

1 Mathe

1.1 Grundlagen

1.1.1 Mengen

Mengen Darstellung

Schreibweise	Bedeutung
$a \in M$:	a ist ein Element von M
$a \notin M$:	a ist kein Element von M
$M = \{x x \text{ Eigenschaften}, \dots\}$	Beschreibende Darstellung
$M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$	Aufzählende Darstellung(endlich)
$M = \{a_1, a_2, \dots\}$	Aufzählende Darstellung(unendlich)
$M = \{\}$	Leere Menge
$A \subset B$	A ist eine <i>Teilmenge</i> von B. A heißt <i>Untermenge</i> und B <i>Obermenge</i>
$A = B$	A und B sind gleich, d.h. jedes Element von A ist auch in B vorhanden und umgekehrt

Mengen Operationen

Schreibweise	Bedeutung
$A \cap B = \{x x \in A \text{ und } x \in B\}$	<i>Schnittmenge</i> zweier Mengen
$A \cup B = \{x x \in A \text{ oder } x \in B\}$	<i>Vereinigungsmenge</i> zweier Mengen
$A \setminus B = \{x x \in A \text{ und } x \notin B\}$	<i>Differenz- oder Restmenge</i> zweier Mengen

1.1.2 Intervalle

Beispiel	Beschreibung
$[a, b] = x a \leq x \leq b$	abgeschlossene Intervalle
$[a, b) = x a \leq x < b$	halboffene Intervall
$(a, b] = x a < x \leq b$	halboffene Intervall
$(a, b) = x a < x < b$	offenes Intervall

1.1.3 Rechengesetze

Operationen mit Natürlichen Zahlen

Beispiel	Beschreibung
$60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$ $70 = 2^1 \cdot 3^2$ $\text{ggT} = 2^1 \cdot 3^1$	Zerlegung der Faktoren in ihre Primfaktoren und dann bildet man das Produkt aus denn höchsten Potenzen die alle Faktoren gemeinsam haben.
$60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$ $70 = 2^1 \cdot 3^2$ $\text{kgV} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1$	Zerlegung der Faktoren in ihre Primfaktoren und dann bildet man das Produkt aus denn höchsten Potenzen die in mindestens einen Faktoren auftreten.

Kommutativgesetz

$$\begin{aligned} a + b &= b + a \\ a \cdot b &= b \cdot a \end{aligned} \tag{1.1}$$

Assoziativgesetz

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= (a + b) + c \\ a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c \end{aligned} \tag{1.2}$$

Distributivgesetz

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \tag{1.3}$$

1.1.4 Bruchrechnung

Ein Bruch a/b heißt *echte*, wenn $|a| < |b|$ ist, sonst *unecht*.

Addition und Subtraktion zweier Brüche

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d} \quad (1.4)$$

Multiplikation zweier Brüche

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad (1.5)$$

Division zweier Brüche

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad (1.6)$$

1.1.5 Potenzen

Eine Potenz a^n ist ein Produkt aus n gleichen Faktoren a:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \dots a \quad (1.7)$$

a : Basis n : Exponent

Rechenregeln

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (1.8a)$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (1.8b)$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad (1.8c)$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad (1.8d)$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad (1.8e)$$

1.1.6 Wurzeln

Wurzelziehen ist die Umkehrfunktion des Potenzieren

$$\sqrt[n]{a} = a^{\left(\frac{1}{n}\right)} \quad (1.9)$$

a : Radikand n : Wurzelexponent

Rechenregeln

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\left(\frac{m}{n}\right)} \quad (1.10a)$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a} \quad (1.10b)$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \quad (1.10c)$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (1.10d)$$

1.1.7 Logarithmen

Logarithmus ist das eindeutige lösen der Gleichung $r = a^x$ zur Lösung x .

$$x = \log_a r \quad (1.11)$$

a : Basis ($a > 0, a \neq 1$) r : Numerus ($r > 0$)

Rechenregeln

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a} \quad (1.12a)$$

$$\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v \quad (1.12b)$$

$$\log_a \left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v \quad (1.12c)$$

$$\log_a (u^k) = k \cdot \log_a u \quad (1.12d)$$

$$\log_a \sqrt[n]{u} = \left(\frac{1}{n}\right) \cdot \log_a u \quad (1.12e)$$

Basiswechsel

$$\log_b r = \frac{\log_a r}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b} \cdot \log_a r = K \cdot \log_a r \quad (1.13)$$

Beim Basiswechsel von $a \rightarrow b$ werden die Logarithmen mit einer Konstanten K multipliziert.

$$\lg \rightarrow \ln \Rightarrow K = 2,3026 \quad (1.14)$$

$$\ln \rightarrow \lg \Rightarrow K = 0,4343 \quad (1.15)$$

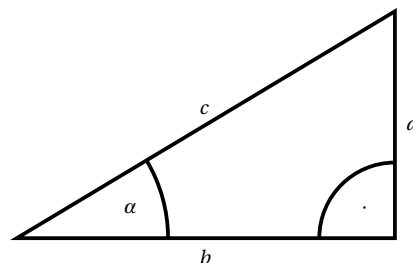
1.1.8 Winkelfunktionen

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad (1.16)$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \quad (1.17)$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} \quad (1.18)$$

$$\cot \alpha = \frac{b}{a} \quad (1.19)$$

**Rechenregeln**

$$\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \quad \sin x = \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \quad (1.20)$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cot x} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x} \quad (1.21)$$

Trigonometrischer Pythagoras

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (1.22)$$

Addition von Winkeln

$$\sin(x_1 \pm x_2) = \sin x_1 \cdot \cos x_2 \pm \cos x_1 \cdot \sin x_2 \quad (1.23a)$$

$$\cos(x_1 \pm x_2) = \cos x_1 \cdot \cos x_2 \mp \sin x_1 \cdot \sin x_2 \quad (1.23b)$$

$$\tan(x_1 \pm x_2) = \frac{\tan x_1 \pm \tan x_2}{1 \mp \tan x_1 \cdot \tan x_2} \quad (1.23c)$$

$$\cot(x_1 \pm x_2) = \frac{\cot x_1 \cdot \cot x_2 \mp 1}{\cot x_2 \pm \cot x_1} \quad (1.23d)$$

Multiplikation von Winkeln

$$\sin x_1 \cdot \sin x_2 = \frac{1}{2} \cdot (\cos(x_1 - x_2) - \cos(x_1 + x_2)) \quad (1.24a)$$

$$\cos x_1 \cdot \cos x_2 = \frac{1}{2} \cdot (\cos(x_1 - x_2) + \cos(x_1 + x_2)) \quad (1.24b)$$

$$\sin x_1 \cdot \cos x_2 = \frac{1}{2} \cdot (\sin(x_1 - x_2) + \sin(x_1 + x_2)) \quad (1.24c)$$

$$\tan x_1 \cdot \tan x_2 = \frac{\tan x_1 + \tan x_2}{\cot x_1 + \cot x_2} \quad (1.24d)$$

Umrechnung Grad- \Rightarrow Bogenmaß

$$x = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha \quad (1.25)$$

Umrechnung Bogen- \Rightarrow Gradmaß

$$\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot x \quad (1.26)$$

Für weitere Winkelformeln siehe Papula Formelsammlung Seite 90-102.

