OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

1. Dos cuerpos puntuales idénticos, de masa 600 kg cada uno, se encuentran fijados en vértices opuestos de un cuadrado de lado igual a 20 m.

a) [1 PUNTO] Dibujar y calcular el vector campo gravitatorio producido por estas dos masas en otro de los vértices del cuadrado.

b) [1 PUNTO] Hallar el potencial gravitatorio, debido a las dos masas, en el punto central del cuadrado.

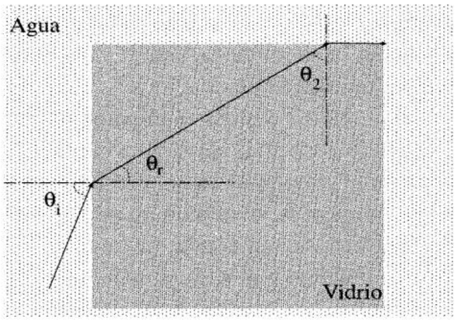
2. Un sistema elástico, constituido por un cuerpo de masa 400 g unido a un muelle, realiza un movimiento armónico simple con un período de 1.25 s. Si la energía total del sistema es de 18 J,

a) [1 PUNTO] ¿Cuál es la constante elástica del muelle?

b) [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la amplitud del movimiento oscilatorio?

c) [0,5 PUNTOS] Explicar los intercambios de energía entre el muelle y la masa que se producen a lo largo de una oscilación.

3. Un cubo de vidrio de índice de refracción 1.55 se encuentra sumergido en agua, que tiene un índice de refracción de 1.33. Un rayo incide sobre una cara lateral izquierda del cubo con un ángulo θ_i tal que se tiene el fenómeno de la reflexión total para el rayo que llega a la cara superior del cubo de vidrio, saliendo éste rayo justamente horizontal a la cara superior del cubo. Ver figura que se adjunta.



a) [1 PUNTO] Hallar el ángulo de incidencia θ_2 de la luz sobre la cara interna superior del cubo de vidrio.

b) [0,5 PUNTOS] Obtener el ángulo de refracción θ_r del haz de luz que penetra en el cubo por su cara lateral.

c) [0,5 PUNTOS] Obtener el ángulo de incidencia θ_i del haz de luz que incide en la cara lateral del cubo de vidrio.

4. Dos placas metálicas cargadas eléctricamente están dispuestas horizontalmente separadas una distancia de 20 cm, creando en su interior un campo eléctrico uniforme de $2.50\ 10^4$ N C^{-1}. Una microgota de aceite de masa igual a $5.1\ 10^{-14}$ kg de masa, cargada negativamente, se encuentra en equilibrio suspendida de un punto equidistante de ambas placas.

a) [1 PUNTO] Hallar la diferencia de potencial entre las placas, indicando cual de ellas está cargada positivamente.

b) [0,5 PUNTOS] Hallar la carga eléctrica depositada en la gota.

c) [0,5 PUNTOS] Describir brevemente el efecto de un campo magnético sobre una carga eléctrica en reposo y sobre la misma carga en movimiento.

5. La actividad de una muestra que contiene radio 226, ^{226}Ra, es de $9\ 10^{14}$ Bq. El período de semidesintegración del ^{226}Ra es de 1602 años.

a) [1 PUNTO] Hallar el número de núcleos de ^{226}Ra en la muestra.

b) [1 PUNTO] Hallar el número de núcleos radiactivos que quedarán en la muestra al cabo de 3500 años.

Datos: 1 Bq = 1 desintegración por segundo.

SOLUCIÓN OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2 (SEPTIEMBRE 2012)

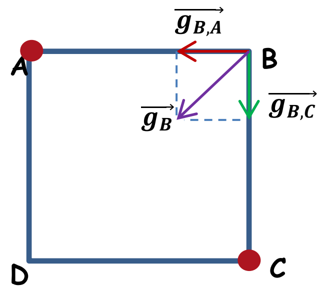
CONSTANTES FÍSICAS

Velocidad de la luz en el vacío	$c = 3\ 10^8$ m/s	Constante de Planck	$h = 6.6\ 10^{-34}$ J s
Constante de gravitación universal	$G = 6.67\ 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}	Masa del protón	$m_{p+} = 1.7\ 10^{-27}$ kg
Constante de Coulomb	$k = 9\ 10^9$ N m^2 C^{-2}	Carga del protón	$q_{p+} = 1.6\ 10^{-19}$ C
Masa del electrón	$m_{e-} = 9.1\ 10^{-31}$ kg	Carga del electrón	$q_{e-} = -1.6\ 10^{-19}$ C

Nota: estas constantes se facilitan a título informativo

1.- Dos cuerpos puntuales idénticos, de masa 600 kg cada uno, se encuentran fijados en vértices opuestos de un cuadrado de lado igual a 20 m.

a) **(1 p)** Dibujar y calcular el vector campo gravitatorio producido por estas dos masas en otro de los vértices del cuadrado.



