Seria 34, Curs 12, EDDP, 05.01.2021

Problema Cauchy pentru ecuații neliniare cu derivate parțiale de ordinul întâi: Se cere determinarea funcției $u : \Delta \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a.î.:

$$(1)\quad \begin{cases} F(x, u, \partial_1 u, \dots, \partial_n u) = 0 \\ u(x) = u_0(x) \quad \text{pentru } x \in S \cap D \text{ cu} \end{cases}$$

$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0\}$.

unde
$$\begin{cases} F : G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ u_0 : S \cap D \to \mathbb{R} \\ h : D_1 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \end{cases}$$

Algoritmul de rezolvare pentru problema (1).

- scriem o parametrizare pentru S:

$$(2)\quad \begin{cases} x_1 = \alpha_1(s_1, \dots, s_{n-1}) \\ \vdots \\ x_n = \alpha_n(s_1, \dots, s_{n-1}) \end{cases}, \quad s = (s_1, \dots, s_{n-1}) \in H \subset \mathbb{R}^{n-1}$$

vrem că: $(\alpha_1(s), \dots, \alpha_n(s)) \in S$, $\forall s \in H \subset \mathbb{R}^{n-1}$.

- Calculăm $\varphi(s) = u_0(\alpha_1(s), \dots, \alpha_n(s))$
- Se determină valorile pe S ale derivatelor $(\partial_j u)$, $j = \overline{1,n}$.

– notăm $\boxed{p_j = \partial_j u, \quad j = \overline{1,n}}$ (3)

$\gamma_j = p_j(0) =$ val. lui p_j pe S, $j = \overline{1,n}$.

– $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ se determină prin rezolvarea sistemului

ec. este verif. pe S

$$(4)\quad \begin{cases} F(\alpha_1(s), \dots, \alpha_n(s), \varphi(s), \gamma_1, \dots, \gamma_n) = 0 \\ (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial \alpha_n}{\partial s_j} \end{pmatrix} = \frac{\partial \varphi}{\partial s_j}, \quad j = \overline{1, n-1} \end{cases}$$

comp. datelor inițiale cu S

Din (4) se obțin $(\gamma_j(s))_{j=\overline{1,n}}$.

Se scrie $F(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n)$ și calculăm derivate parțiale pt. F.

- Se scrie sistemul caracteristic:

$$(5)\begin{cases} \dfrac{dx_j}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial p_j}, & j=\overline{1,n} \\ \dfrac{dp_j}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial x_j} - p_j\dfrac{\partial F}{\partial u}, & j=\overline{1,n} \\ \dfrac{du}{dt} = p_1\dfrac{\partial F}{\partial p_1} + \dots + p_n\dfrac{\partial F}{\partial p_n} \\ x_j(0) = \alpha_j(s), & j=\overline{1,n} \\ p_j(0) = \gamma_j(s), & j=\overline{1,n} \\ u(0) = \varphi(s) \end{cases}$$

- rezolvarea sistemului caracteristic conduce la:

$$(6)\begin{cases} x_j = \tilde{x}_j(t,s), & j=\overline{1,n} \\ p_j = \tilde{p}_j(t,s), & j=\overline{1,n} \\ u = \tilde{u}(t,s) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ soluția parametrică este

$$\begin{cases} x_j = \tilde{x}_j(t,s), & j=\overline{1,n} \\ u = \tilde{u}(t,s) \end{cases} \quad (7)$$

- pt. a obține soluția în funcție de $x_1, \dots, x_n$: din $(7)_1$ se exprimă $\begin{cases} t = \tilde{t}(x_1,\dots,x_n) \\ s_j = \tilde{s}_j(x_1,\dots,x_n), & j=\overline{1,n-1} \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow u(x_1,\dots,x_n) = \tilde{u}(t(x_1,\dots,x_n), s(x_1,\dots,x_n)) \quad (7)$$

<u>OBS</u>: Dacă ecuația din (1) este cvasiliniară, atunci în sistemul (5) sunt suficiente $n+1$ ec., adică ec. pt $x_1, \dots, x_n$ și pt. u, deoarece avem

$$F(x, u, \partial_1 u, \dots, \partial_n u) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x,u)\cdot \underset{\overset{\shortparallel}{p_k}}{\partial_k u} - g(x,u)$$

și în ec. $(5)_1$ avem $\dfrac{\partial F}{\partial p_j} = a_j(x,u) \Rightarrow \dfrac{dx_j}{dt} = a_j(x,u)$.

