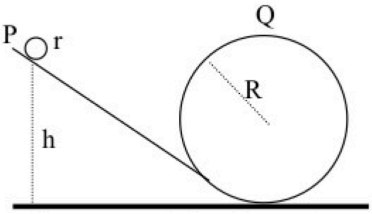
MADRID 2018

EJERCICIO 2

R. ALCARAZ DE LA OSA · J. SÁNCHEZ MAZÓN

Un cilindro homogéneo de radio r y masa m rueda sin deslizar siguiendo una vía en forma de lazo circular de radio R, como indica la figura. El cilindro parte del reposo en el punto P, a una altura h por encima de la parte inferior del lazo. Calcular:



(a) Su energía cinética cuando alcanza el punto Q.

(b) Su aceleración centrípeta en dicho punto admitiendo que no se sale de la vía.

(c) El mínimo valor de h para que el cilindro llegue a Q sin salirse de la vía.

Suponiendo que h es mayor que este valor mínimo:

(d) Obtener una expresión para la fuerza normal ejercida por la vía sobre el cilindro en el punto Q.

Solución

(a) Como nos dicen que el cilindro rueda sin deslizar, podemos imponer la CONSERVACIÓN de la ENERGÍA MECÁNICA, pues las fuerzas que actúan son el peso (conservativa) y el rozamiento, pero sin disipar energía[1]:

$$E_{\mathrm{P}} = E_{\mathrm{Q}}$$
$$U_{\mathrm{P}} = U_{\mathrm{Q}} + K_{\mathrm{Q}}$$
$$mg(h + r) = mg(2R - r) + K_{\mathrm{Q}}$$

de donde despejamos $\boxed{K_{\mathrm{Q}} = mg(h + 2r - 2R)}$.

(b) La ACELERACIÓN CENTRÍPETA en el punto Q, $a_{\mathrm{c}}^{\mathrm{Q}}$, viene dada por[2]

$$a_{\mathrm{c}}^{\mathrm{Q}} = \frac{v_{\mathrm{Q}}^2}{R - r} \tag{1}$$

Para calcular la velocidad que tiene en Q hacemos uso del resultado obtenido en el apartado anterior[3]:

$$\begin{aligned} K_{\mathrm{Q}} = mg(h + 2r - 2R) &= \frac{1}{2}mv_{\mathrm{Q}}^2 + \frac{1}{2}I\omega_{\mathrm{Q}}^2 \\ &= \frac{1}{2}mv_{\mathrm{Q}}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mr^2\frac{v_{\mathrm{Q}}^2}{r^2} \\ &= \frac{3}{4}mv_{\mathrm{Q}}^2 \end{aligned}$$

Despejamos v_{Q}^2:

$$v_{\mathrm{Q}}^2 = \frac{4g}{3}(h + 2r - 2R) \tag{2}$$

y sustituimos en (1):

$$\boxed{a_{\mathrm{c}}^{\mathrm{Q}} = \frac{4g}{3(R - r)}(h + 2r - 2R)}$$

[1] Esto es así porque el punto de contacto entre el cilindro y la vía no se desplaza, lo que implica que el TRABAJO VIRTUAL de la FUERZA ROZAMIENTO es NULO. En P el cilindro solo tiene energía potencial gravitatoria, U_{P}, mientras que en Q tiene energía potencial gravitatoria, U_{Q}, y energía cinética K_{Q} (tanto de traslación como de rotación en principio). IMPORTANTE: hay que tener en cuenta el radio del cilindro, r, para las alturas, que se calculan desde su centro de masas.

[2] OJO porque el centro de masas del cilindro está a una distancia $R - r$ del centro del lazo.

[3] Teniendo en cuenta que en Q tiene ENERGÍA CINÉTICA tanto de TRASLACIÓN como de ROTACIÓN. Para esta última necesitamos conocer el MOMENTO de INERCIA, que al tratarse de un cilindro homogéneo de radio r y masa m viene dado por

$$I = \frac{1}{2}mr^2$$

Además, como rueda sin deslizar, sabemos que las velocidades lineal y angular están relacionadas a través de la expresión

$$v = \omega r$$

(c) Tanto el peso como la normal (reacción) actúan como fuerzas centrípetas causantes de que el cilindro describa esa trayectoria circular a lo largo de la vía (ver figura 1). La fuerza normal (reacción de la vía) depende de la velocidad a la que se mueva el cilindro, que a su vez depende de la altura h desde la que parte en P (ecuación 2). En el caso límite, el cilindro pasará tan despacio por Q que el peso por sí solo ya será capaz de proporcionar la fuerza centrípeta necesaria para mantenerlo en la trayectoria circular. En este caso tendremos:

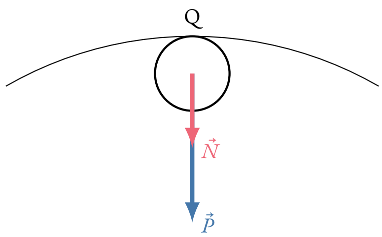


Figura 1: Fuerzas que actúan sobre el cilindro en el punto Q.

$$\begin{aligned} P &= f_c \\ mg &= ma_c \\ \cancel{g} &= \frac{4\cancel{g}}{3(R-r)}(h+2r-2R) \end{aligned}$$

de donde podemos despejar el valor mínimo de h

$$\boxed{h_{\text{mín}}} = \frac{3}{4}(R-r) + 2(R-r) = \boxed{\frac{11}{4}(R-r)}$$

Suponiendo que $h > h_{\text{mín}}$:

(d) Como se ve en la figura 1, en el caso general en el que el cilindro pasa por Q con una cierta velocidad, se cumple que ambas fuerzas, el peso y la normal, actúan como fuerzas centrípetas, por lo que se tiene que

$$P + N = f_c,$$

de donde podemos despejar la fuerza normal N

$$\begin{aligned} \boxed{N} &= f_c - P \\ &= ma_c - mg \\ &= \frac{4mg}{3(R-r)}(h+2r-2R) - mg \\ &= \boxed{mg\left[\frac{4}{3(R-r)}(h+2r-2R) - 1\right]} \end{aligned}$$