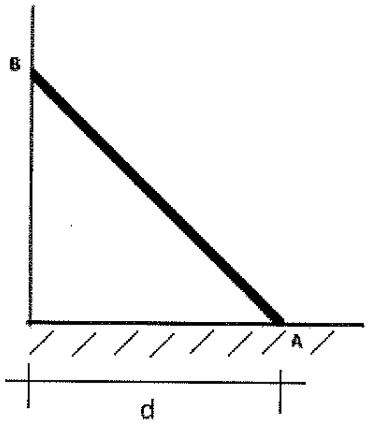
PAÍS VASCO 2018

EJERCICIO F2

R. ALCARAZ DE LA OSA · J. SÁNCHEZ MAZÓN

Una barra homogénea de longitud 10 m y masa 15 kg, se apoya sin rozamiento en B contra una pared vertical y por su extremo A sobre un suelo horizontal con coeficiente de rozamiento $\mu_1 = 0.1$.



(a) Encontrar el valor máximo d para que la barra no deslice.

A partir de esa distancia horizontal, es necesario colocar un peso P' sobre el suelo para evitar que la barra deslice. El coeficiente de rozamiento de P' sobre el suelo es $\mu_2 = 0.15$. Si el peso P' se encuentra a una distancia $d = 2.5$ m de la vertical:

(b) Calcula cuál debe ser el peso mínimo P' para mantener la barra en la posición señalada.

Solución

(a) Como nos piden el valor máximo d para que la barra no deslice, imponemos su EQUILIBRIO ESTÁTICO:

$$\text{TRASLACIÓN: } \sum \vec{F} = 0 \tag{1}$$

$$\text{ROTACIÓN: } \sum \vec{\tau} = 0 \tag{2}$$

A partir del EQUILIBRIO de FUERZAS (1):

$$\text{EJE } x\text{: } F_B - f_r = 0 \rightarrow F_B = f_r = \mu_1 N = \mu_1 mg$$

$$\text{EJE } y\text{: } N - mg = 0 \rightarrow N = mg$$

Y a partir del EQUILIBRIO de MOMENTOS (2), tomando como referencia un eje que pasa por A (sentido horario positivo):

$$F_B \cdot \sqrt{l^2 - d^2} - mg \cdot \frac{d}{2} = 0$$

$$\mu_1 mg\sqrt{l^2 - d^2} - mg\frac{d}{2} = 0$$

$$\mu_1^2\left(l^2 - d^2\right) = \frac{d^2}{4}$$

$$4\mu_1^2 l^2 - 4\mu_1^2 d^2 = d^2$$

$$d = \frac{2\mu_1 l}{\sqrt{1 + 4\mu_1^2}}$$

Sustituyendo valores[1]:

$$\boxed{d = 1.96\,\text{m}}$$

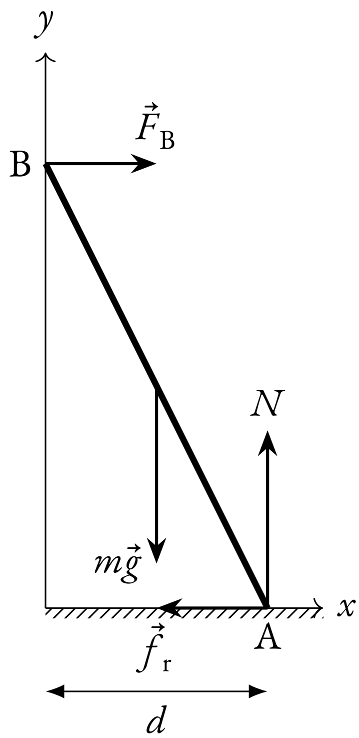


Figura 1: FUERZAS que actúan sobre la barra: $m\vec{g}$ es el peso de la barra, actuando sobre su centro de masas; $\vec{N}$ y $\vec{F}_B$ son las reacciones del suelo y de la pared, respectivamente; y $\vec{f}_r = \mu_1 N$ es la fuerza de rozamiento. Notar que para calcular los MOMENTOS de cada fuerza utilizamos la expresión:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \rightarrow \tau = rF\sin\theta$$

[1] $\mu_1 = 0.1$ y $l = 10$ m.

(b) Imponemos el EQUILIBRIO ESTÁTICO tanto para la BARRA como para el PESO $\vec{P}'$, teniendo en cuenta las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo:

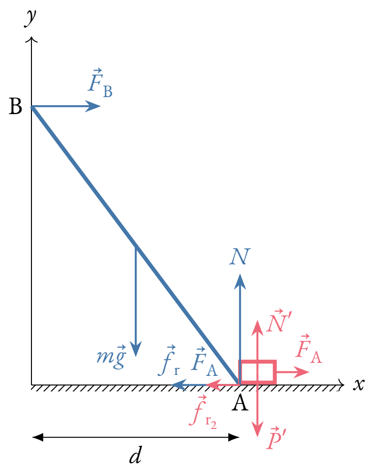


Figura 2: FUERZAS que actúan sobre la barra (azul) y el peso P' (rojo): además de las fuerzas anteriores (ver figura 1), tenemos el peso $\vec{P}'$ y la normal $\vec{N}'$, la fuerza que se ejercen la barra y el peso mutuamente ($\vec{F}_A$) y el rozamiento del peso ($\vec{f}_{r_2}$).

Barra (azul)

Además de las fuerzas anteriores, ahora actúa la fuerza F_A ejercida por P':

$$\text{EJE } x\text{: } F_B - f_r - F_A = 0 \rightarrow F_B = f_r + F_A \tag{3}$$

$$\text{EJE } y\text{: } N - mg = 0 \rightarrow N = mg$$

Peso P' (rojo)

Actúan la fuerza F_A ejercida por la barra y el rozamiento f_{r_2}:

$$\text{EJE } x\text{: } F_A - f_{r_2} = 0 \rightarrow F_A = f_{r_2}$$

$$\text{EJE } y\text{: } N' - P' = 0 \rightarrow N' = P'$$

El EQUILIBRIO ROTACIONAL de la BARRA implica:

$$F_B \cdot \sqrt{l^2 - d^2} - mg \cdot \frac{d}{2} = 0 \rightarrow F_B = \frac{mgd}{2\sqrt{l^2 - d^2}} \tag{4}$$

Igualando (3) y (4) y teniendo en cuenta que $F_A = f_{r_2} = \mu_2 N' = \mu_2 P'$:

$$\begin{aligned}
f_r + F_A &= \frac{mgd}{2\sqrt{l^2 - d^2}} \\
f_r + f_{r_2} &= \frac{mgd}{2\sqrt{l^2 - d^2}} \\
\mu_1 mg + \mu_2 P' &= \frac{mgd}{2\sqrt{l^2 - d^2}} \\
P' &= \frac{mg}{\mu_2}\left(\frac{d}{2\sqrt{l^2 - d^2}} - \mu_1\right)
\end{aligned}$$

Sustituyendo valores[2]:

$$\boxed{P' = 28.52\,\text{N}}$$

[2] $m = 15\,\text{kg}$, $g = 9.8\,\text{N/kg}$, $\mu_2 = 0.15$, $d = 2.5\,\text{m}$, $l = 10\,\text{m}$ y $\mu_1 = 0.1$.