Calcul Numeric - Subiecte Examen

1. Fie ecuaţia:

$$x^3 - 4x + 1 = 0 \tag{1}$$

   a) Să se afle intervalele de monotonie ale funcţiei $f(x) = x^3 - 4x + 1$.

   b) Să se afle un interval care să conţină o singura soluţie pozitivă a ecuaţiei.

   c) Să se calculeze x_0, x_1, x_2, folosind metoda bisecţiei. Să se afle erorile relative conform formulei: $e_r = \dfrac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_{k-1}|}, k = 1, 2$.

2. Fie ecuaţia:

$$x^2 + 2x - 1 = 0, \quad x \in [0.1, 2] \tag{2}$$

   a) Să se deducă conform metodei Newton-Raphson formula de calcul al elementului x_k din şirul aproximărilor $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Să se enunţe teorema de convergenţă Newton-Raphson.

   b) Să se studieze dacă sunt satisfăcute ipotezele teoremei de convergenţă în cazul ecuaţiei (2) şi să se aleagă $x_0 \in [0.1, 2]$, astfel încât să fie asigurat convergena metodei N-R.

   c) Să se calculeze x_1, x_2 şi erorile relative conform formulei: $e_r = \dfrac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_{k-1}|}$.

3. Să se rezolve conform metodelor Gauss fără pivotare, cu pivotare parţială şi cu pivotare totală următoarele sisteme:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = -5 \\ 2x_1 - 2x_2 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \tag{3}$$

4. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 8 & 5 \\ -4 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

   a) Să se determine matricele L, U conform metodei de factorizare LU, folosind pe rând metodele de eliminare Gauss.

   b) Să se rezolve sistemul $Ax = b$, $b = (5, 18, 20)^T$ folosind factorizarea LU.

5. Fie $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 14 \end{pmatrix}$

   a) Să se verifice dacă A este simetrică şi pozitiv definită.

   b) În caz afirmativ, să se determine factorizarea Cholesky.

   c) Să se rezolve sistemul $Ax = b, b = (10, 6, 11)^T$, folosind descompunerea LL^T.

6. Să se afle valorile proprii aproximative conform metodei Jacobi pentru matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
Pentru rezolvarea exerciţiului se vor calcula doar două iteraţii. Pentru înmulţirea matricilor, puteţi folosi calculul matricial prevăzut în Python.

7. Determinaţi teoretic polinomul de interpolare Lagrange, $P_2(x)$, asociat funcţiei f şi nodurilor de interpolare x_1, x_2, x_3 conform :
   a) Metodei directă
   b) Metodei Lagrange
   c) Metodei Newton
   d) Metodei Newto cu DD

8. Să se afle polinomul de interpolare Lagrange $P_2(x)$ al funcţiei $f(x)$, conform metodelor Lagrange şi Newton cu diferenţe divizate, relativ la diviziunea $x = (x_1, x_2, x_3)$.
   a) $f(x) = lnx$, $x = (1, e, e^2)$
   b) $f(x) = sin(\frac{\pi x}{2}), x = (-1, 0, 1)$

9. Să se arate că polinomul Lagrange care interpolează datele $(-2, 1), (-1, 4)$, $(0, 11), (1, 16)$, $(2, 13), (3, -4)$ este de gradul 3. Se va folosi metoda Newton DD.

10. Fie $P_3(x)$ polinomul de interpolare Lagrange asociat setului de date $(0, 0), (0.5, y), (1, 3), (2, 2)$. Să se afle y ştiind că, coeficientul lui x^3 în reprezentarea polinomului $P_3(x)$ este 6. Pentru reprezentarea polinomului $P_3(x)$ se va folosi metoda Lagrange.

11. Următorul tabel se referă la polinomul de grad necunoscut, $P_n(x)$

x	0	1	2
$P_n(x)$	2	-1	4

Să se determine coeficientul lui x^2 în reprezentarea $P_n(x)$ dacă toate diferenţele divizate de ordinul 3 sunt 1.

12. Fiind dat tabelul diferenţelor divizate

x_i	DD ordin 0	DD ordin 1	DD ordin 2
$x_1 = 0$	$\boxed{f[x_1] = f(x_1)}$		
$x_2 = 0,4$	$f[x_2] = f(x_2)$	$\boxed{f[x_1, x_2]}$	
$x_3 = 0,7$	$f[x_3] = f(x_3) = 6$	$f[x_2, x_3] = 10$	$\boxed{f[x_1, x_2, x_3] = \frac{50}{7}}$

să se scrie polinomul $P_2(x)$.

13. a) Să se scrie definiţia funcţiei de interpolare liniară.

    b) Să se afle funcţia de interpolare spline liniară S pentru funcţia $f(x) = lnx$ relativ la diviziunea $(1, e, e^2)$.

14. a) Să se scrie definiţia funcţiei de interpolare pătratică.

    b) Să se afle funcţia de interpolare spline pătratică S pentru funcţia $f(x) = lnx$ relativ la diviziunea $(1, e, e^2)$.