Teniendo en cuenta que las masas son iguales y que se encuentran a la misma distancia:

$$\overrightarrow{g_B} = \overrightarrow{g_{B,A}} + \overrightarrow{g_{B,C}} = -G\,.\,\frac{m}{r^2}\,.(\vec{\imath} + \vec{\jmath}) = -6,67.10^{-11}\,.\,\frac{600}{20^2}\,.(\vec{\imath} + \vec{\jmath}) = -10^{-10}\,\vec{\imath} - 10^{-10}\,\vec{\jmath}\quad N/kg$$

$$|\overrightarrow{g_B}| = \sqrt{(-10^{-10})^2 + (-10^{-10})^2} = 1,41.10^{-10}\ N/kg$$

Las componentes del vector varían según el vértice elegido, pero el módulo no.

b) **(1 p)** Hallar el potencial gravitatorio, debido a las dos masas, en el punto central del cuadrado.

El potencial creado por ambas masas es igual, ya que las masas son iguales y están a la misma distancia:

$$V_O = V_{O,A} + V_{O,B} = 2\,.\,V_{O,A} = -2\,.\,6,67.10^{-11}\,.\,\frac{600}{14,14} = -5,66.10^{-9}\ J/kg$$

2.- Un sistema elástico, constituido por un cuerpo de masa 400 g unido a un muelle, realiza un movimiento armónico simple con un período de 1,25 s. Si la energía total del sistema es de 18 J,

a) **(1 p)** ¿Cuál es la constante elástica del muelle?

Del análisis de la dinámica del m.a.s. tenemos:

$$\begin{cases} F = -K\,.\,x \\ F = m\,.\,a = -m\,.\,\omega^2\,.\,x \end{cases} \Rightarrow\ K = m\,.\,\omega^2 = m\,.\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 0,4\,.\left(\frac{2\pi}{1,25}\right)^2 = 10,11\ N/m$$

b) **(0,5 p)** ¿Cuál es la amplitud del movimiento oscilatorio?

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}\,.\,m\,.\,v^2 + \frac{1}{2}\,.\,K\,.\,x^2 = \frac{1}{2}\,.\,K\,.\,(A^2 - x^2) + \frac{1}{2}\,.\,K\,.\,x^2 = \frac{1}{2}\,.\,K\,.\,A^2$$

$$A = \sqrt{\frac{2\,.\,E_m}{K}} = \sqrt{\frac{2\,.\,18}{10,11}} = 1,89\ m$$

c) **(0,5 p)** Explicar los intercambios de energía entre el muelle y la masa que se producen a lo largo de una oscilación.

Una partícula sometida a un m.a.s. tiene dos tipos de energía: una asociada al movimiento (cinética) y otra debida al dispositivo que vibra (potencial elástica).
La energía cinética de una partícula que vibra es:

$$E_c = \frac{1}{2}\,.\,m\,.\,v^2 = \frac{1}{2}\,.\,K\,.\,(A^2 - x^2)$$

Como vemos esta energía es máxima en el centro de oscilación y nula en los extremos.
Las fuerzas elásticas son conservativas, tienen asociada una función energía potencial que depende exclusivamente de la posición. El trabajo realizado por la fuerza elástica para trasladar la partícula entre dos posiciones no depende del camino seguido y es igual a menos el incremento de la energía potencial asociada a esas posiciones: $W = -\Delta E_p$
La energía elástica asociada a una partícula situada en la posición de elongación y es:

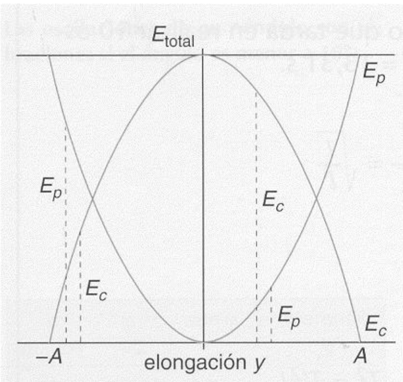
$$E_p = \frac{1}{2} \, . \, K \, . \, x^2$$

