Seria 34, Curs 3, EDDP, 20.10.2020

⑤ Ec. diferențială de forma: $\boxed{\frac{dx}{dt} = g\left(\frac{a_1 t + b_1 x + c_1}{a_2 t + b_2 x + c_2}\right)}$ (1)
(continuare din curs 2)

Prop. 1: Presup $|a_1| + |a_2| > 0$, $|b_1| + |b_2| > 0$, $|c_1| + |c_2| > 0$.
Fie $d = a_1 b_2 - a_2 b_1$.

1) Dacă $\boxed{d = 0}$, atunci prin s.v. (schimbarea de variabile) $\boxed{a_1 t + b_1 x = y \text{ dacă } b_1 \neq 0}$ sau $\boxed{a_2 t + b_2 x = y \text{ dacă } b_2 \neq 0}$

ec. (1) devine o ec. cu variabile separabile.

2) Dacă $\boxed{d \neq 0}$, atunci prin s.v.:

$$\begin{cases} t = s + t_0 \\ x = y + x_0 \end{cases} \quad (2)$$

unde (t_0, x_0) este soluție a sistemului

$$\begin{cases} a_1 t + b_1 x + c_1 = 0 \\ a_2 t + b_2 x + c_2 = 0 \end{cases}$$

devine o ec. omogenă în variabile (s, y)

Dem: 1) Presupunem $b_1 \neq 0$. Avem:

$$\underset{\text{ec. de tip (1)}}{(t, x)} \xrightarrow[x = \frac{y - a_1 t}{b_1}]{a_1 t + b_1 x = y} (t, y) \quad \text{ec. cu var. separabile.}$$

În (1) $\Rightarrow$ $$\left(\frac{y - a_1 t}{b_1}\right)' = g\left(\frac{\cancel{a_1 t} + \cancel{b_1} \cdot \frac{(y - \cancel{a_1 t})}{\cancel{b_1}} + c_1}{\frac{b_1}{} a_2 t + b_2 \cdot \frac{(y - a_1 t)}{b_1} \frac{b_1}{} + c_2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b_1}(y' - a_1) = g\left(\frac{(y + c_1) b_1}{t\underbrace{(a_2 b_1 - a_1 b_2)}_{-d = 0} + b_2 y + b_1 c_2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = a_1 + b_1 g\left(\frac{b_1(y + c_1)}{b_2 y + b_1 c_2}\right) \Rightarrow y' = h(y) \text{ ec cu var sep.}$$

2) $d \neq 0$

Obs că d este determinantul sistemului:

$$\begin{cases} a_1 t + b_1 x = -c_1 \\ a_2 t + b_2 x = -c_2 \end{cases}$$

Cum $d \neq 0 \Rightarrow$ sistemul are soluție unică (t_0, x_0):

$$\begin{cases} a_1 t_0 + b_1 x_0 + c_1 = 0 \\ a_2 t_0 + b_2 x_0 + c_2 = 0 \end{cases}$$

$$(t,x) \xrightarrow{\qquad\qquad} (s,y)$$

$$\begin{cases} t = s + t_0 = t(s) \\ x = y + x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = t - t_0 = s(t) \\ y = x - x_0 = y(s) \end{cases}$$

$$y(s) = x(t(s)) - x_0$$

$$x(t) = y(s(t)) + x_0.$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\big(y(s(t)) + x_0\big) = \frac{dy}{ds}(s(t)) \cdot s'(t) \\ \text{dar } s(t) = t - t_0 \Rightarrow s'(t) = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt}(t) = \frac{dy}{ds}(s(t))$$

Ec. (1) devine:
$$\frac{dy}{ds} = g\left(\frac{a_1(s+t_0) + b_1(y+x_0) + c_1}{a_2(s+t_0) + b_2(y+x_0) + c_2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{ds} = g\left(\frac{a_1 s + a_1 t_0 + b_1 y + b_1 x_0 + c_1}{a_2 s + a_2 t_0 + b_2 y + b_2 x_0 + c_2}\right) \Rightarrow \frac{dy}{ds} = \underbrace{g\left(\frac{a_1 s + b_1 y}{a_2 s + b_2 y}\right)}_{f(s,y)}$$

(cu $a_1 t_0 + b_1 x_0 + c_1 = 0$ și $a_2 t_0 + b_2 x_0 + c_2 = 0$)

$$\Rightarrow \frac{dy}{ds} = g\left(\frac{\cancel{s}\left(a_1 + b_1 \frac{y}{s}\right)}{\cancel{s}\left(a_2 + b_2 \frac{y}{s}\right)}\right) \Rightarrow \frac{dy}{ds} = \underbrace{g\left(\frac{a_1 + b_1 \frac{y}{s}}{a_2 + b_2 \frac{y}{s}}\right)}_{h\left(\frac{y}{s}\right)} \Rightarrow \text{ec. omogenă.}$$

⑥ Ec. diferențială Bernoulli

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)x^{\alpha}} \qquad (3)$$

unde $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$; $a, b : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.