1.1.9 Fakultät

$n!$ ist definitionsgemäß das Produkt aus den ersten n Faktoren

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n = \prod_{k=1}^n k \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (1.27)$$

Vorsicht bei 0 Fakultät

$$0! = 1 \quad (1.28)$$

1.1.10 Binomischer Lehrsatz

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a \cdot b^{n-1} + b^n \quad (1.29)$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k \quad (1.30)$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k} \quad (1.31)$$

Der *Binomialkoeffizienten* mit den Koeffizienten $\binom{n}{k}$ wird n über k gelesen.

Bildungsgesetz

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1))}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad (1.32)$$

Rechenregel

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad (1.33a)$$

$$\binom{n}{k} = 0 \text{ für } k > n \quad (1.33b)$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \quad (1.33c)$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (1.33d)$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \quad (1.33e)$$

Ersten Binomischen Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad (1.34)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3 \quad (1.35)$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4 \cdot a^3 \cdot b + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot a \cdot b^3 + b^4 \quad (1.36)$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad (1.37)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 - b^3 \quad (1.38)$$

$$(a-b)^4 = a^4 - 4 \cdot a^3 \cdot b + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 - 4 \cdot a \cdot b^3 + b^4 \quad (1.39)$$

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2 \quad (1.40)$$

1.1.11 Grenzwertberechnung

Rechenregeln

$$\lim_{x \rightarrow x_0} C \cdot f(x) = C \cdot \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) \quad (1.41a)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad (1.41b)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right) \quad (1.41c)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \quad (1.41d)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} \quad (1.41e)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^n \quad (1.41f)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (a^{f(x)}) = a^{(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x))} \quad (1.41g)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\log_a f(x)) = \log_a \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) \quad (1.41h)$$

Grenzwertregel von Bernoulli und de l'Hospital

Diese Regel wird angewendet wenn das normale Ergebniss die Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ annimmt, was sonst eine beliebige Zahl darstellt.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (1.42)$$

Berechnete Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0 \text{ für } |a| < 1 \quad (1.43)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x!} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 1 \text{ für } a = 1 \quad (1.44)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} a = 1 \text{ für } a > 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \quad (1.45)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e \quad (1.46)$$

1.1.12 Reihen

Arithmetische Reihen

$$a + (a + d) + (a + 2 \cdot d) + \dots + (a + (n-1) \cdot d) = \frac{n}{2} (2 \cdot a + (n-1) \cdot d) \quad (1.47)$$

a : Anfangsglied $a_n = a + (n-1) \cdot d$: Endglied

Geometrische Reihen

$$a + a \cdot q + a \cdot q^2 + \dots + a \cdot q^{n-1} = \sum_{k=1}^n a \cdot q^{k-1} = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} \quad (1.48)$$

a : Anfangsglied $a_n = a \cdot q^{n-1}$: Endglied

1.1.13 Koordinatensystem

Kartesische Koordinaten

0 : Ursprung, Nullpunkt

x : Abszisse

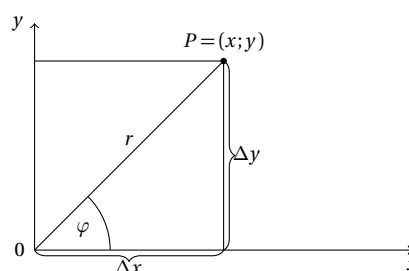
y : Ordinate

Polar Koordinaten

0 : Pol

r : Abstand des Punktes P zum Punkt O

φ : Winkel zwischen dem Strahl und der x-Achse (*Polarachse*)



Polarkoordinaten \Rightarrow Kartesische Koordinaten

$$x = r \cdot \cos \varphi \quad y = r \cdot \sin \varphi \quad (1.49)$$

Kartesische Koordinaten \Rightarrow Polarkoordinaten

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \varphi = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \quad (1.50)$$

Koordinatentransformation (Parallelverschiebung)

$$y = f(x) \Rightarrow \begin{matrix} x = u + a \\ y = v + b \end{matrix} \Rightarrow v = f(u + a) - b \quad (1.51)$$

$(a; b)$: Ursprung des neuen u, v Koordinatensystems, bezogen auf das alte x, y -System.

1.2 Gleichungen

1.2.1 Gleichungen n -ten Grades

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0, a_k \in \mathbb{R}) \quad (1.52)$$

Eigenschaften

- Die Gleichung besitzen maximal n reelle Lösungen.
- Es gibt genau n komplexe Lösungen.
- Für ungerades n gibt es mindestens eine reelle Lösung.
- Komplexe Lösungen treten immer Paarweise auf.
- Es existieren nur Lösungsformeln bis $n \leq 4$. Für $n > 4$ gibt es nur noch grafische oder numerische Lösungswege.
- Wenn eine Nullstelle bekannt ist kann man die Gleichung um einen Grad verringern, indem man denn zugehörigen Linearfaktor $x - x_1$ abspaltet (Polynome Division).

1.2.2 Lineare Gleichungen

$$a_1 \cdot x + a_0 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{a_0}{a_1} \quad (a_1 \neq 0) \quad (1.53)$$

1.2.3 Quadratische Gleichungen

$$a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0 \quad (a_2 \neq 0) \quad (1.54)$$

Normalform mit Lösung

$$x^2 + p \cdot x + q = 0 \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad (1.55)$$

Überprüfung (Vietscher Wurzelsatz)

$$x_1 + x_2 = -p \qquad x_1 \cdot x_2 = q \quad (1.56)$$

x_1, x_2 : Lösung der quadratischen Gleichung.

