Analyse | CM: 12

Par Lorenzo

05 décembre 2024

1 Dérivée d'une fonction

equation $y = ax + b = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0) = f'(x_0)x + (f(x_0) - x_0 f'(x_0))$

Définition 1.1. *Soit $f : I\mathbb{R}\mathbb{R}$, où I est un interval ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$, on dit que f est dérivable en x_0 si le taux d'accroissements $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite lorsque x tend vers x_0, et on la note $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.*

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ *alors* $|\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)| < \varepsilon \iff |f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0)| < \varepsilon |x - x_0| \iff |f($

Définition 1.2. *La fonction est dérivable sur I si f est dérivable en tout point x de I. On note la fonction $f' : {}_{\substack{I\mathbb{R}\mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x)}}$ (parfois $\dfrac{df}{dx}$)*

Proposition 1.1.

1. *f est dérivable en x_0 si et seulement si $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existe et est finie.*
2. *f est dérivable en x_0 ssi il existe un nombre réel $f'(x_0)$ et une fonction $\varepsilon : I\mathbb{R}\mathbb{R}$ avec $\varepsilon(x) \to 0$ tel que $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x)(x - x_0)$*

Démonstration 1.1.

On pose $x = x_0 + h \Rightarrow x - x_0 = h$

$\square$

Définition 1.3. *La droite qui passe par les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$ admet par coefficient directeur $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.*

A la limite $x \to x_0$ on trouve le coefficient directeur de la tangente qui vaut $f'(x_0)$ et l'équation de la tangente au point $(x_0, f(x_0))$ est donné par $y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$.

1.1 Dérivabilité et continuité

Proposition 1.2.

1. *Si f est dérivable en* x_0*, alors f est continue en* x_0.
2. *Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I.*
3. *Si f est dérivable et f' est continue, on dit que f est de class* ϕ^1.

Démonstration 1.2.

Comme f *dérivable en* $x_0, \exists \varepsilon : I \to \mathbb{R}$ *avec* $\varepsilon(x) \to 0$ *tel que* $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \varepsilon(x)(x - x_0)$ *et on veut montrer que* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Ici $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \varepsilon(x)(x - x_0)$

□

Remarques 1.1.

1. *Si f n'est pas continue, alors f n'est pas dérivable (contraposée).*
2. *La réciproque est fausse en général (Exemple la fonction* $|x|$ *en x = 0)*

1.2 Calcul de dérivée

1.2.1 Règle de calcul

Propriétés 1.1.

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ *et* $g : I \to \mathbb{R}$ *dérivable sur I. Alors* $\forall x \in I$*, on a*

1. $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$
3. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
4. *Si* $g(x) \neq 0, (\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

Démonstration 1.3.

Pour 1 et 2, on utilise la définition de la dérivée.

$$\frac{(\lambda f + g)(x) - (\lambda f + g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{\lambda f(x) + g(x) - \lambda f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{(\lambda f(x) - \lambda f(x_0)) + (g(x) - g(x_0))}{x - x_0} =$$

Pour 3, on cherche $(fg)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{fg(x) - fg(x_0)}{x - x_0}$.

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

Flemme

□

1.2.2 Dérivée de fonctions usuelles

Méthode 1.1.

1. $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
3. $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
4. $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
5. $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \ln(a)$
6. $f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$
7. $f(x) = \log_a(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x \ln(a)}$
8. $f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$
9. $f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x)$
10. $f(x) = \tan(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

1.2.3 Composition

Proposition 1.3.

Si f dérivable en x et g dérivable en f(x), alors $g \circ f$ *est dérivable en x et* $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$.

Démonstration 1.4.

À faire

$\square$

Corollaire 1.1. $f : I \to J$ *bijective et dérivable et* $f^{-1} : J \to I$ *sa réciproque. Si f' ne s'annule pas, alors* f^{-1} *est dérivable et* $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$, $\forall x \in I$

Démonstration 1.5.

À faire

$\square$

1.2.4 Dérivées succesives

Par récurrence, on définit la dérivée n-ième, notée $f^{(n)}$, comme $f^{(0)} = f, f^{(1)} = f', f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

Si les dérivées jusqu'à l'ordre n sont définies, on dit que f est de classe ϕ^n.

Définition 1.4 (Formule de Leibniz)**.** $(fg)^{(n)}(x) = (f(x)g(x))^{(n)}$

Définition 1.5 (binome de Newton)**.** $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ *À faire*