Analyse2 | CM: 3

Par Lorenzo

06 février 2025

Démonstration 0.1.

Si $f : I \to f(I)$ est continue et bijective, alors elle est stricement monotone.

L'application $f : I \to f(I)$ est surjective par définition, il suffit de montrer que f est injective.

Par l'absurde on suppose qu'il existe $x_1, x_2 \in I$ vérifiant $f(x_1) = f(x_2)$ et $x_1 \neq x_2$.

Ainsi $x_1 < x_2 \vee x_2 < x_1$ qui veut dire $\exists c \in]x_1, x_2[, f'(c) = 0$ par le théorème de Rolle mais par hypothèse f' ne s'annule pas sur $\overset{\circ}{I}$. Il y a donc contradiction, D'ou f est injective.

$$\boxed{\text{Donc } f \text{ est bijective.}}$$

$\square$

Démonstration 0.2.

Si f est constante, il est clair que f est dérivable de dérivée nulle.

Maintenant supposons que f est de dérivée nulle. Par l'inégalité des accroissements finis avec $k = 0$, on a pour tout $x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq 0 \times |x - y| = 0$ et donc $f(x) = f(y)$.

D'où f est constante sur I.

$\square$

Démonstration 0.3.

Supposons que $f : I \to \mathbb{R}$ est k-lipschitzienne pour $k \geq 0$.

- *Si $k = 0$ alors f est constante donc continue.*
- *Supposons que $k > 0$.*

  Soit $a \in I$, on va montrer que f est continue en a:

  Soit $\varepsilon > 0$. En posant $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$ on a pour tout $x \in I : |x - a| < \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq k|x - a| \leq k\eta = k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$.

$\square$