1.2.4 Biquadratische Gleichungen

Diese Gleichungen lassen sich mithilfe der Substitution lösen.

$$a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c = 0 \qquad u = x^2 \quad (1.57)$$

$$a \cdot u^2 + b \cdot u + c = 0 \qquad x = \pm \sqrt{u} \quad (1.58)$$

Das u kann mithilfe der Lösungsformel einer quadratischen Gleichung gelöst werden.

1.2.5 Gleichungen höheren Grades

Gleichungen höheren Grades kann man durch graphische oder numerische Ansätze lösen. Hilfreich ist das finden einer Lösung und das abspalten eines Linearfaktor, mithilfe der Polynomdivision oder dem Horner Schema, von der ursprünglichen Gleichung.

Polynomdivision

$$\frac{f(x)}{x - x_0} = \frac{a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0}{x - x_0} = b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0 + r(x) \quad (1.59)$$

x_0 ist dabei die erste gefundene Nullstelle. $r(x)$ verschwindet wenn x_0 eine Nullstelle oder eine Lösung von $f(x)$ ist.

$$r(x) = \frac{a_3 \cdot x_0^3 + a_2 \cdot x_0^2 + a_1 \cdot x_0 + a_0}{x - x_0} = \frac{f(x_0)}{x - x_0} \quad (1.60)$$

Horner-Schema

	a_3	a_2	a_1	a_0
x_0		$a_3 \cdot x_0$	$(a_2 + a_3 \cdot x_0) \cdot x_0$	$(a_1 + a_2 \cdot x_0 + a_3 \cdot x_0^2) \cdot x_0$
	a_3	$a_2 + a_3 \cdot x_0$	$a_1 + a_2 \cdot x_0 + a_3 \cdot x_0^2$	$a_0 + a_1 \cdot x_0 + a_2 \cdot x_0^2 + a_3 \cdot x_0^3$
	b_2	b_1	b_0	$f(x_0)$

1.2.6 Wurzelgleichung

Wurzelgleichungen löst man durch quadrieren oder mit Hilfe von Substitution. Bei Wurzelgleichung ist zu beachten, dass quadrieren keine äquivalente Umformung ist und das Ergebnis überprüft werden muss.

1.2.7 Ungleichungen

- Beidseitiges Subtrahieren oder Addieren ist möglich
- Die Ungleichung darf mit einer beliebigen positiven Zahl multipliziert oder dividiert werden
- Die Ungleichung darf mit einer beliebigen negativen Zahl multipliziert oder dividiert werden, wenn man gleichzeitig das Relationszeichen umdreht.

1.2.8 Betragsgleichungen

Betragsgleichungen löst man mithilfe der Fallunterscheidung. Dabei wird einmal davon ausgegangen, dass der Term innerhalb des Betrags einmal positiv und einmal negativ sein kann.

$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad (1.61)$$

1.2.9 Interpolationspolynome

Entwicklung einer Polynomfunktion anhand von $n + 1$ Kurvenpunkten.

- Möglichkeit** Aufstellen von $n + 1$ Gleichungen und Ermitteln der Kurvenfunktion mithilfe des Gauß Algorithmus.
- Möglichkeit** Interpolationspolynome von Newton

Interpolationspolynome von Newton

Gegeben sind die Punkte $P_0 = (x_0; y_0)$, $P_1 = (x_1; y_1)$, $P_2 = (x_2; y_2)$, ..., $P_n = (x_n; y_n)$, damit lautet die Funktion wie folgt:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \quad (1.62)$$

$$+ a_3 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \quad (1.63)$$

$$+ \dots \quad (1.64)$$

$$+ a_n \cdot (x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}) \quad (1.65)$$

Die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ lassen sich mithilfe des Differenzenschemas berechnen. Dabei ist $y_0 = a_0$, $[x_0, x_1] = a_1$, $[x_0, x_1, x_2] = a_2$ usw.

Differenzenschema

k	x_k	y_k	1	2	3	...
0	x_0	y_0				
			$[x_0, x_1]$			
1	x_1	y_1		$[x_0, x_1, x_2]$		
			$[x_1, x_2]$		$[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
2	x_2	y_2		$[x_1, x_2, x_3]$...
			$[x_2, x_3]$		$[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
3	x_3	y_3		$[x_2, x_3, x_4]$...
			
⋮	⋮	⋮				
n	x_n	y_n				

Rechenregel für dividierte Differenzen

$$\begin{aligned}
 [x_0, x_1] &= \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} & [x_0, x_1, x_2] &= \frac{[x_0, x_1] - [x_1, x_2]}{x_0 - x_2} \\
 [x_1, x_2] &= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} & [x_1, x_2, x_3] &= \frac{[x_1, x_2] - [x_2, x_3]}{x_1 - x_3} \\
 &\vdots & &\vdots
 \end{aligned} \quad (1.66) \quad (1.67)$$

$$\begin{aligned}
 [x_0, x_1, x_2, x_3] &= \frac{[x_0, x_1, x_2] - [x_1, x_2, x_3]}{x_0 - x_3} \\
 [x_1, x_2, x_3, x_4] &= \frac{[x_1, x_2, x_3] - [x_2, x_3, x_4]}{x_1 - x_4} \\
 &\vdots
 \end{aligned} \quad (1.68)$$

1.3 Komplexe Zahlen

Grundlagen

$$j = \sqrt{-1} \quad (1.69)$$

$$j^2 = -1 \quad (1.70)$$

1.3.1 Darstellungsformen

Kartesische Form

$[x] = :$ Realanteil

$[y] = :$ Imaginäranteil

$$z = x + jy \quad (1.71)$$

Trigometrische Form

$[r] = :$ Betrag

$[\varphi] = :$ Argument

$$z = r (\cos \varphi + j \sin \varphi) \quad (1.72)$$

Exponentialform

$$z = r e^{j\varphi} \quad (1.73)$$

Umrechnung

$$x = r \cos \varphi \quad (1.74)$$

$$y = r \sin \varphi \quad (1.75)$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.76)$$

Umrechnung Winkel

$$\tan \varphi = \frac{y}{x} \quad (1.77)$$

$$\varphi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{Quadrant I} \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{Quadrant II, III} \\ \arctan \frac{y}{x} + 2\pi & \text{Quadrant IV} \end{cases} \quad (1.78)$$

