Seria 34, Curs (4), EDDP, 27.10.2020

Ecuații diferențiale de ordin k, $k \geq 2$, în $\mathbb{R}$ integrabile prin reducerea ordinului

Ec. dif. de ordin k, în $\mathbb{R}$ este de forma generală:

$$\boxed{F(t, x, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}) = 0} \quad (1)$$

Cazuri particulare pentru (1) în care se poate reduce ordinul:

(1) În (1) lipsesc derivatele lui x până la ordinul $m < k$:

$$\boxed{F(t, x^{(m)}, x^{(m+1)}, \ldots, x^{(k)}) = 0} \quad (2)$$

Prin schimbarea de variabile $\boxed{x^{(m)} = y}$

$$(t, x) \xrightarrow{x^{(m)}(t) = y(t)} (t, y)$$

Avem: $x^{(m+1)}(t) = y^{(1)}(t)$

$x^{(m+2)}(t) = y^{(2)}(t)$

$\vdots$

$x^{(k)}(t) = y^{(k-m)}(t)$

Deci, ec. (2) devine o ec. în (t, y) de ordin $k-m$:

$$F(t, y, y^{(1)}, \ldots, y^{(k-m)}) = 0.$$

Exemple: $\boxed{1}$ $x^{(1)} \cdot x^{(3)} = 2 \cdot (x^{(2)})^2$

$$\Rightarrow \boxed{x^{(1)} x^{(3)} - 2(x^{(2)})^2 = 0.}$$

$k = 3$; $m = 1$

$x^{(1)}(t) = y(t) \Rightarrow x^{(2)} = y^{(1)}$; $x^{(3)} = y^{(2)}$

$$(t, x) \xrightarrow{x^{(1)} = y} (t, y)$$

m = cel mai mic ordin de derivare pt x, care apare în ecuație. $(0, 1, \ldots)$

k = ordinul ecuației; cel mai mare ordin de derivare pt. x care apare în ecuație

Ec. devine: $\boxed{y \cdot y^{(2)} - 2(y^{(1)})^2 = 0}.$

② $\boxed{2x^{(2)}x^{(4)} - 3\left(x^{(3)}\right)^3 = 0.}$

ec. de ordin $k=4$

și lipsesc derivatele până la ordin $m=2$

② Dacă lipsește t din ecuație, explicit, ec. (1) se scrie:
$$\boxed{F\left(x, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}\right)=0} \quad (3)$$

și prin schimbarea de variabilă $x^{(1)}(t) = y(x(t))$

adică:
$$(t, x) \xrightarrow{x^{(1)}(t)=y(x(t))} (x, y)$$

variabila independentă.

ordinul ecuației se reduce cu 1.

Calculăm derivatele:
$$\boxed{x^{(1)} = y}$$
$$x^{(2)} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(y(x(t))\right) =$$
$$= \underbrace{\frac{dy}{dx}(x(t))}_{\frac{dy}{dx}=y^{(1)}} \cdot \underbrace{\frac{dx}{dt}(t)}_{y} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{x^{(2)} = y^{(1)}y};$$
$$x^{(3)}(t) = \frac{d}{dt}\left(x^{(2)}\right) = \frac{d}{dt}\left(y^{(1)}y\right) =$$
$$= \underbrace{y^{(2)} \cdot x^{(1)}}\cdot y + \underbrace{y^{(1)} \cdot y^{(1)} \cdot x^{(1)}} \Rightarrow$$
$$\boxed{x^{(3)} = y^{(2)} \cdot y^2 + \left(y^{(1)}\right)^2 y}$$

Ec. (3) devine:
$$F\left(x, y, y^{(1)}y, y^{(2)}y^2 + \left(y^{(1)}\right)^2 y, \dots\right) = 0$$
$$\Rightarrow G\left(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(k-1)}\right) = 0$$

ec. de ordin $(k-1)$.

<u>Exemplu</u>: $x \cdot x^{(3)} + 3x^{(1)}x^{(2)} = 0$ $\qquad k=3$

$\qquad > F\left(x, x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}\right) = 0.$

$$(t,x) \xrightarrow[x^{(1)}(t)=y(x(t))]{} (x,y)$$

$$x^{(2)} = y^{(1)}y$$
$$x^{(3)} = y^{(2)}y^2 + (y^{(1)})^2 y$$

$\Rightarrow x\cdot\left(y^{(2)}y^2 + (y^{(1)})^2 y\right) + 3y\cdot y^{(1)}y = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y^{(2)}xy^2 + (y^{(1)})^2 xy + 3y^2y^{(1)} = 0.$$

$$y\left(y''xy + (y')^2x + 3yy'\right) = 0.$$

1) $y = 0$

$x' = 0$

$\boxed{x = C,\ C\in\mathbb{R}}$

2) $\boxed{y''xy + (y')^2x + 3yy' = 0.}$

ec. de ordin 2.

