Seria 34, curs 5, EDDP, 03.11.2020

Problema Cauchy pt. ecuații diferențiale de ordinul întâi în $\mathbb{R}$. Teorema de existență și unicitate a soluției.

Problema Cauchy dată prin

$$(1)\quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

înseamnă găsirea unei soluții $\varphi : I \to \mathbb{R}$ care verifică:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, \varphi(t)), \forall t \in I. \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2)$$

unde $\begin{cases} f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (t_0, x_0) \in D. \end{cases}$

Prop (reprezentarea integrală a soluției prob. Cauchy)
Presupunem că f este continuă în ambele variabile.
P.t. problema (1), are loc echivalența:

$$\boxed{\varphi \text{ soluție a prob. (1)}, \ \varphi: I \to \mathbb{R} \iff \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\,ds, \ \forall t \in I} \quad (3)$$

Dem: $\boxed{\Rightarrow}$ Presupunem că φ este soluție pentru (1) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), \ \forall t \in I. \\ \varphi(t_0) = x_0. \end{array}$$

Avem:

$$\varphi(t) - \underbrace{\varphi(t_0)}_{x_0} = \int_{t_0}^{t} \varphi'(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\,ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\,ds}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Presupunem că $\forall t \in I$: $\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\,ds$.

Arătăm că φ verifică (2).

Avem: $\varphi(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s, \varphi(s))\,ds = x_0$.

și $\varphi'(t) = \frac{d}{dt}\left(\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\,ds\right) = \frac{d}{dt}\left(F(t) - F(t_0)\right)$, unde F este o primitivă pt $\frac{f(s, \varphi(s))}{h(s)}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow F'(t) = h(t) = f(t, \varphi(t))$

Avem: $\varphi'(t) = F'(t) = f(t, \varphi(t)) \Rightarrow$ verificată cond $(2)_1$

Obs: $\boxed{\frac{d}{dt}\left(\int_{u(t)}^{v(t)} h(s)\,ds\right)} = \frac{d}{dt}\left(H(s)\Big|_{u(t)}^{v(t)}\right) = \frac{d}{dt}\left(H(v(t)) - H(u(t))\right) =$

$= H'(v(t))v'(t) - H'(u(t))\cdot u'(t) = \boxed{h(v(t))\cdot v'(t) - h(u(t))\cdot u'(t)}.$

H este primitivă pt h

Teorema de existență și unicitate a soluției prob. Cauchy (1) (TEU)

Ipoteze:

1) $\exists\, a, b > 0$ a.î. $D_{a,b} = [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b] \subset \Delta$.

2) funcția f este continuă în ambele variabile; se consideră: $M = \sup\limits_{(t,x) \in D_{a,b}} |f(t,x)|$ (4)

3) funcția f este funcție Lipschitz în a doua variabilă, adică: $\exists L > 0$ astfel încât:

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \le L\,|x_1 - x_2|, \quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in D_{a,b} \quad (5)$$

Concluzia: $\forall\, \alpha \in \left(0, \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}\right)$,

$\exists!\ \varphi : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to [x_0 - b, x_0 + b]$

soluție a prob. Cauchy (1).

Obs: 1) Ipoteza 3) poate fi înlocuită cu:

[f derivabilă în raport cu x și $\frac{\partial f}{\partial x}$ este continuă pe $D_{a,b}$ și $L = \sup\limits_{(t,x) \in D_{a,b}} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right|$.

Fie $t \in I$ fixat arbitrar.

Notăm $g_t : [x_0 - b, x_0 + b] \to \mathbb{R}$

$$g_t(x) = f(t, x)$$

Fie $x_1, x_2 \in [x_0 - b, x_0 + b]$, $x_1 < x_2$

Avem $\left.\begin{array}{l} f \text{ continuă în raport cu ambele variabile} \Rightarrow g_t \text{ cont în } [x_0-b, x_0+b] \\ f \text{ derivabilă în raport cu } x \Rightarrow g_t \text{ derivabilă} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ se poate aplica teorema Lagrange funcției g_t pe $[x_1, x_2]$

