Seria 34, Curs 10: EDDP, 15.12.2020

Ecuația Euler liniară neomogenă de ordin n

$$t^n x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k t^k x^{(k)} + g(t) \quad (1), \ t \neq 0.$$

unde $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$

$g : I \subset \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$

Prop. 1 Prin schimbarea de variabilă $|t| = e^s$:

$$(t, x) \xrightarrow[x(t)=y(s(t))]{} (s, y)$$

(1) Euler de ordin n $\qquad$ liniară neomogenă de ordin n, dar cu coef. constanți.

se obține o ecuație cu coeficienți constanți.

O generalizare a ec. (1) este ecuația:

$$(\alpha t+\beta)^n x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (\alpha t+\beta)^k x^{(k)} + g(t). \quad (2)$$

$t \neq -\frac{\beta}{\alpha}$.

unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$

$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$

$g : \Delta \subset \mathbb{R} \setminus \{-\frac{\beta}{\alpha}\} \to \mathbb{R}$.

Reducerea ec. (2) la o ecuație afină cu coeficienți constanți se face prin schimbarea de variabilă:

$$|\alpha t+\beta| = e^s \iff s = \ln|\alpha t+\beta|$$

$$s'(t) = \frac{\alpha}{\alpha t+\beta}$$

Aplicație: Tipuri de sisteme fundamentale de soluții pentru ec. dif. liniare omogene de ordin 2, cu coef. constanți.

$$x^{(2)} = a_0 x + a_1 x^{(1)}, \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}.$$

Ec caract: $r^2 = a_0 + a_1 r \Rightarrow \underbrace{r^2 - a_1 r - a_0 = 0}_{\text{ec. de gradul al II-lea}}$,

$\Delta = a_1^2 + 4a_0$

Am 3 cazuri:

1) $\Delta > 0 \Rightarrow r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 \neq r_2$, $m_1 = m_2 = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi_1(t) = e^{r_1 t}, \quad \varphi_2(t) = e^{r_2 t} \Rightarrow \underbrace{\{e^{r_1 t}, e^{r_2 t}\}}_{\Downarrow}$$

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

2) $\Delta = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow m_1 = 2$

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = e^{r_1 t} \\ \varphi_2(t) = t e^{r_1 t} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{e^{r_1 t}, t e^{r_1 t}\}$$

$$x(t) = (C_1 + t C_2) e^{r_1 t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

3) $\Delta < 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \alpha_1 + i\beta_1, & \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}, \beta_1 \neq 0 \\ r_2 = \alpha_1 - i\beta_1, & m_1 = m_2 = 1 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1(t) = \mathrm{Re}(e^{r_1 t}) = e^{\alpha_1 t} \cos \beta_1 t \\ \varphi_2(t) = \mathrm{Im}(e^{r_1 t}) = e^{\alpha_1 t} \sin \beta_1 t \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{e^{\alpha_1 t} \cos \beta_1 t, e^{\alpha_1 t} \sin \beta_1 t\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = (C_1 \cos \beta_1 t + C_2 \sin \beta_1 t) e^{\alpha_1 t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

<u>Aplicație (temă)</u>:

Fie $a_1, a_2 : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și ecuația:

$$x^{(2)} = a_1(t) x^{(1)} + a_2(t) x \quad (3)$$

Se dă $\varphi_1 : I \to \mathbb{R}$ soluție a ec. (3)

a) Arătați că prin schimbările de variab. succesive:

$$(t, x) \xrightarrow{y = \frac{x}{\varphi_1(t)}} (t, y) \xrightarrow[z(y(t)) = y'(t)]{z(y) = y'} (y, z)$$

se ajunge la o ecuație liniară scalară.

b) Să se determine soluția ec. (3) și o soluție φ_2 a.î. $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ sistem fundamental de soluții pt (3)

ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE.

$x = (x_1, \dots, x_n)$ = variabila independentă

u = variabila dependentă, a cărei determinare (funcția necunoscută)

se cere a.î. să verifice o ecuație de forma:

$$F\left(x, u, \left(\frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}\right)_{0<|\alpha|\le k}\right) = 0 \quad (4)$$

numită ec. cu derivate parțiale de ordin k, $k \in \mathbb{N}^*$

unde $\underset{\shortparallel}{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$

multiindice

$|\alpha| = (\alpha_1 + \dots + \alpha_n)$

OBS: $|\alpha| = 0 \Leftrightarrow \alpha = (0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^n$

Convenție: $\dfrac{\partial^0 u}{\partial x_1^0 \dots \partial x_n^0} = u$

Ec (4) se poate scrie:

$$F\left(x, \left(\frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}\right)_{0\le|\alpha|\le k}\right) = 0. \quad (5)$$

Notație: $\boxed{\dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_n^{\alpha_n} u}$

$\boxed{k=1}$: Ec. cu derivate parțiale de ordin 1:

$$F\left(x, u, \left(\frac{\partial^1 u}{\partial x_i}\right)_{i=\overline{1,n}}\right) = 0. \quad (6)$$

$|\alpha| = 1 \Leftrightarrow \alpha = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1}, 0 \dots, 0)$, $i = \overline{1,n}$.