1.3.2 Rechenregeln

Konjugiert komplexe Zahl

$[\bar{z}] = :$ konjugierte Komplexe

$$\bar{\bar{z}} = z^* \quad (1.79)$$

$$\bar{z} = \overline{x + jy} \quad (1.80)$$

$$= x - jy \quad (1.81)$$

$$\bar{z} = \overline{r (\cos \varphi + j \sin \varphi)} \quad (1.82)$$

$$= r (\cos \varphi - j \sin \varphi) \quad (1.83)$$

$$\bar{z} = \overline{r e^{j\varphi}} \quad (1.84)$$

$$= r e^{-j\varphi} \quad (1.85)$$

Addition und Subtraktion

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + jy_1) \pm (x_2 + jy_2) \quad (1.86)$$

$$= (x_1 \pm x_2) + j(y_1 \pm y_2) \quad (1.87)$$

Multiplikation

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + jy_1) \cdot (x_2 + jy_2) \quad (1.88)$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1) \quad (1.89)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 (\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1) \cdot r_2 (\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2) \quad (1.90)$$

$$= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \quad (1.91)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{j\varphi_1} \cdot r_2 e^{j\varphi_2} \quad (1.92)$$

$$= r_1 r_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad (1.93)$$

Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} \quad (1.94)$$

$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (1.95)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2)} \quad (1.96)$$

$$= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad (1.97)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{j\varphi_1}}{r_2 e^{j\varphi_2}} \quad (1.98)$$

$$= \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (1.99)$$

Potenzieren

$$z^n = \left(r_1 \left(\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1\right)\right)^n$$
$$= r_1^n \left(\cos(n \varphi_1) + j \sin(n \varphi_1)\right)$$
$$z^n = \left(r_1 e^{j \varphi_1}\right)^n$$
$$= r_1^n e^{j n \varphi_1}$$

(1.100)

(1.101)

(1.102)

(1.103)

Wurzelziehen

Es entstehen n Lösungen
Für k muss nacheinander $0, 1, \dots, n-1$ eingesetzt werden

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r_1 \left(\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1\right)}$$
$$\omega_k = \sqrt[n]{r_1} \left(\cos \left(\frac{\varphi_1 + 2k\pi}{n}\right) + j \sin \left(\frac{\varphi_1 + 2k\pi}{n}\right)\right)$$
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r_1} e^{j \varphi_1}$$
$$\omega_k = \sqrt[n]{r_1} e^{j \left(\frac{\varphi_1 + 2k\pi}{n}\right)}$$

(1.104)

(1.105)

(1.106)

(1.107)

1.4 Differentialrechnung

Potenzfunktion

$$x^n$$
$$n \cdot x^{n-1}$$

(1.108)

Exponentialfunktionen

$$e^x$$
$$a^x$$

$$e^x$$

$$\ln a \cdot a^x$$

(1.109)

(1.110)

Logarithmusfunktionen

$$\ln x$$
$$\log_a x$$

$$\frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{(\ln a) \cdot x}$$

(1.111)

(1.112)

Trigonometrische Funktionen

$$\sin x$$
$$\cos x$$
$$\tan x$$
$$\tan x$$

$$\cos x$$

$$-\sin x$$

$$\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1 + \tan^2 x$$

(1.113)

(1.114)

(1.115)

(1.116)

Arcusfunktionen

$$\arcsin x$$
$$\arccos x$$
$$\arctan x$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{1}{1-x^2}$$

(1.117)

(1.118)

(1.119)

Hyperbelfunktionen

$$\sinh x$$
$$\cosh x$$
$$\tanh x$$
$$\tanh x$$

$$\cosh x$$

$$\sinh x$$

$$\frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$1 + \tanh^2 x$$

(1.120)

(1.121)

(1.122)

(1.123)

Faktorregel

$$\frac{d}{dx} (C \cdot f(x)) = C \cdot f'(x)$$

(1.124)

Summenregel

$$\frac{d}{dx} (g(x) + f(x)) = g'(x) + f'(x)$$

(1.125)

Produktregel

$$\frac{d}{dx} (g(x) \cdot f(x)) = g'(x) \cdot f(x) + g(x) \cdot f'(x)$$
$$\frac{d}{dx} (h(x) \cdot g(x) \cdot f(x)) = h' \cdot g \cdot f + h \cdot g' \cdot f + h \cdot g \cdot f'$$

(1.126)

(1.127)

Quotientenregel

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{g(x)}{f(x)}\right) = \frac{g'(x) \cdot f(x) - g(x) \cdot f'(x)}{f(x)^2}$$

(1.128)

Kettenregel

$$\frac{d}{dx} (g(f(x))) = g'(f) \cdot f'(x)$$

(1.129)

Logarithmische Ableitungen

$$\frac{d}{dx} y = f(x) \quad (1.130)$$

$$\frac{1}{y} y' = \frac{d}{dx} \ln f(x) \quad (1.131)$$

1.5 Vektorrechnung

1.5.1 Grundlagen

Darstellung

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z \quad (1.132)$$

$$= a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z \quad (1.133)$$

$$= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad (1.134)$$

2 Punkt Vektor

$$\overrightarrow{P_1 P_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} \quad (1.135)$$

Betrag

$$|\vec{a}| = a \quad (1.136)$$

$$= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (1.137)$$

$$= \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}} \quad (1.138)$$

Richtungswinkel

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} \quad (1.139)$$

$$\cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} \quad (1.140)$$

$$\cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} \quad (1.141)$$

$$1 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \quad (1.142)$$

1.5.2 Vektoroperationen

Addition und Subtraktion

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{pmatrix} \quad (1.143)$$

Multiplikation mit einem Skalar

$$a \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a b_x \\ a b_y \\ a b_z \end{pmatrix} \quad (1.144)$$

Einheitsvektor

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \begin{pmatrix} a_x/|\vec{a}| \\ a_y/|\vec{a}| \\ a_z/|\vec{a}| \end{pmatrix} \quad (1.145)$$

Skalarprodukt

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (1.146)$$

$$= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) \quad (1.147)$$

Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \quad (1.148)$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| \text{ Fläche des Parallelograms } \vec{a}, \vec{b}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a} \wedge \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (1.149)$$

Spatprodukt

$$[\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = \vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) \quad (1.150)$$

$$= a_x(b_y c_z - b_z c_y) + a_y(b_z c_x - b_x c_z) + a_z(b_x c_y - b_y c_x) \quad (1.151)$$

$$\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) \text{ Volumen des Parallelepiped } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$$

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad (1.152)$$

Schnittwinkel

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad (1.153)$$

Projektion

$$\vec{a}_b = \left(\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \right) \vec{a} = (\vec{b} \circ \vec{e}_a) \vec{e}_a \quad (1.154)$$

