\mathbb{K}$. Les coefficients $x_1, \cdots, x_p$ sont les inconnues du système.*

*On appelle solution du système linéaire tout p-uplet $(x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que les équations du système sont vérifiées. $(b_1, \cdots, b_n)$ s'appelle le second membre du système linéaire. On note $S(L1)$ l'ensemble des solutions du système linéaire $L1$. Lorsque $b_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, le système linéaire est dit homogène.*

**Définition 0.6.** *On appelle matrice augmentée la matrice*

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} & b_n \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n,p+1}(\mathbb{K})$$

**Définition 0.7.** *Un système linéaire de n équations à n équations est régulier ou de Cramer, s'il possède une unique solution. Un système linéaire de n équations linéaires à p inconnues est dit compatible quand il a au moins une solution.*

**Définition 0.8.** *Deux système linéaire (L1) et (L2) à p inconnues $x_1, \cdots, x_p$ sont équivalents si $S(L1) = S(L2)$.*

**Définition 0.9.** *Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\alpha, \lambda \in \mathbb{K}, \alpha \neq 0$*

1. *Notons A' la matrice obtenue à partir de A en multipliant par la $\alpha$ la qième ligne de A, $q \in \{1, \cdots, n\}$. Les autres lignes restant inchangées.*

2. *Notons A" (resp A"') la matrice obtenue à partir de A en échangeant les lignes q et k de A (resp. en ajotant à la qième ligne de A le produit de $\lambda$ de la kième ligne de A). $q, k \in \{1, \cdots, n\}$, $q \neq k, n \geq 2$, les autres lignes restant inchangées. On dit que les matrices A', A", A"' se déduisent de A par opération élémentaire sur les lignes.*