

Algoritmos e Estrutura de Dados II

Prof. Fellipe Guilherme Rey de Souza

Aula 13 –Árvore AVL

Agenda

- Definição
- Fator de Balanceamento
- Rotações
- Inserção

PS: Parte do conteúdo retirado do material do Prof. Flávio B. Gonzaga

Definição

- **Árvore AVL é uma árvore binária de busca balanceada.**
 - Uma árvore balanceada (árvore completa) são as árvores que minimizam o número de comparações efetuadas no pior caso para uma busca com chaves de probabilidades de ocorrências idênticas.

Definição

- Para garantir essa propriedade em aplicações dinâmicas, é preciso reconstruir a árvore para seu estado ideal a cada operação sobre seus nós (inclusão ou exclusão), para ser alcançado um custo de algoritmo com o **tempo de pesquisa tendendo a $O(\log n)$** .
 - As operações de busca, inserção e remoção de elementos possuem complexidade $O(\log n)$, no qual n é o número de elementos da árvore.
 - O nome AVL vem de seus criadores soviéticos Adelson-Velsky e Landis (1962).

Definição

- Árvore que permite o rebalanceamento local.
 - Apenas a parte afetada pela inserção ou remoção é rebalanceada;
 - Uso de rotações simples ou duplas na etapa de rebalanceamento;
- Introduz uma variável, chamada de fator de balanceamento;
 - Diferença entre a quantidade de níveis da subárvore esquerda e da subárvore direita.

Definição

Com exceção das funções de inserção e remoção, as demais funções da árvore AVL são idênticas às da árvore binária de busca.

Fator de Balanceamento

- O fator de balanceamento (**fb**) de uma árvore AVL é o que garante que, após a execução de uma operação que modifique a árvore (inserção ou remoção de um nó), a mesma permaneça balanceada.
- O fator de balanceamento de um nó v se dá pela fórmula descrita abaixo:

$$fb(v) = h_e(v) - h_d(v)$$

O fator de balanceamento é a diferença do tamanho da subárvore esquerda e da subárvore direita!

Fator de Balanceamento

- Como o fator de balanceamento de um nó nos retorna um número, temos as possíveis interpretações com relação aos valores:
- **$\text{fb}(v) = 0$**
 - A subárvore esquerda e a subárvore direita têm **a mesma altura**.
 - O nó está **perfeitamente balanceado**.

Fator de Balanceamento

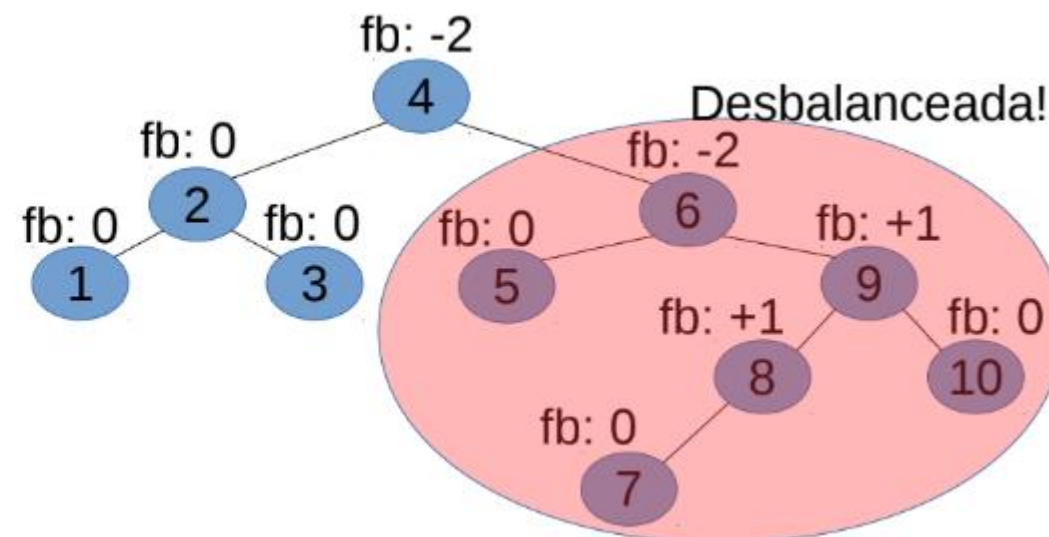
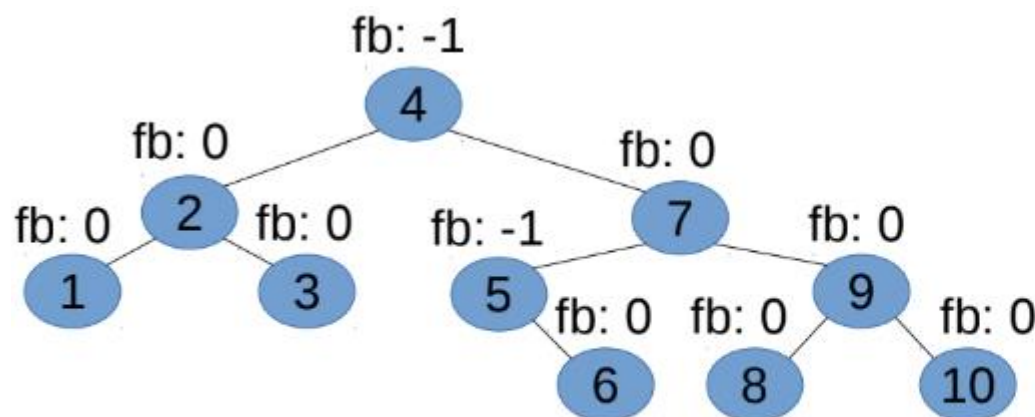
- Como o fator de balanceamento de um nó nos retorna um número, temos as possíveis interpretações com relação aos valores (*cont.*):
- $\text{fb}(v) = -1$
 - A subárvore direita é **maior** (mais profunda) que a esquerda por **1 nível**.
 - O nó está **levemente desbalanceado para a direita**, mas ainda é aceitável.

Fator de Balanceamento

- Como o fator de balanceamento de um nó nos retorna um número, temos as possíveis interpretações com relação aos valores (*cont.*):
- $\text{fb}(v) = +1$
 - A subárvore esquerda é **maior** (mais profunda) que a direita por **1 nível**.
 - O nó está **levemente desbalanceado para a esquerda**, mas ainda é aceitável.

Fator de Balanceamento

- Se o fator de balanceamento for **menor que -1** ou **maior que 1**, o nó está desbalanceado.
 - Assim, será necessário aplicar rotações para restaurar o balanceamento da árvore.



