Définition 0.1. *(Caractérisation séquentielle de la limite)*
Soient $A \subset E$, $f : A \to F$,
$a \in \overline{A}$ *et* $l \in F$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \iff \big(\forall (x_n) \in A^{\mathbb{N}},\, x_n \to a \implies f(x_n) \to l\big)$$

Définition 0.2. *(Caractérisation de la limite avec la norme)*
Soient $A \subset E$ *et* $V \subset F$, $f : A \to B$.
Soient $a \in \overline{A}$ *et* $l \in V$.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to a} f(x) = l \\
&\iff \forall \varepsilon > 0,\, \exists \delta > 0,\, \forall x \in A,\, ||x - a||_E < \delta \implies ||f(x) - l||_F < \varepsilon \\
&\iff \forall \varepsilon > 0,\, \exists \delta > 0,\, \forall x \in (B(a, \delta) \cap A) \implies f(x) \in B(l, \varepsilon)
\end{aligned}$$

Mettre le dessin

à faire d'ici

Equivalence:
si $\lim_{x \to a} f(x) = b$, soit $(x_n)_n$ une suite de U convergeant vers a.
Soit $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0, x \in B(a, \delta) \implies f(x) \in B(b, \varepsilon)$.
Soit $n_0, \forall n \geq n_0, ||x_n - a|| < \delta$
On a alors $||f(x_n) - b|| \leq \varepsilon$.
On a deduit que $\lim_{n \to +\infty} ||f(x_n) - b|| = 0 \implies \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = b$

Remarque 0.1. *Et c'est vrai pour n'importe quel suite* $(x_n)_n$ *avec* $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$.

Contraposition:
Supposons que $\lim_{x \to a} f(x) = b$ soit faux. Alors $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in B(a, \delta), f(x) \in B(b, \varepsilon)$.
Soit $\varepsilon > 0$ une telle quantité $\forall n \exists x_n \in B(a, \frac{1}{n})$ ne converge pas sur 0 (minorée par ε). Donc $(f(x_n))_n$ ne converge pas vers b.

Définition 0.3.
(Théorème des gendarmes)
Soit $(E, ||.||_E)$ *un espace vectoriel normé. Soient* $f, g, h : V \to \mathbb{R}$ *avec* $V \subset E$. *Soit* $a \in adh(V)$. *S'il existe* $\delta > 0, \forall x \in V \cap B(a, \delta)$ *on a* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *et* $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = b$ *alors* $\lim_{x \to a} g(x) = b$.

Démonstration 0.1.
Soit $(x_n)_n$ *un suite de* V *convergeant vers* a. *Pour* n *suffisamment grand,* $f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n)$. *et* $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} h(x_n) = b$. *Donc par le théorème des gendarmes pour les suites, on a* $\lim_{n \to +\infty} g(x_n) = b$. *???* $\lim_{x \to a} g(x) = b$.

$\square$

Exemples:

1. $E = (\mathbb{R}^2, ||.||_2)$, $f(x, y) = (x+y, x-y)$. Montrons que: $\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = (a, b)$.

   Soit $((x_n, y_n))_n$ convergeant vers (a, b). $||f(x_n, y_n) - f(a, b)|| = ||x_n + y_n - (a-b)|| = ||(x_n - a, -(y_n - b) + (y_n - b, x_n - a))|| \leq ||(x_n - a, (y_n - b))|| + ||(y_n - b, x_n - a)||$.

   Or $||(x, v)|| = ||(x, -v)|| = ||(v, x)|| \implies 0 \leq ||f(x_n, y_n) - f(a, b)|| \leq 2||(x_n - a, y_n - b)|| = 2||(x_n, y_n) - (a, b)|| \implies \lim_{n \to +\infty} ||f(x_n, y_n) - f(a, b)|| = 0 \implies \lim_{n \to +\infty} f(x_n, y_n) = f(a, b)$. Donc Voila ref to montrons

2. $E = (\mathbb{R}^2, ||.||_2)$, $F = (\mathbb{R}, |.|)$, $f : \mathbb{R}^2$
   $\{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

   Montrons que $\nexists \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$.

   Supposons que $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = b$. $(x_n) := (\frac{1}{n}, 0)$, $\lim_{n \to +\infty} x_n = (0, 0)$. $b = \lim_{n \to +\infty} f(\frac{1}{n}, 0) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot 0}{(\frac{1}{n})^2 + 0^2} = 0$. $(y_n) := (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $\lim_{n \to +\infty} y_n = (0, 0)$. $b = \lim_{n \to +\infty} f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{(\frac{1}{n})^2 + (\frac{1}{n})^2} = \frac{1}{2}$. Absurde $\frac{1}{2} \neq 0$. Donc f n'admet pas de limite en $(0, 0)$.

