Science Decision

Par Lorenzo

24 November 2024

Contents

1 Relations binaires

Définition 1.1. *Une relation binaire R sur un ensemble X est un sous-ensemble de paires ordonnées $(x, y) \in X^2$, on simplifie la notation par xRy (resp. $\neg xRy$) pour $(x, y) \in R$ (resp. $(x, y) \notin R$).*

Propriétés 1.1.

réflexive *si*

$$\forall x \in X,\ xRx$$

irréflexive *si*

$$\forall x \in X,\ \neg(xRx)$$

symétrique *si*

$$\forall x, y \in X,\ xRy \implies yRx$$

asymétrique *si*

$$\forall x, y \in X,\ xRy \implies \neg(yRx)$$

antisymétrique *si*

$$\forall x, y \in X,\ xRy \wedge yRx \implies x = y$$

transitive *si*

$$\forall x, y, z \in X,\ xRy \wedge yRz \implies xRz$$

négativement transitive *si*

$$\forall x, y, z \in X,\ \neg(xRy) \wedge \neg(yRz) \implies \neg(xRz)$$

complète (ou totale) *si*

$$\forall x, y \in X,\ xRy \vee yRx$$

Remarques 1.1. *la notation xRy peut être remplacé par $(x, y) \in R$, par exemple pour la réflexivité, ($\forall x \in X,\ (x, x) \in R$).*

Une relation qui satisfait certaines propriétés peut porter un nom.

Définition 1.2.

1. *Une* ***relation d'équivalence*** *si elle est réfléxive, symétrique et transitive.*
2. *Un* ***préordre (ou quasi ordre)*** *si elle est réflexive et transitive.*
3. *Un* ***ordre faible (ou préordre total)*** *si elle est transitive et complète.*
4. *Un* ***ordre faible strict*** *si elle est asymétrique et négativement transitive.*
5. *Un* ***ordre partiel*** *si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.*
6. *Un* ***ordre partiel (ou ordre, ordre linéaire, chaîne)*** *si elle est antisymétrique, transitive et complète.*

Example 1.1.

1. $\mathbb{R}$ *est totalement ordonnées par $\geq$ et est appelé l'ordre naturel sur $\mathbb{R}$.*
2. $\mathbb{N}$ *avec $>$ est un ordre faible strict.*
3. *Deux entiers relatifs x et y sont congrus modulo $p \in \mathbb{N}$, s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x = y + kp$, ce que l'on note $x \equiv y[p]$. La relation de congruence modulo sur $\mathbb{Z}$ est une relation d'équivalence.*

Proposition 1.1.

Si R est asymétrique alors R est réflexive.

Démontré trivialement par les définitions d'asymétrie et de réflexivité.

Proposition 1.2.

Si R est irréflexive et transitive alors R est asymétrique.

Démonstration 1.1.

On suppose que R est irréflexive, transitive et non asymétrique.

La non asymétrie se traduit par

$$\neg(\forall x, y \in X,\ xRy \implies \neg(yRx)) \quad \equiv \quad \exists x, y \in X,\ xRy \wedge yRx$$

Ainsi avec la non asymétrie et la transitivité on arrive à

$$\begin{aligned} &\exists x, y \in X,\ xRy \wedge yRx \quad \wedge \quad \forall x, y, z \in X,\ xRy \wedge yRz \implies xRz \\ \equiv \quad &\exists x, y \in X,\ xRy \wedge yRx \implies xRx \end{aligned}$$

Ce qui est absurde car ça contredit l'irréflexivité !!!

Donc Si R est irréflexive et transitive alors R est asymétrique.

$\square$

Proposition 1.3.

R est négativement transitive ssi

$$\forall x, y, z \in X,\ xRz \implies xRy \vee yRz$$

Démonstration 1.2.