Rotações

- As rotações são operações quem alteram o balanceamento de uma árvore binária de busca, mantendo a sequência de percurso em-ordem.
- Existem 4 tipos de rotações para a árvore AVL:
 - **RSE** – Rotação Simples à Esquerda (ou Esquerda Simples)
 - **RSD** – Rotação Simples à Direita (ou Direita Simples)
 - **RDE** – Rotação Dupla à Esquerda (ou Esquerda Dupla)
 - **RDD** – Rotação Dupla à Direita (ou Direita Dupla)

Rotações

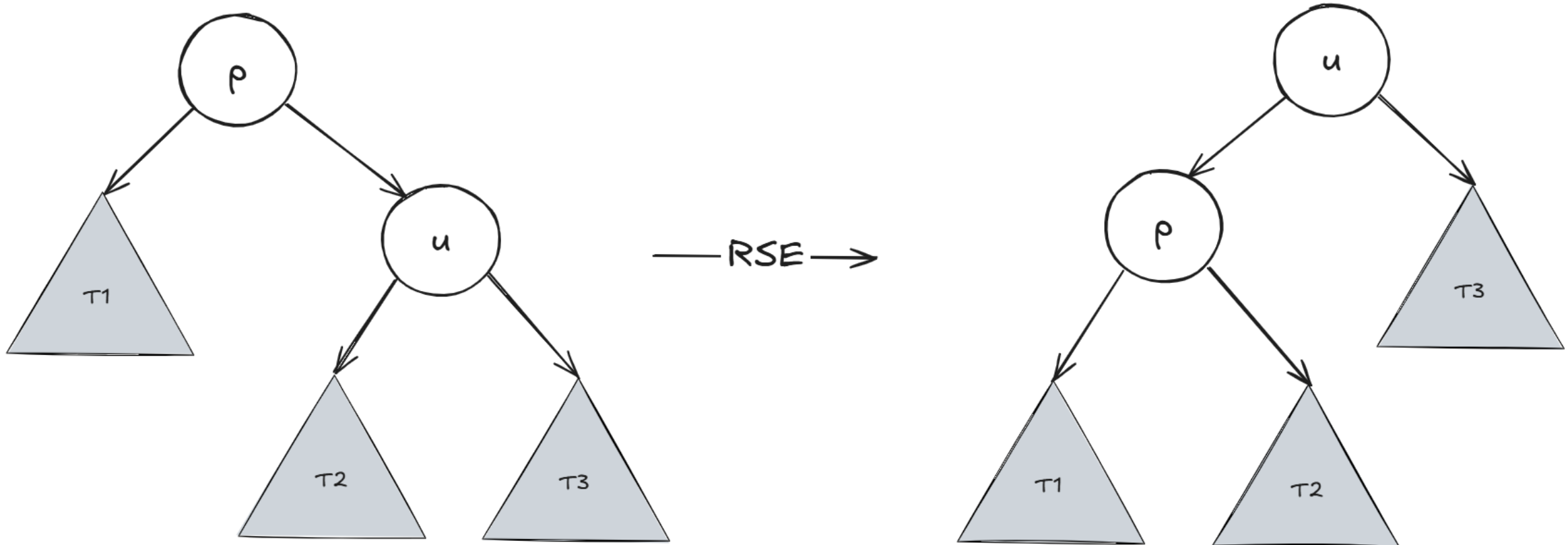
Definição

Fator de balanceamento

→ **Rotações**

Inserção

- **RSE** – Rotação Simples à Esquerda (ou Esquerda Simples)



Rotações

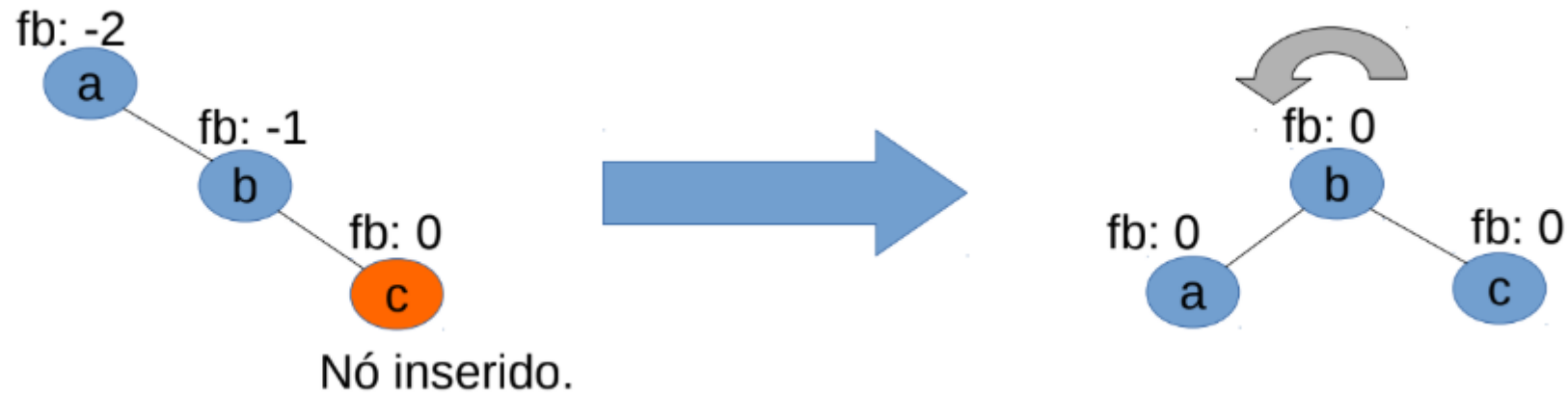
Definição

Fator de balanceamento

→ **Rotações**

Inserção

- **RSE** – Rotação Simples à Esquerda (ou Esquerda Simples)



