Seria 34, Curs 6, EDDP, 10.11.2020

Metode numerice pentru aproximarea soluției problemei Cauchy

Se dă problema Cauchy:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x), & t \in [t_0, t_0+T],\ T>0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

care verifică ipotezele TEU. Fie φ soluția prob. (1).
Se consideră o diviziune echidistantă a intervalului $[t_0, t_0+T]$:

$$(2)\quad \begin{cases} h = \dfrac{T}{N}, & N \in \mathbb{N}^* \\ t_j = t_0 + j\cdot h, & j = \overline{0,N} \end{cases}$$

Avem $h_j = t_{j+1} - t_j = h = \text{const}, \ \forall j = \overline{0,N-1}$

O schemă numerică (într-un pas) de aproximare a soluției pt (1) este de forma:

$$(3)\quad \begin{cases} x_0 \\ x_{j+1} = x_j + h\,\phi(h, t_j, x_j), & j = \overline{0,N-1} \end{cases}$$

Pt $\phi(h, t_j, x_j) = f(t_j, x_j)$ se obține schema Euler explicită:

$$(4)\quad \begin{cases} x_0 \\ x_{j+1} = x_j + h f(t_j, x_j), & j = \overline{0,N-1} \end{cases}$$

Avem
$x_j \simeq \varphi(t_j)$

Teorema de aproximare a soluției prob. (1) (cu metoda Euler)

În ipotezele TEU și, în plus, f să fie funcție Lipschitz și în variabila t, adică

$$\exists L_1 > 0 \text{ a.î. } |f(t_1,x) - f(t_2,x)| \le L_1 |t_1 - t_2| \quad (5),$$
$$\forall (t_1,x), (t_2,x) \in D.$$

Dacă $x_0, x_1, \dots, x_N$ sunt aproximările obținute prin schema (4), atunci:

$$\exists A > 0 \text{ astfel încât } |x_j - \varphi(t_j)| < Ah \quad (6)$$

adică, aproximarea prin schema Euler este de ordinul 1.

Lema 1: Pt $x_0, x_1, \dots, x_N$ din (4) avem:

$$|x_j - x_0| \leq Mjh \quad , j=\overline{0,N} \quad (7)$$

Dem: $j=0$: $|x_0 - x_0| = 0 \leq M \cdot 0 \cdot h$

Presupunem că e adev pt j și dem pt $j+1$:

$$|x_{j+1} - x_0| \underset{(4)}{=} |x_j + hf(t_j, x_j) - x_0| \leq$$

$$\leq |(x_j - x_0)| + |hf(t_j, x_j)| \leq Mjh + h \cdot M =$$

$$= Mh(j+1) \Rightarrow \text{ineg. 7 e adev.}$$

Lema 2: În ipotezele teoremei de aproximare avem:

$$(8). \quad \exists B > 0 \ (B = N(L_1 + ML)) \quad \text{a.î.} \left| \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t, \varphi(t))dt - hf(t_j, \varphi(t_j)) \right| < Bh^2 \quad \forall j = \overline{0, N-1}$$

Temă: Calculați x_0, x_1, x_2, aplicând schema (4) pt problema:
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x & , t \in [0,1], T=1 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$
cu $N=2$.

Metoda Euler implicită este:

$$(9) \begin{cases} x_0 \\ x_{j+1} = x_j + hf(t_{j+1}, x_{j+1}) \end{cases} , j=\overline{0,N-1}$$

în care fiecare x_{j+1} se determină din ec. $(9)_1$.

Construirea unei metode de aproximare a soluției prob. Cauchy, metodă de ordin k: Metoda Taylor

$k \in \mathbb{N}^*$

Presupunem că f este k ori derivabilă în raport cu fiecare variabilă.

De asemenea, soluția φ este de k ori derivabilă.

Pt $[t_{j+1}, t_j]$:

$$\varphi(t_{j+1}) = \varphi(t_j) + \frac{\varphi^{(1)}(t_j)}{1!}(t_{j+1} - t_j) + \frac{\varphi^{(2)}(t_j)}{2!}(t_{j+1} - t_j)^2 + \dots$$

$$+\dots+\frac{\varphi^{(k)}(t_j)}{k!}(t_{j+1}-t_j)^k+O\left((t_{j+1}-t_j)^{k+1}\right)$$

Dar $t_{j+1}-t_j=h$, $\varphi(t_{j+1})\simeq x_{j+1}$; $\varphi(t_j)\simeq x_j \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_{j+1}=x_j+\underbrace{\frac{\varphi^{(1)}(t_j)}{1!}\cdot h+\frac{\varphi^{(2)}(t_j)}{2!}h^2+\dots+\frac{\varphi^{(k)}(t_j)}{k!}h^k}+O(h^{k+1})$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{j+1}=x_j+h\underbrace{\left[\frac{\varphi^{(1)}(t_j)}{1!}+\frac{\varphi^{(2)}(t_j)}{2!}h+\dots+\frac{\varphi^{(k)}(t_j)}{k!}h^{k-1}\right]}_{\phi_k(h,t_j,x_j)}}$$

