OPCIÓN DE EXAMEN N° 2

1. Dos cuerpos A y B, cada uno de ellos de masa 4 10^7 kg, se encuentran fijos en dos puntos del plano (x, y), el cuerpo A en el punto (–300, 0) y el cuerpo B en el punto (200, 0), con las distancias dadas en metros.
En el punto (–24, 0) se encuentra una esfera de masa 2 kg que puede moverse libremente.

a) [1 PUNTO] Hallar la fuerza ejercida (módulo, dirección y sentido) sobre la esfera en su posición inicial.
b) [0,5 PUNTOS] Calcular el trabajo necesario para llevar la esfera desde el punto (–24, 0) hasta el punto (0, 48).
c) [0,5 PUNTOS] Describir brevemente el concepto de `potencial gravitatorio´.

2. Un oscilador armónico estrá formado por un muelle de constante elástica 1.4 10^3 N m^{-1} y un cuerpo sólido de masa 2 kg.

a) [1 PUNTO] Si el desplazamiento del cuerpo unido al muelle viene dado por la ecuación

$$x(t) = 5 \text{ sen} \left(2\pi \frac{t}{T} + ø\right)$$

hallar los valores de T y Ø, sabiendo que en el instante inicial $t = 0$ su posición es nula $x(t = 0) = 0$ m.
b) [1 PUNTO] Hallar la energía cinética que tiene el cuerpo en el punto central de la oscilación.

3. Una lámina horizontal de diamante de índice de refracción 2.50 de caras plano-paralelas, con aire encima de ella, reposa sobre una capa de agua, de índice de refracción 1.33. Sobre la lámina de diamante, incide un rayo de luz monocromática de longitud de onda 760 nm, con ángulo de incidencia de 20°. Determínese:

a) [1 PUNTO] El valor del ángulo que forma el rayo emergente de la lámina de diamante hacia el agua con la normal de la misma.
b) [1 PUNTO] La longitud de onda de la luz que atraviesa el diamante, sabiendo que la frecuencia de la luz incidente y la frecuencia de la luz refractada son iguales.

Datos: 1 nm = 10^{-9} m.

4. Un campo magnético espacialmente uniforme y que varía con el tiempo según la expresión

$$B(t) = 5.8 \text{ sen } (3t)$$

(en unidades del SI) atraviesa perpendicularmente una espira circular de radio 100 cm.

a)[1 PUNTO] Hallar el flujo magnético que atraviesa la espira en función del tiempo.
b)[0,5 PUNTOS] Hallar la fuerza electromotriz máxima de la corriente inducida.
c)[0,5 PUNTOS] Explicar brevemente el `principio de inducción de Faraday´.

5. La actividad de una muestra de una sustancia radiactiva queda dividida por 3 cuando han transcurrido 987 días.

a) [1 PUNTO] Hallar la constante de desintegración y el período de semidesintegración de dicha sustancia.
b) [1 PUNTO] Si cuando han transcurrido 500 días, la actividad de la sustancia es de 10^5 Bq, ¿cuántos átomos radiactivos había inicialmente?

Datos: 1 Bq = 1 desintegración por segundo.

SEPTIEMBRE 2014 – OPCIÓN 2

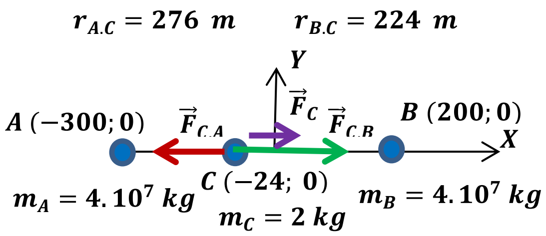
CONSTANTES FÍSICAS			
Velocidad de la luz en el vacío	$c = 3\ 10^{8}$ m/s	Masa del electrón	$m_{e-} = 9.1\ 10^{-31}$ kg
Constante de gravitación universal	$G = 6.7\ 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}	Masa del protón	$m_{p+} = 1.7\ 10^{-27}$ kg
Constante de Coulomb	$k = 9\ 10^{9}$ N m^2 C^{-2}	Carga del protón	$q_{p+} = 1.6\ 10^{-19}$ C
Constante de Planck	$h = 6.6\ 10^{-34}$ J s	Carga del electrón	$q_{e-} = -1.6\ 10^{-19}$ C

Nota: estas constantes se facilitan a título informativo.

