

CONȚINUTUL CURSULUI #1:

- 0. Erori
 - 0.1. Erori de trunchiere.
 - 0.2. Erori de rotunjire.
- I. Metode de aproximare a soluțiilor ecuațiilor neliniare.
 - I.1. Metoda biseției.
 - I.2. Metoda Newton-Raphson.
 - I.3. Metoda secantei.
 - I.4. Metoda poziției false.

0. Erori

0.1. Erori de trunchiere

Fie x un parametru reprezentat prin valoarea sa exactă, F o funcție în baza căreia se evaluează exact o formulă matematică și F_t o funcție obținută în urma operației de trunchiere a formulei exacte.

Definiția (0.1.)

Definim $e_t(x) = F(x) - F_t(x)$ și numim eroare de trunchiere.

Teorema (0.1. Dezvoltarea în serie Taylor)

Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de infinit ori derivabilă pe intervalul I , $x_0 \in I$ fixat. Atunci,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

Teorema (0.1. (reprezentarea restului sub forma Lagrange))

Mai mult, dacă f este derivabilă de $n + 1$ ori, pentru orice $x \in I$, $\exists \xi$ cuprins între x_0 și x , astfel încât:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Exemplu #1

Fie $x = e$, numărul Euler și formula matematică exactă de calcul a valorii acestui număr, obținută în baza dezvoltării în serie Taylor a funcției e^x în jurul punctului $x_0 = 0$ și evaluată în $x = 1$.

Întrucât, derivata funcției e^x rămâne la fel, dezvoltarea în serie Taylor a funcției $f(x) = e^x$ în jurul punctului x_0 este:

$$e^x = e^{x_0} + e^{x_0}(x - x_0) + \frac{e^{x_0}}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{e^{x_0}}{n!}(x - x_0)^n + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{k!}(x - x_0)^k$$

Notăm cu $F(x)$ formula exactă prin intermediul căreia se evaluează valoarea e^x pentru un x dat, astfel $e = F(1)$ sau

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Fie $F_t(x)$ formula trunchiată de forma:

$$F_t(x) = \sum_{k=0}^n \frac{e^{x_0}}{k!}(x - x_0)^k \tag{1}$$

deci, numărul e poate fi aproximat cu

$$e \approx F_t(1) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

Eroarea de trunchiere a acestei aproximări se determină prin formula:

$$e_t(1) = F(1) - F_t(1) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

sau, folosind formula de reprezentare Lagrange a restului din dezvoltarea

Taylor, obținem: $e_t(1) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}$ cu ξ între 0 și 1.

Exemplul #2 Fie $g \in C^2([a, b])$, $x \in (a, b)$ și $h > 0$ astfel încât $x + h$ rămâne în intervalul (a, b) . Conform formulei de dezvoltare în serie Taylor, cu reprezentarea restului sub forma Lagrange, putem scrie:

$$g(x + h) = g(x) + g'(x)h + g''(\xi)\frac{h^2}{2}, \quad \xi \in (x, x + h)$$

Din expresia de mai sus, putem deduce o formulă prin intermediul căreia se poate calcula prima derivată

$$g'(x) = \frac{g(x + h) - g(x)}{h} - g''(\xi)\frac{h}{2}$$

Întrucât, nu întotdeauna putem calcula analitic derivata funcției, formula de mai sus poate fi trunchiată la:

$$g'(x) \approx \frac{g(x + h) - g(x)}{h}$$

$$\text{cu eroarea de trunchiere } e_t(x) = -g''(\xi)\frac{h}{2}$$

Curs #1

October 20, 2020 5 / 22

Exemplul #3 Să se afle numărul mașină cu 5 cifre semnificative al numărului $\pi = 3,14159265...$

Numărul π scris în reprezentarea normalizată are forma

$$\pi = +0.31415965... \times 10^1$$

iar numărul mașină cu 5 cifre semnificative asociat este

$$+0.31416 \times 10^1$$

Definiția (0.2.)

Presupunem că x^* reprezintă aproximarea numărului x . Notăm cu

$$e_a := |x - x^*|$$

și numim eroarea absolută a aproximării. Notăm cu

$$e_r := \frac{|x - x^*|}{|x|}$$

și numim eroarea relativă.

