Sobre os Números Complexos:

Antes de mais nada, lembre-se que a Matemática está à nossa volta para resolver problemas reais, do cotidiano.

À medida que alcançamos um novo nível de conhecimento na área de exatas, passamos a ser capazes de solucionar problemas mais intrigantes.

Pense nisso!

Tudo que aprendemos passa a ser útil logo depois...

Isso ocorre desde os tempos de criança: quando nos ensinam multiplicação, pensamos: para que isso? Posso fazer 6 x 5 usando soma: 6+6+6+6+6. O mesmo ocorre quando a potenciação nos é apresentada: 2^3 pode ser visto como a multiplicação 2 x 2 x 2. Mas... depois usamos o novo recurso apreendido e vemos que é mais prático do que o anterior. Correto?

Assim ocorre com os conjuntos numéricos! Estamos tão bem com os números Reais, aprender sobre complexos... precisamos disso?

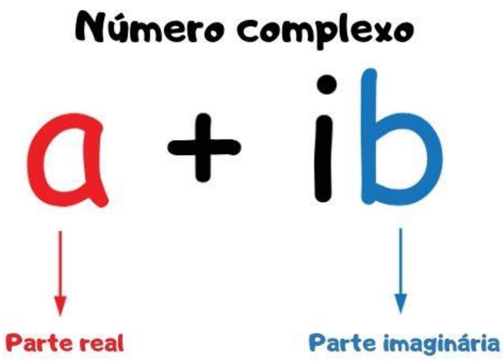
Vamos ver.

Os **números complexos** surgiram a partir da necessidade de resolução de equações que possuem **raiz de números negativos**, o que, até então, não era possível de resolver trabalhando com os números reais.

Eles podem ser representados de três formas:

- a **forma algébrica** ($z = a + bi$), composta por uma parte real a e uma parte imaginária b;
- a **forma geométrica,** representada no plano complexo conhecido também como plano de Argand-Gauss;
- a sua **forma trigonométrica,** conhecida como forma polar, onde o número $z = /z/.(\cos \theta + i.\text{sen}\ \theta)$

Complexos possuem operações bem definidas: adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação.



Representação algébrica dos números complexos

Histórico – a necessidade dos números complexos:

Na matemática, a ampliação de um conjunto numérico para um novo conjunto, ao longo da história, foi algo bastante comum.

Acontece que, nesse decorrer, a matemática desenvolveu-se e, então, para **atender as necessidades da época**, foi percebido que existiam números que não pertenciam ao conjunto numérico a que se referia. Foi assim com o surgimento dos conjuntos numéricos dos inteiros, quando só se usava números naturais. Depois surgiu a ideia dos racionais, dos irracionais e dos reais. Não foi diferente quando houve a necessidade de ampliação do conjunto dos números reais para o dos números complexos.

Uma visão da sua utilidade é dada ao tentarmos resolver **equações do segundo grau**. É comum que encontremos a **raiz quadrada de um número negativo**, o que é impossível de ser resolvido no conjunto dos números reais, por isso a necessidade dos números complexos. O início do estudo desses números recebeu contribuições de matemáticos importantes, como Girolamo Cardano, porém o conjunto deles foi formalizado por Gauss e Argand.

Veremos depois que existe o plano de Argand-Gauss, em homenagem aos dois. Nele representamos um número complexo. É o nosso velho plano cartesiano visto de outra forma.

Forma algébrica de um número complexo:

Ao tentar-se resolver uma equação do segundo grau, como $x^2 = -25$, muitas vezes ela era dita como sem solução. Não obstante, na tentativa de algebrizar, surgiu então a **representação algébrica, que possibilita a realização de operações com esses números**, ainda que não se consiga calcular a raiz quadrada de um número negativo.

Para facilitar a resolução das situações em que se trabalha com a raiz quadrada de um número negativo, foi definida a **unidade imaginária**.

$$i = \sqrt{-1}$$

Então, analisando-se a equação apresentada $x^2 = -25$, temos que:

$$\begin{aligned} &x^2 = -25 \\ &x = \pm\sqrt{-25} \\ &x = \pm\sqrt{25 \cdot (-1)} \\ &x = \pm(\sqrt{25} \cdot \sqrt{-1}) \\ &x = \pm 5i \end{aligned}$$

Desse modo, as soluções para a equação são $-5i$ e $5i$.

