1 Permutations

Définition 1.1.

Théorème 1.1

Pour $n \geq 3$, le groupe $(S_n, \circ)$ n'est pas commutatif.

Démonstration 1.1.

Soit $n > 3$, soit les permutations $\tau_1 = (\sigma_1|...)$
$\forall i > 3, \tau_1 \circ \tau_2(i) = \tau_1(i) = i = \tau_2 \circ \tau_1(i)$
$\forall i \geq 3, \tau_1 \circ \tau_2(i), \tau_2 \circ \tau_1 =$

□

Théorème 1.2

Soit $n \geq 2$, toute permutation $\sigma \in S_n$ peuut s'écrire comme composition finir de transpositions $\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_p$.
On dit que S_n est engendré par les transpositions $\langle \tau_1, \cdots, \tau_p \rangle$.

Démonstration 1.2.

Par récurrence

□

Remarque 1.1. *soit $\sigma \in S_n$, décomposer en $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_p$ où les τ_i sont des transpositions. Comme $(\tau_k)^{-1} = \tau_k$, pour tout k, on a $\sigma^{-1} = \tau_p \circ \cdots \circ \tau_1$.*

Remarque 1.2. *e_n l'identité de S_n s'écrit comme produit de n'importe quel transposition avec elle-même. $e_n = \tau_{ij} \circ \tau_{ij}$ avec $1 \leq i < j \leq n$.*