

Formelsammlung für Alles

Matthias Springstein

13. Juli 2011

Inhaltsverzeichnis

1	Mathe	5
1.1	Winkelfunktionen	5
1.2	Komplexe Zahlen	5
1.2.1	Darstellungsformen	5
1.2.2	Rechenregeln	6
1.3	Vektorrechnung	7
1.3.1	Grundlagen	7
1.3.2	Vektoroperationen	7
1.3.3	Geraden	8
1.3.4	Ebenen	8
1.4	Differentialrechnung	9
1.4.1	Erste Ableitung der elementaren Funktionen	9
1.4.2	Rechenregeln	9
1.4.3	Fehlerrechnung	10
1.4.4	Linearisierung und Taylor-Polynome	10
1.4.5	Grenzwertregel von Bernoulli und de l'Hospital	10
1.4.6	Differentielle Kurvenuntersuchung	10
1.5	Differential- und Integralrechnung mit mehreren Variablen	11
1.5.1	Differentialrechnung	11
1.5.2	Mehrfachintegral	12
1.6	Differentialgleichungen	13
1.6.1	DG 1. Ordnung	13
1.6.2	Lineare DG 2. Ordnung	13
1.7	Reihen	14
1.7.1	Geometrische Folge	14
1.7.2	Harmonische Reihe	14
1.7.3	Konvergenz	14
1.7.4	Bekannte konvergente Reihen	15
1.8	Funktionsreihen	15
1.8.1	Potenzreihen	15
1.8.2	Konvergenz	15
1.8.3	Bekannte Potenzreihen	15
1.8.4	Fourier Reihen	16
2	Physik	17
2.1	Vorsätze	17
2.2	Kinematik	17
2.2.1	Geradlinige Bewegungen(Translation)	17
2.2.2	Kreisbewegungen(Rotation)	17
2.3	Dynamik	18
2.3.1	Geradlinig(Translation)	18
2.3.2	Drehbewegung(Rotation)	18
2.3.3	Schiefe Ebene	19
2.3.4	Reibung	19
2.3.5	Feder	19
2.3.6	Elastischer Stoß	19
2.3.7	Unelastischer Stoß	20
2.3.8	Drehimpulse	20
2.3.9	Rotierendes Bezugssystem	20
2.4	Schwerpunkt	20
2.5	Trägheitsmoment	21
2.6	Elastizitätslehre	21
2.7	Schwingungen	22
2.7.1	Ungedämpfte Schwingungen	22
2.7.2	Gedämpfte Schwingungen	23
2.8	Fluidmechanik	24
2.8.1	Ohne Reibung	24
2.8.2	Laminare Reibung	25
2.9	Gravitation	25
2.10	Elektrisches Feld	26
2.10.1	Elektrostatik	26
2.10.2	Elektrodynamik	27
2.11	Magnetisches Feld	27
2.12	Thermodynamik	27
2.12.1	Dehnung	27
2.12.2	Wärme	27
2.12.3	Zustandsänderung des idealen Gases	28
2.13	Optik	30
2.13.1	Brechung	30
2.13.2	Hohlspiegel	30
2.13.3	Linse	30
2.13.4	IWL	31
3	Elektrotechnik	33
3.1	Grundgrößen	33

3.2	Lineare Quellen	33
3.3	Kirchhoffsche Gesetze	33
3.4	Wechselspannung	34
3.5	Sinusspannung	34
	3.5.1 Widerstand	35
3.6	Leistung	35

1 Mathe

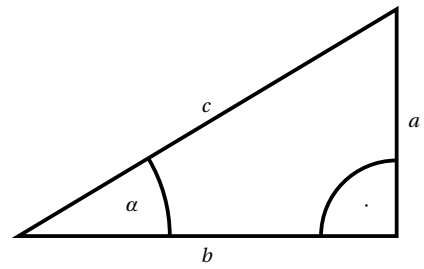
1.1 Winkelfunktionen

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad (1.1)$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \quad (1.2)$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} \quad (1.3)$$

$$\cot \alpha = \frac{b}{a} \quad (1.4)$$



Rechenregeln

$$\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \quad \sin x = \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \quad (1.5)$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cot x} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x} \quad (1.6)$$

Trigonometrischer Pythagoras

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (1.7)$$

Addition von Winkeln

$$\sin(x_1 \pm x_2) = \sin x_1 \cdot \cos x_2 \pm \cos x_1 \cdot \sin x_2 \quad (1.8a)$$

$$\cos(x_1 \pm x_2) = \cos x_1 \cdot \cos x_2 \mp \sin x_1 \cdot \sin x_2 \quad (1.8b)$$

$$\tan(x_1 \pm x_2) = \frac{\tan x_1 \pm \tan x_2}{1 \mp \tan x_1 \cdot \tan x_2} \quad (1.8c)$$

$$\cot(x_1 \pm x_2) = \frac{\cot x_1 \cdot \cot x_2 \mp 1}{\cot x_2 \pm \cot x_1} \quad (1.8d)$$

Multiplikation von Winkeln

$$\sin x_1 \cdot \sin x_2 = \frac{1}{2} \cdot (\cos(x_1 - x_2) - \cos(x_1 + x_2)) \quad (1.9a)$$

$$\cos x_1 \cdot \cos x_2 = \frac{1}{2} \cdot (\cos(x_1 - x_2) + \cos(x_1 + x_2)) \quad (1.9b)$$

$$\sin x_1 \cdot \cos x_2 = \frac{1}{2} \cdot (\sin(x_1 - x_2) + \sin(x_1 + x_2)) \quad (1.9c)$$

$$\tan x_1 \cdot \tan x_2 = \frac{\tan x_1 + \tan x_2}{\cot x_1 + \cot x_2} \quad (1.9d)$$

Umrechnung Grad- \Rightarrow Bogenmaß

$$x = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha \quad (1.10)$$

Umrechnung Bogen- \Rightarrow Gradmaß

$$\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot x \quad (1.11)$$

1.2 Komplexe Zahlen

Grundlagen

$$j = \sqrt{-1} \quad (1.12)$$

$$j^2 = -1 \quad (1.13)$$

1.2.1 Darstellungsformen

Kartesische Form

$[x] =$: Realanteil
 $[y] =$: Imaginäranteil

$$z = x + jy \quad (1.14)$$

Trigometrische Form

$[r] = :$ Betrag
 $[\varphi] = :$ Argument

$$z = r (\cos \varphi + j \sin \varphi) \quad (1.15)$$

Exponentialform

$$z = r e^{j\varphi} \quad (1.16)$$

Umrechnung

$$x = r \cos \varphi \quad (1.17)$$

$$y = r \sin \varphi \quad (1.18)$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.19)$$

Umrechnung Winkel

$$\tan \varphi = \frac{y}{x} \quad (1.20)$$

$$\varphi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{Quadrant I} \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{Quadrant II, III} \\ \arctan \frac{y}{x} + 2\pi & \text{Quadrant IV} \end{cases} \quad (1.21)$$

1.2.2 Rechenregeln**Konjugiert komplexe Zahl**

$[\bar{z}] = :$ konjugierte Komplexe

$$\bar{\bar{z}} = z^* \quad (1.22)$$

$$\bar{z} = \overline{x + jy} \quad (1.23)$$

$$= x - jy \quad (1.24)$$

$$\bar{z} = \overline{r (\cos \varphi + j \sin \varphi)} \quad (1.25)$$

$$= r (\cos \varphi - j \sin \varphi) \quad (1.26)$$

$$\bar{z} = \overline{r e^{j\varphi}} \quad (1.27)$$

$$= r e^{-j\varphi} \quad (1.28)$$

Addition und Subtraktion

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + jy_1) \pm (x_2 + jy_2) \quad (1.29)$$

$$= (x_1 \pm x_2) + j(y_1 \pm y_2) \quad (1.30)$$

Multiplikation

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + jy_1) \cdot (x_2 + jy_2) \quad (1.31)$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1) \quad (1.32)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 (\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1) \cdot r_2 (\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2) \quad (1.33)$$

$$= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \quad (1.34)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{j\varphi_1} \cdot r_2 e^{j\varphi_2} \quad (1.35)$$

$$= r_1 r_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad (1.36)$$

Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} \quad (1.37)$$

$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (1.38)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2)} \quad (1.39)$$

$$= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad (1.40)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{j\varphi_1}}{r_2 e^{j\varphi_2}} \quad (1.41)$$

$$= \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (1.42)$$

Potenzieren

$$z^n = (r_1 (\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1))^n \quad (1.43)$$

$$= r_1^n (\cos(n\varphi_1) + j \sin(n\varphi_1)) \quad (1.44)$$

$$z^n = (r_1 e^{j\varphi_1})^n \quad (1.45)$$

$$= r_1^n e^{jn\varphi_1} \quad (1.46)$$

Wurzelziehen

Es entstehen n Lösungen

Für k muss nacheinander $0, 1, \dots, n-1$ eingesetzt werden

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r_1 (\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1)} \quad (1.47)$$

$$\omega_k = \sqrt[n]{r_1} \left(\cos \left(\frac{\varphi_1 + 2k\pi}{n} \right) + j \sin \left(\frac{\varphi_1 + 2k\pi}{n} \right) \right) \quad (1.48)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r_1} e^{j\varphi_1/n} \quad (1.49)$$

$$\omega_k = \sqrt[n]{r_1} e^{j \left(\frac{\varphi_1 + 2k\pi}{n} \right)} \quad (1.50)$$

1.3 Vektorrechnung**1.3.1 Grundlagen****Darstellung**

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z \quad (1.51)$$

$$= a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z \quad (1.52)$$

$$= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad (1.53)$$

2 Punkt Vektor

$$\overrightarrow{P_1 P_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} \quad (1.54)$$

Betrag

$$|\vec{a}| = a \quad (1.55)$$

$$= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (1.56)$$

$$= \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}} \quad (1.57)$$

Richtungswinkel

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} \quad (1.58)$$

$$\cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} \quad (1.59)$$

$$\cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} \quad (1.60)$$

$$1 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \quad (1.61)$$

1.3.2 Vektoroperationen**Addition und Subtraktion**

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{pmatrix} \quad (1.62)$$

Multiplikation mit einem Skalar

$$a \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a b_x \\ a b_y \\ a b_z \end{pmatrix} \quad (1.63)$$

Einheitsvektor

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \begin{pmatrix} a_x/|\vec{a}| \\ a_y/|\vec{a}| \\ a_z/|\vec{a}| \end{pmatrix} \quad (1.64)$$

Skalarprodukt

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (1.65)$$

$$= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) \quad (1.66)$$

Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \quad (1.67)$$

$|\vec{a} \times \vec{b}|$ Fläche des Parallelograms \vec{a}, \vec{b}
 $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a} \wedge \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (1.68)$$

Spatprodukt

$\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c})$ Volumen des Parallelepiped $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$$[\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = \vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) \tag{1.69}$$

$$= a_x(b_y c_z - b_z c_y) + a_y(b_z c_x - b_x c_z) + a_z(b_x c_y - b_y c_x) \tag{1.70}$$

