

Formelsammlung für Alles

Matthias Springstein

1. Dezember 2010

Inhaltsverzeichnis

1	Mathe	5
1.1	Grundlagen	5
1.1.1	Mengen	5
1.1.2	Intervalle	5
1.1.3	Rechengesetze	5
1.1.4	Bruchrechnung	6
1.1.5	Potenzen	6
1.1.6	Wurzeln	6
1.1.7	Logarithmen	6
1.1.8	Winkelfunktionen	7
1.1.9	Fakultät	8
1.1.10	Binomischer Lehrsatz	8
1.1.11	Grenzwertberechnung	9
1.1.12	Reihen	9
1.1.13	Koordinatensystem	10
1.2	Gleichungen	10
1.2.1	Gleichungen n -ten Grades	10
1.2.2	Lineare Gleichungen	10
1.2.3	Quadratische Gleichungen	10
1.2.4	Biquadratische Gleichungen	11
1.2.5	Gleichungen höheren Grades	11
1.2.6	Wurzelgleichung	11
1.2.7	Ungleichungen	11
1.2.8	Betragsgleichungen	11
1.2.9	Interpolationspolynome	12
1.3	Differentialrechnung	12
2	Physik	15
2.1	Kinematik	15
2.1.1	Geradlinige Bewegungen(Translation)	15
2.1.2	Kreisbewegungen(Rotation)	15
2.2	Dynamik	16
2.2.1	Geradlinig(Translation)	16
2.2.2	Drehbewegung(Rotation)	16
2.2.3	Schiefe Ebene	17
2.2.4	Reibung	17
2.2.5	Feder	17
2.2.6	Elastischer Stoß	17
2.2.7	Unelastischer Stoß	17
2.2.8	Drehimpulse	18
2.2.9	Rotierendes Bezugssystem	18
2.2.10	Schwerpunkt	18
2.2.11	Trägheitsmoment	19
2.2.12	Elastizitätslehre	19
3	Elektrotechnik	21
3.1	Grundgrößen	21
3.2	Lineare Quellen	22
3.3	Kirchhoffsche Gesetze	22

1 Mathe

1.1 Grundlagen

1.1.1 Mengen

Mengen Darstellung

Schreibweise	Bedeutung
$a \in M :$	a ist ein Element von M
$a \notin M :$	a ist kein Element von M
$M = \{x x \text{ Eigenschaften}, \dots\}$	Beschreibende Darstellung
$M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$	Aufzählende Darstellung(endlich)
$M = \{a_1, a_2, \dots\}$	Aufzählende Darstellung(unendlich)
$M = \{\}$	Leere Menge
$A \subset B$	A ist eine <i>Teilmenge</i> von B. A heißt <i>Untermenge</i> und B <i>Obermenge</i>
$A = B$	A und B sind gleich, d.h. jedes Element von A ist auch in B vorhanden und umgekehrt

Mengen Operationen

Schreibweise	Bedeutung
$A \cap B = \{x x \in A \text{ und } x \in B\}$	<i>Schnittmenge</i> zweier Mengen
$A \cup B = \{x x \in A \text{ oder } x \in B\}$	<i>Vereinigungsmenge</i> zweier Mengen
$A \setminus B = \{x x \in A \text{ und } x \notin B\}$	<i>Differenz- oder Restmenge</i> zweier Mengen

1.1.2 Intervalle

Beispiel	Beschreibung
$[a, b] = x a \leq x \leq b$	abgeschlossene Intervalle
$[a, b) = x a \leq x < b$	halboffene Intervall
$(a, b] = x a < x \leq b$	halboffene Intervall
$(a, b) = x a < x < b$	offenes Intervall

1.1.3 Rechengesetze

Operationen mit Natürlichen Zahlen

Beispiel	Beschreibung
$60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$ $70 = 2^3 \cdot 3^2$ $\text{ggT} = 2^2 \cdot 3^1$	Zerlegung der Faktoren in ihre Primfaktoren und dann bildet man das Produkt aus denn höchsten Potenzen die alle Faktoren gemeinsam haben.
$60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$ $70 = 2^3 \cdot 3^2$ $\text{kgV} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$	Zerlegung der Faktoren in ihre Primfaktoren und dann bildet man das Produkt aus denn höchsten Potenzen die in mindestens einen Faktoren auftreten.