Utilisons la contraposée du négativement transitive
(Rappel la contraposée de $P \implies Q$ est $\neg Q \implies \neg P$),

$$\begin{aligned} &\forall x, y, z \in X,\ \neg(\neg(xRz)) \implies \neg(\neg xRy \wedge \neg yRz) \\ \equiv \quad &\forall x, y, z \in X,\ xRz \implies xRy \vee yRz \end{aligned}$$

Ainsi R est négativement transitive ssi $$\forall x, y, z \in X,\ xRz \implies xRy \vee yRz$$

$\square$

Proposition 1.4.

Si R est complète alors R est réflexive

Démontré facilement par définition en prenant un x et un $y = x$.

1.1 Opérations sur les relations

Puisque une relation R sur X est un sous ensemble de $X \times X$, on peut facilement utiliser des opérations ensemblistes.

Définition 1.3. *Étant donné deux relation R_1 et R_2 sur un ensemble X.*

- *la relation **complémentaire** de R_1, la relation binaire R_1^c sur X telle que* $\forall x, y \in X,\ xR_1^c y$ *si* $\neg(xR_1y)$
- *la **réunion** de R_1 et R_2 est la relation binaire $R_1 \cup R_2$ sur X telle que* $\forall x, y \in X,\ xR_1 \cup R_2 y$ *si* $xR_1y \vee xR_2y$
- *l'**intersection** de R_1 et R_2 est la relation binaire $R_1 \cap R_2$ telle que* $\forall x, y \in X,\ xR_1 \cap R_2 y$ *si* $xR_1y \wedge xR_2y$
- *la relation R_1 est **compatible** avec R_2 si* $\forall x, y \in X,\ xR_1y \implies xR_2y$ *ou de manière équivalente* $R_1 \subset R_2$
- *la relation **réciproque** (ou duale, inverse) de R_1, la relation binaire R_1^{-1} sur X telle que* $\forall x, y \in X,\ yR_1^{-1}x$ *si* xR_1y
- *la **composée** de R_1 et R_2, la relation binaire $R_1 \circ R_2$ sur X telle que* $\forall x, y \in X,\ xR_1 \circ R_2 y$ *si* $\exists z \in X, xR_2z \wedge zR_1y$

1.2 Relations d'équivalence

Proposition 1.5.

L'intersection $R_1 \cap R_2$ de deux relations d'équivalences R_1 et R_2 sur un ensemble X est une relation d'équivalence.

Démonstration 1.3.

- ***Réflexive*** *car* $\forall x \in X,\ xR_1x \wedge xR_2x$, *ainsi* $xR_1 \cap R_2x$ *pour tout* $x \in X$.
- ***Symétrie*** *car* $\forall x, y \in X,\ (xR_1y \wedge yR_1x) \wedge (xR_2y \wedge yR_2x)$, *ainsi* $\forall x, y \in X,\ xR_1y \wedge xR_2y$ *ce qui implique que* $yR_1x \wedge yR_2x$ *soit* $\forall x, y \in X,\ (xR_1y \wedge yR_2x) \wedge (xR_2y \wedge yR_1x)$.
- ***Transitive*** *car* $\forall x, y \in X, xR_1y \wedge xR_2y \wedge yR_1z \wedge yR_2z \implies xR_1z \wedge xR_2z \implies xR_1 \cap R_2z$

$$\boxed{R_1 \cap R_2 \text{ est Réflexive, Symétrique, Transitive donc c'est une relation d'équivalence.}}$$

□

Soit $x \in X$ l'ensemble $\{y \in X \mid xRy\}$ est appelé classe d'équivalence de x notée C_x.

Example 1.2. *"=" sur* $\mathbb{N}$

- $\forall a \in \mathbb{N}, a = a$ *(Réflexive)*
- $\forall a, b \in \mathbb{N}, a = b \implies b = a$ *(Symétrique)*
- $\forall a, b, c \in \mathbb{N}, a = b \wedge b = c \implies a = c$ *(Transitive)*
  "=" est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}$
  $C_2 = \{y \in \mathbb{N}, 2 = y\} = \{2\}$

$\{C_x \mid x \in X\}$ est l'ensemble quotient de X par R noté X/R.