Rotações

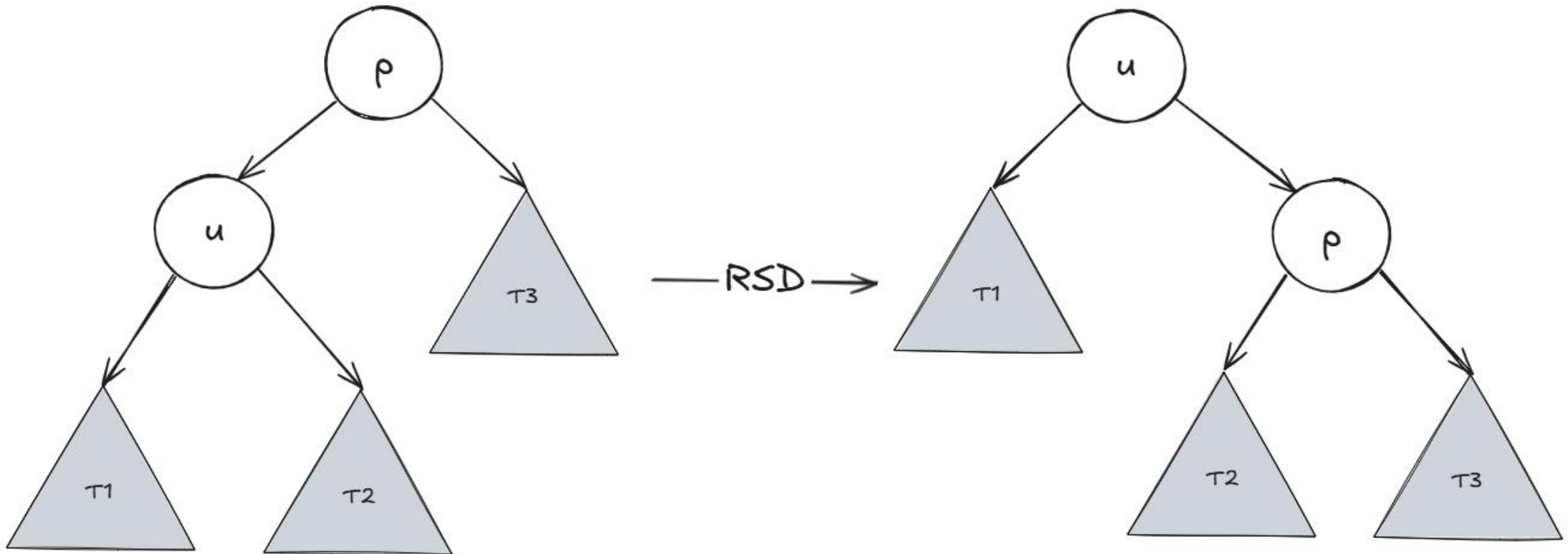
Definição

Fator de balanceamento

→ **Rotações**

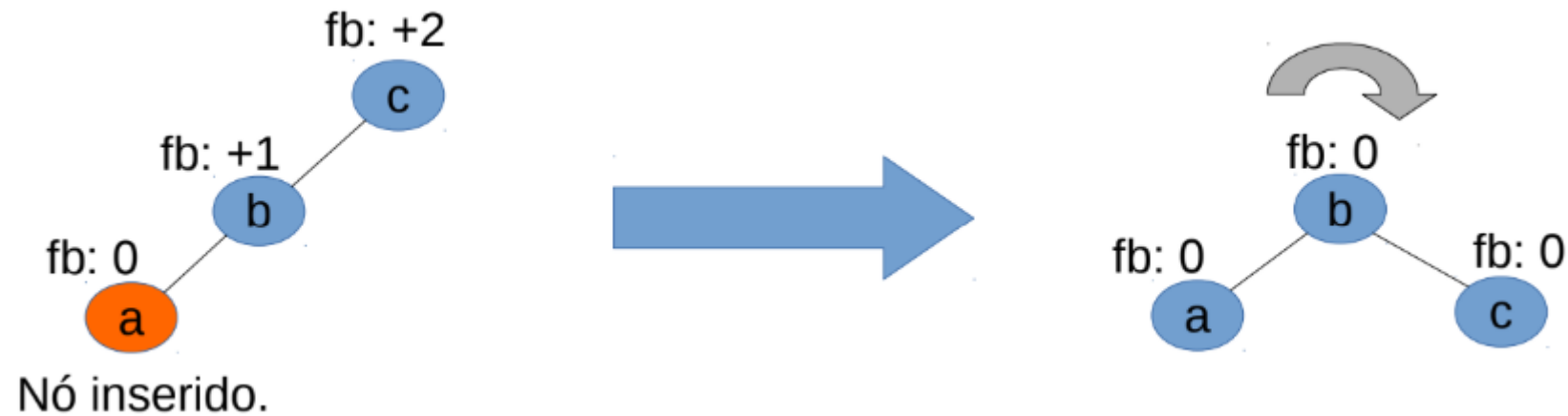
Inserção

- **RSD** – Rotação Simples à Direita (ou Direita Simples)



Rotações

- **RSD** – Rotação Simples à Direita (ou Direita Simples)



Rotações

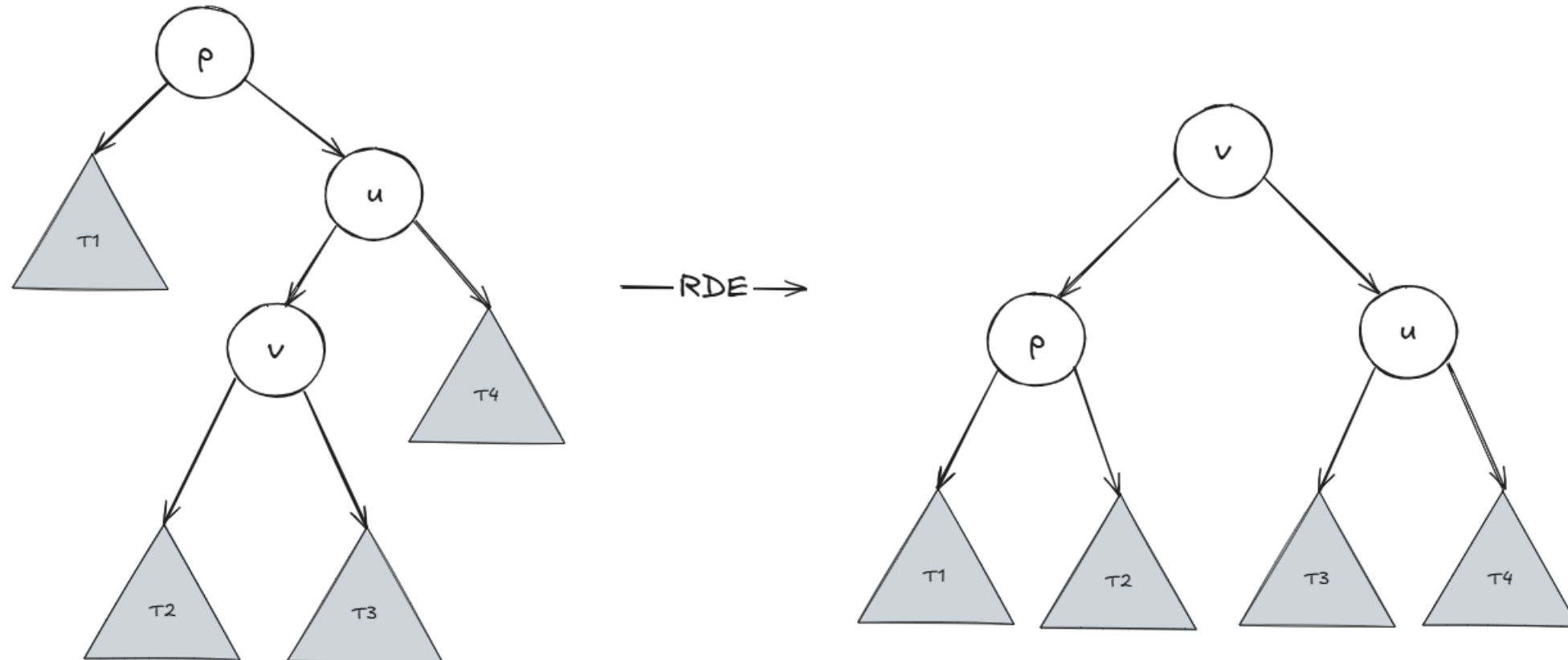
Definição

Fator de balanceamento

→ **Rotações**

Inserção

- **RDE** – Rotação Dupla à Esquerda (ou Esquerda Dupla)



