In [1]:
```
import time
import warnings

warnings.filterwarnings('ignore')

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

from scipy.stats import binom, poisson
from bogdan_chuzhinov_v2 import *
```

In [2]:
```
params = {'amin': 75, 'amax': 90, 'bmin': 500, 'bmax': 600, 'p1': 0.1, 'p2': 0.01, 'p3':
```

Задание 1

Для вычислений распределений первой модели используем следующие формулы:

$$p(a=i)=\frac{1}{a_{max}-a_{min}+1}=\frac{1}{\alpha},\quad a_{min}\le i\le a_{max},$$

$$p(b=i)=\frac{1}{b_{max}-b_{min}+1}=\frac{1}{\beta},\quad b_{min}\le i\le b_{max},$$

$$p(c=i)=\sum_{a,b,d}p(a,b,c=i,d)=\sum_{a,b,d}p(d|c)p(c=i|a,b)p(a)p(b)=\frac{1}{\alpha\beta}\sum_{a,b}p(c=i|a,b)=\frac{1}{\alpha\beta}\sum_{a+b\ge i}(p_a*p_b)_i,$$

где $c_{min}=a_{min}+b_{min}\le i\le a_{max}+b_{max}=c_{max}$, а p_a*p_b --- свертка распределений $Bin(a,p_1)$ и $Bin(b,p_2)$,

$$p(d=i)=\sum_{a,b,c}p(a,b,c,d=i)=\sum_{a,b,c}p(d=i|c)p(c|a,b)p(a)p(b)=\frac{1}{\alpha\beta}\sum_{a+b\ge c,\ i\ge c}C_c^{i-c}p_3^{i-c}(1-p_3)^{2c-i}(p_a*p_b)_c.$$

\newline \newline

Для вычислений распределений второй модели используем следующие формулы:

$$p(a=i)=\frac{1}{a_{max}-a_{min}+1}=\frac{1}{\alpha},\quad a_{min}\le i\le a_{max},$$

$$p(b=i)=\frac{1}{b_{max}-b_{min}+1}=\frac{1}{\beta},\quad b_{min}\le i\le b_{max},$$

$$p(c=i)=\sum_{a,b,d}p(a,b,c=i,d)=\sum_{a,b,d}p(d|c)p(c=i|a,b)p(a)p(b)=\frac{1}{\alpha\beta}\sum_{a,b}p(c=i|a,b)=\sum_{a,b}\frac{(ap_1+bp_2)^ie^{-(ap_1+bp_2)}}{i!\alpha\beta},$$

$$p(d=i)=\sum_{a,b,c}p(a,b,c,d=i)=\sum_{a,b,c}p(d=i|c)p(c|a,b)p(a)p(b)=\frac{1}{\alpha\beta}$$

$$\sum_{a,b,\ c\leq i}C_c^{i-c}p_3^{i-c}(1-p_3)^{2c-i}\frac{(ap_1+bp_2)^c e^{-(ap_1+bp_2)}}{c!}.$$

Задание 2

Для первой модели найдем матожидания используя тождество Вальда:

$$\mathbb{E}(a)=\frac{a_{min}+a_{max}}{2}=82.5,$$

$$\mathbb{E}(b)=\frac{b_{min}+b_{max}}{2}=550,$$

$$\mathbb{E}(c)=\mathbb{E}\sum_{i=0}^{a}\xi_i+\mathbb{E}\sum_{i=0}^{b}\xi_i'=\mathbb{E}ap_1+\mathbb{E}bp_2=13.75,$$

$$\mathbb{E}(d)=\mathbb{E}c+\mathbb{E}\sum_{i=0}^{c}\xi_i=\mathbb{E}c+\mathbb{E}cp_3=17.875.$$

Для второй модели в случае с величиной c придется посчитать по-честному:

$$\mathbb{E}c=\sum_{a,b,c,d}cp(a,b,c,d)=\sum_{a,b,c,d}cp(d|c)p(c|a,b)p(a)p(b)=\sum_{a,b,c}cp(c|a,b)p(a)p(b)=\frac{1}{\alpha\beta}\sum_{a,b,c}cp(c|a,b)$$
$$=\frac{1}{\alpha\beta}\sum_{a,b}\mathbb{E}(c|a,b)=\frac{1}{\alpha\beta}\sum_{a,b}(ap_1+bp_2)=\mathbb{E}ap_1+\mathbb{E}bp_2$$

Получили то же, что и в первой модели, поэтому d не пересчитываем.

