

# Analyse2 | CM: 4

Par Lorenzo

13 février 2025

## 1 Relations de comparaisons de fonctions

...

### Démonstration 1.1.

- *Le resultat est immédiat par le fait qu'une fonction ayant une limite finie en  $a$  est bornée au voisinage de  $a$ .*
- *Soient  $V, W$  deux voisinages de  $a$  et  $\varepsilon_0, B$  deux fonctions telles que:*
  - $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_0(x) = 0$
  - $B$  est bornée sur  $V$

*Soient  $f, g, h$  trois fonctions telles que:*

- $f(x) = B(x)g(x)$  pour tout  $x \in I \cap V$
- $g(x) = \varepsilon_0(x)h(x)$  pour tout  $x \in I \cap W$

*Ainsi pour tout  $x \in I \cap (V \cap W)$  on a  $f(x) = B(x)\varepsilon_0(x)h(x)$ , d'où le résultat avec  $\varepsilon = B \times \varepsilon_0 \xrightarrow{a} 0$ .*

*Finalement on a  $f(x) = h(x)\varepsilon \iff f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(h(x))$ .*

□

...

### Démonstration 1.2.

*On a  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \iff f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} g(x) + o(g(x))$*

*i.e. il existe une fonction  $\varepsilon$  définie sur un voisinage  $V$  de  $a$  tel que  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$  et  $f(x) = g(x) + \varepsilon(x)g(x) \forall x \in I \cap V$  ou encore  $f(x) = (1 + \varepsilon(x))g(x) \forall x \in I \cap V$ . Prendre  $\theta = 1 + \varepsilon$ .*

□