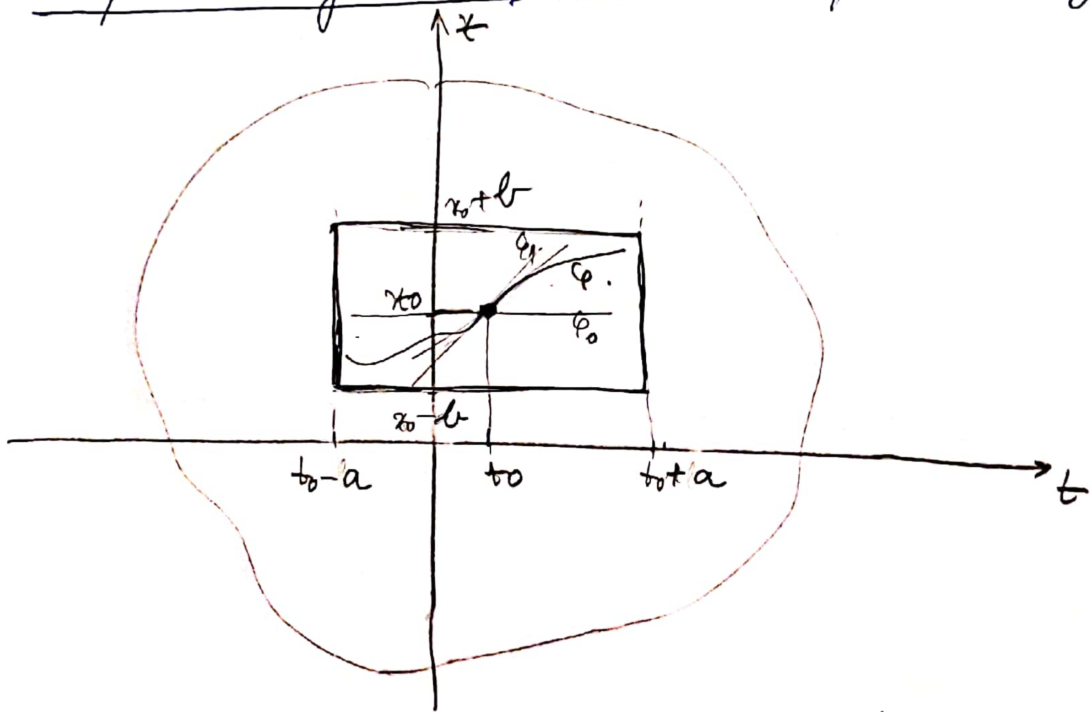
$\exists c \in (x_1, x_2)$ a.î. $g_t(x_2) - g_t(x_1) = g_t'(c) \cdot (x_2 - x_1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow |g_t(x_2) - g_t(x_1)| = \underbrace{|g_t'(c)|}\, |x_2 - x_1| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(t, x_2) - f(t, x_1)| = \underbrace{\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t, c)\right|}_{\leq L} |x_2 - x_1| \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ Lipschitz.

2) Interpretarea geometrică a soluției prob Cauchy



Demonstrația TEU: Fie $\alpha \in \left(0, \min\left(a, \frac{b}{M}\right)\right)$.

Se consideră șirul de funcții $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ definit, prin recurență, astfel: $\begin{cases} \varphi_n : \underbrace{[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]}_{= I_\alpha} \to \mathbb{R} \end{cases}$

$$(6)\quad \begin{cases} \varphi_0(t) = x_0, & \forall t \in I_\alpha \\ \varphi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{n-1}(s))\,ds, & \forall t \in I_\alpha. \end{cases}$$

și numit <u>șirul aproximațiilor succesive</u> (<u>Picard</u>).
Arătați că șirul $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ este convergent punctual la o soluție a problemei Cauchy (1).
Pașii de dem sunt:

P1) Graficele funcțiilor φ_n, $n\geq 0$ sunt în $D_{a,b}$, adică $\varphi_n(t) \in [x_0-b, x_0+b]$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall t\in I_\alpha$

adică $|\varphi_n(t) - x_0| \leq b$, $\forall t\in I_\alpha$, $\forall n\in\mathbb{N}$ (7)

P2) $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ șir Cauchy, adică:

$$|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)| \leq \frac{ML^n |t-t_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \forall t\in I_\alpha,\ \forall n\in\mathbb{N}. \quad (8)$$

P3) $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ convergent și $\varphi: I_\alpha \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$ este soluție a prob. Cauchy (1).

P4) unicitatea soluției.