Obs
1) Dacă în (3) avem $\alpha = 0 \Rightarrow$ ec. (3) este afină
2) Dacă în (3) avem $\alpha = 1 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = (a(t) + b(t))x \Rightarrow$ ec. liniară omogenă

Pt. determinarea sol. ec. (3) avem <u>2 variante</u>:

(V1) Prin <u>metoda variației constantelor</u>:

• rez. ec. liniară omogenă atașată ec. (3):

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = a(t)\bar{x}$$

Sol. generală a acestei ec. este $\bar{x}(t) = C \, e^{A(t)}$,

unde A este primitivă pt a.

• aplicăm metoda variației constantelor:

determinăm $C : I \to R$ a.î.

$$\boxed{x(t) = C(t) \cdot e^{A(t)}}$$

să fie soluție a ec. Bernoulle $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(C(t) \cdot e^{A(t)}\right)' = a(t) \cdot C(t) \cdot e^{A(t)} + b(t) \cdot \left(C(t) \cdot e^{A(t)}\right)^{\alpha}$$

$$\Rightarrow C'(t) e^{A(t)} + \cancel{C(t) \cdot e^{A(t)} \cdot \underbrace{A'(t)}_{a(t)}} = \cancel{a(t) C(t) e^{A(t)}} + b(t) \cdot C^{\alpha}(t) \, e^{\alpha A(t)}$$

$$\Rightarrow C'(t) = b(t) \, C^{\alpha}(t) \, e^{\alpha A(t)} : e^{A(t)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dC}{dt} = \underbrace{b(t) \cdot e^{(\alpha-1)A(t)}}_{a_1(t)} \cdot \underbrace{C^{\alpha}}_{b_1(C)}$$ ec. cu var separabile.

$$\Rightarrow C = C(t)$$

(V2) Prin schimbarea de variabile:

$$(t, x) \xrightarrow{\boxed{x = y^{\frac{1}{1-\alpha}}}} (t, y)$$

sau $\boxed{y = x^{1-\alpha}}$ (4)

se obține:

$$\left(y^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)' = a(t) \cdot y^{\frac{1}{1-\alpha}} + b(t) \left(y^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\alpha} \, y^{\frac{1}{1-\alpha} - 1} \cdot y' = a(t) \, y^{\frac{1}{1-\alpha}} + b(t) \, y^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\frac{1}{1-\alpha} \, y^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot y' = a(t) \, y^{\frac{1}{1-\alpha}} + b(t) \, y^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad \Big| : y^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\alpha} y' = a(t)\, y^{\frac{1}{1-\alpha} - \frac{\alpha}{1-\alpha}} + b(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \underbrace{(1-\alpha)a(t)}_{a_1(t)}\, y + \underbrace{(1-\alpha)b(t)}_{b_1(t)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ec. în $\underset{(t,y)}{y}$ este afină.

⑦ Ecuația Riccati:

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = a(t)\,x^2 + b(t)\,x + c(t)}, \quad (5)$$

unde $a, b, c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.

OBS:

1) Dacă a, b, c sunt funcții constante, adică:

$a(t) = a_0$

$b(t) = b_0$; $c(t) = c_0$; $a_0, b_0, c_0 \in \mathbb{R}$, $\forall t \in I$

atunci ec (5) devine:

$$\frac{dx}{dt} = a_0 x^2 + b_0 x + c_0 \quad \text{ec. dif. cu var separabile.}$$

2) Dacă $c(t) = 0$, $\forall t \in I$, atunci este ecuație Bernoulli:

$$\frac{dx}{dt} = \underbrace{b(t)}_{a_1(t)}\, x + \underbrace{a(t)}_{b_1(t)}\, x^2$$

cu $\underline{\alpha = 2}$.

Prop. 2: Fie $\varphi_0 : I \to \mathbb{R}$ o soluție pentru ec. (5), adică:

$$\boxed{\frac{d\varphi_0}{dt} = a(t)\,\varphi_0^2(t) + b(t)\cdot\varphi_0(t) + c(t)}, \quad \frac{d\varphi_0}{dt} = \varphi_0'$$

Dacă în ec. (5) aplicăm schimbarea de variabile

$$x = y + \varphi_0$$

atunci ec. Riccati devine o ec Bernoulli cu $\alpha = 2$.