În (6): $F(x, u, \partial_1 u, \partial_2 u, \dots, \partial_n u) = 0.$ (7).

unde $F: \Delta \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

$\boxed{k=2}$ Ec cu derivate parțiale de ordin 2

$0 < |\alpha| \le 2 \Rightarrow \alpha = (0, \dots, 0, \underset{i}{2}, 0, \dots 0) \Rightarrow \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, i = \overline{1,n}$ — n derivate

$$\alpha = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0, \overset{j}{1}, 0 \dots, 0)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \ 1 \le i < j \le n$$

C_n^2 derivate

$$\frac{n(n-1)}{2} = (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{(n-1)(n-1+1)}{2}$$

$$|\alpha| = 1 \Rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_{i=\overline{1,n}}$$

n derivate

$$F(x, u, \partial_1 u, \dots, \partial_n u, \partial_1^2 u, \dots, \partial_n^2 u, (\partial_i \partial_j u)_{1 \le i < j \le n}) = 0. \quad (8)$$

unde $F : D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}} \longrightarrow \mathbb{R}$.

<u>Exemplu</u>: În $\mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$, se consideră ec.:

$$\boxed{\partial_1 \partial_2 u = 0}$$

Se cere forma generală a soluției.

$$\partial_1 (\partial_2 u) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_2}\right) = 0 \\ \text{notăm } v = \dfrac{\partial u}{\partial x_2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow v(x_1, x_2) = w(x_2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_2} = w(x_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x_1, x_2) = \underbrace{\int w(x_2)\, dx_2}_{} + \underbrace{z(x_1)}_{}$$

$\Rightarrow$ forma generală a soluției este

$$u(x_1, x_2) = u_1(x_1) + u_2(x_2)$$

cu u_1 și u_2 arbitrare, dar derivabile.

În $\mathbb{R}^2$, ec. generală cu derivate parțiale este:

$$F(\underset{(x_1, x_2)}{x}, u, \partial_1 u, \partial_2 u, \partial_1^2 u, \partial_2^2 u, \partial_1 \partial_2 u) = 0. \quad (9)$$

Ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi în $\mathbb{R}^n$

$$\boxed{F(x, u, \partial_1 u, \partial_2 u, \dots, \partial_n u) = 0} \qquad (10)$$

Ec. (10) este liniară neomogenă dacă se scrie sub forma:

$$\boxed{a_1(x)\partial_1 u + \dots + a_n(x)\partial_n u = g(x,u)} \qquad (11)$$

unde $a_1, \dots, a_n : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$g : \Delta \times I \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Cazul omogen: $\boxed{g(x,u) = 0}$

$$\boxed{a_1(x)\partial_1 u + \dots + a_n(x)\partial_n u = 0} \qquad (12)$$

Ec. (12) i se asociază un sistem de ecuații diferențiale numit sistem caracteristic:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_1(x) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_n(x) \end{cases} \quad \text{sau} \quad \frac{dx_1}{a_1(x)} = \dots = \frac{dx_n}{a_n(x)} \qquad (13)$$

Prop. 3: 1) Dacă $\overbrace{u \text{ este}}^{u : \Delta \to \mathbb{R}}$ soluție pt (12), atunci u este integrală primă pt. sistemul caracteristic (13).

2) Dacă $u : \Delta \to \mathbb{R}$ este integrală primă pentru (13), atunci u este soluție pt. (12).

Dem: 1) u sol. pt (12) $\Rightarrow a_1(x)\partial_1 u(x) + \dots + a_n(x)\partial_n u(x) = 0$ $\forall x \in \Delta$.

Arătăm că u este integrală primă pt (13), adică conform criteriului pt. integrale prime, trebuie să arătăm că:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\overset{\|}{0}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot a_i(x) = 0,$$ care este adevărată pt că u sol. a ec. (12)

2) u integrală primă pt (13) $\Rightarrow$ u verifică $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} a_i(x) = 0$ $\Rightarrow$ u soluție a ec. (12)

Prop. 4: Dacă pentru sistemul caracteristic (13) se cunosc $(n-1)$ integrale prime independente, $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ (adică: $\alpha_1\varphi_1 + \dots + \alpha_{n-1}\varphi_{n-1} = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$) atunci forma generală a soluției ec. (12) este:

$$(14) \quad \boxed{u(x_1, \dots, x_n) = f(\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_n))}$$

unde $f : D_1 \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$
este o funcție arbitrară care are derivate parțiale de ordinul întâi.

Exemple:

① Fie ecuația cu derivate parțiale în $\mathbb{R}^2$:

$$x_2 \partial_1 u - x_1 \partial_2 u = 0.$$

Se cere forma generală a soluției.

