Formelsammlung für Alles

Matthias Springstein

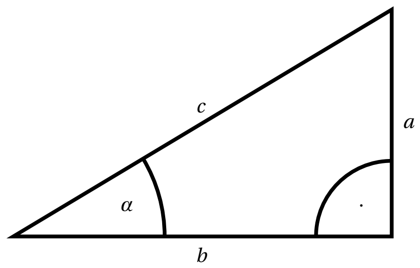
2. Juli 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Mathe

1.1 Winkelfunktionen

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \quad (1.1)$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \quad (1.2)$$
$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \quad (1.3)$$
$$\cot\alpha = \frac{b}{a} \quad (1.4)$$



Rechenregeln

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad (1.5)$$
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cot x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x} \quad (1.6)$$

Trigonometrischer Pythagoras

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (1.7)$$

Addition von Winkeln

$$\sin(x_1 \pm x_2) = \sin x_1 \cdot \cos x_2 \pm \cos x_1 \cdot \sin x_2 \quad (1.8a)$$
$$\cos(x_1 \pm x_2) = \cos x_1 \cdot \cos x_2 \mp \sin x_1 \cdot \sin x_2 \quad (1.8b)$$
$$\tan(x_1 \pm x_2) = \frac{\tan x_1 \pm \tan x_2}{1 \mp \tan x_1 \cdot \tan x_2} \quad (1.8c)$$
$$\cot(x_1 \pm x_2) = \frac{\cot x_1 \cdot \cot x_2 \mp 1}{\cot x_2 \pm \cot x_1} \quad (1.8d)$$

Multiplikation von Winkeln

$$\sin x_1 \cdot \sin x_2 = \frac{1}{2} \cdot (\cos(x_1 - x_2) - \cos(x_1 + x_2)) \quad (1.9a)$$
$$\cos x_1 \cdot \cos x_2 = \frac{1}{2} \cdot (\cos(x_1 - x_2) + \cos(x_1 + x_2)) \quad (1.9b)$$
$$\sin x_1 \cdot \cos x_2 = \frac{1}{2} \cdot (\sin(x_1 - x_2) + \sin(x_1 + x_2)) \quad (1.9c)$$
$$\tan x_1 \cdot \tan x_2 = \frac{\tan x_1 + \tan x_2}{\cot x_1 + \cot x_2} \quad (1.9d)$$

Umrechnung Grad- ⇒ Bogenmaß

$$x = \frac{\pi}{180°} \cdot \alpha \quad (1.10)$$

Umrechnung Bogen- ⇒ Gradmaß

$$\alpha = \frac{180°}{\pi} \cdot x \quad (1.11)$$

1.2 Komplexe Zahlen

Grundlagen

$$j = \sqrt{-1} \quad (1.12)$$
$$j^2 = -1 \quad (1.13)$$

1.2.1 Darstellungsformen

Kartesische Form

$$z = x + jy \quad (1.14)$$

$[x] =:$ Realanteil
$[y] =:$ Imaginäranteil

Trigometrische Form

$[r] =:$ Betrag
$[\varphi] =:$ Argument

$$z = r\left(\cos\varphi + j\sin\varphi\right) \tag{1.15}$$

Exponentialform

$$z = re^{j\varphi} \tag{1.16}$$

Umrechnung

$$x = r\cos\varphi \tag{1.17}$$
$$y = r\sin\varphi \tag{1.18}$$
$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.19}$$

Umrechnung Winkel

$$\tan\varphi = \frac{y}{x} \tag{1.20}$$
$$\varphi = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & \text{Quadrant I} \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi & \text{Quadrant II,III} \\ \arctan\frac{y}{x} + 2\pi & \text{Quadrant IV} \end{cases} \tag{1.21}$$

1.2.2 Rechenregeln

Konjugiert komplexe Zahl

$[\overline{z}] =:$ konjugierte Komplexe

$$\overline{z} = z^* \tag{1.22}$$
$$\overline{z} = \overline{x + jy} \tag{1.23}$$
$$= x - jy \tag{1.24}$$
$$\overline{z} = \overline{r\left(\cos\varphi + j\sin\varphi\right)} \tag{1.25}$$
$$= r\left(\cos\varphi - j\sin\varphi\right) \tag{1.26}$$
$$\overline{z} = \overline{re^{j\varphi}} \tag{1.27}$$
$$= re^{-j\varphi} \tag{1.28}$$

Addition und Subtraktion

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + jy_1) \pm (x_2 + jy_2) \tag{1.29}$$
$$= (x_1 \pm x_2) + j(y_1 \pm y_2) \tag{1.30}$$

Multiplikation

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + jy_1) \cdot (x_2 + jy_2) \tag{1.31}$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + x_2y_1) \tag{1.32}$$
$$z_1 \cdot z_2 = r_1\left(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1\right) \cdot r_2\left(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2\right) \tag{1.33}$$
$$= r_1r_2\left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right) \tag{1.34}$$
$$z_1 \cdot z_2 = r_1e^{j\varphi_1} \cdot r_2e^{j\varphi_2} \tag{1.35}$$
$$= r_1r_2e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} \tag{1.36}$$

Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} \tag{1.37}$$
$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \tag{1.38}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\left(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1\right)}{r_2\left(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2\right)} \tag{1.39}$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right) \tag{1.40}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1e^{j\varphi_1}}{r_2e^{j\varphi_2}} \tag{1.41}$$
$$= \frac{r_1}{r_2}e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \tag{1.42}$$

Potenzieren

$$z^n = \left(r_1\left(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1\right)\right)^n \tag{1.43}$$
$$= r_1^n\left(\cos(n\varphi_1) + j\sin(n\varphi_1)\right) \tag{1.44}$$
$$z^n = \left(r_1e^{j\varphi_1}\right)^n \tag{1.45}$$
$$= r_1^ne^{jn\varphi_1} \tag{1.46}$$

Wurzelziehen

Es entsthen n Lösungen
Für k muss nacheinander $0, 1, \dots, n-1$ eingesetzt werden

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r_1 (\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)} \tag{1.47}$$

$$\omega_k = \sqrt[n]{r_1}\left(\cos\left(\frac{\varphi_1 + 2k\pi}{n}\right) + j\sin\left(\frac{\varphi_1 + 2k\pi}{n}\right)\right) \tag{1.48}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r_1 e^{j\varphi_1}} \tag{1.49}$$

$$\omega_k = \sqrt[n]{r_1} e^{j\left(\frac{\varphi_1+2k\pi}{n}\right)} \tag{1.50}$$

1.3 Vektorrechnung

1.3.1 Grundlagen

Darstellung

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z \tag{1.51}$$

$$= a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_y \vec{e}_y \tag{1.52}$$

$$= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \tag{1.53}$$

2 Punkt Vektor

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} \tag{1.54}$$

Betrag

$$|\vec{a}| = a \tag{1.55}$$

$$= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{1.56}$$

$$= \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}} \tag{1.57}$$

Richtungswinkel

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} \tag{1.58}$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} \tag{1.59}$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} \tag{1.60}$$

$$1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \tag{1.61}$$

1.3.2 Vektoroperationen

Addition und Subtraktion

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{pmatrix} \tag{1.62}$$

Multiplikation mit einem Skalar

$$a \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} ab_x \\ ab_y \\ ab_z \end{pmatrix} \tag{1.63}$$

Einheitsvektor

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \begin{pmatrix} a_x/|\vec{a}| \\ a_y/|\vec{a}| \\ a_z/|\vec{a}| \end{pmatrix} \tag{1.64}$$

Skalarprodukt

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{1.65}$$

$$= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) \tag{1.66}$$

Kreuzprodukt

$|\vec{a} \times \vec{b}|$ Fläche des Parallelograms $\vec{a}, \vec{b}$
$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a} \wedge \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \tag{1.67}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \tag{1.68}$$

Spatprodukt

$\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c})$ Volumen des Parallelpiped $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = \vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) \tag{1.69}$$
$$= a_x(b_y c_z - b_z c_y) + a_y(b_z c_x - b_x c_z) + a_z(b_x c_y - b_y c_x) \tag{1.70}$$
$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \tag{1.71}$$

Schnittwinkel

$$\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \tag{1.72}$$

Projektion

$$\vec{a}_b = \left(\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}|^2}\right) \vec{a} = (\vec{b} \circ \vec{e}_a)\vec{e}_a \tag{1.73}$$

1.3.3 Geraden

Geradegleichung

$[\vec{r}_1] =:$ Ortsvektor (Verschiebung von Ursprung)
$[\vec{a}] =:$ Richtungsvektor

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_1 + t\,\vec{a} \tag{1.74}$$
$$= \vec{r}_1 + t(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \tag{1.75}$$

Abstand eines Punktes von einer Geraden

$[\vec{r}_1] =:$ Ortsvektor (Verschiebung von Ursprung)
$[\vec{a}] =:$ Richtungsvektor
$[\overrightarrow{OP}] =:$ Ortsvektor des Punktes P

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_1 + t\,\vec{a} \tag{1.76}$$
$$d = \frac{|\vec{a} \times \left(\overrightarrow{OP} - \vec{r}_1\right)|}{\vec{a}} \tag{1.77}$$

Abstand zweier paralleler Geraden

$[\vec{r}_1] =:$ Ortsvektor der ersten Gerade
$[\vec{r}_2] =:$ Ortsvektor der zweiten Gerade
$[\vec{a}_1] =:$ Richtungsvektor der Geraden

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_1 + t\,\vec{a}_1 \tag{1.78}$$
$$\vec{g}(t) = \vec{r}_2 + t\,\vec{a}_1 \tag{1.79}$$
$$d = \frac{|\vec{a}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)|}{\vec{a}_1} \tag{1.80}$$

Abstand zweier windschiefen Geraden

$[\vec{r}_1] =:$ Ortsvektor der ersten Gerade
$[\vec{r}_2] =:$ Ortsvektor der zweiten Gerade
$[\vec{a}_1] =:$ Richtungsvektor der ersten Geraden
$[\vec{a}_2] =:$ Richtungsvektor der zweiten Geraden

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_1 + t\,\vec{a}_1 \tag{1.81}$$
$$\vec{g}(t) = \vec{r}_2 + t\,\vec{a}_2 \tag{1.82}$$
$$d = \frac{|\vec{a}_1 \circ (\vec{a}_2 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1))|}{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2} \tag{1.83}$$

1.3.4 Ebenen

Ebenengleichung

$[\vec{r}_1] =:$ Ortsvektor der Ebenen
$[\vec{a}_1] =:$ Erster Richtungsvektor
$[\vec{a}_2] =:$ Zweiter Richtungsvektor

$$\vec{r}(t,s) = \vec{r}_1 + t\,\vec{a}_1 + s\,\vec{a}_2 \tag{1.84}$$
$$= \vec{r}_1 + t(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + s(\vec{r}_3 - \vec{r}_1) \tag{1.85}$$

Normalenvektor

$[\vec{n}] =:$ Normalenvektor
$[\vec{r}_1] =:$ Ortsvektor der Normalen
$[\vec{r}] =: (x, y, z)^T$

$$\vec{n} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \tag{1.86}$$

Parameterfreie Darstellung

$[\vec{n}] =:$ Normalenvektor

$$\vec{r}(t,s) = \vec{r}_1 + t\,\vec{a}_1 + s\,\vec{a}_2 \tag{1.87}$$
$$\vec{r} \circ (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = \vec{r}_1 \circ (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) + t\,\vec{a}_1 \circ (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \tag{1.88}$$
$$+ s\,\vec{a}_2 \circ (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \tag{1.89}$$
$$\vec{r} \circ \vec{n} = \vec{r}_1 \circ \vec{n} + 0 + 0 \tag{1.90}$$
$$\vec{n} \circ (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0 \tag{1.91}$$

Normierter Normalenvektor

$$\vec{e}_n = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|} \tag{1.92}$$

Hesseschen Normalform

$$0 = \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{1.93}$$

Abstand eines Punktes von einer Ebene

$[\vec{n}] =:$ Normalenvektor
$[\vec{r}_1] =:$ Ortsvektor der Normalen
$[\overrightarrow{OP}] =:$ Ortsvektor des Punktes P
$[p_i] =:$ Koordinaten des Punktes P

$$d = \frac{|\vec{n} \times \left(\overrightarrow{OP} - \vec{r}_1\right)|}{\vec{n}} \tag{1.94}$$
$$d = \frac{Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{1.95}$$

Abstand eines Geraden von einer Ebene

$[\vec{n}] =:$ Normalenvektor
$[\vec{r}_1] =:$ Ortsvektor der Normalen
$[\vec{r}_G] =:$ Ortsvektor der Geraden
$[r_{Gi}] =:$ Koordinaten eines Geraden Punktes

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_G + t\vec{a}_1 \tag{1.96}$$
$$d = \frac{|\vec{n} \times (\vec{r}_G - \vec{r}_1)|}{\vec{n}} \tag{1.97}$$
$$d = \frac{Ar_{G1} + Br_{G2} + Cr_{G3} + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{1.98}$$

Abstand zweier paralleler Ebenen

$[\vec{n}] =:$ Normalenvektor

$$\vec{r}(t,s) = \vec{r}_1 + t\vec{a}_1 + s\vec{a}_2 \tag{1.99}$$
$$\vec{g}(t,s) = \vec{r}_2 + t\vec{a}_3 + s\vec{a}_4 \tag{1.100}$$
$$d = \frac{|\vec{n} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)|}{\vec{n}} \tag{1.101}$$

Schnittwinkel zweier Ebenen

$\angle$ Ebenen $= \angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$

$$\cos\angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \tag{1.102}$$

Durchstoßpunkt

$[\vec{n}] =:$ Normalenvektor
$[\vec{r}_1] =:$ Ortsvektor der Normalen
$[\vec{r}_G] =:$ Ortsvektor der Geraden
$[\vec{r}_s] =:$ Ortsvektor des Schnittpunktes