Ec. $(5)_3$: $\dfrac{du}{dt} = \underbrace{p_1 \cdot a_1(x,u) + \dots + p_n \cdot a_n(x,u)}_{g(x,u)}$ (din ec. cvasiliniară) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\dfrac{du}{dt} = g(x,u)$ (a $(n+1)$-a ec. a sistemului).

Deci, în cazul cvasiliniar nu este nevoie de ec. $(5)_2$.

<u>Caz particular pentru problema Cauchy(1):</u> $\boxed{n=2}$

$$(8)\ \begin{cases} F(x_1, x_2, u, \partial_1 u, \partial_2 u) = 0. \\ u(x) = u_0(x) \quad \text{pt} \quad x = (x_1, x_2) \in S \cap D \end{cases}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid h(x) = 0\}.$$

unde $\begin{cases} F : G \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ u_0 : S \cap D \to \mathbb{R} \\ h : D_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \end{cases}$

În acest caz, algoritmul de rezolvare pt (8) se reduce la:

- o parametrizare pt S: $\begin{cases} x_1 = \alpha_1(s) \\ x_2 = \alpha_2(s) \end{cases}$, $s = (s_1)$. $s \in I \subset \mathbb{R}$.
- $\varphi(s) = u_0(\alpha_1(s), \alpha_2(s))$
- Avem $p_1 = \partial_1 u$; $p_2 = \partial_2 u$

Determinăm γ_1, γ_2 (valorile pe S pentru $\partial_1 u$, $\partial_2 u$) rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} F(\alpha_1(s), \alpha_2(s), \varphi(s), \gamma_1, \gamma_2) = 0 \\ (\gamma_1 \ \ \gamma_2)\begin{pmatrix} \alpha_1'(s) \\ \alpha_2'(s) \end{pmatrix} = \varphi'(s) \end{cases}$$

! <u>OBS</u>: În cazul $n=2$, de obicei, se folosesc notațiile: $\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = y \\ p = p_1 = \partial_1 u \\ q = p_2 = \partial_2 u \end{cases}$

$\partial_1 u = \partial_x u$
$\partial_2 u = \partial_y u$.

adică: $$\boxed{\begin{cases} F(\alpha_1(s), \alpha_2(s), \varphi(s), \gamma_1, \gamma_2) = 0 \\ \gamma_1 \alpha_1'(s) + \gamma_2 \alpha_2'(s) = \varphi'(s) \end{cases}} \quad (9) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\gamma_1(s)$, $\gamma_2(s)$, valori inițiale pt p_1, p_2.

• Sistemul caracteristic se scrie:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_1} \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_2} \\ \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_1} - p_1 \frac{\partial F}{\partial u} \\ \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_2} - p_2 \frac{\partial F}{\partial u} \\ \frac{du}{dt} = p_1 \frac{\partial F}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial F}{\partial p_2} \\ x_1(0) = \alpha_1(s) \\ x_2(0) = \alpha_2(s) \\ p_1(0) = \gamma_1(s) \\ p_2(0) = \gamma_2(s) \\ u(0) = \varphi(s) \end{cases}$$

din care rezultă soluția parametrică a prob. (8)

$$\begin{cases} x_1 = \tilde{x}_1(t, s) \\ x_2 = \tilde{x}_2(t, s) \\ u = \tilde{u}(t, s) \end{cases}$$

care poate fi explicitată dacă considerăm din primele 2 ec. $\begin{cases} t = \tilde{t}(x_1, x_2) \\ s = \tilde{s}(x_1, x_2) \end{cases} \Rightarrow u(x_1, x_2) = \tilde{u}(\tilde{t}(x_1, x_2), \tilde{s}(x_1, x_2))$.

<u>Exemplu</u>: Să se determine $u: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ astfel încât:

$$\begin{cases} (\partial_1 u)^2 - (\partial_2 u)^2 - 2u = 0. \\ u(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2 \quad \text{pentru } x \in S \cap D \end{cases}$$

unde $S = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 1 \}$.

• $F(x_1, x_2, u, \partial_1 u, \partial_2 u) = (\partial_1 u)^2 - (\partial_2 u)^2 - 2u$; $u_0(x) = (x_1 + x_2)^2$

• o param pt S : $h(x_1, x_2) = x_1 - 1 = 0$

$$\begin{matrix} x_1 = 1 = \alpha_1(s) \\ x_2 = s = \alpha_2(s) \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1(s) = 1 \\ \alpha_2(s) = s \end{cases}$$

• $\varphi(s) = u_0(\alpha_1(s), \alpha_2(s)) = (\alpha_1(s) + \alpha_2(s))^2 = (1+s)^2$.