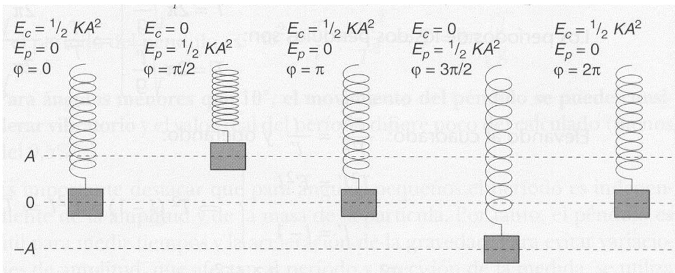
Como vemos esta energía es nula en el centro de oscilación y máxima en los extremos.

La energía total (energía mecánica del oscilador) de una partícula con m.a.s. es la suma de su energía cinética y su energía potencial elástica:

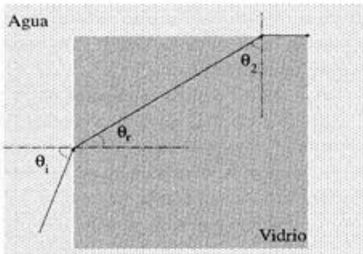
$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} \, . \, m \, . \, v^2 + \frac{1}{2} \, . \, K \, . \, x^2 = \frac{1}{2} \, . \, K \, . \, (A^2 - x^2) + \frac{1}{2} \, . \, K \, . \, x^2 = \frac{1}{2} \, . \, K \, . \, A^2$$

Mientras no haya rozamiento, la energía total permanece constante. Al vibrar la masa en uno y otro sentido, la energía se transforma de potencial a cinética y de cinética a potencial.





3.- Un cubo de vidrio de índice de refracción 1,55 se encuentra sumergido en agua, que tiene un índice de refracción de 1.33. Un rayo incide sobre una cara lateral izquierda del cubo con un ángulo θ_i tal que se tiene el fenómeno de la reflexión total para el rayo que llega a la cara superior del cubo de vidrio, saliendo éste rayo justamente horizontal a la cara superior del cubo. Ver figura que se adjunta.



a) **(1 p)** Hallar el ángulo de incidencia θ_2 de la luz sobre la cara interna superior del cubo de vidrio.

Para que el rayo se refracte y salga paralelo a la cara del cubo, debe incidir con el ángulo límite, de modo que aplicando la ley de Snell, se cumple:

$$n_v \, . \, sen \; \theta_2 = n_a \, . \, sen \; 90° \;\; \Rightarrow \;\; \theta_2 = arcsen \, \frac{n_a}{n_v} = arcsen \, \frac{1,33}{1,55} = 59,1°$$

b) **(0,5 p)** Obtener el ángulo de refracción θ_r del haz de luz que penetra en el cubo por su cara lateral.

Por geometría:

$$\theta_r = 180° - 90° - \theta_2 = 180° - 90° - 59,1° = 30,9°$$

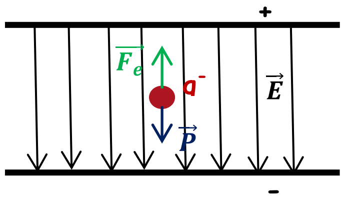
c) **(0,5 p)** Obtener el ángulo de incidencia θ_1 del haz de luz que incide en la cara lateral del cubo de vidrio.

Aplicando la ley de Snell de la refracción:

$$n_a \, . \, sen \; \theta_1 = n_v \, . \, sen \; \theta_r \;\; \Rightarrow \;\; \theta_2 = arcsen \left(\frac{n_v \, . \, sen \; \theta_r}{n_a} \right) = arcsen \left(\frac{1,55 \, . \, sen \; 30,9°}{1,33} \right) = 36,8°$$

4.- Dos placas metálicas cargadas eléctricamente están dispuestas horizontalmente separadas una distancia de 20 cm, creando en su interior un campo eléctrico uniforme de $2{,}50.10^4$ $N.C^{-1}$. Una microgota de aceite de masa igual a $5{,}1.10^{-14}$ kg de masa, cargada negativamente, se encuentra en equilibrio suspendida de un punto equidistante de ambas placas.

a) **(1 p)** Hallar la diferencia de potencial entre las placas, indicando cuál de ellas está cargada positivamente.



