NAVARRA 2018

CASTELLANO · EJERCICIO 5

R. ALCARAZ DE LA OSA · J. SÁNCHEZ MAZÓN

Felix Baumgartner[1], austríaco amante de los deportes extremos, se arrojó desde una altura de 39 000 m en la estratosfera, en caída libre, alcanzando una velocidad límite de 1358 km h^{-1}, tras descender durante 4 minutos y 20 segundos antes de que se abriera su paracaídas a 2600 m del nivel del mar. En base a estos datos, responder a las siguientes cuestiones:

a) ¿Qué velocidad máxima teórica debería haber alcanzado en el momento de abrir el paracaídas si no hubiera rozamiento con la atmósfera?

b) ¿Qué tanto por ciento de energía se ha perdido como consecuencia del rozamiento hasta el momento de abrir el paracaídas?

c) De nuevo prescindiendo del rozamiento, ¿qué aceleración llevaba el deportista un instante antes de que se desplegara el paracaídas?

DATOS: g_0 a nivel del mar: 9.81 m s^{-2}; Radio terrestre: 6370 km

[1] Mira lo mejor de su CAÍDA LIBRE SUPERSÓNICA en este vídeo: `https://www.youtube.com/watch?v=FHtvDA0W34I`.

Solución

a) Felix describe un movimiento con ACELERACIÓN VARIABLE[2], pues la gravedad depende de la altura a través de la expresión[3]:

$$g(h) = \frac{GM}{(R_\mathrm{T}+h)^2} = g_0\left(\frac{R_\mathrm{T}}{R_\mathrm{T}+h}\right)^2 \qquad (1)$$

Aplicando la REGLA DE LA CADENA:

$$g = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}h}\cdot\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}h}\cdot v$$

Separando variables:

$$g\,\mathrm{d}h = v\,\mathrm{d}v$$

Integrando ($v_0 = 0$):

$$\int_{h_0}^{h} g\,\mathrm{d}h = \int_0^v v\,\mathrm{d}v$$

$$\int_{h_0}^{h} g_0\left(\frac{R_\mathrm{T}}{R_\mathrm{T}+h}\right)^2\mathrm{d}h = \frac{v^2}{2}$$

$$\int\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} \rightarrow \left|-\frac{g_0R_\mathrm{T}^2}{R_\mathrm{T}+h} + \frac{g_0R_\mathrm{T}^2}{R_\mathrm{T}+h_0}\right| = \frac{v^2}{2}$$

$$R_\mathrm{T}\sqrt{2g_0\left(\frac{1}{R_\mathrm{T}+h} - \frac{1}{R_\mathrm{T}+h_0}\right)} = v \qquad (2)$$

Sustituyendo[4]:

$$\boxed{v = 842.3\ \mathrm{m/s}}$$

que es considerablemente mayor ($\approx$ 2.2x) que la velocidad real que alcanza ($377.\overline{2}$ m s^{-1}).

[2] Si suponemos que cae con aceleración constante $a = g_0$, entonces:

$$v = \sqrt{2g_0(h_0-h)} = 845.1\ \mathrm{m/s},$$

lo que supone un error de un $\approx$ 0.3 %.

[3] Donde utilizamos la relación:

$$g_0 = \frac{GM}{R_\mathrm{T}^2}$$

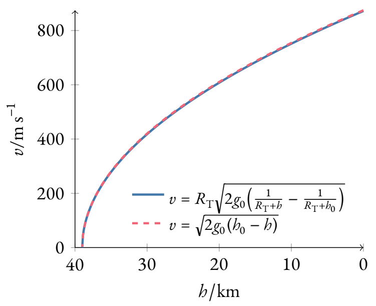

Figura 1: Velocidad de Felix Baumgartner, obtenida a partir de la expresión (2), en función de la altura a la que se encuentra, h. Se muestra también la velocidad obtenida a partir de la expresión aproximada (suponiendo gravedad constante $g = g_0$) $v = \sqrt{2g_0(h_0-h)}$. Notar que ambas curvas son prácticamente iguales.

[4] g_0 = 9.81 m s^{-2}; R_T = 6370 km; h_0 = 39 000 m y h = 2600 m. También se puede llegar a este resultado aplicando la CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA, pues la única fuerza presente es la GRAVITATORIA:

$$E = E_0$$

$$-\frac{GM\cancel{m}}{r} + \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 = -\frac{GM\cancel{m}}{r_0}$$

$$-\frac{GM}{R_\mathrm{T}+h} + \frac{1}{2}v^2 = -\frac{GM}{R_\mathrm{T}+h_0}$$

$$v = R_\mathrm{T}\sqrt{2g_0\left(\frac{1}{R_\mathrm{T}+h} - \frac{1}{R_\mathrm{T}+h_0}\right)}$$

b) Evaluamos la energía cinética en el caso límite y en el caso sin rozamiento:

$$E_{\text{límite}} = \frac{1}{2} m v_{\text{límite}}^2$$
$$E_{\text{teórica}} = \frac{1}{2} m v^2$$

Hallamos el tanto por ciento con la expresión:

$$\Delta E = \left| \frac{E_{\text{límite}} - E_{\text{teórica}}}{E_{\text{teórica}}} \right| \cdot 100 = \left| \frac{v_{\text{límite}}^2 - v^2}{v^2} \right| \cdot 100$$

Sustituyendo[5]:

$$\boxed{\Delta E \approx 79.9\,\%}$$

[5] $v_{\text{límite}} = 1358\,\text{km}\,\text{h}^{-1} = 377.\overline{2}\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ y $v = 842.3\,\text{m/s}$.

c) Evaluamos (1) para $h = 2600\,\text{m}$:

$$\boxed{g(2600\,\text{m}) = 9.80\,\text{m}\,\text{s}^{-1}}$$

La figura 2 muestra la aceleración de la gravedad, obtenida a partir de la expresión (1), en función de la altura, h.

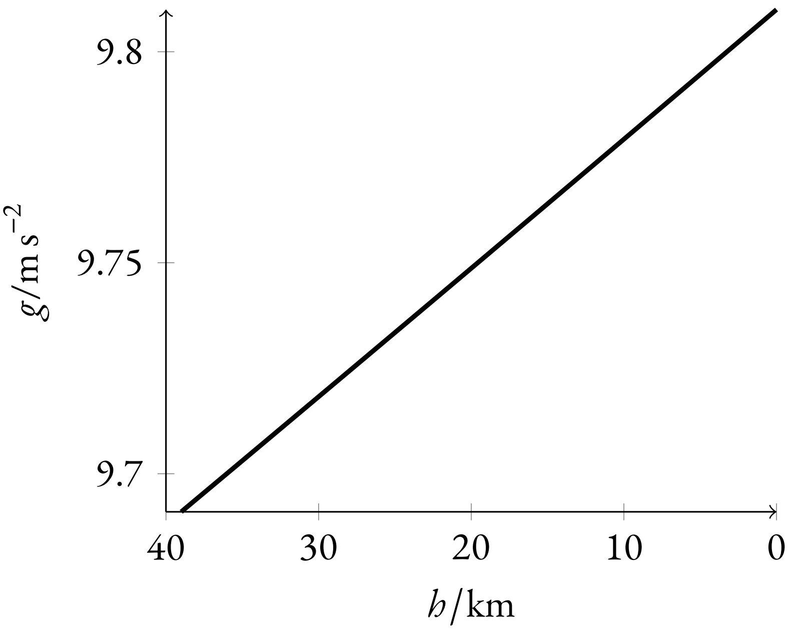

Figura 2: Aceleración de la gravedad, obtenida a partir de la expresión (1), en función de la altura, h.