- $p_1 = \partial_1 u$; $p_2 = \partial_2 u$

$F(x_1, x_2, u, p_1, p_2) = p_1^2 - p_2^2 - 2u$

Sistemul pt γ_1, γ_2 (val. pentru p_1 și p_2 pe S):

$$\begin{cases} F(\alpha_1(s), \alpha_2(s), \varphi(s), \gamma_1, \gamma_2) = 0 \\ \gamma_1 \cdot \alpha_1'(s) + \gamma_2 \cdot \alpha_2'(s) = \varphi'(s) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} \gamma_1^2 - \gamma_2^2 - 2\varphi(s) = 0. \\ \gamma_1 \cdot 0 + \gamma_2 \cdot 1 = ((1+s)^2)' \Rightarrow \boxed{\gamma_2 = 2(s+1)} \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma_1^2 - 4(s+1)^2 - 2(1+s)^2 = 0 \Rightarrow \gamma_1^2 = 6(s+1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma_1 = \sqrt{6}(s+1) \text{ sau } \gamma_1 = -\sqrt{6}(s+1)$$

Avem de rezolvat 2 cazuri de condiții inițiale pt. sistemul caracteristic:

$$\text{I)} \begin{cases} \gamma_1(s) = \sqrt{6}(s+1) \\ \gamma_2(s) = 2(s+1) \end{cases} \quad \text{sau} \quad \text{II)} \begin{cases} \gamma_1(s) = -\sqrt{6}(s+1) \\ \gamma_2(s) = 2(s+1) \end{cases}$$

Ecuațiile din sistemul caracteristic sunt aceleași.

Avem: $\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0$; $\frac{\partial F}{\partial x_2} = 0$; $\frac{\partial F}{\partial p_1} = 2p_1$; $\frac{\partial F}{\partial p_2} = -2p_2$; $\frac{\partial F}{\partial u} = -2$

Pt. cazul I), sistemul caracteristic cu condiții inițiale este:

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= 2p_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -2p_2 \end{aligned}\right\} \\ \left.\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= -0 - p_1(-2) \Rightarrow \frac{dp_1}{dt} = 2p_1 \\ \frac{dp_2}{dt} &= -0 - p_2(-2) \Rightarrow \frac{dp_2}{dt} = 2p_2 \end{aligned}\right\} \\ \frac{du}{dt} = p_1 \cdot (2p_1) + p_2(-2p_2) \Rightarrow \frac{du}{dt} = \underbrace{2p_1^2 - 2p_2^2}_{2(p_1^2 - p_2^2) = 2u} \\ x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = s \\ p_1(0) = \sqrt{6}(s+1) \\ p_2(0) = 2(s+1) \\ u(0) = (s+1)^2 \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{du}{dt} = 4u}$$

Din sistem:

- integrăm a 3-a ec: $\frac{dp_1}{dt} = 2p_1$ ec. liniară în p_1 cu $a(t) = 2$ $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow p_1(t) = c_1 e^{2t} \\ \text{dar } p_1(0) = \sqrt{6}(s+1) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\tilde{p}_1(t,s) = \sqrt{6}(s+1)e^{2t}}$$

- integrăm a 4-a ec: $\frac{dp_2}{dt} = 2p_2 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow p_2(t) = c_2 e^{2t} \\ \text{dar } p_2(0) = 2(s+1) \end{array}\right\} \Rightarrow 2(s+1) = c_2 \cdot e^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_2 = 2(s+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{p}_2(t,s) = 2(s+1)e^{2t}}$$

- din ec. 1 $\Rightarrow \frac{dx_1}{dt} = 2\sqrt{6}(s+1)e^{2t}$ ec. de tip primitivă

$$\Rightarrow x_1(t) = 2\sqrt{6}(s+1)\int e^{2t}dt = \cancel{2}\sqrt{6}(s+1)\frac{e^{2t}}{\cancel{2}} + C_3$$

Cum $x_1(0) = 1 \Rightarrow 1 = \sqrt{6}(s+1)e^0 + C_3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{C_3 = 1 - \sqrt{6}(s+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{x}_1(t,s) = \sqrt{6}(s+1)(e^{2t} - 1) + 1}$$

- din ec. 2 $\Rightarrow \frac{dx_2}{dt} = -4(s+1)e^{2t} \Rightarrow x_2(t) = -4(s+1)\int e^{2t}dt \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow x_2(t) = -2(s+1)e^{2t} + C_4 \\ \text{dar } x_2(t) = 1 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = -2(s+1) + C_4 \Rightarrow C_4 = 2(s+1) + 1 \Big| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{x}_2(t,s) = 2(s+1)(1 - e^{2t}) + 1.}$$

