Ensemble Complex

Par Lorenzo

24 November 2024

Contents

1 Méthodes de démonstration 1

1.1 Implication

Pour démontrer un énoncé du type $P \implies Q$ (Si P alors Q)

Méthode 1.1.

> *On suppose P.*
> *raisonnement profond.*
> *on en conclut Q.*

Example 1.1.

$$\textit{Démontrons que } x \in \mathbb{R} \implies x + 1 \in \mathbb{R}_+$$

On suppose $x \in \mathbb{R}$

$x \geq 0$
$x + 1 \geq 0 + 1 \geq 0$

Donc $x + 1 \in \mathbb{R}_+$

Remarques 1.1. $A \subset B$ *(*$A, B \subset E$*) par définition se traduit par* $\forall x \in E, x \in A \implies x \in B$

1.2 Règle d'inférence ("Déduction naturelle")

Supposons A, B deux formules logiques dépendant d'énoncés élémentaires P, Q, R, ... Imaginons que pour chaque ligne de la table de vérité où A est vrai, B l'est également. Ainsi lorsqu'on a A on pourra déduire B

Example 1.2. *Supposons* $P \implies P \vee Q$
Quand P *est vrai* $P \vee Q$ *est vrai.*

1.3 Disjonction de cas

De même une tautologie est une règle qui est toujours vraie. Un exemple $(P \vee \neg Q)$.

Example 1.3. *Théorème si* $x \in \mathbb{N}$ *alors* $x(x + 1)$ *pair.*

Si x *est pair alors* $x = 2k, k \in \mathbb{N}$.
$x(x + 1) = 2(k(x + 1))$ *est pair.*

Si x *est impair* $x + 1$ *est pair implique* $\exists k \in \mathbb{N}, (x + 1) = 2k$.
$x(x + 1) = x + 2k = 2(kx)$ *implique* $x(x + 1)$ *pair.*

Conclusion: Dans tous les cas $x(x + 1)$ *est pair.*
C'est un raisonnement par disjonction de cas.

Méthode 1.2.

Plus généralement si $A \vee B \vee C \vee ...$ *est une tautologie alors la méthode de la démonstration*

1) Suppose A

raisonnement profond

conclusion

2) Suppose B

raisonnement profond

même conclusion

3) ...

Donc la conclusion est vrai dans tous les cas

Remarques 1.2. *Pour trouver des synonyme en regardant toute les valeurs dans une table de vérités, on utilise une disjonction de cas.*

Example 1.4. *Soit un entier n, n est impair ou n^2 est un multiple de 4.*

Supposons que n ne soit pas impair.
Alors n est pair, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$
Ainsi $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$.
n^2 est un multiple de 4.

1.4 La double implication

Si vous souhaitez montrer que $P \iff Q$, il suffit de montrer $P \implies Q$ et $Q \implies P$.

Example 1.5. $x \in \mathbb{N} \iff x + 1 \in \mathbb{N}^*$
1) Supposons que $x \in \mathbb{N}$, donc $x \geq 0 \implies x + 1 \geq 1$
Ainsi $x + 1 \in \mathbb{N}^*$
2) Supposons que $x + 1 \in \mathbb{N}^*$, donc $x + 1 \geq 1 \implies x + 1 - 1 \geq 1 - 1 \implies x \geq 0$.
La soustraction est stable sur $\mathbb{Z}$, de plus $x \geq 0$ donc $x \in \mathbb{Z}_+ \equiv \mathbb{N}$

Remarques 1.3. *Régulièrement utilisé pour montre que deux ensembles sont égaux, on montre $A \subset B$ et $B \subset A$. Cela s'appelle la **double inclusion**.*

1.5 Raisonnement par contraposée

$P \implies Q$ est synonyme à $\neg Q \implies \neg P$, ça se prouve facilement en comparant leurs tables de vérités.

Example 1.6. *Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que si n^2 alors n est pair.*

Supposons que n est impair, alors il existe $k \in \mathbb{Z}, n = 2k + 1$
Ainsi $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ est impair.
n impair implique n^2 impair donc n^2 pair implque n pair (la proposition de base).

1.6 Raisonnement par l'absurde

Pour montrer que P est vrai, on peut supposer P faux et arriver à une contradiction.

Example 1.7. *Montrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel.*

Démonstration.

On suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel, i.e. on peut écrire $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$ (et $pgcd(a, b) = 1$).

$\sqrt{2} = \dfrac{a}{b} \implies 2 = \dfrac{a^2}{b^2} \implies 2b^2 = a^2$

Ainsi a^2 est pair et avec le raisonnement précédent a est aussi pair (donc $a = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$).