③ Ec de forma: $\boxed{F\left(t, \frac{x^{(1)}}{x}, \frac{x^{(2)}}{x}, \dots, \frac{x^{(k)}}{x}\right) = 0}$ (4)

Se poate face reducerea prin schimbarea de variabilă:

$\boxed{\frac{x^{(1)}}{x} = y}$ $\left(\frac{x^{(1)}(t)}{x(t)} = y(t)\right).$

$$(t,x) \longrightarrow (t,y)$$

$\frac{x^{(1)}}{x} = y \Rightarrow x^{(1)} = xy$

$\boxed{x^{(2)}} = (xy)^{(1)} = \boxed{x^{(1)}y + xy^{(1)}} \;\Big|\, :x$

$\frac{x^{(2)}}{x} = \underbrace{\frac{x^{(1)}}{x}}_{=y}y + \frac{\cancel{x}y^{(1)}}{\cancel{x}} \Rightarrow \boxed{\frac{x^{(2)}}{x} = y^2 + y^{(1)}}$

$$x^{(2)} = x\left(y^2 + y^{(1)}\right)$$
$$x^{(3)} = \left(x\cdot\left(y^2 + y^{(1)}\right)\right)'$$
$$x^{(3)} = x^{(1)}\left(y^2 + y^{(1)}\right) + x\left(2y\cdot y^{(1)} + y^{(2)}\right) \;\Big|\, :x$$

$$\Rightarrow \frac{x^{(3)}}{x} = \underbrace{\frac{x^{(1)}}{x}}_{=y}\left(y^2 + y^{(1)}\right) + 2yy^{(1)} + y^{(2)}$$

$$\Rightarrow \frac{x^{(3)}}{x} = y\left(y^2 + y^{(1)}\right) + 2yy^{(1)} + y^{(2)} =$$
$$= y^3 + \underline{y\cdot y^{(1)}} + \underline{2y\cdot y^{(1)}} + y^{(2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x^{(3)}}{x} = y^{(2)} + 3yy^{(1)} + y^3}$$

Ec. (4) devine: $F(t, y, \underline{y^2+y^{(1)}}, \underline{y^{(2)}+3yy^{(1)}+y^3}, \dots) = 0.$

$$\Rightarrow G(t, y, y^{(1)}, \dots, y^{(k-1)}) = 0$$

ec. de ordin $(k-1)$

Exemplu: $x'' t x + (x')^2 t + 3xx' = 0.$

$$F(t, x, x', x'') = 0.$$

obs că $\boxed{x=0}$ este soluție pt că verifică ec:

$x(t) = 0 \Rightarrow x'(t) = 0$, $x''(t) = 0 \Rightarrow 0 \cdot t \cdot 0 + 0^2 \cdot t + 3 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

$\underline{0=0}$ Adev.

Pt. $x \neq 0$ împărțim ec. pt x^2:

$$\frac{x'' t x}{x^2} + \frac{(x')^2 t}{x^2} + \frac{3xx'}{x^2} = 0.$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x''}{x}\right) t + \left(\frac{x'}{x}\right)^2 t + 3\left(\frac{x'}{x}\right) = 0.$$

$$F_1\left(t, \frac{x'}{x}, \frac{x''}{x}\right) = 0.$$

se face schimbarea de variabile: $\frac{x'}{x} = y$

$$(t, x) \xrightarrow{\frac{x'}{x} = y} (t, y)$$

Se obține: $\frac{x''}{x} = y^2 + y'$

și ec. devine:

$$(y^2+y')t + y^2 t + 3y = 0$$

$$y^2 t + y' t + y^2 t + 3y = 0$$

$$y' = \frac{-2y^2 t - 3y}{t} \Rightarrow \underline{\frac{dy}{dt} = -\frac{3}{t} y - 2y^2}$$

ec. Bernoulli ($\alpha = 2$)

Fie $y(t)$ sol generală pt ec Bernoulli $\Rightarrow$ pt x avem de integrat o ec. liniară omogenă:

$$x' = y(t) x \Rightarrow x(t) = C \cdot e^{Y(t)}, \ C \in \mathbb{R}.$$

unde Y este primitivă pt y

④ Ecuația Euler:

$$\boxed{F\left(x,\ t x^{(1)},\ t^2 x^{(2)},\ \dots,\ t^k x^{(k)}\right)=0} \qquad (5)$$

Se reduce la ec. (3) sau (4) prin schimbarea de variabile: $|t| = e^s \iff s = \underbrace{\ln|t| = s(t)}$,

$$(t,x) \xrightarrow[\ x(t)=y(s(t))\ ]{} (s,y) \qquad |t|=e^s$$

$$x^{(1)}(t) = \left(y(s(t))\right)^{(1)} = y^{(1)}(s(t))\cdot s^{(1)}(t)$$

$$s(t) = \ln|t| = \begin{cases} \ln t, & t>0 \\ \ln(-t), & t<0 \end{cases} \Rightarrow s'(t) = \begin{cases} \frac{1}{t}, & t>0 \\ \frac{1}{-t}\cdot(-t)' = \frac{1}{t}, & t<0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow s^{(1)}(t) = \frac{1}{t} \Rightarrow x^{(1)}(t) = y^{(1)}(s(t))\cdot\frac{1}{t} \quad \Big|\cdot t$$

$$\Rightarrow \boxed{t x^{(1)} = y^{(1)}}$$

derivată în raport cu s

derivată în raport cu t.

