

Science Decision

Par Lorenzo

20 November 2024

Contents

Arrivé apres le premier CM (cours à venir)

1 Relations binaires

Définition 1.1. Une relation binaire R sur un ensemble X est un sous-ensemble de paires ordonnées $(x, y) \in X^2$, on simplifie la notation par xRy (resp. $\neg xRy$) pour $(x, y) \in R$ (resp. $(x, y) \notin R$).

Propriétés 1.1.

réflexive si

$$\forall x \in X, xRx$$

irréflexive si

$$\forall x \in X, \neg(xRx)$$

symétrique si

$$\forall x, y \in X, xRy \implies yRx$$

asymétrique si

$$\forall x, y \in X, xRy \implies \neg(yRx)$$

antisymétrique si

$$\forall x, y \in X, xRy \wedge yRx \implies x = y$$

transitive si

$$\forall x, y, z \in X, xRy \wedge yRz \implies xRz$$

négativement transitive si

$$\forall x, y, z \in X, \neg(xRy) \wedge \neg(yRz) \implies \neg(xRz)$$

complète (ou totale) si

$$\forall x, y \in X, xRy \vee yRx$$

Remarques 1.1. la notation xRy peut être remplacé par $(x, y) \in R$, par exemple pour la réflexivité, $(\forall x \in X, (x, x) \in R)$.

Une relation qui satisfait certaines propriétés peut porter un nom.

Définition 1.2.

1. Une **relation d'équivalence** si elle est réflexive, symétrique et transitive.
2. Un **préordre (ou quasi ordre)** si elle est réflexive et transitive.
3. Un **ordre faible (ou préordre total)** si elle est transitive et complète.
4. Un **ordre faible strict** si elle est asymétrique et négativement transitive.
5. Un **ordre partiel** si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.
6. Un **ordre partiel (ou ordre, ordre linéaire, chaîne)** si elle est antisymétrique, transitive et complète.

Exemple 1.1.

1. \mathbb{R} est totalement ordonnées par \geq et est appelé l'ordre naturel sur \mathbb{R} .
2. \mathbb{N} avec $>$ est un ordre faible strict.
3. Deux entiers relatifs x et y sont congrus modulo $p \in \mathbb{N}$, s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x = y + kp$, ce que l'on note $x \equiv y[p]$. La relation de congruence modulo sur \mathbb{Z} est une relation d'équivalence.

Proposition 1.1.

Si R est asymétrique alors R est réflexive.

Démontré trivialement par les définitions d'asymétrie et de réflexivité.

Proposition 1.2.

Si R est irréflexive et transitive alors R est asymétrique.

Démonstration 1.1.

On suppose que R est irréflexive, transitive et non asymétrique.

La non asymétrie se traduit par

$$\neg(\forall x, y \in X, xRy \implies \neg(yRx)) \quad \equiv \quad \exists x, y \in X, xRy \wedge yRx$$

Ainsi avec la non asymétrie et la transitivité on arrive à

$$\begin{aligned} \exists x, y \in X, xRy \wedge yRx \quad \wedge \quad \forall x, y, z \in X, xRy \wedge yRz \implies xRz \\ \equiv \quad \exists x, y \in X, xRy \wedge yRx \implies xRx \end{aligned}$$

Ce qui est absurde car ça contredit l'irréflexivité !!!

Donc Si R est irréflexive et transitive alors R est asymétrique.

□

Proposition 1.3.

R est négativement transitive ssi

$$\forall x, y, z \in X, xRz \implies xRy \vee yRz$$

Démonstration 1.2.

Utilisons la contraposée du négativement transitive
(Rappel la contraposée de $P \implies Q$ est $\neg Q \implies \neg P$),

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in X, \neg(\neg(xRz)) \implies \neg(\neg xRy \wedge \neg yRz) \\ \equiv \quad \forall x, y, z \in X, xRz \implies xRy \vee yRz \end{aligned}$$

Ainsi R est négativement transitive ssi

$$\forall x, y, z \in X, xRz \implies xRy \vee yRz$$

□

Proposition 1.4.

Si R est complète alors R est réflexive

Démontré facilement par définition en prenant un x et un $y = x$.

1.1 Opérations sur les relations

Puisque une relation R sur X est un sous ensemble de $X \times X$, on peut facilement utiliser des opérations ensemblistes.

Définition 1.3. Étant donné deux relation R_1 et R_2 sur un ensemble X .

