CANTABRIA 2018

OPCIÓN 2 · EJERCICIO 2

R. ALCARAZ DE LA OSA · J. SÁNCHEZ MAZÓN

En el SI, el vector de posición de un cuerpo que se mueve en una trayectoria plana es $\vec{r} = (2\cos\pi t + 1)\,\hat{\imath} + (2\sin\pi t - 2)\,\hat{\jmath}$.

(a) Demuestra que el movimiento es circular uniforme.

(b) Calcula el radio y la posición del centro de la trayectoria.

(c) Calcula el periodo y la frecuencia del movimiento.

Solución

(a) Para demostrar que el MOVIMIENTO es CIRCULAR UNIFORME vamos a demostrar primero que la TRAYECTORIA es una CIRCUNFERENCIA. Para ello escribimos las componentes x e y:

$$x = 2\cos\pi t + 1 \longrightarrow \cos\pi t = \frac{x-1}{2}$$
$$y = 2\sin\pi t - 2 \longrightarrow \sin\pi t = \frac{y+2}{2}$$

Aplicamos la ECUACIÓN FUNDAMENTAL de la TRIGONOMETRÍA[1]:

$$\sin^2\pi t + \cos^2\pi t = 1$$
$$\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+2}{2}\right)^2 = 1$$

la cual podemos escribir de la forma:

$$\boxed{(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4} \qquad (1)$$

que puede ya compararse directamente con la ECUACIÓN GENERAL de una CIRCUNFERENCIA[2]. Así hemos demostrado que el MOVIMIENTO es CIRCULAR. Para demostrar que además es UNIFORME, calculamos la ACELERACIÓN TANGENCIAL y comprobamos que es igual a CERO.

Calculamos primero el vector VELOCIDAD:

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = -2\pi\sin\pi t\,\hat{\imath} + 2\pi\cos\pi t\,\hat{\jmath}$$

Calculamos la ACELERACIÓN TANGENCIAL como la DERIVADA del MÓDULO de la VELOCIDAD:

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{(-2\pi\sin\pi t)^2 + (2\pi\cos\pi t)^2} = 2\pi\ \mathrm{m/s}$$

$$\boxed{a_\mathrm{t} = \frac{\mathrm{d}|\vec{v}|}{\mathrm{d}t} = 0}$$

por lo que el MOVIMIENTO es CIRCULAR UNIFORME.

(b) Comparando (1) con la ECUACIÓN GENERAL de una CIRCUNFERENCIA de radio r centrada en (a, b), (2), tenemos:

$$\boxed{\begin{aligned} \text{RADIO} &= 2\,\mathrm{m} \\ \text{CENTRO} &= (1\,\mathrm{m}, -2\,\mathrm{m}) \end{aligned}}$$

[1] $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

[2]
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \qquad (2)$$

(c) Como hemos demostrado que el MOVIMIENTO es CIRCULAR UNIFORME, podemos utilizar la RELACIÓN entre el módulo de la VELOCIDAD y el PERIODO:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \rightarrow \boxed{T} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{\cancel{2\pi} \cdot 2\,\cancel{\mathrm{m}}}{\cancel{2\pi}\,\cancel{\mathrm{m}}/\mathrm{s}} = \boxed{2\,\mathrm{s}}$$

Y para calcular la FRECUENCIA, f, utilizamos la relación[3]:

$$\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\,\mathrm{s}} = 0.5\,\mathrm{s}^{-1} = 0.5\,\mathrm{Hz}}$$

[3] La FRECUENCIA ANGULAR, ω, vendría dada por:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = \pi\,\mathrm{rad/s}$$