Seria 34, Curs 11, EDDP, 22.12.2020

Ecuații cvasiliniare cu derivate parțiale de ordinul întâi

O ecuație de forma:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(x,u)\cdot \partial_k u = g(x,u) \qquad (1)$$

este cvasiliniară cu derivate parțiale de ordinul întâi, unde

$a_1, \dots, a_n, g : D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

funcții cel puțin continue.

Sistemul caracteristic asociat ec. (1) este:

$$(2)\ \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_1(x,u) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_n(x,u) \\ \dfrac{du}{dt} = g(x,u) \end{cases} \overset{\text{sau}}{\iff} \frac{dx_1}{a_1(x,u)} = \dots = \frac{dx_n}{a_n(x,u)} = \frac{du}{g(x,u)} \quad (3)$$

Integrală primă pt (3) este o funcție $F : D \to \mathbb{R}$ a.î. $\forall (x,u)$ soluție a sistemului (3) avem $\exists C_{(x,u)} \in \mathbb{R}$

a.î. $F(x(t), u(t)) = C_{(x,u)}$, $\forall t \in I$

$(x,u) : I \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

adică: $\dfrac{dF}{dt}(x(t), u(t)) = 0$, $\forall t \in I$.

Prop. 1: Dacă $\varphi_1, \dots, \varphi_n : D \to \mathbb{R}$ sunt n integrale prime independente, atunci forma generală implicită a soluției pt ec. (1) este:

$$f(\varphi_1(x,u), \dots, \varphi_n(x,u)) = 0. \qquad (4)$$

unde $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este o funcție care admite derivate parțiale de ordinul întâi.

Exemplu: 1) Fie ec.:

$$x_1\partial_1 u + x_2\partial_2 u + \dots + x_n\partial_n u = u.$$

Se cere forma generală a soluției.

$a_k(x,u) = x_k$, $k=\overline{1,n}$

$g(x,u) = u$

Sistemul caracteristic: $\dfrac{dx_1}{x_1} = \dfrac{dx_2}{x_2} = \dots = \dfrac{dx_n}{x_n} = \dfrac{du}{u}$.

$\dfrac{dx_1}{x_1} = \dfrac{dx_2}{x_2} \Rightarrow \ln|x_1| = \ln|x_2| + C \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln\left|\dfrac{x_1}{x_2}\right| = C \Rightarrow \left|\dfrac{x_1}{x_2}\right| = e^C \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = C_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi_1(x,u) = \dfrac{x_1}{x_2}$

La fel: din $\dfrac{dx_k}{x_k} = \dfrac{dx_{k+1}}{x_{k+1}}$, $k=\overline{2,n-1} \Rightarrow \varphi_k(x,u) = \dfrac{x_k}{x_{k+1}}$

Luăm $\dfrac{dx_n}{x_n} = \dfrac{du}{u} \Rightarrow \dfrac{x_n}{u} = C \Rightarrow \varphi_n(x,u) = \dfrac{x_n}{u}$

Soluția în formă implicită este:

$$f\left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_2}{x_3}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, \frac{x_n}{u}\right) = 0.$$

cu $f: G\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f are derivate de ordinul întâi

2) temă! Aceeași cerință pt ec:

$$u\,\partial_1 u + x_2\,\partial u = x_1$$

$(n=2)$: $\underbrace{\dfrac{dx_1}{u} = \overbrace{\dfrac{dx_2}{x_2} = \dfrac{du}{x_1}}^{\varphi_2}}_{\varphi_1} \left(= \dfrac{d(x_1+x_2+u)}{u+x_1+x_2} \right)$

Problema Cauchy restrânsă pt ec. (1)

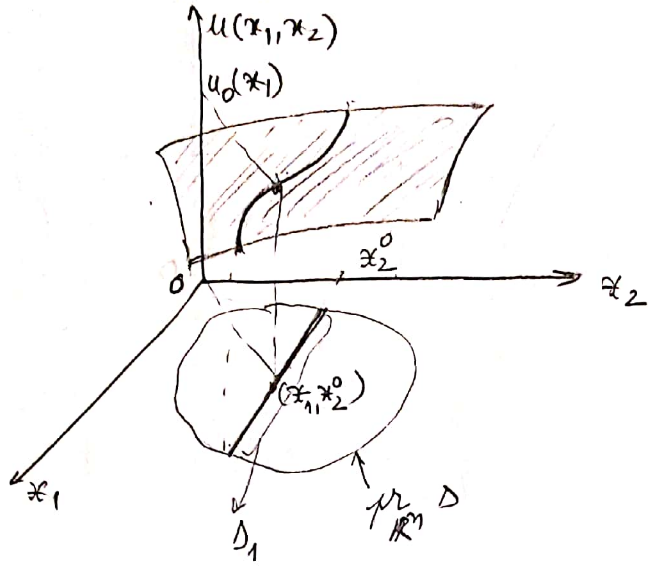
Pt. ec. (1) se dă o problemă Cauchy restrânsă dacă se are să determinăm o soluție u a ec. (1) care să verifice