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \tag{1.71}$$

Schnittwinkel

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \tag{1.72}$$

Projektion

$$\vec{a}_b = \left(\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \right) \vec{a} = (\vec{b} \circ \vec{e}_a) \vec{e}_a \tag{1.73}$$

1.3.3 Geraden

Geradengleichung

$[\vec{r}_1]$ = : Ortsvektor (Verschiebung von Ursprung)

$[\vec{a}]$ = : Richtungsvektor

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_1 + t \vec{a} \tag{1.74}$$

$$= \vec{r}_1 + t(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \tag{1.75}$$

Abstand eines Punktes von einer Geraden

$[\vec{r}_1]$ = : Ortsvektor (Verschiebung von Ursprung)

$[\vec{a}]$ = : Richtungsvektor

$[\vec{OP}]$ = : Ortsvektor des Punktes P

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_1 + t \vec{a} \tag{1.76}$$

$$d = \frac{|\vec{a} \times (\vec{OP} - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}|} \tag{1.77}$$

Abstand zweier paralleler Geraden

$[\vec{r}_1]$ = : Ortsvektor der ersten Gerade

$[\vec{r}_2]$ = : Ortsvektor der zweiten Gerade

$[\vec{a}_1]$ = : Richtungsvektor der Geraden

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_1 + t \vec{a}_1 \tag{1.78}$$

$$\vec{g}(t) = \vec{r}_2 + t \vec{a}_1 \tag{1.79}$$

$$d = \frac{|\vec{a}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}_1|} \tag{1.80}$$

Abstand zweier windschiefen Geraden

$[\vec{r}_1]$ = : Ortsvektor der ersten Gerade

$[\vec{r}_2]$ = : Ortsvektor der zweiten Gerade

$[\vec{a}_1]$ = : Richtungsvektor der ersten Geraden

$[\vec{a}_2]$ = : Richtungsvektor der zweiten Geraden

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_1 + t \vec{a}_1 \tag{1.81}$$

$$\vec{g}(t) = \vec{r}_2 + t \vec{a}_2 \tag{1.82}$$

$$d = \frac{|\vec{a}_1 \circ (\vec{a}_2 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1))|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|} \tag{1.83}$$

1.3.4 Ebenen

Ebenengleichung

$[\vec{r}_1]$ = : Ortsvektor der Ebenen

$[\vec{a}_1]$ = : Erster Richtungsvektor

$[\vec{a}_2]$ = : Zweiter Richtungsvektor

$$\vec{r}(t,s) = \vec{r}_1 + t \vec{a}_1 + s \vec{a}_2 \tag{1.84}$$

$$= \vec{r}_1 + t(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + s(\vec{r}_3 - \vec{r}_1) \tag{1.85}$$

Normalenvektor

$[\vec{n}]$ = : Normalenvektor

$[\vec{r}_1]$ = : Ortsvektor der Normalen

$[\vec{r}]$ = : $(x,y,z)^T$

$$\vec{n} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \tag{1.86}$$

Parameterfreie Darstellung

$[\vec{n}]$ = : Normalenvektor

$$\vec{r}(t,s) = \vec{r}_1 + t \vec{a}_1 + s \vec{a}_2 \tag{1.87}$$

$$\vec{r} \circ (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = \vec{r}_1 \circ (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) + t \vec{a}_1 \circ (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \tag{1.88}$$

$$+ s \vec{a}_2 \circ (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \tag{1.89}$$

$$\vec{r} \circ \vec{n} = \vec{r}_1 \circ \vec{n} + 0 + 0 \tag{1.90}$$

$$\vec{n} \circ (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0 \tag{1.91}$$

Normierter Normalenvektor

$$\vec{e}_n = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|} \tag{1.92}$$

Hesseschen Normalform

$$0 = \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{1.93}$$

Abstand eines Punktes von einer Ebene

$[\vec{n}]$ = : Normalenvektor

$[\vec{r}_1]$ = : Ortsvektor der Normalen

$[\vec{OP}]$ = : Ortsvektor des Punktes P

$[p_i]$ = : Koordinaten des Punktes P

$$d = \frac{|\vec{n} \times (\vec{OP} - \vec{r}_1)|}{|\vec{n}|} \tag{1.94}$$

$$d = \frac{Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{1.95}$$

Abstand eines Geraden von einer Ebene

$[\vec{n}]$ = : Normalenvektor

$[\vec{r}_1]$ = : Ortsvektor der Normalen

$[\vec{r}_G]$ = : Ortsvektor der Geraden

$[r_{Gi}]$ = : Koordinaten eines Geraden Punktes

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_G + t \vec{a}_1 \quad (1.96)$$

$$d = \frac{|\vec{n} \times (\vec{r}_G - \vec{r}_1)|}{|\vec{n}|} \quad (1.97)$$

$$d = \frac{Ar_{G1} + Br_{G2} + Cr_{G3} + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (1.98)$$

Abstand zweier paralleler Ebenen

$[\vec{n}]$ = : Normalenvektor

$$\vec{r}(t, s) = \vec{r}_1 + t \vec{a}_1 + s \vec{a}_2 \quad (1.99)$$

$$\vec{g}(t, s) = \vec{r}_2 + t \vec{a}_3 + s \vec{a}_4 \quad (1.100)$$

$$d = \frac{|\vec{n} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)|}{|\vec{n}|} \quad (1.101)$$

Schnittwinkel zweier Ebenen

$\angle \text{Ebenen} = \angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$

$$\cos \angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{|\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \quad (1.102)$$

Durchstoßpunkt

$[\vec{n}]$ = : Normalenvektor

$[\vec{r}_1]$ = : Ortsvektor der Normalen

$[\vec{r}_G]$ = : Ortsvektor der Geraden

$[\vec{r}_s]$ = : Ortsvektor des Schnittpunktes

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_G + t \vec{a} \quad (1.103)$$

$$\vec{r}_s = \vec{r}_G + \frac{\vec{n} \circ (\vec{r}_1 - \vec{r}_G)}{\vec{n} \circ \vec{a}} \vec{a} \quad (1.104)$$

$$\varphi = \arcsin \left(\frac{|\vec{n} \circ \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|} \right) \quad (1.105)$$

1.4 Differentialrechnung

1.4.1 Erste Ableitung der elementaren Funktionen

Potenzfunktion

$$x^n \quad n \cdot x^{n-1} \quad (1.106)$$

Exponentialfunktionen

$$e^x \quad e^x \quad (1.107)$$

$$a^x \quad \ln a \cdot a^x \quad (1.108)$$

Logarithmusfunktionen

$$\ln x \quad \frac{1}{x} \quad (1.109)$$

$$\log_a x \quad \frac{1}{(\ln a) \cdot x} \quad (1.110)$$

Trigonometrische Funktionen

$$\sin x \quad \cos x \quad (1.111)$$

$$\cos x \quad -\sin x \quad (1.112)$$

$$\tan x \quad \frac{1}{\cos^2 x} \quad (1.113)$$

$$\tan x \quad 1 + \tan^2 x \quad (1.114)$$

Arcusfunktionen

$$\arcsin x \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (1.115)$$

$$\arccos x \quad \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (1.116)$$

$$\arctan x \quad \frac{1}{1-x^2} \quad (1.117)$$

Hyperbelfunktionen

$$\sinh x \quad \cosh x \quad (1.118)$$

$$\cosh x \quad \sinh x \quad (1.119)$$

$$\tanh x \quad \frac{1}{\cosh^2 x} \quad (1.120)$$

$$\tanh x \quad 1 + \tanh^2 x \quad (1.121)$$

1.4.2 Rechenregeln

Faktorregel

$$\frac{d}{dx} (C \cdot f(x)) = C \cdot f'(x) \quad (1.122)$$

Summenregel

$$\frac{d}{dx} (g(x) + f(x)) = g'(x) + f'(x) \quad (1.123)$$

Produktregel	$\frac{d}{dx} (g(x) \cdot f(x)) = g'(x) \cdot f(x) + g(x) \cdot f'(x)$	(1.124)
	$\frac{d}{dx} (h(x) \cdot g(x) \cdot f(x)) = h' \cdot g \cdot f + h \cdot g' \cdot f + h \cdot g \cdot f'$	(1.125)
Quotientenregel	$\frac{d}{dx} \left(\frac{g(x)}{f(x)} \right) = \frac{g'(x) \cdot f(x) - g(x) \cdot f'(x)}{f(x)^2}$	(1.126)
Kettenregel	$\frac{d}{dx} (g(f(x))) = g'(f) \cdot f'(x)$	(1.127)
Logarithmische Ableitungen	$\frac{d}{dx} y = f(x)$	(1.128)
	$\frac{1}{y} y' = \frac{d}{dx} \ln f(x)$	(1.129)

1.4.3 Fehlerrechnung

Absolute Fehler	$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$	(1.130)
$[\Delta x] =$: Absoluter Fehler der Eingangsgröße $[\Delta y] =$: Absoluter Fehler der Ausgangsgröße	$\delta x = \frac{\Delta x}{x}$	(1.131)
Relativer Fehler	$\delta y = \frac{\Delta y}{y}$	(1.132)
	$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x$	(1.133)
	$\delta y = \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \delta x$	(1.134)

1.4.4 Linearisierung und Taylor-Polynome

Tangentengleichung	$y_T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$	(1.135)
$[x_0] =$: Punkt an denn das Polynome entwickelt wird	$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$	(1.136)
Taylor Polynome	$= \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}}{i!} (x - x_0)^i + R_n(x)$	(1.137)
$[x_0] =$: Punkt an denn das Polynome entwickelt wird $[R_n] =$: Restglied	$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$	(1.138)
Restglied		
$[x_0] =$: Punkt an denn das Polynome entwickelt wird $[c] =$: $x_0 < c < x$, wenn $x_0 < x$ $[c] =$: $x_0 > c > x$, wenn $x_0 > x$		

1.4.5 Grenzwertregel von Bernoulli und de l'Hospital

de l'Hospital	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$	(1.139)
Gilt nur wenn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ gleich $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ ist		

1.4.6 Differentielle Kurvenuntersuchung

Normale der Kurve	$y_N(x) = f(x_0) - \frac{1}{f'(x)} (x - x_0)$	(1.140)
Monotonie-Verhalten	$f'(x) > 0$	Monoton wachsend (1.141)
	$f'(x) < 0$	Monoton fallend (1.142)
Krümmung-Verhalten	$f''(x) > 0$	Linkskrümmung(konvex) (1.143)
	$f''(x) < 0$	Rechtskrümmung(konkav) (1.144)

Ableitung Polarkordinaten[\dot{r}] = : Ableitung nach φ [\ddot{r}] = : Zweite Ableitung nach φ

$$y(\varphi) = r(\varphi) \sin \varphi \quad (1.145)$$

$$x(\varphi) = r(\varphi) \cos \varphi \quad (1.146)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{r' \sin \varphi + r \cos \varphi}{r' \cos \varphi - r \sin \varphi} \quad (1.147)$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2(r')^2 - r \cdot r'' + r^2}{(r' \cos \varphi - r \sin \varphi)^3} \quad (1.148)$$

