1 Mathe

1.1 Grundlagen

1.1.1 Mengen

Mengen Darstellung

Schreibweise	Bedeutung
$a \in M$:	a ist ein Element von M
$a \notin M$:	a ist kein Element von M
$M = \{x \mid x \text{ Eigenschaften}, \ldots\}$	Beschreibende Darstellung
$M = \{a_1, a_2 \ldots, a_n\}$	Aufzählende Darstellung(endlich)
$M = \{a_1, a_2 \ldots\}$	Aufzählende Darstellung(unendlich)
$M = \{\}$	Leere Menge
$A \subset B$	A ist eine *Teilmenge* von B. A heißt *Untermenge* und B *Obermenge*
$A = B$	A und B sind gleich, d.h. jedes Element von A ist auch in B vorhanden und umgekehrt

Mengen Operationen

Schreibweise	Bedeutung
$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B$	*Schnittmenge* zweier Mengen
$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$	*Vereinigungsmenge* zweier Mengen
$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$	*Differenz- oder Restmenge* zweier Mengen

1.1.2 Intervalle

Beispiel	Beschreibung
$[a,b] = x \mid a \leq x \leq b$	abgeschlossene Intervalle
$[a,b) = x \mid a \leq x < b$	halboffene Intervall
$(a,b] = x \mid a < x \leq b$	halboffene Intervall
$(a,b) = x \mid a < x < b$	offenes Intervall

1.1.3 Rechnengesetze

Operationen mit Natürlichen Zahlen

Beispiel	Beschreibung
$$\begin{aligned} 60 &= 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \\ 70 &= 2^3 \cdot 3^2 \\ \text{ggt} &= 2^2 \cdot 3^1 \end{aligned}$$	Zerlegung der Faktoren in ihre Primfaktoren und dann bildet man das Produkt aus denn höchsten Potenzen die alle Faktoren gemeinsam haben.
$$\begin{aligned} 60 &= 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \\ 70 &= 2^3 \cdot 3^2 \\ \text{kgV} &= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \end{aligned}$$	Zerlegung der Faktoren in ihre Primfaktoren und dann bildet man das Produkt aus denn höchsten Potenzen die in mindestens einen Faktoren auftreten.

Kommutativgesetz

$$\begin{aligned} a + b &= b + a \\ a \cdot b &= b \cdot a \end{aligned} \tag{1.1}$$

Assoziativgesetz

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= (a + b) + c \\ a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c \end{aligned} \tag{1.2}$$

Distributivgesetz

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \tag{1.3}$$

1.1.4 Bruchrechnung

Ein Bruch a/b heißt *echte*, wenn $|a| < |b|$ ist, sonst *unecht*.

Addition und Subtraktion zweier Brüche

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d} \tag{1.4}$$

Multiplikation zweier Brüche

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \tag{1.5}$$

Division zweier Brüche

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \tag{1.6}$$

1.1.5 Potenzen

Eine Potenz a^n ist ein Produkt aus n gleichen Faktoren a:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \ldots a \tag{1.7}$$

$a:$ Basis $n:$ Exponent

Rechenregeln

$$a^m * a^n = a^{m+n} \tag{1.8a}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \tag{1.8b}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \tag{1.8c}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \tag{1.8d}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \tag{1.8e}$$

1.1.6 Wurzeln

Wurzelziehen ist die Umkehrfunktion des Potenzieren

$$\sqrt[n]{a} = a^{\left(\frac{1}{n}\right)} \tag{1.9}$$

$a:$ Radikand $n:$ Wurzelexponent

Rechenregeln

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\left(\frac{m}{n}\right)} \tag{1.10a}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a} \tag{1.10b}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \tag{1.10c}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \tag{1.10d}$$

1.1.7 Logarithmen

Logarthmus ist das eindeutige lösen der Gleichung $r = a^x$ zur Lösung x.

$$x = \log_a r \tag{1.11}$$

$a:$ Basis $(a > 0, a \neq 1)$ $r:$ Numerus $(r > 0)$

Rechenregeln

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a} \tag{1.12a}$$

$$\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v \tag{1.12b}$$

$$\log_a \left(\frac{u}{v}\right) = log_a u - \log_a v \tag{1.12c}$$

$$\log_a \left(u^k\right) = k \cdot \log_a u \tag{1.12d}$$

$$\log_a \sqrt[n]{u} = \left(\frac{1}{n}\right) \cdot \log_a u \tag{1.12e}$$

Basiswechsel

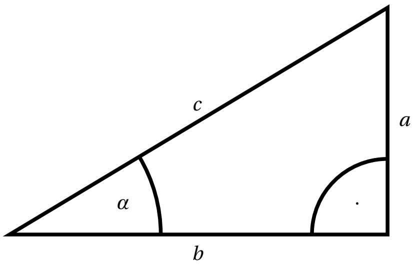
$$\log_b r = \frac{\log_a r}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b} \cdot \log_a r = K \cdot \log_a r \tag{1.13}$$

Beim Basiswechsel von $a \to b$ werden die Logarithmen mit einer Konstanten K multipliziert.

$$\lg \to \ln \Rightarrow K = 2,3026 \tag{1.14}$$
$$\ln \to \lg \Rightarrow K = 0,4343 \tag{1.15}$$

1.1.8 Winkelfunktionen

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \tag{1.16}$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \tag{1.17}$$
$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \tag{1.18}$$
$$\cot\alpha = \frac{b}{a} \tag{1.19}$$



Rechenregeln

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \tag{1.20}$$
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cot x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x} \tag{1.21}$$

Trigonometrischer Pythagoras

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{1.22}$$

Addition von Winkeln

$$\sin(x_1 \pm x_2) = \sin x_1 \cdot \cos x_2 \pm \cos x_1 \cdot \sin x_2 \tag{1.23a}$$
$$\cos(x_1 \pm x_2) = \cos x_1 \cdot \cos x_2 \mp \sin x_1 \cdot \sin x_2 \tag{1.23b}$$
$$\tan(x_1 \pm x_2) = \frac{\tan x_1 \pm \tan x_2}{1 \mp \tan x_1 \cdot \tan x_2} \tag{1.23c}$$
$$\cot(x_1 \pm x_2) = \frac{\cot x_1 \cdot \cot x_2 \mp 1}{\cot x_2 \pm \cot x_1} \tag{1.23d}$$

Multiplikation von Winkeln

$$\sin x_1 \cdot \sin x_2 = \frac{1}{2} \cdot (\cos(x_1 - x_2) - \cos(x_1 + x_2)) \tag{1.24a}$$
$$\cos x_1 \cdot \cos x_2 = \frac{1}{2} \cdot (\cos(x_1 - x_2) + \cos(x_1 + x_2)) \tag{1.24b}$$
$$\sin x_1 \cdot \cos x_2 = \frac{1}{2} \cdot (\sin(x_1 - x_2) + \sin(x_1 + x_2)) \tag{1.24c}$$
$$\tan x_1 \cdot \tan x_2 = \frac{\tan x_1 + \tan x_2}{\cot x_1 + \cot x_2} \tag{1.24d}$$

Umrechnung Grad- ⇒ Bogenmaß

$$x = \frac{\pi}{180°} \cdot \alpha \tag{1.25}$$

Umrechnung Bogen- ⇒ Gradmaß

$$\alpha = \frac{180°}{\pi} \cdot x \tag{1.26}$$

Für weitere Winkelformeln siehe Papula Formelsammlung Seite 90-102.

