0.1 Critères de d'Alembert et de Cauchy

Proposition 0.1: Critère de d'Alembert

Soit $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)$ une série atp telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to l$:

1. Si $l < 1$ la série converge.
2. Si $l > 1$ la série diverge.
3. Si $l = 1$ le critère est non concluant.

Démonstration 0.1.

(Pour 2)

$\exists M, n \geq M, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ *ainsi* $u_{n+1} \geq u_n$ *donc* (u_n) *ne converge pas vers 0, la série diverge.*

(Pour 1)

Par la définition de la limite,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \geq N, n \geq M \implies l - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \varepsilon + l$$

en particulier pour $\varepsilon = \frac{1-l}{2} > 0$

$$\exists M, n \geq M \implies \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{l+1}{2}$$

Sans perte de généralité puisqu'on ne change pas la convergence en changeant un nombre fini de termes $M = 0$ *et donc*

$$\forall n, u_{n+1} < \frac{l+1}{2} u_n$$

puis par récurence

$$\forall n, u_n < \left(\frac{l+1}{2}\right)^n u_0$$

Comme $\frac{l+1}{2} \in [0, 1[$ *la série de terme général* $\left(\frac{l+1}{2}\right)^n u_0$ *converge (c'est une série géométrique convergente), d'après la proposition de comparaison ci-dessus la série de terme général* u_n *converge également* *démonstration à revoir*

□

Exemple 0.1. *Étudier la convergence de la série* $\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\right)$. *On a* $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\binom{2(n+1)}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \sim 4$ *donc la série diverge.*

Proposition 0.2: Critère de Cauchy

Soit $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)$ une série atp telle que $\sqrt[n]{u_n} \to l$:

1. Si $l < 1$ la série converge.
2. Si $l > 1$ la série diverge.
3. Si $l = 1$ le critère est non concluant.

Démonstration 0.2.

à faire

□

Exemple 0.2. *Étudier la convergence de la série* $\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right)$. *On a* $\sqrt[n]{u_n} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e} < 1$ *donc la série converge.*

Proposition 0.3

Soit $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)$ série numérique à terme **strictement** positif à partir d'un certain rang.
$\exists L \in [0,+\infty[, \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \to L \implies \left(\sqrt[n]{u_n}\right) \to L$

Démonstration 0.3.

à faire

□