$n=2$

$a_1(x) = x_2$; $x = (x_1, x_2)$

$a_2(x) = -x_1$

Sistemul caracteristic este:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 \end{cases} \Rightarrow \underline{\dfrac{dx_1}{x_2} = \dfrac{dx_2}{-x_1}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow -x_1 dx_1 = x_2 dx_2$
se poate integra pt că variabilele sunt separate $\Rightarrow$ $-\dfrac{x_1^2}{2} = \dfrac{x_2^2}{2} - C \;\Big|\cdot 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{x_1^2 + x_2^2}_{\varphi_1(x_1, x_2)} = \underbrace{2C}_{const}$$

integrală primă pt sistemul caracteristic.

Conform prop. 4 $\Rightarrow$ forma generală a sol. pt. ec cu derivate parțiale de ordinul întâi $x_2 \partial_1 u - x_1 \partial_2 u = 0$ este $u(x_1, x_2) = f(x_1^2 + x_2^2)$,

unde f este o funcție derivabilă.

② Fie ecuația:

$$\partial_1 u + x_1 \partial_2 u + x_1 x_2 \partial_3 u + \dots + x_1 x_2 \cdots x_{n-1} \partial_n u = 0$$

în $\mathbb{R}^n$. Se cere determinarea a $n-1$ integrale prime independente pt sistemul caracteristic și forma gen. a sol. ec.

$$\begin{cases} a_1(x) = 1 \\ a_2(x) = x_1 \\ a_3(x) = x_1 x_2 \\ \vdots \\ a_n(x) = x_1 x_2 \dots x_{n-1} \end{cases} \Rightarrow \text{sistemul caract:}$$

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{x_1} = \frac{dx_3}{x_1 x_2} = \dots = \frac{dx_{n-1}}{x_1 x_2 \dots x_{n-2}} = \frac{dx_n}{x_1 x_2 \dots x_{n-1}}$$

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{x_1} \Rightarrow x_1\,dx_1 = dx_2 \Rightarrow \frac{x_1^2}{2} = x_2 + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x_1^2}{2} - x_2 = C_1$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_1(x) = \frac{x_1^2}{2} - x_2}$$

$$\frac{dx_2}{x_1} = \frac{dx_3}{x_1 x_2} \Rightarrow x_2\,dx_2 = dx_3 \Rightarrow \underbrace{\frac{x_2^2}{2} - x_3}\ = C_2$$

$$\boxed{\varphi_2(x) = \frac{x_2^2}{2} - x_3}$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_{n-1}}{x_1 x_2 \dots x_{n-2}} = \frac{dx_n}{x_1 x_2 \dots x_{n-1}} \Rightarrow x_{n-1}\,dx_{n-1} = dx_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_{n-1}(x) = \frac{x_{n-1}^2}{2} - x_n}$$

Soluția generală este:

$$u(x_1, \dots x_n) = f\left(\frac{x_1^2}{2} - x_2, \frac{x_2^2}{2} - x_3, \dots, \frac{x_{n-1}^2}{2} - x_n\right)$$

unde $f: D \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$.

(3) Fie ec:

$$\partial_1 u + (x_1 + x_2)\partial_2 u + (x_1 + x_3)\partial_3 u = 0.$$

Forma generală a soluției:

$n=3$

$$a_1(x) = 1$$
$$a_2(x) = x_1 + x_2$$
$$a_3(x) = x_1 + x_3.$$

Sist. caract:

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{x_1 + x_2} = \frac{dx_3}{x_1 + x_3}.$$

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{x_1 + x_2} = \frac{dx_1 + dx_2}{1 + x_1 + x_2}$$

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{d(x_1 + x_2)}{1 + (x_1 + x_2)} \Rightarrow \text{ec. cu variabile separate, în } x_1 \text{ și } \underline{(x_1 + x_2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dx_1}{1} = \frac{dz}{1+z} \Rightarrow x_1 = \ln|1+z| + C_1$$

$$\underbrace{x_1 - \ln|1+x_1+x_2|} = C_1$$

$$\boxed{\varphi_1(x) = x_1 - \ln|1+x_1+x_2|}$$

$$\underbrace{\frac{2dx_1}{2}} = \frac{dx_2}{x_1+x_2} = \frac{dx_3}{x_1+x_3} = \frac{2dx_1+dx_2+dx_3}{2+2x_1+x_2+x_3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dx_1}{1} = \frac{d(2x_1+x_2+x_3)}{2+\underbrace{(2x_1+x_2+x_3)}_{w}} \Rightarrow \frac{dx_1}{1} = \frac{dw}{2+w} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \ln|2+w| + C_2 \Rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\varphi_2(x) = x_1 - \ln|2+2x_1+x_2+x_3|}$$

Deci: $u(x) = f\left(x_1 - \ln|1+x_1+x_2|,\ x_1 - \ln|2+2x_1+x_2+x_3|\right)$

sau: $\tilde{\varphi}_1(x) = \dfrac{e^{x_1}}{1+x_1+x_2}$, $\tilde{\varphi}_2(x) = \dfrac{e^{x_1}}{2+2x_1+x_2+x_3}$

$$u(x) = g\left(\frac{e^{x_1}}{1+x_1+x_2}, \frac{e^{x_1}}{2+2x_1+x_2+x_3}\right).$$