Dem:

$$(t, x) \xrightarrow{\boxed{x = y + \varphi_0}} (t, y)$$

Ec. (5) devine:

$$(y+\varphi_0)' = a(t)(y+\varphi_0)^2 + b(t)(y+\varphi_0) + c(t)$$

$$\Rightarrow y' + \cancel{\varphi_0'} = a(t)y^2 + \underline{a(t)\cdot 2y\cdot\varphi_0} + a(t)\varphi_0^2 + \underline{b(t)y} + b(t)\varphi_0 + c(t) \Rightarrow$$

$$= \varphi_0'(t).$$

$$\Rightarrow y' = \underbrace{[2a(t)\cdot\varphi_0(t) + b(t)]}_{a_1(t)} y + \underbrace{a(t)}_{b_1(t)} y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = a_1(t)\cdot y + b_1(t)y^2 \Rightarrow$$

$\rightarrow$ ec. Bernoulli cu $\underline{\alpha = 2}$.

<u>Exemplu</u>: Fie ec:

$$x' = x^2 + 2xe^t - 3e^{2t} + e^t; \quad (6)$$

$$t, x \in \mathbb{R}$$

a) Precizați tipul ecuației.

b) Determinați $m \in \mathbb{R}$ a.î. $\varphi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\underline{\varphi_0(t) = me^t}$ să fie soluție a ec. (6)

c) Se cere mulțimea soluțiilor ec. (6)

a) Ec. Riccati: $a, b, c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} a(t) = 1 \\ b(t) = 2e^t \\ c(t) = -3e^{2t} + e^t. \end{cases}$$

b) Det. $m \in \mathbb{R}$ a.î. $\underline{\varphi_0(t) = me^t}$ să fie sol ec. (6) înlocuind în ec. prin identificarea coef:

$$(me^t)' = (me^t)^2 + 2\cdot me^t\cdot e^t - 3e^{2t} + e^t.$$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{me^t} = m^2e^{2t} + 2me^{2t} - 3e^{2t} + e^t \\ \text{Identif se face după puterile lui } e \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{me^t} = (m^2+2m-3)e^{2t} + e^t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m^2+2m-3 = 0 \end{cases} \Rightarrow 1^2 + 2\cdot 1 - 3 = 0 \text{ Adev} \Rightarrow \boxed{m=1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_0(t) = e^t} \text{ soluție particulară.}$$

c) $(t, x) \longrightarrow (t, y)$

$\boxed{x = y + e^t}$

pt că $\varphi_0(t) = e^t$ e soluție a ec. date

Înloc în ec:

$$(y+e^t)' = (y+e^t)^2 + 2(y+e^t)e^t \underbrace{- 3e^{2t} + e^t}$$

$$\Rightarrow y' + \cancel{e^t} = y^2 + 2ye^t + \cancel{e^{2t}} + 2ye^t + \cancel{2e^{2t}} - \cancel{3e^{2t}} + \cancel{e^t}$$

$$\Rightarrow \underline{y' = 4e^t \cdot y + y^2}$$

ec Bernoulli cu $\begin{cases} a_1(t) = 4e^t \\ b_1(t) = 1 \\ \alpha = 2 \end{cases}$

- integrăm ec. liniară omogenă atașată:

$$\bar{y}' = 4e^t \bar{y} \Rightarrow \bar{y}(t) = C \cdot e^{A_1(t)},$$

unde A_1 este o primitivă pt $a_1(t)$:

$$\int a_1(t)\,dt = \int 4e^t\,dt = 4e^t + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_1(t) = 4e^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{y}(t) = C e^{4e^t}$$

- aplicăm metoda variației constantelor:

determinăm $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a.î.

$y(t) = C(t) \cdot e^{4e^t}$ să fie sol. a ec. Bernoulli

$$\Rightarrow \left(C(t)e^{4e^t}\right)' = 4e^t \cdot C(t) \cdot e^{4e^t} + \left(C(t) \cdot e^{4e^t}\right)^2$$

$$\Rightarrow \underline{C'(t) \cdot e^{4e^t}} + \cancel{C(t) \cdot e^{4e^t} \cdot 4e^t} = \cancel{4e^t C(t) e^{4e^t}} + \underline{C^2(t) \cdot e^{8e^t}} \;\Big|\; : e^{4e^t}$$

$$\Rightarrow C'(t) = C^2(t) \cdot e^{4e^t}$$

$$\frac{dC}{dt} = C^2 \cdot e^{4e^t} \quad \text{ec. cu var separabile:}$$

$a_2(t) = e^{4e^t}$

$b_2(C) = C^2$

- $b_2(C) = 0 \Rightarrow C^2 = 0 \Rightarrow C(t) = 0$ sol. staționară pt. ec. cu var. separabile.

$$\Rightarrow y(t) = 0 \cdot e^{4e^t} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = y(t) + e^t = e^t \quad (7)$$

(soluția particulară)