Rotações

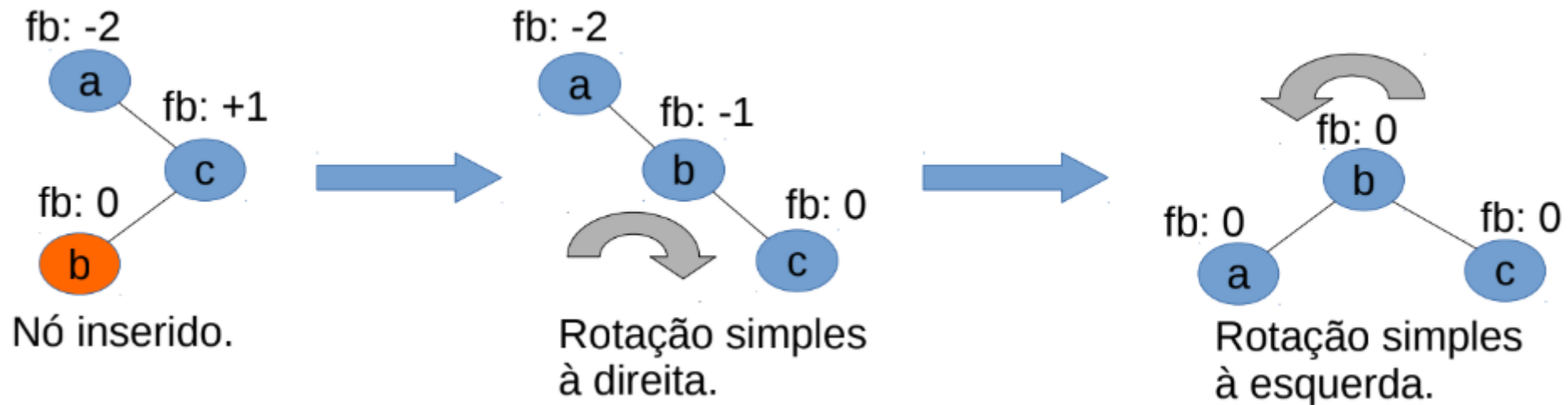
Definição

Fator de balanceamento

→ **Rotações**

Inserção

- **RDE** – Rotação Dupla à Esquerda (ou Esquerda Dupla)



Rotações

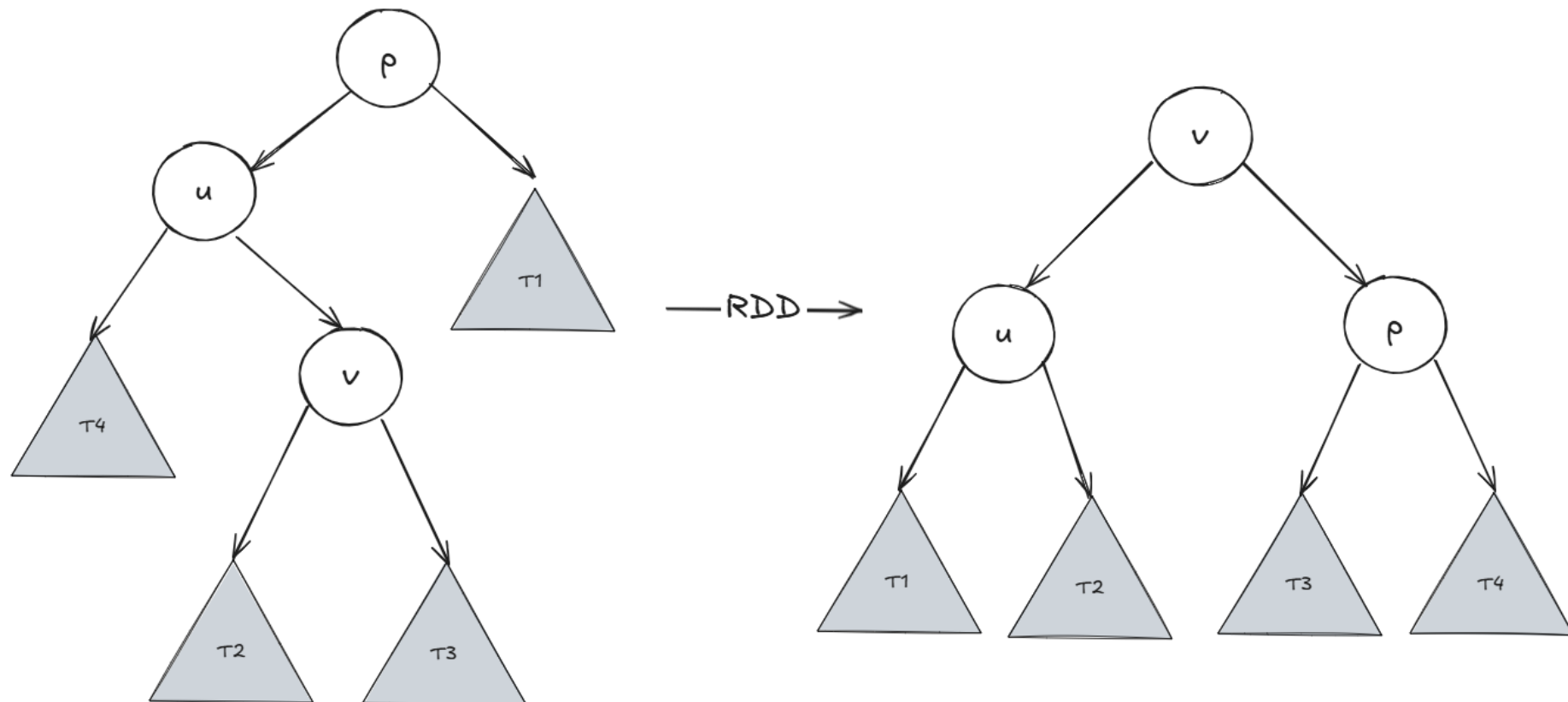
Definição

Fator de balanceamento

→ **Rotações**

Inserção

- **RDD** – Rotação Dupla à Direita (ou Direita Dupla)



Rotações

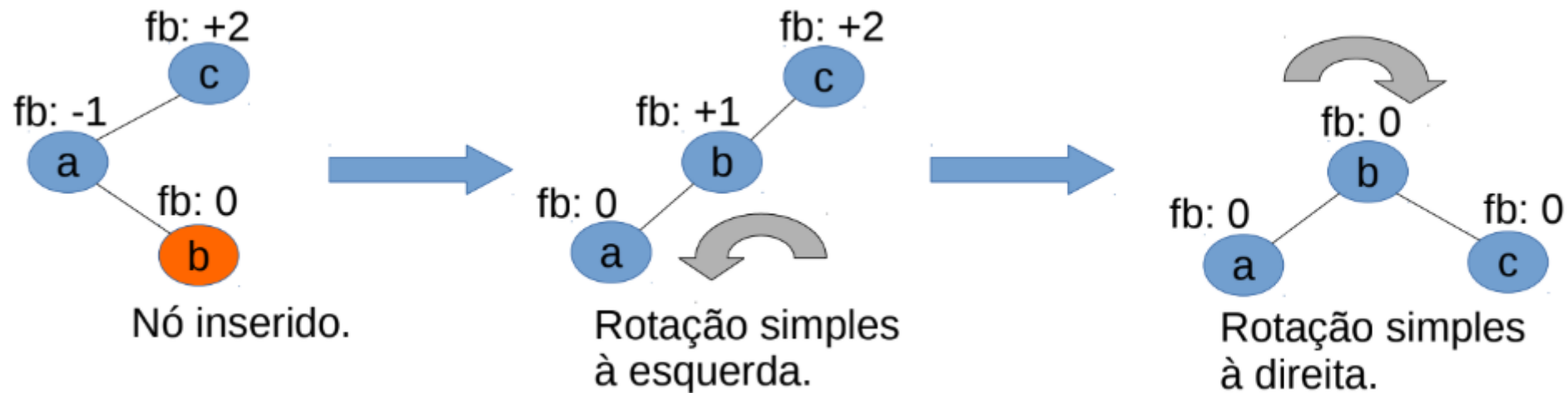
Definição

Fator de balanceamento

→ **Rotações**

Inserção

- **RDD** – Rotação Dupla à Direita (ou Direita Dupla)



