



## CANTABRIA 2016

### EJERCICIO 2

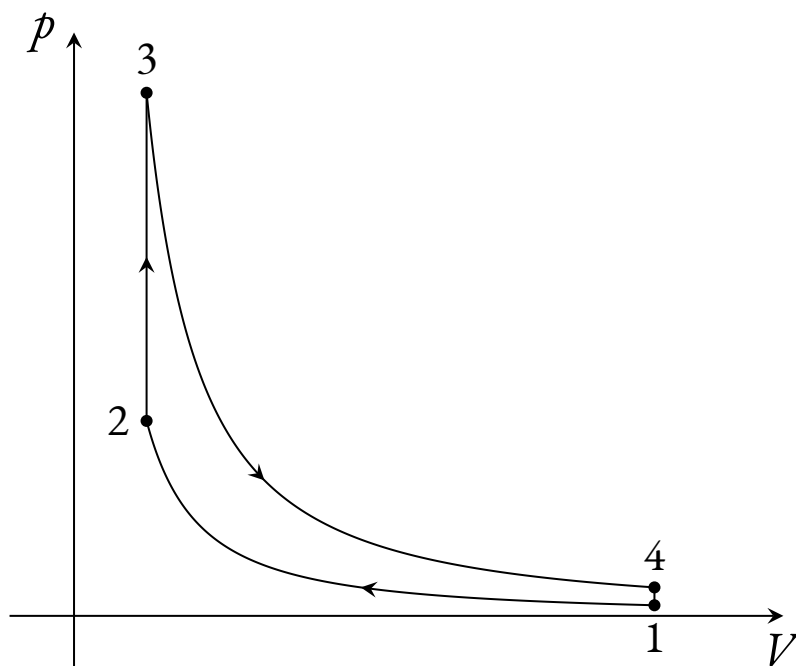
E. ORTEGA GONZÁLEZ · R. ALCARAZ DE LA OSA

Un motor de gasolina de cuatro tiempos, de  $1800 \text{ cm}^3$  de cilindrada y una relación de compresión de 8, trabaja a 3000 rpm. Suponemos que el motor funciona como un ciclo Otto ideal (dos isócoras y dos adiabáticas), y que la mezcla gaseosa que evoluciona es aire comportándose como un gas perfecto. Las condiciones iniciales de la mezcla gaseosa, antes de su compresión, son de 100 kPa y  $20^\circ\text{C}$ . Si la combustión de la mezcla aporta un calor de  $1.74 \text{ kJ/ciclo}$ , calcula:

- (a) La temperatura y presión de cada vértice del ciclo.
- (b) El trabajo y el calor transferidos en cada proceso o etapa.
- (c) El rendimiento del motor y la potencia generada.

#### Solución

El motor funciona como un CICLO OTTO, representado aquí a escala:



Con aportaciones de sleepylavoisier.

Figura 1: CICLO OTTO (a escala) donde se desprecian las etapas de admisión y expulsión de gases (procesos supuestos idénticos y reversibles). La mezcla gaseosa entra en 1 y se comprime adiabáticamente hasta 2. Entonces se calienta (combustión) a volumen constante hasta 3. La fase de potencia está representada por la expansión adiabática de 3 a 4. El enfriamiento se produce a volumen constante de 4 a 1.

- (a) Las condiciones iniciales del motor antes de la compresión son:

$$V_1 = 1800 \text{ cm}^3; \quad p_1 = 100 \text{ kPa} = 1 \times 10^5 \text{ Pa}; \quad T_1 = 20^\circ\text{C} = 293.15 \text{ K}$$

Para el aire, considerado como gas ideal diatómico<sup>1</sup>:

$$c_v = \frac{5}{2}R; \quad c_p = \frac{7}{2}R; \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{7}{5} = 1.4$$

<sup>1</sup> El TEOREMA DE EQUIPARTICIÓN de la energía establece que:

$$c_v = \frac{f}{2}R,$$

donde  $f$  es el número de grados de libertad del movimiento molecular. En un gas diatómico, y despreciando las posibles vibraciones, tenemos 3 grados de libertad traslacionales + 2 grados de libertad rotacionales  $\Rightarrow f = 5$ . Como suponemos el aire como un gas perfecto, se cumple la RELACIÓN DE MAYER:

$$c_p - c_v = R$$

*Primera etapa 1 → 2 (compresión, adiabática)*

Suponemos que la compresión es cuasiestática, por lo que aplicamos la LEY DE POISSON para calcular la presión:

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma \rightarrow p_2 = p_1 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma = p_1 r_c^\gamma = 100 \text{ kPa} \cdot 8^{1.4} = 1837.9 \text{ kPa}$$

Para calcular la temperatura utilizamos la ECUACIÓN DE ESTADO DE LOS GASES IDEALES<sup>2</sup>:

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \rightarrow T_2 = T_1 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = T_1 r_c^{\gamma-1} = 293.15 \text{ K} \cdot 8^{0.4} = 673.5 \text{ K}$$

$$^2 pV = nRT.$$

$$\frac{nRT}{V} V^\gamma = \text{cte}$$

$$TV^{\gamma-1} = \text{Cte}$$

*Segunda etapa 2 → 3 (adición de calor, isócara)*

Como es una etapa isócara ( $V$  constante), no se realiza trabajo y según el PRIMER PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA<sup>3</sup>:

$$Q_{2 \rightarrow 3} = \Delta U = U_3 - U_2 = n c_v (T_3 - T_2) = n \frac{5}{2} R (T_3 - T_2) = \frac{5}{2} \frac{p_1 V_1}{T_1} (T_3 - T_2)$$

<sup>3</sup> Utilizando el criterio de signos de la IUPAC:

$$\Delta U = Q + W$$

Además, a partir de la ECUACIÓN DE LOS GASES IDEALES, obtenemos:

$$pV = nRT \Rightarrow nR = \frac{pV}{T}$$

Despejamos  $T_3$ :

$$T_3 = \frac{2T_1 Q_{2 \rightarrow 3}}{5p_1 V_1} + T_2 = \frac{2T_1 Q_{2 \rightarrow 3}}{5p_1 V_1} + T_1 r_c^{\gamma-1} = T_1 \left( \frac{2Q_{2 \rightarrow 3}}{5p_1 V_1} + r_c^{\gamma-1} \right)$$

Sustituyendo valores<sup>4</sup>:

$$T_3 = 1807 \text{ K}$$

<sup>4</sup>  $Q_{2 \rightarrow 3} = 1.74 \text{ kJ}$  es un dato del enunciado. Cuidado que hay que introducir todo en el SI.

Aplicando la ECUACIÓN DE LOS GASES IDEALES<sup>5</sup>:

$$p_3 V_3 = nRT_3 \rightarrow p_3 = \frac{p_1 V_1 T_3}{T_1 V_2} = \frac{p_1 r_c T_3}{T_1}$$

<sup>5</sup> Recordemos que  $V_3 = V_2$  y que  $nR = p_1 V_1 / T_1$ .

Sustituyendo valores:

$$p_3 = 4931.3 \text{ kPa}$$

*Tercera etapa 3 → 4 (expansión, adiabática)*

Calculamos la presión,  $p_4$ , aplicando de nuevo la ley de Poisson:

$$p_3 V_3^\gamma = p_4 V_4^\gamma \rightarrow p_4 = p_3 \left( \frac{V_3}{V_4} \right)^\gamma = p_3 \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^\gamma = \frac{p_3}{r_c^\gamma}$$

Sustituyendo valores:

$$p_4 = 268.3 \text{ kPa}$$

Para calcular la temperatura utilizamos de nuevo la ECUACIÓN DE ESTADO DE LOS GASES IDEALES:

$$T_3 V_3^{\gamma-1} = T_4 V_4^{\gamma-1} \rightarrow T_4 = T_3 \left( \frac{V_3}{V_4} \right)^{\gamma-1} = T_3 \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1} = \frac{T_3}{r_c^{\gamma-1}}$$

Sustituyendo valores:

$$T_4 = 786.5 \text{ K}$$

- (b) Calculamos el trabajo y el calor transferidos en cada etapa aplicando el PRIMER PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA.

