

CURSUL 10: SISTEME LINIARE. RANGUL UNEI MATRICE

T. DUMITRESCU

În acest curs, notația k va desemna, în lipsa mențiunii exprese contrare, un corp comutativ.¹

1. SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

Fie $m, n \geq 1$. Considerăm sistemul de ecuații liniare

$$(\mathcal{S}) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

unde $a_{ij}, b_i \in k$. Scris matriceal, sistemul este $Ax = b$, unde A este matricea de tip (m, n) cu elementele a_{ij} numită matricea sistemului,

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ este vectorul necunoscutelor și $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ este vectorul

termenilor liberi. O soluție a sistemului este un vector coloană $c =$

$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ cu elemente din k astfel încât $Ac = b$.

Definiția 1. Sistemul (\mathcal{S}) se numește **incompatibil** dacă nu admite nici o soluție, **compatibil determinat** dacă admite o soluție unică și **compatibil nedeterminat** dacă admite cel puțin două soluții.

Definiția 2. Două sisteme se zic **echivalente** dacă au aceleași soluții.

Observația 3. Se vede ușor că următoarele transformări conduc la sisteme echivalente cu cel dat:

- Adunarea la o ecuație a altei ecuații înmulțite cu un element din k .
- Permutarea a două ecuații.
- Înmulțirea unei ecuații cu un element nenul din k .

Fie $B = (A | b)$ matricea extinsă a sistemului, adică matricea sistemului la care am adăugat vectorul coloană al termenilor liberi. Transformările a, b, c de mai sus produc asupra matricei B următoarele transformări:

¹Acest material este preluat din [1]

1. Adunarea la o linie a altei linii înmulțite cu un element din k .
2. Permutarea a două linii.
3. Înmulțirea unei linii cu un element nenul din k .

Definiția 4. Transformările 1-3 de mai sus se numesc transformări elementare pe linii.

Observația 5. Transformările de mai sus sunt inversabile.

Definiția 6. Spunem că două matrice A, B de același tip sunt **echivalente pe linii** dacă A se obține din B printr-o succesiune de transformări elementare pe linii.

Observația 7. Așa cum îi arată și numele, „echivalența pe linii” este o relație de echivalență pe mulțimea matricelor de același tip.

Vom nota cu $A \sim^l B$ faptul că A și B sunt echivalente pe linii.

Propoziția 8. Fie C o matrice de tip (p, q) cu elemente din k . Dacă f este una din tranformările elementare 1 – 3 și $f(C)$ este matricea obținută din C prin efectuarea transformării f , atunci $f(C) = f(I_p)C$, unde I_p este matricea unitate.

Demonstrație: Calcul direct. \square

Apar astfel următoarele tipuri de matrice:

1. $T_{ij}(a)$ = matricea unitate în care la linia j s-a adunat linia i înmulțită cu elementul $a \in k$.
2. P_{ij} = matricea unitate cu liniile i și j permutate.
3. $D_i(u)$ = matricea unitate cu linia i înmulțită cu elementul $u \in k^*$.

Definiția 9. Matricele $T_{ij}(a)$, P_{ij} și $D_i(u)$ se numesc **matrice elementare**

Observația 10. $T_{ij}(a)T_{ij}(-a) = I_p$, $P_{ij}^2 = I_p$ și $D_i(u)D_i(u^{-1}) = I_p$, deci matricele elementare sunt inversabile.

Definiția 11. Numim matrice eșalon (pe linii) o matrice de forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \end{pmatrix}.$$

Observația 12. O matrice eșalon este o matrice ce verifică următoarele condiții:

1. Primul element nenul din fiecare linie, numit *pivot*, este egal cu 1.
2. Pivotul de pe linia $i + 1$ este la dreapta pivotului de pe linia i .

3. Pivotul este singurul element nenul de pe coloana sa.
4. Eventualele linii nule apar la sfârșit.

Teorema 13. O matrice eșalon inversabilă este egală cu matricea unitate.

Demonstrație: O matricea eșalon este superior triunghiulară. Dacă este și inversabilă, atunci pivoții apar pe diagonala principală, deci este matricea unitate. \square

Teorema 14. Orice matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(k)$ este echivalentă pe linii cu o matrice eșalon unică.