Inserção

- Para este exemplo, iremos inserir os seguintes nós, em sequência, na nossa árvore binária de busca do tipo AVL:

15 – 27 – 49 – 10 – 8 – 67 – 59 – 9 – 13 – 20 – 14

- Note que, durante a inserção, poderemos fazer **RSE** (Rotação Simples à Esquerda), **RSD** (Rotação Simples à Direita), **RDE** (Rotação Dupla à Esquerda) e **RDD** (Rotação Dupla à Direita).

Inserção

Definição

Fator de balanceamento

Rotações

→ **Inserção**

15 – 27 – 49 – 10 – 8 – 67 – 59 – 9 – 13 – 20 – 14

Inserção

Definição

Fator de balanceamento

Rotações

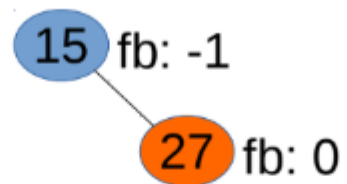
→ **Inserção**

~~15~~ – 27 – 49 – 10 – 8 – 67 – 59 – 9 – 13 – 20 – 14

15 fb: 0

Inserção

~~15~~ – ~~27~~ – 49 – 10 – 8 – 67 – 59 – 9 – 13 – 20 – 14



Inserção

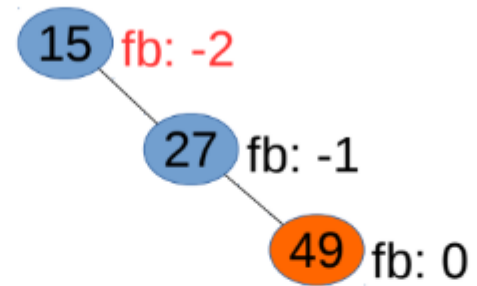
Definição

Fator de balanceamento

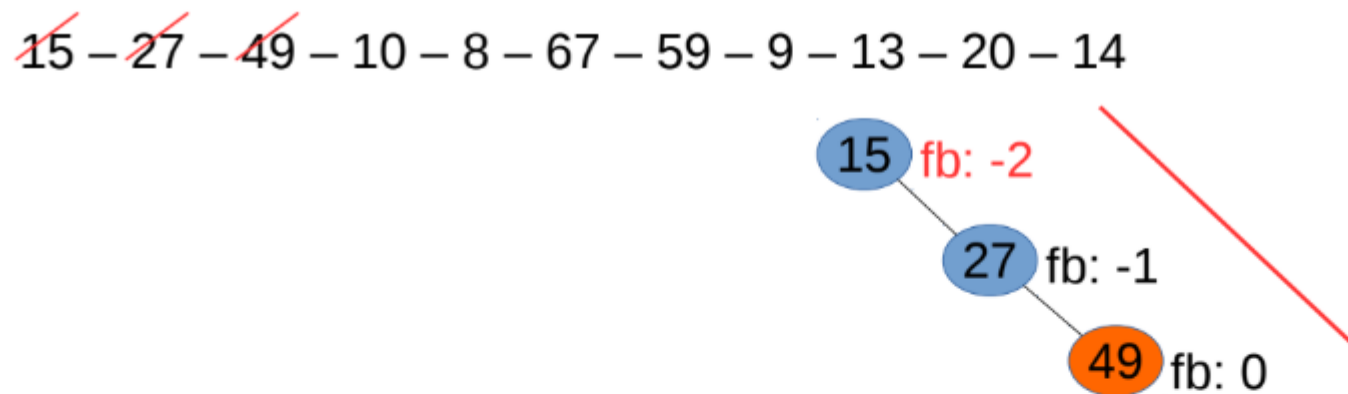
Rotações

→ **Inserção**

~~15~~ - ~~27~~ - ~~49~~ - 10 - 8 - 67 - 59 - 9 - 13 - 20 - 14



Inserção



Inserção

Definição

Fator de balanceamento

Rotações

→ **Inserção**

~~15~~ - ~~27~~ - ~~49~~ - 10 - 8 - 67 - 59 - 9 - 13 - 20 - 14



RSE(15, 27)