1.- Dos cuerpos A y B, cada uno de ellos de masa 4.10^{7} kg, se encuentran fijos en dos puntos del plano (x; y), el cuerpo A en el punto (-300; 0) y el cuerpo B en el puno (200; 0), con las distancias dadas en metros.

En el punto (-24; 0) se encuentra una esfera de masa 2 kg que puede moverse libremente.

a) **(1 p)** Hallar la fuerza ejercida (módulo, dirección y sentido) sobre la esfera en su posición inicial.



$$\vec{F}_C = \vec{F}_{C,A} + \vec{F}_{C,B}$$

$$\vec{F}_C = G\,.\,\frac{m_A\,.\,m_C}{(r_{A,C})^2}\,.\,(-\vec{\imath}) + G\,.\,\frac{m_B\,.\,m_C}{(r_{B,C})^2}\,.\,\vec{\imath}$$

$$\vec{F}_C = G\,.\,m_A\,.\,m_C\,.\left(\frac{1}{(r_{B,C})^2} - \frac{1}{(r_{A,C})^2}\right).\,\vec{\imath}$$

$$\vec{F}_C = 6,67.10^{-11}\,.4.10^{7}\,.\ 2\,.\left(\frac{1}{(224)^2} - \frac{1}{(276)^2}\right).\ \vec{\imath} = 3,63.10^{-8}\ \vec{\imath}\ \ N$$

b) **(0,5 p)** Calcular el trabajo necesario para llevar la esfera desde el punto (-24; 0) hasta el punto (0; 48).

Vamos a calcular la energía potencial de la masa C en los puntos C (-24; 0) y en el punto D (0; 48), debido a la presencia de las masas A y B.

$$E_{p,C} = -G\,.\,\frac{m_A\,.\,m_C}{r_{A,C}} + \left(-G\,.\,\frac{m_B\,.\,m_C}{r_{B,C}}\right) = -G\,.\ m_A\,.\,m_C\,.\left(\frac{1}{r_{A,C}} + \frac{1}{r_{B,C}}\right)$$

$$E_{p,C} = -6,67.10^{-11}\,.\ 4.10^{7}\,.\ 2\,.\left(\frac{1}{276} + \frac{1}{224}\right) = -4,31.10^{-5}\ J$$

Calculamos las distancias de las masas A y B al punto D:

$$r_{A,D} = \sqrt{300^2 + 48^2} = 303,8\,m \qquad r_{B,D} = \sqrt{200^2 + 48^2} = 205,7\,m$$

$$E_{p,D} = -G\,.\,\frac{m_A\,.\,m_C}{r_{A,D}} + \left(-G\,.\,\frac{m_B\,.\,m_C}{r_{B,D}}\right) = -G\,.m\,.m_C\,.\left(\frac{1}{r_{A,D}} + \frac{1}{r_{B,D}}\right)$$

$$E_{p,D} = -6,67.10^{-11}\,.\ 4.10^{7}.\ 2\,.\left(\frac{1}{303,8} + \frac{1}{205,7}\right) = -4,35.10^{-5}\ J$$

$$(W_{C\to D})_{Fgravitatoria} = -\Delta(E_p) = (E_{p,C}) - (E_{p,D}) = -4,31.10^{-5} - (-4,35.10^{-5}) = 4.10^{-7}\ J$$

El resultado indica que el proceso es espontáneo. La masa C se mueve espontáneamente de la posición C a la D debido a la fuerza gravitatoria, a costa de una disminución de su energía potencial gravitatoria.

c) **(0,5 p)** Describir brevemente el concepto de "potencial gravitatorio"

La existencia de una masa M en un punto del espacio hace que, al colocar cualquier otra masa m en un punto de su entorno, ésta adquiera una energía potencial. Es decir, la existencia de una masa M en un punto del espacio dota a los puntos de su alrededor de una propiedad escalar que se pone de manifiesto al poner otra masa a su alrededor, a la que llamamos potencial gravitatorio. Definimos el potencial gravitatorio, V, en un punto como la energía potencial que tendría una partícula de masa unidad colocada en dicho punto.

$$V_x = \frac{E_{p,x}}{m} = -G \, . \, \frac{M}{r_x} \quad (J/kg)$$

También podemos definir el potencial gravitatorio en un punto del campo gravitatorio como una magnitud escalar que representa el trabajo por unidad de masa que debe realizar una fuerza externa para transportar un cuerpo, a velocidad constante, desde el infinito hasta un punto del campo gravitatorio.

