CURS #5

CONȚINUTUL CURSULUI #5:

II.1.9. Metoda Cholesky.

Definiția (II.5.)

Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Numim descompunerea Cholesky a matricei A, descompunerea de forma

$$A = LL^T \tag{1}$$

unde $L = (\ell_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este o matrice inferior triunghiulară.

Definiția (II.6.)

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) *A se numește simetrică dacă și numai dacă $A^T = A$;*
b) *A se numește semipozitiv definită dacă și numai dacă $< Av, v > \geq 0, \forall v \in \mathbb{R}^n$;*
c) *A se numește pozitiv definită dacă și numai dacă $< Av, v >> 0, \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.*

$< \cdot, \cdot >$ reprezintă produsul scalar pe $\mathbb{R}^n$ definit astfel: $< u, v >= \sum_{i=1}^n u_i v_i, \forall u, v \in \mathbb{R}^n$.

Teorema (II.2.)

Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este o matrice simetrică și pozitiv definită, atunci descompunerea Cholesky există.

Obs.:Pentru a arăta că A este pozitiv definită se va folosi criteriul lui Sylvester și anume: Matricea simetrică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este pozitiv definită dacă și numai dacă toți minorii principali, i.e. $detA_k > 0, A_k = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,k}}$.

Propoziție (II.2.)

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simetrică și pozitiv definită. Dacă componentele $\ell_{kk}, k = \overline{1,n}$ de pe diagonala principală a matricei L din descompunerea Cholesky sunt strict pozitive, atunci descompunerea este unică.

CALCULUL MATRICEI L : Relația $A = LL^T$ se va scrie astfel:

$$\begin{pmatrix} & & & & \\ & a_{kk} & \cdots & a_{ki} & \\ & \vdots & & \vdots & \\ & a_{ik} & \cdots & a_{ii} & \\ & & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & & \\ & \ell_{kk} & & 0 & \\ & \vdots & \ddots & & \\ & \ell_{ik} & \cdots & \ell_{ii} & \\ & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & & \\ & \ell_{kk} & \cdots & \ell_{ik} & \\ & & \ddots & \vdots & \\ & 0 & & \ell_{ii} & \\ & & & & \end{pmatrix} \tag{2}$$

Presupunem că printr-o anumită metodologie au fost calculate primele $k-1$ coloane din L, deci și primele linii $k-1$ din L^T.

ETAPA 1: Calculăm elementul ℓ_{kk} de pe diagonala principală, scriind expresia pentru a_{kk} :

$$a_{kk} = \sum_{s=1}^{n} \ell_{ks}\ell_{sk}^T = \sum_{s=1}^{k} \ell_{ks}\ell_{sk}^T = \sum_{s=1}^{k} \ell_{ks}^2 = \ell_{kk}^2 + \sum_{s=1}^{k-1} \ell_{ks}^2$$

Cum $\ell_{kk} > 0$ va rezulta

$$\ell_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{s=1}^{k-1} \ell_{ks}^2} \tag{3}$$

ETAPA 2: Calculăm restul elementelor de pe coloana k, i.e. $\ell_{ik}, i > k$, scriind expresia pentru a_{ik} :

$$a_{ik} = \sum_{s=1}^{n} \ell_{is}\ell_{sk}^{T} = \sum_{s=1}^{k} \ell_{is}\ell_{sk}^{T} = \sum_{s=1}^{k} \ell_{is}\ell_{ks} = \ell_{ik}\ell_{kk} + \sum_{s=1}^{k-1} \ell_{is}\ell_{ks} \Rightarrow$$

$$\ell_{ik} = \frac{1}{\ell_{kk}}\left(a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} \ell_{is}\ell_{ks}\right) \tag{4}$$

ALGORITM (Metoda Cholesky)

Date de intrare: $A = (a_{ij})_{i,j} = \overline{1,n}$; $b = (b_i)_{i=\overline{1,n}}$;
Date de ieșire: $L = (\ell_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$; $x = (x_i)_{i=\overline{1,n}}$

STEP 1: $\alpha = a_{11}$;
- if $\alpha \leq 0$ then
  - OUTPUT('A nu este pozitiv definită');
  - STOP.
- endif

- $\ell_{11} = \sqrt{a_{11}}$;
- for $i = 2 : n$ do
  - $\ell_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{\ell_{11}}$;
- endfor

STEP 2: for $k = 2 : n$ do
- $\alpha = a_{kk} - \sum_{s=1}^{k-1} \ell_{ks}^2$;
- if $\alpha \leq 0$ then
  - OUTPUT('A nu este pozitiv definită');
  - STOP.
- endif
- $\ell_{kk} = \sqrt{\alpha}$;

- for $i = k+1 : n$ do
  - $\ell_{ik} = \dfrac{1}{\ell_{kk}}\left(a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} \ell_{is}\ell_{ks}\right)$;
- endfor

endfor

STEP 3: $y =$ SubsAsc(L, b);
STEP 4: $x =$ SubsDesc(L^T, y).

Exemplu 2: Fie $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

a) Să se verifice dacă A este simetrică și pozitiv definită;
b) În caz afirmativ, să se determine factorizarea Cholesky.
c) Să se rezolve sistemul $Ax = b$, $b = (12\ 30\ 10)^T$ prin metoda Cholesky.

a) $4 > 0, \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 36 > 0, det(A) = 144 > 0 \Rightarrow$ conform criteriului Sylvester rezultă că matricea A este pozitiv definită. Conform Th. (II.2.) matricea A admite descompunere Cholesky. Astfel $\exists L$ inferior triunghiulară astfel încât $A = LL^T$.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{21} & \ell_{31} \\ 0 & \ell_{22} & \ell_{32} \\ 0 & 0 & \ell_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \ell_{11}^2 & \ell_{11}\ell_{21} & \ell_{11}\ell_{31} \\ \ell_{21}\ell_{11} & \ell_{21}^2 + \ell_{22}^2 & \ell_{21}\ell_{31} + \ell_{22}\ell_{32} \\ \ell_{31}\ell_{11} & \ell_{31}\ell_{21} + \ell_{32}\ell_{22} & \ell_{31}^2 + \ell_{32}^2 + \ell_{33}^2 \end{pmatrix}$$

Aflăm mai întâi elementul ℓ_{11} : $\ell_{11}^2 = 4 \Rightarrow \ell_{11} = 2$ $(\ell_{11} > 0)$. Calculăm în continuare elementele de pe prima coloană din $L, (\ell_{21}, \ell_{31})$: $\ell_{21}\ell_{11} = 2$ și $\ell_{31}\ell_{11} = 2$ de unde rezultă $\ell_{21} = 1$ și $\ell_{31} = 1$. Continuăm procesul calculând elementul ℓ_{22} : $\ell_{21}^2 + \ell_{22}^2 = 10 \Rightarrow \ell_{22} = 3$ $(\ell_{22} > 0)$. Aflăm elementul rămas pe coloana a II-a, i.e., ℓ_{32} : $\ell_{31}\ell_{21} + \ell_{32}\ell_{22} = 4 \Rightarrow \ell_{32} = 1$. În final calculăm elemntul ℓ_{33} : $\ell_{31}^2 + \ell_{32}^2 + \ell_{33}^2 = 6 \Rightarrow \ell_{33} = 2$ $(\ell_{33} > 0)$.

Am obținut $L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Rezolvăm sistemul $Ly = b$:

$$\begin{cases} 2y_1 = 12 \\ y_1 + 3y_2 = 30 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 6 \\ y_2 = 8 \\ y_3 = -2 \end{cases}$$

În final se rezolvă sistemul $L^T x = y$:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$