- la relation **complémentaire** de R_1 , la relation binaire R_1^c sur X telle que
 $\forall x, y \in X, xR_1^c y$ si $\neg(xR_1 y)$
- la **réunion** de R_1 et R_2 est la relation binaire $R_1 \cup R_2$ sur X telle que
 $\forall x, y \in X, xR_1 \cup R_2 y$ si $xR_1 y \vee xR_2 y$
- l'**intersection** de R_1 et R_2 est la relation binaire $R_1 \cap R_2$ telle que
 $\forall x, y \in X, xR_1 \cap R_2 y$ si $xR_1 y \wedge xR_2 y$

- la relation R_1 est **compatible** avec R_2 si
 $\forall x, y \in X, xR_1y \implies xR_2y$ ou de manière équivalente $R_1 \subset R_2$
- la relation **réciproque** (ou duale, inverse) de R_1 , la relation binaire R_1^{-1} sur X telle que
 $\forall x, y \in X, yR_1^{-1}x$ si xR_1y
- la **composée** de R_1 et R_2 , la relation binaire $R_1 \circ R_2$ sur X telle que
 $\forall x, y \in X, xR_1 \circ R_2y$ si $\exists z \in X, xR_2z \wedge zR_1y$

1.2 Relations d'équivalence

Proposition 1.5.

L'intersection $R_1 \cap R_2$ de deux relations d'équivalences R_1 et R_2 sur un ensemble X est une relation d'équivalence.

Démonstration 1.3.

- **Réflexive** car $\forall x \in X, xR_1x \wedge xR_2x$, ainsi $xR_1 \cap R_2x$ pour tout $x \in X$.
- **Symétrie** car $\forall x, y \in X, (xR_1y \wedge yR_1x) \wedge (xR_2y \wedge yR_2x)$, ainsi $\forall x, y \in X, xR_1y \wedge xR_2y$ ce qui implique que $yR_1x \wedge yR_2x$ soit $\forall x, y \in X, (xR_1y \wedge yR_2x) \wedge (xR_2y \wedge yR_1x)$.
- **Transitive** car $\forall x, y \in X, xR_1y \wedge xR_2y \wedge yR_1z \wedge yR_2z \implies xR_1z \wedge xR_2z \implies xR_1 \cap R_2z$

$R_1 \cap R_2$ est Réflexive, Symétrique, Transitive donc c'est une relation d'équivalence.

□

Soit $x \in X$ l'ensemble $\{y \in X \mid xRy\}$ est appelé classe d'équivalence de x notée C_x .

Exemple 1.2. " $=$ " sur \mathbb{N}

- $\forall a \in \mathbb{N}, a = a$ (Réflexive)
 - $\forall a, b \in \mathbb{N}, a = b \implies b = a$ (Symétrique)
 - $\forall a, b, c \in \mathbb{N}, a = b \wedge b = c \implies a = c$ (Transitive)
- " $=$ " est une relation d'équivalence sur \mathbb{N}

$$C_2 = \{y \in \mathbb{N}, 2 = y\} = \{2\}$$

$\{C_x \mid x \in X\}$ est l'ensemble quotient de X par R noté X/R .

Proposition 1.6.

Soit R une relation d'équivalence sur X , X/R forme une partition de X , i.e.

- $\forall x, y \in X, C_x \cap C_y = \emptyset$ ou $C_x = C_y$
- $X = \bigcup_{x \in X} C_x$

Démonstration 1.4.

Nous allons montrer que

$$\forall x, y \in X, xRy \implies C_x = C_y$$

$$\forall x, y \in X, \neg xRy \implies C_x \cap C_y = \emptyset$$

Soient $x, y \in X$

so xRy soit $z \in C_x$ alors xRz

□

Remarques 1.2. Pour une relation binaire il est toujours vrai que $\forall x, y \in X, xRy \vee \neg xRy$

1.3 Ordre faible et ordre total

Soit R une relation binaire sur l'ensemble X .

On définit I et S sur X par

$$\begin{aligned}\forall x \in X, y \in X, xIy &\text{ si } xRy \wedge yRx \\ \forall x \in X, y \in X, xSy &\text{ si } xRy \wedge \neg yRx\end{aligned}$$

Exemple 1.3. $A = \{a, b, c\}$

$$R = \{(a, b), (b, a), (a, c), (b, c)\}$$

$$I = \{(a, b), (b, a)\}$$

$$S = \{(a, c), (b, c)\}$$

Proposition 1.7.

si R est un ordre faible sur X , alors

1. *I est une relation d'équivalence*
2. *S est irréflexive et transitive*

Démonstration 1.5.