1.1.9 Fakultät

n! ist definitionsgemäß das Produkt aus denn ersten n Faktoren

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{1.27}$$

Vorsicht bei 0 Fakultät

$$0! = 1 \tag{1.28}$$

1.1.10 Binomischer Lehrsatz

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a^1 \cdot b^{n-1} + b^n \tag{1.29}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k \tag{1.30}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k} \cdot b^{n-k} \tag{1.31}$$

Der *Binomialkoeffizienten* mit den Koeffizienten $\binom{n}{k}$ wird *n über k* gelesen.

Bildungsgesetz

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \tag{1.32}$$

Rechenregel

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \tag{1.33a}$$

$$\binom{n}{k} = 0 \text{ für } k > n \tag{1.33b}$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \tag{1.33c}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{1.33d}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \tag{1.33e}$$

Ersten Binomischen Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \tag{1.34}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3 \tag{1.35}$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4 \cdot a^3 \cdot b + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot a \cdot b^3 + b^4 \tag{1.36}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \tag{1.37}$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 - b^3 \tag{1.38}$$

$$(a-b)^4 = a^4 - 4 \cdot a^3 \cdot b + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 - 4 \cdot a \cdot b^3 + b^4 \tag{1.39}$$

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2 \tag{1.40}$$

1.1.11 Grenzwertberechnung

Rechenregeln

$$\lim_{x \to x_0} C \cdot f(x) = C \cdot \left(\lim_{x \to x_0} f(x) \right) \tag{1.41a}$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \pm g(x) \right) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) \tag{1.41b}$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = \left(\lim_{x \to x_0} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \to x_0} g(x) \right) \tag{1.41c}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} \tag{1.41d}$$

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to x_0} f(x)} \tag{1.41e}$$

$$\lim_{x\to x_0} \left(f(x)\right)^n = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^n \tag{1.41f}$$

$$\lim_{x\to x_0} \left(a^{f(x)}\right) = a^{\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)} \tag{1.41g}$$

$$\lim_{x\to x_0} \left(\log_a f(x)\right) = \log_a \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right) \tag{1.41h}$$

Grenzwertregel von Bernoulli und de l'Hospital

Diese Regel wird angewendet wenn das normale Ergebniss die Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ annimmt, was sonst eine beliebige Zahl darstellt.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{1.42}$$

Berechnete Grenzwerte

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} a^x = 0 \text{ für } |a| < 0 \tag{1.43}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x!} = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} a^x = 1 \text{ für } a = 1 \tag{1.44}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}a = 1 \text{ für } a > 0 \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{1.45}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e} \tag{1.46}$$

1.1.12 Reihen

Arithmetische Reihen

$$a + (a+d) + (a+2\cdot d) + \ldots + (a+(n-1)\cdot d) = \frac{n}{2}(2\cdot a + (n-1)\cdot d) \tag{1.47}$$

a : Anfangsglied $\quad a_n = a + (n-1)\cdot d$: Endglied

Geometrische Reihen

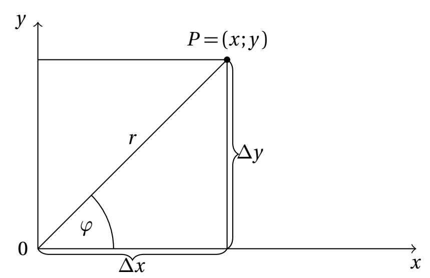
$$a + a\cdot q + a\cdot q^2 + \ldots + a\cdot q^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} a\cdot q^{k-1} = \frac{a(q^n-1)}{q-1} \tag{1.48}$$

a : Anfangsglied $\quad a_n = a\cdot q^{n-1}$: Endglied

1.1.13 Koordinatensystem

Kartesische Koordinaten

0 : Ursprung, Nullpunkt
x : Abzisse
y : Ordinate



Polar Koordinaten

0 : Pol
r : Abstand des Punktes P zum Punkt O
φ : Winkel zwischen dem Strahl und der x Achse(*Polarachse*)

Polarkoordinaten ⇒ Kartesische Koordinaten

$$x = r\cdot\cos\varphi \qquad y = r\cdot\sin\varphi \tag{1.49}$$

Kartesische Koordinaten ⇒ Polarkoordinaten

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1.50}$$

Koordinatentransformation(Parallelverschiebung)

$$y = f(x) \Rightarrow \begin{matrix} x = u + a \\ y = v + b \end{matrix} \Rightarrow v = f(u+a) - b \tag{1.51}$$

$(a; b)$: Ursprung des neuen u,v Koordinatensystems, bezogen auf das alte x,y-System.

1.2 Gleichungen

1.2.1 Gleichungen n-ten Grades

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0, a_k \in \mathbb{R}) \tag{1.52}$$

Eigenschaften

- Die Gleichung besitzen maximal n reelle Lösungen.
- Es gibt genau n komplexe Lösungen.
- Für ungerades n gibt es mindestens eine reelle Lösung.
- Komplexe Lösungen treten immer Paarweise auf.
- Es existieren nur Lösungsformeln bis $n \leq 4$. Für $n > 4$ gibt es nur noch grafische oder numerische Lösungswege.
- Wenn eine Nullstelle bekannt ist kann man die Gleichung um einen Grad verringern, indem man denn zugehörigen Linearfaktor $x - x_1$ abspaltet(Polynome Division).

1.2.2 Lineare Gleichungen

$$a_1 \cdot x + a_0 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{a_0}{a_1} \quad (a_1 \neq 0) \tag{1.53}$$

1.2.3 Quadratische Gleichungen

$$a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0 \quad (a_2 \neq 0) \tag{1.54}$$

Normalform mit Lösung

$$x^2 + p \cdot x + q = 0 \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \tag{1.55}$$

Überprüfung (Vietascher Wurzelsatz)

$$x_1 + x_2 = -p \qquad x_1 \cdot x_2 = q \tag{1.56}$$

x_1, x_2 : Lösung der quadratischen Gleichung.