Ableitung Parameterform[\dot{x}] = : Ableitung nach t[\dot{y}] = : Ableitung nach t

$$y = y(t) \quad (1.149)$$

$$x = x(t) \quad (1.150)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad (1.151)$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\dot{x} \ddot{y} - \dot{y} \ddot{x}}{\dot{x}^3} \quad (1.152)$$

Bogendifferential

"Wegelement" einer Funktion

$$ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot dx \quad (1.153)$$

$$ds = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2} \cdot dt \quad (1.154)$$

$$ds = \sqrt{r^2 + (r')^2} \cdot d\varphi \quad (1.155)$$

Winkeländerung

$$\tau = \arctan y' \quad (1.156)$$

$$d\tau = \frac{y''}{1 + (y')^2} \cdot dx \quad (1.157)$$

Kurvenkrümmung

$$\kappa = \frac{d\tau}{ds} \quad (1.158)$$

$$\kappa = \frac{y''}{\sqrt{1 + (y')^2}^3} \quad (1.159)$$

$$\kappa = \frac{\dot{x} \ddot{y} - \dot{y} \ddot{x}}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}} \quad (1.160)$$

$$\kappa = \frac{2(r')^2 - r \cdot r'' + r^2}{\sqrt{(r^2 + (r')^2)^3}} \quad (1.161)$$

Krümmungskreis[ρ] = : Radius des Krümmungskreises[x_K] = : x-Koordinaten des Kreismittelpunktes[y_K] = : y-Koordinaten des Kreismittelpunktes[x_P] = : x-Koordinaten des Kurvenpunktes[y_P] = : y-Koordinaten des Kurvenpunktes

$$\rho = \frac{1}{|\kappa|} \quad (1.162)$$

$$x_K = x_P - y' \frac{1 + (y')^2}{|y''|} \quad (1.163)$$

$$y_K = y_P + \frac{1 + (y')^2}{|y''|} \quad (1.164)$$

1.5 Differential- und Integralrechnung mit mehreren Variablen**1.5.1 Differentialrechnung****Ableitung**

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_3)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = y_{x_1} \quad \text{Alles bis auf } x_1 \text{ ist konstant beim ableiten}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_n} = y_{x_n} \quad \text{Alles bis auf } x_n \text{ ist konstant beim ableiten}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = y_{x_1 x_1} \quad \text{Alles bis auf } x_1 \text{ ist konstant beim ableiten}$$

$$y_{x_1 x_2} = y_{x_2 x_1}$$

Tangentialebene[x_0] = 1: Entwicklungspunkt der Ebene[y_0] = 1: Entwicklungspunkt der Ebene

$$z - z_0 = f_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0)$$

Totales Differential

$$dz = f_x \cdot dx + f_y \cdot dy$$

Extrema

$$f_x(x_0, y_0) = 0$$

$$f_{xx}(x_0, y_0) < 0$$

$$f_{xx}(x_0, y_0) > 0$$

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0$$

$$f_y(x_0, y_0) = 0$$

Maximum

Minimum

Sattelpunkt

$$f_x(x_0, y_0) = 0$$

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} < 0$$

$$f_y(x_0, y_0) = 0$$

Richtungsableitung

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \frac{1}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} \cdot (a_x z_x + a_y z_y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial a} = z_x \cos \alpha + z_y \sin \alpha$$

$$\frac{\partial z}{\partial a} = \vec{e}_a \cdot \text{grad}(z)$$

1.5.2 Mehrfachintegral**Polarkordinaten**

$$x = x_0 + r \cos \varphi$$

$$y = y_0 + r \sin \varphi$$

Volumen

$$\iiint_V dV = \int_x \int_y \int_z dz dy dx$$

$$\iiint_V dV = \int_r \int_\varphi \int_z r dz dr d\varphi$$

Fläche

$$A = \iint_{(A)} dA$$

Masse

$$m = \iint_{(A)} \rho(x, y) dx dy$$

$$m = \iint_{(A)} \rho(r, \varphi) r dr d\varphi$$

$$m = \iiint_{(V)} \rho(x, y) dz dx dy$$

$$m = \iiint_{(V)} \rho(r, \varphi) r dz dr d\varphi$$

Statische Moment
 $[M_x] = 1$: Moment bezüglich x-Achse

 $[M_y] = 1$: Moment bezüglich y-Achse

$$M_x = \iint_{(A)} y \rho(x, y) dx dy$$

$$M_x = \iint_{(A)} y_0 + r \sin \varphi \rho(r, \varphi) r dr d\varphi$$

$$M_y = \iint_{(A)} x \rho(x, y) dx dy$$

$$M_y = \iint_{(A)} x_0 + r \cos \varphi \rho(r, \varphi) r dr d\varphi$$

Schwerpunkt

$$x_s = \frac{M_y}{m}$$

$$y_s = \frac{M_x}{m}$$

Trägheitsmoment

$$I_x = \iint_{(A)} y^2 \rho(x, y) dx dy$$

$$I_x = \iint_{(A)} (y_0 + r \sin \varphi)^2 \rho(r, \varphi) r dr d\varphi$$

$$I_y = \iint_{(A)} x^2 \rho(x, y) dx dy$$

$$I_y = \iint_{(A)} (x_0 + r \cos \varphi)^2 \rho(r, \varphi) r dr d\varphi$$

Polares Trägheitsmoment

$$I_x = \iint_{(A)} (y^2 + x^2) \rho(x, y) dx dy$$

$$I_x = \iint_{(A)} ((y_0 + r \sin \varphi)^2 + (x_0 + r \cos \varphi)^2) \rho(r, \varphi) r dr d\varphi$$

Kugelkoordinaten

$$V = \int_r \int_{\vartheta} \int_{\varphi} r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta dr$$

1.6 Differentialgleichungen

Anfangsbedingung: Werte nur an einer Stelle vorgegeben

Randbedingung: Werte an mehreren Stelle vorgegeben

Lineare DG**1.6.1 DG 1. Ordnung**

$$y_{all} = y_h + y_p$$

Trennung der variablen

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y)$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$$

Lineare DG

$$y' + f(x) \cdot g(y) = g(x) \quad g(x) = 0 \Rightarrow \text{homogen}$$

$$y_{all} = e^{-F(x)} \cdot \left(\int g(x) \cdot e^{F(x)} dx + C \right)$$

1.6.2 Lineare DG 2. Ordnung**Darstellung**

$$a(x) \cdot y'' + b(x) \cdot y' + c(x) \cdot y = g(x) \quad g(x) = 0 \Rightarrow \text{homogen}$$

Fundamental Lösungen

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x} \quad \lambda_1 = \lambda_2$$

$$y_h = C_1 e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x) \quad \lambda_{1/2} = \alpha \pm \beta \cdot j$$

Partikuläre Lösungen(Polynome)

$[G(x)] = 1$: Ansatz

$[g(x)] = 1$: Störglied

$[r] = 1$: Anzahl der Resonanzfälle

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n$$

$$G(x) = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \dots + B_n x^n \quad \lambda \neq 0$$

$$G(x) = (B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \dots + B_n x^n) \cdot x^r \quad \lambda = 0$$

Partikuläre Lösungen(Polynome und e)

$[G(x)] = 1$: Ansatz

$[g(x)] = 1$: Störglied

$[r] = 1$: Anzahl der Resonanzfälle

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$g(x) = (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n) e^{mx}$$

$$G(x) = (B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \dots + B_n x^n) e^{mx} \quad \lambda \neq m$$

$$G(x) = (B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \dots + B_n x^n) e^{mx} \cdot x^r \quad \lambda = m$$

Partikuläre Lösungen(sin und cos)

$[G(x)] = 1$: Ansatz

$[g(x)] = 1$: Störglied

$[r] = 1$: Anzahl der Resonanzfälle

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$g(x) = a \cos(kx) + b \sin(kx)$$

$$G(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) \quad \lambda \neq \pm k j$$

$$G(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) \cdot x^r \quad \lambda = \pm k j$$

Partikuläre Lösungen(e, sin und cos)

[G(x)] = 1: Ansatz

[g(x)] = 1: Störglied

[r] = 1: Anzahl der Resonanzfälle

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$g(x) = (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n) e^{mx} \cdot (c \cos(kx) + d \sin(kx))$$

$$G(x) = (B_0 + B_1x + B_2x^2 + \dots + B_nx^n) e^{mx} \cdot (C \cos(kx) + D \sin(kx)) \quad \lambda \neq m \pm kj$$

$$G(x) = (B_0 + B_1x + B_2x^2 + \dots + B_nx^n) e^{mx} \cdot (C \cos(kx) + D \sin(kx)) \cdot x^r \quad \lambda = m \pm kj$$

1.7 Reihen**1.7.1 Geometrische Folge****Darstellung**

$$a_n = a \cdot q^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n = \frac{a}{1-q}$$

Konvergent für $|q| < 1$ **1.7.2 Harmonische Reihe****Darstellung**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Konvergent für $s > 1$ **1.7.3 Konvergenz****Majorantenkriterium**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

 b_n ist eine bekannte konvergente Reihe**Minorantenkriterium**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \geq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

 b_n ist eine bekannte divergente Reihe**Wurzelkriterium**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$$

 $q > 1$ ist die Reihe divergent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$$

 $q < 1$ ist die Reihe konvergent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$$

 $q = 1$ keine Aussage möglich**Quotientenkriterium**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

 $q > 1$ ist die Reihe divergent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

 $q < 1$ ist die Reihe konvergent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

 $q = 1$ keine Aussage möglich**Leibnizkriterium**

Nur bei alternierenden Reihen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = q$$

 $q = 0$ ist die Reihe divergent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Absolut Konvergent

1.7.4 Bekannte konvergente Reihen

Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{2}{3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

1.8 Funktionsreihen

Darstellung

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

1.8.1 Potenzreihen

Darstellung

[x_0] = 1: Verschiebung des Entwicklungspunktes

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

1.8.2 Konvergenz

Konvergenz

Ränder müssen untersucht werden

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

1.8.3 Bekannte Potenzreihen

Reihen

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n$$

$$x \in (0, 2]$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

$$x \in (-1, 1]$$

$$\ln(1-x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$x \in [-1, 1)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

$$x \in [-1, 1]$$

Reihen

$$\begin{aligned}\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} & x \in \mathbb{R} \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} & x \in \mathbb{R} \\ \sinh x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} & x \in \mathbb{R} \\ \cosh x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} & x \in \mathbb{R} \\ \arcsin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} & x \in [-1, 1] \\ \arctan x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} x^{2n+1} & x \in \mathbb{R} \\ \operatorname{arsinh} x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} & x \in [-1, 1] \\ \operatorname{artanh} x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} x^{2n+1} & x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

1.8.4 Fourier Reihen

Fourier

$$\begin{aligned}y(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + a_n \cdot \sin(n\omega_0 t)) \\ a_0 &= \frac{2}{T} \int_{(T)} y(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{(T)} y(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{(T)} y(t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt\end{aligned}$$

