Seria 34, Curs 1, EDDP, 06.10.2020.

Modalitate de evaluare

Maxim 100 de puncte:
- maxim 10 puncte pentru activitatea din seminar
- maxim 80 de puncte din lucrarea de examen
- 10 puncte din oficiu.

Bibliografie:

1. Ștefan Mirică, Ec. diferențiale, Ed. Univ. București,
2. Ioan Roșca, Ec. diferențiale și cu derivate parțiale, Ed. Fundației România de Mâine.
3. Aurelian Cernea, Ec. diferențiale, Ed. Univ. București.

ECUAȚII DIFERENȚIALE

① Fie $n \in \mathbb{N}^*$.

Numim ecuație diferențială (scalară) de ordin n, o ecuație de forma:

$$F\left(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}\right) = 0 \qquad (1)$$

unde $F : D \subset \underset{t}{\mathbb{R}} \times \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{\substack{\text{de } (n+1) \text{ ori} \\ (x, x^{(1)}, \dots, x^{(n)})}} \longrightarrow \mathbb{R}$

t = variabila independentă

x = variabila dependentă pentru care se cere determinarea din ecuația (1).

$x = x^{(0)}$ (derivata de ordin 0 este funcția)

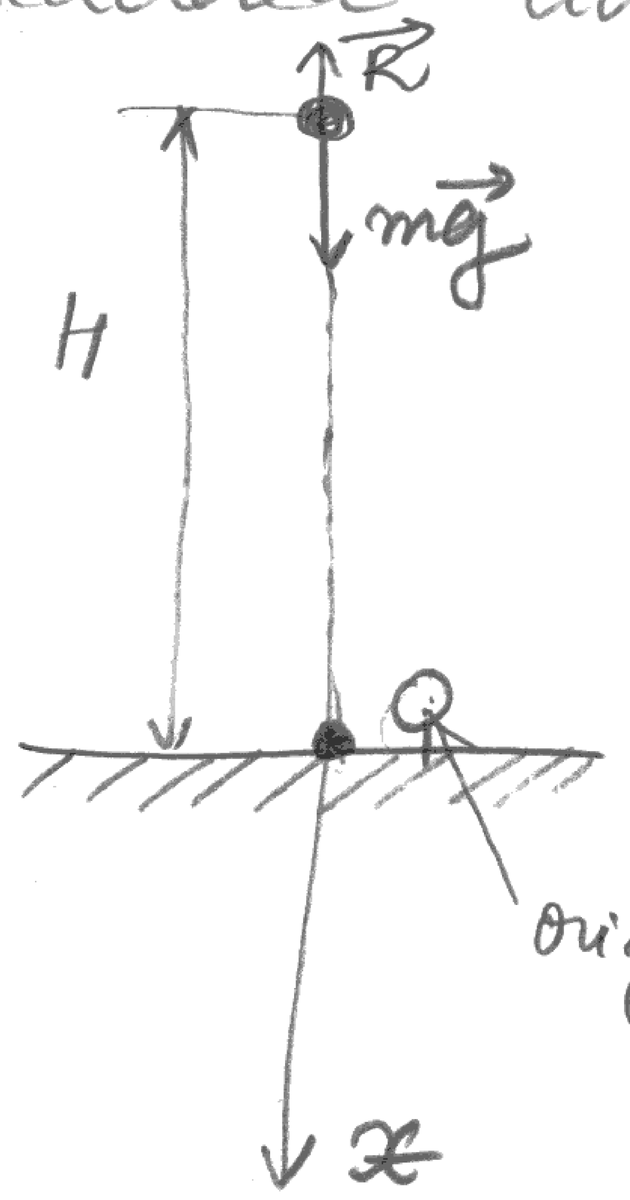
pt $k = \overline{1,n}$: $\quad x^{(1)} = x' = \dfrac{dx}{dt}$

$$x^{(k)} = \frac{d^k x}{dt^k} = \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\left(\dots\left(\frac{dx}{dt}\right)\right)\right)}_{\text{de } k \text{ ori}}$$

În mecanică, se folosește $x' = \dot{x}$, $x^{(2)} = x'' = \ddot{x}$.

Exemplu de ecuație diferențială.