Cum φ soluție pt (1), $\Rightarrow \varphi^{(1)}(t)=f(t,\varphi(t)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi^{(1)}(t_j)=f(t_j,\varphi(t_j))\simeq f(t_j,x_j)$

Pt aprox. de ordin $\underline{k=1}$: $\phi_1(h,t_j,x_j)=f(t_j,x_j) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ schema Euler: $\boxed{x_{j+1}=x_j+h\,f(t_j,x_j)}$;

Pt. aproximare de ordin $\underline{k=2}$:

$$\phi_2(h,t_j,x_j)=\phi_1(h,t_j,x_j)+\frac{\varphi^{(2)}(t_j)}{2!}\cdot h$$

Avem: $\varphi^{(1)}(t)=f(t,\varphi(t)) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi^{(2)}(t)=\frac{d}{dt}\left(f(t,\varphi(t))\right)=\frac{\partial f}{\partial t}(t,\varphi(t))+\frac{\partial f}{\partial x}(t,\varphi(t))\cdot\varphi'(t)=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial t}(t,\varphi(t))+\frac{\partial f}{\partial x}(t,\varphi(t))\cdot f(t,\varphi(t)) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ scriem pt $t=t_j$ și aprox. $\varphi(t_j)\simeq x_j \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi^{(2)}(t_j)\simeq\frac{\partial f}{\partial t}(t_j;x_j)+\frac{\partial f}{\partial x}(t_j;x_j)\cdot f(t_j;x_j)}$$

Exemplu: Pt prob $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x\\ x(0)=1\end{cases}$ o schemă de ordin 2

înseamnă: $f(t,x)=x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t}=0$; $\frac{\partial f}{\partial x}=1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi^{(2)}(t_j)\simeq f(t_j;x_j)\Rightarrow\phi_2(h,t_j,x_j)=f(t_j,x_j)+\frac{h}{2}f(t_j,x_j)\Rightarrow$$

⇒ pt prob. dată o schemă de ordin 2 este:

$$\begin{cases} x_0 \\ x_{j+1} = x_j + h\left(f(t_j, x_j) + \frac{h}{2} f(t_j, x_j)\right), \quad j = \overline{0, N-1} \end{cases}$$

Pt. aproximare de ordin $\underline{k=3}$:

$$\Phi_3(h, t_j, x_j) = \Phi_2(h, t_j, x_j) + \frac{\varphi^{(3)}(t_j)}{3!} \cdot h^2.$$

Avem:

$$\varphi^{(3)}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, \varphi(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t)) \cdot f(t, \varphi(t)) \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t,\varphi(t))\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t,\varphi(t))\right) \cdot \underbrace{\varphi'(t)}_{f(t,\varphi(t))} + \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(t,\varphi(t))\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(t,\varphi(t))\right) \cdot \varphi'(t) \right] \cdot f(t, \varphi(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t)) \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t, \varphi(t)) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi^{(3)}(t_j) \simeq \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_j, x_j)\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_j, x_j)\right) \cdot f(t_j, x_j) +$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(t_j, x_j)\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(t_j, x_j)\right) \cdot f(t_j, x_j)\right] f(t_j, x_j) +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x}(t_j, x_j) \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t_j, x_j) + \frac{\partial f}{\partial x}(t_j, x_j) f(t_j, x_j)\right]$$

Schema de ordin 3:

$$\begin{cases} x_0 \\ x_{j+1} = x_j + h\, \Phi_3(h, t_j, x_j) \end{cases}$$

$\underline{\text{Pentru exemplu}}$ $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ x(0) = 1 \end{cases}$ avem: $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = 0.$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = 0 = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0.$$

$$\varphi^{(3)}(t_j) = 1 \cdot \left[0 + 1 \cdot f(t_j, x_j)\right] = f(t_j, x_j). \Rightarrow$$

⇒ schema de ordin 3 este:

$$\begin{cases} x_0 \\ x_{j+1} = x_j + h\left(f(t_j, x_j) + \frac{h}{2} f(t_j, x_j) + \frac{h^2}{6} f(t_j, x_j)\right) \\ j = \overline{0, N-1} \end{cases}$$

Temă: Scrieți scheme numerice de ordin 2 și 3, folosind metoda Taylor pentru problema Cauchy:

$$\begin{cases} x' = x^2 + xt + t^2 \\ x(0) = 2 \end{cases}.$$

Sisteme de ecuații diferențiale în $\mathbb{R}$

$(t, x) \longrightarrow x = (x_1, \dots, x_n)$ variabila dependentă, cu n componente.

t – variab. independentă

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = f(t, x)} \qquad (10)$$

unde $f : \Delta \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \dots, f_n)$

Pe componente, (10) se scrie:

$$(11) \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, (x_1, \dots, x_n)) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, (x_1, \dots, x_n)) \end{cases}$$

Rezolvarea sistemelor (11) cu ajutorul integralelor prime

Def: O funcție $F : D \to \mathbb{R}$ este integrală primă pentru sistemul (11) dacă:

(12) $\forall \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ $\underbrace{\text{soluție pt. (11)}}_{\varphi : I_\varphi \to \mathbb{R}^n}$ avem:

$$\exists C_\varphi \in \mathbb{R} \text{ a.î. } F(t, \underbrace{\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)}) = C_\varphi, \ \forall t \in I_\varphi.$$

(adică, F este constantă de-a lungul oricărei soluții a sistemului (11)).