Symetrie

$$\begin{aligned}y(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\omega_0 t)) & \text{gerade Funktion } b_n = 0 \\ y(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)) & \text{ungerade Funktion } a_n = 0\end{aligned}$$

Komplex

$$\begin{aligned}y(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jn x} \\ c_n &= \frac{1}{T} \int_{(T)} y(x) \cdot e^{-jn x} dx\end{aligned}$$

Umrechnung

$$\begin{aligned}c_0 &= \frac{1}{2} a_0 \\ c_n &= \frac{1}{2} (a_n - j b_n) \\ c_{-n} &= \frac{1}{2} (a_n + j b_n) \\ a_0 &= 2 c_0 \\ a_n &= c_n + c_{-n} \\ b_n &= j (c_n - c_{-n})\end{aligned}$$

2 Physik

2.1 Vorsätze

Tera	T	1000000000000	10^{12}
Giga	G	1000000000	10^9
Mega	M	1000000	10^6
Kilo	k	1000	10^3
Hekto	h	100	10^2
Deka	da	10	10^1
Dezi	d	0,1	10^{-1}
Zenti	c	0,01	10^{-2}
Milli	m	0,001	10^{-3}
Mikro	μ	0,000001	10^{-6}
Nano	n	0,000000001	10^{-9}
Pico	p	0,000000000001	10^{-12}
Femto	f	0,000000000000001	10^{-15}

2.2 Kinematik

2.2.1 Geradlinige Bewegungen(Translation)

$$a(t) = a_0 = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s}$$

$$v(t) = a_0 \cdot t + v_0 = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

$$s(t) = \frac{1}{2} a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

2.2.2 Kreisbewegungen(Rotation)

Winkelgrößen

$[\alpha] = \text{rad s}^{-2}$: Winkelbeschleunigung

$[\omega] = \text{rad s}^{-1}$: Winkelgeschwindigkeit

$[\varphi] = \text{rad}$: Drehwinkel

$$\alpha(t) = \alpha_0 = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$$

$$\omega(t) = \alpha_0 \cdot t + \omega_0 = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} \alpha_0 \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \varphi_0$$

Bahngrößen

$[a_t] = \text{m s}^{-2}$: Beschleunigung(tan)

$[v] = \text{m s}^{-1}$: Geschwindigkeit

$[s] = \text{m}$: Weg

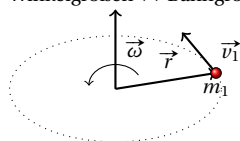
$$a_t(t) = a_0 = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s}$$

$$v(t) = a_0 \cdot t + v_0 = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

$$s(t) = \frac{1}{2} a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

Umrechnung

Winkelgrößen \leftrightarrow Bahngrößen



$$\vec{a}_t = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$a_t = \omega \cdot r \quad \omega \perp r$$

$$\vec{a} = \vec{r} \times \vec{a}_t$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$v = \omega \cdot r \quad \omega \perp r$$

$$\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{v}$$

$$s = \varphi \cdot r$$

Kreisfrequenz

$[T] = \text{s}$: Periodendauer

$[n] = \text{s}^{-1}$: Drehzahl

$[f] = \text{Hz}$: Frequenz

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot n$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot f$$

Radialbeschleunigung

$[a_r] = \text{m s}^{-2}$: Radialbeschleunigung

$$\begin{aligned} a_r &= \frac{v^2}{r} \\ &= v \cdot \omega \\ &= \omega^2 \cdot r \end{aligned}$$

Umdrehungen

$[N] = 1$: Umdrehungen

$$\begin{aligned} N &= \frac{\omega_0 \cdot t}{2 \cdot \pi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{2 \cdot \pi} \cdot t^2 \\ &= n_0 \cdot t + \frac{\alpha}{4 \cdot \pi} \cdot t^2 \end{aligned}$$

2.3 Dynamik

2.3.1 Geradlinig(Translation)

1.Trägheitsgesetz $\sum v m = \text{const}$	Geschlossenes System
2.Grundgesetz Mechanik $\sum F = m a$	Summen aller Kräfte gleich Trägheit
3.Wechselwirkungsgesetz $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$	Aktion gleich Reaktion

Kraft

$[F] = \text{N}$: Kraft
 $[m] = \text{kg}$: Masse

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m \cdot \vec{a} \\ \vec{F}_{\text{Tr}} &= -m \cdot \vec{a} \\ \vec{F} &= \frac{\text{d}p}{\text{d}t} \vec{e}_p = \frac{\text{d}}{\text{d}t} (m v) \vec{e}_v \end{aligned}$$

Impuls

$[p] = \text{kg m s}^{-1}$: Impuls

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Kraftstoß

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{\text{d}\vec{p}}{\text{d}t} = m \cdot \frac{\text{d}\vec{v}}{\text{d}t} + \vec{v} \cdot \frac{\text{d}m}{\text{d}t} \\ \Delta \vec{p} &= \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{\vec{p}_2}^{\vec{p}_1} \text{d}p = \int_0^t \vec{F} \text{d}t \end{aligned}$$

Arbeit

$[W] = \text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$: Arbeit

$$\begin{aligned} W &= - \int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} \vec{F}_{\text{Tr}} \circ \text{d}\vec{s} \\ &= \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}_1} m \vec{v} \circ \text{d}\vec{v} = \frac{1}{2} m (v_1^2 - v_0^2) \end{aligned}$$

kin. Energie

$[E] = \text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$: Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$$

Hubarbeit

$[g] = \text{m s}^{-2}$: Fallbeschleunigung

$$W_{\text{hub}} = m g h$$

Leistung

$[g] = \text{kg m}^2 \text{s}^{-3}$: Leistung

$$P = \vec{F} \circ \vec{v} = \frac{\text{d}W}{\text{d}t} = \dot{W}$$

2.3.2 Drehbewegung(Rotation)

Massenträgheitsmoment

$[J] = \text{kg m}^2$: Massenträgheitsmoment

$$J = \int r^2 \text{d}m$$

Drehimpuls

$[L] = \text{kg m}^2 \text{rad s}^{-1}$: Drehimpuls

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} \\ &= J \cdot \vec{\omega} \end{aligned}$$

Drehmoment

$[M] = \text{N m}$: Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = J \vec{\alpha} = \dot{\vec{L}}$$

kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} J \omega^2$$

Arbeit

$$W = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \vec{M} \circ \vec{e}_\omega \, d\varphi = \int_{\vec{\omega}_0}^{\vec{\omega}_1} J \vec{\omega} \, d\vec{\omega}$$

$$= \frac{1}{2} J (\omega_1^2 - \omega_0^2)$$

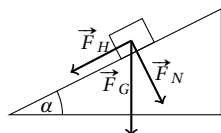
Leistung

$$P = \vec{M} \circ \vec{\omega}$$

Zentripetalkraft

$$\vec{F}_{zp} = -m \cdot \omega^2 \cdot r \vec{e}_r$$

$$= -m \cdot v^2 \cdot \frac{\vec{e}_r}{r}$$

2.3.3 Schiefe Ebene**Kräfte**

$$\vec{F}_N = \vec{F}_G \cos \alpha$$

$$\vec{F}_H = \vec{F}_G \sin \alpha$$

2.3.4 Reibung**Reibungskräfte**

$[F_N] = \text{N}$: Normalkraft
 $[F_R] = \text{N}$: Reibungskraft
 $[\mu] = 1$: Reibungskoeffizient

$$F_R = \mu \cdot F_N$$

Rollreibung

$[F_N] = \text{N}$: Normalkraft
 $[f] = 1$: Rollreibungstahl
 $[M] = 1$: Drehmoment
 $[r] = \text{m}$: Radius

$$M = f \cdot F_N$$

$$F_R = \frac{f}{r} \cdot F_N$$

2.3.5 Feder**Hookesches Gesetz**

$[k] = \text{N m}^{-1}$: Federkonstante
 $[D] = \text{N m rad}^{-1}$: Winkelrichtgröße

$$F = -kx$$

$$M = -D\varphi$$

Spannungsenergie

$$W = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} F \, dx = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} kx \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot k \cdot (x_{\max}^2 - x_{\min}^2)$$

2.3.6 Elastischer Stoß**Energieerhaltung**

Energie vor den Stoß = Energie nach den Stoß

$$\sum E_{\text{kin}} = \sum E'_{\text{kin}}$$

Impulserhaltung

Impuls vor den Stoß = Impuls nach den Stoß

$$\sum m \vec{v} = \sum m \vec{v}'$$

Zentraler, elastischer Stoß

(Energie und Impuls)

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

Zentraler, elastischer Stoß

(Geschwindigkeit nach dem Stoß)

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2$$

$$v_1' = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

2.3.7 Unelastischer Stoß

Energieerhaltung

Energie vor den Stoß = Energie nach den Stoß + Arbeit

$$\sum E_{\text{kin}} = \sum E'_{\text{kin}} + \Delta W$$

Impulserhaltung

Impuls vor den Stoß = Impuls nach den Stoß

$$\sum m \vec{v} = \sum m \vec{v}'$$

Total unelastischer Stoß

(Energie und Impuls)

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v'^2 + \Delta W$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v'$$

Total unelastischer Stoß

(Geschwindigkeit nach dem Stoß)

$$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Total unelastischer Stoß

(Energieverlust)

$$\Delta W = \frac{m_1 \cdot m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2$$

2.3.8 Drehimpulse

Drehimpulserhaltungssatz

Drehimpuls zur Zeit 1 = Drehimpuls zur Zeit 2

$$\sum \vec{L} = \sum \vec{L}'$$

Kupplung Zweier Drehkörper

(Winkelgeschwindigkeit nach dem Kuppeln und Energieverlust)

$$\vec{\omega}' = \frac{J_0 \vec{\omega}_0 + J_1 \vec{\omega}_1}{J_1 + J_2}$$

$$W = \frac{J_0 \cdot J_1}{2(J_0 + J_1)} (\omega_0 - \omega_1)^2$$

2.3.9 Rotierendes Bezugssystem

Zentrifugalkraft

$$\vec{F}_Z = F_r \cdot \vec{e}_r = -m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -m \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$F_Z = -m \frac{v^2}{r} = -m \omega^2 r$$

Corioliskraft

$$\vec{F}_C = -2m \vec{\omega} \times \vec{v}$$

2.4 Schwerpunkt

Schwerpunkt mehrere Punktmassen

$$\vec{r}_{\text{Sp}} = \frac{\sum \vec{r}_i m_i}{\sum m_i}$$

Allgemein Schwerpunkt

$$\vec{r}_{\text{Sp}} = \frac{\int \vec{r} \, dm}{\int dm}$$

Schwerpunkt (Kartesisches)

