Lösung der 1D-Stofftransportgleichung für kontinuierliche Zugabe

Stofftransportmodell

Betrachtet werden soll die Stoffausbreitung in einer Laborsäule mit Anfangskonzentration 0 und kontinuierlichem Stoffeintrag am Einlass. Der Auslass liegt „weit entfernt“ vom Einlass.

- **einseitig unbegrenztes Gebiet (0 < *x* < +∞)**
- **1D-Stofftransportgleichung:** $$R\cdot\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(v\cdot C)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha\cdot v\cdot\frac{\partial C}{\partial x}\right)-\lambda\cdot C$$
- **Anfangsbedingung:** $C(x,t=0) = 0$
- **Randbedingungen:** $C(x=0,t) = C_0$ $\quad$ $C(x=+\infty,t) = 0$
  mit Zugabekonzentration C_0 [M/L³]
- **Lösung:** $$C(x,t)=\frac{C_o}{2}\cdot\left[e^{\frac{x}{2\cdot\alpha}\cdot\left(1-\sqrt{1+4\cdot\alpha\cdot\lambda/v}\right)}\cdot\operatorname{erfc}\frac{x-\sqrt{1+4\cdot\alpha\cdot\lambda/v}\cdot v\cdot t/R}{\sqrt{4\cdot\alpha\cdot v\cdot t/R}}+\right.$$ $$\left.+e^{\frac{x}{2\cdot\alpha}\cdot\left(1+\sqrt{1+4\cdot\alpha\cdot\lambda/v}\right)}\cdot\operatorname{erfc}\frac{x+\sqrt{1+4\cdot\alpha\cdot\lambda/v}\cdot v\cdot t/R}{\sqrt{4\cdot\alpha\cdot v\cdot t/R}}\right]$$

komplementäre Fehlerfunktion
(vgl. nächster Abschnitt)

Ogata-Banks-Lösung

- **Die vorgestellte Lösung der 1D-Stofftransportgleichung für kontinuierliche Zugabe ist eine Verallgemeinerung der Ogata-Banks-Lösung (Ogata & Banks, 1961).**
- **In der Ogata-Banks-Lösung werden Sorption / Desorption und Abbau nicht berücksichtigt, d. h. es ist *R* = 1 und λ = 0.**
- **Die Ogata-Banks-Lösung beschreibt somit die 1D-Ausbreitung eines konservativen Stoffes (Advektion, mechanische Dispersion) bei kontinuierlicher Zugabe:**

$$C(x,t) = \frac{C_o}{2} \cdot \left(\operatorname{erfc} \frac{x - v \cdot t}{\sqrt{4 \cdot \alpha \cdot v \cdot t}} + e^{\frac{x}{\alpha}} \cdot \operatorname{erfc} \frac{x + v \cdot t}{\sqrt{4 \cdot \alpha \cdot v \cdot t}} \right)$$

Ogata A., Banks R. B. (1961): A solution of the differential equation of longitudinal dispersion in porous media, USGS Prof. Paper 411-A.

- **Häufig ist der zweite Term innerhalb der runden Klammern wesentlich kleiner als der erste und wird vernachlässigt.**
- **Diese Vernachlässigung ist jedoch nicht immer gerechtfertigt (vgl. Übungsaufgaben).**