Ec. ce descrie căderea liberă în mediu rezistent:



$\vec{F} = m\vec{a}$

$\vec{R} = m\vec{F_r}$

$|\vec{F_r}| = F_r(v)$, $v = x' = \dot{x}$

$x(t_0) = -H$; $\vec{i}$ = versorul axei Ox

$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{R} =$

$= mg\vec{i} - m F_r(\dot{x})\vec{i}$

$\vec{a} = a\vec{i}$

$a = v' = x'' = \ddot{x}$

Ari ec. de mișcare:

$$m\ddot{x} = mg - mF_r(\dot{x}) \quad |:m$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = g - F_r(\dot{x}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} - g + F_r(\dot{x}) = 0}$$

$$F(\cancel{t}, \cancel{x}, \dot{x}, \ddot{x}) = 0.$$

Dacă căderea liberă ar fi în vid, atunci $F_r(\dot{x}) = 0 \Rightarrow$ ec. devine: $\ddot{x} = g \Rightarrow$

$$\Rightarrow x'' = g \Rightarrow (x')' = g \Rightarrow x' = gt + C_1 \Rightarrow$$

$C_1 \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow v = gt + C_1$
dar $v(t_0) = v_0$ $\Big| \Rightarrow v_0 = gt_0 + C_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow C_1 = v_0 - gt_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = gt + v_0 - gt_0 \Rightarrow \boxed{v = v_0 + g(t - t_0)}$$

Ari $x' = gt + C_1 \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} x = g\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2 \\ x(t_0) = x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_0 = g\frac{t_0^2}{2} + (v_0 - gt_0)t_0 + C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_2 = x_0 - g\frac{t_0^2}{2} - v_0 t_0 + gt_0^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_2 = x_0 - v_0 t_0 + g\frac{t_0^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = g\frac{t^2}{2} + (v_0 - g t_0)t + x_0 - v_0 t_0 + \frac{g t_0^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{g}{2}(t^2 - 2t_0 t + t_0^2)$$

$$\boxed{x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{g}{2}(t - t_0)^2}$$

Pt $t_0 = 0$: $\begin{cases} x = x_0 + v_0 t + \dfrac{gt^2}{2} \\ v = v_0 + gt \end{cases}$

In plus, pt $v_0 = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = x_0 + \dfrac{gt^2}{2} \\ v = gt \end{array}}$

Forma (1) a ecuației diferențiale este forma implicită. Forma explicită a ec. (1) este:

$$\boxed{x^{(n)} = f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)})} \quad (2)$$

unde $f: D_1 \subset \underset{\text{pt } t}{\mathbb{R}} \times \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \mathbb{R}}_{\text{de } n \text{ ori}} \longrightarrow \mathbb{R}$

pt x

(D) O funcție $\varphi: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este soluție pentru ec. (1), respectiv pentru ec. (2), dacă este de n ori derivabilă și verifică ecuația:

$$F(t, \varphi(t), \varphi^{(1)}(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)) = 0, \quad \forall t \in I.$$

resp:

$$\varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi^{(1)}(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)), \quad \forall t \in I.$$

(D) Spunem că se dă o problemă Cauchy pentru ec. (2) dacă se cere să determinăm o soluție $\varphi: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a ec. (2), care să verifice condițiile:

$$\begin{cases} \varphi(t_0) = x_0 \\ \varphi^{(1)}(t_0) = x_{0,1} \quad (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi^{(2)}(t_0) = x_{0,2} \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t_0) = x_{0,n-1} \end{cases}$$

unde $(t_0, x_0, x_{0,1}, \dots, x_{0,n-1}) \in D_1$, punct dat.

În general, când se dă problema Cauchy se scrie astfel:

$$(4) \begin{cases} x^{(n)} = f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)}) \\ x(t_0) = x_0 \\ x^{(1)}(t_0) = x_{0,1} \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{0,n-1} \end{cases}$$

sau:

$$f, (t_0, x_0, x_{0,1}, \dots, x_{0,n-1})$$

Cazul $\boxed{n=1}$: Ec. diferențiale scalare de ordin 1

forma implicită (1): $F(t, x, x') = 0$

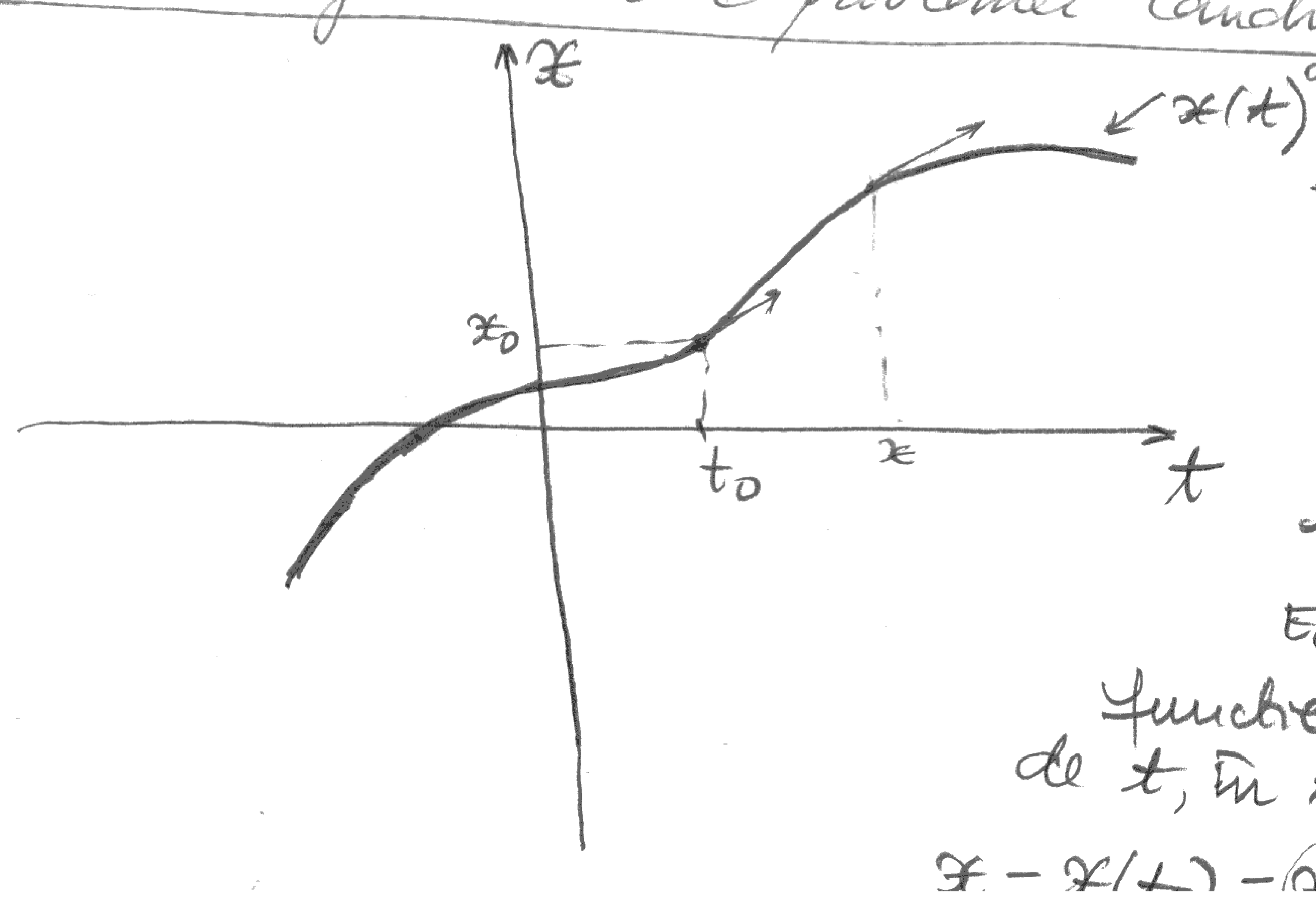
forma explicită (2): $x' = f(t, x)$

$$f : D_1 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

prob. Cauchy: $\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$, $(t_0, x_0) \in D_1$

sau $\underbrace{(f, (t_0, x_0))}_{\text{tripletul care definește prob. Cauchy}}$.

Interpretarea geometrică a problemei Cauchy



ec. unei curbe în plan pentru care cunoaștem direcția tangentei la grafic.

Ec tg la graficul funcției x care depinde de t, în t_0:

$x - x(t_0) = x'(t_0)(t - t_0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad x - x_0 = f(t_0, x_0)(t - t_0)$$

Cazuri particulare de ecuații diferențiale de ordinul întâi integrabile

① Ec. diferențială de tip primitivă : $\boxed{\dfrac{dx}{dt} = f(t)}$ (5)

funcția f nu depinde de x $\Rightarrow$ mulțimea soluțiilor ec. (5) este mulțimea primitivelor funcției f:

$$\boxed{x(t) = \int f(t)\,dt = F_1(t) + \mathcal{C}}, \quad (6)$$

unde F_1 este o primitivă pt f

$\mathcal{C}$ este mulțimea funcțiilor constante.

② Ec. diferențială cu variabile separabile, adică funcția f din ec. $x' = f(t,x)$ se scrie ca produs de 2 funcții: una depinzând de t și una depinzând de x:

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = a(t)\,b(x)} \quad (7)$$

unde $f(t,x) = a(t)\,b(x)$

$a : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$b : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcții continue.