Curs #1

October 20, 2020 7 / 22

0.2. Erori de rotunjire

Un număr mașină poate fi reprezentat în baza 10 cu virgulă mobilă normalizată sub forma:

$$x^* = \pm 0.d_1 d_2 \dots d_k \times 10^n \quad (2)$$

$$0 \leq d_1, d_2, \dots, d_k \leq 9, \quad d_1 \neq 0 \quad (3)$$

cifrele d_1, d_2, \dots, d_k se numesc cifre semnificative.

Observație: Reprezentarea se numește normalizată deoarece cifra care precede virgula este zero.

Un număr real x , din punct de vedere matematic, se reprezintă cu o infinitate de cifre semnificative

$$x = \pm 0.d_1 d_2 \dots d_k \dots \times 10^n \quad (4)$$

Acest număr poate fi asimilat cu numărul mașină cu k cifre semnificative după următoarea regulă:

$$x^* = \begin{cases} \pm 0.d_1 d_2 \dots d_k \times 10^n, & \text{dacă } d_{k+1} < 5 \\ \pm 0.d_1 d_2 \dots (d_k + 1) \times 10^n, & \text{dacă } d_{k+1} \geq 5 \end{cases} \quad (5)$$

Curs #1

October 20, 2020 6 / 22

Exemplul #4 Să se determine erorile absolută și relativă, dacă x este aproximarea lui x^* , unde $x = 0,3000 \times 10^4$, $x^* = 0,3100 \times 10^4$.

Eroarea absolută $e_a = 0,01 \times 10^4 = 100$, iar eroarea relativă

$$e_r = \frac{100}{3 \times 10^3} = 0,1.$$

Eroarea absolută nu este un indice suficient pentru stabilirea exactității calcului, pentru că acesta ne dă doar abaterea fără a ține cont de ordinul mărimilor implicate în calcul. Pentru a determina exactitatea calculului, eroarea absolută se raportează la mărimea valorii exacte, obținându-se eroarea relativă, sau dacă se dorește să se exprime în procente, aceasta se înmulțește cu 100%.

Definiția (0.3.)

Spunem că numărul x^* aproximează numărul x cu k cifre semnificative, dacă k este cel mai mare număr cu proprietatea

$$e_r = \frac{|x - x^*|}{|x|} \leq 5 \times 10^{-k} \quad (6)$$

Curs #1

October 20, 2020 8 / 22

Observație: Dacă x^* este numărul asociat numărului x după regula (5), atunci are loc estimarea (6). Într-adevăr, fie $x = \pm 0.d_1 d_2 \dots d_k \dots \times 10^n$ și x^* definit prin:

$$x^* = \begin{cases} \pm 0.d_1 d_2 \dots d_k \times 10^n, & \text{dacă } d_{k+1} < 5 \\ \pm 0.d_1 d_2 \dots (d_k + 1) \times 10^n, & \text{dacă } d_{k+1} \geq 5 \end{cases}$$

Vom considera cele două cazuri separat.

Cazul 1. $d_{k+1} < 5$:

$$\frac{|x - x^*|}{|x|} = \frac{|0.0 \dots 0 d_{k+1} \dots| \times 10^n}{|0.d_1 d_2 \dots d_k \dots| \times 10^n} \leq \frac{d_{k+1} \times 10^{-(k+1)}}{0.1} \quad (7)$$

$$= d_{k+1} \times 10^{-k} \leq 5 \times 10^{-k}$$

Cazul 2. $d_{k+1} \geq 5$: (sau, echivalent $d'_{k+1} := 10 - d_{k+1} \leq 5$)

$$\frac{|x - x^*|}{|x|} = \frac{|0.0 \dots 0 (10 - d_{k+1}) \dots| \times 10^n}{|0.d_1 d_2 \dots d_k \dots| \times 10^n} \leq \frac{d'_{k+1} \times 10^{-(k+1)}}{0.1} \quad (8)$$

$$= d'_{k+1} \times 10^{-k} \leq 5 \times 10^{-k}$$

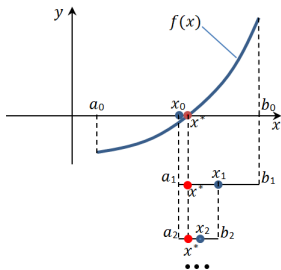


Figure: Metoda biseției

I. Metode de aproximare a soluțiilor ecuațiilor neliniare

I.1. Metoda biseției

Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă, astfel încât $f(a)f(b) < 0$. Atunci $\exists x^* \in (a, b)$, astfel încât $f(x^*) = 0$.