P1) Prin inducție după $n \in \mathbb{N}$:

<u>$n=0$</u>: $|\varphi_0(t) - x_0| = |x_0 - x_0| = 0 < b$

Presupunem adev pt n: $|\varphi_n(t) - x_0| \leq b$, $\forall t\in I_\alpha$
și dem că $|\varphi_{n+1}(t) - x_0| \leq b$, $\forall t\in I_\alpha$

Avem $|\varphi_{n+1}(t) - x_0| \overset{(6)}{=} \left| \cancel{x_0} + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{n}(s))\,ds - \cancel{x_0} \right| =$

$$= \left| \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{n}(s))\,ds \right| \leq \begin{cases} \int_{t_0}^{t} \underbrace{|f(s, \overbrace{\varphi_{n}(s)}^{\in[x_0-b,\, x_0+b]})|}_{\leq M}\,ds, & \text{dacă } t \geq t_0 \\ \int_{t}^{t_0} \underbrace{|f(s, \varphi_{n}(s))|}_{\leq M}\,ds, & \text{dacă } t < t_0 \end{cases}$$

$$\leq \begin{cases} \int_{t_0}^{t} M\,ds, & \text{dacă } t \geq t_0 \\ \int_{t}^{t_0} M\,ds, & \text{dacă } t < t_0 \end{cases} = \begin{cases} M(t-t_0), & \text{dacă } t \geq t_0 \\ M(t_0-t), & \text{dacă } t < t_0 \end{cases} =$$

$$= M \underbrace{|t-t_0|}_{\substack{\leq \alpha \\ t \in I_\alpha = [t_0-\alpha,\, t_0+\alpha]}} \leq M\cdot\alpha < \cancel{M}\cdot\frac{b}{\cancel{M}} \Rightarrow$$

$\alpha < \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$

$\Rightarrow |\varphi_{n+1}(t) - x_0| < b$.

(P2) $\forall n \in \mathbb{N}$: $\quad |\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)| \leq \dfrac{ML^n\,|t-t_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \ \forall t \in I_\alpha$.

Prin inducție:

$\underline{\underline{n=0}}$: $|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)| = \left|\cancel{x_0} + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))\,ds - \cancel{x_0}\right| =$

$$= \left|\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))\,ds\right| \underset{t \geq t_0}{\leq} \int_{t_0}^{t} \underbrace{|f(s,\varphi(s))|}_{\leq M} ds \leq$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} M\,ds = M(t-t_0) = M|t-t_0| =$$

$$= \frac{ML^0\,|t-t_0|^{0+1}}{(0+1)!}.$$

Presupunem adev pt n și dem pt $n+1$:

$$|\varphi_{n+2}(t) - \varphi_{n+1}(t)| \leq \frac{ML^{n+1}\,|t-t_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Avem:

$$|\varphi_{n+2}(t) - \varphi_{n+1}(t)| = \left|\cancel{x_0} + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_{n+1}(s))\,ds - \cancel{x_0} - \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_n(s))\,ds\right| =$$

$$= \left|\int_{t_0}^{t} \big(f(s,\varphi_{n+1}(s)) - f(s,\varphi_n(s))\big)\,ds\right| \underset{(t \geq t_0)}{\leq}$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} |f(s,\underbrace{\varphi_{n+1}(s)}_{x_1}) - f(s,\underbrace{\varphi_n(s)}_{x_2})|\,ds \underset{(p.3)}{\leq}$$

$$\le \int_{t_0}^{t} L\,|\varphi_{n+1}(s)-\varphi_n(s)|\,ds \le$$
pasul de inducție

$$\le \int_{t_0}^{t} L\cdot \frac{ML^{n}(s-t_0)^{n+1}}{(n+1)!}\,ds = \frac{ML^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{(s-t_0)^{n+2}}{(n+2)}\Bigg|_{s=t_0}^{s=t} =$$

$$= \frac{ML^{n+1}(t-t_0)^{n+2}}{(n+2)!}$$

P3) $(\varphi_n)_{n\ge 0}$ șir Cauchy $\Rightarrow$ $(\varphi_n)_{n\ge 0}$ convergent $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \varphi : I_\alpha \to \mathbb{R}$

$\varphi(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t), \quad \forall t \in I_\alpha.$

Rezultă: $\varphi(t) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_{n-1}(s))\,ds\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))\,ds \xrightarrow[\text{forma integrală (3)}]{\text{reprez. sub}} \varphi$ este

soluție a prob. Cauchy (1).

<u>Exemplu</u>: Fie prob. Cauchy: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \\ x(0) = 1 \end{cases}$ (9)

a) Să se verifice ipotezele TEU (teorema de existență și unicitate a soluției).

b) Să se calculeze $(\varphi_n)_{n\ge 0}$.

c) Să se determine soluția prob.