1.2.4 Biquadratische Gleichungen

Diese Gleichungen lassen sich mithilfe der Substitution lösen.

$$a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c = 0 \qquad u = x^2 \tag{1.57}$$

$$a \cdot u^2 + b \cdot u + c = 0 \qquad x = \pm\sqrt{u} \tag{1.58}$$

Das u kann mithilfe der Lösungsformel einer quadratischen Gleichung gelöst werden.

1.2.5 Gleichungen höheren Grades

Gleichungen höheren Grades kann man durch graphische oder numerische Ansätze lösen. Hilfreich ist das finden einer Lösung und das abspalten eines Linearfaktor , mithilfe der Polynomendivision oder dem Hornor Schema,von der ursprünglichen Gleichung.

Polynomendivision

$$\frac{f(x)}{x - x_0} = \frac{a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0}{x - x_0} = b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0 + r(x) \tag{1.59}$$

x_0 ist dabei die erste gefunden Nullstelle. r(x) verschwindet wenn x_0 ein Nullstellen oder eine Lösung von f(x) ist.

$$r(x) = \frac{a_3 \cdot x_0^3 + a_2 \cdot x_0^2 + a_1 \cdot x_0 + a_0}{x - x_0} = \frac{f(x_0)}{x - x_0} \tag{1.60}$$

Hornor-Schema

	a_3	a_2	a_1	a_0
x_0		$a_3 \cdot x_0$	$(a_2 + a_3 \cdot x_0) \cdot x_0$	$(a_1 + a_2 \cdot x_0 + a_3 \cdot x_0^2) \cdot x_0$
	a_3	$a_2 + a_3 \cdot x_0$	$a_1 + a_2 \cdot x_0 + a_3 \cdot x_0^2$	$a_0 + a_1 \cdot x_0 + a_2 \cdot x_0^2 + a_3 \cdot x_0^3$
	b_2	b_1	b_0	$f(x_0)$

1.2.6 Wurzelgleichung

Wurzelgleichungen löst man durch quadrieren oder mit hilfe von Substitution. Bei Wurzelgleichung ist zu beachten das quadrieren keine Aquivalente Umformung ist und das Ergebniss überprüft werden muss.

1.2.7 Ungleichungen

- Beidseitiges Subtrahieren oder Addieren ist möglich
- Die Ungleichung darf mit einer beliebige positiven Zahl multipliziert oder dividiert werden
- Die Ungleichung darf mit einer beliebige negativen Zahl multipliziert oder dividiert werden, wenn man gleichzeitig das Relationszeichen umdreht.

1.2.8 Betragsgleichungen

Betragsgleichungen löst man mithilfe der Fallunterscheidung. Dabei wird einmal davon ausgegangen das der Term inerhalb des Betrags einmal positiv und einmal negativen sein kann.

$$y = |x| = \left\{ \begin{matrix} x \\ -x \end{matrix} \text{ für } \begin{matrix} x \geq 0 \\ x < 0 \end{matrix} \right\} \tag{1.61}$$

1.2.9 Interpolationspolynome

Entwicklung einer Polynomefunktion anhand von $n+1$ Kurvenpunkten.

1. Möglichkeit Aufstellen von $n+1$ Gleichungen und ermitteln der Kurvenfunktion mithilfe des Gaußen Algorithmus.
2. Möglichkeit Interpolationspolynome von Newton

Interpolationspolynome von Newton

Gegeben sind die Punkte $P_0 = (x_0; y_0)$, $P_1 = (x_1; y_1)$, $P_2 = (x_2; y_2)$, ..., $P_n = (x_n; y_n)$, damit lautet die Funktion wie folgt:

$$\begin{aligned} f(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) && (1.62) \\ + a_3 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) && (1.63) \\ + \ldots && (1.64) \\ + a_n \cdot (x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1}) && (1.65) \end{aligned}$$

Die Koeffizienten$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ lassen sich mithilfe des Differentenshema berechnen. Dabei ist $y_0 = a_0$, $[x_0, x_1] = a_1$, $[x_0, x_1, x_2] = a_2$ usw.

Differentenshema

k	x_k	y_k	1	2	3	...
0	x_0	y_0				
			$[x_0, x_1]$			
1	x_1	y_1		$[x_0, x_1, x_2]$		
			$[x_1, x_2]$		$[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
2	x_2	y_2		$[x_1, x_2, x_3]$		...
			$[x_2, x_3]$		$[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
3	x_3	y_3		$[x_2, x_3, x_4]$		...
			...		...	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
n	x_n	y_n				

Rechenregel für dividierte Differenzen

$$\begin{aligned} [x_0, x_1] &= \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \\ [x_1, x_2] &= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{1.66}$$

$$\begin{aligned} [x_0, x_1, x_2] &= \frac{[x_0, x_1] - [x_1, x_2]}{x_0 - x_2} \\ [x_1, x_2, x_3] &= \frac{[x_1, x_2] - [x_2, x_3]}{x_1 - x_3} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{1.67}$$

$$\begin{aligned} [x_0, x_1, x_2, x_3] &= \frac{[x_0, x_1, x_2] - [x_1, x_2, x_3]}{x_0 - x_2} \\ [x_1, x_2, x_3, x_4] &= \frac{[x_1, x_2, x_3] - [x_2, x_3, x_4]}{x_1 - x_3} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{1.68}$$

1.3 Differntialrechnung

Potenzfunktion

$$x^n \qquad n \cdot x^{n-1} \tag{1.69}$$

Exponentialfunktionen

$$e^x \qquad e^x \tag{1.70}$$
$$a^x \qquad \ln a \cdot a^x \tag{1.71}$$

Logarithmusfunktionen

$$\ln x \qquad \frac{1}{x} \tag{1.72}$$
$$\log_a x \qquad \frac{1}{(\ln a) \cdot x} \tag{1.73}$$

Trigonometrische Funktionen

$$\sin x \qquad \cos x \tag{1.74}$$
$$\cos x \qquad -\sin x \tag{1.75}$$
$$\tan x \qquad \frac{1}{\cos^2 x} \tag{1.76}$$
$$\tan x \qquad 1 + \tan^2 x \tag{1.77}$$

Arcusfunktionen

$$\arcsin x \qquad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{1.78}$$
$$\arccos x \qquad \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{1.79}$$
$$\arctan x \qquad \frac{1}{1-x^2} \tag{1.80}$$

Hyperbelfunktionen

$$\sinh x \qquad \cosh x \tag{1.81}$$
$$\cosh x \qquad \sinh x \tag{1.82}$$
$$\tanh x \qquad \frac{1}{\cosh^2 x} \tag{1.83}$$
$$\tanh x \qquad 1 + \tanh^2 x \tag{1.84}$$

Faktorregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(C \cdot f(x)\right) = C \cdot f'(x) \tag{1.85}$$

Summenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(g(x) + f(x)\right) = g'(x) + f'(x) \tag{1.86}$$

Produktregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(g(x) \cdot f(x)\right) = g'(x) \cdot f(x) + g(x) \cdot f'(x) \tag{1.87}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(h(x) \cdot g(x) \cdot f(x)\right) = h' \cdot g \cdot f + h \cdot g' \cdot f + h \cdot g \cdot f' \tag{1.88}$$

Quotientenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right) = \frac{g'(x) \cdot f(x) - g(x) \cdot f'(x)}{f(x)^2} \tag{1.89}$$

Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(g\left(f(x)\right)\right) = g'(f) \cdot f'(x) \tag{1.90}$$

Logarithmische Ableitungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y = f(x) \tag{1.91}$$
$$\frac{1}{y} y' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln f(x) \tag{1.92}$$

1.4 Komplexe Zahlen

Grundlagen

$$j = \sqrt{-1} \tag{1.93}$$
$$j^2 = -1 \tag{1.94}$$

1.4.1 Darstellungsformen

Kartesische Form

$[x] =:$ Realanteil
$[y] =:$ Imaginäranteil

$$z = x + jy \tag{1.95}$$

Trigometrische Form

$[r] =:$ Betrag
$[\varphi] =:$ Argument

$$z = r\left(\cos\varphi + j\sin\varphi\right) \tag{1.96}$$

Exponentialform

$$z = re^{j\varphi} \tag{1.97}$$

Umrechnung

$$x = r\cos\varphi \tag{1.98}$$
$$y = r\sin\varphi \tag{1.99}$$
$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.100}$$

Umrechnung Winkel

$$\tan\varphi = \frac{y}{x} \tag{1.101}$$
$$\varphi = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & \text{Quadrant I} \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi & \text{Quadrant II,III} \\ \arctan\frac{y}{x} + 2\pi & \text{Quadrant IV} \end{cases} \tag{1.102}$$

1.4.2 Rechenregeln

Konjugiert komplexe Zahl

$[\overline{z}] =:$ konjugierte Komplexe

$$\overline{z} = z^* \tag{1.103}$$
$$\overline{z} = \overline{x + jy} \tag{1.104}$$
$$= x - jy \tag{1.105}$$
$$\overline{z} = \overline{r\left(\cos\varphi + j\sin\varphi\right)} \tag{1.106}$$
$$= r\left(\cos\varphi - j\sin\varphi\right) \tag{1.107}$$
$$\overline{z} = \overline{re^{j\varphi}} \tag{1.108}$$
$$= re^{-j\varphi} \tag{1.109}$$

Addition und Subtraktion

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + jy_1) \pm (x_2 + jy_2) \tag{1.110}$$
$$= (x_1 \pm x_2) + j(y_1 \pm y_2) \tag{1.111}$$

Multiplikation

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + jy_1) \cdot (x_2 + jy_2) \tag{1.112}$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + x_2y_1) \tag{1.113}$$
$$z_1 \cdot z_2 = r_1\left(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1\right) \cdot r_2\left(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2\right) \tag{1.114}$$
$$= r_1r_2\left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right) \tag{1.115}$$
$$z_1 \cdot z_2 = r_1e^{j\varphi_1} \cdot r_2e^{j\varphi_2} \tag{1.116}$$
$$= r_1r_2e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} \tag{1.117}$$

Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} \tag{1.118}$$
$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \tag{1.119}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\left(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1\right)}{r_2\left(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2\right)} \tag{1.120}$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right) \tag{1.121}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1e^{j\varphi_1}}{r_2e^{j\varphi_2}} \tag{1.122}$$
$$= \frac{r_1}{r_2}e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \tag{1.123}$$

Potenzieren

$$z^n = \left(r_1\left(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1\right)\right)^n \tag{1.124}$$
$$= r_1^n\left(\cos(n\varphi_1) + j\sin(n\varphi_1)\right) \tag{1.125}$$
$$z^n = \left(r_1e^{j\varphi_1}\right)^n \tag{1.126}$$
$$= r_1^ne^{jn\varphi_1} \tag{1.127}$$

Wurzelziehen

Es entsthen n Lösungen
Für k muss nacheinander $0, 1, \ldots, n-1$ eingesetzt werden

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r_1\left(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1\right)} \tag{1.128}$$
$$\omega_k = \sqrt[n]{r_1}\left(\cos\left(\frac{\varphi_1 + 2k\pi}{n}\right) + j\sin\left(\frac{\varphi_1 + 2k\pi}{n}\right)\right) \tag{1.129}$$
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r_1e^{j\varphi_1}} \tag{1.130}$$
$$\omega_k = \sqrt[n]{r_1}e^{j\left(\frac{\varphi_1 + 2k\pi}{n}\right)} \tag{1.131}$$

2 Physik

2.1 Kinematik

2.1.1 Geradlinige Bewegungen(Translation)

$$a(t) = a_0 = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dot{v} = \ddot{s} \tag{2.1}$$

$$v(t) = a_0 \cdot t + v_0 = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{s} \tag{2.2}$$

$$s(t) = \frac{1}{2} a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0 \tag{2.3}$$

2.1.2 Kreisbewegungen(Rotation)

Winkelgrößen

$[\alpha] = \mathrm{rad\,s^{-2}}$: Winkelbeschleunigung
$[\omega] = \mathrm{rad\,s^{-1}}$: Winkelgeschwindigkeit
$[\varphi] = \mathrm{rad}$: Drehwinkel

$$\alpha(t) = \alpha_0 = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \tag{2.4}$$

$$\omega(t) = \alpha_0 \cdot t + \omega_0 = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \dot{\varphi} \tag{2.5}$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} \alpha_0 \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \varphi_0 \tag{2.6}$$

Bahngrößen

$[a_t] = \mathrm{m\,s^{-2}}$: Beschleunigung(tan)
$[v] = \mathrm{m\,s^{-1}}$: Geschwindigkeit
$[s] = \mathrm{m}$: Weg

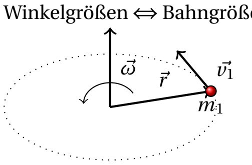
$$a_t(t) = a_0 = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dot{v} = \ddot{s} \tag{2.7}$$

$$v(t) = a_0 \cdot t + v_0 = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{s} \tag{2.8}$$

$$s(t) = \frac{1}{2} a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0 \tag{2.9}$$