Metoda biseției generează un șir de aproximări $(x_k)_{k \geq 0}$ convergent către soluția exactă x^* a ecuației $f(x) = 0$ (i.e. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$, unde x^* verifică ecuația $f(x) = 0$).

Metoda biseției constă în înjumătățirea la fiecare pas k a intervalului $[a, b]$ și selectarea celui interval notat prin $[a_k, b_k]$ în care se află x^* . Șirurile $(a_k)_{k \geq 0}$, $(b_k)_{k \geq 0}$ și $(x_k)_{k \geq 0}$ se construiesc conform schemei:

$$(a_k, b_k, x_k) = \begin{cases} a_k = a_{k-1}, b_k = b_{k-1}, x_k = x_{k-1}, & \text{dacă } f(x_{k-1}) = 0 \\ a_k = a_{k-1}, b_k = x_{k-1}, x_k = \frac{a_k + b_k}{2}, & \text{dacă } f(a_{k-1})f(x_{k-1}) < 0 \\ a_k = x_{k-1}, b_k = b_{k-1}, x_k = \frac{a_k + b_k}{2}, & \text{dacă } f(a_{k-1})f(x_{k-1}) > 0, \end{cases} \quad (9)$$

$$\text{unde } a_0 = a, b_0 = b, x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}.$$

Teorema (I.1.)

Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuă, $f(a)f(b) < 0$. Dacă f admite soluție unică $x^* \in (a, b)$ atunci șirul $(x_k)_{k \geq 0}$ este convergent la x^* și

$$|x^* - x_k| \leq \frac{b - a}{2^{k+1}}, \forall k \geq 0 \quad (10)$$

Demonstrație:

$$|x^* - x_k| \leq \frac{1}{2} |a_k - b_k| = \begin{cases} \frac{1}{2} |a_{k-1} - x_{k-1}|, & f(a_{k-1})f(x_{k-1}) < 0 \\ \frac{1}{2} |x_{k-1} - b_{k-1}|, & f(a_{k-1})f(x_{k-1}) > 0 \end{cases} \quad (11)$$

Constatăm că

$$\frac{1}{2} |a_{k-1} - x_{k-1}| = \frac{1}{2} |a_{k-1} - \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}| = \frac{1}{4} |a_{k-1} - b_{k-1}| \quad (12)$$

Analog

$$\frac{1}{2} |x_{k-1} - b_{k-1}| = \frac{1}{4} |a_{k-1} - b_{k-1}| \quad (13)$$

Astfel că, din (11) rezultă

$$0 \leq |x^* - x_k| \leq \frac{1}{4} |a_{k-1} - b_{k-1}| = \frac{1}{8} |a_{k-2} - b_{k-2}| = \dots = \frac{1}{2^{k+1}} |a_0 - b_0| \quad (14)$$

sau $|x^* - x_k| \leq \frac{1}{2^{k+1}} |a - b|$ de unde rezultă $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$.
Criteriul de oprire: Fiind dat $\varepsilon > 0$, se caută $N \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{b-a}{2^{N+1}} < \varepsilon \Leftrightarrow N > \log_2(\frac{b-a}{\varepsilon}) - 1 \Leftrightarrow N = \lceil \log_2(\frac{b-a}{\varepsilon}) \rceil$;

Definiția (I.1.)

Fie șirul $(x_k)_{k \geq 0}$ convergent la x^* . Spunem că șirul $(x_k)_{k \geq 0}$ converge **cel puțin liniar** la x^* , dacă există șirul de numere reale pozitive $(\varepsilon_k)_{k \geq 0}$ convergent la zero și $\alpha \in (0, 1)$ astfel încât

$$|x_k - x^*| \leq \varepsilon_k, \quad k \geq 0 \quad \text{și} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} = \alpha \quad (15)$$

- Dacă relația (15) are loc pentru $\alpha = 0$, atunci spunem că șirul $(x_k)_{k \geq 0}$ converge **superliniar**;
- Dacă relația (15) are loc pentru $\alpha \in (0, 1)$ și $\varepsilon_k = |x_k - x^*|$, $k \geq 0$, atunci spunem că șirul $(x_k)_{k \geq 0}$ converge **liniar**;
- Dacă (15) are loc pentru $\alpha = 1$ și $\varepsilon_k = |x_k - x^*|$, atunci viteza de convergență este mai lentă decât cea liniară și spunem că șirul $(x_k)_{k \geq 0}$ converge **subliniar**.