2.- Un oscilador armónico está formado por un muelle de constante elástica 1,4.10^3 N.m^{-1} y un cuerpo sólido de masa 2 kg.

a) **(1 p)** Si el desplazamiento del cuerpo unido al muelle viene dado por la ecuación, $x\,(t) = 5\,.\,sen\left(2\pi\,.\,\frac{t}{T} + \emptyset\right)$, hallar los valores de T y $\emptyset$, sabiendo que en el instante inicial su posición es nula, $x\,(t = 0) = 0\ m$.

Para una masa unida a un muelle se cumple:

$$\left.\begin{array}{r} \overrightarrow{F_R} = -K\,.\,\vec{x} \\ \vec{F} = m\,.\,\vec{a} = m\,.\,(-\,\omega^2\,.\,\vec{x}) \end{array}\right\} \Rightarrow \ K = m\,.\,\omega^2 = m\,.\,\frac{4\pi^2}{T^2} \ \Rightarrow \ T = 2\pi\,.\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\,.\sqrt{\frac{2}{1,4.10^3}} = 0,237\ s$$

$$x\,(t = 0) = 0 \ \Rightarrow \ 5\,.\,sen\,(\emptyset) = 0 \ \Rightarrow \ sen\,(\emptyset) = 0 \ \Rightarrow \ \emptyset = \begin{cases} 0\ rad \\ \pi\ rad \end{cases}$$

El problema no nos da datos sobre la velocidad en t = 0, por lo que no podemos discriminar entre los dos posibles valores de $\emptyset$.

b) **(1 p)** Hallar la energía cinética que tiene el cuerpo en el punto central de la oscilación.

Para un m.a.s. la velocidad en función de la posición es:

$$v = \pm\,\omega\,.\sqrt{A^2 - x^2}$$

De modo que la energía cinética en función de la posición es:

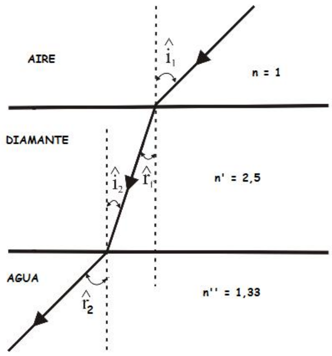
$$E_c = \frac{1}{2}\,.\,m\,.\,v^2 = \frac{1}{2}\,.\,m\,.\left(\pm\,\omega\,.\sqrt{A^2 - x^2}\right)^2 = \frac{1}{2}\,.\,K\,.\,(A^2 - x^2)$$

$$E_c\,(x = 0) = \frac{1}{2}\,.\,K\,.\,A^2 = \frac{1}{2}\,.\,1,4.10^3\,.\,5^2 = 17500\ J$$

3.- Una lámina horizontal de diamante de índice de refracción 2,50 de caras plano-paralelas, con aire encima de ella, reposa sobre una capa de agua, de índice de refracción 1,33. Sobre la lámina de diamante, incide un rayo de luz monocromática de longitud de onda 760 nm, con un ángulo de incidencia de 20º. Determínese:

DATO: 1 nm = 10^{-9} m

a) **(1 p)** El valor del ángulo que forma el rayo emergente de la lámina de diamante hacia el agua con la normal de la misma.



Aplicamos la ley de Snell de la refracción entre el aire y el diamante:

$$n\,.\,sen\ \widehat{\iota_1} = n'.\ sen\ \widehat{r_1} \Rightarrow 1\,.\,sen\ 20° = 2,5\,.\,sen\ \widehat{r_1} \Rightarrow \widehat{r_1} = 7,86°$$

Por geometría: $\widehat{r_1} = \widehat{\iota_2}$

Si aplicamos ahora la ley de Snell de la refracción entre el diamante y el agua:

$$n'.\ sen\ \widehat{\iota_2} = n''.\ sen\ \widehat{r_2} \Rightarrow 2,5\,.\,sen\ 7,86° = 1,33\,.\,sen\ \widehat{r_2} \Rightarrow \widehat{r_2} = 14,9°$$

b) **(1 p)** La longitud de onda de la luz que atraviesa el diamante, sabiendo que la frecuencia de la luz incidente y la frecuencia de luz refractada son iguales.

$$f_{aire} = f_{diamante} \Rightarrow \frac{v_{aire}}{\lambda_{aire}} = \frac{v_{diamante}}{\lambda_{diamante}}$$

$$\lambda_{diamante} = \lambda_{aire}\,.\,\frac{v_{diamante}}{v_{aire}} = \lambda_{aire}\,.\,\frac{\frac{c}{n_{diamante}}}{c} = \frac{\lambda_{aire}}{n_{diamante}} = \frac{760}{2,5} = 304\ nm$$

4.- Un campo magnético espacialmente uniforme y que varía con el tiempo según la expresión, $B\,(t) = 5,8\,.\,sen\,(3t)$, en unidades del S.I., atraviesa perpendicularmente una espira circular de radio 100 cm.

a) **(1 p)** Halla el flujo magnético que atraviesa la espira en función del tiempo.

