GALICIA 2016

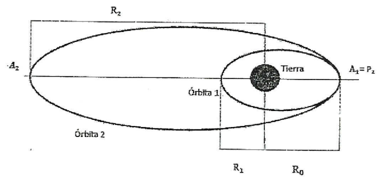
EJERCICIO 1

R. ALCARAZ DE LA OSA · J. SÁNCHEZ MAZÓN

Un satélite de comunicaciones de masa m_1 se encuentra en una órbita elíptica en la que la distancia del centro de la Tierra a su perigeo es $R_1 = 10\,000$ km y a su apogeo es $R_0 = 30\,000$ km.

Otro satélite de masa m_2 cuya órbita también es elíptica con distancia al apogeo de $R_2 = 70\,000$ km, posee la misma dirección del eje mayor y su perigeo coincide en el espacio con el apogeo del primer satélite, pasando simultáneamente por él, por lo que se produce un choque inelástico entre los dos. Como resultado del choque ambos satélites comienzan a describir una órbita circular de radio R_0.

Calcular la relación entre las masas asumiendo que los satélites giran en el mismo sentido alrededor de la Tierra.



Solución

Planteamos el choque inelástico, conservando el momento lineal total[1]:

$$p_{\text{antes}} = p_{\text{después}}$$
$$m_1 v_1^{\mathrm{A}} + m_2 v_2^{\mathrm{P}} = (m_1 + m_2) v_0 \tag{1}$$

donde v_1^{A} es la velocidad del satélite 1 en su apogeo, v_2^{P} es la velocidad del satélite 2 en su perigeo y v_0 es la velocidad del conjunto $(m_1 + m_2)$ tras el choque.

Tras el choque, ambos satélites describen una órbita circular, por lo que la velocidad v_0 está relacionada con el radio de la órbita a través de la expresión[2]:

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R_0}} \tag{2}$$

Dividiendo (1) entre m_2 obtenemos la relación entre masas m_1/m_2:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_0 - v_2^{\mathrm{P}}}{v_1^{\mathrm{A}} - v_0} \tag{3}$$

Podemos relacionar las velocidades en el perigeo y apogeo con las respectivas distancias imponiendo la conservación de la energía total a lo largo de cada una de las órbitas elípticas[3]:

$$E_{\mathrm{P}} = E_{\mathrm{A}}$$
$$\frac{1}{2} m v_{\mathrm{P}}^2 - \frac{GMm}{r_{\mathrm{P}}} = \frac{1}{2} m v_{\mathrm{A}}^2 - \frac{GMm}{r_{\mathrm{A}}}$$
$$v_{\mathrm{P}}^2 - v_{\mathrm{A}}^2 = 2GM\left(\frac{1}{r_{\mathrm{P}}} - \frac{1}{r_{\mathrm{A}}}\right) \tag{4}$$

A su vez, podemos relacionar las velocidades en el perigeo y en el apogeo imponiendo la conservación del momento angular[4]:

$$L_{\mathrm{P}} = L_{\mathrm{A}}$$
$$m r_{\mathrm{P}} v_{\mathrm{P}} = m r_{\mathrm{A}} v_{\mathrm{A}}$$
$$r_{\mathrm{P}} v_{\mathrm{P}} = r_{\mathrm{A}} v_{\mathrm{A}} \tag{5}$$

[1] Como no nos dicen nada, suponemos que es un choque totalmente inelástico. Además, podemos omitir el carácter vectorial pues ambos satélites se mueven en la misma dirección (y sentido) en el momento del choque.

[2] Esta es la expresión de la velocidad orbital, la cual se puede deducir fácilmente imponiendo que la fuerza de atracción gravitatoria actúe como fuerza centrípeta:

$$F_{\mathrm{g}} = F_{\mathrm{c}}$$
$$\frac{GM\cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{m}v^2}{\cancel{r}}$$

[3] La energía total es la suma de la energía cinética, $1/2mv^2$, más la energía potencial, $-GMm/r$. Esta energía total es constante a lo largo de toda la órbita, en particular es igual en el perigeo y en el apogeo.

[4] Se cumple que el vector velocidad, $\vec{v}$, y el vector posición, $\vec{r}$, son perpendiculares en el perigeo y en el apogeo, por lo que el módulo del momento angular, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, puede escribirse como $L = mrv$.

Despejando $v_\mathrm{A} = r_\mathrm{P}/r_\mathrm{A} \cdot v_\mathrm{P}$ de (5) y sustituyendo en (4) obtenemos:

$$v_\mathrm{P} = \sqrt{\frac{2GM}{r_\mathrm{P}\left(1 + \frac{r_\mathrm{P}}{r_\mathrm{A}}\right)}} \quad \text{y} \quad v_\mathrm{A} = \frac{r_\mathrm{P}}{r_\mathrm{A}}\sqrt{\frac{2GM}{r_\mathrm{P}\left(1 + \frac{r_\mathrm{P}}{r_\mathrm{A}}\right)}}$$

Particularizando para v_2^P y v_1^A:

$$v_2^\mathrm{P} = \sqrt{\frac{2GM}{R_0\left(1 + \frac{R_0}{R_2}\right)}} \quad \text{y} \quad v_1^\mathrm{A} = \frac{R_1}{R_0}\sqrt{\frac{2GM}{R_1\left(1 + \frac{R_1}{R_0}\right)}}$$

Sustituyendo en (3):

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_0 - v_2^\mathrm{P}}{v_1^\mathrm{A} - v_0} = \frac{\sqrt{\frac{GM}{R_0}} - \sqrt{\frac{2GM}{R_0\left(1+\frac{R_0}{R_2}\right)}}}{\frac{R_1}{R_0}\sqrt{\frac{2GM}{R_1\left(1+\frac{R_1}{R_0}\right)}} - \sqrt{\frac{GM}{R_0}}} = \cdots = \frac{1 - \sqrt{\frac{2R_2}{R_0+R_2}}}{\sqrt{\frac{2R_1}{R_0+R_1}} - 1}$$

Sustituyendo valores:

$$\boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{5}\left(\sqrt{35} - 5\right)\left(\sqrt{2} + 2\right) \approx 0.626}$$