Analyse2 | CM: 2

Par Lorenzo

23 janvier 2025

0.1 Quelques applications

0.1.1 Comparaison de moyennes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$.
On définit leurs moyennes:

- arithmétique : $m_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
- harmonique : $m_h = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$
- géométrique : $m_g = (\Pi_{i=1}^n x_i)^{\frac{1}{n}}$
- quadratique : $m_q = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2}$

Propriétés 0.1.

On a les inégalités: $m_h \leq m_g \leq m_a \leq m_q$.

Démonstration 0.1.

1. *Montrons que* $m_h \leq m_g$.

   Comme la fonction $x \mapsto \ln x$ *est concave sur* $]0, +\infty[$ *et par l'inégalité de Jensen, on a*

$$\begin{aligned} \ln \frac{1}{m_h} &= \ln(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}) \\ &\geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{1}{x_i} \end{aligned}$$

   Ainsi

$$\begin{aligned} \ln(m_h) &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i \\ &= \frac{1}{n} \ln(\Pi_{i=1}^n x_i) \\ &= \ln((\Pi_{i=1}^n x_i)^{\frac{1}{n}}) \\ &= \ln(m_g) \end{aligned}$$

2. *Montrons que $m_g \leq m_a$.*

   Par la concavité de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ et l'inégalité de Jensen, on a

$$\begin{aligned}\ln(m_a) &= \ln(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i) \\ &\geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i \\ &= \ln(m_g)\end{aligned}$$

   Par croissance de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ on a $m_g \leq m_a$.

3. *Montrons que $m_a \leq m_q$*

   Par la convexité de la fonction $x \mapsto x^2$ et l'inégalité de Jensen,

$$\begin{aligned}m_a^2 &= (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ &= m_q\end{aligned}$$

   En prenant les racines carrées, on obtient $m_a \leq m_q$.

□

Propriétés 0.2.

$\forall a \geq 1, \forall x_1, x_2 > 0, (x_1 + x_2)^\alpha \geq 2^{\alpha-1}(x_1^\alpha + x_2^\alpha)$.

Démonstration 0.2.

Soit $\alpha \geq 1$. La fonction : $\begin{cases}]0, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^\alpha \end{cases}$ *est deux fois dérivable $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ et $f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$ est positive sur $I =]0, +\infty[$.*

Donc f est convexe et pour $\lambda = \frac{1}{2}$, on a pour tout $x_1, x_2 > 0$

$$\begin{aligned}(\frac{x_1+x_2}{2})^\alpha &= f(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2) \\ &\leq \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2) \\ &\leq \frac{1}{2}x_1^\alpha + \frac{1}{2}x_2^\alpha \\ &= \frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha}{2}\end{aligned}$$

Donc $(x_1 + x_2)^\alpha \leq 2^{1-\alpha}(x_1^\alpha + x_2^\alpha)$.

□

0.1.2 Inégalité de Hölder

Proposition 0.1 (Inégalité de Young)**.**

Soient $p, q \in]1, +\infty[$ *tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *et* $a, b > 0$*, on a*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Démonstration 0.3.

À faire.

$\square$

Proposition 0.2 (Inégalité de Hölder)**.**

Soient $p, q \in]1, +\infty[$ *tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*, x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$*, on a*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q)^{\frac{1}{q}}$$

Démonstration 0.4.

À faire.

$\square$

1 Complément sur la dérivation