Analyse | CM: 11

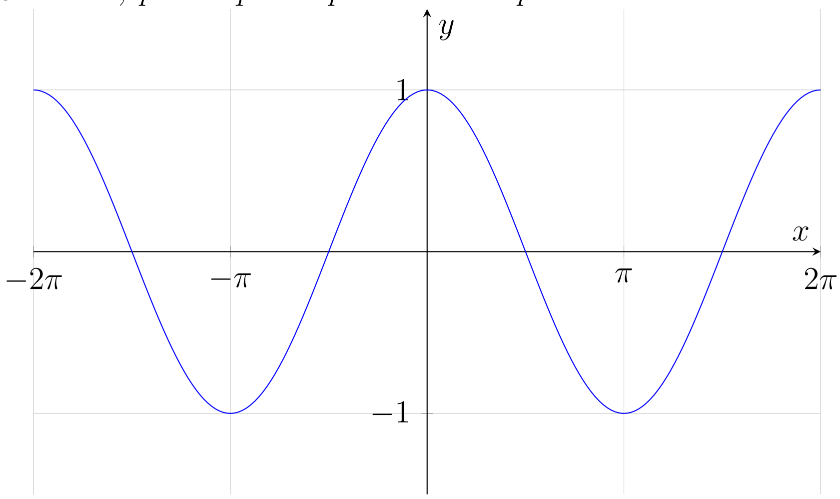
Par Lorenzo

28 novembre 2024

0.1 Fonctions inverses trigonométriques

Définition 0.1. *La fonction cosinus* $\cos : \begin{cases} \mathbb{R} \to [-1,1] \\ x \mapsto \cos(x) \end{cases}$

Continue, périodique de période 2π *et paire.*

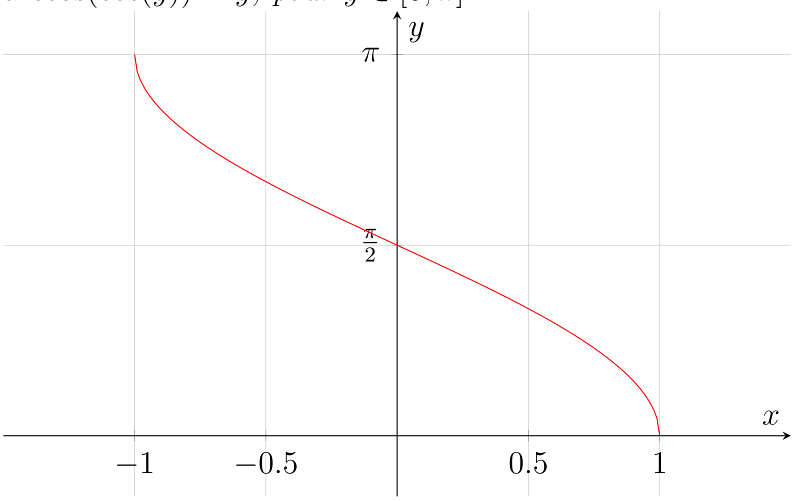


Sur l'intervalle $[0,\pi]$*, la fonction* $\cos$ *est strictement décroissante et continue de* $[0,\pi] \to [-1,1]$ *D'apres le théorème de la bijection, il existe une fonction réciproque.*