Kommutativgesetz

$a + b = b + a$ $a \cdot b = b \cdot a$	(1.1)
--	-------

Assoziativgesetz

$a + (b + c) = (a + b) + c$ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	(1.2)
--	-------

Distributivgesetz

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad (1.3)$$

1.1.4 Bruchrechnung

Ein Bruch a/b heißt *echte*, wenn $|a| < |b|$ ist, sonst *unecht*.

Addition und Subtraktion zweier Brüche

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d} \quad (1.4)$$

Multiplikation zweier Brüche

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad (1.5)$$

Division zweier Brüche

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad (1.6)$$

1.1.5 Potenzen

Eine Potenz a^n ist ein Produkt aus n gleichen Faktoren a:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \dots a \quad (1.7)$$

a : Basis n : Exponent

Rechenregeln

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (1.8a)$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (1.8b)$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad (1.8c)$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad (1.8d)$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad (1.8e)$$

1.1.6 Wurzeln

Wurzelziehen ist die Umkehrfunktion des Potenzieren

$$\sqrt[n]{a} = a^{\left(\frac{1}{n}\right)} \quad (1.9)$$

a : Radikand n : Wurzelexponent

Rechenregeln

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\left(\frac{m}{n}\right)} \quad (1.10a)$$

$$m \sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}} = m \cdot n \sqrt[n]{a} \quad (1.10b)$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \quad (1.10c)$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (1.10d)$$

1.1.7 Logarithmen

Logarithmus ist das eindeutige lösen der Gleichung $r = a^x$ zur Lösung x .

$$x = \log_a r \quad (1.11)$$

a : Basis ($a > 0, a \neq 1$) r : Numerus ($r > 0$)

Rechenregeln

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a} \quad (1.12a)$$

$$\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v \quad (1.12b)$$

$$\log_a \left(\frac{u}{v} \right) = \log_a u - \log_a v \quad (1.12c)$$

$$\log_a (u^k) = k \cdot \log_a u \quad (1.12d)$$

$$\log_a \sqrt[n]{u} = \left(\frac{1}{n} \right) \cdot \log_a u \quad (1.12e)$$

Basiswechsel

$$\log_b r = \frac{\log_a r}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b} \cdot \log_a r = K \cdot \log_a r \quad (1.13)$$

Beim Basiswechsel von $a \rightarrow b$ werden die Logarithmen mit einer Konstanten K multipliziert.

$$\lg \rightarrow \ln \Rightarrow K = 2,3026 \quad (1.14)$$

$$\ln \rightarrow \lg \Rightarrow K = 0,4343 \quad (1.15)$$

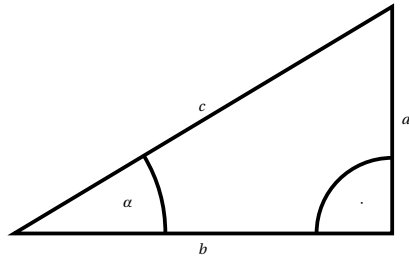
1.1.8 Winkelfunktionen

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad (1.16)$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \quad (1.17)$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} \quad (1.18)$$

$$\cot \alpha = \frac{b}{a} \quad (1.19)$$



Rechenregeln

$$\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \quad \sin x = \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \quad (1.20)$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cot x} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x} \quad (1.21)$$

Trigonometrischer Pythagoras

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (1.22)$$

Addition von Winkeln

$$\sin(x_1 \pm x_2) = \sin x_1 \cdot \cos x_2 \pm \cos x_1 \cdot \sin x_2 \quad (1.23a)$$

$$\cos(x_1 \pm x_2) = \cos x_1 \cdot \cos x_2 \mp \sin x_1 \cdot \sin x_2 \quad (1.23b)$$

$$\tan(x_1 \pm x_2) = \frac{\tan x_1 \pm \tan x_2}{1 \mp \tan x_1 \cdot \tan x_2} \quad (1.23c)$$

$$\cot(x_1 \pm x_2) = \frac{\cot x_1 \cdot \cot x_2 \mp 1}{\cot x_2 \pm \cot x_1} \quad (1.23d)$$

Multiplikation von Winkeln

$$\sin x_1 \cdot \sin x_2 = \frac{1}{2} \cdot (\cos(x_1 - x_2) - \cos(x_1 + x_2)) \quad (1.24a)$$

$$\cos x_1 \cdot \cos x_2 = \frac{1}{2} \cdot (\cos(x_1 - x_2) + \cos(x_1 + x_2)) \quad (1.24b)$$

$$\sin x_1 \cdot \cos x_2 = \frac{1}{2} \cdot (\sin(x_1 - x_2) + \sin(x_1 + x_2)) \quad (1.24c)$$

$$\tan x_1 \cdot \tan x_2 = \frac{\tan x_1 + \tan x_2}{\cot x_1 + \cot x_2} \quad (1.24d)$$

Umrechnung Grad- \rightarrow Bogenmaß

$$x = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha \quad (1.25)$$

Umrechnung Bogen- \rightarrow Gradmaß

$$\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot x \quad (1.26)$$

Für weitere Winkelformeln siehe Papula Formelsammlung Seite 90-102.