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_G + t\vec{a} \tag{1.103}$$
$$\vec{r}_s = \vec{r}_G + \frac{\vec{n} \circ (\vec{r}_1 - \vec{r}_G)}{\vec{n} \circ \vec{a}}\vec{a} \tag{1.104}$$
$$\varphi = \arcsin\left(\frac{|\vec{n} \circ \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|}\right) \tag{1.105}$$

1.4 Differntialrechnung

1.4.1 Erste Ableitung der elementaren Funktionen

Potenzfunktion	x^n	$n \cdot x^{n-1}$	(1.106)
Exponentialfunktionen	e^x	e^x	(1.107)
	a^x	$\ln a \cdot a^x$	(1.108)
Logarithmusfunktionen	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	(1.109)
	$\log_a x$	$\frac{1}{(\ln a) \cdot x}$	(1.110)
Trigonometrische Funktionen	$\sin x$	$\cos x$	(1.111)
	$\cos x$	$-\sin x$	(1.112)
	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	(1.113)
	$\tan x$	$1 + \tan^2 x$	(1.114)
Arcusfunktionen	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	(1.115)
	$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	(1.116)
	$\arctan x$	$\frac{1}{1-x^2}$	(1.117)
Hyperbelfunktionen	$\sinh x$	$\cosh x$	(1.118)
	$\cosh x$	$\sinh x$	(1.119)
	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	(1.120)
	$\tanh x$	$1 + \tanh^2 x$	(1.121)

1.4.2 Rechenregeln

Faktorregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(C \cdot f(x)\right) = C \cdot f'(x) \tag{1.122}$$

Summenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(g(x) + f(x)\right) = g'(x) + f'(x) \tag{1.123}$$

Produktregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(g(x)\cdot f(x)\right) = g'(x)\cdot f(x) + g(x)\cdot f'(x) \tag{1.124}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(h(x)\cdot g(x)\cdot f(x)\right) = h'\cdot g\cdot f + h\cdot g'\cdot f + h\cdot g\cdot f' \tag{1.125}$$

Quotientenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right) = \frac{g'(x)\cdot f(x) - g(x)\cdot f'(x)}{f(x)^2} \tag{1.126}$$

Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(g\left(f(x)\right)\right) = g'(f)\cdot f'(x) \tag{1.127}$$

Logarithmische Ableitungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y = f(x) \tag{1.128}$$
$$\frac{1}{y} y' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln f(x) \tag{1.129}$$

1.4.3 Fehlerrechnung

Absolute Fehler

$[\Delta x] =:$ Absoluter Fehler der Eingangsgröße
$[\Delta y] =:$ Absoluter Fehler der Ausgangsgröße

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \tag{1.130}$$

Relativer Fehler

$[\delta x] =:$ Relativer Fehler der Eingangsgröße in %
$[\delta y] =:$ Relativer Fehler der Ausgangsgröße in %

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x} \tag{1.131}$$
$$\delta y = \frac{\Delta y}{y} \tag{1.132}$$
$$\Delta y = f'(x)\cdot \Delta x \tag{1.133}$$
$$\delta y = \frac{x\cdot f'(x)}{f(x)} \delta x \tag{1.134}$$

1.4.4 Linearisierung und Taylor-Polynome

Tangentengleichung

$[x_0] =:$ Punkt an denn das Polynome entwickelt wird

$$y_T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \tag{1.135}$$

Taylor Polynome

$[x_0] =:$ Punkt an denn das Polynome entwickelt wird
$[R_n] =:$ Restglied

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) \tag{1.136}$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}}{i!}(x-x_0)^i + R_n(x) \tag{1.137}$$

Restglied

$[x_0] =:$ Punkt an denn das Polynome entwickelt wird
$[c] =:$ $x_0 < c < x$, wenn $x_0 < x$
$[c] =:$ $x_0 > c > x$, wenn $x_0 > x$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \tag{1.138}$$

1.4.5 Grenzwertregel von Bernoulli und de l'Hospital

de l'Hospital

Gilt nur wenn $\lim_{x\to x_0} f(x)$ gleich $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ ist

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{1.139}$$

1.4.6 Differentielle Kurvenuntersuchung

Normale der Kurve

$$y_N(x) = f(x_0) - \frac{1}{f'(x)}(x-x_0) \tag{1.140}$$

Monotonie-Verhalten

$$f'(x) > 0 \qquad \text{Monoton wachsend} \tag{1.141}$$
$$f'(x) < 0 \qquad \text{Monoton fallend} \tag{1.142}$$

Krümmung-Verhalten

$$f''(x) > 0 \qquad \text{Linkskrümmung(konvex)} \tag{1.143}$$
$$f''(x) < 0 \qquad \text{Rechtskrümmung(konkav)} \tag{1.144}$$

Ableitung Polarkordinaten

$[\dot{r}] =:$ Ableitung nach φ
$[\ddot{r}] =:$ Zweite Ableitung nach φ

$$y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi \tag{1.145}$$
$$x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi \tag{1.146}$$
$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi} \tag{1.147}$$
$$y'' = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{2(r')^2 - r\cdot r'' + r^2}{(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)^3} \tag{1.148}$$

Ableitung Parameterform

$[\dot{x}] =:$ Ableitung nach t
$[\dot{y}] =:$ Ableitung nach t

$$y = y(t) \tag{1.149}$$
$$x = x(t) \tag{1.150}$$
$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \tag{1.151}$$
$$y'' = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3} \tag{1.152}$$

Bogendifferential

"Wegelement" einer Funktion

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\cdot \mathrm{d}x \tag{1.153}$$
$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\cdot \mathrm{d}t \tag{1.154}$$
$$\mathrm{d}s = \sqrt{r^2 + (r')^2}\cdot \mathrm{d}\varphi \tag{1.155}$$

Winkeländerung

$$\tau = \arctan y' \tag{1.156}$$
$$\mathrm{d}\tau = \frac{y''}{1 + (y')^2}\cdot \mathrm{d}x \tag{1.157}$$

Kurvenkrümmung

$$\kappa = \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} \tag{1.158}$$
$$\kappa = \frac{y''}{\sqrt{\left(1 + (y')^2\right)^3}} \tag{1.159}$$
$$\kappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\sqrt{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^3}} \tag{1.160}$$
$$\kappa = \frac{2(r')^2 - r\cdot r'' + r^2}{\sqrt{\left(r^2 + (r')^2\right)^3}} \tag{1.161}$$

Krümmungskreis

$[\rho] =:$ Radius des Krümmungskreises
$[x_K] =:$ x-Koordinaten des Kreismittelpunktes
$[y_K] =:$ y-Koordinaten des Kreismittelpunktes
$[x_P] =:$ x-Koordinaten des Kurvenpunktes
$[y_P] =:$ y-Koordinaten des Kurvenpunktes

$$\rho = \frac{1}{|\kappa|} \tag{1.162}$$
$$x_K = x_P - y'\frac{1 + (y')^2}{|y''|} \tag{1.163}$$
$$y_K = y_P + \frac{1 + (y')^2}{|y''|} \tag{1.164}$$

1.5 Differential- und Integralrechnung mit mehreren Variablen

1.5.1 Differentialrechnung

Aleitung

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_3)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = y_{x_1}$$ Alles bis auf x_1 ist konstant beim ableiten

$$\frac{\partial y}{\partial x_n} = y_{x_n}$$ Alles bis auf x_n ist konstant beim ableiten

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = y_{x_1x_1}$$ Alles bis auf x_1 ist konstant beim ableiten

$$y_{x_1x_2} = y_{x_2x_1}$$

Tangentialebene

$[x_0] = 1:$ Entwicklungspunkt der Ebene
$[y_0] = 1:$ Entwicklungspunkt der Ebene

$$z - z_0 = f_x\left(x_0; y_0\right)\cdot(x - x_0) + f_y\left(x_0; y_0\right)\cdot(y - y_0)$$

Totales Differential

$$\mathrm{d}z = f_x\cdot \mathrm{d}x + f_y\cdot \mathrm{d}y$$

Extrema

$f_x(x_0,y_0)=0$ $\quad f_y(x_0,y_0)=0$

$f_{xx}(x_0;y_0)<0$ Maximum

$f_{xx}(x_0;y_0)>0$ Minimum

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0;y_0) & f_{xy}(x_0;y_0) \\ f_{xy}(x_0;y_0) & f_{yy}(x_0;y_0) \end{vmatrix} > 0$$

Sattelpunkt

$f_x(x_0,y_0)=0$ $\quad f_y(x_0,y_0)=0$

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0;y_0) & f_{xy}(x_0;y_0) \\ f_{xy}(x_0;y_0) & f_{yy}(x_0;y_0) \end{vmatrix} < 0$$

Richtungsableitung

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \frac{1}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}} \cdot \left(a_x z_x + a_y z_y\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = z_x \cos\alpha + z_y \sin\alpha$$

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \vec{e_a} \cdot \operatorname{grad}(z)$$

1.5.2 Mehrfachintegral

Polarkordinaten

$x = x_0 + r\cos\varphi$ $\quad y = y_0 + r\sin\varphi$

Volumen

$$\iiint_V \mathrm{d}V = \int_x \int_y \int_z \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$\iiint_V \mathrm{d}V = \int_r \int_\varphi \int_z r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

Fläche

$$A = \iint_{(A)} \mathrm{d}A$$

Masse

$$m = \iint_{(A)} \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$m = \iint_{(A)} \rho(r,\varphi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

$$m = \iiint_{(V)} \rho(x,y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$m = \iiint_{(V)} \rho(r,\varphi) r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

Statische Moment

$[M_x]=1$: Moment bezüglich x-Achse
$\left[M_y\right]=1$: Moment bezüglich y-Achse

$$M_x = \iint_{(A)} y\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$M_x = \iint_{(A)} y_0 + r\sin\varphi\,\rho(r,\varphi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

$$M_y = \iint_{(A)} x\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$M_y = \iint_{(A)} x_0 + r\cos\varphi\,\rho(r,\varphi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

Schwerpunkt

$$x_s = \frac{M_y}{m}$$

$$y_s = \frac{M_x}{m}$$

Trägheitsmoment

$$I_x = \iint_{(A)} y^2 \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$I_x = \iint_{(A)} (y_0 + r\sin\varphi)^2 \rho(r,\varphi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$
$$I_y = \iint_{(A)} x^2 \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$I_y = \iint_{(A)} (x_0 + r\cos\varphi)^2 \rho(r,\varphi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

Polares Trägheitsmoment

$$I_x = \iint_{(A)} \left(y^2 + x^2\right) \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$I_x = \iint_{(A)} \left((y_0 + r\sin\varphi)^2 + (x_0 + r\cos\varphi)^2\right) \rho(r,\varphi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

Kugelkoordinaten

$$V = \int_r \int_\vartheta \int_\varphi r^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r$$

1.6 Differentialgleichungen

Anfangsbedingung: Werte nur an einer Stelle vorgegeben
Randbedingung: Werte an mehreren Stelle vorgegeben

Lineare DG

$$y_{all} = y_h + y_p$$

1.6.1 DG 1. Ordnung

Trennung der variablen

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y)$$
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Lineare DG

$$y' + f(x) \cdot g(y) = g(x) \qquad g(x) = 0 \Rightarrow \text{homogen}$$
$$y_{all} = e^{-F(x)} \cdot \left(\int g(x) \cdot e^{F(x)}\,\mathrm{d}x + C \right)$$

1.6.2 Lineare DG 2. Ordnung

Darstellung

$$a(x) \cdot y'' + b(x) \cdot y' + c(x) \cdot y = g(x) \qquad g(x) = 0 \Rightarrow \text{homogen}$$

Fundamental Lösungen

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$
$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2$$
$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x} \qquad \lambda_1 = \lambda_2$$
$$y_h = C_1 e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x) \qquad \lambda_{1/2} = \alpha \pm \beta \cdot j$$

Partikuläre Lösungen(Polynome)

$[G(x)] = 1$: Ansatz
$[g(x)] = 1$: Störglied
$[r] = 1$: Anzahl der Resonanzfälle

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$
$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n$$
$$G(x) = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \cdots + B_n x^n \qquad \lambda \neq 0$$
$$G(x) = \left(B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \cdots + B_n x^n\right) \cdot x^r \qquad \lambda = 0$$

Partikuläre Lösungen(Polynome und e)

$[G(x)] = 1$: Ansatz
$[g(x)] = 1$: Störglied
$[r] = 1$: Anzahl der Resonanzfälle

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$
$$g(x) = \left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n\right) e^{mx}$$
$$G(x) = \left(B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \cdots + B_n x^n\right) e^{mx} \qquad \lambda \neq m$$
$$G(x) = \left(B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \cdots + B_n x^n\right) e^{mx} \cdot x^r \qquad \lambda = m$$

Partikuläre Lösungen(sin und cos)

$[G(x)] = 1$: Ansatz
$[g(x)] = 1$: Störglied
$[r] = 1$: Anzahl der Resonanzfälle

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$
$$g(x) = a\cos(kx) + b\sin(kx)$$
$$G(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx) \qquad \lambda \neq \pm kj$$
$$G(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx) \cdot x^r \qquad \lambda = \pm kj$$

Partikuläre Lösungen(e, sin und cos)

$[G(x)] = 1$: Ansatz
$[g(x)] = 1$: Störglied
$[r] = 1$: Anzahl der Resonanzfälle

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$
$$g(x) = \left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n\right) e^{mx} \cdot (c\cos(kx) + d\sin(kx))$$
$$G(x) = \left(B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \cdots + B_n x^n\right) e^{mx} \cdot (C\cos(kx) + D\sin(kx)) \qquad \lambda \neq m \pm kj$$
$$G(x) = \left(B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \cdots + B_n x^n\right) e^{mx} \cdot (C\cos(kx) + D\sin(kx)) \cdot x^r \qquad \lambda = m \pm kj$$

1.7 Reihen

1.7.1 Geometrische Folge

Darstellung

$$a_n = a \cdot q^n$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n = \frac{a}{1-q}$$

Konvergent für |q|<1

1.7.2 Harmonische Reihe

Darstellung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Konvergent für s>1

1.7.3 Konvergenz

Majorantenkriterium

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$ b_n ist eine bekannte konvergente Reihe

