Seria 34, Curs 8, EDDP, 24.11.2020

Sisteme de ecuații diferențiale liniare cu coef const:

$$x' = Ax, \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad (1)$$

Cazul ii) $\boxed{\lambda_j \text{ val. proprie pt } A \text{ cu multiplicitate } m_j > 1}$

Forma generală a soluției este în acest caz:

$$\varphi(t) = \left(\sum_{s=0}^{m_j-1} p_s t^s\right) e^{\lambda_j t} \quad (2)$$

cu $p_0, p_1, \dots, p_{m_j-1} \in \mathbb{R}^n$ nu toți nuli.

Înlocuind în (1), se poate arata că se obțin m_j seturi de vectori $p_0, p_1, \dots, p_{m_j-1}$ independente.

În (1) $\Rightarrow \left(\left(\sum_{s=0}^{m_j-1} p_s t^s\right) e^{\lambda_j t}\right)' = A\left(\left(\sum_{s=0}^{m_j-1} p_s t^s\right) e^{\lambda_j t}\right) \Rightarrow$

$$\left(\sum_{s=1}^{m_j-1} p_s \cdot s \cdot t^{s-1}\right) e^{\lambda_j t} + \left(\sum_{s=0}^{m_j-1} p_s t^s\right) e^{\lambda_j t} \cdot \lambda_j =$$

$$= \left(\sum_{s=0}^{m_j-1} (Ap_s) t^s\right) e^{\lambda_j t} \quad \Big| : e^{\lambda_j t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{s=1}^{m_j-1} s p_s t^{s-1} + \lambda_j \sum_{s=0}^{m_j-1} p_s t^s = \sum_{s=0}^{m_j-1} (Ap_s) t^s \Rightarrow$$

$s = r+1 \Leftrightarrow r = s-1$

s	1	m_j-1
r	0	m_j-2

$$\sum_{r=0}^{m_j-2} (r+1) p_{r+1} t^r$$

$$\Rightarrow \sum_{s=0}^{m_j-2} (s+1) p_{s+1} t^s + \lambda_j \sum_{s=0}^{m_j-2} p_s t^s + \lambda_j p_{m_j-1} t^{m_j-1} =$$

$$= \sum_{s=0}^{m_j-2} (Ap_s) t^s + A p_{m_j-1} \cdot t^{m_j-1}$$

Identificăm coef puterilor lui t: $t^0, t^1, \dots, t^{m_j-1}$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} (s+1)p_{s+1} + \lambda_j \cdot p_s = A p_s, & s=\overline{0, m_j-2} \\ \lambda_j \, p_{m_j-1} = A \, p_{m_j-1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (s+1)p_{s+1} = A p_s - \lambda_j \cdot p_s & , s=\overline{0, m_j-2} \\ 0_{\mathbb{R}^n} = A p_{m_j-1} - \lambda_j \cdot p_{m_j-1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (s+1)p_{s+1} = (A-\lambda_j I_n) p_s & , s=\overline{0, m_j-2} \\ 0_{\mathbb{R}^n} = (A-\lambda_j I_n) p_{m_j-1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 \cdot p_1 = (A-\lambda_j I_n) p_0 \quad \Big| \cdot (A-\lambda_j I_n) \text{ în stg} \Rightarrow \\ 2 \cdot p_2 = (A-\lambda_j I_n) p_1 \\ \vdots \\ (m_j-1) p_{m_j-1} = (A-\lambda_j I_n) p_{m_j-2} \\ 0_{\mathbb{R}^n} = (A-\lambda_j I_n) p_{m_j-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(A-\lambda_j I_n) p_1}_{2p_2} = (A-\lambda_j I_n)^2 p_0 \Rightarrow 2p_2 = (A-\lambda_j I_n)^2 p_0 \quad \Big| \cdot (A-\lambda_j I_n) \text{ la stg}$$

$$\Rightarrow 2 \underbrace{(A-\lambda_j I_n) p_2}_{3p_3} = (A-\lambda_j I_n)^3 p_0 \Rightarrow 2 \cdot 3 p_3 = (A-\lambda_j I_n)^3 p_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow 2 \cdot 3 \cdots (m_j-1) p_{m_j-1} = (A-\lambda_j I_n)^{m_j-1} p_0 . \quad \Big| \cdot (A-\lambda_j I_n) \text{ în stg.}$$

$$\Rightarrow (m_j-1)! \underbrace{(A-\lambda_j I_n) p_{m_j-1}}_{0_{\mathbb{R}^n}} = (A-\lambda_j I_n)^{m_j} p_0 . \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A-\lambda_j I_n)^{m_j} p_0 = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow \boxed{p_0 \in \ker\left((A-\lambda_j I_n)^{m_j}\right)}$$