1.1.9 Fakultät

$n!$ ist definitionsgemäß das Produkt aus denn ersten n Faktoren

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n = \prod_{k=1}^n k \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (1.27)$$

Vorsicht bei 0 Fakultät

$$0! = 1 \quad (1.28)$$

1.1.10 Binomischer Lehrsatz

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 \cdot b^{n-1} + b^n \quad (1.29)$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k \quad (1.30)$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k} \quad (1.31)$$

Der *Binomialkoeffizienten* mit den Koeffizienten $\binom{n}{k}$ wird n über k gelesen.

Bildungsgesetz

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1))}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad (1.32)$$

Rechenregel

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad (1.33a)$$

$$\binom{n}{k} = 0 \text{ für } k > n \quad (1.33b)$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \quad (1.33c)$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (1.33d)$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \quad (1.33e)$$

Ersten Binomischen Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad (1.34)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3 \quad (1.35)$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4 \cdot a^3 \cdot b + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot a \cdot b^3 + b^4 \quad (1.36)$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad (1.37)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 - b^3 \quad (1.38)$$

$$(a-b)^4 = a^4 - 4 \cdot a^3 \cdot b + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 - 4 \cdot a \cdot b^3 + b^4 \quad (1.39)$$

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2 \quad (1.40)$$

1.1.11 Grenzwertberechnung**Rechenregeln**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} C \cdot f(x) = C \cdot \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) \quad (1.41a)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad (1.41b)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right) \quad (1.41c)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \quad (1.41d)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} \quad (1.41e)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^n \quad (1.41f)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (a^{f(x)}) = a^{\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)} \quad (1.41g)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\log_a f(x)) = \log_a \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) \quad (1.41h)$$

Grenzwertregel von Bernoulli und de l'Hospital

Diese Regel wird angewendet wenn das normale Ergebnis die Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ annimmt, was sonst eine beliebige Zahl darstellt.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (1.42)$$

Berechnete Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0 \text{ für } |a| < 0 \quad (1.43)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x!} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 1 \text{ für } a = 1 \quad (1.44)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} a = 1 \text{ für } a > 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (1.45)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e \quad (1.46)$$

1.1.12 Reihen**Arithmetische Reihen**

$$a + (a+d) + (a+2 \cdot d) + \dots + (a+(n-1) \cdot d) = \frac{n}{2} (2 \cdot a + (n-1) \cdot d) \quad (1.47)$$

a : Anfangsglied $a_n = a + (n-1) \cdot d$: Endglied

Geometrische Reihen

$$a + a \cdot q + a \cdot q^2 + \dots + a \cdot q^{n-1} = \sum_{k=1}^n a \cdot q^{k-1} = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} \quad (1.48)$$

a : Anfangsglied $a_n = a \cdot q^{n-1}$: Endglied

1.1.13 Koordinatensystem**Kartesische Koordinaten**

0 : Ursprung, Nullpunkt

x : Abzisse

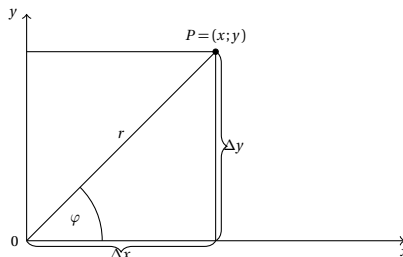
y : Ordinate

Polar Koordinaten

0 : Pol

r : Abstand des Punktes P zum Punkt O

φ : Winkel zwischen dem Strahl und der x-Achse (Polarachse)



Polarkoordinaten \Rightarrow Kartesische Koordinaten

$$x = r \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \varphi$$

(1.49)

Kartesische Koordinaten \Rightarrow Polarkoordinaten

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

(1.50)

Koordinatentransformation (Parallelverschiebung)

$$y = f(x) \Rightarrow \begin{matrix} x = u + a \\ y = v + b \end{matrix} \Rightarrow v = f(u + a) - b$$

(1.51)

(a ; b): Ursprung des neuen u, v Koordinatensystems, bezogen auf das alte x, y -System.