Minorantenkriterium

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \geq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$ b_n ist eine bekannte divergente Reihe

Wurzelkriterium

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ — $q > 1$ ist die Reihe divergent
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ — $q < 1$ ist die Reihe konvergent
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ — $q = 1$ keine Aussage möglich

Quotientenkriterium

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ — $q > 1$ ist die Reihe divergent
$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ — $q < 1$ ist die Reihe konvergent
$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ — $q = 1$ keine Aussage möglich

Leibnizkriterium

Nur bei alternierenden Reihen

$\lim_{n\to\infty} (-1)^n a_n$
$\lim_{n\to\infty} a_n = q$ — $q = 0$ ist die Reihe divergent
$\lim_{n\to\infty} (-1)^n a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$ — Absolut Konvergent

1.7.4 Bekannte konvergente Reihen

Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=\frac{1}{e}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=2 \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}=\frac{2}{3}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2 \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$$

1.8 Funktionsreihen

Darstellung

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

1.8.1 Potenzreihen

Darstellung

$[x_0]=1$: Verschiebung des Entwicklungspunktes

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

1.8.2 Konvergenz

Konvergenz

Ränder müssen unterucht werden

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$
$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$
$$r=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

1.8.3 Bekannte Potenzreihen

Reihen

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad x\in\mathbb{R}$$
$$\ln x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n \qquad x\in(0,2]$$
$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \qquad x\in(-1,1]$$
$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \qquad x\in[-1,1)$$
$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n \qquad x\in[-1,1]$$

Reihen

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1} \qquad x \in [-1,1]$$
$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} x^{2n+1} \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$\operatorname{arsinh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1} \qquad x \in [-1,1]$$
$$\operatorname{artanh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} x^{2n+1} \qquad x \in \mathbb{R}$$

1.8.4 Fourier Reihen

Fourier

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + a_n \cdot \sin(n\omega_0 t))$$
$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{(T)} y(t)\,\mathrm{d}t$$
$$a_n = \frac{2}{T}\int_{(T)} y(t)\cdot\cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_{(T)} y(t)\cdot\sin(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t$$

Symetrie

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cdot \cos(n\omega_0 t)) \qquad \text{gerade Funktion } b_n = 0$$
$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)) \qquad \text{ungerade Funktion } a_n = 0$$

Komplex

$$y(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jnx}$$
$$c_n = \frac{1}{T}\int_{(T)} y(x)\cdot e^{-jnx}\,\mathrm{d}x$$

Umrechnung

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0$$
$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$
$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$$
$$a_0 = 2c_0$$
$$a_n = c_n + c_{-n}$$
$$b_n = j(c_n - c_{-n})$$

2 Physik

2.1 Vorsätze

Tera	T	1000000000000	10^{12}
Giga	G	1000000000	10^{9}
Mega	M	1000000	10^{6}
Kilo	k	1000	10^{3}
Hekto	h	100	10^{2}
Deka	da	10	10^{1}
Dezi	d	$0,1$	10^{-1}
Zenti	c	$0,01$	10^{-2}
Milli	m	$0,001$	10^{-3}
Mikro	μ	$0,000001$	10^{-6}
Nano	n	$0,000000001$	10^{-9}
Pico	p	$0,000000000001$	10^{-12}
Femto	f	$0,000000000000001$	10^{-15}

2.2 Kinematik

2.2.1 Geradlinige Bewegungen(Translation)

$$a(t) = a_0 = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dot{v} = \ddot{s}$$
$$v(t) = a_0 \cdot t + v_0 = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{s}$$
$$s(t) = \frac{1}{2} a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

2.2.2 Kreisbewegungen(Rotation)

Winkelgrößen

$[\alpha] = \mathrm{rad\,s^{-2}}$: Winkelbeschleunigung
$[\omega] = \mathrm{rad\,s^{-1}}$: Winkelgeschwindigkeit
$[\varphi] = \mathrm{rad}$: Drehwinkel

$$\alpha(t) = \alpha_0 = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$$
$$\omega(t) = \alpha_0 \cdot t + \omega_0 = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \dot{\varphi}$$
$$\varphi(t) = \frac{1}{2} \alpha_0 \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \varphi_0$$

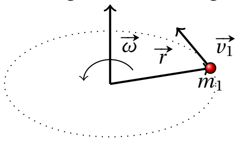
Bahngrößen

$[a_t] = \mathrm{m\,s^{-2}}$: Beschleunigung(tan)
$[v] = \mathrm{m\,s^{-1}}$: Geschwindugkeit
$[s] = \mathrm{m}$: Weg

$$a_t(t) = a_0 = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dot{v} = \ddot{s}$$
$$v(t) = a_0 \cdot t + v_0 = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{s}$$
$$s(t) = \frac{1}{2} a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

Umrechnung

Winkelgrößen $\Leftrightarrow$ Bahngrößen



$$\vec{a_t} = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$
$$a_t = \alpha \cdot r \qquad \alpha \perp r$$
$$\vec{\alpha} = \vec{r} \times \vec{a_t}$$
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$
$$v = \omega \cdot r \qquad \omega \perp r$$
$$\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{v}$$
$$s = \varphi \cdot r$$

Kreisfrequenz

$[T] = \mathrm{s}$: Periodendauer
$[n] = \mathrm{s^{-1}}$: Drehzahl
$[f] = \mathrm{Hz}$: Frequenz

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = 2 \cdot \pi \cdot n = 2 \cdot \pi \cdot f$$

Radialbeschleunigung

$[a_r] = \mathrm{m\,s^{-2}}$: Radialbeschleunigung

$$a_r = \frac{v^2}{r} = v \cdot \omega = \omega^2 \cdot r$$

Umdrehungen

$[N] = 1$: Umdrehungen

$$N = \frac{\omega_0 \cdot t}{2 \cdot \pi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{2 \cdot \pi} \cdot t^2 = n_0 \cdot t + \frac{\alpha}{4 \cdot \pi} \cdot t^2$$

2.3 Dynamik

2.3.1 Geradlinig(Translation)

1.Trägheitgesetz	$\sum v m = \mathrm{const}$	Geschlossenes System
2.Grundgesetz Mechanik	$\sum F = m a$	Summen aller Kräfte gleich Trägheit
3.Wechselwirkungsgesetz	$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$	Aktion gleich Reaktion

Kraft

$[F] = \mathrm{N}$: Kraft
$[m] = \mathrm{kg}$: Masse

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$
$$\vec{F}_{\mathrm{Tr}} = -m \cdot \vec{a}$$
$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \vec{e}_p = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (m v) \vec{e}_v$$

Impuls

$[p] = \mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$: Impuls

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Kraftstoß

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \vec{v} \cdot \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$
$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{\vec{p}_2}^{\vec{p}_1} \mathrm{d}p = \int_0^t \vec{F}\,\mathrm{d}t$$

Arbeit

$[W] = \mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}$: Arbeit

$$W = -\int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} \vec{F_{\mathrm{Tr}}} \circ \mathrm{d}\vec{s} = \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}_1} m\,\vec{v} \circ \mathrm{d}\vec{v} = \frac{1}{2} m \left(v_1^2 - v_0^2\right)$$

kin. Energie

$[E] = \mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}$: Energie

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$$

Hubarbeit

$[g] = \mathrm{m\,s^{-2}}$: Fallbeschleunigung

$$W_{\mathrm{hub}} = m g h$$

Leistung

$[g] = \mathrm{kg\,m^2\,s^{-3}}$: Leistung

$$P = \vec{F} \circ \vec{v} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \dot{W}$$

2.3.2 Drehbewegung(Rotation)

Massenträgheitsmoment

$[J] = \mathrm{kg\,m^2}$: Massenträgheitsmoment

$$J = \int r^2\,\mathrm{d}m$$

Drehimpuls

$[L] = \mathrm{kg\,m^2\,rad\,s^{-1}}$: Drehimpuls

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = J \cdot \vec{\omega}$$

Drehmoment

$[M] = \mathrm{N\,m}$: Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = J \vec{\alpha} = \dot{\vec{L}}$$

kinetische Energie

$$E_{kin} = \frac{1}{2} J \omega^2$$

Arbeit

$$W = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \vec{M} \circ \vec{e_\omega} \, \mathrm{d}\varphi = \int_{\vec{\omega}_0}^{\vec{\omega}_1} J \vec{\omega} \, \mathrm{d}\vec{\omega} = \frac{1}{2} J \left(\omega_1^2 - \omega_0^2\right)$$

Leistung

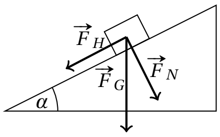
$$P = \vec{M} \circ \vec{\omega}$$

Zentripedalkraft

$$\vec{F}_{zp} = -m \cdot \omega^2 \cdot r \vec{e_r} = -m \cdot v^2 \cdot \frac{\vec{e}_r}{r}$$

2.3.3 Schiefe Ebene

Kräfte



$$\vec{F}_N = \vec{F}_G \cos\alpha$$
$$\vec{F}_H = \vec{F}_G \sin\alpha$$

2.3.4 Reibung

Reibungskräfte

$[F_N] = \mathrm{N}$: Normalkraft
$[F_R] = \mathrm{N}$: Reibungskraft
$[\mu] = 1$: Reibungskoeffizient

$$F_R = \mu \cdot F_N$$

Rollreibung

$[F_N] = \mathrm{N}$: Normalkraft
$[f] = 1$: Rollreibungstahl
$[M] = 1$: Drehmoment
$[r] = \mathrm{m}$: Radius

$$M = f \cdot F_N$$
$$F_R = \frac{f}{r} \cdot F_N$$

2.3.5 Feder

Hookesches Gesetz

$[k] = \mathrm{N\,m^{-1}}$: Federkonstante
$[D] = \mathrm{N\,m\,rad^{-1}}$: Winkelrichtgröße

$$F = -kx$$
$$M = -D\varphi$$

Spannungsenergie

$$W = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} F \, \mathrm{d}x = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} kx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(x_{\max}^2 - x_{\min}^2\right)$$

2.3.6 Elastischer Stoß

Energieerhaltung

Energie vor den Stoß = Energie nach den Stoß

$$\sum E_{\text{kin}} = \sum E'_{\text{kin}}$$

Impulserhaltung

Impuls vor den Stoß = Impuls nach den Stoß

$$\sum m \vec{v} = \sum m \vec{v}'$$

Zentraler, elastischer Stoß

(Energie und Impuls)

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

Zentraler, elastischer Stoß

(Geschwindigkeit nach dem Stoß)

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2$$
$$v_1' = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

2.3.7 Unelastischer Stoß

Energieerhaltung

Energie vor den Stoß = Energie nach den Stoß + Arbeit

$$\sum E_{\text{kin}} = \sum E'_{\text{kin}} + \Delta W$$

Impulserhaltung

Impuls vor den Stoß = Impuls nach den Stoß

$$\sum m\vec{v} = \sum m\vec{v}'$$

Total unelastischer Stoß

(Energie und Impuls)

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\,v'^2 + \Delta W$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1+m_2)\,v'$$

Total unelastischer Stoß

(Geschwindigkeit nach dem Stoß)

$$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v2}{m_1 + m_2}$$

Total unelastischer Stoß

(Energieverlust)

$$\Delta W = \frac{m_1 \cdot m_2}{2(m_1+m_2)}(v_1 - v_2)^2$$

2.3.8 Drehimpulse

Drehimpulserhaltungssatz

Drehinpuls zur Zeit 1 = Drehimpuls zur Zeit 2

$$\sum \vec{L} = \sum \vec{L}'$$

Kupplung Zweier Drehkörper

(Winkelgeschwindigkeit nach dem Kuppeln und Energieverlust)

$$\vec{\omega}' = \frac{J_0\overrightarrow{\omega_0} + J_1\overrightarrow{\omega_1}}{J_1 + J_2}$$

$$W = \frac{J_0 \cdot J_1}{2(J_0+J_1)}(\omega_0 - \omega_1)^2$$

2.3.9 Rotierendes Bezugssystem

Zentrifugalkraft

$$\vec{F}_Z = F_r \cdot \vec{e}_r = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -m\vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$F_Z = -m\frac{v^2}{r} = -m\omega^2 r$$

Corioliskraft

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}$$

2.4 Schwerpunkt

Schwerpunkt mehrere Punktmassen

$$\vec{r}_{\text{Sp}} = \frac{\sum \vec{r}_i m_i}{\sum m_i}$$

Allgemein Schwerpunkt

$$\vec{r}_{\text{Sp}} = \frac{\int \vec{r}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}$$

Schwerpunkt (Kartesische)

$[\rho] = \mathrm{kg\,m^{-3}}$: Dichte

$$x_{\text{Sp}} = \frac{\int_z\int_y\int_x x\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\int_z\int_y\int_x \rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

$$y_{\text{Sp}} = \frac{\int_z\int_y\int_x y\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\int_z\int_y\int_x \rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

$$z_{\text{Sp}} = \frac{\int_z\int_y\int_x z\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\int_z\int_y\int_x \rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

Schwerpunkt (Zylinder)

$$r_{\mathrm{Sp}} = \frac{\int_z \int_\varphi \int_r r^2 \rho \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}z}{\int_z \int_\varphi \int_r r \rho \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}z}$$
$$\varphi_{\mathrm{Sp}} = \frac{\int_z \int_\varphi \int_r \varphi r \rho \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}z}{\int_z \int_\varphi \int_r r \rho \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}z}$$
$$z_{\mathrm{Sp}} = \frac{\int_z \int_\varphi \int_r z r \rho \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}z}{\int_z \int_\varphi \int_r r \rho \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}z}$$
$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = z$$

2.5 Trägheitsmoment

Allgemein

$[\rho] = \mathrm{kg\,m^{-3}}$: Dichte
$[J] = \mathrm{kg\,m^2}$: Massenträgheitsmoment

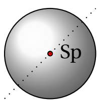
$$J = \sum m_i r_i^2$$
$$J = \int_m r^2 \,\mathrm{d}m$$
$$J = \int_z \int_\varphi \int_r r^3 \rho \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}z$$