Por definición, el flujo magnético es:

$$\phi = \vec{B}\,.\,\vec{S} = B\,.\,S\,.\cos\theta$$

Siendo θ el ángulo formado entre los vectores intensidad de campo magnético y superficie. En este caso $\theta = 0\,rad$, por lo que el flujo será:

$$\phi = \vec{B}\,.\,\vec{S} = B\,.\,S\,.\cos\theta = B\,.\,\pi\,.\,R^2\,.\,cos\,0° = 5,8\,.\,sen\,(3t)\,.\,\pi\,.\,1^2 = 18,22\,.\,sen\,(3t)\ (Wb)$$

a) **(0,5 p)** Hallar la fuerza electromotriz máxima de la corriente inducida.

$$\varepsilon_{ind} = -N\,.\,\frac{d\phi}{dt} = -N\,.\,\frac{d\,(18,22\,.\,sen\,(3t))}{dt} = -1\,(18,22\,.\,3\,.\,cos\,(3\,t) = -54,66\,.\,cos\,(3\,t)\ (V)$$

$$(\varepsilon_{ind})_{máx} \Rightarrow cos\,(3t) = \pm 1 \Rightarrow (\varepsilon_{ind})_{máx} = \pm 54,66\ V$$

b) **(0,5 p)** Explicar brevemente el "principio de inducción de Faraday"

La inducción electromagnética se basa en dos principios fundamentales:

- **Toda variación de flujo que atraviesa un circuito cerrado produce en éste una corriente inducida.**
- **La corriente inducida es una corriente instantánea, pues sólo dura mientras dura la variación de flujo.**

La inducción electromagnética se rige por dos leyes:

- **Ley de Faraday**

"La corriente inducida es producida por una fuerza electromotriz inducida que es directamente proporcional a la rapidez con la que varía el flujo y directamente proporcional al número de espiras del inducido"

$$\varepsilon \propto N \,.\, \frac{\emptyset_1 - \emptyset_0}{\Delta t} \propto N \,.\, \frac{\Delta \emptyset}{\Delta t}$$

- **Ley de Lenz**

"La corriente se induce en un sentido tal que los efectos que genera tienden a oponerse al cambio de flujo que la origina"

5.- La actividad de una muestra de una sustancia radiactiva queda dividida por 3 cuando han transcurrido 987 días.

DATO: 1 Bq = 1 desintegración por segundo

a) **(1 p)** Halla la constante de desintegración y el período de semidesintegración de dicha sustancia

$$A = A_0 \,.\, e^{-\lambda \,.\, t} \Rightarrow \frac{A_0}{3} = A_0 \,.\, e^{-\lambda \,.\, t} \Rightarrow \; ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\lambda \,.\, t \;\Rightarrow \lambda = -\frac{ln\left(\frac{1}{3}\right)}{t}$$

$$\lambda = -\frac{-1,099}{987 \,.\, 24 \,.\, 3600} = 1,29.10^{-8}\; s^{-1}$$

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2}{1,29.10^{-8}} = 5,37.10^{7}\; s = 621,9\; días$$

b) **(1 p)** Si cuando han transcurrido 500 días, la actividad de la sustancia es de 10^5 Bq, ¿cuántos átomos radiactivos había inicialmente?

$$A = A_0 \,.\, e^{-\lambda \,.\, t} \;\Rightarrow\; A_0 = \frac{A}{e^{-\lambda \,.\, t}} = \frac{10^5}{e^{-(1,29.10^{-8}\;.\;500\;.\;24\;.\;3600)}} = 1,75.10^5\; Bq$$

$$A_0 = \lambda \,.\, N_0 \quad\Rightarrow\quad N_0 = \frac{A_0}{\lambda} = \frac{1,75.10^5}{1,29.10^{-8}} = 1,36.10^{13}\; átomos$$