Algoritm de rezolvare a ec. (7):

Pasul 1: Se determină soluțiile staționare prin rezolvarea ec.: $b(x) = 0$ cu $x \in J$.

Dacă $b(x) \neq 0$, $\forall x \in J$, atunci ec. (7) nu are soluții staționare.

Dacă există $x_1, \dots, x_k \in J$ soluții pt ec. $b(x) = 0$, atunci ec. (7) are soluțiile staționare:

$$\boxed{\begin{array}{l} \varphi_r : I \to \mathbb{R} \\ \varphi_r(t) = x_r, \quad r = \overline{1,k} \end{array}} \quad (8)$$

Pasul 2: Pentru $b(x) \neq 0$, adică în $J \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$, se separă variabilele în ec. (7)

$$\frac{dx}{b(x)} = a(t)\,dt$$

Determinăm B o primitivă pt $\frac{1}{b}$, adică:

$$\int \frac{dx}{b(x)} = B(x) + c$$

și A o primitivă pt a, adică:

$$\int a(t)\,dt = A(t) + c$$

Se obține o mulțime de soluții în formă implicită pentru ec. (7):

$$\boxed{B(x) = A(t) + C \quad , \quad C \in \mathbb{R}} \quad (9)$$

Mulțimea sol. ec. (7) este formată din (8) ∪ (9).

<u>OBS</u>: De obicei, încercăm să explicităm relația (9), adică să exprimăm pe x în funcție de t:

$$x = B^{-1}\left(A(t) + C\right),\ C \in \mathbb{R},\ (10).$$

<u>Exemplu</u> de ecuație cu variabile separabile:

Fie ecuația: $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t^2-1}(x^2 - 3x + 2)$, $t \in (-1,1) = I$.
$x \in \mathbb{R} = J$

Se cere mulțimea soluțiilor ec.

Avem: $a(t) = \frac{1}{t^2-1}$; $a : (-1,1) \to \mathbb{R}$

$b(x) = x^2 - 3x + 2$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

<u>Pasul 1</u>: Rezolvăm ec $b(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = 9 - 8 = 1 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 1$

$x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{4}{2} = 2 \in \mathbb{R}$

$x_2 = \frac{2}{2} = 1 \in \mathbb{R}$.

Ec. are 2 soluții staționare:

$\varphi_1 : (-1,1) \to \mathbb{R},\ \varphi_1(t) = 2$

$\varphi_2 : (-1,1) \to \mathbb{R},\ \varphi_2(t) = 1$

Pasul 2: Pt $b(x) \neq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$

$$x \in (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$$

Separăm variabilele $\Rightarrow$ $\underbrace{\frac{dx}{x^2-3x+2}}= \underbrace{\frac{1}{t^2-1}dt}$.

$$\int \frac{dx}{x^2-3x+2} = \int \frac{dx}{(x-1)(x-2)} = \int \frac{(x-1)-(x-2)}{(x-1)(x-2)}dx =$$

$$= \int \frac{\overset{1}{\cancel{x-1}}}{(\cancel{x-1})(x-2)}dx - \int \frac{\overset{1}{\cancel{x-2}}}{(x-1)(\cancel{x-2})}dx =$$

$$= \int \frac{1}{x-2}dx - \int \frac{1}{x-1}dx = \ln|x-2| - \ln|x-1| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C \Rightarrow B(x) = \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|$$

$$\int \frac{1}{t^2-1}dt = \frac{1}{2\cdot 1}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C \Rightarrow A(t) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|$$

Multimea soluţiilor în formă implicită ale ec:

$$\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Avem $t \in (-1, 1) \Rightarrow \left|\frac{t-1}{t+1}\right| = \frac{1-t}{t+1}$

Din forma implicită $\Rightarrow \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| = \ln\left(\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{1/2}\right) + C$ $\Rightarrow$

notăm $C = \ln C_1$, $C_1 > 0$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| = \ln\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} + \ln C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| = \ln\left(C_1\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{x-2}{x-1}\right| = C_1\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$$

În loc de explicitarea modulului scriem

$$\frac{x-2}{x-1} = \underset{\substack{\shortparallel \\ K \in \mathbb{R}^*}}{\pm C_1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-2 = x\,k\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} - k\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x\left(1-k\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\right) = 2-k\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{2-k\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}}{1-k\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}}, \quad k \in \mathbb{R}^*.$$