Seria 34, Curs 13, EDDP, 12.01.2021

Ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$.
Să determinăm $u : D \to \mathbb{R}$ care să verifice ecuația cu derivate parțiale de ordinul al doilea:

$$F\Big(x, u, \partial_1 u, \dots, \partial_n u, \big(\underset{\overset{\shortparallel}{\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}}}{\partial_i \partial_j u}\big)_{\substack{i,j=\overline{1,n} \\ 1 \leq i < j \leq n}}\Big) = 0. \quad (1)$$

unde $F : G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \longrightarrow \mathbb{R}$
este o funcție oarecare.

Ecuația (1) este cvasiliniară dacă derivatele de ordinul doi apar într-o combinație liniară, adică:

$$\boxed{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \partial_i \partial_j u + f(x, u, \partial_1 u, \dots, \partial_n u) = 0} \quad (2)$$

unde $f : G_1 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este funcție oarecare.

Pentru clasificarea ec. (2) se asociază ec. (2) o formă pătratică $g : D_1 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, în fiecare $x_0 \in D$:

$$g(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0)\, t_i t_j \quad (3)$$

Se știe că $\exists$ o transformare de coordonate, de la $(t_1, \dots, t_n)$ la $(s_1, \dots, s_n)$, dată prin:

$$t_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} s_k, \quad i = \overline{1,n}$$

sau

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \quad (4)$$

astfel încât, în coordonatele $(s_1, \dots, s_n)$, forma pătratică

g să fie în formă canonică, adică:

$$\tilde{g}(s_1, \dots, s_n) = \sum_{i=1}^{m} s_i^2 - \sum_{j=m+1}^{r} s_j^2 \quad (5)$$

unde $0 \leq m \leq n$ și $0 \leq r \leq n$.

În funcție de cum arată forma canonică (5) pentru g, ec. (2) pot fi:

(6)

① de tip eliptic, dacă: $\boxed{\begin{matrix} m=0 \\ r=n \end{matrix}}$ (toți termenii în (5) au $-$) sau $\boxed{\begin{matrix} m=n \\ r=0 \end{matrix}}$ (toți termenii au $+$)

② de tip parabolic, dacă $\boxed{\begin{matrix} 0 \leq r < n \\ 0 \leq m < n \end{matrix}}$, adică

$$\tilde{g}(s) = \sum_{i=0}^{m} s_i^2 - \sum_{j=m+1}^{r} s_j^2 \quad ; r < n$$

③ de tip hiperbolic, dacă $\boxed{\begin{matrix} r=n \\ 0 < m < n \end{matrix}}$, adică, în (5) sunt și termeni pozitivi și negativi.

Cazuri particulare:

- pt ec. de tip hiperbolic, dacă $m = n-1$, adică:
$$\tilde{g}(s) = \sum_{i=1}^{n-1} s_i^2 - s_n^2,$$
atunci ec este de tip hiperbolic normal.
- pt. ec. de tip parabolic, dacă $r = n-1$, atunci ec. este de tip parabolic normal.

Exemplu: Fie ec cu derivate parțiale de ordinul al doilea:

$$\partial_1^2 u - 2\partial_1\partial_2 u - 2\partial_1\partial_3 u + 2\partial_2^2 u + 6\partial_3^3 u = 0.$$

Stabiliți tipul ec. în raport cu clasificarea (6).

Avem $n=3$.

Se scrie forma pătratică asociată:

$$g(t_1, t_2, t_3) = t_1^2 - 2t_1t_2 - 2t_1t_3 + 2t_2^2 + 6t_3^2$$

Scriem forma canonică pt g folosind metoda Gauss:

$$g(t_1, t_2, t_3) = (t_1^2 - 2t_1t_2 - 2t_1t_3) + 2t_2^2 + 6t_3^2$$

Completăm în paranteză până la un pătrat perfect pentru un trinom:

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

rezultă: $g(t_1,t_2,t_3) = (t_1^2 - 2t_1t_2 - 2t_1t_3 + t_2^2 + t_3^2 + 2t_2t_3) -$

$$- t_2^2 - t_3^2 - 2t_2t_3 + 2t_2^2 + 6t_3^2 =$$

$$= (t_1-t_2-t_3)^2 + (t_2^2 - 2t_2t_3) + 5t_3^2 =$$

$$= (t_1-t_2-t_3)^2 + (t_2^2 - 2t_2t_3 + t_3^2) + 4t_3^2 =$$

$$= (t_1-t_2-t_3)^2 + (t_2-t_3)^2 + (2t_3)^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ considerăm $\begin{cases} s_1 = t_1-t_2-t_3 \\ s_2 = t_2-t_3 \\ s_3 = 2t_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = s_1 + s_2 + \frac{1}{2}s_3 + \frac{1}{2}s_3 \\ t_2 = s_2 + \frac{1}{2}s_3 \\ t_3 = \frac{1}{2}s_3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = s_1+s_2+s_3 \\ t_2 = s_2 + \frac{1}{2}s_3 \\ t_3 = \frac{1}{2}s_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

Avem $\det B = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow$ trecerea de la $(t_1,\dots,t_n)$ la $(s_1,\dots,s_n)$ este transformare de coordonate.