Proposition 1.6.

Soit R une relation d'équivalence sur X, X/R forme une partition de X, i.e.

- $\forall x, y \in X, C_x \cap C_y = \emptyset$ *ou* $C_x = C_y$
- $X = \bigcup_{x \in X} C_x$

Démonstration 1.4.

Nous allons montrer que
$\forall x, y \in X,\ xRy \implies C_x = C_y$
$\forall x, y \in X,\ \neg xRy \implies C_x \cap C_y = \emptyset$
Soient $x, y \in X$
so xRy *soit* $z \in C_x$ *alors* xRz

□

Remarques 1.2. *Pour une relation binaire il est toujours vrai que* $\forall x, y \in X, xRy \vee \neg xRy$

1.3 Ordre faible et ordre total

Soit R une relation binaire sur l'ensemble X.

On définit I et S sur X par
$\forall x \in X, y \in X, xIy$ si $xRy \wedge yRx$
$\forall x \in X, y \in X, xSy$ si $xRy \wedge \neg yRx$

Example 1.3. $A = \{a, b, c\}$
$R = \{(a, b), (b, a), (a, c), (b, c)\}$
$I = \{(a, b), (b, a)\}$
$S = \{(a, c), (b, c)\}$

Proposition 1.7.

si R est un ordre faible sur X, alors

1. *I est une relation d'équivalence*

2. *S est irréflexive et transitive*

Démonstration 1.5.

I relation d'équivalence:

I reflexive
Soit $x \in X, xIx \iff xRx \wedge xRX \iff xRx$ *vrai car R est complète*

I symétrique
Soient $x \in X, y \in X, xIy \implies xRy \wedge yRx \implies yRx \wedge xRy \implies yIx$

I transitive
Soient $x, y, z \in X, xIy \wedge yIz \implies xRy \wedge yRx \wedge yRz \wedge zRy \implies xRy \wedge yRz \wedge zRy \wedge yRx \implies xRz \wedge zRx \implies xIz$

□

On définit R^* sur X/I par
$\forall C_x \in X/I, C_y \in X/I, C_x R^* C_y$ lorsque xRy
R^* sur X/I est la réduction (relation quotient) de R sur X

Proposition 1.8.

Si R est un ordre faible alors R^* est un ordre total sur X/I

Démonstration 1.6.

R^* *antisymétrique*
Soient $C_x, C_y \in X/I, C_x R^* C_y \wedge C_y R^* C_x \implies C_x = C_y \implies xIy \implies y \in C_x \implies C_x = C_y$
R^* *transitive*
Soient $C_x, C_y, C_z \in X/I$
$C_x R^* C_y \wedge C_y R^* C_z \implies xRy \wedge yRz \implies xRz \implies C_x R^* C_z$
R^* *complète*
$C_x, C_y \in X/I, C_x R^* C_y \vee C_y R^* C_x$ *car R complète*

□

1.3.1 Irréflexive et transitive

voir plus tard

1.4 Ordre total, Ordre partiel

R ordre partiel sur X
Soit $x \in X$, x est:

- un élément maximal si $\forall y \in X \backslash \{x\}, \neg(yRx)$
- le plus grand élément si $\forall y \in X, xRy$
- un élément minimal si $\forall y \in X \backslash \{x\}, \neg(xRy)$
- le plus petit élément si $\forall y \in X, yRx$

Proposition 1.9.

Il y a au plus un plus grand (resp. petit) élément.

Démonstration 1.7.