 $[\rho] = \text{kg m}^{-3}$; Dichte

$$x_{\text{Sp}} = \frac{\int_z \int_y \int_x x \rho \, dx \, dy \, dz}{\int_z \int_y \int_x \rho \, dx \, dy \, dz}$$

$$y_{\text{Sp}} = \frac{\int_z \int_y \int_x y \rho \, dx \, dy \, dz}{\int_z \int_y \int_x \rho \, dx \, dy \, dz}$$

$$z_{\text{Sp}} = \frac{\int_z \int_y \int_x z \rho \, dx \, dy \, dz}{\int_z \int_y \int_x \rho \, dx \, dy \, dz}$$

Schwerpunkt (Zylinder)

$$r_{\text{Sp}} = \frac{\int_z \int_\varphi \int_r r^2 \rho \, dr \, d\varphi \, dz}{\int_z \int_\varphi \int_r r \rho \, dr \, d\varphi \, dz}$$

$$\varphi_{\text{Sp}} = \frac{\int_z \int_\varphi \int_r \varphi r \rho \, dr \, d\varphi \, dz}{\int_z \int_\varphi \int_r r \rho \, dr \, d\varphi \, dz}$$

$$z_{\text{Sp}} = \frac{\int_z \int_\varphi \int_r z r \rho \, dr \, d\varphi \, dz}{\int_z \int_\varphi \int_r r \rho \, dr \, d\varphi \, dz}$$

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = z$$

2.5 Trägheitsmoment**Allgemein**

$[\rho] = \text{kg m}^{-3}$: Dichte

$[J] = \text{kg m}^2$: Massenträgheitsmoment

$$J = \sum m_i r_i^2$$

$$J = \int_m r^2 \, dm$$

$$J = \int_z \int_\varphi \int_r r^3 \rho \, dr \, d\varphi \, dz$$

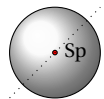
Satz von Steiner

$[J_s] = \text{kg m}^2$: Mtm am der alten Achse

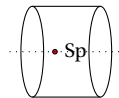
$[J_x] = \text{kg m}^2$: Mtm am der neuen Achse ($J_x \parallel J_s$)

$[r] = \text{m}$: Abstand alter und neuer Achse

$$J_x = m r^2 + J_s$$

Trägheitsmoment Kugel

$$J_{\text{Sp}} = \frac{2}{5} m r^2$$

Trägheitsmoment Zylinder

$$J_{\text{Sp}} = \frac{1}{2} m r^2$$

Trägheitsmoment Kreisring

$$J_{\text{Sp}} = m r^2$$

Trägheitsmoment Stab

$$J_{\text{Sp}} = \frac{1}{12} m l^2$$

2.6 Elastizitätslehre**Spannung**

$[\sigma] = \text{N m}^{-2}$: Normalspannung

$[\tau] = \text{N m}^{-2}$: Schubspannung

$[E] = \text{N m}^{-2}$: Elastizitätsmodul

$[F_n] = \text{N}$: Normalkraft ($\vec{F} \parallel \vec{A}$)

$[\epsilon] = 1$: Dehnung

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{F}_n}{dA}$$

$$\sigma = E \epsilon = E \frac{\Delta l}{l}$$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{F}_t}{dA}$$

Schubmodul

$[G] = \text{N m}^{-2}$: Schubmodul

$[\varphi] = \text{rad}$: Scherwinkel

$$G = \frac{\tau}{\varphi}$$

Drillung

$[\psi] = \text{rad m}^{-1}$: Drillung

$[\varphi] = \text{rad}$: Torsionswinkel

$[l] = \text{m}$: Länge des Drehkörpers

$[W_t] = \text{m}^3$: Widerstandsmoment

$$\psi = \frac{d\varphi}{dl} = \frac{W_t}{G \cdot J_p} \tau = \frac{M_t}{G \cdot J_p}$$

Polares Flächenträgheitsmoment

$[J_p] = \text{m}^4$: Polares Flächenträgheitsmoment

$$J_p = \int r^2 \, dA = \int_\varphi \int_r r^3 \, dr \, d\varphi$$

Verformungsarbeit

$$W = V \int \sigma(\varepsilon) d\varepsilon$$

2.7 Schwingungen

Harmonische Schwingung

$[A] = \text{m}$: Amplitude

$[\omega] = \text{rad s}^{-1}$: Kreisfrequenz

$[\varphi] = \text{rad}$: Phasenverschiebung

$$u(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

2.7.1 Ungedämpfte Schwingungen

Federpendel

$[\hat{x}] = \text{m}$: Amplitude

$[k] = \text{kg s}^{-2}$: Federkonstante

$[\omega] = \text{rad s}^{-1}$: Eigenfrequenz

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

$$x(t) = \hat{x} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\dot{x}(t) = -\hat{x} \omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\ddot{x}(t) = -\hat{x} \omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Mathematisches Pendel

$[\varphi] = \text{rad}$: Auslenkwinkel

$[\hat{\varphi}] = \text{rad}$: Amplitude

$[g] = \text{m s}^{-2}$: Fallbeschleunigung

$[\omega] = \text{rad s}^{-1}$: Eigenfrequenz

$[l] = \text{m}$: Pendellänge

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi$$

$$\varphi(t) = \hat{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\dot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi} \omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\ddot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi} \omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Physikalisches Pendel

$[\varphi] = \text{rad}$: Auslenkwinkel

$[\hat{\varphi}] = \text{rad}$: Amplitude

$[g] = \text{m s}^{-2}$: Fallbeschleunigung

$[\omega] = \text{rad s}^{-1}$: Eigenfrequenz

$[l] = \text{m}$: Abstand Drehachse A zum SP

$[J_A] = \text{kg m}^2$: Trägheitsmoment um Achse A

$$\ddot{\varphi} = -\frac{lmg}{J_A}\varphi$$

$$\varphi(t) = \hat{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\dot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi} \omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\ddot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi} \omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J_A}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgl}{J_A}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{mgl}}$$

Torionsschwingung

$[\varphi] = \text{rad}$: Torsionswinkel

$[\hat{\varphi}] = \text{rad}$: Amplitude

$[\omega] = \text{rad s}^{-1}$: Eigenfrequenz

$[D] = \text{rad s}^{-1}$: Winkelrichtgröße

$[J_A] = \text{kg m}^2$: Trägheitsmoment um Achse A

$$\ddot{\varphi} = -\frac{D}{J_A}\varphi$$

$$\varphi(t) = \hat{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\dot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi} \omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\ddot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi} \omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{J_A}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{J_A}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{D}}$$

Flüssigkeitspendel[y] = m: Auslenkung[\hat{y}] = m: Amplitude[ω] = rad s⁻¹: Eigenfrequenz[ρ] = kg m⁻³: Dichte der Flüssigkeit[l] = m: Länge der Flüssigkeitsseule[A] = m²: Querschnittsfläche

$$\ddot{y} = -\frac{2A\rho g}{m} y$$

$$\varphi(t) = \hat{y} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\dot{\varphi}(t) = -\hat{y} \omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\ddot{\varphi}(t) = -\hat{y} \omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2A\rho g}{m}} = \sqrt{\frac{2g}{l}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2g}{l}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}$$

Elektrischer Schwingkreis[q] = As: Ladung[\hat{q}] = As: Amplitude, max. Ladung Kondensator[L] = Vs A⁻¹: Induktivität[C] = As V⁻¹: Kapazität

$$0 = L\ddot{Q} + \frac{Q}{C}$$

$$q(t) = \hat{Q} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\dot{q}(t) = -\hat{Q} \omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\ddot{q}(t) = -\hat{Q} \omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

2.7.2 Gedämpfte Schwingungen**Schwingungsgleichung mit Reibung**[k] = kg s⁻²: Richtgröße[F_R] = N: Reibungskraft[x] = m: Auslenkung

$$m\ddot{x} = -kx + F_R$$

Coulomb-Reibung[k] = kg s⁻²: Richtgröße[F_N] = N: Normalkraft[F_R] = N: Reibungskraft[μ] = 1: Reibungskoeffizient[\dot{x}] = m s⁻¹: Geschwindigkeit

$$F_R = -\operatorname{sgn}(\dot{x}) \mu F_N$$

$$0 = m\ddot{x} + kx + \operatorname{sgn}(\dot{x}) \mu F_N$$

$$\operatorname{sgn}(\dot{x}) = \begin{cases} -1 & \dot{x} < 0 \\ 0 & \dot{x} = 0 \\ +1 & \dot{x} > 0 \end{cases}$$

Gleitreibung(Nicht Behandelt)[k] = kg s⁻²: Richtgröße[F_N] = N: Normalkraft[μ] = 1: Reibungskoeffizient[\hat{x}_0] = m: Start Amplitude[\hat{x}_1] = m: End Amplitude

$$x(t) = -(\hat{x}_0 - \hat{x}_1) \cos(\omega t) - \hat{x}_1 \quad 0 \leq t \leq \frac{T}{2}$$

$$x(t) = -(\hat{x}_0 - 3\hat{x}_1) \cos(\omega t) + \hat{x}_1 \quad \frac{T}{2} \leq t \leq T$$

$$\hat{x}_1 = \frac{\mu F_N}{k}$$

Viskose Reibung[k] = kg s⁻²: Richtgröße[\hat{x}] = m: Amplitude[ω] = rad s⁻¹: Eigenfrequenz[δ] = s⁻¹: Abklingkoeffizient[b] = kg s⁻¹: Dämpfungskonstante[D] = 1: Dämpfungsgrad[ω_D] = rad s⁻¹: Gedämpfte Kreisfrequenz[Λ] = 1: logarithmischen Dekrement[d] = 1: Verlustfaktor[Q] = 1: Güte

$$0 = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx$$

$$x(t) = \hat{x} e^{-\delta t} e^{\pm j \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t}$$

$$x(t) = \hat{x} e^{-\delta t} e^{\pm j \omega_0 \sqrt{1 - D^2} t}$$

$$\delta = \frac{b}{2m}$$

$$D = \frac{\delta}{\omega_0}$$

$$D = \frac{b}{2} \frac{1}{\sqrt{mk}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Lambda = \ln \left(\frac{x(t)}{x(t+T)} \right)$$

$$\Lambda = \delta T$$

$$\omega_D = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m} \right)^2}$$

$$d = 2D$$

$$Q = \frac{1}{d}$$

Viskose Reibung

Schwingfall. $\delta < \omega_0$

$$x(t) = \hat{x} e^{-\delta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t + \varphi)$$

Viskose Reibung

Aperiodischer Grenzfall $\delta = \omega_0$

$$x(t) = \hat{x} e^{-\delta t} (1 - \delta t)$$

Viskose Reibung

Kriechfall $\delta > \omega_0$

$$x(t) = \hat{x} e^{-\delta t} e^{\pm j \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t}$$