1.2 Gleichungen**1.2.1 Gleichungen n -ten Grades**

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0, a_k \in \mathbb{R}) \quad (1.52)$$

Eigenschaften

- Die Gleichung besitzen maximal n reelle Lösungen.
- Es gibt genau n komplexe Lösungen.
- Für ungerades n gibt es mindestens eine reelle Lösung.
- Komplexe Lösungen treten immer Paarweise auf.
- Es existieren nur Lösungsformeln bis $n \leq 4$. Für $n > 4$ gibt es nur noch grafische oder numerische Lösungswege.
- Wenn eine Nullstelle bekannt ist kann man die Gleichung um einen Grad verringern, indem man den zugehörigen Linearfaktor $x - x_1$ abspaltet (Polynome Division).

1.2.2 Lineare Gleichungen

$$a_1 \cdot x + a_0 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{a_0}{a_1} \quad (a_1 \neq 0)$$

(1.53)

1.2.3 Quadratische Gleichungen

$$a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0 \quad (a_2 \neq 0) \quad (1.54)$$

Normalform mit Lösung

$$x^2 + p \cdot x + q = 0 \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad (1.55)$$

Überprüfung (Vietscher Wurzelsatz)

$$x_1 + x_2 = -p \qquad x_1 \cdot x_2 = q \quad (1.56)$$

x_1, x_2 : Lösung der quadratischen Gleichung.

1.2.4 Biquadratische Gleichungen

Diese Gleichungen lassen sich mithilfe der Substitution lösen.

$$a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c = 0 \qquad u = x^2 \quad (1.57)$$

$$a \cdot u^2 + b \cdot u + c = 0 \qquad x = \pm \sqrt{u} \quad (1.58)$$

Das u kann mithilfe der Lösungsformel einer quadratischen Gleichung gelöst werden.

1.2.5 Gleichungen höheren Grades

Gleichungen höheren Grades kann man durch graphische oder numerische Ansätze lösen. Hilfreich ist das finden einer Lösung und das abspalten eines Linearfaktors, mithilfe der Polynomdivision oder dem Horner Schema, von der ursprünglichen Gleichung.

Polynomdivision

$$\frac{f(x)}{x - x_0} = \frac{a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0}{x - x_0} = b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0 + r(x) \quad (1.59)$$

x_0 ist dabei die erste gefundene Nullstelle. $r(x)$ verschwindet wenn x_0 eine Nullstelle oder eine Lösung von $f(x)$ ist.

$$r(x) = \frac{a_3 \cdot x_0^3 + a_2 \cdot x_0^2 + a_1 \cdot x_0 + a_0}{x - x_0} = \frac{f(x_0)}{x - x_0} \quad (1.60)$$

Horner-Schema

	a_3	a_2	a_1	a_0
x_0	$a_3 \cdot x_0$	$(a_2 + a_3 \cdot x_0) \cdot x_0$	$(a_1 + a_2 \cdot x_0 + a_3 \cdot x_0^2) \cdot x_0$	$(a_0 + a_1 \cdot x_0 + a_2 \cdot x_0^2 + a_3 \cdot x_0^3)$
	a_3	$a_2 + a_3 \cdot x_0$	$a_1 + a_2 \cdot x_0 + a_3 \cdot x_0^2$	$a_0 + a_1 \cdot x_0 + a_2 \cdot x_0^2 + a_3 \cdot x_0^3$
	b_2	b_1	b_0	$f(x_0)$

1.2.6 Wurzelgleichung

Wurzelgleichungen löst man durch quadrieren oder mit Hilfe von Substitution. Bei Wurzelgleichung ist zu beachten, dass das Quadrieren keine äquivalente Umformung ist und das Ergebnis überprüft werden muss.

1.2.7 Ungleichungen

- Beidseitiges Subtrahieren oder Addieren ist möglich
- Die Ungleichung darf mit einer beliebigen positiven Zahl multipliziert oder dividiert werden
- Die Ungleichung darf mit einer beliebigen negativen Zahl multipliziert oder dividiert werden, wenn man gleichzeitig das Relationszeichen umdreht.

1.2.8 Betragsgleichungen

Betragsgleichungen löst man mithilfe der Fallunterscheidung. Dabei wird einmal davon ausgegangen, dass der Term innerhalb des Betrags einmal positiv und einmal negativ sein kann.