Definiția (I.2.)

Fie șirul $(x_k)_{k \geq 0}$ convergent la x^* . Spunem că șirul $(x_k)_{k \geq 0}$ converge la x^* cu **ordinul de convergență cel puțin egal cu $r > 1$** , dacă există un șir $(\varepsilon_k)_{k \geq 0}$ de numere reale pozitive convergent la 0 și $\alpha > 0$ astfel încât

$$|x_k - x^*| \leq \varepsilon_k, \quad k \geq 0 \quad \text{și} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^r} = \alpha \quad (16)$$

Dacă (16) are loc pentru $\varepsilon_k = |x_k - x^*|$, $k \geq 0$, atunci spunem că șirul $(x_k)_{k \geq 0}$ converge la x^* cu **ordinul r de convergență**. În particular, dacă $r = 2$ atunci spunem că $(x_k)_{k \geq 0}$ converge **pătratic**.

Obs.: Datorită faptului că în cazul metodei bisecției avem estimarea $|x^* - x_k| \leq \frac{1}{2^{k+1}} (b - a)$ putem considera $\varepsilon_k = \frac{1}{2^{k+1}} (b - a)$. Atunci

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} = \frac{1}{2} \in (0, 1), \quad (17)$$

deci convergența este **cel puțin liniară**.

ALGORITM (Metoda bisecției)

Date de intrare: f, a, b, ε ;

Date de ieșire: x_{approx} ;

```

STEP 1:  $a_0 = a$ ;  $b_0 = b$ ;  $x_0 = \frac{a+b_0}{2}$ ;
 $N = \lceil \log_2(\frac{b-a}{\varepsilon}) - 1 \rceil + 1$ ;
STEP 2: for  $k = 1 : N$  do
    if  $f(x_{k-1}) = 0$  then
         $x_k = x_{k-1}$ ;
        break
    elseif  $f(a_{k-1})f(x_{k-1}) < 0$  then
         $a_k = a_{k-1}$ ;  $b_k = x_{k-1}$ ;  $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$ ;
    elseif  $f(a_{k-1})f(x_{k-1}) > 0$  then
         $a_k = x_{k-1}$ ;  $b_k = b_{k-1}$ ;  $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$ ;
    endif
endfor
 $x_{approx} = x_k$ .
```

I.2. Metoda Newton-Raphson

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă astfel încât $f(a)f(b) < 0$. Metoda N-R presupune construcția șirului $(x_k)_{k \geq 0}$ conform următoarei scheme grafice: la pasul k , aproximarea x_k a soluției exacte x^* a ecuației $f(x) = 0$ se obține prin intersecția cu axa Ox a tangentei T la graficul funcției f în punctul $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$.

$$T : y = f'(x_{k-1})(x - x_{k-1}) + f(x_{k-1}) \quad (18)$$

$$\{x_k\} = T \cap Ox \Rightarrow f'(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) + f(x_{k-1}) = 0 \Rightarrow$$

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \quad (19)$$

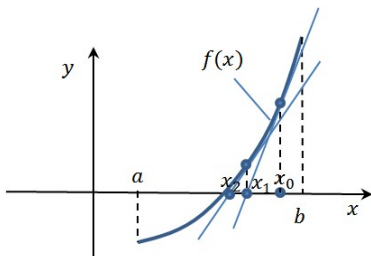


Figure: Metoda Newton

Teorema (1.2)

Presupunem că $f \in C^2([a, b])$, f', f'' nu se anulează pe $[a, b]$ și $f(a)f(b) < 0$. Fie $x_0 \in [a, b]$ astfel încât să aibă loc condiția

$$f(x_0)f''(x_0) > 0 \quad (20)$$

Atunci ecuația $f(x) = 0$ are o soluție unică $x^* \in (a, b)$, iar șirul $(x_k)_{k \geq 0}$ construit prin metoda Newton-Raphson, rămâne în $[a, b]$ și converge pătratic la x^* .