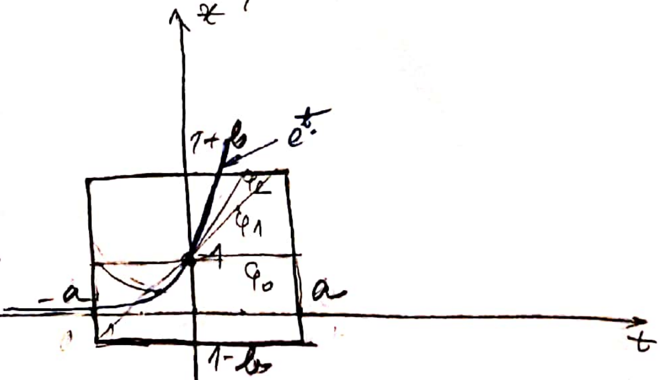
a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(t,x) = x$

$t_0 = 0, \quad x_0 = 1$

1) $\exists\, a,b > 0$ a.î.

$\Delta_{a,b} = [-a,a]\times[1-b,1+b] \subset \mathbb{R}^2$



2) f este cont pe $\mathbb{R}^2$

$\sup\limits_{(t,x)\in\Delta_{a,b}} |f(t,x)| = \sup\limits_{\substack{t\in[-a,a]\\ x\in[1-b,1+b]}} |x| = 1+b = M$

3) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x) = 1, \quad \forall (t,x)\in\mathbb{R}^2$ este continuă $\Rightarrow \sup\limits_{(t,x)\in\Delta_{a,b}} \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| = 1 = L$

b) Fie $\alpha \in \left(0, \frac{b}{1+b}\right)$

$$\varphi_n : I_\alpha = [-\alpha, \alpha] \to [1-b, 1+b]$$

$$\varphi_0(t) = 1, \quad \forall t \in I_\alpha$$

$$\varphi_1(t) = 1 + \int_0^t f(s, \varphi_0(s))\,ds = 1 + \int_0^t 1\,ds = 1 + t.$$

Se arată, prin inducție, că:

$$\varphi_n(t) = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Avem:

$$\varphi_{n+1}(t) = 1 + \int_0^t f(s, \varphi_n(s))\,ds = 1 + \int_0^t \varphi_n(s)\,ds =$$

$$= 1 + \int_0^t \left(1 + \frac{s}{1!} + \frac{s^2}{2!} + \dots + \frac{s^n}{n!}\right) ds =$$

$$= 1 + \left(s + \frac{s^2}{1!\cdot 2} + \frac{s^3}{2!\cdot 3} + \dots + \frac{s^{n+1}}{n!(n+1)}\right)\Bigg|_0^t =$$

$$= 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$$

Se știe că $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t) = e^t$ $\left(\sum\limits_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!} = e^t\right)$

c) temă: arătați că mult. sol. ec. $\frac{dx}{dt} = x$ este $x(t) = Ce^t$, $C \in \mathbb{R}$.

Cu cond. $x(0) = 1 \Rightarrow \underline{x(t) = e^t}$ sol. prob. Cauchy (9)

<u>Exemple (temă)</u>

I. Se cere șirul aproximațiilor succesive pentru prob. Cauchy următoare:

a) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + t \\ x(0) = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xt \\ x(0) = 1 \end{cases}$

II) Fie prob. Cauchy: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2t\cos x, & (t,x) \in [-1,1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ x(0) = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

a) Verificarea ip. TEU.

b) Calculați câteva ($\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$?) aproximații din șirul aproximațiilor succesive.

c) Soluția prob. Cauchy.

Metode numerice pentru aproximarea soluției prob. Cauchy pt. ec. dif. de ord. întâi

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x), & t\in[t_0, t_0+T],\ T>0. \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Presupunem că sunt verificate cond. TEU. Fie φ soluția prob. (10)

<u>Problema</u>: considerăm dată o diviziune a intervalului $[t_0, t_0+T]$:

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = t_0 + T$$

și vrem să determinăm aproximări ale soluției prob. Cauchy (10) în aceste puncte astfel:

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$$

a.î.
$$|\varphi(t_j) - x_j| < O(h^k) \qquad (11)$$

unde
$$\begin{cases} h = \max\limits_{j=\overline{0,N-1}} (t_{j+1} - t_j) = \max\limits_{j=\overline{0,N-1}} h_j \\ k \in \mathbb{N}^* \text{ (ordinul de aproximare)}. \end{cases}$$

O schemă numerică (într-unul pas) pentru aproximările $x_0, x_1, \dots, x_N$ este de forma:

$$\begin{cases} x_0 \\ x_{j+1} = x_j + h_j \cdot \phi(h_j, t_j, x_j) \end{cases} \quad j = \overline{0, N-1}$$

În general, ϕ se construiește în funcție de f.
În metoda Euler (explicită) avem: $\boxed{\phi(h,t,x) = f(t,x)}$