$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad (1.61)$$

1.2.9 Interpolationspolynome

Entwicklung einer Polynomfunktion anhand von $n + 1$ Kurvenpunkten.

- Möglichkeit** Aufstellen von $n + 1$ Gleichungen und ermitteln der Kurvenfunktion mithilfe des Gauß Algorithmus.
- Möglichkeit** Interpolationspolynome von Newton

Interpolationspolynome von Newton

Gegeben sind die Punkte $P_0 = (x_0; y_0)$, $P_1 = (x_1; y_1)$, $P_2 = (x_2; y_2)$, ..., $P_n = (x_n; y_n)$, damit lautet die Funktion wie folgt:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \quad (1.62)$$

$$+ a_3 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \quad (1.63)$$

$$+ \dots \quad (1.64)$$

$$+ a_n \cdot (x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}) \quad (1.65)$$

Die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ lassen sich mithilfe des Differenzenschema berechnen. Dabei ist $y_0 = a_0$, $[x_0, x_1] = a_1$, $[x_0, x_1, x_2] = a_2$ usw.

Differenzenschema

k	x_k	y_k	1	2	3	...
0	x_0	y_0				
			$[x_0, x_1]$			
1	x_1	y_1		$[x_0, x_1, x_2]$		
			$[x_1, x_2]$		$[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
2	x_2	y_2			$[x_1, x_2, x_3]$...
			$[x_2, x_3]$			
3	x_3	y_3		$[x_2, x_3, x_4]$...
			
⋮	⋮	⋮				
⋮	⋮	⋮				
⋮	⋮	⋮				
n	x_n	y_n				

Rechenregel für dividierte Differenzen

$$\begin{aligned} &= \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \\ [x_1, x_2] &= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \end{aligned} \quad (1.66)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{[x_0, x_1] - [x_1, x_2]}{x_0 - x_2} \\ [x_1, x_2, x_3] &= \frac{[x_1, x_2] - [x_2, x_3]}{x_1 - x_3} \end{aligned} \quad (1.67)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{[x_0, x_1, x_2] - [x_1, x_2, x_3]}{x_0 - x_2} \\ [x_1, x_2, x_3, x_4] &= \frac{[x_1, x_2, x_3] - [x_2, x_3, x_4]}{x_1 - x_3} \end{aligned} \quad (1.68)$$

1.3 Differentialrechnung

Potenzfunktion

$$x^n \quad n \cdot x^{n-1} \quad (1.69)$$

Exponentialfunktionen

$$e^x \quad e^x \quad (1.70)$$

$$a^x \quad \ln a \cdot a^x \quad (1.71)$$

Logarithmusfunktionen	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	(1.72)
	$\log_a x$	$\frac{1}{(\ln a) \cdot x}$	(1.73)
Trigonometrische Funktionen	$\sin x$	$\cos x$	(1.74)
	$\cos x$	$-\sin x$	(1.75)
	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	(1.76)
	$\tan x$	$1 + \tan^2 x$	(1.77)
Arcusfunktionen	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	(1.78)
	$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	(1.79)
	$\arctan x$	$\frac{1}{1-x^2}$	(1.80)
Hyperbelfunktionen	$\sinh x$	$\cosh x$	(1.81)
	$\cosh x$	$\sinh x$	(1.82)
	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	(1.83)
	$\tanh x$	$1 + \tanh^2 x$	(1.84)
Faktorregel	$\frac{d}{dx} (C \cdot f(x)) = C \cdot f'(x)$		(1.85)
Summenregel	$\frac{d}{dx} (g(x) + f(x)) = g'(x) + f'(x)$		(1.86)
Produktregel	$\frac{d}{dx} (g(x) \cdot f(x)) = g'(x) \cdot f(x) + g(x) \cdot f'(x)$		(1.87)
	$\frac{d}{dx} (h(x) \cdot g(x) \cdot f(x)) = h' \cdot g \cdot f + h \cdot g' \cdot f + h \cdot g \cdot f'$		(1.88)
Quotientenregel	$\frac{d}{dx} \left(\frac{g(x)}{f(x)} \right) = \frac{g'(x) \cdot f(x) - g(x) \cdot f'(x)}{f(x)^2}$		(1.89)

