Seria 34, Curs 9, EDDP, 08.12.2020

Pt. examen (poniulia@fmi.unibuc.ro)
- fără datele 22, 28, 29.01.2021 și 31.01.2021.
- preferabil fără sâmbătă – duminică.

Ecuații diferențiale (liniare) de ordin n

Forma generală explicită a ecuației de ordin n este:

$$\boxed{x^{(n)} = f(t, x, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n-1)})} \quad (1)$$

unde $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

Ec. (1) este liniară (omogenă) dacă

$$f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) \cdot x^{(k)} \quad (2)$$

sau, este afină (liniară neomogenă) dacă:

$$f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)\, x^{(k)} + g(t) \quad (3)$$

unde $a_0, \dots, a_{n-1}, g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Pentru ecuația liniară omogenă asociem un sistem liniar prin notația:

$$\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = x^{(1)} \\ \vdots \\ y_{n-1} = x^{(n-2)} \\ y_n = x^{(n-1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1' = x^{(1)} \\ y_2' = x^{(2)} \\ \vdots \\ y_{n-1}' = x^{(n-1)} \\ y_n' = x^{(n)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)\, y_{k+1} \end{cases} \quad (4)$$

Sistemul (4), matricial, se scrie:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & a_2(t) & \dots & a_{n-2}(t) & a_{n-1}(t) \end{pmatrix}}_{A(t)} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} \to y' = A(t)\, y \quad (5).$$

Sistemul (5) este asociat ecuației:

$$x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)\, x^{(k)} \qquad (6)$$

Prop. 1: Dacă $\varphi: I \to \mathbb{R}$ este soluție pt (6), atunci $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^{(1)} \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^n$ este soluție a sistemului (5).

Dem: φ sol pt (6) $\Rightarrow \varphi^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)\, \varphi^{(k)}(t)$.

Avem:

ψ sol pt (5) $\Leftrightarrow \psi'(t) = A(t)\,\psi(t) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \varphi^{(1)}(t) \\ \varphi^{(2)}(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n)}(t) \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi^{(1)}(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{forma} \\ \text{lui } A(t)}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \varphi^{(1)}(t) = \varphi^{(1)}(t) \\ \varphi^{2}(t) = \varphi^{(2)}(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t) = \varphi^{(n-1)}(t) \\ \varphi^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)\, \varphi^{(k)}(t) \end{cases} \quad \text{(A)}$$

Prop. 2: Dacă $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^n$ este soluție a sistemului (5), atunci ψ_1 este soluție a ecuației (6).

Dem: ψ sol. a sistemului (5) $\Leftrightarrow \psi'(t) = A(t)\,\psi(t) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \psi_1'(t) \\ \psi_2'(t) \\ \vdots \\ \psi_{n-1}'(t) \\ \psi_n'(t) \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \vdots \\ \psi_{n-1}(t) \\ \psi_n(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi_1'(t) = \psi_2(t) \\ \psi_2'(t) = \psi_3(t) \\ \vdots \\ \psi_{n-2}'(t) = \psi_{n-1}(t) \\ \psi_{n-1}'(t) = \psi_n(t) \\ \psi_n'(t) = a_0(t)\psi_1(t) + a_1(t)\psi_2(t) + a_2(t)\psi_3(t) + \dots + a_{n-2}(t)\psi_{n-1}(t) + a_{n-1}(t)\psi_n(t) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi_2(t) = \psi_1^{(1)}(t) \\ \psi_3(t) = \psi_1^{(2)}(t) \\ \vdots \\ \psi_{n-1}(t) = \psi_1^{(n-2)}(t) \\ \psi_n(t) = \psi_1^{(n-1)}(t) \Rightarrow \psi_n'(t) = \psi_1^{(n)}(t) \end{cases} \quad (7)$$

și $\psi_1^{(n)}(t) = a_0(t)\psi_1(t) + a_1(t)\psi_1^{(1)}(t) + a_2(t)\psi_1^{(2)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)\cdot\psi_1^{(n-1)}(t)$

Deci: φ_1 verifică ec. (6).