2.8 Fluidmechanik

2.8.1 Ohne Reibung

Statischer Druck

$[p] = \text{Pa}$: Druck
 $[F] = \text{N}$: Kraft ($\vec{F}_N \parallel \vec{A}$)
 $[A] = \text{m}^2$: Fläche

$$p = \frac{dF_N}{dA}$$

Dynamischer Druck

$[p] = \text{Pa}$: Druck
 $[v] = \text{m s}^{-1}$: Geschwindigkeit des Mediums
 $[\rho] = \text{kg m}^{-3}$: Dichte

$$p = \frac{1}{2} \rho v^2$$

Schwere Druck

$[p] = \text{Pa}$: Druck
 $[\rho] = \text{kg m}^{-3}$: Dichte
 $[V] = \text{m}^3$: Volumen
 $[A] = \text{m}^2$: Fläche
 $[h] = \text{m}$: Tiefe (Abstand von Oben)

$$p = \frac{\rho V g}{A} = h \rho g$$

Volumenstrom

$[\dot{V}] = \text{m}^3 \text{s}^{-1}$: Volumenstrom

$$\begin{aligned} \dot{V} &= v A \\ &= \iint_A \vec{v} \, d\vec{A} \\ &= \frac{dV}{dt} \\ &= Q \end{aligned}$$

Massenstrom

$[\dot{m}] = \text{kg s}^{-1}$: Massenstrom
 $[j] = \text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$: Massenstromdichte

$$\begin{aligned} \dot{m} &= j A \\ &= \iint_A \vec{j} \, d\vec{A} \\ &= \frac{dm}{dt} \end{aligned}$$

Kontinuitätsgleichung

$[v_1] = \text{m s}^{-1}$: Geschwindigkeit zum Zeitpunkt 1
 $[v_2] = \text{m s}^{-1}$: Geschwindigkeit zum Zeitpunkt 2
 $[A_1] = \text{m}^2$: Fläche zum Zeitpunkt 1
 $[A_2] = \text{m}^2$: Fläche zum Zeitpunkt 2

$$\begin{aligned} \dot{m}|_1 &= \dot{m}|_2 & \rho_1 &= \rho_2 \\ \dot{V}|_1 &= \dot{V}|_2 & \rho_1 &= \rho_2 \\ v_1 A_1 &= v_2 A_2 & \rho_1 &= \rho_2 \end{aligned}$$

Kompressibilität

$[\Delta V] = \text{m}^3$: Volumenabnahme
 $[\Delta p] = \text{Pa}$: Druckzunahme
 $[\kappa] = \text{Pa}^{-1}$: Kompressibilität

$$\kappa = \frac{\Delta V}{\Delta p V}$$

Volumenausdehnungskoeffizient

$[\Delta T] = \text{K}$: Temperaturänderung
 $[\gamma] = \text{K}^{-1}$: Volumenausdehnungskoeffizient

$$\frac{\Delta V}{V} = \gamma \Delta T$$

Barometrische Höhenformel

Luftdruck in der Atmosphäre
 $[p_0] = \text{Pa}$: Druck am Boden
 $[\rho_0] = \text{kg m}^{-3}$: Dichte am Boden
 $[h] = \text{m}$: Tiefe (Abstand von Boden)

$$p = p_0 e^{-C h}$$
$$C = \frac{\rho_0 g}{p_0}$$

Auftrieb

$[F_A] = \text{N}$: Kraft
 $[\rho_V] = \text{kg m}^{-3}$: Dichte des verdrängten Stoffes
 $[\rho_M] = \text{kg m}^{-3}$: Dichte des Stoffes
 $[V] = \text{m}^3$: Volumen das verdrängt wird

$$\begin{aligned}\vec{F}_A &= -\rho_V \vec{g} V \\ &= -\frac{\rho_V}{\rho_M} \vec{F}_G\end{aligned}$$

Bernoulli Gleichung

$[\rho] = \text{kg m}^{-3}$: Dichte
 $[v] = \text{m s}^{-1}$: Geschwindigkeit
 $[h] = \text{m}$: Tiefe (Abstand von Oben)

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = \text{const}$$

2.8.2 Laminare Reibung

Eine Strömung mit sich nicht kreuzenden Strombahnen heißt laminare Strömung.

Platten der Fläche A, zwischen denen eine Reibung wirkt, bewegen sich relativ zueinander mit v und dem Abstand x.

Newtonsches Reibungsgesetz

$[\eta] = \text{Pa s}$: Viskosität
 $[A] = \text{m}^2$: Fläche einer Schicht
 $[dv] = \text{m s}^{-1}$: Geschwindigkeit der Schichten
 $[dx] = \text{m}$: Abstand der Schichten

$$F_R = \eta A \frac{dv}{dx}$$

Laminare Strömungen in einem Rohr

Hagen-Poiseuillesches Gesetz

$[\eta] = \text{Pa s}$: Viskosität
 $[l] = \text{m}$: Länge des Rohrs
 $[r] = \text{m}$: Abstand von der Mittellinie
 $[R] = \text{m}$: Radius des Rohres
 $[p] = \text{Pa}$: Druckabfall über das Rohr

$$\begin{aligned}v(r) &= \frac{p}{4\eta l} (R^2 - r^2) \\ p &= \frac{4\eta l}{R^2} v(0) \\ \dot{V} &= \frac{\pi R^4}{8\eta l} \Delta p\end{aligned}$$

Umströmung einer Kugel

Stokesches Reibungsgesetz

$[\eta] = \text{Pa s}$: Viskosität
 $[r] = \text{m}$: Radius der Kugel
 $[v] = \text{m s}^{-1}$: Geschwindigkeit Strömung (Kugel)

$$F_R = 6\pi\eta r v$$

Bernoulli Gleichung mit Reibung

$[\Delta p] = \text{Pa}$: Druck "Verlust" im Rohr

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 + \Delta p$$

Reynoldszahl

$[Re] = 1$: Reynoldszahl
 $[Re_{krit}] = 1$: Kritische Reynoldszahl
 $[L] = \text{m}$: Charakteristische Länge
 L z.B. Rohr oder Kugel Durchmesser
 $[\rho] = \text{kg m}^{-3}$: Dichte der Flüssigkeit
 $[v] = \text{m s}^{-1}$: Geschwindigkeit der Flüssigkeit

$$\begin{aligned}Re &= \frac{L \rho v}{\eta} \\ Re &> Re_{krit}\end{aligned}$$

Strömung wird turbulent

Reynoldszahl

Kriterium für die Strömung zur Bildung von Turbulenzen

2.9 Gravitation**Gravitationsgesetz**

$[F_g] = \text{N}$: Gravitationskraft
 $[G] = \text{N m}^2 \text{kg}^{-2}$: Gravitationskonstante
 $[r_{12}] = \text{m}$: Schwerpunktabstand der Körper
 $[m_i] = \text{kg}$: Masse des Körpers i
 $[E_g] = \text{m s}^{-2}$: Gravitationsfeldstärke

$$\begin{aligned}\vec{F}_{g,2} &= -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \vec{e}_r \\ \vec{F}_g &= \vec{E}_g \cdot m \\ \vec{g} &= \vec{E}_g \\ \vec{g} &= -G \frac{m}{r^2} \vec{e}_r\end{aligned}$$

Gravitationspotenzial

$[\phi] = \text{J kg}^{-1}$: Gravitationspotenzial
 $[G] = \text{N m}^2 \text{kg}^{-2}$: Gravitationskonstante
 $[r] = \text{m}$: Abstand der anziehenden Kraft
 $[M] = \text{kg}$: Masse des anziehenden Körpers

$$\begin{aligned}\phi &= -G \frac{M}{r} \\ \vec{E}_g &= -\text{grad} \phi\end{aligned}$$

Arbeit

$[\phi] = \text{J kg}^{-1}$: Gravitationspotenzial
 $[G] = \text{N m}^2 \text{kg}^{-2}$: Gravitationskonstante
 $[r] = \text{m}$: Abstand der anziehenden Kraft
 $[M] = \text{kg}$: Masse des anziehenden Körpers

$$W_{12} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_g \circ d\vec{r} = G m M \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Planetenbahnen[T] = s: Umlaufzeit[a] = m: Durchmesser der großen Halbachse[i_E] = m: a und T Größen der Erde

$$\left(\frac{a}{a_E}\right)^3 = \left(\frac{T}{T_E}\right)^2$$

2.10 Elektrisches Feld**Ladung**[Q] = As: Ladung[i] = A: Strom

$$\begin{aligned} Q &= n \cdot e_0 \\ &= CU \\ &= \int i \, dt \end{aligned}$$

Coulombsches Gesetz[F] = N: Kraft[E] = V m⁻¹: Feldstärke[ϵ] = As V⁻¹ m⁻¹: Elektrische Feldkonstante[r] = m: Abstand der Ladungen

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{r}_{12} \\ \vec{F}_{12} &= \vec{E} Q \\ \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} \vec{r} \\ \vec{E} &= -\text{grad}\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \vec{e}_z\right) \end{aligned}$$

Feldstärke mehrere Punktladung

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i \vec{r}_i$$

Spannung[U] = V: ele. Spannung[φ] = V: ele. Potenzial

$$\begin{aligned} \varphi_A &= -\int_{\infty}^A \vec{E} \circ d\vec{s} \\ \varphi(r) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon r} \\ U_{AB} &= \frac{W_{AB}}{Q} \\ U_{AB} &= -\int_A^B \vec{E} \circ d\vec{s} \\ U_{AB} &= \oint_s \vec{E} \circ d\vec{s} = 0 \\ U_{AB} &= \varphi_A - \varphi_B = -\int_{\infty}^A \vec{E} \circ d\vec{s} - \left(-\int_{\infty}^B \vec{E} \circ d\vec{s}\right) \end{aligned}$$

Kugel

2.10.1 Elektrostatik**Elektrischer Fluss, Verschiebungsfluss**[ψ] = V m: Elektrischer Fluss

$$\begin{aligned} \psi &= \int_A \vec{E} \circ d\vec{A} \\ \psi &= \oint_A \vec{E} \circ d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon} \end{aligned}$$

Elektrische Flussdichte[D] = As m⁻²: Elektrische Flussdichte

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \frac{dQ}{dA} \vec{e}_A \\ \vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ Q &= \oint_A D dA \end{aligned}$$

Arbeit im ele. Feld[C] = As V⁻¹: Kapazität[W] = J: Arbeit[w] = J m⁻³: Energiedichte

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} \vec{E} \circ \vec{D} \\ W &= \int_V w \, dV \\ &= -Q \int_A^B \vec{E} \circ d\vec{s} \\ &= \int_U Q \, dU = \int_U C U \, dU = \frac{1}{2} C U^2 \end{aligned}$$

2.10.2 Elektrodynamik

Kapazität

$[C] = \text{As V}^{-1}$: Kapazität

$$Q = CU$$

Ohmsches Gesetz

$[j] = \text{A m}^{-2}$: Stromstärke

$[W] = \text{J}$: Arbeit

$[w] = \text{J m}^{-3}$: Energiedichte

$$\begin{aligned} I &= \oint_A \vec{j} \circ d\vec{A} \\ &= \oint_A \kappa \vec{E} \circ d\vec{A} \\ &= \kappa E \cdot 4\pi r^2 \end{aligned}$$

