CONȚINUTUL CURSULUI #2:

I. Metode de aproximare a soluțiilor ecuațiilor neliniare.
- I.3. Metoda secantei.
- I.4. Metoda poziției false.

Notă: Textele scrise cu roșu reprezintă material suplimentar.

La pasul k, aproximarea x_k a soluției exacte x^* a ecuației $f(x)=0, x\in[a,b]$ se obține prin intersecția cu axa Ox a secantei AB la graficul lui f, prin punctele $A\big(x_{k-1}, f(x_{k-1})\big)$ și $B\big(x_{k-2}, f(x_{k-2})\big)$. Prin urmare, nu se mai folosește tangenta la graficul lui f, deci nu mai este necesar caculul derivatei lui f.

$$AB : \frac{x-x_{k-1}}{x_{k-2}-x_{k-1}} = \frac{y-f(x_{k-1})}{f(x_{k-2})-f(x_{k-1})} \tag{1}$$

$$\{x_k\} = AB\cap Ox \Rightarrow \frac{x_k-x_{k-1}}{x_{k-2}-x_{k-1}} = -\frac{f(x_{k-1})}{f(x_{k-2})-f(x_{k-1})} \Rightarrow$$

$$x_k = x_{k-1} - f(x_{k-1})\frac{x_{k-1}-x_{k-2}}{f(x_{k-1})-f(x_{k-2})}$$

sau

$$x_k = \frac{x_{k-2}f(x_{k-1})-x_{k-1}f(x_{k-2})}{f(x_{k-1})-f(x_{k-2})}, k\geq 2 \tag{2}$$

unde $x_0, x_1 \in [a,b]$

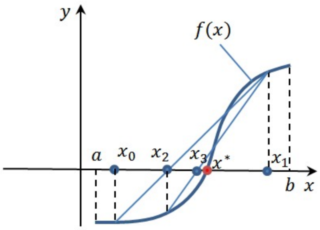

Figure: Metoda secantei

Teorema ((I.3.) Convergența metodei secantei)

Presupunem că $f\in C^1([a,b]), f(a)f(b)<0, f'(x)\neq 0, \forall x\in[a,b]$. Atunci $\exists! x^*$ astfel încât $f(x^*)=0$. Mai mult, $\exists\delta>0$, astfel încât, dacă $x_0, x_1\in[x^*-\delta, x^*+\delta]\subseteq[a,b]$, atunci șirul $(x_k)_{k\geq 0}$ construit prin metoda secantei rămâne în intervalul $[x^*-\delta, x^*+\delta]$ și converge către x^*.

Demonstrație: Existența și unicitatea este asigurată de faptul că $f(a)f(b)<0$ și $f'(x)\neq 0, \forall x\in[a,b]$.
Deoarece $f'(x^*)\neq 0$, putem considera $f'(x^*)=\mu>0$.
Din continuitatea derivatei f' rezultă că, pentru $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ astfel încât

$$|f'(x)-f'(x^*)|<\varepsilon, \quad \forall x\in[x^*-\delta, x^*+\delta]\subseteq[a,b] \tag{3}$$

sau

$$-\varepsilon+\mu<f'(x)<\varepsilon+\mu$$

Fie $\varepsilon=\frac{\mu}{4}$, atunci

$$\frac{3}{4}\mu<f'(x)<\frac{5}{4}\mu, \quad \forall x\in[x^*-\delta, x^*+\delta] \tag{4}$$

Conform metodei secantei

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\,\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \tag{5}$$

Din dezvoltărea în serie Taylor a funcției f în vecinătatea punctului x_k și evalută în x^* rezultă:

$$f(x^*) = f(x_k) + (x^* - x_k)f'(\xi_k), \quad \xi_k \in [x^*, x_k]$$

sau

$$f(x_k) = -(x^* - x_k)f'(\xi_k) \tag{6}$$

Mai mult, aplicând teorema Lagrange pe intervalul $[x_{k-1}, x_k]$ rezultă că $\exists \eta_k \in (x_{k-1}, x_k)$ astfel încât:

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(\eta_k) \tag{7}$$

Din (7) în (5) rezultă:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(\eta_k)}$$

sau

$$x^* - x_{k+1} = x^* - x_k + \frac{f(x_k)}{f'(\eta_k)}, \tag{8}$$

iar conform cu (6) avem:

$$x^* - x_{k+1} = x^* - x_k - \frac{(x^* - x_k)f'(\xi_k)}{f'(\eta_k)}$$

sau

$$x^* - x_{k+1} = (x^* - x_k)\left(1 - \frac{f'(\xi_k)}{f'(\eta_k)}\right) \tag{9}$$

