Cazuri particulare de ecuații diferențiale de ordinul întâi integrabile

1. Ec de tip primitivă
2. Ec. cu variabile separabile.
3. Ec. diferențială omogenă de ordinul întâi

O ec. diferențială de ordin n $F(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) = 0$ se numește **omogenă** dacă dependența funcției F de variabilele $t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ este de forma:

$$\boxed{F_1\left(\frac{x}{t}, x^{(1)}, t^1 x^{(2)}, t^2 x^{(3)}, \dots, t^{n-1} x^{(n)}\right) = 0}.$$

În cazul $n=1$, ec. dif. omogenă: $\boxed{F_1\left(\frac{x}{t}, x'\right) = 0}$, în formă implicită; forma ei explicită fiind:

$$\boxed{x' = g\left(\frac{x}{t}\right)} \quad (1)$$

sau $x' = f(t, x)$

cu f funcție omogenă, adică
$f(\alpha t, \alpha x) = f(t, x)$
$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ai $(\alpha t, \alpha x) \in D_f$

Prop. 1 Prin schimbarea de variabilă

$$\frac{x}{t} = y \quad (2)$$

sau, echivalent, $x = t y$ (3),
$(x(t) = t\, y(t))$

ec. (1) trece de la variabile (t, x) la variabile (t, y) și în variabile (t, y) este ecuație cu variabile separabile.

Dem:

$$\underset{\text{ec. omogenă}}{(t, x)} \xrightarrow{x = ty} \underset{\text{ec. cu variab. separabile.}}{(t, y)}$$

$x = ty \Rightarrow x' = t'y + ty' = y + ty'$

Ec. (1) devine:

$$y + ty' = g(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \underbrace{\frac{1}{t}}_{a(t)}\underbrace{(g(y) - y)}_{b(y)} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = a(t)b(y)$$ ec dif cu var. separabile.

cu $a(t) = \frac{1}{t}$

$b(y) = g(y) - y$.

Exemplu: Se cere mulțimea soluțiilor ec. diferențiale:

$$\frac{dx}{dt} = \underbrace{\frac{2tx - x^2}{t^2}}_{f(t,x)} ; \quad t \in (0, \infty), \ x \in \mathbb{R}.$$

Pt $\alpha \in \mathbb{R}$ calculăm

$$f(\alpha t, \alpha x) = \frac{2\alpha t \cdot \alpha x - (\alpha x)^2}{(\alpha t)^2} = \frac{\cancel{\alpha^2}(2tx - x^2)}{\cancel{\alpha^2} t^2} = f(t,x)$$

Rezultă că ec. este omogenă.

$$(t, x) \xrightarrow[x = ty]{} (t, y)$$

$$(ty)' = \frac{2t \cdot ty - (ty)^2}{t^2} \Rightarrow y + ty' = \frac{\cancel{t^2}(2y - y^2)}{\cancel{t^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ty' = 2y - y^2 - y \Rightarrow y' = \frac{1}{t}(y - y^2)$$

$a(t) = \frac{1}{t}$; $b(y) = y - y^2$ $\Rightarrow$

ec. cu var. separabile

$\Rightarrow$ • $b(y) = 0 \Rightarrow y - y^2 = 0 \Rightarrow y(1-y) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_1 = 0, \ y_2 = 1 \Rightarrow \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ec. în y are 2 sol. staționare $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ec. în x are 2 sol. particulare:

$$\begin{aligned} &\varphi_1 : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \ \varphi_1(t) = t \cdot 0 = 0 \\ &\varphi_2 : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \ \varphi_2(t) = t \cdot 1 = t \end{aligned} \quad (4)$$

• pt $b(y)\neq 0$; $y\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ $\Rightarrow$ separăm variabilele $\Rightarrow$ în ec. în y.

$$\Rightarrow \frac{dy}{y-y^2}=\frac{1}{t}dt$$

$$\int\frac{dy}{-y(y-1)}=-\int\left(\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y}\right)dy=-\ln|y-1|+\ln|y|+C$$

$$=\ln\left|\frac{y}{y-1}\right|+C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow B(y)=\ln\left|\frac{y}{y-1}\right|.$$

$$\int\frac{1}{t}dt=\ln|t|+C\Rightarrow A(t)=\ln|t|$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{y}{y-1}\right|=\ln|\underset{>0}{t}|+\ln C,\quad C>0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{y}{y-1}\right|=Ct\Rightarrow\frac{y}{y-1}=\underset{C_1\in\mathbb{R}^*}{\pm C}t\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=C_1ty-C_1t\Rightarrow C_1t=y(C_1t-1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{C_1t}{C_1t-1},\ C_1\in\mathbb{R}^*\ \xrightarrow[\text{s.v. (schimbare de variabilă) } x=ty]{}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t)=\frac{C_1t^2}{C_1t-1},\ C_1\in\mathbb{R}^*}\quad(5)$$

Mulț. soluțiilor ec. date este (4) ∪ (5).

