Seria 34, Curs 7, EDDP, 17.11.2020

Asocierea unui sistem de ecuații diferențiale pentru o ecuație explicită de ordin n

Fie ecuația diferențială de ordin n:

$$x^{(n)} = f\left(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)}\right) \qquad (1)$$

cu $f : \Delta \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Se fac notațiile: $y = (y_1, \dots, y_n)$

$$(2)\ \begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = x^{(1)} \\ \vdots \\ y_{n-1} = x^{(n-2)} \\ y_n = x^{(n-1)} \end{cases} \xrightarrow{\text{derivăm}} \begin{cases} y_1' = x^{(1)} \\ y_2' = x^{(2)} \\ \vdots \\ y_{n-1}' = x^{(n-1)} \\ y_n' = x^{(n)} \end{cases}$$

$\Downarrow$

Sistemul asociat ec. (1) este:

$$(3)\ \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(t, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

$$(t, x) \xrightarrow{(2)} (t, y)$$

ec. de ordin n — sist. dif. cu y cu n componente

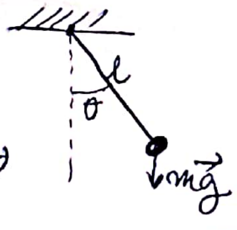
sau

$$y' = g(t, y)$$

unde $g = (g_1, \dots, g_n)$; $\begin{cases} g_1(t,y) = y_2 \\ g_2(t,y) = y_3 \\ \vdots \\ g_{n-1}(t,y) = y_n \\ g_n(t,y) = f(t, y_1, \dots, y_n). \end{cases}$

Exemplu: Ec. de mișcare pt pendul matematic este:

$$\theta'' = \frac{g}{l} \sin \theta$$



Pt asocierea sistemului: $\begin{cases} y_1 = \theta \\ y_2 = \theta' \end{cases} \to \begin{cases} y_1' = \theta' \\ y_2' = \theta'' \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = \frac{g}{l} \sin y_1 \end{cases}$$

$$y' = h(t, y)$$

$$h = (h_1, h_2) \quad ; \quad h_1(t,y) = y_2$$

$$h_2(t,y) = \frac{g}{l} \sin y_1$$

$\cdot | y_1'$

$$y_2' \cdot y_1' = \frac{g}{l} \underbrace{(\sin y_1) \, y_1'}$$

dar $y_1' = y_2$

$$\Rightarrow y_2' y_2 = \frac{g}{l} (-\cos y_1)'$$

$$\left(\frac{y_2^2}{2}\right)' = \frac{g}{l} (-\cos y_1)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y_2^2}{2} + \frac{g}{l} \cos y_1\right)' = 0 \Rightarrow \frac{y_2^2}{2} + \frac{g}{l} \cos y_1 = \frac{C_1}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m y_2^2}{2} + \frac{mg}{l} \cos y_1 = C_1 \Rightarrow \underbrace{\frac{m(\theta')^2}{2}}_{\text{energia cinetică}} + \underbrace{\frac{mg\cos\theta}{2}}_{\text{energia potențială}} = C$$

OBS: 1) Dacă pentru un sistem de ecuații diferențiale găsim n integrale prime independente, atunci înseamnă că avem soluția sistemului în formă implicită.

2) Soluția implicită a unei ecuații diferențiale de ordin 1 este ca o integrală primă a ec. diferențiale.

Problema Cauchy pentru sisteme de ecuații diferențiale

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \\ x_1(t_0) = x_{10} \\ \vdots \\ x_n(t_0) = x_{n0} \end{cases}$$

unde $f = (f_1, \dots, f_n) : \Delta \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$(t_0, x_0) \in D$ cu $x_0 = (x_{10}, \ldots, x_{n0})$

TEU pt (4):

Dacă sunt îndeplinite ipotezele:

1) $\exists a > 0$, $\exists b_1, \ldots, b_n > 0$ a.î.

$$D_{a, b_1, \ldots, b_n} = [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_{10} - b_1, x_{10} + b_1] \times \ldots \times [x_{n0} - b_n, x_{n0} + b_n] \subset D$$