Inserção

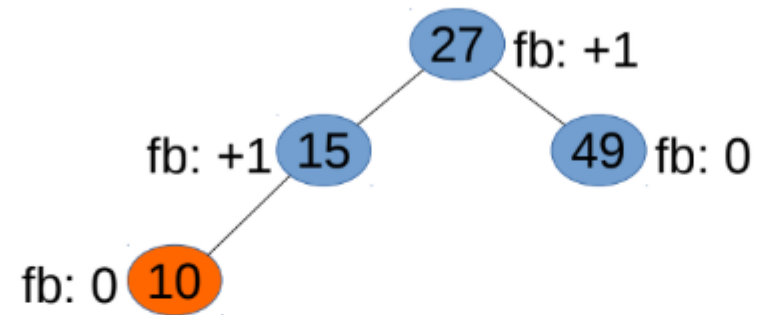
Definição

Fator de balanceamento

Rotações

→ **Inserção**

~~15~~ - ~~27~~ - ~~49~~ - ~~10~~ - 8 - 67 - 59 - 9 - 13 - 20 - 14



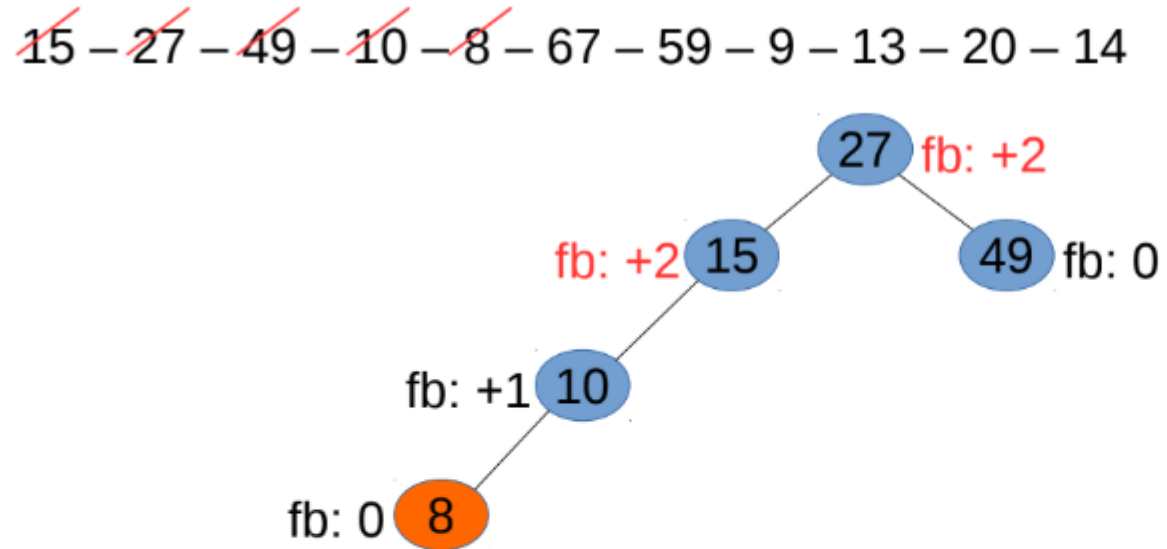
Inserção

Definição

Fator de balanceamento

Rotações

→ **Inserção**



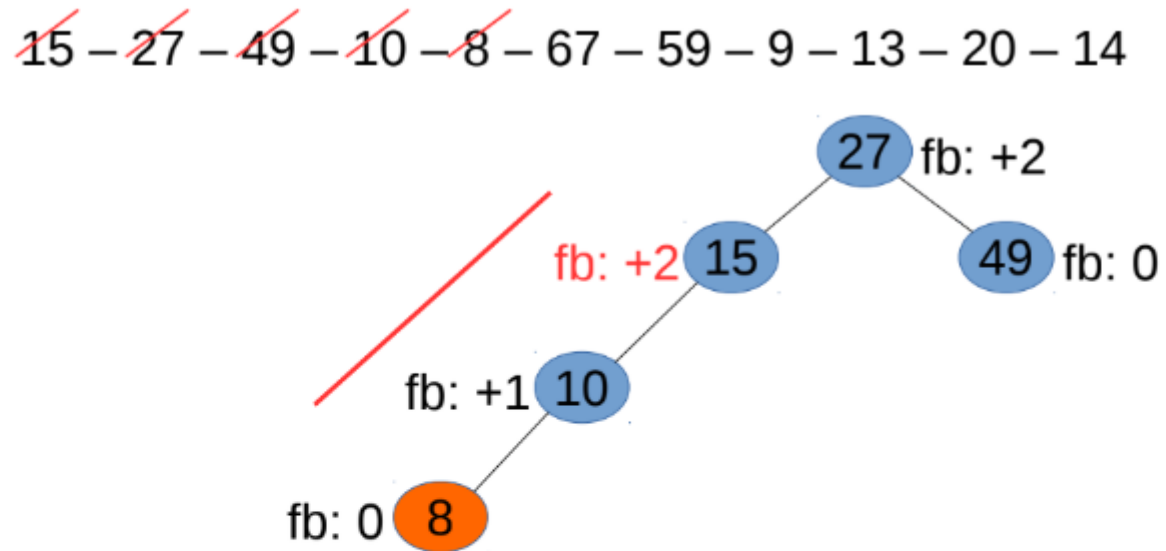
Inserção

Definição

Fator de balanceamento

Rotações

→ **Inserção**



Inserção

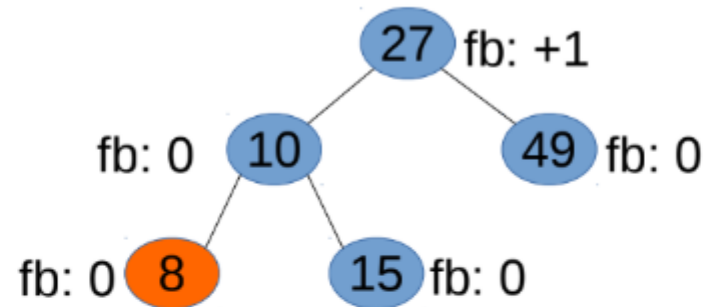
Definição

Fator de balanceamento

Rotações

→ **Inserção**

~~15~~ – ~~27~~ – ~~49~~ – ~~10~~ – ~~8~~ – 67 – 59 – 9 – 13 – 20 – 14



RSD(15, 10)