Prop. 3: Mulțimea soluțiilor ec. (6) este spațiu vectorial real de dimensiune n.

Dem.: Notăm S_a = mulț. sol. ec (6)

Fie $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$, $\varphi, \psi \in S_a \Rightarrow \begin{cases} \varphi^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)\varphi^{(k)}(t) \\ \psi^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)\psi^{(k)}(t) \end{cases}$

$$\Rightarrow (\varphi+\psi)^{(n)}(t) = \varphi^{(n)} + \psi^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)\left(\varphi^{(k)}(t) + \psi^{(k)}(t)\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)(\varphi+\psi)^{(k)}(t) \Rightarrow \varphi+\psi \in S_a$$

$$(\alpha\varphi)^{(n)}(t) = \alpha\varphi^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)\,\alpha\varphi^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)(\alpha\varphi)^{(k)}(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha\varphi \in S_a, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Deci: $(S_a, +, \cdot)$ sp. vectorial real, ca subspațiu al spațiului vectorial al funcțiilor.

Dacă S_A = mulț. sol. sist. (5), atunci știm că S_A este spațiu vectorial real și că $\dim S_A = n$.

Fie $\mathcal{F} : S_a \to S_A$; $\mathcal{F}(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^{(1)} \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{pmatrix} \in S_A$ ← din prop. 1

Din liniaritatea derivatelor $\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{F}(\varphi+\tilde\varphi) = \mathcal{F}(\varphi) + \mathcal{F}(\tilde\varphi) \\ \mathcal{F}(\alpha\varphi) = \alpha\mathcal{F}(\varphi) \\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \varphi, \tilde\varphi \in S_a \end{cases}$

$\Rightarrow \mathcal{F}$ este morfism de spații vectoriale.

Arătăm că $\mathcal{F}$ este izomorfism de spații vectoriale, adică, mai trebuie bijectivă:

- injectivă: din $\mathcal{F}(\varphi) = \mathcal{F}(\tilde\varphi) \Rightarrow \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^{(1)} \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde\varphi \\ \tilde\varphi^{(1)} \\ \vdots \\ \tilde\varphi^{(n-1)} \end{pmatrix} \Rightarrow$

  $\Rightarrow \varphi = \tilde\varphi \Rightarrow \mathcal{F}$ injectivă

- surjectivă: $\forall \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \in S_A \Rightarrow \exists \varphi \in S_a$ a.î. $\mathcal{F}(\varphi) = \psi$.

Rezolvăm ec: $\mathcal{F}(\varphi)=\psi$, cu $\psi \in S_A$.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^{(1)} \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \varphi = \psi_1 \\ \text{cum } \psi \in S_A \xrightarrow[\text{prop 2}]{} \begin{cases} (\mathcal{F}): \psi_2 = \varphi^{(1)} \\ \quad \vdots \\ \quad \psi_n = \varphi^{(n-1)} \\ \varphi \in S_a \end{cases} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists \varphi = \psi_1 \in S_a$ a.î. $\mathcal{F}(\psi_1)=\psi \Rightarrow \mathcal{F}$ este surjectivă

Deci: $\left.\begin{matrix}\mathcal{F} \text{ izomorfism de sp. vect}, \ \mathcal{F}: S_a \to S_A \\ \dim S_A = n\end{matrix}\right\} \Rightarrow \dim S_a = n.$

În concluzie, pentru a determina S_a, este suficient să găsim o bază, adică un sistem fundamental de soluții pt ec. (6).

<u>Algoritm pt determinarea unui sistem fundamental de soluții pentru ec. (6) cu coef. constanți:</u>

$$x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)} \quad (8)$$

cu $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$.