Știm că $\ker\left((A-\lambda_j I_n)^{m_j}\right)$ are dimensiunea $m_j \Rightarrow$
$\Rightarrow$ este suficient pt p_0 să luăm elementele unei baze din $\ker\left((A-\lambda_j I_n)^{m_j}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ m_j vectori $p_0, p_1, \dots, p_{m_j-1}$ determinați astfel:

$$\begin{cases} p_0 \in \text{baza din } \ker\left((A-\lambda_j I_n)^{m_j}\right) \\ p_1 = \frac{1}{1}(A-\lambda_j I_n)p_0 \\ p_2 = \frac{1}{2}(A-\lambda I_n)p_1 \\ \vdots \\ p_{m_j-1} = \frac{1}{m_j-1}(A-\lambda_j I_n)\,p_{m_j-2}. \end{cases}$$

<u>OBS</u>: Dacă A are doar o valoare proprie λ_1, cu multiplicitatea $m_1 = n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \det(A-\lambda I_n) = (-1)^n \cdot (\lambda-\lambda_1)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ker\left((A-\lambda_1 I_n)^n\right) = \mathbb{R}^n \Rightarrow$$

(adică, $(A-\lambda_1 I_n)^n = O_n$).

pentru p_0 se pot alege elementele bazei canonice.

Fie sistemul liniar $x' = A(t)\,x$, (2)

$$A : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Def:

1) Pentru $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\} \subset S_A$ (adică $\varphi_1, \dots, \varphi_m : I \to \mathbb{R}^n$ soluții pt 2) numim <u>matrice de soluții</u>, matricea ale cărei coloane sunt componentele soluțiilor $\varphi_1, \dots, \varphi_m$:

$$X(t) = \text{coloane}\left(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)\right).$$

OBS: $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in S_A \Rightarrow \varphi_j' = A(t)\varphi_j \Rightarrow$

$\Rightarrow$ coloane $(\varphi_1'(t), \dots, \varphi_m'(t)) =$ coloane $(A(t)\varphi_1(t), \dots$

$\dots A(t)\varphi_m(t)) = A(t) \cdot$ coloane $(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t))$

$$\Rightarrow \boxed{X'(t) = A(t)\, X(t)} \quad (3)$$

2) Pentru $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subset S_A$ sistem fundamental de soluții, matricea $X(t) =$ coloane $(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$, $t \in I$

se numește <u>matrice fundamentală de soluții</u>.

<u>OBS</u>: Dacă $X(t)$ = matrice fundamentală de soluții, atunci $\det X(t) \neq 0$, $\forall t \in I$, deci există $(X(t))^{-1}$.

(Rezultă pt că $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ formează bază în S_A, deci este sistem liniar independent).

<u>Sisteme afine de ecuații diferențiale</u>

<u>(liniare neomogene)</u>

$$x' = A(t)x + b(t) \quad (4)$$

unde $\left.\begin{array}{l} A : I \to M_n(\mathbb{R}) \\ b : I \to M_{n,1}(\mathbb{R}) \end{array}\right\}$ cu componente continue.

<u>Prop. 1</u> Dacă $\varphi_0 = (\varphi_{0,1}, \dots, \varphi_{0,n}) : I \to \mathbb{R}^n$ este soluție pentru (4), atunci mulțimea soluțiilor pentru (4) este:

$$S_{A,b} = \{ \varphi + \varphi_0 \mid \varphi \in S_A \}$$

sol. a sistemului liniar omogen atașat: $\bar{x}' = A(t)\bar{x}$

<u>Dem</u>: $(t, x) \xrightarrow{x = y + \varphi_0} (t, y)$

Sistemul (4) prin s.v. $x = y + \varphi_0$, devine

$$\left.\begin{array}{l} y' + \cancel{\varphi_0'} = A(t)y + \cancel{A(t)\varphi_0} + \cancel{b(t)} \\ \text{dar } \varphi_0 \text{ sol pt (4)} \Rightarrow \varphi_0' = A(t)\varphi_0 + b(t) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = A(t)y. \blacksquare$$