Inserção

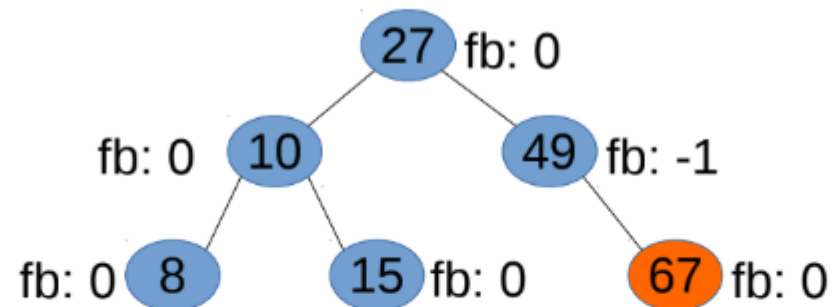
Definição

Fator de balanceamento

Rotações

→ **Inserção**

~~15~~ - ~~27~~ - ~~49~~ - ~~10~~ - ~~8~~ - ~~67~~ - 59 - 9 - 13 - 20 - 14



Inserção

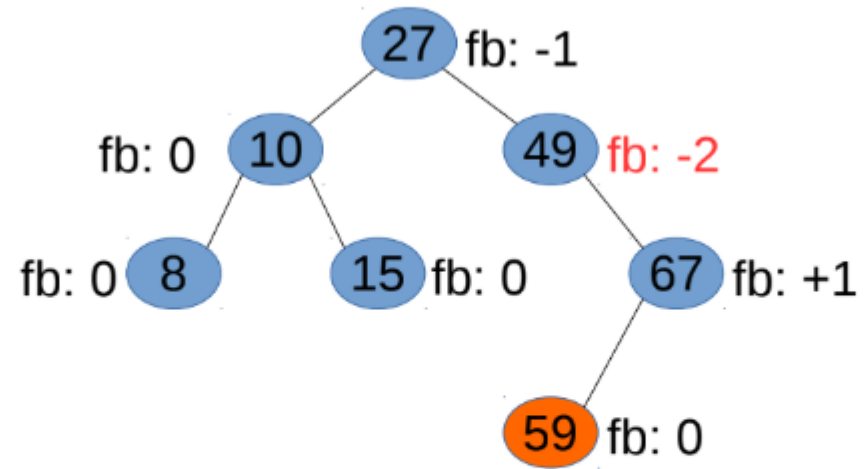
Definição

Fator de balanceamento

Rotações

→ **Inserção**

~~15~~ - ~~27~~ - ~~49~~ - ~~10~~ - ~~8~~ - ~~67~~ - ~~59~~ - 9 - 13 - 20 - 14



Inserção

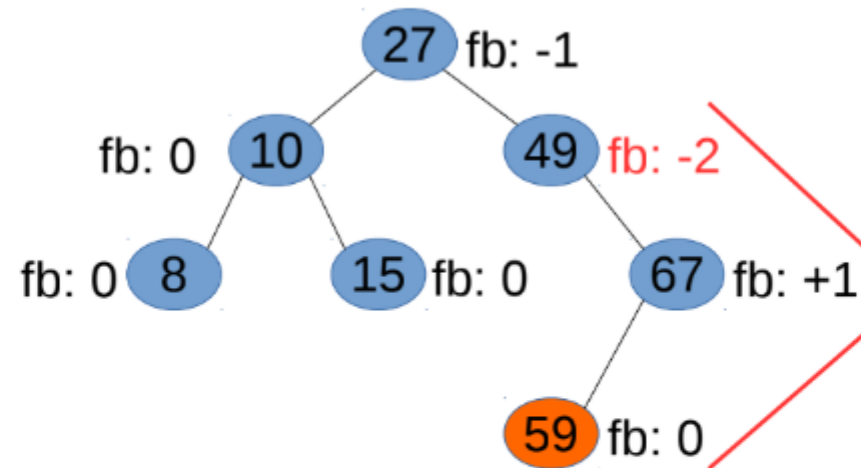
Definição

Fator de balanceamento

Rotações

→ Inserção

~~15~~ - ~~27~~ - ~~49~~ - ~~10~~ - ~~8~~ - ~~67~~ - ~~59~~ - 9 - 13 - 20 - 14



$$\text{RDE} = \text{RSD}(59, 67) + \text{RSE}(49, 59)$$

Inserção

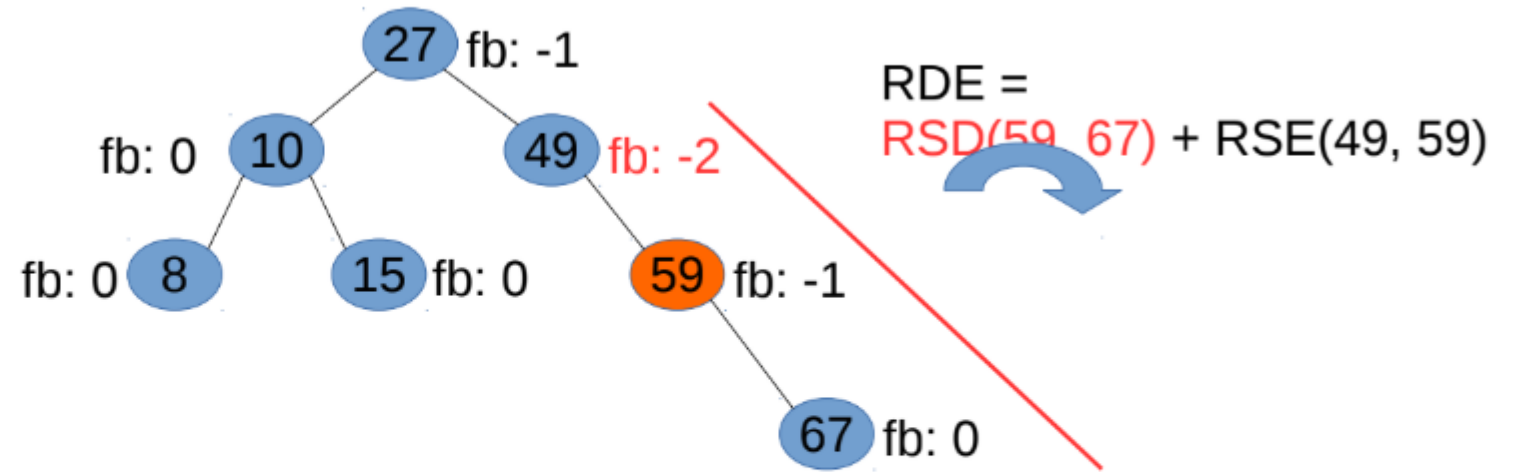
Definição

Fator de balanceamento

Rotações

→ Inserção

~~15~~ - ~~27~~ - ~~49~~ - ~~10~~ - ~~8~~ - ~~67~~ - ~~59~~ - 9 - 13 - 20 - 14



Inserção

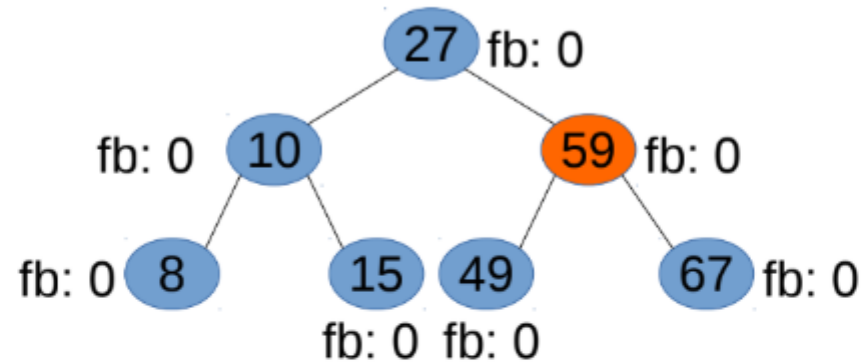
Definição

Fator de balanceamento

Rotações

→ Inserção

~~15~~ - ~~27~~ - ~~49~~ - ~~10~~ - ~~8~~ - ~~67~~ - ~~59~~ - 9 - 13 - 20 - 14



RDE =
RSD(59, 67) + RSE(49, 59)



Inserção

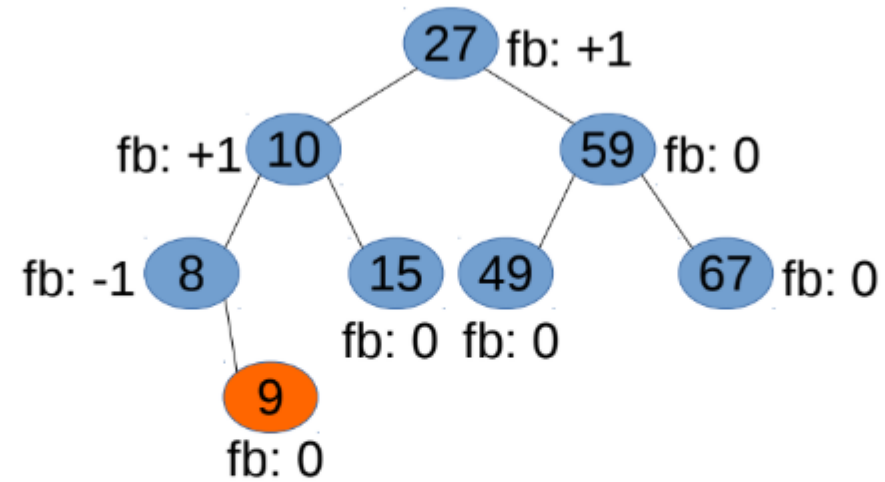
Definição

Fator de balanceamento

Rotações

→ **Inserção**

~~15~~ - ~~27~~ - ~~49~~ - ~~10~~ - ~~8~~ - ~~67~~ - ~~59~~ - ~~9~~ - 13 - 20 - 14