2 Physik

2.1 Kinematik

2.1.1 Geradlinige Bewegungen(Translation)

$$a(t) = a_0 = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s} \quad (2.1)$$

$$v(t) = a_0 \cdot t + v_0 = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \quad (2.2)$$

$$s(t) = \frac{1}{2} a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0 \quad (2.3)$$

2.1.2 Kreisbewegungen(Rotation)

Winkelgrößen

$$\alpha(t) = \alpha_0 = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \quad (2.4)$$

$$\omega(t) = \alpha_0 \cdot t + \omega_0 = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \quad (2.5)$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} \alpha_0 \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \varphi_0 \quad (2.6)$$

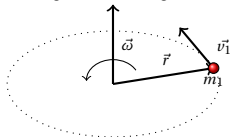
Bahngroßen

$$a_t(t) = a_0 = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s} \quad (2.7)$$

$$v(t) = a_0 \cdot t + v_0 = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \quad (2.8)$$

$$s(t) = \frac{1}{2} a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0 \quad (2.9)$$

Umrechnung
Winkelgrößen \leftrightarrow Bahngroßen



$$a_t = \alpha \cdot r \quad (2.10)$$

$$\vec{a}_t = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (2.11)$$

$$\vec{a} = \vec{r} \times \vec{a}_t \quad (2.12)$$

$$v = \omega \cdot r \quad (2.13)$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (2.14)$$

$$\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{v} \quad (2.15)$$

$$s = \varphi \cdot r \quad (2.16)$$

Winkelgeschwindigkeit,
Kreisfrequenz

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} \quad (2.17)$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot n \quad (2.18)$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot f \quad (2.19)$$

Bahngeschwindigkeit

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} \quad (2.20)$$

$$= \omega \cdot r \quad (2.21)$$

Radialbeschleunigung

$$a_r = \frac{v^2}{r} \quad (2.22)$$

$$= v \cdot \omega \quad (2.23)$$

$$= \omega^2 \cdot r \quad (2.24)$$

Umdrehungen

$$N = \frac{\omega_0 \cdot t}{2 \cdot \pi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{2 \cdot \pi} \cdot t^2 \quad (2.25)$$

$$= n_0 \cdot t + \frac{\alpha}{4 \cdot \pi} \cdot t^2 \quad (2.26)$$

2.2 Dynamik

2.2.1 Geradlinig(Translation)

Kraft

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (2.27)$$

$$\vec{F}_{\text{Tr}} = -m \cdot \vec{a} \quad (2.28)$$

Impuls

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \quad (2.29)$$

Kraftstoß

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \cdot \frac{dm}{dt} \quad (2.30)$$

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{\vec{p}_2}^{\vec{p}_1} dp = \int_0^t \vec{F} dt \quad (2.31)$$

Arbeit

$$W = - \int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} \vec{F}_{\text{Tr}} \circ d\vec{s} \quad (2.32)$$

$$= \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}_1} m \vec{v} \circ d\vec{v} = \frac{1}{2} m (v_1^2 - v_0^2) \quad (2.33)$$

kin. Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 \quad (2.34)$$

Hubarbeit

$$W_{\text{hub}} = m g h \quad (2.35)$$

Leistung

$$P = \vec{F} \circ \vec{v} = \frac{dW}{dt} = \dot{W} \quad (2.36)$$

2.2.2 Drehbewegung(Rotation)

Massenträgheitsmoment

$$J = m \cdot r^2 \quad (2.37)$$

Drehimpuls

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (2.38)$$

$$= J \cdot \vec{\omega} \quad (2.39)$$

Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = J \vec{\alpha} = \dot{\vec{L}} \quad (2.40)$$

kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad (2.41)$$

Arbeit

$$\Delta W = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \vec{M} \circ \vec{e}_{\omega} d\varphi = \int_{\vec{\omega}_0}^{\vec{\omega}_1} J \vec{\omega} d\vec{\omega} \quad (2.42)$$

$$= \frac{1}{2} J (\omega_1^2 - \omega_0^2) \quad (2.43)$$

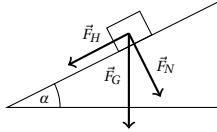
Zentripetalkraft

$$F_{zp} = -m \cdot \omega^2 \cdot r \quad (2.44)$$

$$= -m \cdot v^2 \cdot \frac{\vec{e}_r}{r} \quad (2.45)$$

2.2.3 Schiefe Ebene

Kräfte



$$\vec{F}_N = \vec{F}_G \cos \alpha \quad (2.46)$$

$$\vec{F}_H = \vec{F}_G \sin \alpha \quad (2.47)$$

2.2.4 Reibung

Reibungskräfte

$$F_R = \mu \cdot F_N \quad (2.48)$$

2.2.5 Feder

Hookesches Gesetz

 $k = D$: Federkonstante

$$F = -kx = Dx \quad (2.49)$$

Spannungsenergie

$$W = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} F dx = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} kx dx \quad (2.50)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot k \cdot (x_{\max}^2 - x_{\min}^2) \quad (2.51)$$