$$(5)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k(x,u)\,\partial_k u = g(x,u) \\ u(x_1,\dots,x_{n-1},x_n^0) = u_0(x_1,\dots,x_{n-1}),\ \forall (x_1,\dots,x_{n-1})\in D_1 \end{cases}$$

unde $\begin{cases} x_n^0 = \text{const. cunoscută} \ ; \ (x_1,\dots,x_{n-1},x_n^0)\in D . \\ D_1\subset \mathbb{R}^{n-1} \\ u_0 : D_1\to\mathbb{R} \ \text{funcție cunoscută} . \end{cases}$

<u>Interpretare geometrică</u> în cazul $\boxed{n=2}$ $\xRightarrow{(5)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1(x,u)\,\partial_1 u + a_2(x,u)\,\partial_2 u = g(x,u) \\ u(x_1,x_2^0) = u_0(x_1) , \quad x_1\in D_1\subset\mathbb{R} . \end{cases}$$



<u>Problema Cauchy generală</u> pe (1) înseamnă să determinăm o soluție pt (1) care să verifice:

$$(6)\ \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} a_k(x,u)\,\partial_k u = g(x,u) \\ u(x) = u_0(x) \ \text{pe} \ (S\cap D) , \ S = \{ x\in\mathbb{R}^n \mid h(x)=0 \} \end{cases}$$

unde hipersuprafață în $\mathbb{R}^n$

<u>OBS</u>: pt prob restrânsă: $h(x) = x_n - x_n^0 \Rightarrow S = \{ x\in\mathbb{R}^n \mid x_n = x_n^0 \}$

Pt. rezolvarea problemei (6) ~~trebuie verificate condițiile următoare~~:

- asociem lui S o parametrizare:

$$x\in S : \begin{cases} x_1 = \alpha_1(s) \\ \vdots \\ x_n = \alpha_n(s) \end{cases} , \quad s=(s_1,\dots,s_{n-1}) , \ s\in D_2\subset\mathbb{R}^{n-1}$$

care trebuie să verifice condițiile:

1) $\operatorname{rang}\left(\frac{\partial\alpha_i(s)}{\partial s_j}\right)_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,n-1}}} = n-1 , \ \forall s\in D_2 , \ \forall(\alpha_1(s),\dots,\alpha_n(s))\in S$

(7) 2) $\det\left(A\big((\alpha_1(s),\dots,\alpha_n(s)), u_0(\alpha_1(s),\dots,\alpha_n(s))\big), \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial s_j}(s)\right)_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n-1}}}\right) \neq 0$

$\forall s \in D_2$

$(\forall (\alpha_1(s),\dots,\alpha_n(s)) \in S)$.

unde $A(x,u) = \begin{pmatrix} a_1(x,u) \\ \vdots \\ a_n(x,u) \end{pmatrix}$

<u>OBS</u>: Pt prob. restrânsă avem: $S: x_n = x_n^0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ o parametrizare: $\begin{cases} x_1 = s_1 = \alpha_1(s) \\ \vdots \\ x_{n-1} = s_{n-1} = \alpha_{n-1}(s) \\ x_n = x_n^0 = \alpha_n(s) \end{cases}$ $(s_1,\dots,s_{n-1},x_n^0) \in pr_{\mathbb{R}^n}^{\Delta}$

. și pt cond avem:

1) $\operatorname{rang}\left(\left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial s_j}(s)\right)\right) = \operatorname{rang} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{M}_{n,n-1}(\mathbb{R})} = n-1$ ($= I_{n-1}$)

2) $\det\begin{vmatrix} a_1((s_1,\dots,s_{n-1},x_n^0), u_0(s_1,\dots,s_{n-1})) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{n-1}((s_1,\dots,s_{n-1},x_n^0), u_0(s_1,\dots,s_{n-1})) & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_n((s_1,\dots,s_{n-1},x_n^0), u_0(s_1,\dots,s_{n-1})) & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} =$

$= \underbrace{a_n((s_1,\dots,s_{n-1},x_n^0), u_0(s_1,\dots,s_{n-1}))}_{\neq 0} \cdot (-1)^{n+1}$, adică, coeficientul lui $\partial_n u$ să fie nenul pe S.