Demonstrație: **Existența:** Dacă $A = 0$, atunci A este matrice eșalon. Presupunem că $A \neq 0$. Procedăm astfel: Găsim prima coloană cu elemente nenule, să zicem coloana j . Prin permutări de linii, aducem un element nenul α al ei pe prima linie și apoi, împărțind prima linie la α , facem $\alpha = 1$, obținând astfel un pivot în poziția $(1, j)$. Prin transformări de tip 1, anulăm elementele aflate dedesubt pe coloana pivotului. Apoi, se aplică același algoritm submatricei obținute din A eliminând linia 1 și primele j coloane. La sfârșit, prin transformări de tip 1, anulăm elementele aflate deasupra pe coloana fiecărui pivot.

Unicitatea: Facem inducție după m .

Din $(0, 0, \dots, 0, 1, a_{r+1}, \dots, a_n) \stackrel{l}{\sim} (0, 0, \dots, 0, 1, b_{s+1}, \dots, b_n)$ rezultă că există $t \in k^*$ astfel încât

$$(0, 0, \dots, 0, 1, b_{s+1}, \dots, b_n) = (t)(0, 0, \dots, 0, 1, a_{r+1}, \dots, a_n),$$

de unde $r = s$, $t = 1$ și $a_i = b_i$ pentru orice $i \in \{r + 1, \dots, n\}$. Prin urmare, afirmația este adevărată pentru $m = 1$.

Fie acum $m > 1$; presupunem afirmația adevărată pentru toate matricile cu mai puțin de m linii. Fie $E_1, E_2 \in \mathcal{M}_{m,n}(k)$ două matrici eșalon cu proprietățile $A \stackrel{l}{\sim} E_1$ și $A \stackrel{l}{\sim} E_2$. Există atunci $U_1, U_2 \in GL_m(k)$ astfel încât $U_1 E_1 = A = U_2 E_2$. Dacă $E_1 = 0$, atunci $E_2 = 0$ și am terminat. Dacă $E_1 \neq 0$, atunci $E_2 \neq 0$; notăm cu j_1 , respectiv j_2 , coloana pivotului de pe prima linie a lui E_1 , respectiv E_2 . Dacă $j_1 < j_2$, notăm $U = U_2^{-1} U_1$ și avem $U E_1 = E_2$; comparând coloanele j_1 ale acestor matrici, rezultă că $u_{11} = u_{21} = \dots = u_{m1} = 0$, deci $\det U = 0$, contradicție. Cazul $j_1 > j_2$ se elimină analog. Prin urmare, $j_1 = j_2$. Procedând ca mai sus, obținem $u_{11} = 1$ și $u_{21} = \dots = u_{m1} = 0$. În consecință, matricile E_1 și E_2 au aceeași primă linie, pe care o notăm cu L . Notând $E_1 = \begin{pmatrix} L \\ -E'_1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} L \\ -E'_2 \end{pmatrix}$ și U' matricea obținută din U înlăturând prima linie și prima coloană, obținem $U' E'_1 = E'_2$. Conform ipotezei de inducție, obținem $E'_1 = E'_2$, deci și $E_1 = E_2$. \square

Corolarul 15. Dacă A este o matrice, atunci există matricele elementare E_1, \dots, E_k astfel încât $E_k \cdots E_1 A$ este matrice eşalon.

Corolarul 16. O matrice pătratică este inversabilă dacă şi numai dacă ea este produs de matrice elementare.

Demonstrație: Fie A o matrice pătratică inversabilă de ordin n . Conform corolarului precedent, există matricele elementare E_1, \dots, E_k astfel încât $C = E_k \cdots E_1 A$ este matrice eşalon. Conform teoremei 13, $C = I_n$, deci $A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$. Reciproca este evidentă. \square

Observația 17. Cu notațiile precedente, $A^{-1} = E_k \cdots E_1$, deci A^{-1} se poate obține făcând asupra lui I_n secvența de transformări elementare ce duce pe A în I_n . Deci, eşalonând matricea $(A \ I_n)$ se obține matricea $(I_n \ A^{-1})$. Obținem astfel un algoritm de calcul al inversei unei matrice prin transformări elementare.