Satz von Steiner

$[J_s] = \mathrm{kg\,m^2}$: Mtm am der alten Achse
$[J_x] = \mathrm{kg\,m^2}$: Mtm am der neuen Achse ($J_x \parallel J_s$)
$[r] = \mathrm{m}$: Abstand alter und neuer Achse

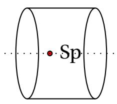
$$J_x = m r^2 + J_s$$

Trägheitsmoment Kugel



$$J_{\mathrm{Sp}} = \frac{2}{5} m r^2$$

Trägheitsmoment Zylinder



$$J_{\mathrm{Sp}} = \frac{1}{2} m r^2$$

Trägheitsmoment Kreisring

$$J_{\mathrm{Sp}} = m r^2$$

Trägheitsmoment Stab

$$J_{\mathrm{Sp}} = \frac{1}{12} m l^2$$

2.6 Elastizitätslehre

Spannung

$[\sigma] = \mathrm{N\,m^{-2}}$: Normalspannung
$[\tau] = \mathrm{N\,m^{-2}}$: Schubspannung
$[E] = \mathrm{N\,m^{-2}}$: Elastizitätsmodul
$[F_n] = \mathrm{N}$: Normalkraft ($\vec{F} \parallel \vec{A}$)
$[\varepsilon] = 1$: Dehnung

$$\vec{\sigma} = \frac{\mathrm{d}\vec{F}_n}{\mathrm{d}A}$$
$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{\Delta l}{l}$$
$$\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}\vec{F}_t}{\mathrm{d}A}$$

Schubmodul

$[G] = \mathrm{N\,m^{-2}}$: Schubmodul
$[\varphi] = \mathrm{rad}$: Scherwinkel

$$G = \frac{\tau}{\varphi}$$

Drillung

$[\psi] = \mathrm{rad\,m^{-1}}$: Drillung
$[\varphi] = \mathrm{rad}$: Torisionswinkel
$[l] = \mathrm{m}$: Länge des Drehkörpers
$[W_t] = \mathrm{m^3}$: Wiederstandsmoment

$$\psi = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}l} = \frac{W_t}{G \cdot J_p}\tau = \frac{M_t}{G \cdot J_p}$$

Polares Fläschenmoment

$[J_p] = \mathrm{m^4}$: Polares Fläschenmoment

$$J_p = \int r^2 \,\mathrm{d}A = \int_\varphi \int_r r^3 \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi$$

Verformungsarbeit

$$W = V\int \sigma(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon$$

2.7 Schwingungen

Harmonische Schwingung

$[A] = 1$: Amplitude
$[\omega] = \mathrm{rad\,s^{-1}}$: Kreisfrequenz
$[\varphi] = \mathrm{rad}$: phasenverschiebung

$$u(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

2.7.1 Ungedämpfte Schwingungen

Federpendel

$[\hat{x}] = \mathrm{m}$: Amplitude
$[k] = \mathrm{kg\,s^{-2}}$: Federkonstante
$[\omega] = \mathrm{rad\,s^{-1}}$: Eigenfrequenz

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$
$$x(t) = \hat{x}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$\dot{x}(t) = -\hat{x}\omega\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$\ddot{x}(t) = -\hat{x}\omega^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Mathematisches Pendel

$[\varphi] = \mathrm{rad}$: Auslenkwinkel
$[\hat{\varphi}] = \mathrm{rad}$: Amplitude
$[g] = \mathrm{m\,s^{-2}}$: Fallbeschleunigung
$[\omega] = \mathrm{rad\,s^{-1}}$: Eigenfrequenz
$[l] = \mathrm{m}$: Pendellänge

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi$$
$$\varphi(t) = \hat{\varphi}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$\dot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi}\omega\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$\ddot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi}\omega^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Physikalisches Pendel

$[\varphi] = \mathrm{rad}$: Auslenkwinkel
$[\hat{\varphi}] = \mathrm{rad}$: Amplitude
$[g] = \mathrm{m\,s^{-2}}$: Fallbeschleunigung
$[\omega] = \mathrm{rad\,s^{-1}}$: Eigenfrequenz
$[l] = \mathrm{m}$: Abstand Drehachse A zum SP
$[J_A] = \mathrm{kg\,m^2}$: Trägheitsmoment um Achse A

$$\ddot{\varphi} = -\frac{l\,m\,g}{J_A}\varphi$$
$$\varphi(t) = \hat{\varphi}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$\dot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi}\omega\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$\ddot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi}\omega^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$\omega = \sqrt{\frac{m\,g\,l}{J_A}}$$
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m\,g\,l}{J_A}}$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_A}{m\,g\,l}}$$

Torisionsschwingung

$[\varphi] = \mathrm{rad}$: Torisionswinkel
$[\hat{\varphi}] = \mathrm{rad}$: Amplitude
$[\omega] = \mathrm{rad\,s^{-1}}$: Eigenfrequenz
$[D] = \mathrm{rad\,s^{-1}}$: Winkelrichtgröße
$[J_A] = \mathrm{kg\,m^2}$: Trägheitsmoment um Achse A

$$\ddot{\varphi} = -\frac{D}{J_A}\varphi$$
$$\varphi(t) = \hat{\varphi}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$\dot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi}\omega\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$\ddot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi}\omega^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$\omega = \sqrt{\frac{D}{J_A}}$$
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{J_A}}$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_A}{D}}$$

Flüssigkeitspendel

$[y] = \mathrm{m}$: Auslenkung
$[\hat{y}] = \mathrm{m}$: Amplitude
$[\omega] = \mathrm{rad\,s^{-1}}$: Eigenfrequenz
$[\rho] = \mathrm{kg\,m^{-2}}$: Dichte der Flüssigkeit
$[l] = \mathrm{m}$: Länge der Flüssigkeitsseule
$[A] = \mathrm{m^2}$: Querschnittsfläche

$$\ddot{y} = -\frac{2A\rho g}{m} y$$
$$\varphi(t) = \hat{y}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$\dot{\varphi}(t) = -\hat{y}\,\omega\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$\ddot{\varphi}(t) = -\hat{y}\,\omega^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$\omega = \sqrt{\frac{2A\rho g}{m}} = \sqrt{\frac{2g}{l}}$$
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2g}{l}}$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$$

Elektrischer Schwingkreis

$[q] = \mathrm{A\,s}$: Ladung
$[\hat{q}] = \mathrm{A\,s}$: Amplitude, max. Ladung Kondensator
$[L] = \mathrm{V\,s\,A^{-1}}$: Induktivität
$[C] = \mathrm{A\,s\,V^{-1}}$: Kapazität

$$0 = L\ddot{Q} + \frac{Q}{C}$$
$$q(t) = \hat{Q}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$\dot{q}(t) = -\hat{Q}\omega\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$\ddot{q}(t) = -\hat{Q}\omega^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}}$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

2.7.2 Gedämpfte Schwingungen

Schwingungsgleichung mit Reibung

$[k] = \mathrm{kg\,s^{-2}}$: Richtgröße
$[F_R] = \mathrm{N}$: Reibungskraft
$[x] = \mathrm{m}$: Auslenkung

$$m\ddot{x} = -kx + F_R$$

Coulomb-Reibung

$[k] = \mathrm{kg\,s^{-2}}$: Richtgröße
$[F_N] = \mathrm{N}$: Normalkraft
$[F_R] = \mathrm{N}$: Reibungskraft
$[\mu] = 1$: Reibungskoeffizient
$[\dot{x}] = \mathrm{m\,s^{-1}}$: Geschwindigkeit

$$F_R = -\operatorname{sgn}(\dot{x})\mu F_N$$
$$0 = m\ddot{x} + kx + \operatorname{sgn}(\dot{x})\mu F_N$$
$$\operatorname{sgn}(\dot{x}) = \begin{cases} -1 & \dot{x} < 0 \\ 0 & \dot{x} = 0 \\ +1 & \dot{x} > 0 \end{cases}$$

Gleitreibung(Nicht Behandelt)

$[k] = \mathrm{kg\,s^{-2}}$: Richtgröße
$[F_N] = \mathrm{N}$: Normalkraft
$[\mu] = 1$: Reibungskoeffizient
$[\hat{x}_0] = \mathrm{m}$: Start Amplitude
$[\hat{x}_1] = \mathrm{m}$: End Amplitude

$$x(t) = -(\hat{x}_0 - \hat{x}_1)\cos(\omega t) - \hat{x}_1 \qquad 0 \le t \le \frac{T}{2}$$
$$x(t) = -(\hat{x}_0 - 3\hat{x}_1)\cos(\omega t) + \hat{x}_1 \qquad \frac{T}{2} \le t \le T$$
$$\hat{x}_1 = \frac{\mu F_N}{k}$$

Viskose Reibung

$[k] = \mathrm{kg\,s^{-2}}$: Richtgröße
$[\hat{x}] = \mathrm{m}$: Amplitude
$[\omega] = \mathrm{rad\,s^{-1}}$: Eigenfrequenz
$[\delta] = \mathrm{s^{-1}}$: Abklingkoeffizient
$[b] = \mathrm{kg\,s^{-1}}$: Dämpfungskonstante
$[D] = 1$: Dämpfungsgrad
$[\omega_D] = \mathrm{rad\,s^{-1}}$: Gedämpfte Kreisfrequenz
$[\Lambda] = 1$: logarithmischen Dekrement
$[d] = 1$: Verlustfaktor
$[Q] = 1$: Güte

$$0 = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx$$
$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t}e^{\pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\,t}$$
$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t}e^{\pm j\omega_0\sqrt{1-D^2}\,t}$$
$$\delta = \frac{b}{2m}$$
$$D = \frac{\delta}{\omega_0}$$
$$D = \frac{b}{2}\frac{1}{\sqrt{mk}}$$
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$\Lambda = \ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T)}\right)$$
$$\Lambda = \delta T$$
$$\omega_D = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$
$$d = 2D$$
$$Q = \frac{1}{d}$$

Viskose Reibung

Schwingfall.$\delta < \omega_0$

$$x(t) = \hat{x} e^{-\delta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\, t + \varphi)$$

Viskose Reibung

Aperiodischer Grenzfall $\delta = \omega_0$

$$x(t) = \hat{x} e^{-\delta t} (1 - \delta t)$$

Viskose Reibung

Kriechfall $\delta > \omega_0$

$$x(t) = \hat{x} e^{-\delta t} e^{\pm j \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\, t}$$

2.8 Fluidmechanik

2.8.1 Ohne Reibung

Statischer Druck

$[p] = \mathrm{Pa}$: Druck
$[F] = \mathrm{N}$: Kraft ($\vec{F}_N \parallel \vec{A}$)
$[A] = \mathrm{m}^2$: Fläche

$$p = \frac{\mathrm{d}F_N}{\mathrm{d}A}$$

Dynamischer Druck

$[p] = \mathrm{Pa}$: Druck
$[v] = \mathrm{m\,s^{-1}}$: Geschwindigkeit des Mediums
$[\rho] = \mathrm{kg\,m^{-3}}$: Dichte

$$p = \frac{1}{2} \rho v^2$$

Schwere Druck

$[p] = \mathrm{Pa}$: Druck
$[\rho] = \mathrm{kg\,m^{-3}}$: Dichte
$[V] = \mathrm{m}^3$: Volumen
$[A] = \mathrm{m}^2$: Fläche
$[h] = \mathrm{m}$: Tiefe (Abstand von Oben)

$$\begin{aligned} p &= \frac{\rho V g}{A} \\ &= h \rho g \end{aligned}$$

Volumenstrom

$[\dot{V}] = \mathrm{m^3\,s^{-1}}$: Volumenstrom

$$\begin{aligned} \dot{V} &= vA \\ &= \iint_A \vec{v}\, \mathrm{d}\vec{A} \\ &= \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \\ &= Q \end{aligned}$$

Massenstrom

$[\dot{m}] = \mathrm{kg\,s^{-1}}$: Massenstrom
$[j] = \mathrm{kg\,m^{-2}\,s^{-1}}$: Massenstromdichte

$$\begin{aligned} \dot{m} &= jA \\ &= \iint_A \vec{j}\, \mathrm{d}\vec{A} \\ &= \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

Kontinuitätsgleichung

$[v_1] = \mathrm{m\,s^{-1}}$: Geschwindigkeit zum Zeitpunkt 1
$[v_2] = \mathrm{m\,s^{-1}}$: Geschwindigkeit zum Zeitpunkt 2
$[A_1] = \mathrm{m}^2$: Flässche zum Zeitpunkt 1
$[A_2] = \mathrm{m}^2$: Flässche zum Zeitpunkt 2

$$\begin{aligned} \dot{m}|_1 &= \dot{m}|_2 & & \\ \dot{V}\Big|_1 &= \dot{V}\Big|_2 & \rho_1 &= \rho_2 \\ v_1 A_1 &= v_2 A_2 & \rho_1 &= \rho_2 \end{aligned}$$

Kompressibilität

$[\Delta V] = \mathrm{m}^3$: Volumenabnahme
$[\Delta p] = \mathrm{Pa}$: Druckzunahme
$[\kappa] = \mathrm{Pa}^{-1}$: Kompressibilität

$$\kappa = \frac{\Delta V}{\Delta p V}$$

Volumenausdehnungskoeffizient

$[\Delta T] = \mathrm{K}$: Temperaturänderung
$[\gamma] = \mathrm{K}^{-1}$: Volumenausdehnungskoeffizient

$$\frac{\Delta V}{V} = \gamma \Delta T$$

Barometrische Höhenformel

Luftdruck in der Atmosphäre
$[p_0] = \mathrm{Pa}$: Druck am Boden
$[\rho_0] = \mathrm{kg\,m^{-3}}$: Dichte am Boden
$[h] = \mathrm{m}$: Tiefe (Abstand von Boden)

$$\begin{aligned} p &= p_0 e^{-Ch} \\ C &= \frac{\rho_0 g}{p_0} \end{aligned}$$

Auftrieb

$[F_A] = \mathrm{N}$: Kraft
$[\rho_V] = \mathrm{kg\,m^{-3}}$: Dichte des verdränkten Stoffes
$[\rho_M] = \mathrm{kg\,m^{-3}}$: Dichte des Stoffes
$[V] = \mathrm{m^3}$: Volumen das verdränkt wird

$$\vec{F_A} = -\rho_V \vec{g} V = -\frac{\rho_V}{\rho_M}\vec{F_G}$$

Bernoulli Gleichung

$[\rho] = \mathrm{kg\,m^{-3}}$: Dichte
$[v] = \mathrm{m\,s^{-1}}$: Geschwindigkeit
$[h] = \mathrm{m}$: Tiefe (Abstand von Oben)

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{const}$$

2.8.2 Laminare Reibung

Eine Strömung mit sich nicht kreuzenden Strombahnen heißt laminare Strömung.
Platten der Fläche A, zwischen dennen eine Reibung wirkt, bewegen sich relativ zueinander mit v und denn Abstand x.