Définition 0.4.
Soient E, F *deux espaces vectoriels normés.* $A \subset E$, $f : A \to F$, $a \in adh(A)$, $B \subset E$.
Soit $b \in F$ *(ou éventuellement)* $b \in \{-\infty, +\infty, d^+, d^-\}$ *si* $F = \mathbb{R}, d \in \mathbb{R}$.
On considère $f|_{A \cap B} : \{A \cap F \to F???x \to f(x)$ *On dit que* $\lim_{x \to a, x \in B} f(x) = b$ *si* $\lim_{x \to a, x \in B} f|_{A \cap B} = b$.

Remarque 0.2. *Si* $A = B \cup C$*,* $\lim_{x\to a, x\in B} f(x) = b$ *et* $\lim_{x\to a, x\in C} f(x) = b$ *alors* $\lim_{x\to a} f(x) = b$*.*

Si $\lim_{x\to a, x\in V} f(x) = b$ *pour* V *ouvert contenant* a *alors* $\lim_{x\to a} f(x) = b$

Définition 0.5.
Soient $(E, ||.||_E)$*,* $(F, ||.||_F)$ *deux EVNs.* $U \subset E$*,* $V \subset F$*,* $f : U \to V$
Pour $a \in U$ *on dit que* f *est continue en* a *si* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Remarque 0.3. *Pour le montrer il suffit de démontrer que* $\lim_{x\to a, x\neq a} f(x) = f(a)$

Soit $U \subset A$ un ouvert de E, $f : A \to F$. f est continue en tout point de V si et seulement si $f|_V$ est continue en tout point.

Démonstration 0.2.

Pour $a \in V$*,* $f(a) = \lim_{x\to a} f(x) \iff f(a) = \lim_{x\to a, x\in U} f(x)$*.*

$\square$

Exemples:

1. $f(x) = ||x||_E$, $F = \mathbb{R}$, $||.||_F = |.|$ f est continue en tout point de E en effet: $\forall x, a \in E, 0 \leq |||x|| - ||a||| \leq ||x - a||$ Soit $(x_n)_n \to_{n\to+\infty} a$ $0 \leq |||x_n|| - ||a||| \leq ||x_n - a|| \implies \lim_{n\to+\infty} ||x_n|| = ||a||$.

Proposition 0.1: Composition des limites

$(E, ||.||_E)$, $(F, ||.||_F)$, $(G, ||.||_G)$ EVNs. $f : U \to V$, $g : V \to W$ avec $U \subset E$, $V \subset F$, $W \subset G$. Soient $a \in \mathrm{adh}(U), b \in \mathrm{adh}(V), c \in \mathrm{adh}(W)$. Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim_{y\to b} g(x) = c$ alors $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$. En partie si f est continue en a, g en $b = f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.

Démonstration 0.3.

Soit (x_n) *une suite de* U *convergeant vers* a *alors* $(f(x_n))$ *est un suite de* V *convergeant vers* $b = f(x)$ *alors* $(g(f(x_n)))_n$ *est une suite de* W *convergeant vers* c *cela implique* $\lim_{x\to a} f(x) = c$*.*

$\square$

Exemple

$f : \{(\mathbb{R}^2, ||.||_2) \to (\mathbb{R}, |.|)???(x, y) \to \{\frac{x^y}{x^2+y^2}\mathrm{si}(x, y) \neq (0, 0)0\mathrm{sinon}$

Montrons que f est continue en $(0, 0)$ Soit $(x, y) \neq (0, 0)$, $0 \leq |f(x, y) - f(0, 0)| = |\frac{x^y}{x^2+y^2} = \frac{x^y}{||(x,y)||_2^2} \leq \frac{||(x,y)||_2}{||(x,y||_2^2)} = ||(x, y)||_2^2$

Or $\lim_{(x,y)\to(0,0)\text{et}(x,y)\neq(0,0)} |f(x,y) - f(0,0)| = 0$ donc f est continue en $(0,0)$.

Définition 0.6.
(Prolongement et prolongement par continuité)
Soient $(E, ||.||_E), (F, ||.||_F)$ *deux EVNs,* $U \subset E, V \subset F$ *et* $f : U \to F$.
On dit que $g : V \to F$ *est un prolongement de* f *si* $\forall x \in U, g(x) = f(x)$
c'est un prolongement par continuité sur V *de* f *si* $V \subset adh(U)$ *et* $\forall a \in V\backslash U, \lim_{x\to a} f(x) = g(a)$

Remarque 0.4. *Si* g *est un prolongement par continuité alors* g *est continue en tout point de* $V\backslash U$ *en effet: Soit* $a \in V\backslash U, (x_n)_n \in V^{\mathbb{N}}$ *convergeant vers* a.

Soit $n \in \mathbb{N}$ *si* $x_n \in V$ *on pose* $y_n := x_n$ *Sinon on rend* $g_n \in V$ *tel que* $y_n \in B(x_n, \frac{1}{n})$ *On a défini* $(g_n)_n \in V^{\mathbb{N}}$ *tel que* $\lim_{n\to+\infty}$*//todo voir les 4 photos*

à faire jusqu'à compacité