Umrechnung

Winkelgrößen $\Leftrightarrow$ Bahngrößen



$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r} \tag{2.10}$$

$$a_t = \alpha \cdot r \qquad \alpha \perp r \tag{2.11}$$

$$\vec{\alpha} = \vec{r} \times \vec{a}_t \tag{2.12}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{2.13}$$

$$v = \omega \cdot r \qquad \omega \perp r \tag{2.14}$$

$$\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{v} \tag{2.15}$$

$$s = \varphi \cdot r \tag{2.16}$$

Kreisfrequenz

$[T] = \mathrm{s}$: Periodendauer
$[n] = \mathrm{s^{-1}}$: Drehzahl
$[f] = \mathrm{Hz}$: Frequenz

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} \tag{2.17}$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot n \tag{2.18}$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot f \tag{2.19}$$

Radialbeschleunigung

$[a_r] = \mathrm{m\,s^{-2}}$: Radialbeschleunigung

$$a_r = \frac{v^2}{r} \tag{2.20}$$

$$= v \cdot \omega \tag{2.21}$$

$$= \omega^2 \cdot r \tag{2.22}$$

Umdrehungen

$[N] = 1$: Umdrehungen

$$N = \frac{\omega_0 \cdot t}{2 \cdot \pi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{2 \cdot \pi} \cdot t^2 \tag{2.23}$$

$$= n_0 \cdot t + \frac{\alpha}{4 \cdot \pi} \cdot t^2 \tag{2.24}$$

2.2 Dynamik

2.2.1 Geradlinig(Translation)

Kraft

$[F] = \mathrm{N}$: Kraft
$[m] = \mathrm{kg}$: Masse

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \tag{2.25}$$

$$\vec{F}_{\mathrm{Tr}} = -m \cdot \vec{a} \tag{2.26}$$

Impuls

$[p] = \mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$: Impuls

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \tag{2.27}$$

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \vec{v} \cdot \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \tag{2.28}$$

Kraftstoß

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{\vec{p}_2}^{\vec{p}_1} \mathrm{d}p = \int_0^t \vec{F}\,\mathrm{d}t \tag{2.29}$$

Arbeit

$[W] = \mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}$: Arbeit

$$W = -\int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} \vec{F}_{\mathrm{Tr}} \circ \mathrm{d}\vec{s} \tag{2.30}$$

$$= \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}_1} m\,\vec{v} \circ \mathrm{d}\vec{v} = \frac{1}{2} m \left(v_1^2 - v_0^2\right) \tag{2.31}$$

kin. Energie

$[E] = \mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}$: Energie

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 \tag{2.32}$$

Hubarbeit

$[g] = \mathrm{m\,s^{-2}}$: Fallbeschleunigung

$$W_{\mathrm{hub}} = m g h \tag{2.33}$$

Leistung

$[g] = \mathrm{kg\,m^2\,s^{-3}}$: Leistung

$$P = \vec{F} \circ \vec{v} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \dot{W} \tag{2.34}$$

2.2.2 Drehbewegung(Rotation)

Massenträgheitsmoment

$[J] = \mathrm{kg\,m^2}$: Massenträgheitsmoment

$$J = \int r^2\,\mathrm{d}m \tag{2.35}$$

Drehimpuls

$[L] = \mathrm{kg\,m^2\,rad\,s^{-1}}$: Drehimpuls

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{2.36}$$

$$= J \cdot \vec{\omega} \tag{2.37}$$

Drehmoment

$[M] = \mathrm{N\,m}$: Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = J\vec{\alpha} = \dot{\vec{L}} \tag{2.38}$$

kinetische Energie

$$E_{kin} = \frac{1}{2} J \omega^2 \tag{2.39}$$

Arbeit

$$W = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \vec{M} \circ \vec{e_\omega}\,\mathrm{d}\varphi = \int_{\vec{\omega}_0}^{\vec{\omega}_1} J\vec{\omega}\,\mathrm{d}\vec{\omega} \tag{2.40}$$

$$= \frac{1}{2} J \left(\omega_1^2 - \omega_0^2\right) \tag{2.41}$$

Leistung

$$P = \vec{M} \circ \vec{\omega} \tag{2.42}$$

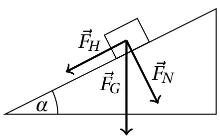
Zentripedalkraft

$$F_{zp} = -m \cdot \omega^2 \cdot r \tag{2.43}$$

$$= -m \cdot v^2 \cdot \frac{\vec{e_r}}{r} \tag{2.44}$$

2.2.3 Schiefe Ebene

Kräfte



$$\vec{F}_N = \vec{F}_G \cos\alpha \tag{2.45}$$

$$\vec{F}_H = \vec{F}_G \sin\alpha \tag{2.46}$$

2.2.4 Reibung

Reibungskräfte

$[F_N] = \mathrm{N}$: Normalkraft
$[F_R] = \mathrm{N}$: Reibungskraft
$[\mu] = 1$: Reibungskoeffizient

$$F_R = \mu \cdot F_N \tag{2.47}$$

Rollreibung

$[F_N] = \mathrm{N}$: Normalkraft
$[f] = 1$: Rollreibungstahl
$[M] = 1$: Drehmoment
$[r] = \mathrm{m}$: Radius

$$M = f \cdot F_N \tag{2.48}$$
$$F_R = \frac{f}{r} \cdot F_N \tag{2.49}$$

2.2.5 Feder

Hookesches Gesetz

$[k] = \mathrm{N\,m^{-1}}$: Federkonstante
$[D] = \mathrm{N\,m\,rad^{-1}}$: Winkelrichtgröße

$$F = -kx \tag{2.50}$$
$$M = D\varphi \tag{2.51}$$

Spannungsenergie

$$W = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} F\,\mathrm{d}x = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} kx\,\mathrm{d}x \tag{2.52}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(x_{\max}^2 - x_{\min}^2\right) \tag{2.53}$$

2.2.6 Elastischer Stoß

Energieerhaltung

$$\text{Energie vor den Stoß} = \text{Energie nach den Stoß}$$
$$\sum E_{\text{kin}} = \sum E'_{\text{kin}} \tag{2.54}$$

Impulserhaltung

$$\text{Impuls vor den Stoß} = \text{Impuls nach den Stoß}$$
$$\sum m\vec{v} = \sum m\vec{v}' \tag{2.55}$$

Zentraler, elastischer Stoß

(Energie und Impuls)

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \tag{2.56}$$
$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2' \tag{2.57}$$

Zentraler, elastischer Stoß

(Geschwindigkeit nach dem Stoß)

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1 + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}v_2 \tag{2.58}$$
$$v_1' = \frac{2m_2}{m_1+m_2}v_2 + \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1 \tag{2.59}$$