Pt determinarea soluțiilor sist (4), în cazul în care nu se cunoaște o soluție particulară, se aplică __metoda variației constantelor__:

- se rezolvă, adică se determină un sistem fundamental de soluții pt sistemul liniar omogen atașat: $\bar{x}' = A(t)\bar{x}$ (5)

- fie $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ sistem fundam de soluții pt (5). $\Rightarrow$

$\Rightarrow X(t)$ este matrice fundam de soluții pt (5): $X'(t) = A(t)X(t)$

și $\exists (X(t))^{-1}$ $(\det X(t) \neq 0)$

- $\forall \varphi$ soluție pt (5): $\varphi = c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n =$

$$= X(t)\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = X(t)\cdot C$$

$C \in \mathbb{R}^n$.

- aplicăm met. var. constantelor:

determinăm $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^n$ a.î.

$x(t) = X(t)C(t)$ să fie sol. pt (4)

Rezultă:

$$(X(t)c(t))' = A(t)\cdot X(t)C(t) + b(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\cancel{X'(t)C(t)}}_{\cancel{A(t)X(t)}} + X(t)C'(t) = \cancel{A(t)X(t)C(t)} + b(t) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow X(t)C'(t) = b(t) \\ \exists (X(t))^{-1}\end{array}\right| \Rightarrow \boxed{C'(t) = (X(t))^{-1}b(t)}$$

ec. dif. vectorială dată prin

$$\Rightarrow \left(c_j'(t)\right)_{j=\overline{1,n}} = \left(X(t)\right)^{-1} b(t). \Rightarrow c_j(t) = H_j(t) + K_j \quad j=\overline{1,n}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = X(t)\cdot\left(H_j(t) + K_j\right)_{j=\overline{1,n}}$$

OBS: 1) Metoda de determinare a unui sistem fundamental de soluții cu ajutorul valorilor proprii pt A se aplică doar dacă $A(t) =$ constantă, nu depinde de t.

2) Dacă $A(t)$ nu este constantă, atunci determinarea unui sistem fundamental de soluții pt. (5) se poate realiza dacă aplicăm una dintre variantele:

I. printr-o schimbare de variabilă să ajungem la sistem cu coef. constanți.

De exemplu:

i) $x' = \underbrace{\frac{1}{t} B}_{} x$

$A(t) = \frac{1}{t} B, \quad t \neq 0.$

prin s.v: $|t| = e^s \Leftrightarrow s = \ln|t|$

$x(t) = y(s(t))$

se obține: $x'(t) = y'(s)\cdot s'(t) = y'(s)\cdot\frac{1}{t}$

deci sistemul este: $\Rightarrow \boxed{t x' = y'}$

$t x' = B x \Rightarrow \boxed{y' = By}$

ii) $x' = \underbrace{(2k+1)\, t^{2k}\, B}_{A(t)}\, x \quad ; k \in \mathbb{N}^*.$

prin s.v: $t^{2k+1} = s \Leftrightarrow t = \sqrt[2k+1]{s}.$

$x(t) = y(s(t))$

se obține sistemul cu coef constanți

$y' = By.$

II prin reducerea dimensiunii sistemului dacă se cunosc m soluții liniar independente

Fie $x' = A(t)x$ (5)

$A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Presupunem cunoscute $m < n$ soluții liniar independente pt (5): $\varphi_1, \dots, \varphi_m : I \to \mathbb{R}^n$

$$\varphi_j = \begin{pmatrix} \varphi_{1j} \\ \vdots \\ \varphi_{nj} \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1,m}$$

și, în plus, presupunem că

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_{1j}(t) \\ \vdots \\ \varphi_{mj}(t) \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(t) & \dots & \varphi_{1m}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{m1}(t) & \dots & \varphi_{mm}(t) \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall t \in I.$$