Demonstrație:

EXISTENȚA: Existența soluției ecuației $f(x) = 0$ este asigurată de condiția $f(a)f(b) < 0$.

UNICITATEA: Presupunem că $\exists y^* \in (a, b)$ cu $x^* \neq y^*$ și $f(y^*) = 0$. Cum $f(x^*) = f(y^*) = 0$, atunci conform Teoremei lui Rolle rezultă că $\exists c \in (x^*, y^*)$ astfel încât $f'(c) = 0$, contradicție, deoarece am presupus cu a, f' este nenul pe intervalul $[a, b]$.

CONVERGENȚA: Fără a restrânge generalitatea vom considera f', f'' strict pozitive, i.e. $f'(x) > 0, f''(x) > 0, \forall x \in [a, b]$. Celelalte cazuri se tratează în mod analog.

Fie $x_0 \in [a, b]$ cu proprietatea (20), atunci $f(x_0) > 0 = f(x^*)$. Deoarece $f'(x) > 0, \forall x \in [a, b]$ rezultă că f este strict crescătoare, astfel că $x^* < x_0 \leq b$ sau $x_0 \in (x^*, b]$.

Presupunem în continuare $x_k \in (x^*, b]$, i.e. $x^* < x_k \leq b$. Dezvoltăm în serie Taylor funcția f în jurul punctului x_k și evaluăm funcția în punctul x^* :

$$f(x^*) = f(x_k) + (x^* - x_k)f'(x_k) + \frac{1}{2}(x^* - x_k)^2 f''(\xi_k), \quad \xi_k \in [x^*, x_k] \quad (21)$$

Împărțim această relație la $f'(x_k)$, ținem cont că $f(x^*) = 0$ și

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \text{ Obținem:}$$

$$x_{k+1} - x^* = \frac{1}{2}(x^* - x_k)^2 \frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)}, \quad \xi_k \in [x^*, x_k] \quad (22)$$

Din monotonia funcției f rezultă $f(x_k) > 0 = f(x^*)$. Din (19) rezultă $x_{k+1} < x_k$, iar conform formulei (22) rezultă $x_{k+1} > x^*$,

deci $x^* < x_{k+1} < x_k \leq b$. Am obținut că șirul $(x_k)_{k \geq 0}$ este descrescător și mărginit, deci convergent.

Fie $y^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$, atunci trecând la limită în formula (19) rezultă:

$$y^* = y^* - \frac{f(y^*)}{f'(y^*)} \Rightarrow f(y^*) = 0, \quad (23)$$

deci y^* este soluție a ecuației $f(x) = 0$, iar din unicitatea soluției avem $x^* = y^*$.

Din relația (22) rezultă

$$\frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^2} = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)} \quad (24)$$

Dacă $\varepsilon_k = |x_k - x^*|$ atunci

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)} \quad (25)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \in (0, \infty) \quad (26)$$

Rezultă că $(x_k)_{k \geq 0}$ converge pătratic la x^* . \square

Deoarece f', f'' nu se anulează pe intervalul $[a, b]$, atunci funcția trebuie să fie monotonă (crescătoare sau descrescătoare) și să nu-și schimbe concavitatea pe intervalul dat.

Strategie de lucru: Din punct de vedere computațional se alege conform graficului funcției un interval în care funcția să fie monotonă și să nu-și schimbe concavitatea. Valoarea x_0 se alege în modul următor:

1. Dacă f este convexă ($f''(x_0) > 0$), atunci $f(x_0) > 0$;
2. Dacă f este concavă ($f''(x_0) < 0$), atunci $f(x_0) < 0$.

Pentru metoda N-R ca și criteriu de oprire vom alege una din următoarele condiții:

- $|f(x_k)| < \varepsilon$;
- $\frac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_{k-1}|} < \varepsilon$.

ALGORITM (Metoda Newton-Raphson)

Date de intrare: f, f', x_0, ε ;

Date de ieșire: x_{aprox} ;

STEP 1: $k = 0$;

STEP 2: do

$k = k + 1$;

$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$;

while $\frac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_{k-1}|} \geq \varepsilon$;

$x_{aprox} = x_k$.