OBS: O integrală primă a sistemului (11) poate ajuta la reducerea dimensiunii sistemului sau la separarea componentelor funcției necunoscute x, în ecuații independente de celelalte componente.

Propoziția 1 (Criteriu pentru integrale prime)

$F : D \to \mathbb{R}$ este integrală primă pt. (11) $\Leftrightarrow$ verifică egalitatea:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial t}(t,x)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_j}(t,x)\cdot f_j(t,x)=0}, \quad \forall (t,x)\in D. \qquad (13)$$

Dem: F este integrală primă pt (11) $\Leftrightarrow$ F constantă de-a lungul oricărei soluții a lui (11) $\Leftrightarrow$ $\frac{dF}{dt}(t,x(t))=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial t}(t,\underset{(x_1(t),\dots,x_n(t))}{\underset{\parallel}{x(t)}})+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_j}(t,x(t))\underset{f_j(t,x)}{\underset{\parallel(11)}{\frac{dx_j}{dt}}}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial t}(t,x(t))+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_j}(t,x(t))\cdot f_j(t,x(t))=0.$$

Exemplu: Fie sistemul

$$\begin{cases}\frac{dx_1}{dt}=\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\\ \frac{dx_2}{dt}=\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}\end{cases} \qquad (14)$$

în care avem $n=2$

$$f=(f_1,f_2): D\subset \mathbb{R}\times(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\})\to\mathbb{R}^2$$

$$f_1(t,x_1,x_2)=\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}$$

$$f_2(t,x_1,x_2)=\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2} \quad ; \; x=(x_1,x_2)$$

a) Arătați că $F: D\to\mathbb{R}$

$$\boxed{F(t,x_1,x_2)=-2t+x_1^2+x_2^2}$$

este integrală primă pt (14).

b) Determinați mulțimea soluțiilor pt. (14) folosind F.

a) Verificăm că:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x)+\frac{\partial F}{\partial x_1}(t,x)f_1(t,x)+\frac{\partial F}{\partial x_2}(t,x)\cdot f_2(t,x)=0.$$

Avem:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x)=-2 \;;\; \frac{\partial F}{\partial x_1}(t,x)=2x_1 \;;\; \frac{\partial F}{\partial x_2}(t,x)=2x_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2+2x_1\cdot\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}+2x_2\cdot\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}=-2+\frac{2\cancel{(x_1^2+x_2^2)}^{1}}{\cancel{x_1^2+x_2^2}_{1}}=0. \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ F este integrală primă pt (14)

b) Notăm $\boxed{F(t,x) = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}}$

$-2t + x_1^2 + x_2^2 = C_1 \Rightarrow \underline{x_1^2 + x_2^2 = C_1 + 2t} \overset{(14)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{x_1}{C_1+2t} & \text{(ec. independentă de } x_2\text{)} \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{x_2}{C_1+2t} & \text{(ec. indep. de } x_1\text{)} \end{cases}$

ec. liniară omogenă în $x_1 \Rightarrow x_1(t) = C_2 \cdot e^{\ln\sqrt{2t+C_1}} \Rightarrow$

$\int \frac{1}{C_1+2t} dt = \frac{1}{2}\ln|2t+C_1| + K = \ln\left(|2t+C_1|^{1/2}\right) + K =$

$2t+C_1 > 0 \qquad = \ln\sqrt{2t+C_1} + K.$

$\Rightarrow x_1(t) = C_2\sqrt{2t+C_1}$

La fel, $x_2(t) = C_3\sqrt{2t+C_1}$

Cu componentele obținute, înlocuim în integrala primă $F(t,x) = C_1$, pentru a determina relații între constante:

$-2t + C_2^2(2t+C_1) + C_3^2(2t+C_1) = C_1 \quad, \forall t$

$-2t + 2tC_2^2 + C_1C_2^2 + 2tC_3^2 + C_1C_3^2 = C_1$

$2t(-1 + C_2^2 + C_3^2) + C_1(C_2^2 + C_3^2) = C_1$

identif. coef $\Rightarrow \begin{cases} 2(-1 + C_2^2 + C_3^2) = 0 \\ C_1(C_2^2 + C_3^2) = C_1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C_2^2 + C_3^2 = 1}$

Deci: sol. sistemului este: $\begin{cases} x_1(t) = C_2\sqrt{2t+C_1} \\ x_2(t) = C_3\sqrt{2t+C_1} \end{cases}$

cu $C_2^2 + C_3^2 = 1$, $C_1 \in \mathbb{R}$

<u>Temă</u>: Aceeași cerință pt:

$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -\dfrac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \end{cases}$ și $F(t, x_1, x_2) = x_1 x_2$