I relation d'équivalence:

I réflexive

Soit $x \in X, xIx \iff xRx \wedge xRx \iff xRx$ vrai car R est complète

I symétrique

Soient $x \in X, y \in X, xIy \implies xRy \wedge yRx \implies yRx \wedge xRy \implies yIx$

I transitive

Soient $x, y, z \in X, xIy \wedge yIz \implies xRy \wedge yRx \wedge yRz \wedge zRy \implies xRy \wedge yRz \wedge zRy \wedge yRx \implies xRz \wedge zRx \implies xIz$

□

On définit R^* sur X/I par

$\forall C_x \in X/I, C_y \in X/I, C_x R^* C_y$ lorsque xRy

R^* sur X/I est la réduction (relation quotient) de R sur X

Proposition 1.8.

Si R est un ordre faible alors R^ est un ordre total sur X/I*

Démonstration 1.6.

R^ antisymétrique*

Soient $C_x, C_y \in X/I, C_x R^ C_y \wedge C_y R^* C_x \implies C_x = C_y \implies xIy \implies y \in C_x \implies C_x = C_y$*

R^ transitive*

Soient $C_x, C_y, C_z \in X/I$

$C_x R^ C_y \wedge C_y R^* C_z \implies xRy \wedge yRz \implies xRz \implies C_x R^* C_z$*

R^ complète*

$C_x, C_y \in X/I, C_x R^ C_y \vee C_y R^* C_x$ car R complète*

□

1.3.1 Irréflexive et transitive

voir plus tard

1.4 Ordre total, Ordre partiel

R ordre partiel sur X

Soit $x \in X$, x est:

- un élément maximal si $\forall y \in X \setminus \{x\}, \neg(yRx)$
- le plus grand élément si $\forall y \in X, xRy$
- un élément minimal si $\forall y \in X \setminus \{x\}, \neg(xRy)$
- le plus petit élément si $\forall y \in X, yRx$

Proposition 1.9.

Il y a au plus un plus grand (resp. petit) élément.

Démonstration 1.7.

Soit x et x' deux plus grand (resp. petit) éléments avec $x \neq x'$.

Ainsi $\forall y \in X, xRy$ et $x'Ry \implies xRx'$ et $x'Ry \implies x = x'$

Absurde car on a supposé $x \neq x'$

□

Construction de diagramme de Hasse

- si xRy : x au dessus de y
- et si x **couvre** y : il n'existe pas $z \in X \setminus \{x, y\}$ tel que $xRz \wedge zRy$
- alors il y a une arête qui relie x et y

Définition 1.4. Une **chaîne** est un ensemble d'éléments de X totalement ordonné

Définition 1.5. Une **antichaîne** si $\forall x, xRy \vee yRx \implies x = y$

Soit c le nombre minimal de chaînes pour partitionner X

Soit A une anti-chaîne de cardinal maximal a

Remarques 1.3. partition avec le plus grand nombre de chaînes : $\{\{a\}, \{b\}, \dots, \{g\}\}$

Proposition 1.10.

X ensemble partiellement ordonné par R.

Le nombre d'éléments d'une antichaîne de cardinal maximal (a) est égale au nombre minimum de chaînes pour partitionner X.

Démonstration 1.8.

Preuve par récurrence sur $|x|$

Init. $|x| = 1$

X est une chaîne et une antichaîne $a = 1$

on partitionne X en 1 chaîne $c = a = 1$

here. Suppose que ça marche pour tous jusqu'à n

2 cas:

(a) si X contient une antichaîne de cardinal a contenant au moins un élément non minimal et au moins un élément maximal

(b) si X contient une antichaîne de cardinal a contenant que des éléments maximaux ou minimaux

(a) Soient $H = \{x \in X | \exists z \in A, xRz\}$ et $B = \{x \in X | \exists z \in A, zRx\}$

du fait de (a) $\exists w \in A$ non maximal implique $\exists y \in X, yRw$ et $y \notin B$ donc $|B| \leq n - 1$ donc B peut être partitionné en a chaînes

□

Suite de démonstration

Démonstration 1.9.

□

2 Préférence et utilité

2.1 Définition

Définition 2.1. Soit (X, \succsim) une structure de préférence (voir chap 2)

\succsim est une relation binaire sur X

On veut une application $f : (X, \succsim) \rightarrow (\mathbb{R}, \geq)$ telle que $x \succsim y \iff f(x) \geq f(y)$

f est une fonction d'utilité.

Soient $f : (X, R_1) \rightarrow (Y, R_2)$, On dira que f est isotone si $\forall x, z \in X, xR_1z \implies f(x)R_2f(z)$

Un homomorphisme de (X, R_1) vers (Y, R_2) si $\forall x, z \in X, xR_1z \iff f(x)R_2f(z)$

Remarques 2.1. Homomorphisme implique isotone