(4) <u>Ec. diferențială afină</u> (<u>liniară neomogenă</u>)

$$\boxed{\frac{dx}{dt}=a(t)x+b(t)}\quad(6)$$

$f(t,x)$ este funcție de gradul întâi în x.

unde $a,b: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funcții continue.

<u>Cazul omogen</u>, adică $b(t)=0$, $\forall t\in I\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ec. liniară omogenă : $\boxed{\frac{dx}{dt}=a(t)\cdot x}$ (7)

Prop. 2: Mulțimea soluțiilor ec. (7) este:

$$\boxed{x(t) = C \cdot e^{A(t)}, \; C \in \mathbb{R}} \quad (8)$$

unde A este o primitivă a lui a.

Dem: Obs că ec. (7) este ec. diferențială cu variabile separabile: $\begin{cases} a_1(t) = a(t) \\ b_1(x) = x \end{cases}$; $\frac{dx}{dt} = a_1(t) b_1(x)$

- $b_1(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ sol. staționară $\varphi_1 : I \to \mathbb{R}$, $\varphi_1(t) = 0, \forall t \in I$.
- $x \neq 0 \Rightarrow$ separăm variabilele: $\frac{dx}{x} = a(t)\,dt$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \Rightarrow B(x) = \ln|x|$$

$$\int a(t)\,dt = A(t) + C$$

$\Rightarrow$ mulț. soluțiilor în formă implicită:

$$\ln|x| = A(t) + C_1$$

$$|x| = e^{A(t) + C_1}$$

$$|x| = e^{C_1} \cdot e^{A(t)} \Rightarrow x = \underbrace{\pm e^{C_1}}_{C \in \mathbb{R}^*} \cdot e^{A(t)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = C e^{A(t)}, \; C \in \mathbb{R}^*$$

Obs. că pt $C = 0 \Rightarrow x = 0$, adică sol. staționară $\Rightarrow$

$$\Rightarrow x(t) = C \cdot e^{A(t)}, \; C \in \mathbb{R} \Rightarrow (8) \text{ adev.}$$

Cazul neomogen (ec. afină):

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = a(t)\,x + b(t).} \quad (9)$$

Ec. liniară omogenă atașată ec. (9) este:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = a(t) \cdot \bar{x}$$

Conform prop. 2, mulț. sol ec. atașate este $\bar{x}(t) = C \cdot e^{A(t)}$, $C \in \mathbb{R}$.

Pt. a determina mulț. sol. ec. (9) avem 2 variante:

v1) Prop. 3: Dacă φ_0 este o soluție particulară pentru ec. (9), atunci mulț. soluțiilor ec. (9) este:

$$\boxed{x(t) = \varphi_0(t) + C e^{A(t)}, \quad C \in \mathbb{R}} \quad (10)$$

unde A = primitivă pt a.

v2) Aplicăm metoda variației constantelor (MVC), care constă în:

• determinăm soluția ec. liniare omogenă atașată ec. (9):

$$\bar{x}(t) = C \cdot e^{A(t)}, \quad C \in \mathbb{R}$$

• aplicăm MVC, adică în locul constantei C de mai sus, considerăm o funcție $C(t)$ pe care o determinăm din condiția ca:

$$x(t) = C(t) \cdot e^{A(t)}$$

să verifice ec. afină:

$$\left(C(t) e^{A(t)}\right)' = a(t) \cdot C(t) \cdot e^{A(t)} + b(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C'(t) e^{A(t)} + \cancel{C(t) \cdot e^{A(t)} \cdot \underbrace{A'(t)}_{a(t)}} =$$

$$= \cancel{a(t) \cdot C(t) e^{A(t)}} + b(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C'(t) e^{A(t)} = b(t) \quad \Big| \cdot e^{-A(t)} \Rightarrow C'(t) = b(t) e^{-A(t)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} C' = b(t) \cdot e^{-A(t)} \\ C' = f_1(t, \cancel{C}) \\ C' = f_1(t) \end{array}\right| \Rightarrow \text{ec. de tip primitivă} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(t) = \int b(t) \cdot e^{-A(t)} dt$$

Fie $t_0 \in I \Rightarrow C(t) = \int b(t) e^{-A(t)} dt = \int_{t_0}^{t} b(s) e^{-A(s)} ds + K, \Rightarrow$ $K \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \left(\int_{t_0}^{t} b(s) e^{-A(s)} ds + K \right) e^{A(t)}, \quad K \in \mathbb{R}} \quad (11)$$

Exemplu: Fie ec.: $x' = \frac{3}{t}x - t$, $t \in (0,\infty)$, $x \in \mathbb{R}$

Se cere mulț. soluțiilor cu MVC.