2.2.6 Elastischer Stoß

Energieerhaltung

Energie vor den Stoß = Energie nach den Stoß

$$\sum E_{\text{kin}} = \sum E'_{\text{kin}} \quad (2.52)$$

Impulserhaltung

Impuls vor den Stoß = Impuls nach den Stoß

$$\sum m \vec{v} = \sum m \vec{v}' \quad (2.53)$$

Zentraler, elastischer Stoß
(Energie und Impuls)

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \quad (2.54)$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \quad (2.55)$$

Zentraler, elastischer Stoß
(Geschwindigkeit nach dem Stoß)

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \quad (2.56)$$

$$v_1' = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad (2.57)$$

2.2.7 Unelastischer Stoß

Energieerhaltung

Energie vor den Stoß = Energie nach den Stoß + Arbeit

$$\sum E_{\text{kin}} = \sum E'_{\text{kin}} + \Delta W \quad (2.58)$$

Impulserhaltung

Impuls vor den Stoß = Impuls nach den Stoß

$$\sum m \vec{v} = \sum m \vec{v}' \quad (2.59)$$

Total unelastischer Stoß
(Energie und Impuls)

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v'^2 + \Delta W \quad (2.60)$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v' \quad (2.61)$$

Zentraler, elastischer Stoß
(Geschwindigkeit nach dem Stoß und Energieverlust)

$$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (2.62)$$

$$\Delta W = \frac{m_1 \cdot m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 \quad (2.63)$$

2.2.8 Drehimpulse

Drehimpulserhaltungssatz

$$\text{Drehimpuls zur Zeit 1} = \text{Drehimpuls zur Zeit 2} \quad (2.64)$$

$$\sum \vec{L} = \sum \vec{L}' \quad (2.65)$$

Kupplung Zweier Drehkörper
(Winkelgeschwindigkeit nach dem Kupplern und Energieverlust)

$$\vec{\omega}' = \frac{J_0 \vec{\omega}_0 + J_1 \vec{\omega}_1}{J_1 + J_2} \quad (2.66)$$

$$\Delta W = \frac{J_0 \cdot J_1}{2(J_0 + J_1)} (\omega_0 - \omega_1)^2 \quad (2.67)$$

2.2.9 Rotierendes Bezugssystem

Zentrifugalkraft

$$\vec{F}_Z = \vec{r} \cdot \vec{\omega}_r = -m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -m \vec{\omega} \times \vec{v} \quad (2.68)$$

$$F_Z = -m \frac{v^2}{r} = -m \omega^2 r \quad (2.69)$$

Corioliskraft

$$\vec{F}_C = -2m \vec{\omega} \times \vec{v} \quad (2.70)$$

2.2.10 Schwerpunkt

Schwerpunkt mehrere Punktmassen

$$\vec{r}_{\text{Sp}} = \frac{\sum \vec{r}_i m_i}{\sum m_i} \quad (2.71)$$

Allgemein Schwerpunkt

$$\vec{r}_{\text{Sp}} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} \quad (2.72)$$

Schwerpunkt (Kartesische)

$$x_{\text{Sp}} = \frac{\int_z \int_y \int_x x \rho \, dx \, dy \, dz}{\int_z \int_y \int_x \rho \, dx \, dy \, dz} \quad (2.73)$$

$$y_{\text{Sp}} = \frac{\int_z \int_y \int_x y \rho \, dx \, dy \, dz}{\int_z \int_y \int_x \rho \, dx \, dy \, dz} \quad (2.74)$$

$$z_{\text{Sp}} = \frac{\int_z \int_y \int_x z \rho \, dx \, dy \, dz}{\int_z \int_y \int_x \rho \, dx \, dy \, dz} \quad (2.75)$$