Kugel

2.11 Magnetisches Feld

Magnetische Flussdichte

$[B] = \text{Vs m}^{-2}$: Magnetische Flussdichte

$[B] = \text{T}$: Magnetische Flussdichte

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

2.12 Thermodynamik

2.12.1 Dehnung

Wärmedehnung

$[\beta] = \text{K}^{-1}$: Dichtenausdehnungskoeffizient

$[\gamma] = \text{K}^{-1}$: Volumenausdehnungskoeffizient

$[\alpha] = \text{K}^{-1}$: Längenausdehnungskoeffizient

$[\rho] = \text{kg m}^{-3}$: Dichte

$[V] = \text{m}^3$: Volumen

$[l] = \text{m}$: Länge

$[T] = \text{K}$: Temperatur

$[T_0] = \text{K}$: Ausgangstemperatur

$$\rho(T) = \rho_0(1 - \beta(T - T_0))$$

$$V(T) = V_0(1 + \gamma(T - T_0))$$

$$l(T) = l_0(1 + \alpha(T - T_0))$$

$$\gamma \approx 3 \cdot \alpha$$

$$\gamma \approx \beta$$

2.12.2 Wärme

Wärme

$[Q] = \text{J}$: Wärme

$[c] = \text{J K}^{-1} \text{kg}^{-1}$: spez. Wärmekapazität

$[C] = \text{J K}^{-1}$: Wärmekapazität

$[c_{mol}] = \text{J K}^{-1} \text{mol}^{-1}$: molare Wärmekapazität

$[n] = \text{mol}$: Stoffmenge

$$\Delta Q = c \cdot m(T - T_0)$$

$$\Delta Q = C(T - T_0)$$

$$\Delta Q = \int_{T_0}^T c \cdot m \, dT$$

$$\Delta Q = c_{mol} \cdot n(T - T_0)$$

Mischtemperatur

$$T_m = \frac{\sum_{i=1}^n T_i m_i c_i}{\sum_{i=1}^n m_i c_i}$$

\dot{Q} Ist durch einen mehrschichtiges stationäres System Konstant

Wärmeleitung

$[\dot{Q}] = \text{W}$: Wärmestrom

$[\vec{q}] = \text{W m}^{-2}$: Wärmestromdichte

$[A] = \text{m}^2$: Fläche

$[\lambda] = \text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$: Wärmeleitzahl

$[s] = \text{m}$: Dicke der λ Schicht

$$\dot{Q} = \frac{dQ}{dt} = \Phi = P$$

$$\vec{q} = \frac{\dot{Q}}{A} \cdot \vec{e}_A$$

$$\vec{q} = -\lambda \text{grad} T$$

$$\vec{q} = \frac{\lambda}{s} (T_A - T_B) \cdot \vec{e}_s$$

$$\dot{q} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{s_i}{\lambda_i}} \cdot (T_A - T_B)$$

Wärmekonvektion

$[\alpha] = \text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$: Wärmeübergangszahl

$$\dot{q} = \alpha (T_A - T_B)$$

$$\dot{q} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i}} \cdot (T_A - T_B)$$

Wärmewiderstand

[R_{th}]=KW⁻¹: Wärmewiderstand

$$R_{th} = \frac{T_A - T_B}{\dot{q} \cdot A}$$
$$R_{th} = \frac{s}{\lambda A}$$
$$R_{th} = \frac{1}{\alpha A}$$
$$R_{th} = \sum_{i=1}^n R_i$$

Wärmeübertragung

[k]=WK⁻¹m⁻²: Wärmedurchgangszahl

$$k = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{s_i}{\lambda_i} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i} + \sum_{i=1}^n A_i \cdot R_i}$$
$$\dot{q} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{s_i}{\lambda_i} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i} + \sum_{i=1}^n A_i \cdot R_i} \cdot (T_A - T_B)$$
$$\dot{q} = k \cdot (T_A - T_B)$$

Wärmestrahlung

[ε]=1: Emissionsgrad
[σ]=Wm⁻²K⁻⁴: Stefan-Boltzmann-Konstante
[C]=Wm⁻²K⁻¹: Strahlungsaustauschkonstante
[α]=1: Absorptionsgrad
[τ]=1: Transmissionsgrad
[θ]=1: Reflexionsgrad

$$\alpha = \varepsilon$$
$$1 = \alpha + \tau + \vartheta$$
$$\dot{Q} = \varepsilon A \sigma T^4$$
$$\sigma = 5,6704 \cdot 10^{-8} \text{Wm}^{-2} \text{K}^{-4}$$
$$\dot{Q}_{AB} = C_{AB} A_A \left(T_A^4 - T_B^4\right)$$
$$C_{AB} = \varepsilon_{AB} \sigma = \frac{\sigma}{\frac{1}{\varepsilon_A} + \frac{1}{\varepsilon_B} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{\sigma_A} + \frac{1}{\sigma_B} - \frac{1}{\sigma}}$$
$$C_{AB} = \frac{\sigma}{\frac{1}{\varepsilon_A} + \frac{A_A}{A_B} \left(\frac{1}{\varepsilon_B} - 1\right)}$$
$$C_{AB} \approx \varepsilon_A \sigma$$

Parallel

A_A von A_B umschlossen

parallel (A_A ≪ A_B)

Wiensches Verschiebungsgesetz

Gibt das Maximum der Wellenlänge zur Temperatur an
[b]=mK: Wiensche Konstante

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}$$
$$b = 2,8978 \cdot 10^{-3} \text{mK}$$

Strahler

Berechnug der Strahlungsleistung in einen Bereich λ
[Φ]=W: Strahlungsleistung
[I]=Wsr⁻¹: Strahlstärke
[I]=Wm⁻²sr⁻¹: Strahldichte
[M]=Wm⁻²: spez. Ausstrahlung
[Ω]=sr: Raumwinkel

$$\Phi_e = \frac{dQ}{dt}$$
$$I_e = \frac{d\Phi_e}{d\Omega}$$
$$M_e = \frac{d\Phi_e}{dA}$$
$$L_e = \frac{dI_e}{dA}$$
$$\Omega = \frac{A}{r^2}$$

Schwarzer Strahler(Plancksches Strahlungsgesetz)

Berechnug der Strahlungsleistung in einen Bereich λ
[k]=JK⁻¹: Boltzmann Konstante
[h]=Js: Plancksches Wirkungsquantum
[λ]=m: Wellenlänge
[c]=ms⁻¹: Lichtgeschwindigkeit
[n]=1: Brechungszahl

$$\varepsilon = \alpha = 1$$
$$P_\lambda = \frac{dP}{d\lambda} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{A}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1}$$
$$M_{e,\lambda} = \frac{dP_\lambda}{dA} = \frac{c_1}{n^2 \lambda^5 \cdot \left(e^{\frac{c_2}{n\lambda T}} - 1\right)}$$
$$L_{e,\lambda} = \frac{M_{e,\lambda}}{\pi \Omega}$$
$$c_1 = 2\pi hc^2 = 3,7418 \cdot 10^{-16} \text{Wm}^{-2}$$
$$c_2 = \frac{hc}{k} = 0,01439 \text{mK}$$

2.12.3 Zustandsänderung des idealen Gases

Ideales Gas bedeutet das die Teilchen nicht in Wechselwirkung geraten, sie kein Volumen und es kommt zu keinen Phasenübergang

Energie

[H]=J: Enthalpie
[c_p]=JK⁻¹: spez. Wärmekapazität(p=const)

$$U_{12} = Q_{12} + W_{12}$$
$$dH = c_p m dT = U + p dV$$
$$dS = \frac{dQ}{T}$$

Nur Isobar

Zustandsgleichung

$[p] = \text{Pa}$: Druck
 $[T] = \text{K}$: Temperatur
 $[k] = \text{J K}^{-1}$: Boltzmann-Konstante
 $[N] = 1$: Teilchenanzahl
 $[V] = \text{m}^3$: Volumen
 $[R_s] = \text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$: spez. Gaskonstante
 $[R] = \text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$: Gaskonstante
 $[n] = \text{mol}$: Stoffmenge
 $[c_V] = \text{J K}^{-1}$: spez. Wärmekapazität($V=\text{const}$)

$$\frac{pV}{T} = \text{const}$$

$$pV = NkT$$

$$pV = mR_sT$$

$$pV = nRT$$

$$R_s = \frac{nR}{m}$$

$$R_s = c_p - c_v$$

Isotherm

$[\Delta U] = \text{J}$: Innere Energie
 $[S] = \text{J K}^{-1}$: Innere Energie
 $[c_V] = \text{J K}^{-1}$: spez. Wärmekapazität($V=\text{const}$)
 $[c_p] = \text{J K}^{-1}$: spez. Wärmekapazität($p=\text{const}$)

$$pV = \text{const}$$

$$T = \text{const}$$

$$U_{12} = 0$$

$$U_{12} = Q_{12} + W_{12}$$

$$Q_{12} = -W_{12}$$

$$W_{12} = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$W_{12} = p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2}$$

$$S_{12} = mc_p \ln \frac{V_2}{V_1} + mc_V \ln \frac{p_2}{p_1}$$

Isobarer

$$\frac{V}{T} = \text{const}$$

$$p = \text{const}$$

$$Q_{12} = mc_p(T_2 - T_1)$$

$$W_{12} = -p(V_2 - V_1)$$

$$U_{12} = Q_{12} + W_{12}$$

$$S_{12} = mc_p \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Isochor

$$\frac{p}{T} = \text{const}$$

$$V = \text{const}$$

$$Q_{12} = mc_v(T_2 - T_1)$$

$$W_{12} = 0$$

$$U_{12} = Q_{12}$$

$$S_{12} = mc_v \ln \frac{p_2}{p_1}$$

Adiabat

$$pV^\kappa = \text{const}$$

$$Q = \text{const}$$

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-\kappa} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

$$Q_{12} = 0$$

$$W_{12} = mc_v(T_2 - T_1)$$

$$W_{12} = \frac{RT_1}{\kappa-1} \left(\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-\kappa} - 1 \right)$$

$$U_{12} = W_{12}$$

$$S_{12} = 0;$$

Kreisprozess

$$\oint dU = 0$$

$$\oint dU = \oint dQ + \oint dW$$

$$\oint dS = 0$$

$$\oint dS > 0$$

Reversibel

Irreversibel

Carnot

$[\eta_C] = 1$: Carnot Wirkungsgrad

$$\eta_C = \frac{W_{ab}}{Q_{zu}}$$

$$\eta_C = \frac{Q_{zu} - Q_{AB}}{Q_{zu}}$$

$$\eta_C = \frac{T_h - T_n}{T_n}$$

2.13 Optik**2.13.1 Brechung****Brechung**

$[n_1] = 1$: Brechzahl Medium 1

$[n_2] = 1$: Brechzahl Medium 2

$[\varepsilon_1] = \text{rad}$: Einfallswinkel (Medium 1)

$[\varepsilon_2] = \text{rad}$: Ausfallwinkel (Medium 2)

$[c_1] = \text{ms}^{-1}$: Phasengeschwindigkeit (Medium 1)

