Formelsammlung für Alles

Matthias Springstein

11. Februar 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Filterentwurf

1.1 Darstellung Übertragungsfunktion

Polynomedarstellung

$$G(p) = \frac{\sum\limits_{i=-q}^{r} f_i \cdot p^i}{\sum\limits_{j=-k}^{v} f_j \cdot p^j}$$

Produktdarstellung

$$G(p) = K \cdot \frac{\prod\limits_{i=1}^{m} (p - p_{oi})}{\prod\limits_{j=1}^{n} \left(p - p_{pj}\right)}$$

Signalflussdarstellung

$$G(p) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{m} a_i \cdot p^{-i}}{1 + \sum\limits_{j=1}^{n} b_i \cdot p^{-j}}$$

1.2 Frequenz- und Phasengang

Betragsspektrum

$$\left|G(p)\right| = \sqrt{\mathrm{Re}^2 + \mathrm{Im}^2}$$

Phasengang

$$\varphi_{\underline{G}}(f) = \arctan \frac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}}$$

1.3 Transformationen

Laplace- und Fouriertransformation

$$\underline{X}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot (\cos\omega t - j \cdot \sin\omega t)\,\mathrm{d}t$$

$$\underline{X}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-\sigma t} \cdot (\cos\omega t - j \cdot \sin\omega t)\,\mathrm{d}t$$

Z-Transformationen

$$x(k) = \sum_{k=0}^{\infty} x(m) \cdot \delta(k - m) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(z) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m) \cdot z^{-m}$$

$$X(z) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m) \cdot z^{-m} \quad \Leftrightarrow \quad X(p) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m) \cdot e^{-pmt_a}$$

$$\varphi_z = \omega \cdot t_a = \frac{\omega}{f_p} = 2\pi \frac{f}{f_p}$$

$$|z| = e^{\frac{\sigma}{f_p}}$$

$$\sigma = \frac{\omega_p}{2\pi} \cdot \ln|z|$$

$$\omega = \omega_p \frac{\varphi_z}{2\pi}$$

1.4 FIR-Filter

Darstellung im Zeitbereich

$$x_\delta(t) = \sum_{m=0}^{\infty} x(mt_a) \cdot \delta(t - mt_a)$$

$$x_\delta(k) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m) \cdot \delta(k - m)$$

$$g(t) = A \sum_{m=0}^{M-1} a_m \delta(t - mt_a)$$

Darstellung im Z-Bereich

$$G(z) = A \sum_{m=0}^{M-1} a_m z^{-m}$$

$$= A a_0 \frac{\sum\limits_{m=0}^{M-1} \frac{a_m}{a_0} z^{-m}}{z^{M-1}}$$

Frequenzgang

$$G\left(f\right) = A\sum_{m=0}^{M-1} a_m e^{-j2\pi f m t_a}$$

1.5 IIR-Filter

Darstellung im Z-Bereich

$$G(z) = A \cdot \frac{\sum_{m=0}^{M-1} a_m z^{-m}}{1+\sum_{n=1}^{N-1} b_n z^{-n}}$$

1.6 Fensterfunktion

Zeit- und Frequenzbereich

$$x_w\left(t\right) = x\left(t\right) \cdot w\left(t\right)$$
$$X_w\left(f\right) = X\left(f\right) * W\left(f\right)$$

Rechtecksfenster

$$w\left(t\right) = \mathrm{rect}_T\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)$$

Dreiecksfenster

$$w\left(t\right) = \Lambda_T\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{\frac{T}{2}}\right)$$

Hanningfenster

$$w\left(t\right) = \begin{cases} \cos^2\left(\frac{\pi\left(t-\frac{T}{2}\right)}{T}\right) & 0 \le t \le T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Hammingfenster

$$w\left(t\right) = \begin{cases} 0{,}54 - 0{,}46\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) & 0 \le t \le T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Blackmanfenster

$$w\left(t\right) = \begin{cases} 0{,}42 - 0{,}5\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + 0{,}08\cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right) & 0 \le t \le T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

1.7 Gruppenlaufzeit

Gruppenlaufzeit

$$\tau_{Gr}\left(\omega\right) = -\frac{\mathrm{d}\varphi_G\left(\omega\right)}{\mathrm{d}\omega}$$

Verschiebung

$$\varphi_{\mathrm{neu}} = \varphi_{\mathrm{alt}}\left(f\right) - 2\pi t_0 f$$
$$\tau_{Gr}\left(\omega\right) = -\frac{\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{alt}}\left(\omega\right)}{\mathrm{d}\omega} + t_0$$

1.8 Korrespodenz

Korrespodenz

$$x\left(t\right) = \hat{X}\mathrm{rect}_T\left(t\right) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X\left(f\right) = \hat{X}T \cdot \mathrm{si}\left(\pi \cdot f \cdot T\right)$$
$$x\left(t\right) = \hat{X}\Lambda_T\left(t\right) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X\left(f\right) = \hat{X}T \cdot \mathrm{si}^2\left(\pi \cdot f \cdot T\right)$$
$$x\left(t\right) = \hat{X}\sin\left(2\pi f_0 t\right) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X\left(f\right) = \frac{j\hat{X}}{2}\left(\delta\left(f+f_0\right) - \delta\left(f-f_0\right)\right)$$
$$x\left(t\right) = \hat{X}\cos\left(2\pi f_0 t\right) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X\left(f\right) = \frac{\hat{X}}{2}\left(\delta\left(f+f_0\right) + \delta\left(f-f_0\right)\right)$$