Newtonsches Reibungsgestz

$[\eta] = \mathrm{Pa\,s}$: Viskosität
$[A] = \mathrm{m^2}$: Fläsche einer Schicht
$[\mathrm{d}v] = \mathrm{m\,s^{-1}}$: Geschwindigkeit der Schichten
$[\mathrm{d}x] = \mathrm{m}$: Abstand der Schichten

$$F_R = \eta A \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

Laminare Strömungen in einen Rohr

Hagen-Poiseuillesches Gesetz
$[\eta] = \mathrm{Pa\,s}$: Viskosität
$[l] = \mathrm{m}$: Länge des Rohrs
$[r] = \mathrm{m}$: Abstand von der Mittellinie
$[R] = \mathrm{m}$: Radius des Rohres
$[p] = \mathrm{Pa}$: Druckabfall über das Rohr

$$v(r) = \frac{p}{4\eta l}\left(R^2 - r^2\right)$$
$$p = \frac{4\eta l}{R^2} v(0)$$
$$\dot{V} = \frac{\pi R^4}{8\eta l}\Delta p$$

Umströmung einer Kugel

Strokessches Reibungsgesetz
$[\eta] = \mathrm{Pa\,s}$: Viskosität
$[r] = \mathrm{m}$: Radius der Kugel
$[v] = \mathrm{m\,s^{-1}}$: Geschwindigkeit Strömung(Kugel)

$$F_R = 6\pi\eta r v$$

Bernoulli Gleichung mit Reibung

$[\Delta p] = \mathrm{Pa}$: Druck "Verlustïm Rohr

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 + \Delta p$$

Reynoldzahl

$[Re] = 1$: Reynoldzahl
$[Re_{krit}] = 1$: Kritische Reynoldzahl
$[L] = \mathrm{m}$: Charakteristische Länge
L z.B. Rohr oder Kugel Durschmesser
$[\rho] = \mathrm{kg\,m^{-3}}$: Dichte der Flüssigkeit
$[v] = \mathrm{m\,s^{-1}}$: Geschwindigkeit der Flüssigkeit

$$Re = \frac{L\rho v}{\eta}$$
$Re > Re_{krit}$ Strömung wird Turbulent

Reynoldszahl — Kriterium für die Strömung zur bildung von Turbulenten

2.9 Gravitation

Gravitationsgesetzt

$[F_g] = \mathrm{N}$: Gravitationskraft
$[G] = \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$: Gravitationskonstante
$[r_{12}] = \mathrm{m}$: Schwerpunktabstand der Körper
$[m_i] = \mathrm{kg}$: Masse des Körper i
$[E_g] = \mathrm{m\,s^{-2}}$: Gravitationsfeldstärke

$$\vec{F}_{g,2} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\vec{e}_r$$
$$\vec{F}_g = \vec{E}_g \cdot m$$
$$\vec{g} = \vec{E}_g$$
$$\vec{g} = -G\frac{m}{r^2}\vec{e}_r$$

Gravitationspotenzial

$[\phi] = \mathrm{J\,kg^{-1}}$: Gravitationspotenzial
$[G] = \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$: Gravitationskonstante
$[r] = \mathrm{m}$: Abstand der anziehenden Kraft
$[M] = \mathrm{kg}$: Masse des Anziehende Körpers

$$\phi = -G\frac{M}{r}$$
$$\vec{E}_g = -\mathrm{grad}\phi$$

Arbeit

$[\phi] = \mathrm{J\,kg^{-1}}$: Gravitationspotenzial
$[G] = \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$: Gravitationskonstante
$[r] = \mathrm{m}$: Abstand der anziehenden Kraft
$[M] = \mathrm{kg}$: Masse des Anziehende Körpers

$$W_{12} = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_g \circ \mathrm{d}\vec{r} = GmM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Planetenbahnen

$[T] = \mathrm{s}$: Umlaufzeit
$[a] = \mathrm{m}$: Durchmesser der großen Halbachse
$[i_E] = \mathrm{m}$: a und T Größen der Erde

$$\left(\frac{a}{a_E}\right)^3 = \left(\frac{T}{T_E}\right)^2$$

2.10 Elektrisches Feld

Ladung

$[Q] = \mathrm{A\,s}$: Ladung
$[i] = \mathrm{A}$: Strom

$$\begin{aligned} Q &= n \cdot e_0 \\ &= CU \\ &= \int i \,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Coulombsches Gesetz

$[F] = \mathrm{N}$: Kraft
$[E] = \mathrm{V\,m^{-1}}$: Feldstärke
$[\epsilon] = \mathrm{A\,s\,V^{-1}\,m^{-1}}$: Elektrische Feldkonstante
$[r] = \mathrm{m}$: Abstand der Ladungen

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Q_1 Q_2}{r^2}\vec{r}_{12} \\ \vec{F}_{12} &= \vec{E} Q \\ \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Q}{r^2}\vec{r} \\ \vec{E} &= -\operatorname{grad}\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z\right) \end{aligned}$$

Feldstärke mehrere Punktladung

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N}\vec{E}_i\,\vec{r}_i$$

Spannung

$[U] = \mathrm{V}$: ele. Spannung
$[\varphi] = \mathrm{V}$: ele. Potenzial

$$\begin{aligned} \varphi_A &= -\int_\infty^A \vec{E} \circ \mathrm{d}s \\ \varphi(r) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon r} && \text{Kugel} \\ U_{AB} &= \frac{W_{AB}}{Q} \\ U_{AB} &= -\int_A^B \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{s} \\ U_{AB} &= \oint_s \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{s} = 0 \\ U_{AB} &= \varphi_A - \varphi_B = -\int_\infty^A \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{s} - \left(-\int_\infty^B \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{s}\right) \end{aligned}$$

2.10.1 Elektrostatik

Elektrischer Fluss, Verschiebungsfluss

$[\psi] = \mathrm{V\,m}$: Elektrischer Fluss

$$\begin{aligned} \psi &= \int_A \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{A} \\ \psi &= \oint_A \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon} \end{aligned}$$

Elektrische Flussdichte

$[D] = \mathrm{A\,s\,m^{-2}}$: Elektrische Flussdichte

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}A}\vec{e}_A \\ \vec{D} &= \epsilon\vec{E} \\ Q &= \oint_A D \,\mathrm{d}A \end{aligned}$$

Arbeit im ele. Feld

$[C] = \mathrm{A\,s\,V^{-1}}$: Kapazität
$[W] = \mathrm{J}$: Arbeit
$[w] = \mathrm{J\,m^{-3}}$: Energiedichte

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2}\vec{E} \circ \vec{D} \\ W &= \int_V w \,\mathrm{d}V \\ &= -Q\int_A^B \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{s} \\ &= \int_U Q \,\mathrm{d}U = \int_U CU \,\mathrm{d}U = \frac{1}{2}CU^2 \end{aligned}$$

2.10.2 Elektrodynamik

Kapazität

$[C] = \mathrm{A\,s\,V^{-1}}$: Kapazität

$$Q = CU$$

Ohmsches Gesetz

$[j] = \mathrm{A\,m^{-2}}$: Stromstärke
$[W] = \mathrm{J}$: Arbeit
$[w] = \mathrm{J\,m^{-3}}$: Energiedichte

$$\begin{aligned} I &= \oint_A \vec{j} \circ \mathrm{d}\vec{A} \\ &= \oint_A \kappa \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{A} \\ &= \kappa E \cdot 4\pi r^2 && \text{Kugel} \end{aligned}$$

2.11 Magnetisches Feld

Magnetische Flussdichte

$[B] = \mathrm{V\,s\,m^{-2}}$: Magnetische Flussdichte
$[B] = \mathrm{T}$: Magnetische Flussdichte

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

2.12 Thermodynamik

2.12.1 Dehnung

Wärmedehnung

$[\beta] = \mathrm{K^{-1}}$: Dichteausdehnungskoeffizient
$[\gamma] = \mathrm{K^{-1}}$: Volumenausdehnungskoeffizient
$[\alpha] = \mathrm{K^{-1}}$: Längenausdehnungskoeffizient
$[\rho] = \mathrm{kg\,m^{-3}}$: Dichte
$[V] = \mathrm{m^3}$: Volumen
$[l] = \mathrm{m}$: Länge
$[T] = \mathrm{K}$: Temperatur
$[T_0] = \mathrm{K}$: Ausgangstemperatur

$$\begin{aligned} \rho(T) &= \rho_0(1 - \beta(T - T_0)) \\ V(T) &= V_0(1 + \gamma(T - T_0)) \\ l(T) &= l_0(1 + \alpha(T - T_0)) \\ \gamma &\approx 3 \cdot \alpha \\ \gamma &\approx \beta \end{aligned}$$

2.12.2 Wärme

Wärme

$[Q] = \mathrm{J}$: Wärme
$[c] = \mathrm{J\,K^{-1}\,kg^{-1}}$: spez. Wärmekapazität
$[C] = \mathrm{J\,K^{-1}}$: Wärmekapazität
$[c_{mol}] = \mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$: molare Wärmekapazität
$[n] = \mathrm{mol}$: Stoffmenge

$$\begin{aligned} \Delta Q &= c \cdot m(T - T_0) \\ \Delta Q &= C(T - T_0) \\ \Delta Q &= \int_{T_0}^{T} c \cdot m \,\mathrm{d}T \\ \Delta Q &= c_{mol} \cdot n(T - T_0) \end{aligned}$$

Mischtemperatur

$$T_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} T_i m_i c_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i c_i}$$

$\dot{Q}$ Ist durch einen mehrschichtiges stationäres System Konstant

Wärmeleitung

$[\dot{Q}] = \mathrm{W}$: Wärmestrom
$[\vec{\dot{q}}] = \mathrm{W\,m^{-2}}$: Wärmestromdichte
$[A] = \mathrm{m^2}$: Fläche
$[\lambda] = \mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$: Wärmeleitzahl
$[s] = \mathrm{m}$: Dicke der λ Schicht

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \Phi = P \\ \vec{\dot{q}} &= \frac{\dot{Q}}{A} \cdot \vec{e_A} \\ \vec{\dot{q}} &= -\lambda \,\mathrm{grad}\, T \\ \vec{\dot{q}} &= \frac{\lambda}{s}(T_A - T_B) \cdot \vec{e_s} \\ \dot{q} &= \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{\lambda_i}} \cdot (T_A - T_B) \end{aligned}$$

Wärmekonvektion

$[\alpha] = \mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-1}}$: Wärmeübergangszahl

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \alpha(T_A - T_B) \\ \dot{q} &= \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i}} \cdot (T_A - T_B) \end{aligned}$$

Wärmewiderstand

$[R_{th}] = \mathrm{K\,W^{-1}}$: Wärmewiderstand

$$R_{th} = \frac{T_A - T_B}{\dot{q} \cdot A}$$
$$R_{th} = \frac{s}{\lambda A}$$
$$R_{th} = \frac{1}{\alpha A}$$
$$R_{th} = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

Wärmeübertragung

$[k] = \mathrm{W\,K^{-1}\,m^{-2}}$: Wärmedurchgangszahl

$$k = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{\lambda_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i} + \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot R_i}$$
$$\dot{q} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{\lambda_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i} + \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot R_i} \cdot (T_A - T_B)$$
$$\dot{q} = k \cdot (T_A - T_B)$$

Wärmestrahlung

$[\varepsilon] = 1$: Emissionsgrad
$[\sigma] = \mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$: Stefan-Boltzmann-Konstante
$[C] = \mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-1}}$: Strahlungsaustauschkonstante
$[\alpha] = 1$: Absorptionsgard
$[\tau] = 1$: Transmissionsgard
$[\vartheta] = 1$: Reflexionsgard

$$\alpha = \varepsilon$$
$$1 = \alpha + \tau + \vartheta$$
$$\dot{Q} = \varepsilon A \sigma T^4$$
$$\sigma = 5,6704 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$$
$$\dot{Q}_{AB} = C_{AB} A_A \left(T_A^4 - T_B^4\right)$$
$$C_{AB} = \varepsilon_{AB}\sigma = \frac{\sigma}{\frac{1}{\varepsilon_A} + \frac{1}{\varepsilon_B} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{\sigma_A} + \frac{1}{\sigma_B} - \frac{1}{\sigma}} \quad \text{Parallel}$$
$$C_{AB} = \frac{\sigma}{\frac{1}{\varepsilon_A} + \frac{A_A}{A_B}\left(\frac{1}{\varepsilon_B} - 1\right)} \quad A_A \text{ von } A_B \text{ umschlossen}$$
$$C_{AB} \approx \varepsilon_A \sigma \quad \text{parallel } (A_A \ll A_B)$$

Wiensches Verschiebungsgesetz

Gibt das Maximum der Wellenlänge zur Temperatur an
$[b] = \mathrm{m\,K}$: Wiensche Konstante

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}$$
$$b = 2,8978 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m\,K}$$

