Analyse | CM: 10

Par Lorenzo

21 novembre 2024

0.0.1 Fonction continue sur un segment

Théorème 0.1. *Soit f une fonction continue sur un segment (un intervalle fermé et borné). Alors f est bornée et atteint ses bornes.*

Autrement dit, si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *alors* $f([a, b]) = [m, M]$ *avec* $m = \min_{x \in [a,b]} f(x)$ *et* $M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$

Démonstration 0.1.

Par un intervalle I, on sait d'apres le TVI que f(I) est un intervalle. Montrons que $m = inf(f(I))$ *et* $M = sup(f(I))$ *puis que m et M appartiennent à f(I).*

Vérifions que f est bornée. Supposons que f n'est pas majorée, c'est à dire $\forall A > 0, \exists x_0 \in I, f(x_0) > A$*, ou* $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$*. Mais f est continue, donc* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) < +\infty$*, Absurde.*

*** skip du cas minorée.*

Donc f est bornée, l'ensemble f(I) est borné et admet une borne supérieure M et une borne inférieure m.

Vérifions que $M \in f(I)$*. Supposons que* $M \notin f(I)$*, c'est à dire que* $\forall x \in I, f(x) < M$*.*

On étudie $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ *qui est bien définie car* $f(x) \neq M$*, et g est bornée.*

Par définition de la borne supérieure, il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *qui converge vers M avec* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in f(I)$*, D'apres le TVI, il existe une suite* $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de I tel que* $u_n = f(C_n) \to_{n \to +\infty} M$*.*

Mais $g(c_n) = \dfrac{1}{M - f(c_n)} \to_{n \to +\infty} +\infty$ *ce qui contredit le fait que g est bornée.*

Finalement $M \in f(I)$

□

0.0.2 Suite définie par une fonction

Soit f une fonction continue. On définit une suite récurrente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

c'est à dire $u_1 = f(u_0), u_2 = f(u_1) = f(f(u_0)) = f \circ f(u_0)$

Théorème 0.2. *Si f est continue, et si la suite* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge vers l, alors l est le point fixe de f, autrement dit* $f(l) = l$

Démonstration 0.2.

$u_{n+1} = f(u_n)$ *qui donne quand* $n \to +\infty$ *alors* $l = f(l)$

$\square$

Propriétés 0.1.

Si f est continue et croissante sur [a, b], alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et converge vers $l = f(l)$.

Si f est continue et décroissante sur [a, b], alors la sous-suite (u_{2n}) converge vers une limite l_1 solution de $l_1 = f \circ f(l_1)$ et la sous suite (u_{2n+1}) converge vers une limite l_2 solution de $l_2 = f \circ f(l_2)$.

Démonstration 0.3.

***Voir TD*

$\square$

0.1 Théorème de la bijection

0.1.1 Injection, surjection et bijection

Définition 0.1. *Soit f une fonction de A dans B, deux partie de $\mathbb{R}$, $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$.*

f est ***injective*** *si $\forall x, x' \in A, f(x) = f(x') \implies x = x'$*

f est ***sujrective*** *si $\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x)$*

f est ***bijective*** *si f est injective et sujrective, c'est à dire $\forall y \in B, \exists! x \in A, y = f(x)$*

Théorème 0.3. *Si $f : A \to B$ est bijective, alors il existe une application $g : B \to A$ telle que $f \circ g = Id_B$ et $g \circ f = Id_A$.*

On note $g = f^{-1}$ l'application ***réciproque*** *de f (qui est aussi une bijection).*

0.1.2 Fonctions monotones

Théorème 0.4. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, continue et strictement monotone. Alors*

f est une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle f(I).

La fonction réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$ est continue et strictement monotone avec le même sens de variation que f.

Démonstration 0.4.

Supposons que f strictement croissante.

Soit $x \neq x'$ avec $f(x) = f(x')$ alors $\begin{cases} \textit{soit } x < x' \textit{ et } f(x) < f(x') \\ \textit{soit } x > x' \textit{ et } f(x) > f(x') \end{cases}$

Car f strictement croissante, ce qui contredit le fait que $f(x) = f(x')$. Finalement $x = x'$

De plus, il est surjective car l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle $f(I) = \{y = f(x); x \in I\}$.

On conclut que f est injective et sujrective alors elle est bijective.

$\square$

0.2 Fonctions usuelles inverses

0.2.1 Logarithme et exponentielle

Définition 0.2. *Il existe une unique fonction notée* $ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *tell que*

$ln(a \times b) = ln(a) + ln(b)$

$ln(\frac{1}{a}) = -ln(a)$

$ln(a^n) = n \times ln(a)$

On appelle cette fonction logarithme népérien caractérisée par $ln(e) = 1$. *On définit le logarithme de e à base a comme* log_a *comme* $log_a(x) = \frac{ln(x)}{ln(a)}$ *ou* $log(a) = 1$

Propriétés 0.2.

La fonction ln est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ *avec* $\forall x > 0, (ln(x))' = \frac{1}{x}$, *elle définit une bijection de* $]0, +\infty[$ *dans* $\mathbb{R}$

$\lim_{x \to 0^+} ln(x) = -\infty$ *et* $\lim_{x \to +\infty} ln(x) = +\infty$

ln(1) = 0

Définition 0.3. *La fonction réciproque du logarithme népérien s'appelle exponentielle notée exp(x) ou* $e^x : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$

Propriétés 0.3.

En écrivant $f \circ f^{-1} = Id_{\mathbb{R}}$ *et* $f^{-1} \circ f = Id_{]0,+\infty[}$, *il vient*

$\forall x \in \mathbb{R}, ln(exp(x)) = x$ *et* $\forall y \in]0, +\infty[, exp(ln(y)) = y$

$exp(a + b) = exp(a)exp(b)$

$exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ *est continue et strictement croissante.*

Définition 0.4. *On appelle la fonction puissance de* $a > 0$ *comme* $a^x = exp(xln(a))$