Аналогично често считаем дисперсию для первой модели:

$$\mathbb{D}a=\frac{\alpha^2-1}{12}=21.25,$$

$$\mathbb{D}b=\frac{\beta^2-1}{12}=850,$$

$$\mathbb{D}c=\mathbb{E}c^2-(\mathbb{E}c)^2=\sum_{a,b,c,d}c^2p(d|c)p(c|a,b)p(a)p(b)-(\mathbb{E}c)^2=\sum_{a,b,c}c^2p(c|a,b)p(a)p(b)-(\mathbb{E}c)^2$$

$$=\frac{1}{\alpha\beta}\sum_{a,b,c}c^2p(c|a,b)-(\mathbb{E}c)^2=$$

$$=\frac{1}{\alpha\beta}\sum_{a,b}(\mathbb{D}(c|a,b)+(\mathbb{E}(c|a,b))^2)-(\mathbb{E}c)^2=$$

$$=\frac{1}{\alpha\beta}\sum_{a,b}(ap_1(1-p_1)+bp_2(1-p_2)+a^2p_1^2+2abp_1p_1+b^2p_2^2)-(\mathbb{E}c)^2=p_1(1-p_1)\mathbb{E}a$$

$$+p_2(1-p_2)\mathbb{E}b+p_1^2\mathbb{D}a+p_2^2\mathbb{D}b=13.1765,$$

$$\mathbb{D}d=p_3(1-p_3)(p_1\mathbb{E}a+p_2\mathbb{E}b)+(1+2p_3+p_3^2)(p_1(1-p_1)\mathbb{E}a+p_2(1-p_2)\mathbb{E}b+p_1^2(\mathbb{D}a+(\mathbb{E}a)^2)$$
$$+2p_1p_2\mathbb{E}a\mathbb{E}b+p_2^2(\mathbb{D}b+(\mathbb{E}b)^2))=25.140575.$$

Считать то же самое для второй модели:

$$\mathbb{D}c = p_1\mathbb{E}a + p_2\mathbb{E}b + p_1^2\mathbb{D}a + p_2^2\mathbb{D}b = 14.0475,$$

$$\mathbb{D}d = p_3(1-p_3)\mathbb{E}c + (1+p_3)^2(\mathbb{D}c + \mathbb{E}^2c) - \mathbb{E}^2d = 26.627775.$$

Компьютерные вычисления дают те же результаты.

In [8]:

```
Матожидание p(a), модель 1: 82.5
Матожидание p(b), модель 1: 549.9999999999999
Матожидание p(c), модель 1: 13.749999999999993
Матожидание p(d), модель 1: 17.874999999999986
```

In [9]:

```
Матожидание p(a), модель 2: 82.5
Матожидание p(b), модель 2: 549.9999999999999
Матожидание p(c), модель 2: 13.749999999999993
Матожидание p(d), модель 2: 17.874999999999986
```

In [10]:

```
Дисперсия p(a), модель 1: 21.25
Дисперсия p(b), модель 1: 850.0000000000582
Дисперсия p(c), модель 1: 13.167500000000103
Дисперсия p(d), модель 1: 25.140575000000297
```

In [11]:

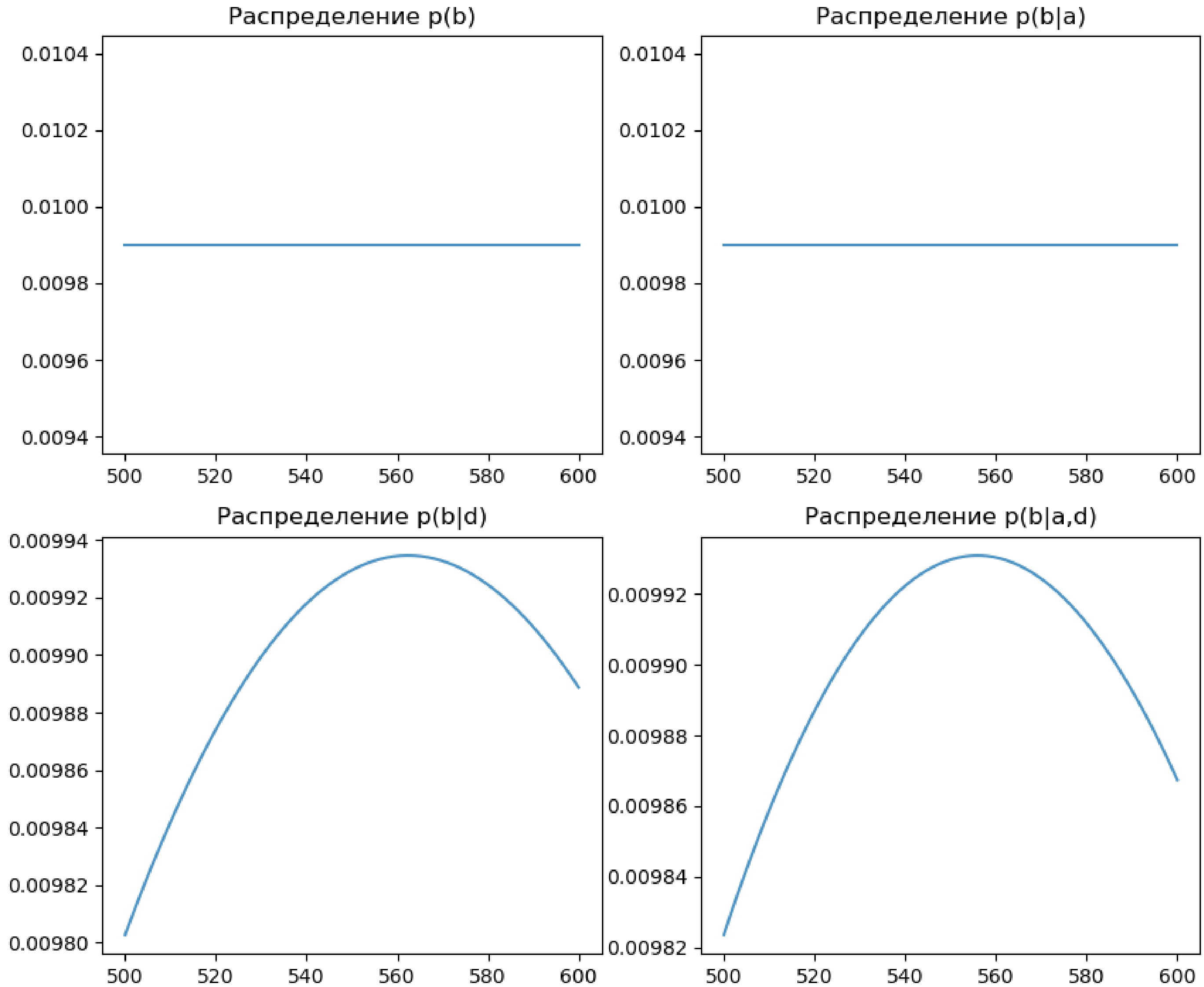
```
Дисперсия p(a), модель 2: 21.25
Дисперсия p(b), модель 2: 850.0000000000582
Дисперсия p(c), модель 2: 14.04750000000007
Дисперсия p(d), модель 2: 26.62777500000027
```

Задание 3

Сначала графики для первой модели:

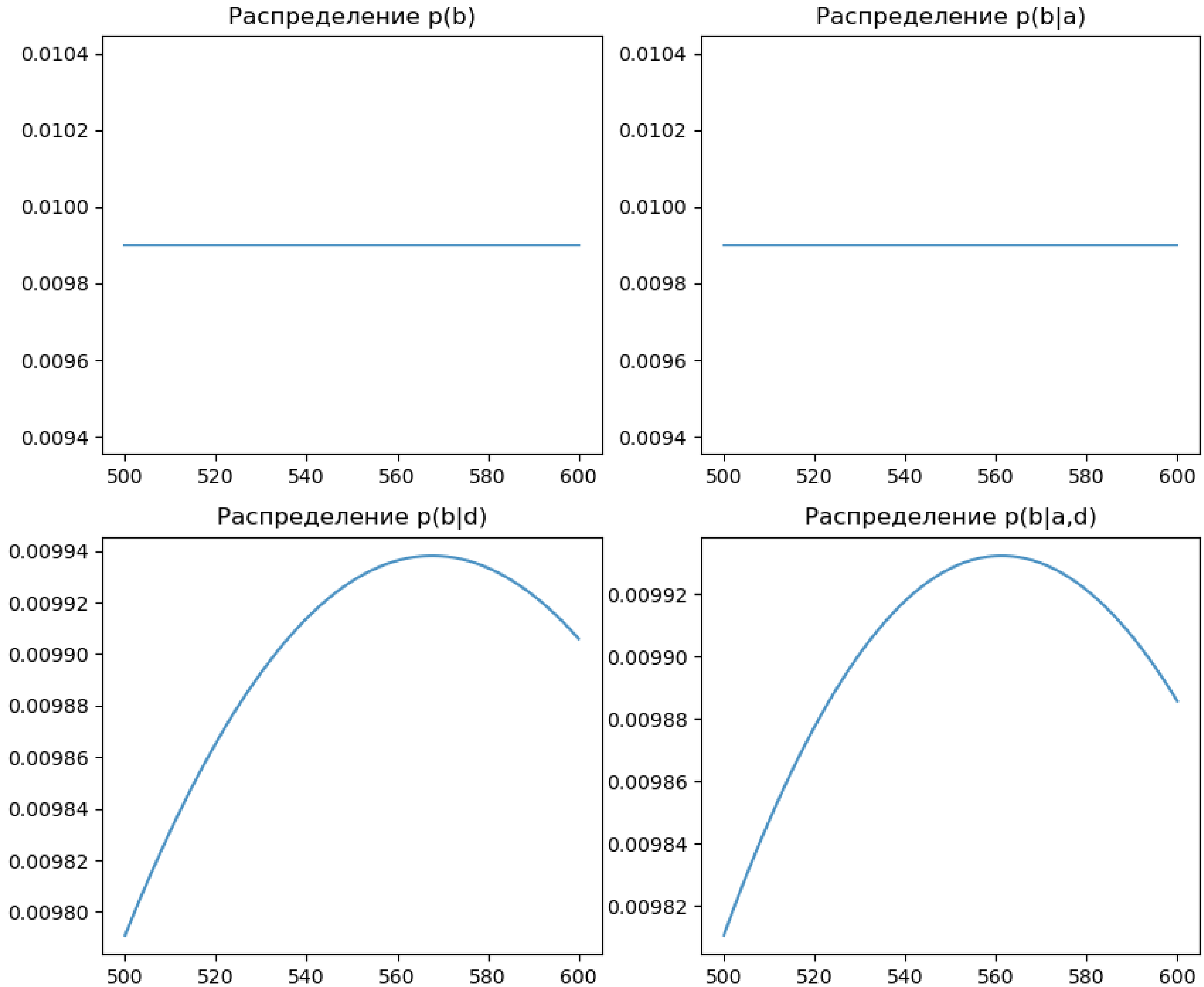
In [3]:

```python
a = np.array([83])
d = np.array([18])

plt.figure(figsize=(10,6))

prob, val = pb(params, 1)
plt.subplot(2, 2, 1)
plt.plot(val, prob, alpha=0.8)
plt.title("Распределение p(b)")

prob, val = pb_a(a, params, 1)
plt.subplot(2, 2, 2)
plt.plot(val, prob[:, 0], alpha=0.8)
plt.title("Распределение p(b|a)")

prob, val = pb_d(d, params, 1)
plt.subplot(2, 2, 3)
plt.plot(val, prob[:, 0], alpha=0.8)
plt.title("Распределение p(b|d)")

prob, val = pb_ad(a, d, params, 1)
plt.subplot(2, 2, 4)
plt.plot(val, prob[:, 0, 0], alpha=0.8)
plt.title("Распределение p(b|a,d)")

plt.subplots_adjust(bottom=-0.2)
plt.show()
```