Strahler

Berechnug der Strahlungsleistung in einen Bereich λ
$[\Phi] = \mathrm{W}$: Strahlungsleistung
$[I] = \mathrm{W\,sr^{-1}}$: Strahlstärke
$[I] = \mathrm{W\,m^{-2}\,sr^{-1}}$: Strahldichte
$[M] = \mathrm{W\,m^{-2}}$: spez. Ausstrahlung
$[\Omega] = \mathrm{sr}$: Raumwinkel

$$\Phi_e = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$
$$I_e = \frac{\mathrm{d}\Phi_e}{\mathrm{d}\Omega}$$
$$M_e = \frac{\mathrm{d}\Phi_e}{\mathrm{d}A}$$
$$L_e = \frac{\mathrm{d}I_e}{\mathrm{d}A}$$
$$\Omega = \frac{A}{r^2}$$

Schwarzer Strahler(Plancksches Strahlungsgesetz)

Berechnug der Strahlungsleistung in einen Bereich λ
$[k] = \mathrm{J\,K^{-1}}$: Boltzmann Konstante
$[h] = \mathrm{J\,s}$: Planksches Wirkungsquantum
$[\lambda] = \mathrm{m}$: Wellenlänge
$[c] = \mathrm{m\,s^{-1}}$: Lichtgeschwindigkeit
$[n] = 1$: Brechungszahl

$$\varepsilon = \alpha = 1$$
$$P_\lambda = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \cdot \frac{A}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1}$$
$$M_{e,\lambda} = \frac{\mathrm{d}P_\lambda}{\mathrm{d}A} = \frac{c_1}{n^2\lambda^5 \cdot \left(e^{\frac{c_2}{n\lambda T}} - 1\right)}$$
$$L_{e,\lambda} = \frac{M_{e,\lambda}}{\pi\Omega}$$
$$c_1 = 2\pi h c^2 = 3,7418 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$$
$$c_2 = \frac{hc}{k} = 0,01439\,\mathrm{m\,K}$$

2.12.3 Zustandsänderung des idealen Gases

Ideales Gas bedeutet das die Teilchen nicht in Wechselwirkung geraten, sie kein Volumen und es kommt zu keinen Phasenübergang

Energie

$[H] = \mathrm{J}$: Enthalpie
$\left[c_p\right] = \mathrm{J\,K^{-1}}$: spez. Wärmekapazität(p=const)

$$U_{12} = Q_{12} + W_{12}$$
$$\mathrm{d}H = c_p\, m\, \mathrm{d}T = U + p\,\mathrm{d}V \quad \text{Nur Isobar}$$
$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}Q}{T}$$

Zustandsgleichung

$[p] = \mathrm{Pa}$: Druck
$[T] = \mathrm{K}$: Temperatur
$[k] = \mathrm{J\,K^{-1}}$: Boltzmann-Konstante
$[N] = 1$: Teilchenanzahl
$[V] = \mathrm{m^3}$: Volumen
$[R_s] = \mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$: spez. Gaskonstante
$[R] = \mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$: Gaskonstante
$[n] = \mathrm{mol}$: Stoffmenge
$[c_V] = \mathrm{J\,K^{-1}}$: spez. Wärmekapazität(V=const)

$$\frac{pV}{T} = \text{const}$$
$$pV = NkT$$
$$pV = mR_sT$$
$$pV = nRT$$
$$R_s = \frac{nR}{m}$$
$$R_s = c_p - c_v$$

Isotherm

$[\Delta U] = \mathrm{J}$: Innere Energie
$[S] = \mathrm{J\,K^{-1}}$: Innere Energie
$[c_V] = \mathrm{J\,K^{-1}}$: spez. Wärmekapazität(V=const)
$\left[c_p\right] = \mathrm{J\,K^{-1}}$: spez. Wärmekapazität(p=const)

$$pV = \text{const}$$
$$T = \text{const}$$
$$U_{12} = 0$$
$$U_{12} = Q_{12} + W_{12}$$
$$Q_{12} = -W_{12}$$
$$W_{12} = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$
$$W_{12} = p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2}$$
$$S_{12} = m c_p \ln \frac{V_2}{V_1} + m c_V \ln \frac{p_2}{p_1}$$

Isobarer

$$\frac{V}{T} = \text{const}$$
$$p = \text{const}$$
$$Q_{12} = m c_p (T_2 - T_1)$$
$$W_{12} = -p(V_2 - V_1)$$
$$U_{12} = Q_{12} + W_{12}$$
$$S_{12} = m c_p \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Isochor

$$\frac{p}{T} = \text{const}$$
$$V = \text{const}$$
$$Q_{12} = m c_v (T_2 - T_1)$$
$$W_{12} = 0$$
$$U_{12} = Q_{12}$$
$$S_{12} = m c_v \ln \frac{p_2}{p_1}$$

Adiabat

$$pV^\kappa = \text{const}$$
$$Q = \text{const}$$
$$\kappa = \frac{c_p}{c_V}$$
$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-\kappa} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$
$$Q_{12} = 0$$
$$W_{12} = m c_v (T_2 - T_1)$$
$$W_{12} = \frac{RT_1}{\kappa - 1}\left(\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-\kappa} - 1\right)$$
$$U_{12} = W_{12}$$
$$S_{12} = 0;$$

Kreisprozess

$$\oint \mathrm{d}U = 0$$
$$\oint \mathrm{d}U = \oint \mathrm{d}Q + \oint \mathrm{d}W$$
$$\oint \mathrm{d}S = 0 \qquad \text{Revesiebel}$$
$$\oint \mathrm{d}S > 0 \qquad \text{Irrevesiebel}$$

Carnot

$[\eta_C] = 1$: Carnot Wirkungsgrad

$$\eta_C = \frac{W_{ab}}{Q_{zu}}$$
$$\eta_C = \frac{Q_{zu} - Q_{AB}}{Q_{zu}}$$
$$\eta_C = \frac{T_h - T_n}{T_n}$$

2.13 Optik

2.13.1 Brechung

Brechung

$[n_1] = 1$: Brechzahl Medium 1
$[n_2] = 1$: Brechzahl Medium 2
$[\varepsilon_1] = \mathrm{rad}$: Einfallwinkel (Medium 1)
$[\varepsilon_2] = \mathrm{rad}$: Ausfallwinkel (Medium 2)
$[c_1] = \mathrm{m\,s^{-1}}$: Phasengeschwindigkeit (Medium 1)
$[c_2] = \mathrm{m\,s^{-1}}$: Phasengeschwindigkeit (Medium 2)

$$\frac{\sin\varepsilon_1}{\sin\varepsilon_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2}$$
$$\varepsilon_2 = \arcsin\frac{\sin\varepsilon_1 \cdot n_1}{n_2}$$

Totalreflexion tritt nur auf wenn der Lichtstrahl von einen dichteren in ein wenniger dichten Stoff übergeht

Totalreflexion

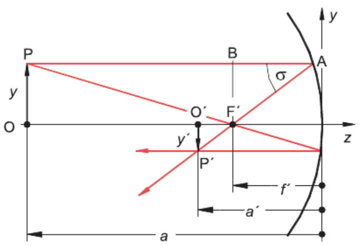
$[n_1] = 1$: Brechzahl Medium 1
$[n_2] = 1$: Brechzahl Medium 2
$[\varepsilon_g] = \mathrm{rad}$: Einfallwinkel (Medium 1)

$$\sin\varepsilon_g = \frac{n_2}{n_1}$$

2.13.2 Hohlspiegel

Spiegel

$[f'] = \mathrm{m}$: Brennpunkt
$[a'] = \mathrm{m}$: Bildweite
$[y'] = \mathrm{m}$: Bildgröße

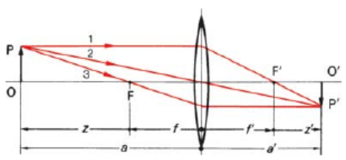


$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}$$
$$f' = \frac{r}{2}$$
$$\beta' = \frac{y'}{y}$$
$$\beta' = -\frac{a'}{a}$$
$$a' = \frac{a f'}{a - f'}$$

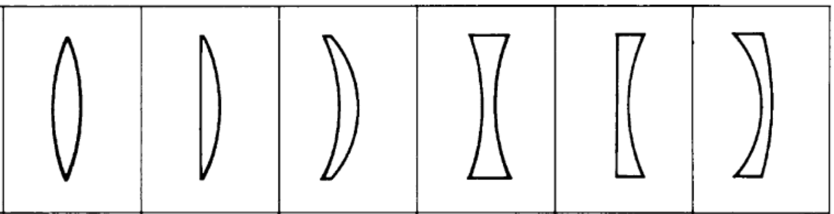
2.13.3 Linse

Linse

$[f'] = \mathrm{m}$: Brennpunkt
$[a'] = \mathrm{m}$: Bildweite
$[y'] = \mathrm{m}$: Bildgröße
$[D'] = \mathrm{m^{-1}}$: Brechkraft
$[n_L] = 1$: Brechzahl Linse



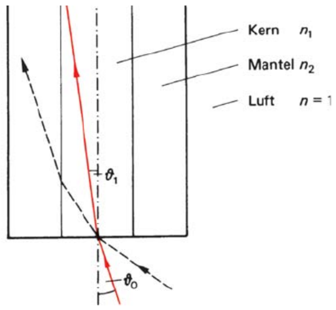
$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{a}$$
$$a' = \frac{a f'}{a + f'}$$
$$\beta' = \frac{f'}{a + f'}$$
$$\beta' = \frac{y'}{y}$$
$$D' = \frac{1}{f'} = (n_L - 1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Linsenform						
Bezeichnung	bi-konvex	plan-konvex	konkav-konvex	bi-konkav	plan-konkav	konvex-konkav
Radien	$r_1 > 0$ $r_2 < 0$	$r_1 = \infty$ $r_2 < 0$	$r_1 < r_2 < 0$	$r_1 < 0$ $r_2 > 0$	$r_1 = \infty$ $r_2 > 0$	$r_2 < r_1 < 0$
Brennweite im optisch dünneren Medium	$f' > 0$	$f' > 0$	$f' > 0$	$f' < 0$	$f' < 0$	$f' < 0$

2.13.4 LWL

Linse

$[A_{WL}] = 1$: numerische Aperatur



$$n \sin \vartheta_0 = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$
$$A_{WL} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

3 Elektrotechnik

3.1 Grundgrößen

Elementarladung

$$e \approx 1{,}6 \cdot 10^{-19} C$$

ele. Ladung

$$[Q] = 1C = 1As$$
$$Q = n \cdot e$$

ele. Strom

$$[I] = 1A$$
$$i(t) = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

ele. Stromdichte

$$[J] = 1\frac{A}{mm^2}$$
$$\vec{J} = \frac{I}{\vec{A}}$$

ele. Potenzial

$$[\varphi] = 1V = 1\frac{Nm}{As} = 1\frac{kgm^2}{As^3}$$
$$\varphi = \frac{W}{Q}$$

ele. Spannung

$$[U] = 1V$$
$$U_{AB} = \varphi_a - \varphi_b$$

ele. Widerstand

$$[R] = 1\Omega = 1\frac{V}{A}$$
$$R = \frac{U}{I}$$
$$= \rho\frac{l}{A} = \frac{1}{\kappa}\frac{l}{A}$$

ele. Leitwert

$$[G] = 1S = 1\frac{A}{V}$$
$$G = \frac{I}{U}$$
$$= \frac{1}{R}$$
$$= \kappa\frac{A}{l} = \frac{1}{\rho}\frac{A}{l}$$

Temperaturabhängigkeit von Widerstand

$$R_2 = R_1 \cdot \left(1 + \alpha(\vartheta_2 - \vartheta_1) + \beta(\vartheta_2 - \vartheta_1)^2\right)$$

3.2 Lineare Quellen

Lineare Spanungsquelle

$$U = U_q - R_i \cdot I$$
$$I_K = \frac{U_q}{R_i}$$

Lineare Stromquelle

$$I = I_q - \frac{U}{R_i}$$
$$U_l = I_q \cdot R_i$$

3.3 Kirchhoffsche Gesetze

Knotenpunktsatz

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0$$

Maschensatz

$$\sum_{i=1}^{n} U_i = 0$$

3.4 Wechselspannung

Gleichanteil

$$\bar{u} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} u(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\bar{i} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} i(t)\,\mathrm{d}t$$

Gleichrichtwert

$$|\bar{u}| = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} |u(t)|\,\mathrm{d}t$$
$$\left|\bar{i}\right| = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} |i(t)|\,\mathrm{d}t$$

Effektivwert

$$u_{eff} = U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_t^{t+T} (u(t))^2\,\mathrm{d}t}$$
$$i_{eff} = I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_t^{t+T} (i(t))^2\,\mathrm{d}t}$$

Formfaktor

$$F = \frac{u_{eff}}{|\bar{u}|}$$
$$F = \frac{\pi}{2\cdot\sqrt{2}}$$ Sinus

Scheitelfaktor

$$\sigma = \frac{\hat{u}}{u_{eff}}$$
$$\sigma = \sqrt{2}$$ Sinus

3.5 Sinusspannung

Sinusschwingung

$[\omega] = \mathrm{rad\,s^{-1}}$: Kreisfrequenz
$[\varphi] = \mathrm{rad}$: Phasenverschiebung
$[\hat{u}] = \mathrm{V}$: Spitzenwert der Spannung

$$u(t) = \hat{u}\sin\left(\omega t + \varphi_u\right)$$
$$i(t) = \hat{i}\sin\left(\omega t + \varphi_i\right)$$
$$\omega = \frac{\varphi_u}{t} = 2\pi f = 2\pi\frac{1}{T}$$
$$t_u = -\frac{\varphi_u}{\omega}$$

Addition zweier Schwingungen

$$u_1(t) = \hat{u}_1\sin\left(\omega t + \varphi_{u1}\right)$$
$$u_2(t) = \hat{u}_2\sin\left(\omega t + \varphi_{u2}\right)$$
$$\hat{u}_{12} = \sqrt{\hat{u}_1^2 + \hat{u}_2^2 + 2\hat{u}_1\hat{u}_2\cos\left(\varphi_{u1} - \varphi_{u2}\right)}$$
$$\varphi_{u12} = \arctan\left(\frac{\hat{u}_1\sin\varphi_{u1} + \hat{u}_2\sin\varphi_{u2}}{\hat{u}_1\cos\varphi_{u1} + \hat{u}_2\cos\varphi_{u2}}\right)$$
Nenner $< 0 \Rightarrow \varphi_{u12} + \pi$