*Primera etapa 1 → 2 (compresión, adiabática)*

Al ser una compresión adiabática, no se intercambia calor, por lo que:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = 0 \text{ J}$$

y de acuerdo al PRIMER PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA<sup>6</sup>:

$$W_{1 \rightarrow 2} = \Delta U = U_2 - U_1 = n c_v (T_2 - T_1) = n c_v (T_1 r_c^{\gamma-1} - T_1) = \frac{5}{2} p_1 V_1 (r_c^{\gamma-1} - 1)$$

Sustituyendo valores:

$$W_{1 \rightarrow 2} = 583.8 \text{ J}$$

<sup>6</sup> Utilizamos:

$$c_v = \frac{5}{2} R; \quad nR = \frac{p_1 V_1}{T_1}$$

*Segunda etapa 2 → 3 (adición de calor, isócara)*

Según el enunciado<sup>7</sup>:

$$Q_{2 \rightarrow 3} = 1740 \text{ J}$$

Además, como es un proceso isócara:

$$W_{2 \rightarrow 3} = 0 \text{ J}$$

<sup>7</sup> Aplicando el PRIMER PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA:

$$Q_{2 \rightarrow 3} = \Delta U = U_3 - U_2 = n c_v (T_3 - T_2) = 1740 \text{ J}$$

*Tercera etapa 3 → 4 (expansión, adiabática)*

Al ser una expansión adiabática, no se intercambia calor, por lo que:

$$Q_{3 \rightarrow 4} = 0 \text{ J}$$

y de acuerdo al PRIMER PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA<sup>8</sup>:

$$W_{3 \rightarrow 4} = \Delta U = U_4 - U_3 = n c_v (T_4 - T_3) = \frac{5}{2} \frac{p_1 V_1}{T_1} (T_4 - T_3)$$

Sustituyendo valores:

$$W_{3 \rightarrow 4} = -1566.4 \text{ J}$$

<sup>8</sup> Utilizamos:

$$c_v = \frac{5}{2} R; \quad nR = \frac{p_1 V_1}{T_1}$$

*Cuarta etapa 4 → 1 (expulsión de calor, isócara)*

Aplicando el PRIMER PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA:

$$Q_{4 \rightarrow 1} = \Delta U = U_1 - U_4 = n c_v (T_1 - T_4) = \frac{5}{2} \frac{p_1 V_1}{T_1} (T_1 - T_4) = \frac{5}{2} p_1 V_1 \left( 1 - \frac{T_4}{T_1} \right)$$

Sustituyendo valores:

$$Q_{4 \rightarrow 1} = -757.4 \text{ J}$$

Además, como es un proceso isócara:

$$W_{4 \rightarrow 1} = 0 \text{ J}$$

*Validación*

Podemos aplicar el PRIMER PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA a todo el ciclo, comprobando que la variación de energía interna,  $\Delta U$ , es nula, al ser ésta una función de estado y los estados inicial y final el mismo:

$$Q_{\text{ciclo}} = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 4} + Q_{4 \rightarrow 1} = 0 + 1740 + 0 + (-757.4) = 982.6 \text{ J}$$

$$W_{\text{ciclo}} = W_{1 \rightarrow 2} + W_{2 \rightarrow 3} + W_{3 \rightarrow 4} + W_{4 \rightarrow 1} = 583.8 + 0 + (-1566.4) + 0 = -982.6 \text{ J}$$

$$\Delta U_{\text{ciclo}} = Q_{\text{ciclo}} + W_{\text{ciclo}} = 982.6 \text{ J} - 982.6 \text{ J} = 0 \text{ J}$$

- (c) El RENDIMIENTO del motor,  $\eta$ , es la relación entre el trabajo neto realizado por el motor y el calor absorbido en la combustión<sup>9</sup>:

$$\eta = \frac{|W_{\text{ciclo}}|}{Q_{\text{absorbido}}} = \frac{982.6 \text{ J}}{1740 \text{ J}} = 0.565 \rightarrow \eta = 56.5 \%$$

Para calcular la POTENCIA,  $P$ , conocemos el trabajo neto realizado en un ciclo y sabemos que el motor trabaja a 3000 rpm, lo que significa que efectúa 50 ciclos cada segundo. Al ser un motor de cuatro tiempos, cada cilindro solo realiza trabajo la mitad de los ciclos, es decir, 25 veces por segundo (la otra mitad la emplea en admitir y expulsar gases)<sup>10</sup>:

$$P = 25 \text{ Hz} \cdot 982.6 \text{ J} = 24.6 \text{ kW} = 33.4 \text{ CV}$$

<sup>9</sup> Se puede comprobar que el rendimiento solo depende de la razón de compresión,  $r_c$ , a través de la expresión:

$$\eta = 1 - \frac{1}{r_c^{\gamma-1}} = 1 - \frac{1}{8^{0.4}} = 0.565$$

<sup>10</sup> Utilizamos la relación entre vatios (W) y caballos de vapor (CV):

$$1 \text{ CV} = 735.5 \text{ W}$$