- ec. pt u: $\frac{du}{dt} = 2p_1^2 - 2p_2^2 \Rightarrow \frac{du}{dt} = 2 \cdot 6(s+1)^2 e^{4t} - 2 \cdot 4(s+1)^2 e^{4t}$

$$\Rightarrow \frac{du}{dt} = 4(s+1)^2 e^{4t}$$, ec. de tip primitivă.

$$\Rightarrow u(t) = 4(s+1)^2 \int e^{4t}\,dt = \cancel{4}(s+1)^2 \cdot \frac{e^{4t}}{\cancel{4}} + C_5$$

dar $u(0) = (s+1)^2$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (s+1)^2 = (s+1)^2 \cdot 1 + C_5 \Rightarrow \boxed{C_5 = 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{u}(t,s) = (s+1)^2 e^{4t}}$$

Se obține soluția parametrică a problemei:

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{6}(s+1)(e^{2t}-1)+1 \\ x_2 = 2(s+1)(1-e^{2t})+s \\ u = (s+1)^2 e^{4t} \end{cases}, \quad t, s \text{ ca parametri.}$$

Din primele 2 relații determinăm $s+1$ și e^{2t}.

Adunăm: $x_1 + x_2 = (s+1)(\sqrt{6}e^{2t} - \sqrt{6} + 2 - 2e^{2t}) + (s+1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = (s+1)\left[e^{2t}(\sqrt{6}-2) + 3 - \sqrt{6}\right]$$

și calc: $2x_1 + \sqrt{6}x_2 = \cancel{2\sqrt{6}(s+1)(e^{2t}-1)} + 2 +$
$+ \cancel{\sqrt{6}\cdot 2(s+1)(1-e^{2t})} + \sqrt{6}\cdot s \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow 2x_1 + \sqrt{6}x_2 - 2 = \sqrt{6}\cdot s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x_1 + \sqrt{6}x_2 - 2 + \sqrt{6} = \sqrt{6}(s+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{s+1 = \frac{2(x_1-1) + \sqrt{6}(x_2+1)}{\sqrt{6}}} \xRightarrow{\text{rel. 1}}$$

$$\Rightarrow x_1 = \left[2(x_1-1) + \sqrt{6}(x_2+1)\right]e^{2t} -$$
$$- 2(x_1-1) - \sqrt{6}(x_2+1) + 1 . \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(x_1-1) + \sqrt{6}(x_2+1) = \left[2(x_1-1) + \sqrt{6}(x_2+1)\right]e^{2t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{2t} = \frac{3(x_1-1) + \sqrt{6}(x_2+1)}{2(x_1-1) + \sqrt{6}(x_2+1)}}$$

Se obține $u(x_1,x_2) = \dfrac{\cancel{(2(x_1-1)+\sqrt{6}(x_2+1))^2}}{6} \cdot \dfrac{(3(x_1-1)+\sqrt{6}(x_2+1))^2}{\cancel{(2(x_1-1)+\sqrt{6}(x_2+1))^2}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{u(x_1,x_2) = \frac{\left[3(x_1-1)+\sqrt{6}(x_2+1)\right]^2}{6}}$$

Verif cond. inițiale: $u(1,s) = \varphi(s) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(3(1-1)+\sqrt{6}(s+1)\right)^2}{6} = (s+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (s+1)^2 = (s+1)^2 \quad (A).$$

Temă: 1) Pt prob. de mai sus cazul II: $\begin{cases} \sigma_1(s) = -\sqrt{6}(s+1) \\ \sigma_2(s) = 2(s+1) \end{cases}$

2) Se cer soluțiile prob. Cauchy următoare:

a) $\begin{cases} (\partial_1 u)^2 - 2(\partial_1 u)(\partial_2 u) + 2(\partial_2 u)^2 - 4u = 0. \\ u(x_1,x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 \quad \text{pe } S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0\}. \end{cases}$

b) $\begin{cases} (\partial_1 u)^2 + (\partial_2 u)^2 + (\partial_1 u)(\partial_2 u) - x_1(\partial_2 u) - x_1(\partial_1 u) \\ \quad + x_1 x_2 - 2u = 0. \\ u(x_1,x_2) = \frac{x_2^2}{2} \quad \text{pe } S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = -1\}. \end{cases}$

La cursul următor (12.01.2021): test (quiz), $\overbrace{\text{simulare}}^{\text{pe Moodle}}$ examen, de 10 minute (13:30 – 13:45) cu 2-3 întrebări.