Notée $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ *telle que*

$\cos(\arccos(x)) = x$*, pour* $x \in [-1,1]$

$\arccos(\cos(y)) = y$*, pour* $y \in [0,\pi]$

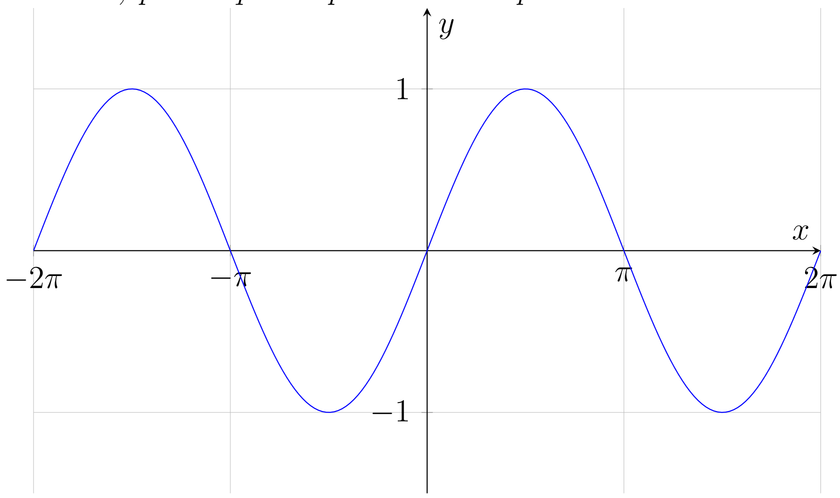


Propriétés 0.1.

$$\forall x \in]-1,1[, (\arccos(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Définition 0.2. *La fonction sinus* cos : $\begin{cases} \mathbb{R} \to [-1,1] \\ x \mapsto \sin(x) \end{cases}$

Continue, périodique de période 2π *et paire.*

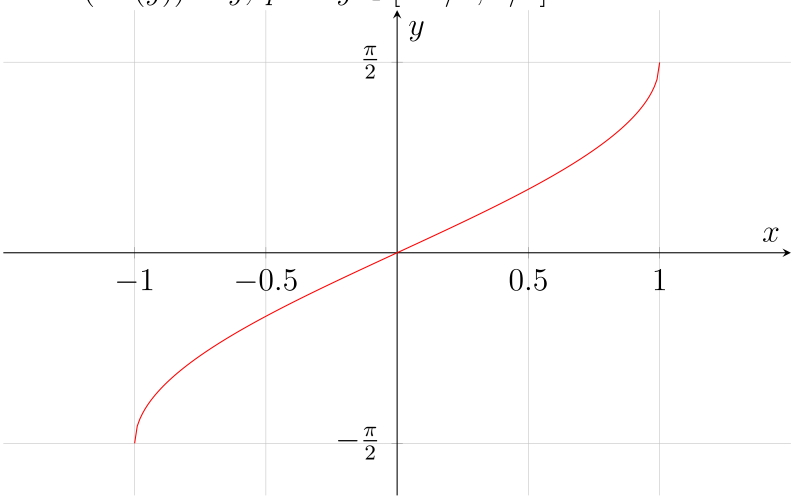


Sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$, *la fonction* sin *est strictement décroissante et continue de* $[-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]$ *D'apres le théorème de la bijection, il existe une fonction réciproque.*

Notée $\arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ *telle que*

$\sin(\arcsin(x)) = x$, *pour* $x \in [-1,1]$

$\arcsin(\sin(y)) = y$, *pour* $y \in [-\pi/2, \pi/2]$



Propriétés 0.2.

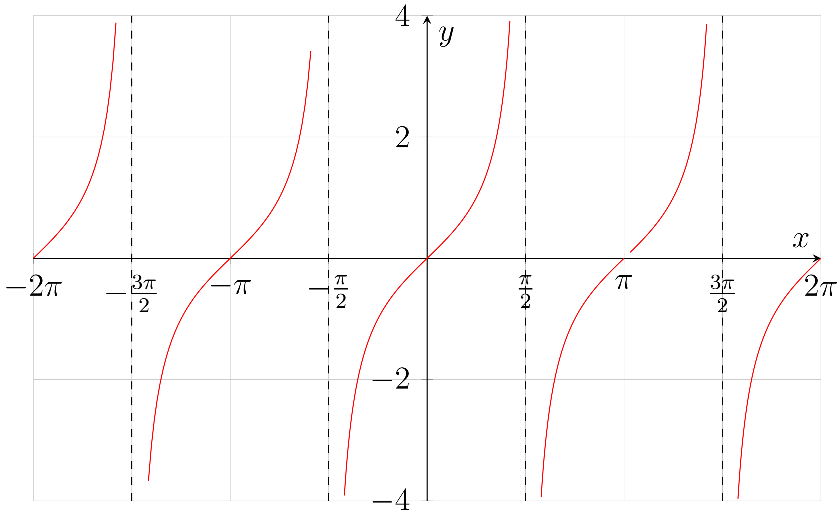
$$\forall x \in]-1,1[, (\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