1.5.3 Geraden**Geradengleichung**

$[\vec{r}_1]$ = : Ortsvektor (Verschiebung von Ursprung)

$[\vec{a}]$ = : Richtungsvektor

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_1 + t \vec{a} \quad (1.155)$$

$$= \vec{r}_1 + t(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad (1.156)$$

2 Physik

2.1 Kinematik

2.1.1 Geradlinige Bewegungen(Translation)

$$a(t) = a_0 = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s} \quad (2.1)$$

$$v(t) = a_0 \cdot t + v_0 = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \quad (2.2)$$

$$s(t) = \frac{1}{2} a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0 \quad (2.3)$$

2.1.2 Kreisbewegungen(Rotation)

Winkelgrößen

$[\alpha] = \text{rad s}^{-2}$: Winkelbeschleunigung

$[\omega] = \text{rad s}^{-1}$: Winkelgeschwindigkeit

$[\varphi] = \text{rad}$: Drehwinkel

$$\alpha(t) = \alpha_0 = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \quad (2.4)$$

$$\omega(t) = \alpha_0 \cdot t + \omega_0 = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \quad (2.5)$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} \alpha_0 \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \varphi_0 \quad (2.6)$$

Bahngrößen

$[a_t] = \text{m s}^{-2}$: Beschleunigung(tan)

$[v] = \text{m s}^{-1}$: Geschwindigkeit

$[s] = \text{m}$: Weg

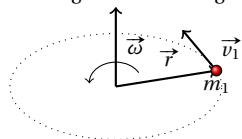
$$a_t(t) = a_0 = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s} \quad (2.7)$$

$$v(t) = a_0 \cdot t + v_0 = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \quad (2.8)$$

$$s(t) = \frac{1}{2} a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0 \quad (2.9)$$

Umrechnung

Winkelgrößen \leftrightarrow Bahngrößen



$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r} \quad (2.10)$$

$$a_t = \alpha \cdot r \quad \alpha \perp r \quad (2.11)$$

$$\vec{\alpha} = \vec{\omega} \times \vec{a}_t \quad (2.12)$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (2.13)$$

$$v = \omega \cdot r \quad \omega \perp r \quad (2.14)$$

$$\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{v} \quad (2.15)$$

$$s = \varphi \cdot r \quad (2.16)$$

Kreisfrequenz

$[T] = \text{s}$: Periodendauer

$[n] = \text{s}^{-1}$: Drehzahl

$[f] = \text{Hz}$: Frequenz

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} \quad (2.17)$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot n \quad (2.18)$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot f \quad (2.19)$$

Radialbeschleunigung

$[a_r] = \text{m s}^{-2}$: Radialbeschleunigung

$$a_r = \frac{v^2}{r} \quad (2.20)$$

$$= v \cdot \omega \quad (2.21)$$

$$= \omega^2 \cdot r \quad (2.22)$$

Umdrehungen

$[N] = 1$: Umdrehungen

$$N = \frac{\omega_0 \cdot t}{2 \cdot \pi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{2 \cdot \pi} \cdot t^2 \quad (2.23)$$

$$= n_0 \cdot t + \frac{\alpha}{4 \cdot \pi} \cdot t^2 \quad (2.24)$$

2.2 Dynamik

2.2.1 Geradlinig(Translation)

Kraft

$[F] = \text{N}$: Kraft

$[m] = \text{kg}$: Masse

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (2.25)$$

$$\vec{F}_{\text{Tr}} = -m \cdot \vec{a} \quad (2.26)$$

Impuls

$[p] = \text{kg m s}^{-1}$: Impuls

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \quad (2.27)$$

Kraftstoß**Arbeit**[W] = kg m² s⁻²: Arbeit**kin. Energie**[E] = kg m² s⁻²: Energie**Hubarbeit**[g] = m s⁻²: Fallbeschleunigung**Leistung**[g] = kg m² s⁻³: Leistung

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \cdot \frac{dm}{dt} \quad (2.28)$$

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{\vec{p}_2}^{\vec{p}_1} d\vec{p} = \int_0^t \vec{F} dt \quad (2.29)$$

$$W = - \int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} \vec{F}_{\text{tr}} \circ d\vec{s} \quad (2.30)$$

$$= \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}_1} m \vec{v} \circ d\vec{v} = \frac{1}{2} m (v_1^2 - v_0^2) \quad (2.31)$$

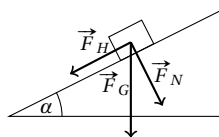
$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 \quad (2.32)$$

$$W_{\text{hub}} = m g h \quad (2.33)$$

$$P = \vec{F} \circ \vec{v} = \frac{dW}{dt} = \dot{W} \quad (2.34)$$

2.2.2 Drehbewegung(Rotation)**Massenträgheitsmoment**[J] = kg m²: Massenträgheitsmoment**Drehimpuls**[L] = kg m² rad s⁻¹: Drehimpuls**Drehmoment**

[M] = N m: Drehmoment

kinetische Energie**Arbeit****Leistung****Zentripetalkraft****2.2.3 Schiefe Ebene****Kräfte**

$$\vec{F}_N = \vec{F}_G \cos \alpha \quad (2.45)$$

$$\vec{F}_H = \vec{F}_G \sin \alpha \quad (2.46)$$

2.2.4 Reibung**Reibungskräfte**[F_N] = N: Normalkraft[F_R] = N: Reibungskraft

[μ] = 1: Reibungskoeffizient

$$F_R = \mu \cdot F_N \quad (2.47)$$

Rollreibung

$[F_N] = \text{N}$: Normalkraft
 $[f] = 1$: Rollreibungstahl
 $[M] = 1$: Drehmoment
 $[r] = \text{m}$: Radius

$$M = f \cdot F_N \quad (2.48)$$

$$F_R = \frac{f}{r} \cdot F_N \quad (2.49)$$

2.2.5 Feder**Hookesches Gesetz**

$[k] = \text{N m}^{-1}$: Federkonstante
 $[D] = \text{N m rad}^{-1}$: Winkelrichtgröße

$$F = -kx \quad (2.50)$$

$$M = D\varphi \quad (2.51)$$

$$W = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} F \, dx = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} kx \, dx \quad (2.52)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot k \cdot (x_{\max}^2 - x_{\min}^2) \quad (2.53)$$