Din teorema 14 şi din considerațiile anterioare referitoare la sistemele de ecuații liniare rezultă

Teorema 18. Orice sistem de ecuații liniare este echivalent cu un sistem având matricea extinsă o matrice eşalon.

Presupunem că sistemul de ecuații liniare

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

are matricea extinsă B matrice eşalon. Observăm că dacă apare un pivot în ultima coloană a lui B , atunci sistemul are o ecuație de forma $0 = 1$, deci este incompatibil. În continuare presupunem că B nu are pivoți pe ultima coloană. Fie p_1, \dots, p_k coloanele ce au pivoți. Numim necunoscutele x_{p_1}, \dots, x_{p_k} **necunoscute principale**, celelalte necunoscute x_{s_1}, \dots, x_{s_l} fiind numite **necunoscute secundare**. Trecând necunoscutele secundare în membrul drept şi neglijând ecuațiile de forma $0 = 0$, sistemul devine

$$x_{p_i} = b_i - \sum_{j=1}^l a_{is_j}x_{s_j}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Deci sistemul este compatibil, necunoscutele secundare, dacă există, putând lua valori arbitrare. Am demonstrat astfel următoarea teoremă:

Teorema 19. Fie un sistem de ecuații liniare cu matricea extinsă B matrice eşalon. Sistemul este compatibil dacă şi numai dacă B nu are pivoți pe ultima coloană. Dacă este compatibil, sistemul este compatibil determinat dacă şi numai dacă nu există necunoscute secundare, adică matricea sistemului are câte un pivot pe fiecare coloană.

Definiția 20. Metoda de rezolvare a unui sistem de ecuații liniare prin eșalonarea matricei extinse poartă numele de **metoda lui Gauss a eliminării**.

2. RANGUL UNEI MATRICE

Definiția 21. Fie $A \in M_{mn}(k) \setminus \{0\}$. Numim **rangul** lui A cel mai mare dintre ordinele minorilor nenuli ai lui A .

Observația 22. Considerăm că matricea nulă are rangul zero.

Vom nota rangul matricii A cu $\text{rang } A$.

Observația 23. $\text{rang}(A) = r$ dacă și numai dacă A are un r -minor nenul și toți minorii de ordin $\geq r + 1$ sunt nuli.

Observația 24. Conform regulii lui Laplace, $\text{rang}(A) = r$ dacă și numai dacă A are un minor nenul de ordin r și toți minorii de ordin $r + 1$ nuli.

Observația 25. Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(k)$, atunci $0 \leq \text{rang}(A) \leq \min(m, n)$ și $\text{rang}(A) = \text{rang}(^T A)$.

Observația 26. Dacă $A \in M_n(k)$, atunci $\text{rang}(A) = n$ dacă și numai dacă $|A| \neq 0$.

Teorema 27. Fie $A \in M_{m,n}(k)$ și $B \in M_{n,p}(k)$. Atunci $\text{rang}(AB) \leq \min(\text{rang}(A), \text{rang}(B))$.

Demonstrație: Din formula Binet-Cauchy, rezultă că orice r -minor al lui AB este combinație liniară de r -minori ai lui A și B . \square

Corolarul 28. Fie $A \in M_{m,n}(k)$, $U \in GL_m(k)$ și $V \in GL_n(k)$. Atunci

$$\text{rang}(UA) = \text{rang}(AV) = \text{rang}(A).$$

Demonstrație: Din teorema precedentă, $\text{rang}(UA) \leq \text{rang}(A)$ și $\text{rang}(A) = \text{rang}(U^{-1}UA) \leq \text{rang}(UA)$, deci $\text{rang}(UA) = \text{rang}(A)$. Cealaltă egalitate se probează analog. \square

Corolarul 29. Două matrice echivalente pe linii au același rang.

Teorema lui Kronecker. Fie $A \in M_{m,n}(k)$. Atunci $\text{rang}(A)$ este egal cu dimensiunea k -subspațiului lui k^n generat de liniile lui A și este de asemenea egal cu dimensiunea k -subspațiului lui k^m generat de coloanele lui A .