$2b^2 = (2k)^2 \implies 2b^2 = 4k^2 \implies b^2 = 2k^2$

Ainsi b^2 est pair et b aussi.

Absurde a et b sont premiers entre eux, ils ne peuvent pas être tous les deux multiple de 2.

□

2 Logique avec quantificateurs

Quand on utilise des quantificateurs il y a des règles à suivre:

Règle numéro 1: Toute lettre dans un énoncé doit être introduite par un quantificateur.

Règle numéro 2: Cette introduction doit se faire avant la première occurence de la variable.

Règle numéro 3: On doit toujours préciser à quel ensemble appartient la variable.

Méthode 2.1.

Quand on veut montrer un énoncé universel ($\forall x \in X, P(x)$)

1) ***"Soit*** $x \in X$***, montrons P(x)."***

2) ***raisonnement profond.***

3) ***On montre P(x).***

Example 2.1. $\forall x \in \mathbb{R}, \dfrac{x}{x^2+1} \geq \dfrac{-1}{2}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2+1} \geq -\frac{1}{2} &\implies 2x \geq -(x^2+1) \\ &\implies (x^2+2x+1) \geq 0 \\ &\implies (x+1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Pour donner un nom à une quantité/un objet mathématique, on écrit:
Posons A := ..., **Notons A le ...** ou **Soit A := ...**.

Méthode 2.2.

Quand on veut montrer qu'il existe x appartenant à A vérifiant P(x),
Soit on a en tête un exemple d'élément x dans A vérifiant P(x)

Posons x = ...

Vérifions $x \in A$

Vérifions P(x)

Soit on essaye d'utiliser des théorèmes d'existence pour montrer qu'un tel x existe.

Remarques 2.1. *Les mêmes quantificateurs peuvent être intervertis mais pas quand ils sont différent (un $\forall$ avec un $\exists$).*

3 Méthodes de démonstration 2

3.1 Unicité d'un objet

Nous croiserons régulièrement des énoncés du type: "Il y a au plus un élément $x \in X$ vérifiant P(x)".

Méthode 3.1.

Pour montrer qu'un ensemble X contient au plus un élément vérifiant une propriété P, on peut procédé ainsi.

1) ***Soient x et x' deux élément de X vérifiant P, montrons x = x'***

2) ***Raisonnement profond.***

3) ***On en conclut l'unicité d'un élément vérifiant P****.*

Remarques 3.1. *L'unicité ne veut pas dire qu'on a montré l'existence.*

Example 3.1. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *Montrer qu'il existe au plus un multiple de 10 dans* $X = \{n, n+1, ..., n+5\}$

Démonstration 3.1.

Soient $k, k' \in [0, 5]$ *tel que* $10 \mid n+k$ *et* $10 \mid n+k' \implies \exists p \in \mathbb{Z}, n+k = 10p$ *et* $\exists p' \in \mathbb{Z}, n+k' = 10p'$

Par soustraction $(n+k) - (n+k') = 10m - 10m' \implies (k-k') = 10(m-m')$

Or $-5 \leq (k-k') \leq 5$ *et le seul multiple de 10 dans cette intervalle est 0.*

$$\boxed{\text{Donc } k = k' \text{ et } n+k = n+k'.}$$

□

3.2 Analyse synthèse

Méthode 3.2.

Pour déterminer l'ensemble des éléments d'un ensemble E vérifiant une propriété P, on peut raisonner par analyse/synthèse.

Analyse: *soit* $x \in E$*. on suppose que x vérifie P.*

... on regarde les forme possible de x.

Synthèse: *Posons x = ... les différente formes possibles trouvées.*

Vérifions que x vérifie P (et appartient bien à E).

Example 3.2. *Trouvons les couples de nombres réels non-nuls (x, y), solutions du système*

$$(S) \begin{cases} xy = 2 \\ \dfrac{y}{x} = 2 \end{cases}$$

Démonstration.

Analyse: *Soit* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
$xy \times \dfrac{y}{x} = 2 \times 2 \implies y^2 = 4 \implies y = 2 \vee y = -2$
La ligne 1 (de S) donne $x = \dfrac{2}{y}$
Donc les seuls couples possibles pour (x, y) sont (1, 2) et (-1, -2)

Synthèse: *On vérifie les deux couples trouvés.*
$1 = 2$ *et* $\dfrac{2}{1} = 2$ *puis* $-1 \times (-2) = 2$ *et* $\dfrac{-2}{-1} = 2$

Donc (1, 2) et (-1, -2) sont l'ensemble des couples qui sont solutions de S.

