Analyse | CM: 9

Par Lorenzo

14 novembre 2024

0.1 Limites d'une fonction

0.1.1 Définition

Définition 0.1. *On dit qu'une fonction f admet une limite* $l \in \mathbb{R}$ *en* x_0 *si* $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$

On note $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

Remarques 0.1.

On peut remplacer $<$ *par* $\leq$

L'ordre est important, δ *dépend de* ε

Définition 0.2. *Soient f définie sur un intervalle I de* $\mathbb{R}$*, et* $x_0 \in \mathbb{R}$ *dans I ou aux extrémités de I.*

On dit que f admet par limite $+\infty$ *en* x_0 *si* $\forall M > 0, \exists \delta > 0, |x - x_0| < \delta \implies f(x) \geq M$

On dit que f admet par limite $-\infty$ *en* x_0 *si* $\forall M > 0, \exists \delta > 0, |x - x_0| < \delta \implies f(x) \leq -M$

Définition 0.3. *On dit que f admet une limite* $l \in \mathbb{R}$ *en* $+\infty$ *si* $\forall \varepsilon > 0, \exists n > 0, x > n \implies |f(x) - l| < \varepsilon$

Définition 0.4. *f admet une limite en* $+\infty$ *en* $+\infty$ *si* $\forall M > 0, \exists m > 0, x > m \implies f(x) > M$

Définition 0.5. *On appelle limite à droite en* x_0 *de f, la limite de f en* x_0 *restreinte aux valeurs* $x > x_0$ *et on note* $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$

Remarques 0.2.

Si $x > x_0, |x - x_0| = x - x_0$ *et* $|x - x_0| < \delta$ *devient* $x_0 < x < x_0 + \delta$

Si $x < x_0, |x - x_0| = -(x - x_0)$ *et* $|x - x_0| < \delta$ *devient* $x_0 - \delta < x < x_0$

Proposition 0.1.

Si f admet une limite en x_0 *alors f admet une limite en* x_0^+ *et en* x_0^- *et les limites coincident.*

Si une fonction admet une limite à gauche et une limite à droite en x_0 *et qu'elles sont égales, alors f admet cette même limite en* x_0*.*

Démonstration 0.1.

À faire (juste les définitions)

□

0.1.2 Propriétés

Théorème 0.1. *Si f admet une limite, elle est unique.*

Démonstration 0.2.

Pareil que pour les suite (supposer deux limites différentes puis absurde)

□

Corollaire 0.1. *Si la limite à gauche est différente de la limite à droite, alors f n'admet pas de limite.*

0.1.3 Règles de calcul

Notons $\lim_{x\to x_0} f(x) = l, \lim_{x\to x_0} g(x) = l'$

- $\forall\lambda \in \mathbb{R}, \lim_{x\to x_0} \lambda f(x) = \lambda l$
- $\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = l + l'$
- $\lim_{x\to x_0}(f \times g)(x) = l \times l'$
- Si $l \neq 0, \lim_{x\to x_0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{l'}{l}$
- Si $f \leq g$ alors $l \leq l'$

Remarques 0.3. *Si $f < g$ alors $l \leq l'$*

Théorème 0.2. *Théoreme des gendarmes*
Si $f \leq g \leq h$ alors $\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x) \leq \lim_{x\to x_0} h(x)$

Propriétés 0.1.

On note $g \circ f$ la composition des fonctions f et g définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

0.2 Continitué en 1 point

Définition 0.6. *On dit que f est continue en x_0 si f admet une limite en x_0 et cette limite vaut $f(x_0)$ autrement dit $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$*

0.2.1 Règles de calcul

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ continue dans x_0.

- $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, λf est continue en x_0
- $f + g$ est continue en x_0
- $f \times g$ est continue en x_0
- Si $f(x) \neq 0$ alors $\dfrac{g}{f}$ est continue en x_0

Proposition 0.2.

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$.
Si f est continue en x_0 et g aussi alors $g \circ f$ est continue en x_0.
$\lim_{x\to x_0}(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x_0)$

0.3 Prolongement par continuitué

Définition 0.7. *Soit f une fonction définie sur l'intervalle I privé de* x_0 $f : I$ $\{x_0\} \to \mathbb{R}$*. On dit que f est prolongeable par continuité par continuité en* x_0 *so f admet une limite finie l en* x_0*.*

On note $\overline{f : I \to \mathbb{R}}$ *le prolongement défini par*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) six \neq x_0 \\ l six = x_0 \end{cases}$$

0.4 Continuité sur un intervalle

Définition 0.8. *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *est dite continue sur l'intervalle I si elle est continue en tout point de I.*

0.5 Théoreme des valeurs intermédiaires

Théorème 0.3. *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur le segment [a, b].*

Alors pour toute valeurs y comprise entre f(a) et f(b), il existe un c $\in [a, b]$ *tel que y = f(c)*

Démonstration 0.3.

Comme f est continue sur [a, b], f est continue en tout point c $\in [a, b]$ *Autrement dit* $\lim_{x \to c}(x) = f(c)$.

Supposons que $f(a) \leq f(b)$*. Alors* $y \in [f(a), f(b)]$ *signifie* $f(a) \leq y \leq f(b) \iff f(a) \leq \lim_{x \to c} f(x) \leq f(b)$

□

Corollaire 0.2. *Si* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue et* $f(a)f(b) < 0$ *alors* $\exists c \in]a, b[$ *tel que* $f(c) = 0$

Corollaire 0.3. *Si f est continue sur un intervalle I alors* $f(I) = \{y = f(x) | x \in I\}$ *est aussi un intervalle.*

Remarques 0.4.

c n'est pas forcément unique.

en général $f([a, b]) \neq [f(a), f(b)]$