<u>Algoritmul de rezolvare pt o problemă Cauchy generală (6)</u>

- căutăm o parametrizare pt S: $\{x_k = \alpha_k(s)$, $k=\overline{1,n}$, $s=(s_1,\dots,s_{n-1})$
- verificăm cond 1) și 2) din (7).
- notăm $\varphi(s) = u_0(\alpha_1(s),\dots,\alpha_n(s))$.

• se scrie sistemul caracteristic cu condiții inițiale:

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_1(x,u) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_n(x,u) \\ \dfrac{du}{dt} = g(x,u) \\ x_1(0) = \alpha_1(s) \\ \vdots \\ x_n(0) = \alpha_n(s) \\ u(0) = \varphi(s) \end{cases}$$

• rezolvăm sistemul caracteristic: $\begin{cases} x_k = \tilde{x}_k(t,s); \ k=\overline{1,n} \\ u = \tilde{u}(t,s) \end{cases}$

• pt. a obține soluția $u = u(x)$, se determină din

$$\begin{cases} x_k = \tilde{x}_k(t,s), k=\overline{1,n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \tilde{t}(x_1, \dots, x_n) \\ s_j = \tilde{s}_j(x_1, \dots, x_n), j=\overline{1,n-1} \end{cases}$$

și apoi:

$$u(x) = \tilde{u}(\tilde{t}(x), \tilde{s}(x)),$$

unde $\tilde{s} = (\tilde{s}_1(x), \dots, \tilde{s}_{n-1}(x))$.

<u>Algoritmul în cazul $\boxed{n=2}$</u>:

• avem problema : $\begin{cases} a_1(x,u)\partial_1 u + a_2(x,u)\partial_2 u = g(x,u) \\ u(x) = u_0(x), \quad x \in D \cap S \end{cases}$

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0\}.$$

$$x = (x_1, x_2).$$

• param pt S : $\begin{cases} x_1 = \alpha_1(s) \\ x_2 = \alpha_2(s) \end{cases}$, $s = (s_1)$ $= s$.

• $\varphi(s) = u_0(\alpha_1(s), \alpha_2(s))$

• cond (*): 1) $\text{rang}\begin{pmatrix} \alpha_1'(s) \\ \alpha_2'(s) \end{pmatrix} = 1$, $\forall (\alpha_1(s), \alpha_2(s)) \in S$.

2) $\begin{vmatrix} a_1((\alpha_1(s), \alpha_2(s)), \varphi(s)) & \alpha_1'(s) \\ a_2((\alpha_1(s), \alpha_2(s)), \varphi(s)) & \alpha_2'(s) \end{vmatrix} \neq 0$.

$\forall (\alpha_1(s), \alpha_2(s)) \in S$.

• sistemul caracteristic: $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_1(x,u) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_2(x,u) \\ \dfrac{du}{dt} = g(x,u) \\ x_1(0) = \alpha_1(s) \\ x_2(0) = \alpha_2(s) \\ u(0) = \varphi(s) \end{cases}$

• din sist. caract $\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \tilde{x}_1(t,s) \\ x_2 = \tilde{x}_2(t,s) \\ u = \tilde{u}(t,s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \tilde{t}(x_1,x_2) \\ s = \tilde{s}(x_1,x_2) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow u(x_1,x_2) = \tilde{u}(\tilde{t}(x), \tilde{s}(x))$.

Temă: Scrieți alg în cazul $\boxed{n=3}$

Exemplu: Fie problema Cauchy:

$\begin{cases} (x_1+3x_2)\,\partial_1 u + (x_1-x_2)\,\partial_2 u = u + x_1 + x_2 \\ u(x_1,x_2) = x_1+x_2 \quad \text{pe } S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 2x_2\}. \end{cases}$

$a_1(x,u) = x_1+3x_2$

$a_2(x,u) = x_1-x_2$

$g(x,u) = u+x_1+x_2$

$a_1, a_2, g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$S: x_1 = 2x_2 \Rightarrow \underbrace{x_1-2x_2}_{h(x_1,x_2)} = 0$

$u_0(x_1,x_2) = x_1+x_2, \quad u_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

• param. pt S: $\begin{cases} \alpha_1(s) = 2s \\ \alpha_2(s) = s \end{cases}, \; s \in \mathbb{R}$

• $\varphi(s) = u_0(\alpha_1(s), \alpha_2(s)) = u_0(2s, s) = 2s+s = 3s$.

• cond (*): 1) $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \alpha_1'(s) \\ \alpha_2'(s) \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$

2) $\begin{vmatrix} \alpha_1(s)+3\alpha_2(s) & 2 \\ \alpha_1(s)-\alpha_2(s) & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5s & 2 \\ s & 1 \end{vmatrix} = 5s-2s = 3s \neq 0$

$s \neq 0$.

