1 Espaces vectoriels normés

Définition 1.1.
*Étant donné un $\mathbb{K}$-ev E, on appelle **norme** sur E toute application* $\|.\|: E \to \mathbb{R}_+$ *vérifiant les trois propriétés suivantes:*
$v \mapsto \|v\|$

- ***homogénéité:*** $\forall(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
- ***séparation:*** $\forall x \in E, \|x\| = 0 \implies x = 0$
- ***inégalité triangulaire:*** $\forall(x, y) \in E^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Définition 1.2.
*Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé **espace vectoriel normé** (abrégé par evn ou e.v.n).*

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps et E et F sont deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels normés.

Exemple 1.1.

1. *La valeur absolue $|.|$ sur $\mathbb{R}$*
2. *Le module $|.|$ pour l'espace vectoriel $\mathbb{C}$*
3. *Pour $n \in \mathbb{N}$ la norme ℓ^1 sur $\mathbb{R}^n$ définie par:*

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

4. *Pour $n \in \mathbb{N}$ la norme ℓ^2 sur $\mathbb{R}^n$ définie par:*

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

5. *Pour $n \in \mathbb{N}$ la norme ℓ^∞ sur $\mathbb{R}^n$ définie par:*

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \|x\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$$

Définition 1.3.
Pour $x = (x_i)_{1\leq i\leq n}, y = (y_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$, le produit scalaire est usuellement définit par:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

noté aussi $(x|y)$ ou même $\langle x|y\rangle$

Remarque 1.1. *On a $||x||_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle}$*

Lemme 1.1: Inégalité de Cauchy-Schwarz

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, |\langle x, y\rangle| \leq ||x||_2||y||_2$ avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Démonstration 1.1.
Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$.
On pose le polynôme $P(t) := \langle x + ty, x + ty\rangle$.

$$\begin{aligned} P(t) &= \|x + ty\| \\ &= \sum_{i=1}^{n}(x_i + ty_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + 2tx_iy_i + t^2y_i^2) \\ &= t^2\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2t\sum_{i=1}^{n} x_iy_i + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ &= t^2\langle y, y\rangle + 2t\langle x, y\rangle + \langle x, x\rangle \end{aligned}$$

D'une part comme $P(t) = ||x+ty||^2 \geq 0$, le discriminant de P est négatif ou nul:

$$\begin{aligned} \Delta = 4\langle x, y\rangle^2 - 4\langle y, y\rangle\langle x, x\rangle \leq 0 \\ &\implies \langle x, y\rangle^2 \leq \langle y, y\rangle\langle x, x\rangle \\ &\implies |\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle y, y\rangle}\sqrt{\langle x, x\rangle} \\ &\implies |\langle x, y\rangle| \leq ||x||_2||y||_2 \end{aligned}$$

D'autre part quand $P(t)$ admet une racine double, on a $t_0 = -\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$ et $P(t_0) = \|x + t_0y\|^2 = 0 \implies x + t_0y = 0 \implies x = -t_0y$ avec $t_0 = -\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$ d'où x et y colinéaires en cas d'égalité.

$\square$

Proposition 1.1

La norme euclidienne $||.||_2$ est bien une norme.
De plus $||x+y|| = ||x|| + ||y||$ si et seulement si x et y sont colinéaires et de même sens.

Démonstration 1.2 (Norme euclidienne ℓ^2)**.**

Soient $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}, y = (y_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$.

1. *(Homogénéité) Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} ||\lambda x||_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i)^2} \\ &= \sqrt{\lambda^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2} \\ &= |\lambda| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \\ &= |\lambda| ||x||_2 \end{aligned}$$

2. *(Séparation)*

   La contraposée de la séparation est: $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 \implies \|x\|_2 \neq 0$.

   Soit $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$, *ainsi* $\exists i \in [\![1, n]\!]$ *tel que* $x_i \neq 0$.

   Donc $||x||_2 \geq \sqrt{x_i^2} = |x_i| > 0$.

3. *(Inégalité triangulaire)*

   On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$.

$$
\begin{aligned}
\|x+y\|_2^2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+2x_iy_i+y_i^2)} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+\sum_{i=1}^{n}y_i^2} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2} \\
&= \|x\|_2^2+2\langle x,y\rangle+\|y\|_2^2 \\
&\leq \|x\|_2^2+2\|x\|_2\|y\|_2+\|y\|_2^2 \\
&= (\|x\|_2+\|y\|_2)^2 \\
\implies \|x+y\|_2 &\leq \|x\|_2+\|y\|_2
\end{aligned}
$$

□

Démonstration 1.3 (cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire)**.**
si x et y sont colinéaires avec le cas de l'égalité de Cauchy-Schwarz on a:

- *si* $\langle x,y\rangle \geq 0$ *alors* $||x+y||_2^2 = \|x\|_2^2+2|\langle x,y\rangle|+\|y\|_2^2 \leq (\|x\|_2+\|y\|_2)^2$
- *si* $\langle x,y\rangle < 0$ *alors* $||x+y||_2^2 = \|x\|_2^2-2|\langle x,y\rangle|+\|y\|_2^2 \leq \|x\|_2^2-2\|x\|_2\|y\|_2+\|y\|_2^2 = (\|x\|_2-\|y\|_2)^2 \leq (\|x\|_2+\|y\|_2)^2$

à retravailler car pas très clair

□

Proposition 1.2: Seconde inégalité triangulaire

Soit $(E,\|.\|)$ un evn, $soient x,y \in E$.

$$\forall x,y \in E, \|x-y\| \geq |\|x\|-\|y\||$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Démonstration 1.4.

Soient $x, y \in E$

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|x - y + y\| \\ &\leq \|x - y\| + \|y\| \\ \implies \|x\| - \|y\| &\leq \|x - y\| \end{aligned}$$

en échangeant x et y, on obtient $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|$

d'où $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

$\square$

Point méthode. On peut conclure sur une inégalité triangulaire générale
$|\|x - y\|| \leq \|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tous $x, y \in E$.

2 Les boules

Définition 2.1. *(Boule ouverte)*
*On appelle **boule ouverte** de centre a et de rayon r l'ensemble:*

$$B(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}$$

Définition 2.2. *(Boule fermée)*
*On appelle **boule fermée** de centre a et de rayon r l'ensemble:*

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| \leq r\}$$

peut aussi se noter $B_f(a, r)$

Définition 2.3. *(Sphère)*
*On appelle **sphère** de centre a et de rayon r l'ensemble:*

$$S(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| = r\}$$

Remarque 2.1. *Lorsque qu'on travaille en dimension 2, on parle de **disque ouvert/fermé**. Ainsi on peut retrouver $D(a, r)$ et $\overline{D}(a, r)$ pour les boules ouvertes et fermées respectivement.*

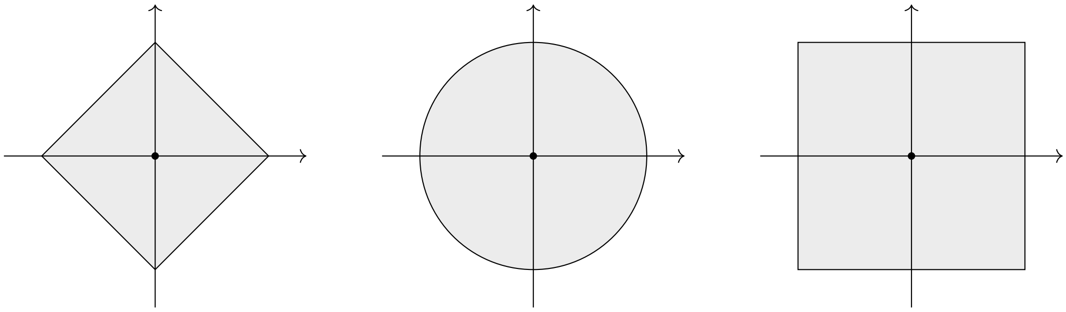

Figure 1: Boules pour les normes ℓ^1, ℓ^2 et ℓ^∞ sur $\mathbb{R}^2$

Définition 2.4.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite.
On dit que (x_n) converge vers $l \in E$ si

$$\lim \|x_n - l\| = 0$$

Remarque 2.2. *On y voit une meilleure interprétation quand on sait que $\|x_n - l\|$ est la distance entre x_n et l.*

Définition 2.5. *(intérieur)*
Soit $A \subset E$.
On dit que $a \in A$ est ***intérieur*** *à A si*

$$\exists r > 0,\ B(a,r) \subset A$$

L'intérieur *de A est l'ensemble des points intérieurs de A et on le note int(A) ou encore $\mathring{A}$.*
On dit que A est un ***ouvert*** *si $A = \mathring{A}$.*

Définition 2.6. *(adhérence)*
Soit $A \subset E$.
On dit que $a \in E$ est ***adhérent*** *à A si*

$$\forall r > 0,\ B(a,r) \cap A \neq \emptyset$$

L'adhérence *de A est l'ensemble des points adhérents de A et on le note adh(A) ou encore $\overline{A}$.*
On dit que A est un ***fermé*** *si $A = \overline{A}$.*

Définition 2.7. *(Frontière)*
Soit $A \subset E$.
*On appelle **frontière** de A l'ensemble:*

$$\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$$

Proposition 2.1

Soit $A \subset E$

$$A = \mathring{A} = \overline{A} \implies A = E \text{ ou } A = \emptyset$$

Démonstration à faire