Komplexezeiger

$$u(t) = \hat{u}_1\sin\left(\omega t + \varphi_u\right)$$
$$\underline{u}(t) = \hat{u}\left(\cos\left(\omega t + \varphi_u\right) + j\sin\left(\omega t + \varphi_u\right)\right)$$
$$\underline{u}(t) = \hat{u}\,e^{j(\omega t + \varphi_u)}$$

Widerstand

$$\underline{u} = R\underline{i}$$
$$\underline{i} = \frac{1}{R}\underline{u}$$
$$\underline{Z} = R$$
$$\underline{Y} = \frac{1}{R}$$
$$P = RI^2$$
$$Q = 0$$
$$\lambda = \cos\varphi = 0$$

Induktivität

$$\underline{u} = L\frac{\mathrm{d}\underline{i}}{\mathrm{d}t}$$
$$\underline{i} = \frac{1}{L}\int \underline{u}\,\mathrm{d}t$$
$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = j\omega L = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}}$$
$$\underline{Y} = \frac{\underline{i}}{\underline{u}} = \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{\omega L}e^{-j\frac{\pi}{2}}$$
$$P = 0$$
$$Q = \frac{1}{\omega L}U^2$$
$$Q = \omega L I^2$$
$$\lambda = \cos\varphi = 1$$

Kapazität

$$\underline{u} = \frac{1}{C}\int \underline{i}\,\mathrm{d}t$$
$$\underline{u} = C\frac{\mathrm{d}\underline{i}}{\mathrm{d}t}$$
$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C}e^{-j\frac{\pi}{2}}$$
$$\underline{Y} = \frac{\underline{i}}{\underline{u}} = j\omega C = \omega C e^{j\frac{\pi}{2}}$$
$$Q = -\omega C U^2$$
$$Q = -\frac{1}{\omega C}I^2$$
$$\lambda = \cos\varphi = 1$$

3.5.1 Widerstand

Impedanz

$[Z] = \Omega$: Impedanz
$[R] = \Omega$: Wirkwiderstand
$[X] = \Omega$: Blindwiderstand

$$\underline{Z} = \mathrm{Re}\{\underline{Z}\} + j\,\mathrm{Im}\{\underline{Z}\} = R + jX = Ze^{j\varphi}$$
$$\underline{Z} = \sqrt{R^2+X^2}\,e^{j\arctan\frac{X}{R}}$$
$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$$
$$R = Z\cdot\cos\varphi$$
$$X = Z\cdot\sin\varphi$$
$$X = \omega L \qquad L = \frac{X}{\omega}$$
$$X = -\frac{1}{\omega C} \qquad C = -\frac{1}{\omega X}$$

Admitanz

$[Y] = \mathrm{S}$: Admitanz
$[G] = \mathrm{S}$: Wirkleitwert(Konduktanz)
$[B] = \mathrm{S}$: Blindleitwert(Suszeptanz)

$$\underline{Y} = \mathrm{Re}\{\underline{Y}\} + j\,\mathrm{Im}\{\underline{Y}\} = G + jB = Ye^{j\gamma}$$
$$\underline{Y} = \sqrt{G^2+B^2}\,e^{j\arctan\frac{B}{G}}$$
$$\gamma = \varphi_u - \varphi_i$$
$$G = Y\cdot\cos\gamma$$
$$B = Y\cdot\sin\gamma$$
$$B = -\frac{1}{\omega L} \qquad L = -\frac{1}{\omega B}$$
$$B = \omega C \qquad C = \frac{B}{\omega}$$

3.6 Leistung

Momentanleistung

$[P] = \mathrm{W}$: Leistung

$$P = u(t)\cdot i(t)$$

Mittlere Leistung

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\cdot i(t)\,\mathrm{d}t$$
$$P = UI\cdot\cos\left(\varphi_u - \varphi_i\right)$$
$$P = \mathrm{Re}\{S\}$$

Blindleistung

$[S] = \mathrm{var}$: Scheinleistung

$$Q = UI\cdot\sin\left(\varphi_u - \varphi_i\right)$$
$$Q = \mathrm{Im}\{S\}$$

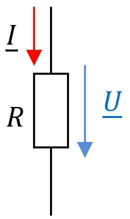
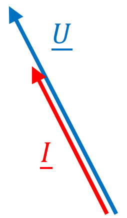
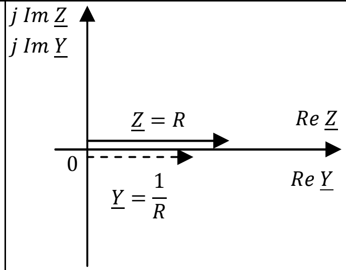
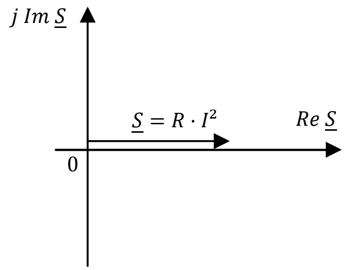
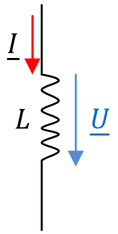
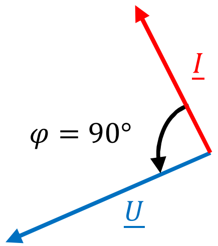
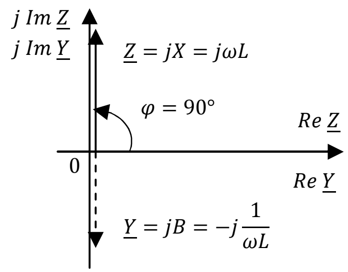
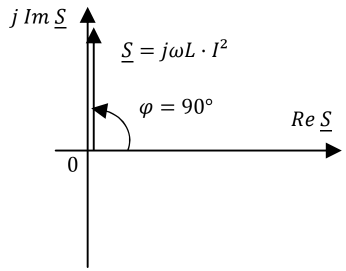
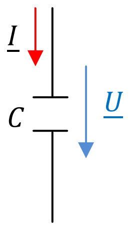
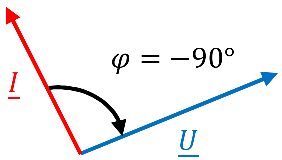
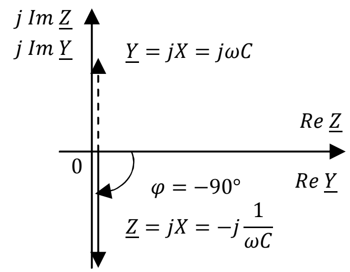
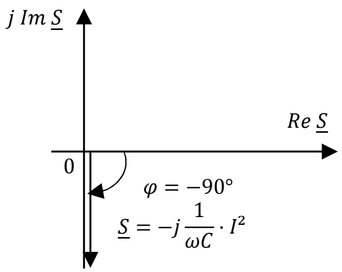
Scheinleistung

$[S] = \text{var}$: Scheinleistung

$\underline{S} = \underline{Z} I^2$
$\underline{S} = R I^2 + j X I^2$
$\underline{S} = P + j Q$
$S = \left|\underline{S}\right|$
$S = U \cdot I$

Leistungsfaktor

$\lambda = \frac{P}{S}$
$\lambda = \cos\left(\varphi_u - \varphi_i\right)$ Sinus

	Zusammenhang zwischen Strom & Spannung		Komplexer Widerstand und Leitwert		Komplexe Leistung	
Schaltzeichen	Zeitfunktion, komplexe Größen	Effektivwert-Zeigerdiagramme	Komplexe Größen, Phasenwinkel	Zeigerdiagramme	Wirkleistung, Blindleistung, Leistungsfaktor	Zeigerdiagramme
Widerstand 	$u = R \cdot i$ $i = \frac{1}{R} \cdot \underline{I}$ $\underline{U} = R \cdot \underline{I}$ $\underline{I} = \frac{1}{R} \cdot \underline{U}$		$\underline{Z} = R$ $\underline{Y} = \frac{1}{R}$ $\varphi = 0°$		$P = R \cdot I^2$ $= \frac{1}{R} \cdot U^2$ $Q = 0$ $\cos\varphi = 1$	
Induktivität 	$u = L\frac{di}{dt}$ $i = \frac{1}{L}\int u\,dt$ $\underline{U} = j\omega L \cdot \underline{I}$ $\underline{I} = \frac{1}{j\omega L}$		$\underline{Z} = j\omega L$ $\underline{Y} = \frac{1}{j\omega L}$ $= -j\frac{1}{\omega L}$ $\varphi = 90°$		$P = 0$ $Q = \omega L \cdot I^2$ $= \frac{1}{\omega L} \cdot U^2$ $\cos\varphi = 0$	
Kapazität 	$u = \frac{1}{C}\int i\,dt$ $i = C\frac{du}{dt}$ $\underline{U} = \frac{1}{j\omega L} \cdot \underline{I}$ $\underline{I} = j\omega L$		$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C}$ $= -j\frac{1}{\omega C}$ $\underline{Y} = j\omega C$ $\varphi = -90°$		$P = 0$ $Q = -\frac{1}{\omega C} \cdot I^2$ $= -\omega C \cdot U^2$ $\cos\varphi = 0$	

4 Signal- und Systemtheorie

4.1 Grundsignale

4.1.1 Einheitsignale

Diracstoß

$[\delta(t)] = \mathrm{s}^{-1}$: Diracstoß

$$\delta(t) = \begin{cases} 0\mathrm{s}^{-1} & t < 0 \\ \infty\mathrm{s}^{-1} & t = 0 \\ 0\mathrm{s}^{-1} & t > 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

$$\delta(t) = \frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\alpha(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

Einheitssprungsfunktion

$[\sigma(t)] = 1$: Einheitssprungsfunktion

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 0,5 & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\alpha(t)}{\mathrm{d}t}$$

Einheitsanstiegsfunktion

$[\alpha(t)] = \mathrm{s}$: Einheitsanstiegsfunktion

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0\mathrm{s} & t < 0 \\ t & t = 0 \end{cases}$$

$$\alpha(t) = \iint_{-\infty}^{t} \delta(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{t} \sigma(t)\,\mathrm{d}t$$

4.1.2 Weitere Grundsignale

Rechtecksimpuls

$[\mathrm{rect}_T(t)] = 1$: Rechtecksimpuls

$$\mathrm{rect}_T(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{T}{2} \\ 0,5 & |t| = \frac{T}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

Dreiecksimpuls

$[\Lambda_T(t)] = 1$: Dreiecksimpuls

$$\Lambda_T(t) = \begin{cases} 1 + \frac{t}{T} & -T < t < 0 \\ 1 - \frac{t}{T} & 0 \le t < T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

4.1.3 Signalveränderungen

Offset

$\left[X_{off}\right] = 1$: Offsetwert

$$x_2(t) = x_1(t) + X_{off}$$

Skalierung

$[V] = 1$: Verstärkungsfaktor

$$x_2(t) = V \cdot x_1(t)$$

Verschiebung

$[t_0] = 1$: Verschiebungskonstante

$$x_2(t) = x_1(t - t_0)$$

$t_0 > 0$: Rechtsverschiebung

Negation des Argumentes

$$x_2(t) = x_1(-t)$$

Spiegelung an der Ordinate

Negiertes und verschobenes Argument

$[t_0] = 1$: Verschiebungskonstante

$$x_2(t) = x_1(-(t - t_0))$$

Spiegelung bei $\frac{t_0}{2}$

Argumentskalierung

$$x_2(t)=x_1(a\cdot t) \qquad a<1 \text{ Streckung der Funktion}$$

4.2 Signaleigenschaften

4.2.1 Energiesignale

$E=$endlich positiver Wert. $P=0$

Energie

$[E_R]=\mathrm{W\,s}$: Energie
$[E_X]=1$: Normierte Signalenergie

$$\begin{aligned} E_R &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\cdot i(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^2(t)}{R}\,\mathrm{d}t \\ E_x = m_{i2} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,\mathrm{d}t && \text{Normierung auf } R=1 \\ E_x &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^2(k) \end{aligned}$$

Impulsfläche

$[E_R]=\mathrm{W\,s}$: Energie

$$\begin{aligned} A_x = m_{i1} &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\mathrm{d}t \\ A_x &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \end{aligned}$$

4.2.2 Leistungssignale

$E=\infty$. $P=$endlich positiver Wert.