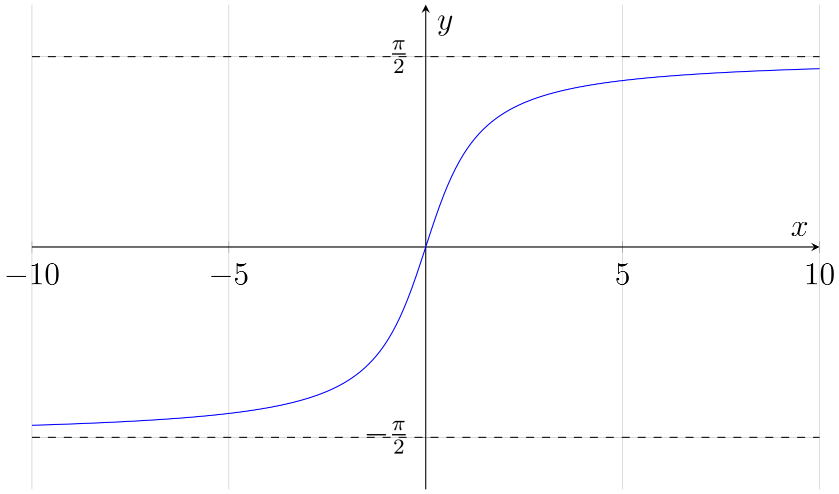
Définition 0.3. *La fonction tangente* $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ *qui est défini sur* $]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ *est strictement croissante et continue. D'après le théorème de la bijection, il existe une fonction réciproque notée*

$\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ *l'angle de la tangente et vérifie*

$\tan(\arctan(x)) = x$ *par* $x \in \mathbb{R}$

$\arctan(\tan(y)) = y$ *pour* $y \in]-\pi/2, \pi/2[$





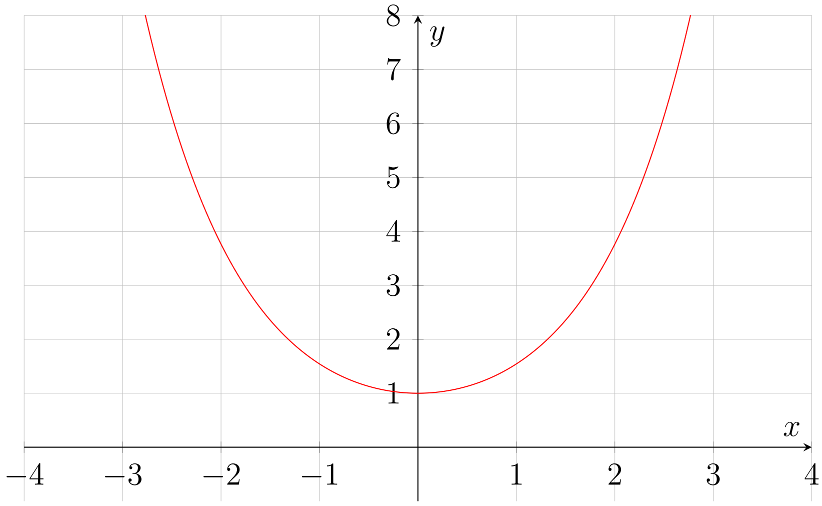
Propriétés 0.3.

$$\forall x \in]-1, 1[, (\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

0.2 Fonctions hyperboliques inverses

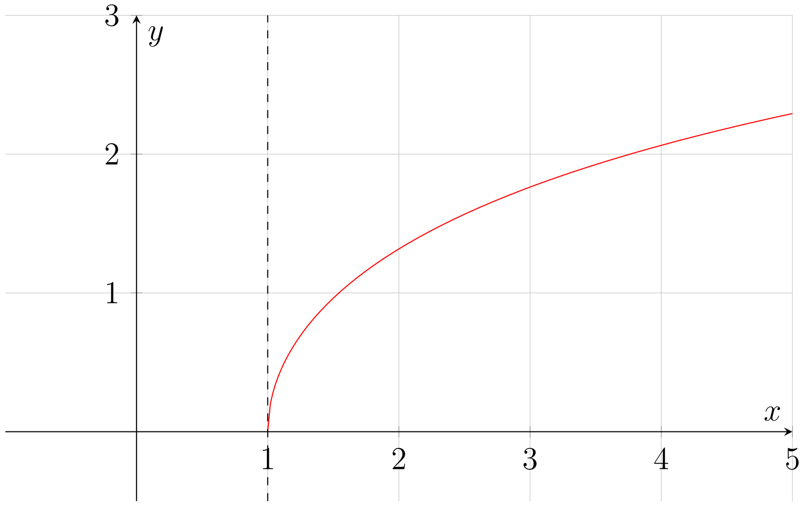
$$e^i x = \cos(x) + i\sin(x) \iff \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \iff \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$$