Теперь для второй:

In [4]:
```
plt.figure(figsize=(10,6))

prob, val = pb(params, 2)
plt.subplot(2, 2, 1)
plt.plot(val, prob, alpha=0.8)
plt.title("Распределение p(b)")

prob, val = pb_a(a, params, 2)
plt.subplot(2, 2, 2)
plt.plot(val, prob[:, 0], alpha=0.8)
plt.title("Распределение p(b|a)")

prob, val = pb_d(d, params, 2)
plt.subplot(2, 2, 3)
plt.plot(val, prob[:, 0], alpha=0.8)
plt.title("Распределение p(b|d)")

prob, val = pb_ad(a, d, params, 2)
plt.subplot(2, 2, 4)
plt.plot(val, prob[:, 0, 0], alpha=0.8)
plt.title("Распределение p(b|a,d)")

plt.subplots_adjust(bottom=-0.2)
plt.show()
```



Теперь вычислим матожидания и дисперсии.

In [6]:

```
Матожидание p(b), модель 1: 549.9999999999999
Матожидание p(b|a), модель 1: 549.9999999999999
Матожидание p(b|d), модель 1: 550.0726755897829
Матожидание p(b|a,d), модель 1: 550.0363468930655
```

In [7]:

```
Матожидание p(b), модель 2: 549.9999999999999
Матожидание p(b|a), модель 2: 549.9999999999999
Матожидание p(b|d), модель 2: 550.0977797601528
Матожидание p(b|a,d), модель 2: 550.0634796135495
```

In [9]:

```
Дисперсия p(b), модель 1: 850.0000000000582
Дисперсия p(b|a), модель 1: 850.0000000000582
Дисперсия p(b|d), модель 1: 848.037891839107
Дисперсия p(b|a,d), модель 1: 848.0311255460838
```

In [10]:

```
Дисперсия p(b), модель 2: 850.0000000000582
Дисперсия p(b|a), модель 2: 850.0000000000582
Дисперсия p(b|d), модель 2: 848.1280274535529
Дисперсия p(b|a,d), модель 2: 848.1231120711891
```

Задание 4

Точно так же как в задании 2 находим:

$$\mathbb{D}(c|b) = p_1(1-p_1)\mathbb{E}a + p_1^2\mathbb{D}a + bp_2(1-p_2)$$

$$\mathbb{D}(c|a) = p_2(1-p_2)\mathbb{E}b + p_2^2\mathbb{D}b + ap_1(1-p_1)$$

Получаем неравенство

$$p_1(1-p_1)\mathbb{E}a + p_1^2\mathbb{D}a + bp_2(1-p_2) < p_2(1-p_2)\mathbb{E}b + p_2^2\mathbb{D}b + ap_1(1-p_1)$$

которое перепишем в точке $a = \mathbb{E}a + 0.5$ и $b = \mathbb{E}$, используя обозначения $A = \mathbb{D}a$ и $B = \mathbb{D}b$.

$$p_1^2(A + \frac{1}{2}) - \frac{p_1}{2} < p_2^2 B$$

Далее перепишем в каноническом виде:

$$\frac{(p_1 - \frac{1}{2(2A+1)})^2}{\frac{1}{4(2A+1)^2}} - \frac{p_2^2}{\frac{1}{8B(2A+1)}} < 1$$

Остается заметить, что гипербола чересекает внутренность множества $[0,1] \times [0,1]$, так как $\dfrac{1}{2A+1} < 1$. А значит два рассматриваемых в задании множества линейно неразделимы.