□

3.3 Définition de $\mathbb{N}$ par récurence

Définition 3.1. $\mathbb{N}$ *est l'ensemble construit par*

$\mathbb{N}$ *contient un élément noté 0.*
Chaque élément $n \in \mathbb{N}$ *admet un unique successeur noté succ(n) = n + 1.*
$\forall x \in \mathbb{N}, [succ(x) \neq 0]$.
$\forall x, y \in \mathbb{N}, [succ(x) = succ(y) \implies x = y]$.
$\forall A \subset \mathbb{N}, [(0 \in A \wedge (n \in A \implies succ(n) \in A)) \implies A = \mathbb{N}]$ *(important pour la récurence).*

Remarques 3.2. *Avec cette notation par récurence on peut définir* $\sum$ *par*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \begin{cases} 0 & si\ n = 0 \\ (\sum_{i=1}^{n-1} a_i) + a_n & si\ n \geq 1 \end{cases}$$

Méthode 3.3.

Pour montrer une propriété P_n *est vrai pour tout entier* $n \geq n_0$.
Donner explicitement la propriété P_n.
Initialisation: *On montre* P_{n_0}.
Hérédité: *Soit* $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, *tel que* P_n *est vraie.*
Montrons que P_{n+1}.

Remarques 3.3. *Il peut arrivé qu'on ne puisse pas déduire* P_{n+1} *de* P_n *mais seulement* P_{n+2} *à partir de* P_{n+1} *et* P_n, *on fait alors une récurence double.*

Méthode 3.4.

Si P_{n_0} *et* P_{n_0+1} *sont vraies et si* $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, (P_n \wedge P_{n+1} \implies P_{n+2})$
Alors $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, P_n$ *est vrai.*

Il existe aussi une récurence forte.

Méthode 3.5.

Si P_{n_0} *est vraie et si* $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, (\forall k \in \mathbb{N}, n_0 \leq k \leq n, P_k \implies P_{n+1})$
Alors $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, P_n$ *est vrai.*

4 Théorie des ensembles

4.1 Opérations sur les ensembles

Définition 4.1. *Un ensemble est une collection d'éléments. Il est défini par la connaissance de ses éléments.*

Soit A un ensemble $a \in A$ signifie que a appartient à A. On dit alors que a est un élément de A.

Remarques 4.1. *La définition d'un ensemble peut se faire des façon suivante:*

- *liste exaustive (1, 2, 3)*
- *paramétrique ($\{2x + 1 \mid x \in \mathbb{N}\}$)*
- *inplicite ($\{x \in \mathbb{R} \mid x(x + 1) > 0\}$)*

Remarques 4.2. *Dans un ensemble l'ordre et la répétition n'a pas son importance.*

Définition 4.2. *Soient A et B deux ensembles. On dit que A est un sous-ensemble de B lorsque $\forall x \in A, x \in B$, on note plus $A \subset B$.*

Soit A un ensemble fini, le cardinal de A est le nombre d'éléments de A, noté $\text{card}A$.

Un ensemble avec un seul élément est un singleton.

Un ensemble qui ne contient aucun éléments est appelé l'ensemble vide (noté $\emptyset$ ou $\{\}$), c'est un sous ensemble de tout les ensembles.

Remarques 4.3. *Un quantificateur universelle sur l'ensemble vide est automatiquement vérifié. (e.g. $\forall x \in \emptyset, P(x)$)*

Définition 4.3. *Soient A, B des parties d'un ensemble E.*

La réunion de A et de B, notée $A \cup B$ est la partie de E dont les éléments sont éléments de A ou de B.

$A \cup B = \{x \in E, x \in A \vee x \in B\}$

Définition 4.4. *Soient A, B des parties d'un ensemble E.*

L'intersection de A et de B, notée $A \cap B$ est la partie de E dont les éléments sont éléments de A et de B.