2.2.7 Unelastischer Stoß

Energieerhaltung

$$\text{Energie vor den Stoß} = \text{Energie nach den Stoß} + \text{Arbeit}$$
$$\sum E_{\text{kin}} = \sum E'_{\text{kin}} + \Delta W \tag{2.60}$$

Impulserhaltung

$$\text{Impuls vor den Stoß} = \text{Impuls nach den Stoß}$$
$$\sum m\vec{v} = \sum m\vec{v}' \tag{2.61}$$

Total unelastischer Stoß

(Energie und Impuls)

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v'^2 + \Delta W \tag{2.62}$$
$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1+m_2)v' \tag{2.63}$$

Total unelastischer Stoß

(Geschwindigkeit nach dem Stoß)

$$v' = \frac{m_1v_1 + m_2v2}{m_1+m_2} \tag{2.64}$$

Total unelastischer Stoß

(Energieverlust)

$$\Delta W = \frac{m_1 \cdot m_2}{2(m_1+m_2)}(v_1-v_2)^2 \tag{2.65}$$

2.2.8 Drehimpulse

Drehimpulserhaltungssatz

$$\text{Drehinpuls zur Zeit 1} = \text{Drehimpuls zur Zeit 2} \tag{2.66}$$
$$\sum \vec{L} = \sum \vec{L}' \tag{2.67}$$

Kupplung Zweier Drehkörper

(Winkelgeschwindigkeit nach dem Kuppeln und Energieverlust)

$$\vec{\omega}' = \frac{J_0\vec{\omega}_0 + J_1\vec{\omega}_1}{J_1+J_2} \tag{2.68}$$
$$W = \frac{J_0 \cdot J_1}{2(J_0+J_1)}(\omega_0-\omega_1)^2 \tag{2.69}$$

2.2.9 Rotierendes Bezugssystem

Zentrifugalkraft

$$\vec{F}_Z = F_r \cdot \vec{e}_r = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -m\vec{\omega} \times \vec{v} \tag{2.70}$$

$$F_Z = -m\frac{v^2}{r} = -m\omega^2 r \tag{2.71}$$

Corioliskraft

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v} \tag{2.72}$$

2.3 Schwerpunkt

Schwerpunkt mehrere Punktmassen

$$\vec{r}_{\mathrm{Sp}} = \frac{\sum \vec{r}_i m_i}{\sum m_i} \tag{2.73}$$

Allgemein Schwerpunkt

$$\vec{r}_{\mathrm{Sp}} = \frac{\int \vec{r}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} \tag{2.74}$$

Schwerpunkt (Kartesische)

$[\rho] = \mathrm{kg\,m^{-3}}$: Dichte

$$x_{\mathrm{Sp}} = \frac{\int_z \int_y \int_x x\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\int_z \int_y \int_x \rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z} \tag{2.75}$$

$$y_{\mathrm{Sp}} = \frac{\int_z \int_y \int_x y\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\int_z \int_y \int_x \rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z} \tag{2.76}$$

$$z_{\mathrm{Sp}} = \frac{\int_z \int_y \int_x z\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\int_z \int_y \int_x \rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z} \tag{2.77}$$

Schwerpunkt (Zylinder)

$$r_{\mathrm{Sp}} = \frac{\int_z \int_\varphi \int_r r^2\rho\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z}{\int_z \int_\varphi \int_r r\rho\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z} \tag{2.78}$$

$$\varphi_{\mathrm{Sp}} = \frac{\int_z \int_\varphi \int_r \varphi r\rho\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z}{\int_z \int_\varphi \int_r r\rho\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z} \tag{2.79}$$

$$z_{\mathrm{Sp}} = \frac{\int_z \int_\varphi \int_r zr\rho\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z}{\int_z \int_\varphi \int_r r\rho\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z} \tag{2.80}$$

$$x = r\cos\varphi \tag{2.81}$$

$$y = r\sin\varphi \tag{2.82}$$

$$z = z \tag{2.83}$$

2.4 Trägheitsmoment

Allgemein

$[\rho] = \mathrm{kg\,m^{-3}}$: Dichte
$[J] = \mathrm{kg\,m^2}$: Massenträgheitsmoment

$$J = \sum m_i r_i^2 \tag{2.84}$$

$$J = \int_m r^2\,\mathrm{d}m \tag{2.85}$$

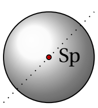
$$J = \int_z \int_\varphi \int_r r^3\rho\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z \tag{2.86}$$

Satz von Steiner

$[J_s] = \mathrm{kg\,m^2}$: Mtm am der alten Achse
$[J_x] = \mathrm{kg\,m^2}$: Mtm am der neuen Achse ($J_x \parallel J_s$)

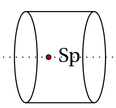
$$J_x = mr^2 + J_s \tag{2.87}$$

Trägheitsmoment Kugel



$$J_{\mathrm{Sp}} = \frac{2}{5}mr^2 \tag{2.88}$$

Trägheitsmoment Zylinder



$$J_{\mathrm{Sp}} = \frac{1}{2}mr^2 \tag{2.89}$$

Trägheitsmoment Kreisring

$$J_{\mathrm{Sp}} = mr^2 \tag{2.90}$$

Trägheitsmoment Stab

$$J_{\mathrm{Sp}} = \frac{1}{12} m l^2 \tag{2.91}$$

2.5 Elastizitätslehre

Spannung

$[\sigma] = \mathrm{N\,m^{-2}}$: Normalspannung
$[\tau] = \mathrm{N\,m^{-2}}$: Schubspannung
$[E] = \mathrm{N\,m^{-2}}$: Elastizitätsmodul
$[F_n] = \mathrm{N}$: Normalkraft ($\vec{F} \parallel \vec{A}$
$[\varepsilon] = 1$: Dehnung

$$\vec{\sigma} = \frac{\mathrm{d}\vec{F}_n}{\mathrm{d}A} \tag{2.92}$$

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{\Delta l}{l} \tag{2.93}$$

$$\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}\vec{F}_t}{\mathrm{d}A} \tag{2.94}$$

Schubmodul

$[G] = \mathrm{N\,m^{-2}}$: Schubmodul
$[\varphi] = \mathrm{rad}$: Scherwinkel

$$G = \frac{\tau}{\varphi} \tag{2.95}$$

Drillung

$[\psi] = \mathrm{rad\,m^{-1}}$: Drillung
$[\varphi] = \mathrm{rad}$: Torisionswinkel
$[l] = \mathrm{m}$: Länge des Drehkörpers
$[W_t] = \mathrm{m^3}$: Wiederstandsmoment

$$\psi = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}l} = \frac{W_t}{G\cdot J_p}\tau = \frac{M_t}{G\cdot J_p} \tag{2.96}$$

