

Formelsammlung für Alles

Matthias Springstein

1. Februar 2013

Inhaltsverzeichnis

1	Binäre Rechenoperation	5
1.1	Zahlensystem	5
1.2	Addition	5
1.2.1	Zwei Operanden	5
1.2.2	Mehrere Operanden	5
1.2.3	Überlauf	6
1.2.4	Überlaufserkennung	6
1.2.5	Umwandlung Tenärcode	6

1 Binäre Rechenoperation

1.1 Zahlensystem

Dualsystem

Basis : 2 $z \in (1;0)$
Format : $2^{n-1} \dots 2^0, 2^{-1} \dots 2^{-m}$
Zahlenwert : $\sum_{l=-m}^{n-1} z_l \cdot 2^l$

Trenärsystem

Basis : 2 $z \in (1;0;-1)$

Oktalsystem

Basis : 8 $z \in (0;1;2;3;4;5;6;7)$

Hexadezimalsystem

Basis : 16 $z \in (0;1;2;3 \dots d;e;f)$

Dezimalsystem

Basis : 10 $z \in (0;1;2;3 \dots 8;9)$

Stellenberechnung

$[k] = 1$: Zahlenwert
 $[l] = 1$: Anzahl Nachkommastellen in Dezimalsystem
 $[n] = 1$: Anzahl Vorkommanstellen in Dualsystem
 $[m] = 1$: Anzahl Nachkommastellen in Dualsystem

$$n \geq \text{ceil} \left(\frac{\lg(k+1)}{\lg(2)} \right)$$
$$m \geq \text{ceil} \left(\frac{l}{\lg(2)} \right)$$

Wertebereich und Quantisierungsfehler(Dualsystem)

$[n] = 1$: Anzahl Vorkommanstellen in Dualsystem
 $[m] = 1$: Anzahl Nachkommastellen in Dualsystem

Wertebereich = $0 \dots 2^n - 2^{-m}$
Quantisierungsfehler = $\pm \frac{1}{2} \text{LSB} = \pm 2^{-m-1}$
Quantisierungsstufen = 2^{-m}

$$n = \text{ceil} \left(1 + \frac{\lg(|\text{Wert}|)}{\lg(2)} \right)$$

$$\Delta = 2^{n-1} - |\text{Wert}|$$

Umwandlung von Δ bis MSB Stelle -1, danach setzen der richtigen MSB-Stelle.

Umwandlung Negativer Dualzahlen

1.2 Addition

1.2.1 Zwei Operanden

Halbaddierer

$[s_i] = 1$: Summe der Stelle i
 $[c_{i+1}] = 1$: Übertrag der Stelle i+1

$$s_i = a_i \approx b_i$$
$$c_{i+1} = a_i \cdot b_i$$

Volladdierer

$[s_i] = 1$: Summe der Stelle i
 $[c_{i+1}] = 1$: Übertrag der Stelle i+1
 $[c_i] = 1$: Übertrag der Stelle i

$$s_i = a_i \approx b_i \approx c_i$$
$$c_{i+1} = a_i \cdot b_i + (a_i \approx b_i) \cdot c_i$$

Carry-Look-Ahead

$[s_i] = 1$: Summe der Stelle i
 $[p_{i+1}] = 1$: Propagate Übertrag an der Stelle i
 $[g_{i+1}] = 1$: Generate Übertrag kompensation

$$s_i = a_i \approx b_i \approx c_i$$
$$p_{i+1} = a_i \approx b_i$$
$$g_{i+1} = a_i \cdot b_i$$
$$c_{i+1} = p_{i+1} \cdot c_i + g_{i+1}$$

1.2.2 Mehrere Operanden

Ripple-Carry: Jede Stufe addiert jeweils ein Operand hinzu.

Baumaddierer: Die einzelnen Operanden werden Baumförmig addiert.

Ripple-Save: Nur der letzte Addierer ist Sequenzial aufgebaut. Daher der Übertrag des Vorgängers wird beim nächsten Aufaddiert.

1.2.3 Überlauf

Positive Operanden

$[s] = 1$: Summe
 $[n] = 1$: Anzahl Vorkommanstellen in Dualsystem

Negative Operanden

$[s] = 1$: Entstehender Summen Wert
 $[p] = 1$: Operanden Anzahl

Vermeidung

$[r] = 1$: Zusätzliche Summenstellen
 $[p] = 1$: Operanden Anzahl

$$s = (a + b) \bmod 2^n$$

$$s = \left(a + b + 2^n \text{ceil} \left(\frac{p-1}{2} \right) + 2^{n-1} \right) \bmod 2^n - 2^{n-1}$$

$$r = \text{ceil} \left(\frac{\lg(p)}{\lg(2)} \right)$$

1.2.4 Überlaufserkennung

Vergleich MSB Stellen

$$\begin{aligned} a_{MSB} &\neq b_{MSB} && \Rightarrow \text{Kein Überlauf möglich} \\ a_{MSB} &= b_{MSB} = s_{MSB} && \Rightarrow \text{Kein Überlauf möglich} \\ a_{MSB} &= b_{MSB} = 0 \quad \& \quad s_{MSB} = 1 && \Rightarrow \text{Positiver Überlauf} \\ a_{MSB} &= b_{MSB} = 1 \quad \& \quad s_{MSB} = 0 && \Rightarrow \text{Negativer Überlauf} \\ MIN &= a_{MSB} \\ OVF &= \bar{a}_{MSB} s_{MSB} (\bar{b}_{MSB} \approx s_{MSB}) + a_{MSB} \bar{s}_{MSB} (b_{MSB} \approx s_{MSB}) \end{aligned}$$

Vergleich des Carry

$$\begin{aligned} c_{I;MSB} &= c_{O;MSB} && \Rightarrow \text{Kein Überlauf möglich} \\ c_{I;MSB} &= 1 \quad \& \quad c_{O;MSB} = 0 && \Rightarrow \text{Positiver Überlauf} \\ c_{I;MSB} &= 0 \quad \& \quad c_{O;MSB} = 1 && \Rightarrow \text{Negativer Überlauf} \\ MIN &= c_{O;MSB} \\ OVF &= c_{I;MSB} \approx c_{O;MSB} \end{aligned}$$

Erweiterung der MSB Stelle

$$\begin{aligned} s_{MSB} &= s_{MSB+1} && \Rightarrow \text{Kein Überlauf möglich} \\ s_{MSB} &= 1 \quad \& \quad s_{MSB+1} = 0 && \Rightarrow \text{Positiver Überlauf} \\ s_{MSB} &= 0 \quad \& \quad s_{MSB+1} = 1 && \Rightarrow \text{Negativer Überlauf} \\ MIN &= s_{MSB} \\ OVF &= s_{MSB} \approx s_{MSB+1} \end{aligned}$$

Sättigung

$[s_{MSB}] = 1$: Behandlung der höchsten Stelle
 $[s_{LSB}] = 1$: Behandlung der restlichen Stellen

$$\begin{aligned} s'_{MSB} &= s_{MSB} \overline{OVF} + OVF MIN \\ s'_{LSB} &= s_{LSB} \overline{OVF} + OVF \overline{MIN} \end{aligned}$$

1.2.5 Umwandlung Tenärcode

h_i	b_{i+1}	b_i	c_i	h_{i+1}
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	1	-1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	-1	1
1	1	1	0	1