Necesitamos una fuerza eléctrica en sentido hacia arriba para compensar el peso de la microgota. Teniendo en cuenta que la relación entre la fuerza eléctrica y el campo eléctrico es:

$$\vec{F_e} = q \,.\, \vec{E}$$

Como la carga es negativa, el campo debe estar dirigido hacia abajo. Por lo tanto la placa positiva debe ser la de arriba.

$$E = \frac{\Delta V}{d} \quad \Rightarrow \quad \Delta V = E \,.\, d = 2,5.10^4 \,.\, 0,2 = 5000\ V$$

b) **(0,5 p)** Hallar la carga eléctrica depositada en la gota.

$$F_e = P \quad \Rightarrow \quad q \,.\, E = m \,.\, g \quad \Rightarrow \quad q = \frac{m \,.\, g}{E} = \frac{5,1.10^{-14} \,.\, 9,8}{2,5.10^{-4}} = 2.10^{-9}\ C = 2\ nC$$

Como sabemos, la gota está cargada negativamente: **q = - 2 nC**

c) **(0,5 p)** Describir brevemente el efecto de un campo magnético sobre una carga eléctrica en reposo y sobre la misma carga en movimiento.

Un campo magnético no tiene ningún efecto sobre una partícula cargada eléctricamente si está en reposo.
Las cargas eléctricas que se mueven dentro de campos magnéticos experimentan la fuerza de Lorentz. Esta fuerza depende de los siguientes factores:

- **Del valor de la carga q y de la velocidad v con que esta carga se mueve.**
- **De la inducción de campo magnético, $\vec{B}$**
- **Del ángulo que formen entre si la dirección del movimiento con la dirección del campo. La fuerza es máxima cuando la partícula se mueve perpendicularmente al campo y nula cuando la partícula se mueve paralelamente al campo.**

Además se puede observar que:

- **La fuerza magnética es perpendicular tanto a $\vec{v}$ como a $\vec{B}$. Por consiguiente es perpendicular al plano formado por estos dos vectores.**
- **La fuerza magnética sobre una carga positiva tiene sentido opuesto al de la fuerza que actúa sobre una carga negativa que se mueve en el mismo sentido en el mismo campo.**

Todos estos factores quedan englobados en la siguiente expresión matemática:

$$\vec{F} = q \,.\, (\vec{v}\, x\, \vec{B}) \quad cuyo\ módulo\ es \quad F = q \,.\, v \,.\, B \,.\, sen\ \alpha$$

5.- La actividad de una muestra que contiene radio 226, ^{226}Ra, es de 9.10^{14} Bq. El período de semidesintegración del ^{226}Ra es de 1602 años.

DATOS: 1 Bq = 1 desintegración por segundo.

a) **(1 p)** Hallar el número de núcleos de ^{226}Ra en la muestra.

Se llama actividad o velocidad de desintegración (A) de una sustancia radiactiva al número de desintegraciones que se producen en la unidad de tiempo:

$$A = \frac{dN}{dt} = \lambda \,.\, N_0 \,.\, e^{-\lambda \,.\, t} = \lambda \,.\, N$$

Donde λ es la constante de desintegración o constante radiactiva, que representa la probabilidad por unidad de tiempo de que se desintegre un núcleo.
El período de semidesintegración ($t_{1/2}$) es el tiempo que tarda una muestra radiactiva de N_0 núcleos en reducirse a la mitad:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \,.\, e^{-\lambda \,.\, t_{1/2}} \quad \Rightarrow \quad t_{1/2} = \frac{ln\ 2}{\lambda}$$

Por lo tanto:

$$A_0 = \lambda \,.\, N_0 = \frac{ln\ 2}{t_{1/2}} \,.\, N_0 \quad \Rightarrow \quad N_0 = \frac{A \,.\, t_{1/2}}{ln\ 2} = \frac{9.10^{14} \,.\, (1602 \,.\, 365 \,.\, 24 \,.\, 3600)}{ln\ 2} = 6,56.10^{25}\ \acute{a}tomos$$

b) **(1 p)** Hallar el número de núcleos radiactivos que quedarán en la muestra al cabo de 3500 años.

$$N = N_0 \,.\, e^{-\lambda \,.\, t} = N_0 \,.\, e^{-\left(\frac{ln\ 2}{t_{1/2}}\right) \,.\, t} = 6,56.10^{25} \,.\, e^{-\left(\frac{ln\ 2}{1602}\right) \,.\, 3500} = 1,44.10^{25}\ \acute{a}tomos$$