- se determină rădăcinile ec. caracteristice:

$$r^n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k r^k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{r^n - a_{n-1} r^{n-1} - a_{n-2} r^{n-2} - \dots - a_1 r - a_0 = 0}$$

Reținem rădăcinile distincte și ordinele lor de multiplicitate: $r_1, \dots, r_j$ cu multiplicitățile $m_1, \dots, m_j$

adică: $r^n - a_{n-1} r^{n-1} - \dots - a_1 r - a_0 = (r-r_1)^{m_1} \dots (r-r_j)^{m_j}$

- pentru fiecare r_s, $s \in \overline{1,j}$ se determină m_s soluții pentru sistemul fundamental de soluții.

Avem cazurile:

• $\boxed{r_s \in \mathbb{R}\ ,\ m_s \geq 1} \Rightarrow \left\{ \varphi_p(t) = t^{p-1} \cdot e^{r_s t}\right.$, $p = \overline{1, m_s}$

adică
$$\begin{cases} \varphi_1(t) = e^{r_s t} \\ \varphi_2(t) = t\, e^{r_s t} \\ \vdots \\ \varphi_{m_s}(t) = t^{m_s - 1} e^{r_s t}. \end{cases} \quad (9)$$

• $\boxed{r_s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\ ,\ m_s \geq 1}$

$r_s = a_s + b_s i$, $a_s, b_s \in \mathbb{R}$
$b_s \neq 0$.

$\overline{r}_s$ este printre sol. distincte cu același ordin de multiplicitate

$\Rightarrow$ $2m_s$ soluții coresp. pt r_s și $\overline{r}_s$:

$$\begin{cases} \varphi_p(t) = Re\left(t^{p-1} e^{r_s t}\right) \\ \tilde{\varphi}_p(t) = Im\left(t^{p-1} e^{r_s t}\right) \end{cases} \quad p = \overline{1, m_s}$$

Cum $e^{r_s t} = e^{a_s t + b_s t i} = e^{a_s t} \cdot e^{b_s t i} = \underbrace{e^{a_s t}\left(\cos b_s t + i \sin b_s t\right)}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi_p(t) = t^{p-1} e^{a_s t} \cos b_s t \\ \tilde{\varphi}_p(t) = t^{p-1} e^{a_s t} \sin b_s t \end{cases}, \quad p = \overline{1, m_s} \quad (10).$$

<u>Exemplu</u>. Fie ec: $x^{(3)} = 6x^{(2)} - 11x^{(1)} + 6x$.

Se cere un sistem fundamental de soluții.

• ec. caracteristică: $r^3 = 6r^2 - 11r + 6r^0$; $(x = x^{(0)})$

$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$.

	r^3	r^2	r^1	r^0
	1	-6	11	-6
1	1	-5	6	0
2	1	-3	0	
3	1	0		

$$\Rightarrow \begin{cases} r_1 = 1\ ,\ m_1 = 1 \Rightarrow \varphi_1(t) = e^t \\ r_2 = 2\ ,\ m_2 = 1 \Rightarrow \varphi_2(t) = e^{2t} \\ r_3 = 3\ ,\ m_3 = 1 \Rightarrow \varphi_3(t) = e^{3t} \end{cases}$$

$\Rightarrow \{e^t, e^{2t}, e^{3t}\}$ sistem fundamental de soluții pt ec. dată $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_a = \{\varphi(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t} \mid c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}$.

Temă: Ce tipuri de sisteme fundamentale de soluții se pot obține pentru ecuații de ordinul 2, 3 și 4?

OBS: Pt ec. (6) cu coef. neconstanți nu se poate rezolva cu ec. caracteristică.
Dacă găsim o schimbare de variabile $(t,x) \to (s,y)$ astfel încât ec. în y să fie cu coeficienți constanți, atunci cu alg. de mai sus aflăm sistem fundam. de soluții pt ec. în y, apoi pt ec. în x.
Un astfel de caz este cazul ec. liniare Euler:

$$t^n x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} t^k x^{(k)} \qquad (11)$$

unde schimbarea de variabile este $\begin{cases} |t| = e^s \\ x(t) = y(s(t)) \end{cases}$