Demonstrație: Fie $l(A)$, respectiv $c(A)$, dimensiunea subspațiului generat de liniile, respectiv de coloanele lui A . Arătăm că $\text{rang}(A) = l(A)$.

Se vede ușor că transformările elementare nu afectează $l(A)$. Conform corolarului 29, putem presupune că A este matrice eşalon. Fie p numărul de pivoți ai lui A . Este imediat că primele p linii sunt liniar independente, iar celelalte sunt nule. Deci $l(A) = p$. Totodată, A are un p -minor egal cu 1 (pe cel având pivoții pe diagonala principală), deci $\text{rang}(A) = p$. Pe de altă parte, $\text{rang}(A) = \text{rang}({}^T A) = l({}^T A) = c(A)$. \square

Corolarul 30. $\text{rang}(A)$ este egal cu numărul de pivoți ai formei eşalon a lui A .

Corolarul 31. Fie $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(k)$. Presupunem că A are un r -minor nenul M astfel încât toți $(r+1)$ -minorii lui A obținuți din M prin bordare sunt nuli. Atunci $\text{rang}(A) = r$.

Demonstrație: Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că M constă în primele r linii și r coloane ale lui A . Notăm liniile lui A cu A_1, \dots, A_m . Cum M este un r -minor nenul, $\text{rang}(A) \geq r$ și liniile A_1, \dots, A_r sunt liniar independente.

Presupunem că $\text{rang}(A) \geq r+1$. Conform teoremei lui Kronecker, putem presupune că liniile A_1, \dots, A_{r+1} sunt liniar independente. Pentru

$$j \in \{1, \dots, n\}, \text{ luăm } (r+1)\text{-minorul } M_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{r+11} & \dots & a_{r+1r} & a_{r+1j} \end{vmatrix}.$$

M_j este nul, deoarece pentru $j \in \{1, \dots, r\}$ M_j are două coloane egale, iar pentru $j = r+1, \dots, n$ se aplică ipoteza. Complementarii algebrici $d_1, \dots, d_r, d_{r+1} = M$ ai elementelor de pe coloana $r+1$ nu depind de j . Dezvoltând M_j după coloana $r+1$, obținem $0 = d_1 a_{1j} + \dots + d_r a_{rj} + M a_{r+1j}$ pentru $j = 1, \dots, n$. Deci $d_1 A_1 + \dots + d_r A_r + M A_{r+1} = 0$, iar $M \neq 0$. Rezultă că liniile A_1, \dots, A_{r+1} sunt liniar dependente, contradicție. \square

Teorema Kronecker-Capelli. Un sistem de ecuații liniare este compatibil dacă și numai dacă rangul matricei sistemului este egal cu rangul matricei extinse a acestuia.

Demonstrația I: Fie A matricea sistemului și B matricea extinsă. Conform teoremei 18 și corolarului 28, putem presupune că B (deci și A) este matrice eşalon. Condiția din enunț este echivalentă cu faptul B nu are pivoți pe ultima coloană. Se aplică teorema 19. \square

Demonstrația II: Fie c_1, \dots, c_n coloanele lui A , b vectorul termenilor liberi și $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Sistemul $Ax = b$ se scrie sub forma $x_1c_1 + \dots + x_nc_n = b$. Deci, sistemul $Ax = b$ este compatibil dacă și numai dacă b este combinație liniară de c_1, \dots, c_n , ceea ce este echivalent cu ${}_k\langle c_1, \dots, c_n \rangle = {}_k\langle c_1, \dots, c_n, b \rangle$. Mulțumită incluziunii evidente, această ultimă relație este echivalentă cu $\dim_k \langle c_1, \dots, c_n \rangle = \dim_k \langle c_1, \dots, c_n, b \rangle$, adică cu $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$. \square

REFERENCES

- [1] T. Dumitrescu, *Algebra*, Ed. Universității din București, 2006.
- [2] I. D. Ion, N. Radu, *Algebra*, Ed. Universității din București, 1981.
- [3] C. Năstăsescu, C. Niță, C. Vraciu, *Bazele algebrei*, Ed. Academiei, București, 1986.