Para definir-se a forma algébrica, foi utilizada a **letra *i*,** conhecida como **unidade imaginária de um número complexo**. Um número complexo é representado por:

$$z = a + bi$$

Em que a e b são números reais.

a: parte real, indicada por a = Re(z);

b: parte imaginária, indicada por Im(z);

i: unidade imaginária.

- **Exemplos**

a) $2 + 3i$

b) $-1 + 4i$

c) $5 - 0{,}2i$

d) $-1 - 3i$

Quando a **parte real é nula**, o número é conhecido como **imaginário puro**, por exemplo, $-5i$ e $5i$ são imaginários puros por não possuírem parte real.

Quando a parte imaginária é nula, o número complexo é, também, um número real.

Operações com números complexos:

Como todo conjunto numérico, as operações precisam estar **bem definidas**, logo, é possível realizar-se as quatro operações básicas dos números complexos levando-se em consideração a forma algébrica apresentada.

- **Adição:**

Para realizarmos a adição de dois complexos z_1 e z_2, faremos a soma da parte real de z_1 e z_2 e a soma da parte imaginária:

Seja:

$\mathbf{z_1} = a + bi$

$\mathbf{z_2} = c + di$

$$\mathbf{z_1 + z_2} = (a + c) + (b + d)i$$

Exemplo 1

Realizando da soma de z_1 e z_2 para:

$\mathbf{z_1} = 2 + 3i$ e $\mathbf{z_2} = 1 + 2i$

$\mathbf{z_1 + z_2} = (2 + 1) + (3 + 2)i$

$\mathbf{z_1 + z_2} = 3 + 5i$

Exemplo 2

Realização da soma de z_1 e z_2 onde:

$\mathbf{z_1} = 5 - 2i$ e $\mathbf{z_2} = -3 + 2i$

$\mathbf{z_1} + \mathbf{z_2} = (5 + (-3)) + (-2 + 2)i$

$\mathbf{z_1} + \mathbf{z_2} = (5 - 3) + 0i$

$\mathbf{z_1} + \mathbf{z_2} = 3 + 0i = 3$

- **Subtração de dois números complexos**

Antes de falarmos sobre <u>subtração</u>, precisamos definir o que é o **oposto de um número complexo** $z = a + bi$. O oposto de z é representado por $-z$, é o número complexo $-z = -a - bi$. Uma simples troca de sinais!

Para realizarmos a subtração entre $z_1 - z_2$, assim como na adição, faremos a **subtração entre as partes reais e entre as partes imaginárias, separadamente.**

É necessário compreender-se que $-z_2$ é o oposto de um número complexo, o que torna necessário a realização do jogo de sinais.

Exemplo 1

Realização da subtração de z_1 e z_2 para: $\mathbf{z_1} = 2 + 3i$ e $\mathbf{z_2} = 1 + 2i$

$$\mathbf{z_1} - \mathbf{z_2} = (2 - 1) + (3 - 2)i$$

$$\mathbf{z_1} - \mathbf{z_2} = 1 + 1i = 1 + i$$

Exemplo 2

Realização da subtração de z_1 e z_2.

$\mathbf{z_1} = 5 - 2i$

$\mathbf{z_2} = -3 + 2i$

$$\mathbf{z_1} - \mathbf{z_2} = (5 - (-3)) + (-2 - 2)i$$

$$\mathbf{z_1} - \mathbf{z_2} = (5 + 3) + (-4)i$$

$$\mathbf{z_1} - \mathbf{z_2} = 8 + (-4)i$$

$$\mathbf{z_1} - \mathbf{z_2} = 8 - 4i$$

- **Potências da unidade imaginária:**

Antes de falarmos em multiplicação, precisamos entender a potência da unidade imaginária. Na busca por um método para calcular-se potências de $\boldsymbol{i}^{\mathbf{n}}$, é necessário perceber que essas potências se comportam de forma cíclica.

Para isso, vamos calcular algumas potências de i.

$$\begin{aligned} i^0 &= 1 \\ i^1 &= i \\ i^2 &= \sqrt{-1}^2 = -1 \\ i^3 &= i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i \end{aligned}$$

Acontece que as próximas potências nada mais são que a repetição desses quatro valores, note que:

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$$

$$i^5 = i^2 \cdot i^3 = (-1)(-i) = i$$

$$i^6 = i^3 \cdot i^3 = (-i)(-i) = i^2 = -1$$

$$i^7 = i^4 . i^3 = 1 . (-i) = -i$$

$$i^8 = 1$$

$$i^9 = i$$

$$i^{10} = -1$$

$$i^{11} = -i$$

...