$[c_2] = \text{ms}^{-1}$: Phasengeschwindigkeit (Medium 2)

$$\frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \varepsilon_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\varepsilon_2 = \arcsin \frac{\sin \varepsilon_1 \cdot n_1}{n_2}$$

Totalreflexion tritt nur auf wenn der Lichtstrahl von einen dichteren in ein weniger dichten Stoff übergeht

Totalreflexion

$[n_1] = 1$: Brechzahl Medium 1

$[n_2] = 1$: Brechzahl Medium 2

$[\varepsilon_g] = \text{rad}$: Einfallswinkel (Medium 1)

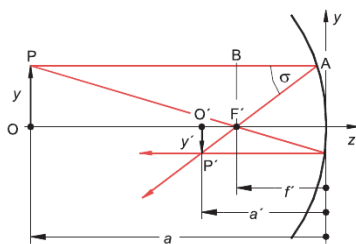
$$\sin \varepsilon_g = \frac{n_2}{n_1}$$

2.13.2 Hohlspiegel**Spiegel**

$[f'] = \text{m}$: Brennpunkt

$[a'] = \text{m}$: Bildweite

$[y'] = \text{m}$: Bildgröße



$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}$$

$$f' = \frac{r}{2}$$

$$\beta' = \frac{y'}{y}$$

$$\beta' = -\frac{a'}{a}$$

$$a' = \frac{af'}{a - f'}$$

2.13.3 Linse**Linse**

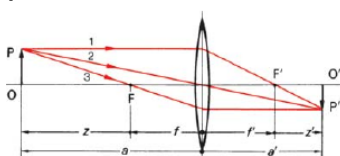
$[f'] = \text{m}$: Brennpunkt

$[a'] = \text{m}$: Bildweite

$[y'] = \text{m}$: Bildgröße

$[D'] = \text{m}^{-1}$: Brechkraft

$[n_L] = 1$: Brechzahl Linse









$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{a}$$

$$a' = \frac{af'}{a + f'}$$

$$\beta' = \frac{f'}{a + f'}$$

$$\beta' = \frac{y'}{y}$$

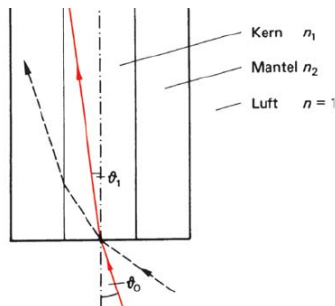
$$D' = \frac{1}{f'} = (n_L - 1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Linsenform						
Bezeichnung	bi-konvex	plan-konvex	konkav-konvex	bi-konkav	plan-konkav	konvex-konkav
Radien	$r_1 > 0$ $r_2 < 0$	$r_1 = \infty$ $r_2 < 0$	$r_1 < r_2 < 0$	$r_1 < 0$ $r_2 > 0$	$r_1 = \infty$ $r_2 > 0$	$r_2 < r_1 < 0$
Brennweite im optisch dünneren Medium	$f' > 0$	$f' > 0$	$f' > 0$	$f' < 0$	$f' < 0$	$f' < 0$

2.13.4 LWL

Linse

$[A_{WL}] = 1$: numerische Aperatur



$$n \sin \theta_0 = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

$$A_{WL} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

3 Elektrotechnik

3.1 Grundgrößen

Elementarladung

$$e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

ele. Ladung

$$[Q] = 1 \text{ C} = 1 \text{ As}$$

$$Q = n \cdot e$$

ele. Strom

$$[I] = 1 \text{ A}$$

$$i(t) = \frac{dQ}{dt}$$

ele. Stromdichte

$$[J] = 1 \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$$

$$\vec{J} = \frac{I}{\vec{A}}$$

ele. Potenzial

$$[\varphi] = 1 \text{ V} = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{As}} = 1 \frac{\text{kg m}^2}{\text{As}^3}$$

$$\varphi = \frac{W}{Q}$$

ele. Spannung

$$[U] = 1 \text{ V}$$

$$U_{AB} = \varphi_a - \varphi_b$$

ele. Widerstand

$$[R] = 1 \Omega = 1 \frac{\text{V}}{\text{A}}$$

$$R = \frac{U}{I}$$

$$= \rho \frac{l}{A} = \frac{1}{\kappa} \frac{l}{A}$$

ele. Leitwert

$$[G] = 1 \text{ S} = 1 \frac{\text{A}}{\text{V}}$$

$$G = \frac{I}{U}$$

$$= \frac{1}{R}$$

$$= \kappa \frac{A}{l} = \frac{1}{\rho} \frac{A}{l}$$

Temperaturabhängigkeit von Widerstand

$$R_2 = R_1 \cdot \left(1 + \alpha (\vartheta_2 - \vartheta_1) + \beta (\vartheta_2 - \vartheta_1)^2 \right)$$

3.2 Lineare Quellen

Lineare Spannungsquelle

$$U = U_q - R_i \cdot I$$

$$I_K = \frac{U_q}{R_i}$$

Lineare Stromquelle

$$I = I_q - \frac{U}{R_i}$$

$$U_l = I_q \cdot R_i$$

3.3 Kirchhoffsche Gesetze

Knotenpunktsatz

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0$$

Maschensatz

$$\sum_{i=1}^n U_i = 0$$

3.4 Wechselspannung

Gleichanteil

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u(t) dt$$

$$\bar{i} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} i(t) dt$$

Gleichrichtwert

$$|\bar{u}| = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} |u(t)| dt$$

$$|\bar{i}| = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} |i(t)| dt$$

Effektivwert

$$u_{eff} = U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} (u(t))^2 dt}$$

$$i_{eff} = I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} (i(t))^2 dt}$$

Formfaktor

$$F = \frac{u_{eff}}{|\bar{u}|}$$

$$F = \frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{2}} \quad \text{Sinus}$$

Scheitelfaktor

$$\sigma = \frac{\hat{u}}{u_{eff}}$$

$$\sigma = \sqrt{2} \quad \text{Sinus}$$

3.5 Sinusspannung

Sinusschwingung

$[\omega] = \text{rad s}^{-1}$: Kreisfrequenz
 $[\varphi] = \text{rad}$: Phasenverschiebung
 $[\hat{u}] = \text{V}$: Spitzenwert der Spannung

$$u(t) = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$i(t) = \hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i)$$

$$\omega = \frac{\varphi_u}{t} = 2\pi f = 2\pi \frac{1}{T}$$

$$t_u = -\frac{\varphi_u}{\omega}$$

Addition zweier Schwingungen

$$u_1(t) = \hat{u}_1 \sin(\omega t + \varphi_{u1})$$

$$u_2(t) = \hat{u}_2 \sin(\omega t + \varphi_{u2})$$

$$\hat{u}_{12} = \sqrt{\hat{u}_1^2 + \hat{u}_2^2 + 2\hat{u}_1\hat{u}_2 \cos(\varphi_{u1} - \varphi_{u2})}$$

$$\varphi_{u12} = \arctan\left(\frac{\hat{u}_1 \sin \varphi_{u1} + \hat{u}_2 \sin \varphi_{u2}}{\hat{u}_1 \cos \varphi_{u1} + \hat{u}_2 \cos \varphi_{u2}}\right)$$

Nenner $< 0 \Rightarrow \varphi_{u12} + \pi$

Komplexezeiger

$$u(t) = \hat{u}_1 \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$\underline{u}(t) = \hat{u} (\cos(\omega t + \varphi_u) + j \sin(\omega t + \varphi_u))$$

$$\underline{u}(t) = \hat{u} e^{j(\omega t + \varphi_u)}$$

Widerstand

$$\underline{u} = R \underline{i}$$

$$\underline{i} = \frac{1}{R} \underline{u}$$

$$\underline{Z} = R$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{R}$$

$$P = RI^2$$

$$Q = 0$$

$$\lambda = \cos \varphi = 0$$

Induktivität

$$\underline{u} = L \frac{di}{dt}$$

$$\underline{i} = \frac{1}{L} \int \underline{u} dt$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = j\omega L = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$\underline{Y} = \frac{\underline{i}}{\underline{u}} = \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{\omega L} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$P = 0$$

$$Q = \frac{1}{\omega L} U^2$$

$$Q = \omega L I^2$$

$$\lambda = \cos \varphi = 1$$

Kapazität

$$\underline{u} = \frac{1}{C} \int \underline{i} dt$$

$$\underline{u} = C \frac{di}{dt}$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$\underline{Y} = \frac{\underline{i}}{\underline{u}} = j\omega C = \omega C e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$Q = -\omega C U^2$$

$$Q = -\frac{1}{\omega C} I^2$$

$$\lambda = \cos \varphi = 1$$

3.5.1 Widerstand**Impedanz**

$[Z] = \Omega$: Impedanz
 $[R] = \Omega$: Wirkwiderstand
 $[X] = \Omega$: Blindwiderstand

$$\underline{Z} = \operatorname{Re}\{\underline{Z}\} + j \operatorname{Im}\{\underline{Z}\} = R + jX = Z e^{j\varphi}$$

$$\underline{Z} = \sqrt{R^2 + X^2} e^{j \arctan \frac{X}{R}}$$

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

$$R = Z \cdot \cos \varphi$$

$$X = Z \cdot \sin \varphi$$

$$X = \omega L$$

$$X = -\frac{1}{\omega C}$$

$$L = \frac{X}{\omega}$$

$$C = -\frac{1}{\omega X}$$

Admitanz

$[Y] = S$: Admitanz
 $[G] = S$: Wirkleitwert (Konduktanz)
 $[B] = S$: Blindleitwert (Suszeptanz)

$$\underline{Y} = \operatorname{Re}\{\underline{Y}\} + j \operatorname{Im}\{\underline{Y}\} = G + jB = Y e^{j\gamma}$$

$$\underline{Y} = \sqrt{G^2 + B^2} e^{j \arctan \frac{B}{G}}$$

$$\gamma = \varphi_u - \varphi_i$$

$$G = Y \cdot \cos \gamma$$

$$B = Y \cdot \sin \gamma$$

$$B = -\frac{1}{\omega L}$$

$$B = \omega C$$

$$L = -\frac{1}{\omega B}$$

$$C = \frac{B}{\omega}$$

3.6 Leistung**Momentanleistung**

$[P] = W$: Leistung

$$P = u(t) \cdot i(t)$$

Mittlere Leistung

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t) dt$$

$$P = UI \cdot \cos(\varphi_u - \varphi_i)$$

$$P = \operatorname{Re}\{S\}$$

Blindleistung

$[S] = \text{var}$: Scheinleistung

$$Q = UI \cdot \sin(\varphi_u - \varphi_i)$$

$$Q = \operatorname{Im}\{S\}$$

Scheinleistung

[S] = var: Scheinleistung

$$\underline{S} = \underline{Z} I^2$$

$$\underline{S} = R I^2 + j X I^2$$

$$\underline{S} = P + jQ$$

$$S = |\underline{S}|$$

$$S = U \cdot I$$

Leistungsfaktor

$$\lambda = \frac{P}{S}$$

$$\lambda = \cos(\varphi_u - \varphi_i)$$

Sinus