Spannungsenergie**2.2.6 Elastischer Stoß****Energieerhaltung**

$$\text{Energie vor den Stoß} = \text{Energie nach den Stoß} \\ \sum E_{\text{kin}} = \sum E'_{\text{kin}} \quad (2.54)$$

Impulserhaltung

$$\text{Impuls vor den Stoß} = \text{Impuls nach den Stoß} \\ \sum m \vec{v} = \sum m \vec{v}' \quad (2.55)$$

Zentraler, elastischer Stoß

(Energie und Impuls)

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \quad (2.56)$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \quad (2.57)$$

Zentraler, elastischer Stoß

(Geschwindigkeit nach dem Stoß)

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \quad (2.58)$$

$$v_1' = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad (2.59)$$

2.2.7 Unelastischer Stoß**Energieerhaltung**

$$\text{Energie vor den Stoß} = \text{Energie nach den Stoß} + \text{Arbeit} \\ \sum E_{\text{kin}} = \sum E'_{\text{kin}} + \Delta W \quad (2.60)$$

Impulserhaltung

$$\text{Impuls vor den Stoß} = \text{Impuls nach den Stoß} \\ \sum m \vec{v} = \sum m \vec{v}' \quad (2.61)$$

Total unelastischer Stoß

(Energie und Impuls)

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v'^2 + \Delta W \quad (2.62)$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v' \quad (2.63)$$

Total unelastischer Stoß

(Geschwindigkeit nach dem Stoß)

$$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (2.64)$$

Total unelastischer Stoß

(Energieverlust)

$$\Delta W = \frac{m_1 \cdot m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 \quad (2.65)$$

2.2.8 Drehimpulse**Drehimpulserhaltungssatz**

$$\text{Drehimpuls zur Zeit 1} = \text{Drehimpuls zur Zeit 2} \quad (2.66)$$

$$\sum \vec{L} = \sum \vec{L}' \quad (2.67)$$

Kupplung Zweier Drehkörper

(Winkelgeschwindigkeit nach dem Kuppeln und Energieverlust)

$$\vec{\omega}' = \frac{J_0 \vec{\omega}_0 + J_1 \vec{\omega}_1}{J_1 + J_2} \quad (2.68)$$

$$W = \frac{J_0 \cdot J_1}{2(J_0 + J_1)} (\omega_0 - \omega_1)^2 \quad (2.69)$$

2.2.9 Rotierendes Bezugssystem

Zentrifugalkraft

$$\vec{F}_Z = F_r \cdot \vec{e}_r = -m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -m \vec{\omega} \times \vec{v} \quad (2.70)$$

$$F_Z = -m \frac{v^2}{r} = -m \omega^2 r \quad (2.71)$$

Corioliskraft

$$\vec{F}_C = -2m \vec{\omega} \times \vec{v} \quad (2.72)$$

2.3 Schwerpunkt

Schwerpunkt mehrere Punktmassen

$$\vec{r}_{\text{Sp}} = \frac{\sum \vec{r}_i m_i}{\sum m_i} \quad (2.73)$$

Allgemein Schwerpunkt

$$\vec{r}_{\text{Sp}} = \frac{\int \vec{r} \, dm}{\int dm} \quad (2.74)$$

Schwerpunkt (Kartesische)

$[\rho] = \text{kg m}^{-3}$: Dichte

$$x_{\text{Sp}} = \frac{\int_z \int_y \int_x x \rho \, dx \, dy \, dz}{\int_z \int_y \int_x \rho \, dx \, dy \, dz} \quad (2.75)$$

$$y_{\text{Sp}} = \frac{\int_z \int_y \int_x y \rho \, dx \, dy \, dz}{\int_z \int_y \int_x \rho \, dx \, dy \, dz} \quad (2.76)$$

$$z_{\text{Sp}} = \frac{\int_z \int_y \int_x z \rho \, dx \, dy \, dz}{\int_z \int_y \int_x \rho \, dx \, dy \, dz} \quad (2.77)$$

Schwerpunkt (Zylinder)

$$r_{\text{Sp}} = \frac{\int_z \int_\varphi \int_r r^2 \rho \, dr \, d\varphi \, dz}{\int_z \int_\varphi \int_r r \rho \, dr \, d\varphi \, dz} \quad (2.78)$$

$$\varphi_{\text{Sp}} = \frac{\int_z \int_\varphi \int_r \varphi r \rho \, dr \, d\varphi \, dz}{\int_z \int_\varphi \int_r r \rho \, dr \, d\varphi \, dz} \quad (2.79)$$

$$z_{\text{Sp}} = \frac{\int_z \int_\varphi \int_r z r \rho \, dr \, d\varphi \, dz}{\int_z \int_\varphi \int_r r \rho \, dr \, d\varphi \, dz} \quad (2.80)$$

$$x = r \cos \varphi \quad (2.81)$$

$$y = r \sin \varphi \quad (2.82)$$

$$z = z \quad (2.83)$$

2.4 Trägheitsmoment

Allgemein

$[\rho] = \text{kg m}^{-3}$: Dichte

$[J] = \text{kg m}^2$: Massenträgheitsmoment

$$J = \sum m_i r_i^2 \quad (2.84)$$

$$J = \int r^2 \, dm \quad (2.85)$$

$$J = \int_z \int_\varphi \int_r r^3 \rho \, dr \, d\varphi \, dz \quad (2.86)$$

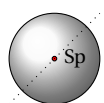
Satz von Steiner

$[J_s] = \text{kg m}^2$: Mtm am der alten Achse

$[J_x] = \text{kg m}^2$: Mtm am der neuen Achse ($J_x \parallel J_s$)

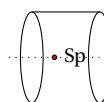
$$J_x = m r^2 + J_s \quad (2.87)$$

Trägheitsmoment Kugel



$$J_{\text{Sp}} = \frac{2}{5} m r^2 \quad (2.88)$$

Trägheitsmoment Zylinder



$$J_{\text{Sp}} = \frac{1}{2} m r^2 \quad (2.89)$$

Trägheitsmoment Kreisring

$$J_{\text{Sp}} = m r^2 \quad (2.90)$$

Trägheitsmoment Stab

$$J_{\text{Sp}} = \frac{1}{12} m l^2 \quad (2.91)$$

2.5 Elastizitätslehre**Spannung**

$[\sigma] = \text{N m}^{-2}$: Normalspannung

$[\tau] = \text{N m}^{-2}$: Schubspannung

$[E] = \text{N m}^{-2}$: Elastizitätsmodul

$[F_n] = \text{N}$: Normalkraft ($\vec{F} \parallel \vec{A}$)