• sistemul caract: $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1+3x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2 \\ \dfrac{du}{dt} = u + x_1 + x_2 \\ x_1(0) = 2s \\ x_2(0) = s \\ u(0) = 3s \end{cases}$ $\Big\}$ sistem diferential liniar în (x_1, x_2)

• $\begin{cases} x_1' = x_1+3x_2 \\ x_2' = x_1 - x_2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x_1'' = \cancel{x_1'} + \cancel{3x_2'}$

$\cancel{3x_2'} = 3x_1 - \cancel{3x_2}$

$\cancel{x_1'} = x_1 \cancel{+3x_2}$ (+)

$x' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} x$

$x_1'' = 4x_1$

$r^2 = 4 \Rightarrow r_{1,2} = \pm 2 \Rightarrow \varphi_1(t) = e^{2t}$, $\varphi_2(t) = e^{-2t}$

$\Rightarrow \boxed{x_1(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

din prima ec $\Rightarrow x_2 = \frac{1}{3}(x_1' - x_1) =$

$= \frac{1}{3}\left(C_1 e^{2t}\cdot 2 + C_2 e^{-2t}\cdot(-2) - C_1 e^{2t} - C_2 e^{-2t}\right) =$

$= \frac{1}{3}\left(C_1 e^{2t} - 3C_2 e^{-2t}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{x_2(t) = \frac{1}{3}C_1 e^{2t} - C_2 e^{-2t}}$

aflăm C_1, C_2 din cond inițiale:

$\begin{cases} x_1(0) = 2s \\ x_2(0) = s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 2s \\ \frac{1}{3}C_1 - C_2 = s \end{cases}$ (+)

$\frac{4}{3}C_1 \;/ = 3s \Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{9s}{4}}$

$C_2 = 2s - C_1 = 2s - \frac{9s}{4} \Rightarrow \boxed{C_2 = -\frac{s}{4}}$

$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{x}_1(t,s) = \frac{s}{4}\left(9e^{2t} - e^{-2t}\right) \\ \tilde{x}_2(t,s) = \frac{s}{4}\left(3e^{2t} + e^{-2t}\right) \end{cases}$ (8)

Pt $u \Rightarrow \frac{du}{dt} = u + \frac{s}{4}\left(12 e^{2t}\right) \Rightarrow \frac{du}{dt} = u + 3s e^{2t}$

pt u avem ec. afină, pt care obs că poate avea o sol particulară: $\varphi_0(t) = \alpha s e^{2t} \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi_0'(t) = \alpha s e^{2t} \cdot 2 = 2\alpha s e^{2t}$

Verificăm ec.: $\varphi_0'(t) = \varphi_0(t) + 3s e^{2t}$

$2\alpha s e^{2t} = \alpha s e^{2t} + 3s e^{2t} \,\Big|\, : s e^{2t}$

$2\alpha = \alpha + 3 \Rightarrow \boxed{\alpha = 3} \Rightarrow \boxed{\varphi_0(t) = 3s e^{2t}}$

$\Rightarrow u(t) = \bar{u}(t) + \varphi_0(t)$

unde $\bar{u}$ este sol. ec. liniare omogene: $\frac{d\bar{u}}{dt} = \bar{u} \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{u}(t) = C \cdot e^{t} \Rightarrow u(t) = C \cdot e^{t} + 3s e^{2t}$

dar $u(0) = 3s$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow 3s = C + 3s \Rightarrow C = 0 \Rightarrow u(t) = 3s e^{2t} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\tilde{u}(t, s) = 3s e^{2t}} \; (9)$

Din (8) $\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}(9e^{2t} - e^{-2t}) \\ x_2 = \frac{1}{4}(3e^{2t} + e^{-2t}) \end{cases}$

$x_1 + x_2 = \frac{1}{4} \cdot 12 e^{2t} \Rightarrow 3s e^{2t} = x_1 + x_2 \overset{(9)}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow \boxed{u(x_1, x_2) = x_1 + x_2}$

Temă: Să se rezolve prob. Cauchy:

a) $\begin{cases} (x_2 + u)\, \partial_1 u + (x_1 + u)\, \partial_2 u = x_1 + x_2 \\ u(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \text{ pe } S = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0 \} \end{cases}$

x_2^0.

b) $\begin{cases} x_1 \partial_1 u - x_2 \partial_2 u = 0 \\ u(x_1, x_2) = x_1^2 \text{ pe } S = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2,\ x_1 > 0 \} \end{cases}$