2) f continuă pe D

$$M = \sup_{(t, x) \in D_{a, b_1, \ldots, b_n}} \| f(t, x) \|$$

3) f este Lipschitz în variabila x:

$\exists L > 0$ a.î. $\forall (t, x), (t, y) \in D$ avem:

$$\| f(t, x) - f(t, y) \| \leq L \| x - y \|$$

sau matricea derivatelor de ordinul întâi pt f în raport cu $x_1, \ldots, x_n$ să fie continuă:

$$\frac{Df}{Dx} = \frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (5)$$

și $L = \sup_{(t, x) \in D_{a, b_1, \ldots, b_n}} \left\| \frac{Df}{Dx}(t, x) \right\|$ → norma matricială sau poate fi considerată ca normă în $\mathbb{R}^{n^2}$.

atunci $\forall \alpha \in \left(0, \min\left(a, \frac{b_1}{M}, \ldots, \frac{b_n}{M}\right)\right)$,

$\exists ! \; \varphi : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to [x_{10} - b_1, x_{10} + b_1] \times \ldots \times [x_{n0} - b_1, x_{n0} + b_1]$

soluție a prob. Cauchy (4).

Dem. TEU pt (4), ca și în cazul prob. Cauchy pt ec. diferențiale în $\mathbb{R}$, se bazează pe construcția șirului aproximațiilor succesive:

$$(\varphi_m)_{m \geq 0} \; ; \; \varphi_m = (\varphi_{mj})_{j = \overline{1, n}}$$

definit prin:

$$(6)\quad \begin{cases} \varphi_0(t) = x_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0}) \\ \varphi_{m+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_m(s))\,ds \end{cases}, \quad m \in \mathbb{N}$$

adică pe componente:

$$(7)\quad \varphi_{m+1,j}(t) = x_{j0} + \int_{t_0}^{t} f_j\Big(s, \underbrace{(\varphi_{m1}(s), \dots, \varphi_{mn}(s))}_{\varphi_m(s)}\Big)\,ds.$$

$$j = \overline{1,n}, \quad m \in \mathbb{N}$$

Pt. exemplu cu mişcarea pendului matematic

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = \frac{g}{l} y_1 \\ y_1(t_0) = \theta_0 \\ y_2(t_0) = 0 \end{cases} ; \quad x_0 = (\theta_0, 0)$$

Şirul aproximaţiilor succesive: $(\varphi_m)_{m \geq 0}$; $\varphi_m = (\varphi_{m1}, \varphi_{m2})$

$$\begin{cases} m = 0 & \begin{cases} \varphi_{01}(t) = \theta_0 \\ \varphi_{02}(t) = 0 \end{cases} \\ m \in \mathbb{N} & \begin{cases} \varphi_{m+1,1}(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} h_1(s, \varphi_m(s))\,ds = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \varphi_{m2}(s)\,ds. \\ \varphi_{m+1,2}(t) = 0 + \int_{t_0}^{t} h_2(s, \varphi_m(s))\,ds = 0 + \int_{t_0}^{t} \frac{g}{l} \sin(\varphi_{m1}(s))\,ds. \end{cases} \end{cases}$$

Aproximarea soluţiei prob. (4) cu metoda Euler:

$$(8)\quad \begin{cases} x_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0}) \\ t \in [t_0, t_0 + T] \\ t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = t_0 + T \\ h = \frac{T}{N}, \quad N \in \mathbb{N}^* ; \quad t_k = t_0 + k \cdot h, \ k = \overline{0,N} \\ x_{k+1} = x_k + h \cdot f(t_k, x_k), \quad k = \overline{0,N-1} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \left[x_{k+1,j} = x_{k,j} + h \cdot f_j(t_k; x_{k1}, \dots, x_{kn}), \quad \begin{matrix} k = \overline{0,N-1} \\ j = \overline{1,n} \end{matrix} \right.$$