Din (4) rezultă următoarea estimare:

$$-\frac{2}{3} < 1 - \frac{f'(x)}{f'(y)} < \frac{2}{3} \tag{10}$$

Fie $x_0, x_1 \in [x^* - \delta, x^* + \delta]$. Presupunem că $x_k \in [x^* - \delta, x^* + \delta]$ și vom demonstra că și $x_{k+1} \in [x^* - \delta, x^* + \delta]$. Se observă că $\eta_k, \xi_k \in [x^* - \delta, x^* + \delta]$, iar conform relației (10), din (9) rezultă

$$|x^* - x_{k+1}| \leq \frac{2}{3}|x^* - x_k| \leq \frac{2}{3}\delta \tag{11}$$

Astfel că, $x_{k+1} \in [x^* - \delta, x^* + \delta]$, deci șirul $(x_k)_{k\geq 0}$ rămâne în intervalul $[x^* - \delta, x^* + \delta]$. Mai mult,

$$|x^* - x_{k+1}| \leq \frac{2}{3}|x^* - x_k| \leq \ldots \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}|x^* - x_0| \tag{12}$$

rezultă că șirul $(x_k)_{k\geq 0}$ este convergent la x^*. $\square$

Obs.: Se poate arăta că

$$lim_{k\to\infty}\frac{|x^* - x_{k+1}|}{|x^* - x_k|^r} = \alpha, \alpha > 0 \tag{13}$$

unde $r = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1,62$, astfel că metoda secantei este mai rapidă decât metoda liniară dar mai lentă decât cea pătratică.

Din punct de vedere computațional valorile inițiale x_0, x_1 se aleg din vecinătatea soluției x^*, astfel încât la fiecare iterație se testează ca termenul x_k să rămână în intervalul $[a, b]$. Pentru optimizarea metodei se va alege intervalul maxim $[a, b]$ pe care funcția f este definită, nu-și schimbă monotonia (i.e. $f'(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$) și $f(a)f(b) < 0$.

ALGORITM (Metoda secantei)

Date de intrare: $f, a, b, x_0, x_1, \varepsilon$;

Date de ieșire: x_{aprox};

STEP1 : `Se aleg` $x_0, x_1 \in [a, b]$; $k = 1$;

STEP2 : `while` $\frac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_{k-1}|} \geq \varepsilon$ `do`

$k = k + 1$;

$x_k = \frac{x_{k-2}f(x_{k-1}) - x_{k-1}f(x_{k-2})}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})}$;

`if` $x_k < a$ `or` $x_k > b$ `then`

`OUTPUT('Introduceţi alte valori pentru` x_0, x_1`');`

`STOP.`

`endif`

`endwhile;`

STEP3 : $x_{aprox} = x_k$.

I.4. Metoda poziției false

Metoda poziției false construiește șirurile $(a_k)_{k\geq 0}, (b_k)_{k\geq 0}, (x_k)_{k\geq 0}$ conform următoarei scheme grafice: la pasul k, aproximarea x_k a soluției exacte x^* a ecuației $f(x) = 0$ se obține prin intersecția dreptei AB cu axa Ox, unde $A(a_k, f(a_k)), B(b_k, f(b_k))$. Intervalul $[a_k, b_k]$ se construiește conform metodei bisecției.

$$AB : \frac{x - a_k}{b_k - a_k} = \frac{y - f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)} \tag{14}$$

$$\{x_k\} = AB \cap Ox \Rightarrow \frac{x_k - a_k}{b_k - a_k} = \frac{-f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)} \Rightarrow \tag{15}$$

$$x_k = a_k - f(a_k)\frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)} \tag{16}$$

sau

$$x_k = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)} \tag{17}$$

Avem astfel următoarea schemă generală:

$$(a_k, b_k, x_k) \tag{18}$$

$$= \begin{cases} a_k = a_{k-1}, b_k = b_{k-1}, x_k = x_{k-1}, \text{ dacă } f(x_{k-1}) = 0 \\ a_k = a_{k-1}, b_k = x_{k-1}, x_k = \dfrac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}, \text{ dacă } f(a_{k-1})f(x_{k-1}) < 0 \\ a_k = x_{k-1}, b_k = b_{k-1}, x_k = \dfrac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}, \text{ dacă } f(a_{k-1})f(x_{k-1}) > 0, \end{cases} \tag{19}$$

unde $a_0 = a, b_0 = b, x_0 = \dfrac{a_0 f(b_0) - b_0 f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)}$.

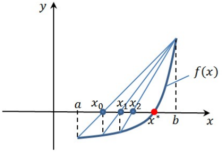

Figure: Metoda poziției false

Teorema (I.4. Teorema de convergență a metodei poziției false)

Presupunem că $f \in C^2([a, b]), f(a)f(b) < 0$ și f', f'' nu se anulează pe $[a, b]$. Atunci ecuația $f(x) = 0$ are o soluție unică $x^* \in (a, b)$, iar șirul $(x_k)_{k\geq 0}$ construit prin metoda poziției false converge la x^*.

ALGORITM (Metoda poziției false)

Date de intrare: f, a, b, ε; **Date de ieșire:** x_{aprox};

STEP1 : $k = 0; a_0 = a; b_0 = b; x_0 = \dfrac{a_0 f(b_0) - b_0 f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)}$;

STEP2 : do

$k = k + 1$;

if $f(x_{k-1}) = 0$ then

$x_k = x_{k-1}$;

STOP.

elseif $f(a_{k-1})f(x_{k-1}) < 0$ then

$a_k = a_{k-1}$; $b_k = x_{k-1}$; $x_k = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}$;

elseif $f(a_{k-1})f(x_{k-1}) > 0$ then

$a_k = x_{k-1}$; $b_k = b_{k-1}$; $x_k = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}$;

endif

while $\dfrac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_{k-1}|} \geq \varepsilon$;

STEP3 : $x_{aprox} = x_k$.