Définition 0.4. *On définit par* $x \in \mathbb{R}$*, le cosinus hyperbolique comme (*$\cosh$ *ou ch)*
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

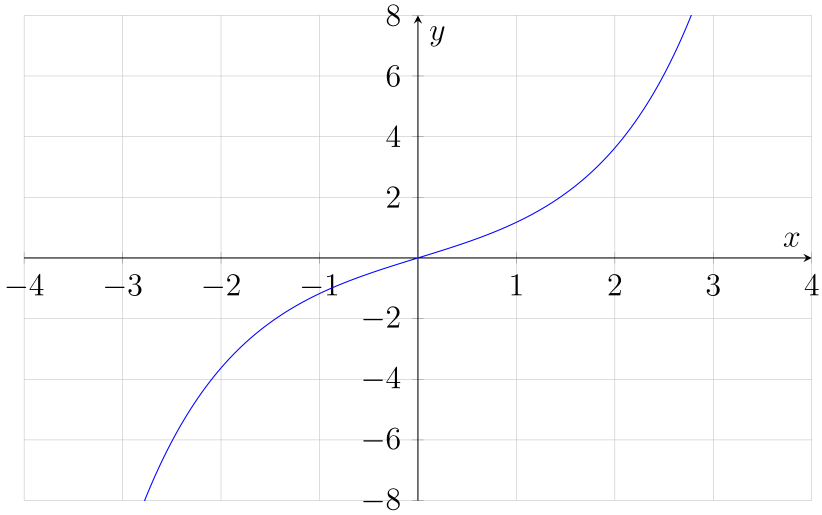


La fonction $\cosh : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$ *est strictement croissante et continue, elle définit une bijection et sa réciproque* $\arg\cosh : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$

$\arg\cosh(\cosh(x)) = x$ *et* $\cosh(\arg\cosh(x)) = x$



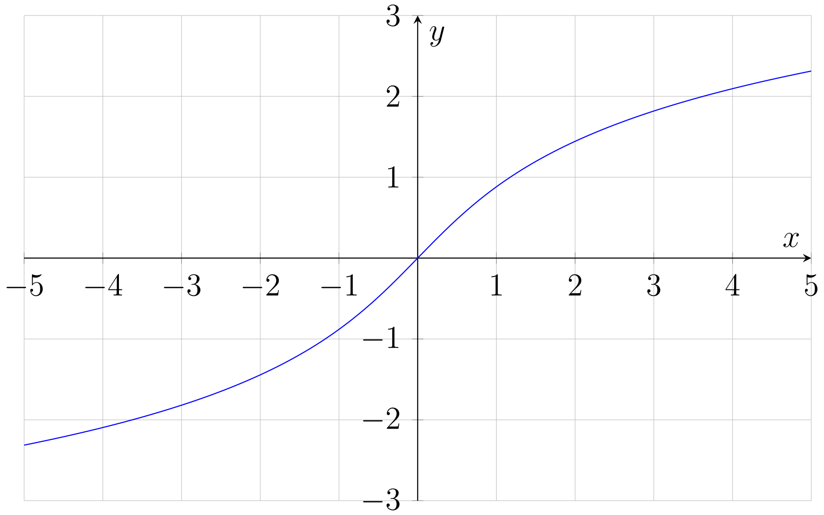
Définition 0.5. *On définit par* $x \in \mathbb{R}$*, le sinus hyperbolique comme (*$\sinh$ *ou sh)* $\cosh(x) = \dfrac{e^{-} + e^{-x}}{2}$