Soit x et x' deux plus grand (resp. petit) éléments avec $x \neq x'$.
Ainsi $\forall y \in X, xRy$ *et* $x'Ry \implies xRx'$ *et* $x'Rx \implies x = x'$
Absurde car on a supposé $x \neq x'$

□

Construction de diagramme de Hasse

- si xRy : x au dessus de y
- et si x **couvre** y : il n'existe pas $z \in X \backslash \{x, y\}$ tel que $xRz \wedge zRy$
- alors il y a une arête qui relie x et y

Définition 1.4. *Une **chaîne** est un ensemble d'éléments de X totalement ordonné*

Définition 1.5. *Une* ***antichaîne*** *si* $\forall x, xRy \vee yRx \implies x = y$

Soit c le nombre minimal de chaînes pour partitionner X
Soit A une anti-chaîne de cardinal maximal a

Remarques 1.3. *partition avec le plus grand nombre de chaînes : {{a}, {b}, ..., {g}}*

Proposition 1.10.

X ensemble partiellement ordonné par R.
Le nombre d'éléments d'une antichaîne de cardianl maximal (a) est égale au nombre minimum de chaînes pour partitionner X.

Démonstration 1.8.

Preuve par récurrence sur $|x|$
Init. $|x| = 1$
X est une chaîne et une antichaîne a = 1
on partitionne X en 1 chaîne c = a = 1
here. Suppose que ça marche pour tous jusqu'a n
2 cas:
(a) si X contient une antichaîne de cardinal a contenant au moins un element non mimimal et au moins un element maximal
(b) si X contient une antichaîne de cardinal a contenant que des elements maximaux ou minimaux
(a) Soient $H = \{x \in X | \exists z \in A, xRz\}$ *et* $B = \{x \in X | \exists z \in A, zRx\}$
du fait de (a) $\exists w \in A$ *non maximal implique* $\exists y \in X, yRw$ *et* $y \notin B$ *donc* $|B| \leq n-1$ *donc B peut être partitionné en a chaînes*

□

Suite de démonstration

Démonstration 1.9.

□

2 Préférence et utilité

2.1 Définition

Définition 2.1. *Soit* $(X, \succsim)$ *une structure de préférence (voir chap 2)*
$\succsim$ *est une relation binaire sur X*

On veut une application $f : (X \succsim) \to (\mathbb{R}, \geq)$ telle que $x \succsim y \iff f(x) \geq f(y)$
f est une fonction d'utilité.
Soient $f : (X, R_1) \to (Y, R_2)$, On dira que f est isotone si $\forall x, z \in X, xR_1z \implies f(x)R_2f(z)$
Un homomorphisme de (X, R_1) vers (Y, R_2) si $\forall x, z \in X, xR_1z \iff f(x)R_2f(z)$

Remarques 2.1. *Homomorphisme implique isotone*

2.2 Représentation de type $(X, \succeq) \to (\mathbb{R}, \geq)$: cas fini

Soit $\succ$ sur X

Proposition 2.1.

Soit X fini, une codition nécessaire et suffisante (C.N.S) pour qu'existe une fonction
$\exists f : (X, \succ) \to (\mathbb{R}, >)$ *tel que* $x \succ y \iff f(x) > f(y)$ *si et seulement si* $\succ$ *est un ordre faible stricte.*

Démonstration 2.1.

Preuve condition nécessaire, on montre $\neg Q \implies \neg P \equiv P \implies Q$

Asymétrie: Soient $x, y \in X$ *tel que* $x \succ y \implies f(x) < f(y) \implies \neg f(x) < f(y) \implies \neg y \succ x$ *donc asymétrique.*

Negativement transitive: Soient $x, y, z \in X$ *tels que* $\neg x \succ y \wedge \neg y \succ z \implies \neg f(x) > f(y) \wedge \neg(y) > f(z) \implies f(x) \leq f(y) \wedge f(y) \leq f(z) \implies f(x) \leq f(z) \implies \neg(x) > f(z) \implies \neg x \succ z$ *Finalement negativement transitive.*

Preuve condition suffisante, on montre $Q \implies P$*, Soit* $\succ$ *un o.f.s sur X*

Soit $x \in X$ *on définit:*$\curlyvee x = \{y \in X \mid x \succ y\}$

Soit $f(x) = Card(\curlyvee x)$ *si* $X = \mathbb{Z}$

□