Se obține: $\tilde{g}(s) = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \Rightarrow$ ec. este de tip eliptic și se poate face o schimbare de variabile ori variabila

$$(x \longrightarrow y)$$

$$(u(x) \to \tilde{u}(y))$$

a.î. ec să fie de forma: $\dfrac{\partial^2\tilde{u}}{\partial y_1^2} + \dfrac{\partial^2\tilde{u}}{\partial y_2^2} + \dfrac{\partial^2\tilde{u}}{\partial y_3^2} = 0 \quad (5)$

(adică, $\Delta\tilde{u} = 0$ → laplacean)

Schimbarea de variabilă este $\boxed{y = B^T x}$, unde B este matricea de aducere la forma canonică a lui g.

Pt. a obține forma (5) trebuie calculate derivatele lui

u în funcție de derivatele lui $\tilde{u}$ și înlocuite în ec.

De exemplu, avem:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_1 + x_2 \\ y_3 = x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \end{cases}}$$

$$\Rightarrow u(x_1, x_2, x_3) = \tilde{u}(y_1(x), y_2(x), y_3(x)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\tilde{u}(y_1(x), y_2(x), y_3(x))\right) =$$

$$= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_1} \cdot \underbrace{\frac{\partial y_1}{\partial x_1}}_{=1} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_2} \cdot \underbrace{\frac{\partial y_2}{\partial x_1}}_{=1} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_3} \cdot \underbrace{\frac{\partial y_3}{\partial x_1}}_{=1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_1} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_2} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial}{\partial x_3}\underbrace{\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_1} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_2} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_3}\right)}_{\text{funcție de } y_1, y_2, y_3} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_1} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_2} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_3}\right) \cdot \underbrace{\frac{\partial y_1}{\partial x_3}}_{=0} + \frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_1} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_2} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_3}\right) \underbrace{\frac{\partial y_2}{\partial x_3}}_{=0} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y_3}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_1} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_2} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_3}\right) \cdot \underbrace{\frac{\partial y_3}{\partial x_1}}_{=1} \Rightarrow \partial_1 \partial_3 u = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_1 \partial y_3} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_2 \partial y_3} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_3^2}$$

Calculând $\partial_1^2 u$, $\partial_2^2 u$, $\partial_3^2 u$, $\partial_2 \partial_3 u$ în ec. din exemplu și înloc în ec, se obține forma (5) a ec.

Cazul particular $\boxed{n=2}$

Ec. cvasiliniară cu derivate parțiale de ordin 2 în dimensiune 2 este:

$$(6) \quad a(x_1,x_2)\,\partial_1^2 u + 2b(x_1,x_2)\,\partial_1\partial_2 u + c(x_1,x_2)\,\partial_2^2 u + f(x_1, x_2, u, \partial_1 u, \partial_2 u) = 0$$

unde $a, b, c : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

OBS: Din forma generală avem: $a_{11}(x) = a(x)$; $a_{12}(x) = a_{21}(x) = b(x)$

și $a_2(x) = c(x)$

Pt. a stabili tipul ec (6) și a aduce la forma canonică ec (6) se folosește următorul algoritm:

OBS: (7)
$$\begin{cases} \cdot \text{caz eliptic} \Rightarrow \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_2^2} + \tilde{f}(x,u,\partial_1 \tilde{u}, \partial_2 \tilde{u}) = 0 \\ \cdot \text{caz hiperbolic} \Rightarrow \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_1^2} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_2} + \tilde{f}(x,u,\partial_1 \tilde{u}, \partial_2 \tilde{u}) = 0 \\ \cdot \text{caz parabolic} \Rightarrow \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_1^2} + \tilde{f}(x,u,\partial_1 \tilde{u}, \partial_2 \tilde{u}) = 0 \end{cases}$$

- calculăm $d(x_1,x_2) = b^2(x_1,x_2) - a(x_1,x_2) \cdot c(x_1,x_2)$

Avem cazurile:

I • dacă $d(x_1,x_2) > 0$, atunci ec. este de tip hiperbolic,

II • dacă $d(x_1,x_2) = 0$, atunci ec. este de tip parabolic

III • dacă $d(x_1,x_2) < 0$, atunci ec. este de tip eliptic.

Pt. fiecare caz, se aplică o modalitate de aducere la forma canonică (din obs. (7)) a ecuației.