Polares Fläschenmoment

$\left[J_p\right] = \mathrm{m^4}$: Polares Fläschenmoment

$$J_p = \int r^2\,\mathrm{d}A = \int_\varphi\int_r r^3\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \tag{2.97}$$

Verformungsarbeit

$$W = V\int \sigma(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon \tag{2.98}$$

2.6 Schwingungen

Harmonische Schwingung

$[A] = 1$: Amplitude
$[\omega] = \mathrm{rad\,s^{-1}}$: Kreisfrequenz
$[\varphi] = \mathrm{rad}$: phasenverschiebung

$$u(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0) \tag{2.99}$$

2.6.1 Ungedämpfte Schwingungen

Federpendel

$[\hat{x}] = \mathrm{m}$: Amplitude
$[k] = \mathrm{kg\,s^{-2}}$: Federkonstante
$[\omega] = \mathrm{rad\,s^{-1}}$: Eigenfrequenz

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x \tag{2.100}$$

$$x(t) = \hat{x}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{2.101}$$

$$\dot{x}(t) = -\hat{x}\omega\sin(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{2.102}$$

$$\ddot{x}(t) = -\hat{x}\omega^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{2.103}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.104}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.105}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{2.106}$$

Mathematisches Pendel

$[\varphi] = \mathrm{rad}$: Auslenkwinkel
$[\hat{\varphi}] = \mathrm{rad}$: Amplitude
$[g] = \mathrm{m\,s^{-2}}$: Fallbeschleunigung
$[\omega] = \mathrm{rad\,s^{-1}}$: Eigenfrequenz
$[l] = \mathrm{m}$: Pendellänge

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi \tag{2.107}$$

$$\varphi(t) = \hat{\varphi}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{2.108}$$

$$\dot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi}\omega\sin(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{2.109}$$

$$\ddot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi}\omega^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{2.110}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{2.111}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \tag{2.112}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{2.113}$$

Physikalisches Pendel

$[\varphi] = \mathrm{rad}$: Auslenkwinkel
$[\hat{\varphi}] = \mathrm{rad}$: Amplitude
$[g] = \mathrm{m\,s^{-2}}$: Fallbeschleunigung
$[\omega] = \mathrm{rad\,s^{-1}}$: Eigenfrequenz
$[l] = \mathrm{m}$: Abstand Drehachse A zum SP
$[J_A] = \mathrm{kg\,m^2}$: Trägheitsmoment um Achse A

$$\ddot{\varphi} = -\frac{l\,m\,g}{J_A}\varphi \tag{2.114}$$
$$\varphi(t) = \hat{\varphi}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{2.115}$$
$$\dot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi}\,\omega\sin(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{2.116}$$
$$\ddot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi}\,\omega^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{2.117}$$
$$\omega = \sqrt{\frac{m\,g\,l}{J_A}} \tag{2.118}$$
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m\,g\,l}{J_A}} \tag{2.119}$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_A}{m\,g\,l}} \tag{2.120}$$

Torisionsschwingung

$[\varphi] = \mathrm{rad}$: Torisionswinkel
$[\hat{\varphi}] = \mathrm{rad}$: Amplitude
$[\omega] = \mathrm{rad\,s^{-1}}$: Eigenfrequenz
$[D] = \mathrm{rad\,s^{-1}}$: Winkelrichtgröße
$[J_A] = \mathrm{kg\,m^2}$: Trägheitsmoment um Achse A

$$\ddot{\varphi} = -\frac{D}{J_A}\varphi \tag{2.121}$$
$$\varphi(t) = \hat{\varphi}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{2.122}$$
$$\dot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi}\,\omega\sin(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{2.123}$$
$$\ddot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi}\,\omega^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{2.124}$$
$$\omega = \sqrt{\frac{D}{J_A}} \tag{2.125}$$
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{J_A}} \tag{2.126}$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_A}{D}} \tag{2.127}$$

Flüssigkeitspendel

$[y] = \mathrm{m}$: Auslenkung
$[\hat{y}] = \mathrm{m}$: Amplitude
$[\omega] = \mathrm{rad\,s^{-1}}$: Eigenfrequenz
$[\rho] = \mathrm{kg\,m^{-2}}$: Dichte der Flüssigkeit
$[l] = \mathrm{m}$: Länge der Flüssigkeitsseule
$[A] = \mathrm{m^2}$: Querschnittsfläche

$$\ddot{y} = -\frac{2A\rho\,g}{m}y \tag{2.128}$$
$$\varphi(t) = \hat{y}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{2.129}$$
$$\dot{\varphi}(t) = -\hat{y}\,\omega\sin(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{2.130}$$
$$\ddot{\varphi}(t) = -\hat{y}\,\omega^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{2.131}$$
$$\omega = \sqrt{\frac{2A\rho\,g}{m}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \tag{2.132}$$
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2g}{l}} \tag{2.133}$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}} \tag{2.134}$$

Elektrischer Schwingkreis

$[q] = \mathrm{A\,s}$: Ladung
$[\hat{q}] = \mathrm{A\,s}$: Amplitude, max. Ladung Kondensator
$[L] = \mathrm{V\,s\,A^{-1}}$: Induktivität
$[C] = \mathrm{A\,s\,V^{-1}}$: Kapazität

$$0 = L\ddot{Q} + \frac{Q}{C} \tag{2.135}$$
$$q(t) = \hat{Q}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{2.136}$$
$$\dot{q}(t) = -\hat{Q}\omega\sin(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{2.137}$$
$$\ddot{q}(t) = -\hat{Q}\omega^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{2.138}$$
$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{2.139}$$
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{2.140}$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{2.141}$$

2.6.2 Gedämpfte Schwingungen

Schwingungsgleichung mit Reibung

$[k] = \mathrm{kg\,s^{-2}}$: Richtgröße
$[F_R] = \mathrm{N}$: Reibungskraft
$[x] = \mathrm{m}$: Auslenkung

$$m\ddot{x} = -kx + F_R \tag{2.142}$$

Coulomb-Reibung

$[k] = \mathrm{kg\,s^{-2}}$: Richtgröße
$[F_N] = \mathrm{N}$: Normalkraft
$[F_R] = \mathrm{N}$: Reibungskraft
$[\mu] = 1$: Reibungskoeffizient
$[\dot{x}] = \mathrm{m\,s^{-1}}$: Geschwindigkeit

$$F_R = -\operatorname{sgn}(\dot{x})\mu F_N \tag{2.143}$$
$$0 = m\ddot{x} + kx + \operatorname{sgn}(\dot{x})\mu F_N \tag{2.144}$$
$$\operatorname{sgn}(\dot{x}) = \begin{cases} -1 & \dot{x} < 0 \\ 0 & \dot{x} = 0 \\ +1 & \dot{x} > 0 \end{cases} \tag{2.145}$$