Schwerpunkt (Zylinder)

$$r_{\text{Sp}} = \frac{\int_z \int_\varphi \int_r r^2 \rho \, dr \, d\varphi \, dz}{\int_z \int_\varphi \int_r r \rho \, dr \, d\varphi \, dz} \quad (2.76)$$

$$\varphi_{\text{Sp}} = \frac{\int_z \int_\varphi \int_r \varphi r \rho \, dr \, d\varphi \, dz}{\int_z \int_\varphi \int_r r \rho \, dr \, d\varphi \, dz} \quad (2.77)$$

$$z_{\text{Sp}} = \frac{\int_z \int_\varphi \int_r z r \rho \, dr \, d\varphi \, dz}{\int_z \int_\varphi \int_r r \rho \, dr \, d\varphi \, dz} \quad (2.78)$$

$$x = r \cos \varphi \quad (2.79)$$

$$y = r \sin \varphi \quad (2.80)$$

$$z = z \quad (2.81)$$

2.2.11 Trägheitsmoment

Allgemein

$$J = \sum m_i r_i^2 \quad (2.82)$$

$$J = \int_m r^2 \, dm \quad (2.83)$$

$$J = \int_z \int_\varphi \int_r r^3 \rho \, dr \, d\varphi \, dz \quad (2.84)$$

Satz von Steiner
(Parallel Verschiebung der Achse)

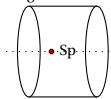
$$J_x = m r^2 + J_s \quad (2.85)$$

Trägheitsmoment Kugel



$$J_{\text{Sp}} = \frac{2}{5} m r^2 \quad (2.86)$$

Trägheitsmoment Zylinder



$$J_{\text{Sp}} = \frac{1}{2} m r^2 \quad (2.87)$$

Trägheitsmoment Kreisring

$$J_{\text{Sp}} = m r^2 \quad (2.88)$$

Trägheitsmoment Stab

$$J_{\text{Sp}} = \frac{1}{12} m l^2 \quad (2.89)$$

2.2.12 Elastizitätslehre

Spannung

$$\vec{\sigma} = \frac{\vec{F}_n}{A} \quad (2.90)$$

$$\sigma = E \varepsilon = E \frac{\Delta l}{l} \quad (2.91)$$

3 Elektrotechnik

3.1 Grundgrößen

Elementarladung	$e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} C$	(3.1)
ele. Ladung	$[Q] = 1 C = 1 A s$	(3.2)
	$Q = n \cdot e$	(3.3)
ele. Strom	$[I] = 1 A$	(3.4)
	$i(t) = \frac{dQ}{dt}$	(3.5)
ele. Stromdichte	$[J] = 1 \frac{A}{mm^2}$	(3.6)
	$\vec{J} = \frac{I}{\vec{A}}$	(3.7)
ele. Potenzial	$[\varphi] = 1 V = 1 \frac{Nm}{As} = 1 \frac{kgm^2}{As^3}$	(3.8)
	$\varphi = \frac{W}{Q}$	(3.9)
ele. Spannung	$[U] = 1 V$	(3.10)
	$U_{AB} = \varphi_a - \varphi_b$	(3.11)
ele. Widerstand	$[R] = 1 \Omega = 1 \frac{V}{A}$	(3.12)
	$R = \frac{U}{I}$	(3.13)
	$= \rho \frac{l}{A} = \frac{1}{\kappa} \frac{l}{A}$	(3.14)
ele. Leitwert	$[G] = 1 S = 1 \frac{A}{V}$	(3.15)
	$G = \frac{I}{U}$	(3.16)
	$= \frac{1}{R}$	(3.17)
	$= \kappa \frac{A}{l} = \frac{1}{\rho} \frac{A}{l}$	(3.18)
Temperaturabhängigkeit von Widerstand	$R_2 = R_1 \cdot (1 + \alpha(\vartheta_2 - \vartheta_1) + \beta(\vartheta_2 - \vartheta_1)^2)$	(3.19)
Leistung	$[P] = 1 W = 1 VA$	(3.20)
	$P = u(t) \cdot i(t)$	(3.21)
Mittlere Leistung	$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t) dt$	(3.22)

3.2 Lineare Quellen

Lineare Spannungsquelle

$$U = U_q - R_i \cdot I \quad (3.23)$$

$$I_K = \frac{U_q}{R_i} \quad (3.24)$$

Lineare Stromquelle

$$I = I_q - \frac{U}{R_i} \quad (3.25)$$

$$U_l = I_q \cdot R_i \quad (3.26)$$

3.3 Kirchhoffsche Gesetze

Knotenpunktsatz

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0 \quad (3.27)$$

Maschensatz

$$\sum_{i=1}^n U_i = 0 \quad (3.28)$$