$A \cap B = \{x \in E, x \in A \wedge x \in B\}$

Remarques 4.4. *La réunion n'est pas un ou exclusive.*

Remarques 4.5. *$A \cup B$ est le plus petit ensemble contenant A et B*

Remarques 4.6. *$A \cap B$ est le plus grand ensemble contenu dans A et B*

Remarques 4.7. *Comme un élement peut seulement être ou ne pas être dans un ensemble, on peut faire une disjonction de cas.*

Définition 4.5. *Soient A, B deux sous ensemble d'un ensemble E.*

- *A et B sont dits disjoints si $A \cap B = \emptyset$*
- *Le complémentaire de A dans E est la partie de E dont les éléments sont tous les éléments de E qui ne sont pas dans A. On le note $E \backslash A = \{x \in E \mid x \notin A\}$. Autres notations: $C_E A$ ou A^C*
- *La différence symétrique de A et B, notée $A \Delta B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$*

Définition 4.6. *Soit I un ensemble, Soient* $(A_i)_{i\in I}$ *des sous ensembles d'une ensemble E.*
L'intersection des A_i *est* $\Cap_{i\in I} A_i := \{x \in E, \forall i \in I, x \in A_i\}$
L'union des A_i *est* $\Cup_{i\in I} A_i := \{x \in E, \exists i \in I, x \in A_i\}$
Par convention: si $I = \emptyset$ *alors* $\Cup_{i\in I} A_i := 0$ *et* $I = \emptyset$ *alors* $\Cap_{i\in I} A_i := E$

Définition 4.7. *Soient A, B deux sous ensembles non vides de E.*
A et B sont complémentaires dans E ou forment une partition de E si $E = A \cup B$ *et* $A \cap B = \emptyset$

Remarques 4.8. *Le non complémentaire vient du fait qu'une autre définition soit* $A = E \backslash B \iff B = E \backslash A$

Soit E un ensemble. On note $P(E)$ l'ensemble des parties de E.

Remarques 4.9. *Il est équivalent d'écrire* $A \subset E$ *ou* $A \in P(E)$

Remarques 4.10. *Pour tout ensemble E, on a* $\emptyset \in P(E)$ *et* $E \in P(E)$

Théorème 4.1. *Lorsque* $card(E) = n$ *avec* $n \in \mathbb{N}$ *alors* $card(P(E)) = 2^n$

Démonstration 4.1.

Initialisation: $card(E) = 0 \implies E = \emptyset$ *alors* $P(E) = \{\emptyset\}$ *donc* $card(P(E)) = 1 = 2^0$
Hérédité: *Soit E de cardinal* $n \geq 1$. *Soit* $a \in E$, $F = E \backslash \{a\}$
$card(F) = n - 1$
Les parties de E sont les X et les $X \cup \{a\}$ *où* $X \in P(F)$
Ainsi card(P(E)) = card(P(F)) + card(P(F))

□

Définition 4.8. *Soient E et F deux ensembles.*
Le produit cartésien de E par F est l'ensemble $E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \wedge y \in F\}$

Remarques 4.11. *Attention ce n'est pas commutatif,* $E \times F \neq F \times E$

Définition 4.9. *Soient* $E_1, E_2, ..., E_n$ *des ensembles.*
$E_1 \times E_2 \times ... \times E_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n), \forall i \in \{1, 2, ..., n\}, x_i \in E_i\}$
$(x_1, x_2, ..., x_n)$ *est appelé un n-uplet.*

Définition 4.10. *Soient X, Y deux ensembles.*

- *Une application de X dans Y est la donnée, pour tout point* $x \in X$ *d'un unique point* $y \in Y$ *associé à x. On dit que y est l'image de x par l'application.*
- *Soit f est une application de X dans Y.*

◇ *on note f(x) l'image de x par f*

◇ *X est appelé espace de départ de f.*

◇ *Y est appelé espace d'arrivée de f.*

Remarques 4.12. *Deux applications f et g sont égales si elles ont même ensemble de départ, même ensemble d'arrivée et si*
$\forall x \in X,\ f(x) = g(x)$

Remarques 4.13. *On ne change pas une application en modifiant la (les) variable(s) muette(s) permettant de la définir. Ainsi les applications suivantes sont égales:*
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}(x, y) \to x + y, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \to x_1 + x_2$

Remarques 4.14. *Pour toute fonction f, si $x_1 = x_2$ alors $f(x_1) = f(x_2)$, la réciproque est fausse en général.*

Remarques 4.15. *Etant donnée une application $f : X \to Y x \to f(x)$ et $X' \subset X$, on peut créer une application restreinte $f_{|X'} : X' \to Y x \to f(x)$*

Définition 4.11. *Soient X, Y des ensembles.*

• *On appelle graphe dans $X \times Y$ toute partie G de $X \times Y$ telle que $\forall x \in X, \exists! y \in Y, (x, y) \in G$*

• *Si f est une application de X dans Y, alors le graphe de f est $G_f := \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$*

Remarques 4.16. *Réciproquement si G est un graph*

Remarques 4.17. *Une fonction n'étant pas nécessairement définie sur tout l'ensemble de départ considéré (souvent $\mathbb{R}$).*