Gleitreibung(Nicht Behandelt)

$[k] = \mathrm{kg\,s^{-2}}$: Richtgröße
$[F_N] = \mathrm{N}$: Normalkraft
$[\mu] = 1$: Reibungskoeffizient
$[\hat{x}_0] = \mathrm{m}$: Start Amplitude
$[\hat{x}_1] = \mathrm{m}$: End Amplitude

$$x(t) = -(\hat{x}_0 - \hat{x}_1)\cos(\omega t) - \hat{x}_1 \qquad 0 \le t \le \frac{T}{2} \tag{2.146}$$

$$x(t) = -(\hat{x}_0 - 3\hat{x}_1)\cos(\omega t) + \hat{x}_1 \qquad \frac{T}{2} \le t \le T \tag{2.147}$$

$$\hat{x}_1 = \frac{\mu F_N}{k} \tag{2.148}$$

Viskose Reibung

$[k] = \mathrm{kg\,s^{-2}}$: Richtgröße
$[\hat{x}] = \mathrm{m}$: Amplitude
$[\omega] = \mathrm{rad\,s^{-1}}$: Eigenfrequenz
$[\delta] = \mathrm{s^{-1}}$: Abklingkoeffizient
$[b] = \mathrm{kg\,s^{-1}}$: Dämpfungskonstante
$[D] = 1$: Dämpfungsgrad
$[\omega_D] = \mathrm{rad\,s^{-1}}$: Gedämpfte Kreisfrequenz
$[\delta] = \mathrm{kg\,s^{-1}}$: logarithmischen Dekrement
$[d] = 1$: Verlustfaktor
$[Q] = 1$: Güte

$$0 = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx \tag{2.149}$$

$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t}e^{\pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\,t} \tag{2.150}$$

$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t}e^{\pm j\omega_0\sqrt{1-D^2}\,t} \tag{2.151}$$

$$\delta = \frac{b}{2m} \tag{2.152}$$

$$D = \frac{\delta}{\omega_0} \tag{2.153}$$

$$D = \frac{b}{2}\frac{1}{\sqrt{mk}} \tag{2.154}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.155}$$

$$\Lambda = \ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T)}\right) \tag{2.156}$$

$$\Lambda = \delta T \tag{2.157}$$

$$\omega_D = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \tag{2.158}$$

$$d = 2D \tag{2.159}$$

$$Q = \frac{1}{d} \tag{2.160}$$

Viskose Reibung

Schwingfall.$\delta < \omega_0$

$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t}\cos(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\,t + \varphi) \tag{2.161}$$

Viskose Reibung

Aperiodischer Grenzfall $\delta = \omega_0$

$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t}(1 - \delta t) \tag{2.162}$$

Viskose Reibung

Kriechfall $\delta > \omega_0$

$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t}e^{\pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\,t} \tag{2.163}$$

2.7 Fluidmechanik

Statischer Druck

$[p] = \mathrm{Pa}$: Druck
$[p] = \mathrm{N}$: Kraft ($F_N \perp A$)
$[A] = \mathrm{m^2}$: Fläche

$$p = \frac{\mathrm{d}F_N}{\mathrm{d}A} \tag{2.164}$$

Dynamischer Druck

$[p] = \mathrm{Pa}$: Druck
$[v] = \mathrm{m\,s^{-1}}$: Geschwindigkeit des Mediums
$[\rho] = \mathrm{kg\,m^{-3}}$: Dichte

$$p = \frac{1}{2}\rho v^2 \tag{2.165}$$

Schwere Druck

$[p] = \mathrm{Pa}$: Druck
$[\rho] = \mathrm{kg\,m^{-3}}$: Dichte
$[V] = \mathrm{m^3}$: Volumen
$[A] = \mathrm{m^2}$: Fläche
$[h] = \mathrm{m}$: Tiefe (Abstand von Oben)

$$p = \frac{\rho V g}{A} \tag{2.166}$$

$$= h\rho g \tag{2.167}$$

Volumenstrom

$[\dot{V}] = \mathrm{m^3\,s^{-1}}$: Volumenstrom

$$\dot{V} = vA \tag{2.168}$$

$$= \iint_A \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{A} \tag{2.169}$$

$$= \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \tag{2.170}$$

$$= Q \tag{2.171}$$

Massenstrom

$[\dot{m}] = \mathrm{kg\,s^{-1}}$: Massenstrom
$[j] = \mathrm{kg\,m^{-2}\,s^{-1}}$: Massenstromdichte

$$\dot{m} = jA \tag{2.172}$$
$$= \iint_A \vec{j}\,\mathrm{d}\vec{A} \tag{2.173}$$
$$= \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \tag{2.174}$$

Kompressibilität

$[\Delta V] = \mathrm{m^3}$: Volumenabnahme
$[\Delta p] = \mathrm{Pa}$: Druckzunahme
$[\kappa] = \mathrm{Pa^{-1}}$: Kompressibilität

$$\kappa = \frac{\Delta V}{\Delta p V} \tag{2.175}$$

Volumenausdehnungskoeffizient

$[\Delta T] = \mathrm{K}$: Temperaturänderung
$[\gamma] = \mathrm{K^{-1}}$: Volumenausdehnungskoeffizient

$$\frac{\Delta V}{V} = \gamma \Delta T \tag{2.176}$$

Barometrische Höhenformel

Luftdruck in der Atmosphäre
$[p_0] = \mathrm{Pa}$: Druck am Boden
$[\rho_0] = \mathrm{kg\,m^{-3}}$: Dichte am Boden
$[h] = \mathrm{m}$: Tiefe (Abstand von Boden)

$$p = p_0 e^{-Ch} \tag{2.177}$$
$$C = \frac{\rho_0 g}{p_0} \tag{2.178}$$

Auftrieb

$[F_A] = \mathrm{N}$: Kraft
$[\rho_V] = \mathrm{kg\,m^{-3}}$: Dichte des verdränkten Stoffes
$[\rho_M] = \mathrm{kg\,m^{-3}}$: Dichte des Stoffes
$[V] = \mathrm{m^3}$: Volumen das verdränkten wird

$$\vec{F_A} = -\rho_V \vec{g} V \tag{2.179}$$
$$= -\frac{\rho_V}{\rho_M} \vec{F_G} \tag{2.180}$$

Bernoulli Gleichung

$[\rho] = \mathrm{kg\,m^{-3}}$: Dichte
$[v] = \mathrm{m\,s^{-1}}$: Geschwindigkeit
$[h] = \mathrm{m}$: Tiefe (Abstand von Oben)

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \mathrm{const} \tag{2.181}$$