$[\varepsilon] = 1$: Dehnung

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{F}_n}{dA} \quad (2.92)$$

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\Delta l}{l} \quad (2.93)$$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{F}_t}{dA} \quad (2.94)$$

Schubmodul

$[G] = \text{N m}^{-2}$: Schubmodul

$[\varphi] = \text{rad}$: Scherwinkel

$$G = \frac{\tau}{\varphi} \quad (2.95)$$

Drillung

$[\psi] = \text{rad m}^{-1}$: Drillung

$[\varphi] = \text{rad}$: Torsionswinkel

$[l] = \text{m}$: Länge des Drehkörpers

$[W_t] = \text{m}^3$: Widerstandsmoment

$$\psi = \frac{d\varphi}{dl} = \frac{W_t}{G \cdot J_p} \tau = \frac{M_t}{G \cdot J_p} \quad (2.96)$$

Polares Flächenträgheitsmoment

$[J_p] = \text{m}^4$: Polares Flächenträgheitsmoment

$$J_p = \int r^2 dA = \int_{\varphi} \int_r r^3 dr d\varphi \quad (2.97)$$

Verformungsarbeit

$$W = V \int \sigma(\varepsilon) d\varepsilon \quad (2.98)$$

2.6 Schwingungen**Harmonische Schwingung**

$[A] = 1$: Amplitude

$[\omega] = \text{rad s}^{-1}$: Kreisfrequenz

$[\varphi] = \text{rad}$: Phasenverschiebung

$$u(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (2.99)$$

2.6.1 Ungedämpfte Schwingungen**Federpendel**

$[\hat{x}] = \text{m}$: Amplitude

$[k] = \text{kg s}^{-2}$: Federkonstante

$[\omega] = \text{rad s}^{-1}$: Eigenfrequenz

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m} x \quad (2.100)$$

$$x(t) = \hat{x} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (2.101)$$

$$\dot{x}(t) = -\hat{x} \omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (2.102)$$

$$\ddot{x}(t) = -\hat{x} \omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (2.103)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.104)$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.105)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (2.106)$$

Mathematisches Pendel

$[\varphi] = \text{rad}$: Auslenkwinkel

$[\hat{\varphi}] = \text{rad}$: Amplitude

$[g] = \text{m s}^{-2}$: Fallbeschleunigung

$[\omega] = \text{rad s}^{-1}$: Eigenfrequenz

$[l] = \text{m}$: Pendellänge

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \varphi \quad (2.107)$$

$$\varphi(t) = \hat{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (2.108)$$

$$\dot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi} \omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (2.109)$$

$$\ddot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi} \omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (2.110)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (2.111)$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (2.112)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2.113)$$

Physikalisches Pendel

$[\varphi] = \text{rad}$: Auslenkwinkel
 $[\hat{\varphi}] = \text{rad}$: Amplitude
 $[g] = \text{m s}^{-2}$: Fallbeschleunigung
 $[\omega] = \text{rad s}^{-1}$: Eigenfrequenz
 $[l] = \text{m}$: Abstand Drehachse A zum SP
 $[J_A] = \text{kg m}^2$: Trägheitsmoment um Achse A

$$\ddot{\varphi} = -\frac{lmg}{J_A}\varphi \quad (2.114)$$

$$\varphi(t) = \hat{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (2.115)$$

$$\dot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi} \omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (2.116)$$

$$\ddot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi} \omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (2.117)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J_A}} \quad (2.118)$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgl}{J_A}} \quad (2.119)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{mgl}} \quad (2.120)$$

Torionsschwingung

$[\varphi] = \text{rad}$: Torisionswinkel
 $[\hat{\varphi}] = \text{rad}$: Amplitude
 $[\omega] = \text{rad s}^{-1}$: Eigenfrequenz
 $[D] = \text{rad s}^{-1}$: Winkelrichtgröße
 $[J_A] = \text{kg m}^2$: Trägheitsmoment um Achse A

$$\ddot{\varphi} = -\frac{D}{J_A}\varphi \quad (2.121)$$

$$\varphi(t) = \hat{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (2.122)$$

$$\dot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi} \omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (2.123)$$

$$\ddot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi} \omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (2.124)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{J_A}} \quad (2.125)$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{J_A}} \quad (2.126)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{D}} \quad (2.127)$$

Flüssigkeitsspendel

$[y] = \text{m}$: Auslenkung
 $[\hat{y}] = \text{m}$: Amplitude
 $[\omega] = \text{rad s}^{-1}$: Eigenfrequenz
 $[\rho] = \text{kg m}^{-2}$: Dichte der Flüssigkeit
 $[l] = \text{m}$: Länge der Flüssigkeitsseule
 $[A] = \text{m}^2$: Querschnittsfläche

$$\ddot{y} = -\frac{2A\rho g}{m}y \quad (2.128)$$

$$\varphi(t) = \hat{y} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (2.129)$$

$$\dot{\varphi}(t) = -\hat{y} \omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (2.130)$$

$$\ddot{\varphi}(t) = -\hat{y} \omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (2.131)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2A\rho g}{m}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \quad (2.132)$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2g}{l}} \quad (2.133)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}} \quad (2.134)$$

Elektrischer Schwingkreis

$[q] = \text{As}$: Ladung
 $[\hat{q}] = \text{As}$: Amplitude, max. Ladung Kondensator
 $[L] = \text{Vs A}^{-1}$: Induktivität
 $[C] = \text{As V}^{-1}$: Kapazität

$$0 = L\ddot{Q} + \frac{Q}{C} \quad (2.135)$$

$$q(t) = \hat{Q} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (2.136)$$

$$\dot{q}(t) = -\hat{Q} \omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (2.137)$$

$$\ddot{q}(t) = -\hat{Q} \omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (2.138)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (2.139)$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (2.140)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (2.141)$$

2.6.2 Gedämpfte Schwingungen**Schwingungsgleichung mit Reibung**

$[k] = \text{kg s}^{-2}$: Richtgröße
 $[F_R] = \text{N}$: Reibungskraft
 $[x] = \text{m}$: Auslenkung

$$m\ddot{x} = -kx + F_R \quad (2.142)$$

Coulomb-Reibung

$[k] = \text{kg s}^{-2}$: Richtgröße
 $[F_N] = \text{N}$: Normalkraft
 $[F_R] = \text{N}$: Reibungskraft
 $[\mu] = 1$: Reibungskoeffizient
 $[\dot{x}] = \text{m s}^{-1}$: Geschwindigkeit

$$F_R = -\text{sgn}(\dot{x})\mu F_N \quad (2.143)$$

$$0 = m\ddot{x} + kx + \text{sgn}(\dot{x})\mu F_N \quad (2.144)$$

$$\text{sgn}(\dot{x}) = \begin{cases} -1 & \dot{x} < 0 \\ 0 & \dot{x} = 0 \\ +1 & \dot{x} > 0 \end{cases} \quad (2.145)$$