Ec. afină: $a(t) = \frac{3}{t}$, $b(t) = -t$, $a, b : (0,\infty) \to \mathbb{R}$

• ec. liniară omogenă atașată:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{3}{t} \cdot \bar{x}$$

Conform prop 2 $\Rightarrow \bar{x}(t) = C \cdot e^{A(t)}$

$$\int \frac{3}{t}\,dt = 3\ln|t| + c \underset{t>0}{=} \ln t^3 + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(t) = \ln t^3 \Rightarrow \bar{x}(t) = C \cdot e^{\ln(t^3)} = \underline{\underline{Ct^3}}$$

$$e^{\ln y} = y, \ \forall y > 0$$

• aplicăm MVC: determinăm $C : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ a.î. $x(t) = C(t)t^3$ soluție pt ec. dată $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (C(t)t^3)' = \frac{3}{\cancel{t}} C(t)t^{\cancel{3}\,2} - t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C'(t) \cdot t^3 + \cancel{C(t)\,3t^2} = \cancel{3C(t)t^2} - t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C'(t) = \frac{-t}{t^3} \Rightarrow C'(t) = -\frac{1}{t^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(t) = -\int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{t^{-2+1}}{-2+1} + K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{C(t) = \frac{1}{t} + K} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ mulț. sol. ec. date este

$$x(t) = \left(\frac{1}{t} + K\right) \cdot t^3 = t^2 + Kt^3, \quad K \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = \underbrace{Kt^3}_{\text{sol. ec. omogene}} + \underbrace{t^2}_{\text{o soluție particulară}}$$

OBS: Din (11), mult sol. ec. afine obținută prin metoda variației constantelor avem:

$$x(t) = \left(\int_0^t b(s)e^{-A(s)}\,ds + K\right)e^{A(t)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = \underbrace{e^{A(t)} \cdot \int_{t_0}^{t} b(s) e^{-A(s)} ds}_{\text{soluţia particulară}} + \underbrace{k e^{A(t)}}_{\text{sol. ec. liniare omogenă}}$$

(5) Ec. diferenţială de forma:

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = g\left(\frac{a_1 t + b_1 x + c_1}{a_2 t + b_2 x + c_2}\right)} \quad (12)$$

unde $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$ a.î.

$$\begin{cases} |a_1| + |a_2| > 0 & (a_1 \text{ şi } a_2 \text{ nu pot fi simultan nule}) \\ |b_1| + |b_2| > 0 & (b_1 \text{ şi } b_2 \text{ nu pot fi simultan nule}) \\ |c_1| + |c_2| > 0. \end{cases}$$

Obs: Dacă în ec. (12) avem unul dintre cazurile:

1) $a_1 = a_2 = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \underbrace{g\left(\frac{b_1 x + c_1}{b_2 x + c_2}\right)}_{h(x)}$; $\frac{dx}{dt} = h(x)$ ec. cu var separabile. $(a(t) = 1)$

2) $b_1 = b_2 = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \underbrace{g\left(\frac{a_1(t) + c_1}{a_2(t) + c_2}\right)}_{k(t)}$; $\frac{dx}{dt} = k(t)$ ec. de tip primitivă.

3) $c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \underbrace{g\left(\frac{a_1 t + b_1 x}{a_2 t + b_2 x}\right)}_{f(t,x)}$

$$f(\alpha t, \alpha x) = g\left(\frac{a_1 \alpha t + b_1 \alpha x}{a_2 \alpha t + b_2 \alpha x}\right) = g\left(\frac{\cancel{\alpha}(a_1 t + b_1 x)}{\cancel{\alpha}(a_2 t + b_2 x)}\right) = f(t,x) \Rightarrow \text{ec. omogenă}$$

Prop. 4: Pt. ec. (12) cu cond $|a_1| + |a_2| > 0$, $|b_1| + |b_2| > 0$, $|c_1| + |c_2| > 0$, calculăm

$$d = a_1 b_2 - a_2 b_1 \text{ şi avem cazurile:}$$

1) dacă $\boxed{d = 0}$, atunci prin schimbarea de variabilă $\boxed{a_1 t + b_1 x = y \text{ dacă } b_1 \neq 0}$ sau $\boxed{a_2 t + b_2 x = y \text{ dacă } b_2 \neq 0}$, ec. (12) devine o ec. cu variabile separabile.

2) dacă $\boxed{d \neq 0}$, atunci prin schimbarea de variabile: $\boxed{\begin{cases} t = s + t_0 \\ x = y + x_0 \end{cases}}$; $(t, x) \longrightarrow (s, y)$

unde (t_0, x_0) este soluția sistemului liniar:

$$\begin{cases} a_1 t + b_1 x + c_1 = 0 \\ a_2 t + b_2 x + c_2 = 0 \end{cases}$$

adică: $\begin{cases} a_1 t_0 + b_1 x_0 + c_1 = 0 \\ a_2 t_0 + b_2 x_0 + c_2 = 0 \end{cases}$

ec. (12) devine o ecuație omogenă în (s, y).