I) $\boxed{d(x_1,x_2) > 0}$

- calculăm $\begin{cases} \lambda_1(x_1,x_2) = \dfrac{b(x_1,x_2) - \sqrt{d(x_1,x_2)}}{a(x_1,x_2)} \\ \lambda_2(x_1,x_2) = \dfrac{b(x_1,x_2) + \sqrt{d(x_1,x_2)}}{a(x_1,x_2)} \end{cases}$

- se consideră transformarea de coordonate
$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x_1,x_2) \\ y_2 = \varphi_2(x_1,x_2) \end{cases}$$
unde φ_1, φ_2 sunt integrale prime ale ec: $\frac{dx_2}{dx_1} = \lambda_1(x_1,x_2)$,

respectiv $\frac{dx_2}{dx_1} = \lambda_2(x_1,x_2)$.

- se calculează derivatele pt $u(x) = \tilde{u}(y(x))$ și se înloc. în ecuație.

II) $\boxed{d(x_1,x_2)=0}$

- calculăm $\lambda_1(x_1,x_2)=\dfrac{b(x_1,x_2)}{a(x_1,x_2)}$
- se consideră transformarea de coordonate
$$\begin{cases} y_1=\varphi_1(x_1,x_2) \\ y_2=\varphi_2(x_1,x_2) \end{cases}$$
unde φ_1 este integrală primă pentru ec. $\dfrac{dx_2}{dx_1}=\lambda_1(x_1,x_2)$,
iar φ_2 este o funcție astfel încât
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} \neq 0.$$
- calculăm derivatele lui $u(x)=\tilde{u}(y(x))$ și le înlocuim în ec.

III) $\boxed{d(x_1,x_2)<0}$

- calculăm $\lambda_1(x_1,x_2)=\dfrac{b(x_1,x_2)+i\sqrt{-d(x_1,x_2)}}{a(x_1,x_2)}$
$$\lambda_2(x_1,x_2)=\bar{\lambda}_1(x_1,x_2)$$
- se consideră transformarea de coordonate
$$\begin{cases} y_1=\varphi_1(x_1,x_2) \\ y_2=\varphi_2(x_1,x_2) \end{cases}$$
unde $\varphi_1(x_1,x_2)=Re(\varphi(x_1,x_2))$
$\varphi_2(x_1,x_2)=Im(\varphi(x_1,x_2))$
cu φ integrală primă pt ec:
$$\frac{dx_2}{dx_1}=\lambda_1(x_1,x_2)$$
- se calc derivatele pentru $u(x)=\tilde{u}(y(x))$ și se înloc în ec.

<u>Exemple</u>: Să se aducă la forma canonică ec:

1) $\partial_1^2-6\partial_1\partial_2u+10\partial_2^2u+\partial_1u-3\partial_2u=0.$

2) $4\partial_1^2u-4\partial_1\partial_2u+\partial_2^2u+2\partial_2u=0.$

3) $\partial_1^2u+2\partial_1\partial_2u-3\partial_2^2u+\partial_1u+\partial_2u=0.$

(3) $a(x) = 1$
$b(x) = \frac{2}{2} = 1$
$c(x) = -3$
$\}$ constante

$d(x) = const = b^2 - ac = 1 - 1\cdot(-3) = 4 > 0 \Rightarrow$ ec. este de tip hiperbolic.

$$\lambda_1 = \frac{b - \sqrt{d}}{a} = \frac{1-2}{1} = -1$$

$$\lambda_2 = \frac{b + \sqrt{d}}{a} = \frac{1+2}{1} = 3.$$

$\frac{dx_2}{dx_1} = -1 \Rightarrow dx_2 = -dx_1 \Rightarrow x_2 = -x_1 + C_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1 + x_2 = C_1 \Rightarrow \underline{\varphi_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2}$

$\frac{dx_2}{dx_1} = 3 \Rightarrow dx_2 = 3dx_1 \Rightarrow x_2 = 3x_1 + C_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow -3x_1 + x_2 = C_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \underline{\varphi_2(x_1, x_2) = -3x_1 + x_2}.$

Se consideră transformarea de coordonate:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = -3x_1 + x_2 \end{cases}$$

Avem: $u(x) = \tilde{u}(y_1(x), y_2(x))$.

$$\partial_1 u = \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_1}\cdot 1 + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_2}\cdot(-3)$$

$$\partial_2 u = \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_1}\cdot 1 + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_2}\cdot 1$$

Se calc şi $\partial_1^2 u$, $\partial_1\partial_2 u$, $\partial_2^2 u$ $\Rightarrow$ se înloc în ec $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_2^2} - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_1^2} + \underbrace{\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_1} - 3\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_2} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_1} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_2}}_{\tilde{f}(y, u, \partial_1 \tilde{u}, \partial_2 \tilde{u})} = 0$$

<u>Temă</u>: 1 şi 2

<u>Pt. examen</u>:
- modalitate afişată pe MOODLE
- consultaţii pe 02.02.2021, pe Teams, anunţ ora pe MOODLE.
- email: pminulia@fmi.unibuc.ro.