$$x^{(1)} = \frac{y^{(1)}}{t}$$

$$x^{(2)} = \left(y^{(1)}\cdot\frac{1}{t}\right)' \Rightarrow x^{(2)} = y^{(2)}\cdot s^{(1)}(t)\,\frac{1}{t} + y^{(1)}\left(\frac{-1}{t^2}\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{(2)} = y^{(2)}\cdot\frac{1}{t^2} - y^{(1)}\cdot\frac{1}{t^2} \Rightarrow \quad \Big|\cdot t^2$$

$$\Rightarrow \boxed{t^2 x^{(2)} = y^{(2)} - y^{(1)}}$$

Ec. (5) devine:

$$F\left(y,\ y^{(1)},\ y^{(2)}-y^{(1)},\ \dots\right)=0, \qquad (6)$$

$\Rightarrow$ ec. de ordin k, care nu depinde explicit de s. Poate fi încadrată pentru reducerea ordinului la tipul (3), adică: se face schimbarea de variabilă:

$$(t,y) \xrightarrow{\ y^{(1)}(t) = z(y(t))\ } (y,z)$$

Dacă forma ec. (6) permite să fie aranjată sub forma $F\left(\frac{y^{(1)}}{y}, \frac{y^{(2)}}{y}, \dots, \frac{y^{(k)}}{y}\right)=0$, atunci reducem ordinul prin s.v: $\frac{y^{(1)}}{y} = z(t)$

$(t, y) \longrightarrow (t, z)$

Exemplu: $t^2x'' - 4(tx') + 6x = 0$.

$F(x, tx', t^2x'') = 0$ ec. Euler.

$(t, x) \xrightarrow[\substack{|t| = e^s \\ x(t) = y(s(t))}]{} (s, y)$

Avem $tx' = y'$ și $t^2x'' = y'' - y'$ ⇒ ec. devine

$$y'' - y' - 4y' + 6y = 0$$

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

(3)

$(s, y) \xrightarrow{y' = z} (y, z)$

$y'' = z' \cdot z$

$z'z - 5z + 6y = 0$.

$z' = \frac{5z - 6y}{z}$

$\frac{dz}{dy} = 5 - 6\frac{y}{z}$.

ec. omogenă de ordin 1

$(y, z) \xrightarrow[\frac{z}{y} = w]{} (y, w)$

$\frac{z(y)}{y} = w(y)$

(4)

$y = 0$ e soluție.

pt $y \neq 0$, împărțim cu y

$\frac{y''}{y} - 5\frac{y'}{y} + 6 = 0$.

$\frac{y'}{y} = z$

$(s, y) \longrightarrow (s, z)$

Avem $\frac{y''}{y} = z^2 + z'$

Ec în (s, z) este:

$z^2 + z' - 5z + 6 = 0$.

$z' = -z^2 + 5z - 6$

$\frac{dz}{ds} = -z^2 + 5z - 6$

ec. cu var. separabile

$a(s) = 1$

$b(z) = -z^2 + 5z - 6$.

(5) Ec omogenă de ordin k.

$$(7) \quad \boxed{F\left(\frac{x}{t}, x^{(1)}, tx^{(2)}, t^2x^{(3)}, \dots, t^{k-1}x^{(k)}\right) = 0}$$

OBS: Pt $k = 1$ ⇒ $F\left(\frac{x}{t}, x^{(1)}\right) = 0$ ⟶ în forma explicită $x^{(1)} = g\left(\frac{x}{t}\right)$

Prin schimbarea de variabilă $\frac{x}{t}=y$ se ajunge la o ecuație Euler:

$$(t,x) \xrightarrow{\boxed{\frac{x}{t}=y}} (t,y)$$

$$\frac{x(t)}{t}=y(t)$$

$$x=ty$$

$$\boxed{x^{(1)}=y+ty^{(1)}}$$

$$x^{(2)}=y^{(1)}+y^{(1)}+ty^{(2)} \quad |\cdot t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{t x^{(2)}=2ty^{(1)}+t^2y^{(2)}}$$

$$x^{(3)}=\left(2y^{(1)}+ty^{(2)}\right)'=2y^{(2)}+y^{(2)}+ty^{(3)} \quad |\cdot t^2$$

$$\boxed{t^2x^{(3)}=3t^2y^{(2)}+t^3y^{(3)}}$$

Ec. în (t,y) este ec. Euler:

$$F\left(y,\ y+ty^{(1)},\ 2ty^{(1)}+t^2y^{(2)},\ 3t^2y^{(2)}+t^3y^{(3)},\ \dots\right)=0$$

$$\Rightarrow \underline{G\left(y,\ ty^{(1)},\ t^2y^{(2)},\ t^3y^{(3)},\ \dots,\ t^ky^{(k)}\right)=0};$$