Temă: Scrieți schema Euler pentru problema Cauchy pentru pendulul matematic:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \frac{g}{l} \sin y_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(t_0) = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Sisteme de ecuații diferențiale liniare

(9) $x' = \underbrace{A(t)}_{\shortparallel} x$

$(a_{ij}(t))_{i,j=\overline{1,n}}$, a_{ij} funcție continuă ; $i,j=\overline{1,n}$

$A : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$f : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$f(t,x) = A(t)x = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_j(t,x) = a_{j1}(t)x_1 + \dots + a_{jn}(t)x_n \;,\; j=\overline{1,n}$$

Pt problema Cauchy pt ec. (9): $\begin{cases} x' = A(t)x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ (10)

se poate aplica TEU:

1) (t_0,x_0) ai $D_{a,b_1,\dots,b_n} \subset I \times \mathbb{R}^n$
2) $f_1,\dots,f_n$ sunt funcții continue ca sume de produse de funcții continue
3) $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = A(t)$, $\forall t \in I$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ are comp. funcții continue.

Deci: prob. (10) are soluție unică în I.

Notăm S_A = mulț. soluțiilor sistemului (9)

Propoziție 1: 1) S_A este spațiu vectorial real cu operațiile de adunare a funcțiilor și înmulțirea

funcțiilor cu scalari.
2) $\dim_{\mathbb{R}}(S_A) = n$.

Dem: 1) Este suficient să arătăm că:
i) $\forall \varphi, \psi \in S_A$ avem $\varphi + \psi \in S_A$
ii) $\forall \varphi \in S_A$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ avem $\alpha\varphi \in S_A$.

i) Fie $\varphi, \psi \in S_A \Rightarrow \begin{cases} \varphi'(t) = A(t)\varphi(t) \\ \psi'(t) = A(t)\psi(t) \end{cases}$

Calculăm $(\varphi+\psi)'(t) = \varphi'(t) + \psi'(t) =$
$= A(t)\varphi(t) + A(t)\psi(t) =$
$= A(t)(\varphi(t) + \psi(t)) \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi + \psi \in S_A$.

ii) Fie $\varphi \in S_A \Rightarrow \varphi'(t) = A(t)\varphi(t)$
Fie $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow (\alpha\varphi)'(t) = \alpha\varphi'(t) = \alpha A(t)\varphi(t) =$
$= A(t)(\alpha\varphi)(t) \Rightarrow \alpha\varphi \in S_A$.

2) Fie $t_0 \in I$ și $\mathcal{F}_{t_0} : S_A \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{F}_{t_0}(\varphi) = \varphi(t_0)$$

Dacă $\mathcal{F}_{t_0}$ este bijectivă, cum $\dim \mathbb{R}^n = n$,
(morfism bijectiv)
atunci $\dim(S_A) = n$.

- $\mathcal{F}_{t_0}$ injectivă: fie $\varphi, \psi \in S_A$ a.î. $\mathcal{F}_{t_0}(\varphi) = \mathcal{F}_{t_0}(\psi) \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi(t_0) = \psi(t_0) \overset{not}{=} x_0$.
Din unicitatea prob. Cauchy $\Big| \Rightarrow \varphi = \psi$.

- $\mathcal{F}_{t_0}$ surjectivă: $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\exists \varphi_{x_0} \in S_A$ a.î. $\varphi_{x_0}(t_0) = x_0$.
$(\mathcal{F}_{t_0}(\varphi_{x_0}) = x_0)$

Fie $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Problema Cauchy: $\begin{cases} x' = A(t)x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ are soluție

$\Rightarrow \exists \varphi_{x_0} \in S_A$ a.î. $\mathcal{F}_{t_0}(\varphi_{x_0}) = \varphi(t_0) = x_0$.

Din prop. 1 $\Rightarrow$ Pentru a determina S_A, este suficient să determinăm o bază în S_A, numită sistem fundamental de soluții

Notăm $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subset S_A$, $\varphi_j = (\varphi_{j1}, \dots \varphi_{jn})$ $j=\overline{1,n}$

un sistem fundamental de soluții în S_A.