15. Fie f definită pe intervalul $[a, b]$ şi datele $a = x_1 < x_2 < x_3 = b$. Funcţia spline pătratică restricţionată pe fiecare interval în parte reprezintă un polinom de gradul doi; $S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2, \quad x \in [x_1, x_2)$, $S_2(x) = a_2 + b_2(x - x_2) + c_2(x - x_2)^2, \quad x \in [x_2, x_3]$. Să se afle coeficienţii $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$, dacă $S'(x_1) = f'(x_1)$.

16. Să se scrie definiţia funcţiei de interpolare spline cubică. Să se determine funcţia spline cubică naturală S care interpolează datele:

    a) $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 2$.

    b) $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 5$.

17. Să se determine funcţia spline cubică cu constrângeri S care interpolează datele:

    a) $(1, 2), (2, 3), (3, 5)$, $S'(1) = 2, S'(3) = 1$.

    b) $(0, 0), (1, 1), (2, 2), S'(0) = 1, S'(2) = 1$.

    (Formulele de calcul pentru coeficienţii a_j, b_j, c_j, d_j, vor fi date în foaia de examen)

    Să se verifice că funcţia spline cubică S calculată la punctele a) şi b) satisface condiţiile definiţiei unei funcţii spline cubice.

18. Să se determine coeficienţii B, C, D, astfel încât funcţia

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) = 1 + 2x - x^3, x \in [0, 1) \\ S_2(x) = 2 + B(x - 1) + C(x - 1)^2 + D(x - 1)^3, x \in [1, 2] \end{cases}$$

    să reprezinte o funcţie spline naturală (i.e. $S''(a) = S''(b) = 0$, a, b fiind capetele intervalului de interpolare).

19. Fie funcţia $S(x)$ o funcţie spline cubică cu constrângeri la capete (i.e. $S'(a) = f'(a), S'(b) = f'(b)$, unde a, b sunt capetele intervalului de interpolare):

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) = 3(x - 1) + 2(x - 1)^2 - (x - 1)^3, x \in [1, 2) \\ S_2(x) = A + B(x - 2) + C(x - 2)^2 + D(x - 2)^3, x \in [2, 3] \end{cases}$$

    Să se afle A, B, C, D, dacă $f'(1) = f'(3)$.

20. O funcţie spline cubică cu constrângeri este definită prin

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) = 1 + Bx + 2x^2 - 2x^3, x \in [0, 1) \\ S_2(x) = 1 + b(x - 1) - 4(x - 1)^2 + 7(x - 1)^3, x \in [1, 2] \end{cases}$$

    Să se afle $f'(0)$ şi $f'(2)$.

21. O funcţie spline cubică naturală este definită prin

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) = 1 + B(x-1) - D(x-1)^3, x \in [1,2) \\ S_2(x) = 1 + b(x-2) - \dfrac{3}{4}(x-2)^2 + d(x-2)^3, x \in [2,3] \end{cases}$$

Să se afle B, D, b, d, ştiind că S interpolează datele $(1,1), (2,1)$ şi $(3,0)$.

22. Să se deducă o formulă de aproximare a derivatei $f'(x)$ care foloseşte termenii $f(x-h), f(x+h), f(x+2h), f(x+3h)$. Care este ordinul de aproximarea a formulei obţinute? Ind.: Se scrie pentru fiecare termen dezvoltarea în serie Taylor până la ordinul 4. Se consideră combinatia $Af(x-h)+Bf(x+h)+Cf(x+2h)+Df(x+3h)$ şi se scriu 4 relaţii în raport cu A, B, C, D astfel încât coeficienţii de pe lângă $f''(x), f'''(x), f^{(IV)}(x)$ să se anuleze, iar coeficientul termenului $f'(x)$ să fie egal cu 1. Se rezolvă sistemul în A, B, C, D şi se extrage expresia derivatei $f'(x)$.

23. Să se deducă o formulă care aproximează $f'''(x)$ cu eroarea de aproximare $\mathcal{O}(h^2)$. Ind.:Se rezolvă similar cu exerciţiul anterior.

24. Presupunem că $\varphi(h)$ este aproximarea derivatei $f'(x_0)$ de ordinul $\mathcal{O}(h)$ şi $f'(x_0) = \varphi(h) + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + ...$, unde a_1, a_2, a_3 sunt constante. Să se folosească valorile $\varphi(h), \varphi(h/3), \varphi(h/9)$ pentru a se construi o formulă de aproximare de ordinul $\mathcal{O}(h^3)$.

25. Dacă se aplică formula trapezului calcului integralei $\int_0^2 f(x)dx$ se obţine valoarea 5, iar dacă se aplică formula dreptunghiului, se obţine 4. Ce valoare va da formula Simpson pentru calculul integralei.

26. Formula trapezului aplicată $\int_0^2 f(x)dx$ dă valoarea 4, iar formula lui Simpson dă voloarea 2. Care este valoarea $f(1)$.

27. Fiind date $f(0) = 1, f(0.5) = 2.5, f(1) = 2, f(0.25) = f(0.75) = \alpha$. Să se afle α dacă, folosind formula trapezului sumată cu $m = 4$, se obţine $\int_0^1 f(x)dx \approx 1.75$.