Prop. 2. Prin schimbarea de variabilă $x(t) = Z(t)y(t)$ $(x = Z(t)y)$

unde $Z(t) = \text{coloane}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t), e_{m+1}, \dots, e_n) =$

$$= \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1m} & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_{m1} & \dots & \varphi_{mm} & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & 1 & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \dots & \varphi_{nm} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

cu $e_{m+1}, e_{m+2}, \dots, e_n$ sunt ultimii $n-m$ vectori ai bazei canonice din $\mathbb{R}^n$.

sistemul (5) devine: $y' = B(t)y$ (6)

unde primele m coloane din $B(t)$ sunt nule, ceea ce înseamnă că pentru nec $y_{m+1}, \dots y_n$ se obține un sistem separat și apoi pentru

$y_1, \dots, y_m$ se obțin ec de tip primitivă.

<u>**Dem**</u>: Avem $\det Z(t) = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(t) & \dots & \varphi_{1m}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{m1}(t) & \dots & \varphi_{mm}(t) \end{vmatrix} \neq 0, \forall t \in I \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists (Z(t))^{-1}, \forall t \in I \Rightarrow x = Z(t)y$ este schimbare de variab. ($y = (Z(t))^{-1}x$).

În (5) $\Rightarrow (Z(t)y)' = A(t) \cdot Z(t)y \Rightarrow$

$\Rightarrow Z'(t)y + Z(t)y' = A(t) \cdot Z(t)y \Rightarrow$

$\Rightarrow Z(t)y' = [A(t) \cdot Z(t) - Z'(t)]y \Rightarrow$

$\Rightarrow y' = \underbrace{(Z(t))^{-1}[A(t)Z(t) - Z'(t)]}_{B(t)} y$

Cum $Z(t) = \text{col}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t), e_{m+1}, \dots, e_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow Z'(t) = \text{col}(\varphi_1'(t), \dots, \varphi_m'(t), 0_{\mathbb{R}^n}, \dots, 0_{\mathbb{R}^n}) =$

$= \text{col}(A(t)\varphi_1(t), \dots, A(t)\varphi_m(t), 0_{\mathbb{R}^n}, \dots, 0_{\mathbb{R}^n})$

dar $A(t) \cdot Z(t) = \text{col}(A(t) \cdot \varphi_1(t), \dots, A(t)\varphi_m(t), A(t)e_{m+1}, \dots, A(t)e_n)$.

$\Rightarrow A(t)Z(t) - Z'(t) = \text{col}(0_{\mathbb{R}^n}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{coloana } m}}{0_{\mathbb{R}^n}}, A(t)e_{m+1}, \dots, A(t)e_n)$

$\Rightarrow B(t) = (Z(t))^{-1}[A(t)Z(t) - Z'(t)] =$

$= (Z(t))^{-1} \cdot \text{coloane}(0_{\mathbb{R}^n}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ m}}{0_{\mathbb{R}^n}}, A(t)e_{m+1}, \dots, A(t)e_n) =$

$= \text{coloane}(0_{\mathbb{R}^n}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ m}}{0_{\mathbb{R}^n}}, (Z(t))^{-1}A(t)e_{m+1}, \dots, (Z(t))^{-1}A(t)e_n)$

Sistemul în y: se desface în:

$$\begin{pmatrix} y'_{m+1} \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = \left(B(t)\right)_{\substack{i=\overline{m+1,n} \\ j=\overline{m+1,n}}} \cdot \begin{pmatrix} y_{m+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (8)$$

și

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix} = \left(B(t)\right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{m+1,n}}} \begin{pmatrix} y_{m+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (9)$$

În concluzie, rezolvăm (8) sistem de dimensiune $\underline{n-m}$ și apoi din (9) avem m ec. de tip primitivă pt $y_1, \dots, y_m$.

<u>Exemplu</u>: Fie sistemul $\begin{cases} x_1' = 3t^2 x_2 \\ x_2' = 3t^2 x_1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. (10)

a) Scrieți sistemul în formă matriceală.

b) Arătați că $\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} e^{t^3} \\ e^{t^3} \end{pmatrix}$ este soluție pt (10)

c) Aplicați reducerea dimensiunii pt (10) folosind φ_1 (avem: $n=2$, $m=1$) și determinați mulț. soluțiilor sistemului (10). Precizați o soluție φ_2 ai $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ să formeze sistem fundamental de soluții pt (10).