- $b_2(C) \neq 0 \Rightarrow$ pt $C \neq 0$ separăm variabilele:

$$\frac{dC}{C^2} = e^{4e^t} \cdot dt$$

$$\int \frac{dC}{C^2} = \int C^{-2} dC = \frac{C^{-2+1}}{-2+1} + C_1 = -\frac{1}{C} + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_2(C) = -\frac{1}{C}$$

$$\int \underbrace{e^{4e^t}}_{\text{funcție cont} \Rightarrow \text{are primitive}} dt = A_2(t) + C_2$$

Sol ec. cu var separabile: $B_2(C) = A_2(t) + K \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\frac{1}{C} = A_2(t) + K \Rightarrow C(t) = \frac{-1}{A_2(t) + K} \Rightarrow$$

$K \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow y(t) = \frac{-1}{A_2(t) + K} \cdot e^{4e^t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{-e^{4e^t}}{A_2(t) + K} + e^t, \quad K \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Mulț sol ec. date: $(7) \cup (8)$

Ecuații implicite de ordinul întâi

$$\boxed{F(t, x, x') = 0} \quad (9)$$

Considerăm cazul în care din ec. (9) nu se poate explicita x' ca funcție de t și x, adică, să scriem ec. (9) sub forma $x' = f(t, x)$

Pt. a integra (9) presupunem că poate fi explicitată în una dintre următoarele forme:

$$\boxed{x = g(t, x')} \quad (10)$$

sau

$$\boxed{t = h(x, x')} \quad (11)$$

Pt (10): $\boxed{x = g(t, x')}$ se pot determina soluții parametrice, adică:

$$\begin{cases} x = g(t, p) \\ t = t(p) \end{cases} \quad (12)$$

unde $p = x'$ parametru.

Pt. a ajunge la soluția parametrică derivăm (10) în funcție de t:

$$\left. \begin{aligned} & x' = \frac{\partial g}{\partial t}(t, x') + \frac{\partial g}{\partial x'}(t, x') \cdot \frac{dx'}{dt} \\ & \text{Cum } p = x' \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{\partial g}{\partial t}(t, p) + \frac{\partial g}{\partial p}(t, p) \frac{dp}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dp}{dt} = \frac{p - \frac{\partial g}{\partial t}(t, p)}{\frac{\partial g}{\partial p}(t, p)}} \Rightarrow \underline{\underline{t = t(p)}}$$

<u>Cazuri particulare de ec. (10):</u>

1) <u>Ec. diferențială Lagrange:</u>

$$\boxed{x = \underbrace{t \cdot \varphi(x') + \psi(x')}_{g(t, x')},} \quad (13)$$

(afină în t)

unde φ, ψ sunt funcții continue și derivabile.

$\varphi, \psi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Luăm $p = x'$ și derivăm (13):

$$x' = 1 \cdot \varphi(x') + t \, \varphi'(x') \cdot (x')' + \psi'(x') \cdot (x')' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = \varphi(p) + t\varphi'(p)\,p' + \psi'(p)\cdot p' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p' = \frac{p-\varphi(p)}{t\varphi'(p)+\psi'(p)} \Rightarrow \frac{dp}{dt} = \frac{p-\varphi(p)}{t\cdot\varphi'(p)+\psi'(p)}$$

Se scrie ec. răsturnată (adică, schimbăm variabilele astfel că t = variab. dependentă
p = — " — independentă

(14) $$\frac{dt}{dp} = \underbrace{\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}}_{a(p)}\cdot t + \underbrace{\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}}_{b(p)}, \quad p \neq \varphi(p)$$

$\Rightarrow$ ec. afină în variabile (p, t) din care se obține: $t = t(p) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ mulț. de soluții parametrice:

$$\begin{cases} x = t\varphi(p) + \psi(p) \\ t = t(p) \quad (\text{obținut din } (14)) \end{cases}$$

2) <u>Ec. diferențială Clairaut</u>: cazul particular al ec. Lagrange: $\varphi(x') = x'$:

$$\boxed{x = tx' + \psi(x')} \quad (15)$$

Derivând $\Rightarrow$ $\cancel{x'} = \cancel{1\cdot x'} + t(x')' + \psi'(x')\cdot(x')' \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = (t + \psi'(p))\cdot p'$ cu $p = x'$

$p' = 0 \Rightarrow (x')' = 0 \Rightarrow x' = C_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = C_1 t + C_2$

dar înlocuim în ec. $\Rightarrow$

$\Rightarrow C_1\cancel{t} + C_2 = \cancel{t}\,C_1 + \psi(C_1)$

$\Rightarrow C_2 = \psi(C_1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{gathered} x(t) = C_1 t + \psi(C_1) \\ C_1 \in \mathbb{R} \end{gathered}}$$

$t + \psi'(p) = 0$

$\Rightarrow t = -\psi'(p) \Rightarrow$ o sol. parametrică: $\boxed{\begin{cases} x = tp + \psi(p) \\ t = -\psi'(p) \end{cases}}$