Gleitreibung(Nicht Behandelt)

[k] = kgs⁻²: Richtgröße
[F_N] = N: Normalkraft
[μ] = 1: Reibungskoeffizient
[x₀] = m: Start Amplitude
[x₁] = m: End Amplitude

$$x(t) = -(\hat{x}_0 - \hat{x}_1) \cos(\omega t) - \hat{x}_1 \qquad 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \tag{2.146}$$

$$x(t) = -(\hat{x}_0 - 3\hat{x}_1) \cos(\omega t) + \hat{x}_1 \qquad \frac{T}{2} \leq t \leq T \tag{2.147}$$

$$\hat{x}_1 = \frac{\mu F_N}{k} \tag{2.148}$$

Viskose Reibung

[k] = kgs⁻²: Richtgröße
[x̂] = m: Amplitude
[ω] = rad s⁻¹: Eigenfrequenz
[δ] = s⁻¹: Abklingkoeffizient
[b] = kgs⁻¹: Dämpfungskonstante
[D] = 1: Dämpfungsgrad
[ω_D] = rad s⁻¹: Gedämpfte Kreisfrequenz
[δ̂] = kgs⁻¹: logarithmischen Dekrement
[d] = 1: Verlustfaktor
[Q] = 1: Güte

$$0 = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx \tag{2.149}$$

$$x(t) = \hat{x} e^{-\delta t} e^{\pm j \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t} \tag{2.150}$$

$$x(t) = \hat{x} e^{-\delta t} e^{\pm j \omega_0 \sqrt{1 - D^2} t} \tag{2.151}$$

$$\delta = \frac{b}{2m} \tag{2.152}$$

$$D = \frac{\delta}{\omega_0} \tag{2.153}$$

$$D = \frac{b}{2} \frac{1}{\sqrt{mk}} \tag{2.154}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.155}$$

$$\Lambda = \ln \left(\frac{x(t)}{x(t+T)} \right) \tag{2.156}$$

$$\Lambda = \delta T \tag{2.157}$$

$$\omega_D = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m} \right)^2} \tag{2.158}$$

$$d = 2D \tag{2.159}$$

$$Q = \frac{1}{d} \tag{2.160}$$

Viskose Reibung

Schwingfall. δ < ω₀

$$x(t) = \hat{x} e^{-\delta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t + \varphi) \tag{2.161}$$

Viskose Reibung

Aperiodischer Grenzfall δ = ω₀

$$x(t) = \hat{x} e^{-\delta t} (1 - \delta t) \tag{2.162}$$

Viskose Reibung

Kriechfall δ > ω₀

$$x(t) = \hat{x} e^{-\delta t} e^{\pm j \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t} \tag{2.163}$$

2.7 Fluidmechanik

Statischer Druck

[p] = Pa: Druck
[p] = N: Kraft (F_N ⊥ A)
[A] = m²: Fläche

$$p = \frac{dF_N}{dA} \tag{2.164}$$

Dynamischer Druck

[p] = Pa: Druck
[v] = ms⁻¹: Geschwindigkeit des Mediums
[ρ] = kgm⁻³: Dichte

$$p = \frac{1}{2} \rho v^2 \tag{2.165}$$

Schwere Druck

[p] = Pa: Druck
[ρ] = kgm⁻³: Dichte
[V] = m³: Volumen
[A] = m²: Fläche
[h] = m: Tiefe (Abstand von Oben)

$$p = \frac{\rho V g}{A} \tag{2.166}$$

$$= h \rho g \tag{2.167}$$

Volumenstrom

[V̇] = m³ s⁻¹: Volumenstrom

$$\dot{V} = v A \tag{2.168}$$

$$= \iint_A \vec{v} d\vec{A} \tag{2.169}$$

$$= \frac{dV}{dt} \tag{2.170}$$

$$= Q \tag{2.171}$$

Massenstrom

$[\dot{m}] = \text{kg s}^{-1}$: Massenstrom

$[j] = \text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$: Massenstromdichte

$$\dot{m} = j A \quad (2.172)$$

$$= \iint_A \vec{j} \, d\vec{A} \quad (2.173)$$

$$= \frac{dm}{dt} \quad (2.174)$$

Kompressibilität

$[\Delta V] = \text{m}^3$: Volumenabnahme

$[\Delta p] = \text{Pa}$: Druckzunahme

$[\kappa] = \text{Pa}^{-1}$: Kompressibilität

$$\kappa = \frac{\Delta V}{\Delta p V} \quad (2.175)$$

Volumenausdehnungskoeffizient

$[\Delta T] = \text{K}$: Temperaturänderung

$[\gamma] = \text{K}^{-1}$: Volumenausdehnungskoeffizient

$$\frac{\Delta V}{V} = \gamma \Delta T \quad (2.176)$$

Barometrische Höhenformel

Luftdruck in der Atmosphäre

$[p_0] = \text{Pa}$: Druck am Boden

$[\rho_0] = \text{kg m}^{-3}$: Dichte am Boden

$[h] = \text{m}$: Tiefe (Abstand von Boden)

$$p = p_0 e^{-Ch} \quad (2.177)$$

$$C = \frac{\rho_0 g}{p_0} \quad (2.178)$$

Auftrieb

$[F_A] = \text{N}$: Kraft

$[\rho_V] = \text{kg m}^{-3}$: Dichte des verdrängten Stoffes

$[\rho_M] = \text{kg m}^{-3}$: Dichte des Stoffes

$[V] = \text{m}^3$: Volumen das verdrängten wird

$$\vec{F}_A = -\rho_V \vec{g} V \quad (2.179)$$

$$= -\frac{\rho_V}{\rho_M} \vec{F}_G \quad (2.180)$$

Bernoulli Gleichung

$[\rho] = \text{kg m}^{-3}$: Dichte

$[v] = \text{m s}^{-1}$: Geschwindigkeit

$[h] = \text{m}$: Tiefe (Abstand von Oben)

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = \text{const} \quad (2.181)$$