Algoritm de determinare a unui sistem fundamental de soluții în cazul $A(t) = A = const$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$x' = Ax, \quad A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

- Se determină valorile proprii ale matricei A:

  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ distincte cu multiplicitati $m_1, \dots, m_k$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$$

$\boxed{\text{OBS}: m_1 + m_2 + \dots + m_k = n}$

- Pt fiecare valoare proprie λ_j, $j = \overline{1,k}$ se determină m_j soluții pentru sistemul fundamental de soluții astfel:

i) $\boxed{\lambda_j \in \mathbb{R}, \ m_j = 1}$ $\Rightarrow$ se determină $u \in \mathbb{R}^n$ nenul, vector propriu pt λ_j: $Au = \lambda_j u$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ o soluție în sistemul fundamental de soluții este: $\boxed{\varphi_1(t) = e^{\lambda_j t} \cdot u}$

ii) $\boxed{\lambda_j \in \mathbb{R}, \ m_j > 1}$ $\Rightarrow$ se determină $p_0, p_1, \dots, p_{m_j - 1}$ vectori din $\mathbb{R}^n$ nu toți nuli astfel încât $\boxed{\varphi(t) = \left(\sum_{s=0}^{m_j - 1} p_s t^s \right) e^{\lambda_j t}}$ să fie soluție a sistemului (9). (10)

Se obțin m_j seturi de vectori $(p_0, p_1, \dots, p_{m_j - 1})$ independenți $\Rightarrow$ $\varphi_1, \dots, \varphi_{m_j}$ soluții de forma (10).

iii) $\boxed{\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \ m_j = 1}$ $\Rightarrow$ $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$, $\beta_j \neq 0$

$\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$

Cum $p_A(\lambda)$ este polinom cu coef reali $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\overline{\lambda_j} = \alpha_j - i\beta_j$ este între cele k valori proprii distincte

Se determină $u \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_{\mathbb{C}^n}\}$ nenul ai

$Au = \lambda_j u$ $\Rightarrow$ 2 soluții în sistemul fundam coresp pt λ_j și $\overline{\lambda_j}$:

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = Re\,(e^{\lambda_j t} \cdot u) \\ \varphi_2(t) = Im\,(e^{\lambda_j t} \cdot u). \end{cases}$$

<u>OBS</u>: Acum $e^{\lambda_j t} = e^{\alpha_j t} e^{i\beta_j t} = e^{\alpha_j t}(\cos(\beta_j t) + i \sin(\beta_j t))$

și notăm $u = u_1 + i u_2$ cu $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n$. Atunci:

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = e^{\alpha_j t}(u_1 \cos(\beta_j t) - u_2 \sin(\beta_j t)) \\ \varphi_2(t) = e^{\alpha_j t}(u_1 \sin(\beta_j t) + u_2 \cos(\beta_j t)) \end{cases}$$

iv) $\boxed{\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},\ m_j > 1}$ $\Rightarrow$ $\overline{\lambda_j}$ este între val proprii distincte și are aceeași multiplicitate

$\Rightarrow$ se vor determina $2 \cdot m_j$ soluții în sistemul fundamental

Se determină $p_0, \dots, p_{m_j-1} \in \mathbb{C}^n$ nu toți nuli ai

$$\varphi(t) = \left(\sum_{s=0}^{m_j-1} p_s t^s\right) e^{\lambda_j t} \quad \text{să fie sol pt (9)}$$

Se obțin m_j seturi de vectori $p_0, \dots, p_{m_j-1} \in \mathbb{C}^n$ independenți. Pt fiecare set se obțin 2 soluții:

$$\varphi_{s1}(t) = Re\left(\left(\sum_{s=0}^{m_j-1} p_s t^s\right) e^{\lambda_j t}\right)$$

$$\varphi_{s2}(t) = Im\left(\left(\sum_{s=0}^{m_j-1} p_s t^s\right) e^{\lambda_j t}\right), \quad s = \overline{1, m_j}$$