Définition 4.12. *Soit $f \in Y^X$*

• *On dit que $x \in X$ est un antécédent de $y \in Y$ par f lorsque $f(x) = y$, i.e. lorsque y est l'image de x par f.*

• *Si A est un sous ensemble de X, on appelle image de A l'ensemble $f(A) := \{f(a) \mid a \in A\} = \{y \in Y \mid \exists a \in A, f(a) = y\} \subset Y$*

• *Si B est un sous ensemble de Y, on appelle image réciproque de B l'ensemble des antécédents d'éléments de B: $f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\} \subset X$*

Remarques 4.18. *Attention à la notation, f(a) et f(A) ne sont pas de même nature. Pour tout $x \in X, f(\{x\}) = \{f(x)\}$*

Théorème 4.2. *Soit $f \in Y^X$*

• *Pour toutes parties A et B de Y on a,*

$\diamond$ $A \subset B \implies f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$

$\diamond$ $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

$\diamond$ $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

• *Pour toutes parties A et B de X, on a*

$\diamond$ $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$

$\diamond$ $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

$\diamond$ $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Démonstration 4.2.

□

Définition 4.13. *Soient E et F deux ensembles arbitraires On dit que E et F ont même cardinal s'il existe une bijection entre E et F.*

Soit E un ensemble. On dit que E est dénombrable s'il existe une injection de E dans $\mathbb{N}$

Proposition 4.1.

$\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}, \mathbb{N}^2, \mathbb{Q}, \mathbb{N}^n$ *sont dénombrables.*
$\mathbb{R}, P(\mathbb{N})$ *ne sont pas dénombrables*
$P(\mathbb{N})$ *et* $\mathbb{R}$ *ont même cardinal.*

5 Relation et permutations

Définition 5.1. *Soit E un ensemble non vide. Une relation binaire R sur E est la donnée d'une application* $E \times E \to$ *Vrai, Faux.*

On dit que x est en relation avec y lorsque l'image de (x, y) par l'application est "Vrai" et on note alors xRy

Remarques 5.1.

Définition 5.2. *Soit E un ensemble non vide et R une relation binaire sur E. On dit que R est*

réflexive *lorsque* $\forall x \in E, xRx$

symétrique *lorsque* $\forall (x,y) \in E^2, xRy \iff yRx$

antisymétrique *lorsque* $\forall (x,y) \in E^2, (xRy \wedge yRx) \implies x = y$

transitive *lorsque* $\forall (x,y,z) \in E^3, xRy \wedge yRz \implies xRz$

Définition 5.3. *Soit R une relation sur un ensemble E. On dit que R est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.*

Définition 5.4. *Soit* $E \neq \emptyset$ *un ensemble muni d'une rel. d'équivalence R.*
Soit $x \in E$.
On appelle classe d'équivalence modulo R de x et on note $\overline{x}$ *l'ensemble* $\{x \in E, xRy\}$.

Théorème 5.1. *L'ensemble des classes d'équivalence de E modulo R forme une partition de E.*

Démonstration 5.1.

□

Définition 5.5. *L'ensemble des classes d'équivalence de E modulo R s'appelle l'ensemble quotient de E par R. On le note E/R.*

Définition 5.6. *Soit R une relation sur un ensemble E.*

On dit que R est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive. Notée souvent $\preccurlyeq$ *cursif. On dit que* $(E, \preccurlyeq)$ *est un ensemble ordonné.*

Relation d'ordre totale lorsque R est complète $(\forall x, y \in E, (xRy \vee yRx))$

Définition 5.7. *Soit* $(E, \preccurlyeq)$ *ensemble ordonné. Soit* $A \in P(E)$. *On dit que*

A admet un minimum lorsque
$\exists a_0 \in A, \forall A, a_0 \preccurlyeq a$ *On note min(A)* $:= a_0$

A admet un maximum lorsque

$\exists a_0 \in A, \forall a \in A, a \preccurlyeq a_0$ *On note* $max(A) := a_0$

A est minoré lorsque

$\exists m \in E, \forall a \in A, m \preccurlyeq a$

Remarques 5.2. *Si A admet un minimum (resp. un maximum) alors A est minoré (resp. majoré)*

Remarques 5.3. *Si A admet un minimum (resp. maximum), il est unique.*

Proposition 5.1.

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre totale $\preccurlyeq$*. Soit* $A \in P(E)$ *un ensemble fini non-vide. Alors A admet un minimum et un maximum.*

6 Permutations

7 Ensemble et nombres complexes