Mittlere Signalleistung

$[P_x]=1$: Mittlere Signalleistung
$\left[\bar{x^2}\right]=1$: quadratischer Mittelwert
$[m_2]=1$: gewöhnliches Moment 2. Ordnung
$\left[x_0^2\right]=1$: Konstantes Signale

$$\begin{aligned} P_x = \bar{x^2} = m_2 &= \lim_{T\to\infty} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n\cdot T_p}\int_{t_0}^{t_0+n\cdot T_p} x^2(t)\,\mathrm{d}t && \text{Periodische Signale} \\ &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=k_0}^{k_0+N-1} x^2(k) \\ &= \frac{1}{N_p}\sum_{k=k_0}^{k_0+N_p-1} x^2(k) && \text{Periodische Signale} \\ &= X_0^2 && \text{Konstantes Signale} \end{aligned}$$

Effektivwert

$\left[x_{eff}\right]=1$: Effektivwert

$$\begin{aligned} x_{eff} = \sqrt{P_x} &= \sqrt{\lim_{T\to\infty}\int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t)\,\mathrm{d}t} \\ &= \sqrt{\frac{1}{n\cdot T_p}\int_{t_0}^{t_0+n\cdot T_p} x^2(t)\,\mathrm{d}t} && \text{Periodische Signale} \\ &= \sqrt{\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=k_0}^{k_0+N-1} x^2(k)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{N_p}\sum_{k=k_0}^{k_0+N_p-1} x^2(k)} && \text{Periodische Signale} \\ &= X_0 && \text{Konstantes Signale} \end{aligned}$$

Gleichanteil

$[\bar{x}] = 1$: Gleichanteil
$[m_1] = 1$: gewöhnliches Moment 1. Ordnung
$[E(x)] = 1$: Erwartungswert

$$\bar{x} = m_1 = E(x) = \lim_{T\to\infty} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{n\cdot T_p} \int_{t_0}^{t_0+n\cdot T_p} u(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{Periodische Signale}$$
$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=k_0}^{k_0+N-1} x(t)$$
$$= \frac{1}{N_p} \sum_{k=k_0}^{k_0+N_p-1} x(t) \quad \text{Periodische Signale}$$
$$= X_0 \quad \text{Konstantes Signale}$$

Signalgleichleistung

$[P_{x=}] = 1$: Signalgleichleistung
$[\bar{x}^2] = 1$: Quadratisch linearer Mittelwert
$[m_1^2] = 1$: Quadratisch g. Moment 1. Ordnung

$$P_{x=} = (\bar{x})^2 = m_1^2 = \left(\lim_{T\to\infty} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\,\mathrm{d}t\right)^2$$
$$= \left(\frac{1}{n\cdot T_p} \int_{t_0}^{t_0+n\cdot T_p} u(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \quad \text{Periodische Signale}$$
$$= \left(\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=k_0}^{k_0+N-1} x(t)\right)^2$$
$$= \left(\frac{1}{N_p} \sum_{k=k_0}^{k_0+N_p-1} x(t)\right)^2 \quad \text{Periodische Signale}$$
$$= (X_0)^2 \quad \text{Konstantes Signale}$$

Signalwechselleistung

$[P_{x\sim}] = 1$: Signalwechselleistung
$[\sigma^2] = 1$: Varianz
$[\mu_2] = 1$: Quadratisch g. Moment 2. Ordnung

$$P_{x\sim} = \sigma^2 = \mu_2 = \bar{x^2} - \bar{x}^2$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (x(t) - \bar{x})^2\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{n\cdot T_p} \int_{t_0}^{t_0+n\cdot T_p} (x(t) - \bar{x})^2\,\mathrm{d}t \quad \text{Periodische Signale}$$
$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=k_0}^{k_0+N-1} (x(k) - \bar{x})^2$$
$$= \frac{1}{N_p} \sum_{k=k_0}^{k_0+N_p-1} (x(k) - \bar{x})^2 \quad \text{Periodische Signale}$$
$$= 0 \quad \text{Konstantes Signale}$$

Standartabweichung

$[\sigma] = 1$: Standartabweichung

$$\sigma = \sqrt{P_{x\sim}} = \sqrt{\mu_2}$$

4.3 Systeme

4.3.1 Linearität

Homogenität

$$x(t) = C\cdot x_1(t) \Rightarrow y(t) = C\cdot y_1(t)$$

Additivität

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \Rightarrow y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

4.3.2 Zeitinvarianz

Zeitinvariante Systeme ändern ihre Eigenschaften nicht mit der Zeit.

Zeitinvarianz

$$x(t) = x_1(t-\tau) \Rightarrow y(t) = y_1(t-\tau)$$

4.3.3 Kausalität

Bei Kausalen Systemen gibt es kein Ereigniss am Ausgang ohne ein entsprechendes Eingangssignal.

Kausalität

$$\left.\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t<t_0} \Rightarrow \left.\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t<t_0}$$

4.3.4 Stabilität

Stabilität ist ein System wenn es auf eine begrenztes Eingangssignal, nicht mit einen unendlichen Ausgangssignal reagiert.

Stabil

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{d}t < \infty \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\mathrm{d}t < \infty$$

Grenzstabil

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{d}t < \infty \Rightarrow \lim_{T\to\infty} \left.\int_{t_0}^{t_0+T} y^2(t)\mathrm{d}t\right|_{t>\tau} = \mathrm{const}$$

4.3.5 Umwandung unterschiedlicher Eingangssignalen

Diracstoß-Eingangssignal

$$x(t) = \delta(t) \Rightarrow y(t) = g(t)$$

4.4 Signalverarbeitung

4.4.1 Zerlegung Gerade u. Ungerade

Gerade u. Ungerade

$$x(t) = x_g(t) + x_u(t)$$
$$x_g(t) = \frac{x(t)+x(-t)}{2}$$
$$x_u(t) = \frac{x(t)-x(-t)}{2}$$

4.4.2 Faltung

Faltung entspricht graphisch eine Spiegelung eines Signals und dessen Verschiebung über einem anderen Signal.

Faltungsintegral

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t)$$
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

4.4.3 Laplace-Transformation

Laplaceintegral

$$X(p) = \mathscr{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t) e^{-p\cdot t}\,\mathrm{d}t$$
$$X(p) \bullet\!\!-\!\!\circ\ x(t)$$

4.4.4 Fourier-Transformation

Fouriersintegral

$$X(\omega) = \mathscr{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$
$$X(\omega) \bullet\!\!-\!\!\circ\ x(t)$$
$$X(f) = \mathscr{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t}\,\mathrm{d}t$$
$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x_{re} + j x_{im}\right) \cdot \left(\cos(2\pi f t) - j \cdot \sin(2\pi f t)\right)\mathrm{d}t$$
$$X(f) \bullet\!\!-\!\!\circ\ x(t)$$
$$x(t) = \frac{1}{2\cdot\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t}\,\mathrm{d}\omega$$

Additionssatz

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + \ldots \bullet\!\!-\!\!\circ\ X(f) = X_1(f) + X_2(f) + \ldots$$

Linearität

$$x(t) = C \cdot x_1(t) \bullet\!\!-\!\!\circ\ X(f) = C \cdot X_1(f)$$

Verschiebungssatz

$$x(t) = x_1(t - t_0) \bullet\!\!-\!\!\circ\ X(f) = X_1(f) \cdot e^{-j2\pi f \cdot t_0}$$

Ähnlichkeitssatz	$x(t) = x_1(a \cdot t)$	$\bullet\!\!-\!\!\circ \quad X(f) = \frac{1}{\lvert a \rvert} X_1\left(\frac{f}{a}\right)$
	$x(t) = \frac{1}{\lvert b \rvert} x_1\left(\frac{t}{b}\right)$	$\bullet\!\!-\!\!\circ \quad X(f) = X_1(b \cdot f)$
Differentationssatz	$x(t) = \frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t}$	$\bullet\!\!-\!\!\circ \quad X(f) = j2\pi f \cdot X(f)$
	$x(t) = \frac{\mathrm{d}^K x_1(t)}{\mathrm{d}t^K}$	$\bullet\!\!-\!\!\circ \quad X(f) = j^K (2\pi f)^K \cdot X(f)$
	$x(t) = \frac{\mathrm{d}^K x_1(t)}{\mathrm{d}t^K}$	$\bullet\!\!-\!\!\circ \quad X(\omega) = j^K (\omega)^K \cdot X(\omega)$
Integrationssatz	$x(t) = \int_{\infty}^{t} x_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$\bullet\!\!-\!\!\circ \quad X(f) = \frac{1}{j2\pi f} \cdot X_1(f) + \frac{1}{2} X_1(f=0)\,\delta(f)$
	$x(t) = \int_{\infty}^{t} x_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$\bullet\!\!-\!\!\circ \quad X(\omega) = \frac{1}{j\omega} \cdot X_1(\omega) + \pi \cdot X_1(\omega=0)\,\delta(\omega)$
Integrationssatz im Frequenzbereich	$x(t) = \frac{1}{-j2\pi t} \cdot x_1(t) + \frac{1}{2} x_1(t=0)\,\delta(t)$	$\bullet\!\!-\!\!\circ \quad X(f) = \int_{-\infty}^{f} X_1(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$
	$x(t) = \frac{1}{-jt} \cdot x_1(t) + \pi \cdot x_1(t=0)\,\delta(t)$	$\bullet\!\!-\!\!\circ \quad X(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} X_1(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$
Vertauschungssatz	$x(t) = x_1(t)$	$\bullet\!\!-\!\!\circ \quad X(f) = X_1(f)$
	$x(t) = X_1(t)$	$\bullet\!\!-\!\!\circ \quad X(f) = x_1(-f)$
	$x(t) = x_1(t)$	$\bullet\!\!-\!\!\circ \quad X(\omega) = X_1(\omega)$
	$x(t) = X_1(t)$	$\bullet\!\!-\!\!\circ \quad X(\omega) = 2\pi \cdot x_1(-\omega)$
Faltung	$x(t) = x_1(t)$	$\bullet\!\!-\!\!\circ \quad X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\varphi) \cdot X_2(f-\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$
	$x(t) = x_1(t)$	$\bullet\!\!-\!\!\circ \quad X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\varphi) \cdot X_2(\omega-\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$
	$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$\bullet\!\!-\!\!\circ \quad X(f) = x_1(f) \cdot x_2(f)$
Delta-Impulsfläsche	$\text{Ш}_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - k t_p\right)$	$\bullet\!\!-\!\!\circ \quad \text{Ш}_A(f) = f_A \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(f - m f_a)$
	$f_a = \frac{1}{t_p}$	
	$\text{Ш}_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} t_a \delta(t - k t_a)$	$\bullet\!\!-\!\!\circ \quad \text{Ш}_P(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - m f_p\right)$
	$f_p = \frac{1}{t_a}$	
Periodifizierung	$x(t) = x_T(t) * \text{Ш}_p(t)$	$\bullet\!\!-\!\!\circ \quad X(f) = X_T(f) \cdot \text{Ш}_A(f)$
Abgetastete Funktionen	$x_\delta(t) = x(t) \cdot \text{Ш}_a(t)$	$\bullet\!\!-\!\!\circ \quad X_\delta(f) = X(f) * \text{Ш}_p(f)$
	$x_\delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k t_a) \cdot t_a \cdot \delta(t - k t_a)$	$\bullet\!\!-\!\!\circ \quad X_\delta = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X\left(f - m f_p\right)$
Abgetastete und Periodifizierte Funktionen	$x_{\delta p}(t) = \left(x_T(t) * \text{Ш}_p(t)\right) \cdot \text{Ш}_a(t)$	
	$x_{\delta p}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_T\left(k t_a - m t_p\right) \cdot t_a \cdot \delta(t - k t_a)$	
	$X_{\delta p}(t) = (X_T(f) \cdot \text{Ш}_a(f)) * \text{Ш}_p(f)$	
	$X_{\delta p}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_T\left(m f_a - k f_p\right) \cdot f_a \cdot \delta(f - m f_a)$	
	$f_a = \frac{1}{t_p}$	$f_p = \frac{1}{t_a}$

Korrespodenz

$$x(t) = \hat{X}\mathrm{rect}_T(t) \quad ○\!\!-\!\!\bullet \quad X(j\omega) = \hat{X}T \cdot \mathrm{si}\left(\omega \cdot \frac{T}{2}\right)$$

$$x(t) = \hat{X}\Lambda_T(t) \quad ○\!\!-\!\!\bullet \quad X(j\omega) = \hat{X}T \cdot \mathrm{si}^2\left(\omega \cdot \frac{T}{2}\right)$$

$$x(t) = \hat{X}\sin(2\pi f_0 t) \quad ○\!\!-\!\!\bullet \quad X(f) = \frac{j\hat{X}}{2}\left(\delta(f+f_0) - \delta(f-f_0)\right)$$

$$x(t) = \hat{X}\cos(2\pi f_0 t) \quad ○\!\!-\!\!\bullet \quad X(f) = \frac{\hat{X}}{2}\left(\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)\right)$$

4.4.5 DFT und FFT

DFT

1. Variante

$$X(l) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi \cdot l \cdot \frac{k}{N}}$$

$$x(k) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{j2\pi \cdot l \cdot \frac{k}{N}}$$

2. Variante

$$X(l) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi \cdot l \cdot \frac{k}{N}}$$

$$x(k) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{j2\pi \cdot l \cdot \frac{k}{N}}$$

3. Variante

$$X(l) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi \cdot l \cdot \frac{k}{N}}$$

$$x(k) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{j2\pi \cdot l \cdot \frac{k}{N}}$$

DFT als Matrix-Multiplikation

$$[X(l)] = \left[F_{l,k}^N\right] \cdot [x(k)] \qquad t \Rightarrow f$$

$$[x(k)] = \left[f_{k,l}^N\right] \cdot [X(l)] \qquad f \Rightarrow t$$

$$\left[f_{k,l}^N\right] = \left[F_{l,k}^N\right]^*$$

$$F_{l,k} = e^{-j\pi \cdot l \cdot \frac{k}{N}} \qquad \Rightarrow F_{l,k}^4 = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot l \cdot k\right) - j\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot l \cdot k\right)$$

4.4.6 Spektrum

Betragsspektrum

$$\left|X(f)\right| = \sqrt{(\mathrm{Re}\{X(f)\})^2 + (\mathrm{Im}\{X(f)\})^2}$$

Betragsquadratspektrum

$$\left|X(f)\right|^2 = (\mathrm{Re}\{X(f)\})^2 + (\mathrm{Im}\{X(f)\})^2$$

Theorem von Parseval

$$E = m_{i2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \left|X(f)\right|^2 \mathrm{d}f$$

4.4.7 Korrelation

Kreuzkorrelationsfunktion

$$E_{x_1x_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t+\tau) \cdot x_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t-\tau) \cdot x_2(t)\,\mathrm{d}t$$

$$E_{x_1x_2}(l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k+l) \cdot x_1(k)\,\mathrm{d}t$$

Normierte Kreuzkorrelationsfunktion

$$\mathring{x} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

$$\mathring{E}_{x_1x_2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x_1^2(t)\,\mathrm{d}t \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x_2^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

$$r_{x_1x_2}(\tau) = \frac{E_{x_1x_2}(\tau)}{\mathring{E}_{x_1x_2}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t+\tau) \cdot x_1(t)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x_1^2(t)\,\mathrm{d}t \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x_2^2(t)\,\mathrm{d}t}}$$

$$\left|r_{x_1x_2}(\tau)\right| \leq 0$$