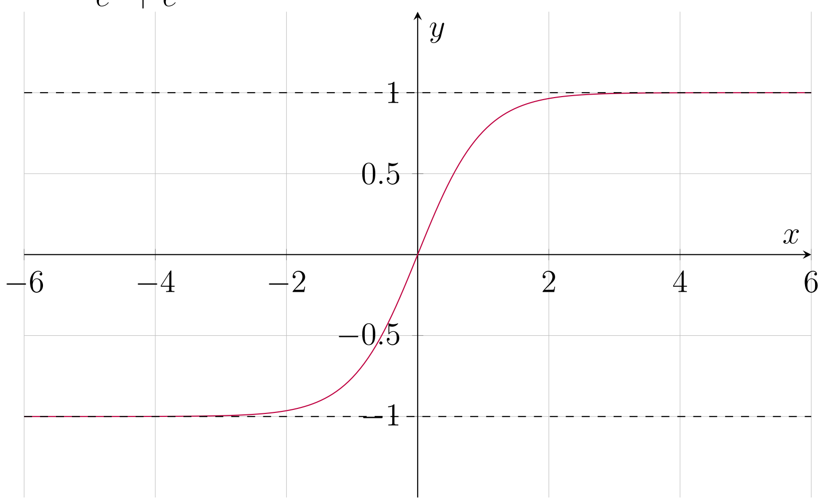
La fonction $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est continue, elle définit une bijection et sa réciproque*

$\arg\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\arg\sinh(\sinh(x)) = x$ *et* $\sinh(\arg\sinh(x)) = x$

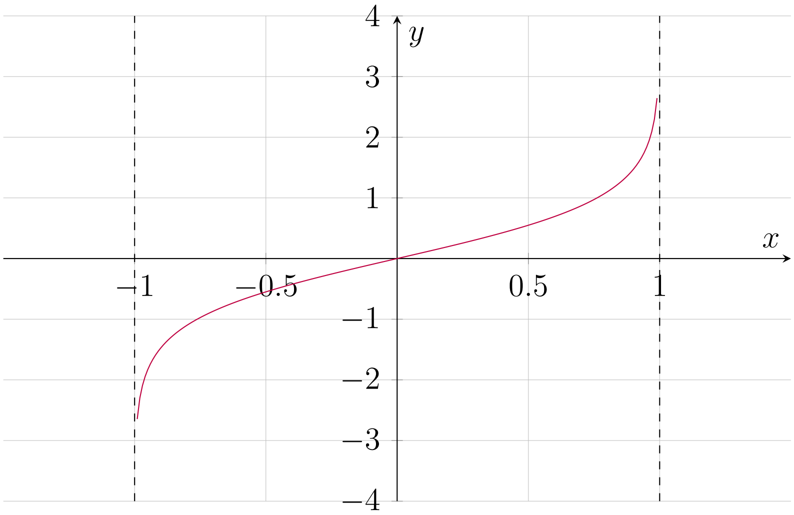


Définition 0.6. *On définit par* $x \in \mathbb{R}$*, la tangente hyperbolique comme (*$\tanh$ *ou th)*
$\tanh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$



La fonction $\tanh : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ *est continue, elle définit une bijection et sa réciproque*
$\arg\tanh :]-1, 1[\to \mathbb{R}$

$\arg\tanh(\tanh(x)) = x$ *et* $\tanh(\arg\tanh(x)) = x$



Propriétés 0.4.

1. $(\cosh(x))^2 - (\sinh(x)^2) = 1$
2.
   - $\cosh(a+b) = \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b)$
   - $\cosh(2a) = \cosh(a)^2 + \sinh(a)^2 = 2\cosh(a)^2 - 1 = 1 + 2\sinh(a)^2$
   - $\sinh(a+b) = \sinh(a)\cosh(b) + \sinh(b)\cosh(a)$
   - $\sinh(2a) = 2\sinh(a)\cosh(b)$
   - $\tanh(a+b) = \dfrac{\tanh(a)\tanh(b)}{1+\tanh(a)\tanh(b)}$
3.
   - $(\cosh(x))' = \sinh(x)$
   - $(\sinh(x))' = \cosh(x)$
   - $(\tanh(x))' = 1 - \tanh(x)^2 = \dfrac{1}{\cosh(x)^2}$