<u>Ec. afină de ordin n</u>:

$$x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) x^{(k)} + g(t) \qquad (12)$$

unde $a_0, \dots, a_{n-1}, g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Sistemul asociat este sistemul afin:

$$y' = A(t) y + b(t) \qquad (13)$$

cu $A(t)$ din (7) și $b : I \to \mathbb{R}^n$

$$b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix}, \forall t \in I.$$

Prop. 4: Dacă φ_0 este o soluție particulară pt. (12), atunci mulțimea soluțiilor ec. (12), $S_{a,g}$ este:

$$S_{a,g} = \{ \varphi + \varphi_0 \mid \varphi \in S_a \}$$

mult. sol. ec. dif. liniară omog. atașate lui sau

$$S_{a,g} = \{ \varphi_0 + C_1\varphi_1 + \dots + C_n\varphi_n \mid C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R} \}$$

unde $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ sist. fundam. de soluții pt. ec. liniara omog. atașată ec. (12).

Dacă nu se cunoaște φ_0, atunci se aplică metoda variației constantelor:

- pt ec. liniară atașată ec. (12)

$$\bar{x}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)\, \bar{x}^{(k)} \quad (13)$$

determinăm $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ sistem fundam de soluții $\Rightarrow$ $\bar{x}(t) = C_1\varphi_1(t) + \dots + C_n\varphi_n(t)$

$C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}$.

- aplicăm metoda variației constantelor: determinăm $C_1, \dots, C_n : I \to \mathbb{R}$ aî

$$x(t) = C_1(t)\varphi_1(t) + \dots + C_n(t)\varphi_n(t)$$

să fie soluția ec. afine (12).

Arătăm că $C_1', \dots, C_n'$ sunt soluțiile sistemului algebric liniar următor:

$$\boxed{\begin{cases} C_1'\varphi_1(t) + \dots + C_n'\varphi_n(t) = 0 \\ \vdots \\ C_1'\varphi_1^{(n-2)}(t) + \dots + C_n'\varphi_n^{(n-2)}(t) = 0 \\ C_1'\varphi_1^{(n-1)}(t) + \dots + C_n'\varphi_n^{(n-1)}(t) = g(t) \end{cases}} \quad (14).$$

Se obține că $C_j' = h_j(t)$, $j = \overline{1,n}$ $\Rightarrow$

(n ec. de tip primitivă)

$$\Rightarrow C_j = H_j(t) + K_j, \quad j = \overline{1,n}$$

unde H_j este primitivă pt h_j.

Dem că $C_1', \dots, C_n'$ verifică (14):

Avem $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ sistem fundam de soluții pt. (13) $\Rightarrow$

prop.1 $\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_1^{(1)} \\ \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} \end{pmatrix}}_{\psi_1}, \dots, \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_n \\ \varphi_n^{(1)} \\ \vdots \\ \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}}_{\psi_n} \right\}$ este sistem fundam de soluții pt sistemul diferențial $\bar{y}' = A(t)\bar{y}$ liniar atașat sistemului (12)

Aplicăm metoda variației constantelor pt a afla soluția sist (12):

det. $C_1, \dots, C_n : I \to \mathbb{R}$ a.î. $y(t) = C_1(t)\psi_1(t) + \dots + C_n(t)\psi_n(t)$

să fie sol pt $y' = A(t)y + b(t)$. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(C_1\psi_1(t) + \dots + C_n\psi_n(t)\right)' = A(t)\left(C_1\psi_1(t) + \dots + C_n\psi_n(t)\right) + b(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1'\psi_1(t) + \dots + C_n'\psi_n(t) + \cancel{C_1\psi_1'(t)} + \dots + \cancel{C_n\psi_n'(t)} =$$

$$= \cancel{C_1 A(t)\psi_1(t)} + \dots + \cancel{C_n A(t)\psi_n(t)} + b(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1'\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_1^{(1)} \\ \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} \end{pmatrix} + \dots + C_n'\begin{pmatrix} \varphi_n \\ \varphi_n^{(1)} \\ \vdots \\ \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \text{sistemul (14)}.$$

<u>Temă</u>: Determinați forma generală a soluției pentru ecuația:

$$x^{(3)} = 3x^{(1)} - 2x + t^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$