Ao continuarmos a calcular as potências, as respostas sempre serão elementos do conjunto {1, i, –1, –*i*}, então, para encontrarmos uma potência da unidade $\boldsymbol{i}^{\mathbf{n}}$, faremos a divisão de n (o expoente) por 4, e o **resto** dessa divisão (r = { 0, 1, 2, 3}) será o novo expoente de *i*.

Exemplo 1

Cálculo de $i^{25} = i^4 . i^4 . i^4 . i^4 . i^4 . i^4 . i^1 = 1.1.1.1.1.1.i = i$

Ao fazermos a divisão de 25 por 4, o quociente será 6 e o resto será igual a 1. Então temos que:

$$i^{25} = i^1 = i$$

Exemplo 2

Cálculo de i^{403}

Ao dividirmos 403 por 4, o quociente será 100, pois 100 · 4 = 400, e o resto será 3, então temos que:

$$i^{403} = i^{3} = i^2.i = (-1).i = -i$$

Exemplo 3

$i^{68} = i^0$ pois 64 dividido por 4 dá resto zero!

$i^{68} = i^0 = 1$

- **Multiplicação de números complexos:**

Para realizarmos a multiplicação de dois números, vamos aplicar a **propriedade distributiva**.

Veja:

$\mathbf{z_1} = a + bi$

$\mathbf{z_2} = c + di$, então o produto:

$$\mathbf{z_1} \cdot \mathbf{z_2} = (a + bi)(c + di)\text{, aplicando a propriedade distributiva,}$$

$$\mathbf{z_1} \cdot \mathbf{z_2} = ac + adi + cbi + bdi^2\text{, mas, como vimos, } i^2 = -1$$

$$\mathbf{z_1} \cdot \mathbf{z_2} = ac + adi + cbi - bd$$

$$\mathbf{z_1} \cdot \mathbf{z_2} = (ac - bd) + (ad + cb)i$$

Utilizando-nos dessa “fórmula”, é possível encontrarmos o produto de quaisquer dois números complexos, mas, de modo geral, ela não precisa ser decorada, já que basta aplicarmos a propriedade distributiva. Na prática é muito simples:

- **Exemplo**

Cálculo do produto de $(2+3i).(1 - 4i)$:

$$(2+3i).(1 - 4i) = 2 - 8i + 3i - 12i^2, \text{ e, lembrando que } i^2 = -1:$$

$$(2 + 3i) . (1 - 4i) = 2 - 8i + 3i - 12(-1)$$

$$(2 + 3i) . (1 - 4i) = (2 + 12) + (- 8 + 3)i$$

$$(2+3i) . (1 - 4i) = 14 - 5i$$

- **Conjugado de um número complexo:**

Antes de falarmos de divisão, precisamos entender bem o que é o conjugado de um número complexo. O conceito é simples: para encontrarmos o conjugado de um número complexo, basta **trocarmos o sinal da parte imaginária**.

$$z = a + bi \rightarrow \overline{z} = a - bi$$

Como exemplo, o conjugado de $z = 3 + 4i$ é $z_c = 3 - 4i$.

- **Divisão de dois números complexos:**

Para realizarmos a divisão de dois complexos, precisamos multiplicar a fração pelo conjugado do denominador para que fique bem definido o que é a parte real e o que é a parte imaginária.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}$$

Exemplo

Cálculo da divisão de (6 - 4*i*) por (4 + 2*i*)

$$\frac{6-4i}{4+2i} = \frac{6-4i}{4+2i} \cdot \frac{4-2i}{4-2i}$$

$$\frac{6-4i}{4+2i} = \frac{24-12i-16i+8i^2}{16-16i+16i-4i^2}$$

$$\frac{6-4i}{4+2i} = \frac{24-28i-8}{16+4}$$

$$\frac{6-4i}{4+2i} = \frac{24-28i-8}{20}$$

$$\frac{6-4i}{4+2i} = \frac{16-28i}{20} = \frac{16}{20} - \frac{28}{20}i$$

$$\frac{6-4i}{4+2i} = \frac{4}{5} - \frac{7}{5}i$$