Inserção

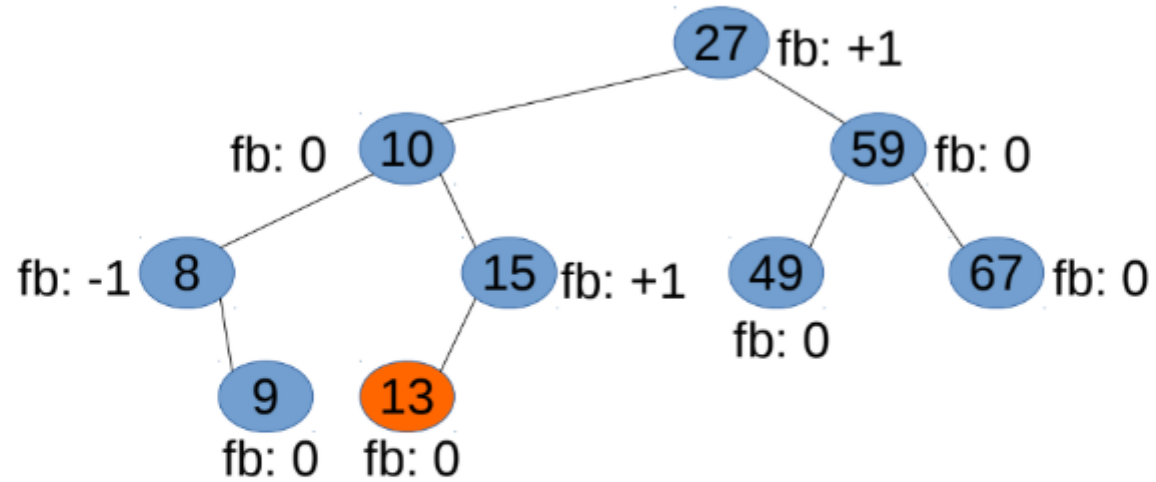
Definição

Fator de balanceamento

Rotações

→ **Inserção**

~~15~~ - ~~27~~ - ~~49~~ - ~~10~~ - ~~8~~ - ~~67~~ - ~~59~~ - ~~9~~ - ~~13~~ - 20 - 14



Inserção

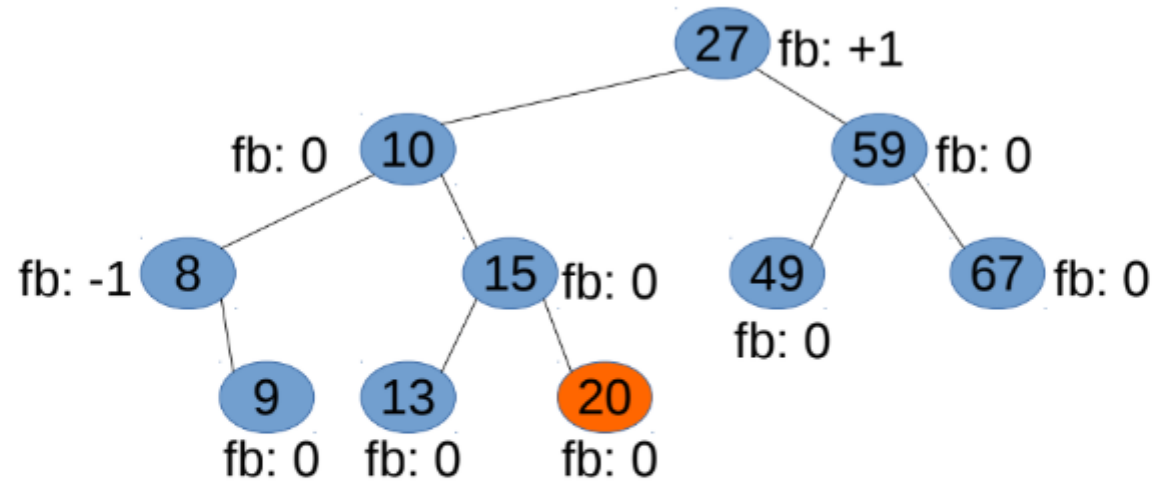
Definição

Fator de balanceamento

Rotações

→ **Inserção**

~~15~~ - ~~27~~ - ~~49~~ - ~~10~~ - ~~8~~ - ~~67~~ - ~~59~~ - ~~9~~ - ~~13~~ - ~~20~~ - 14



Inserção

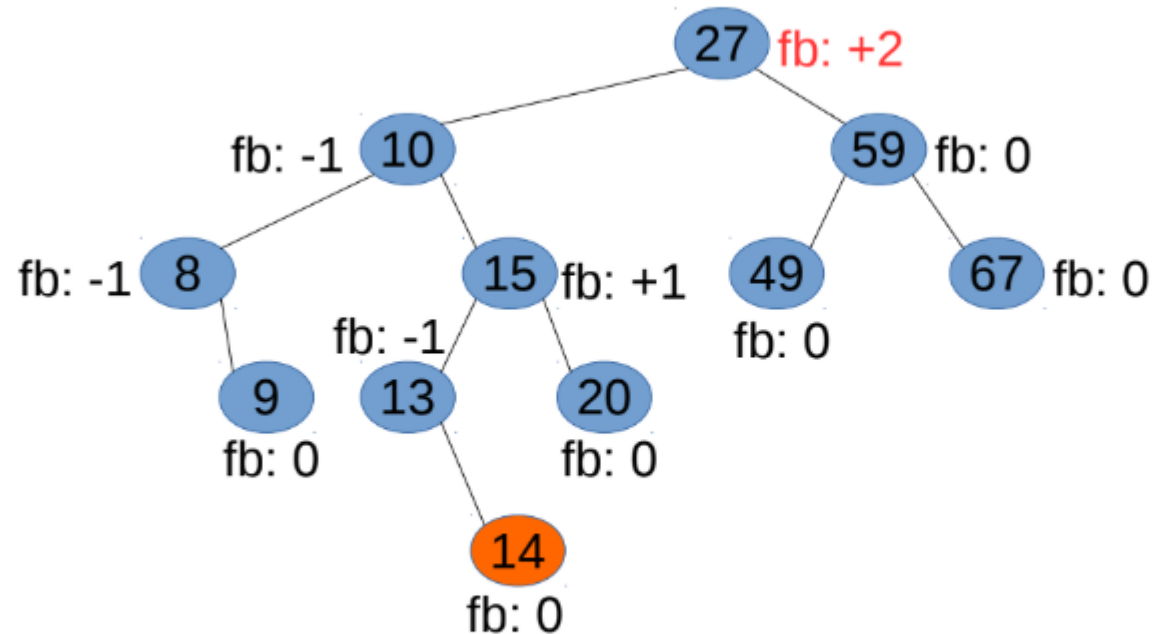
Definição

Fator de balanceamento

Rotações

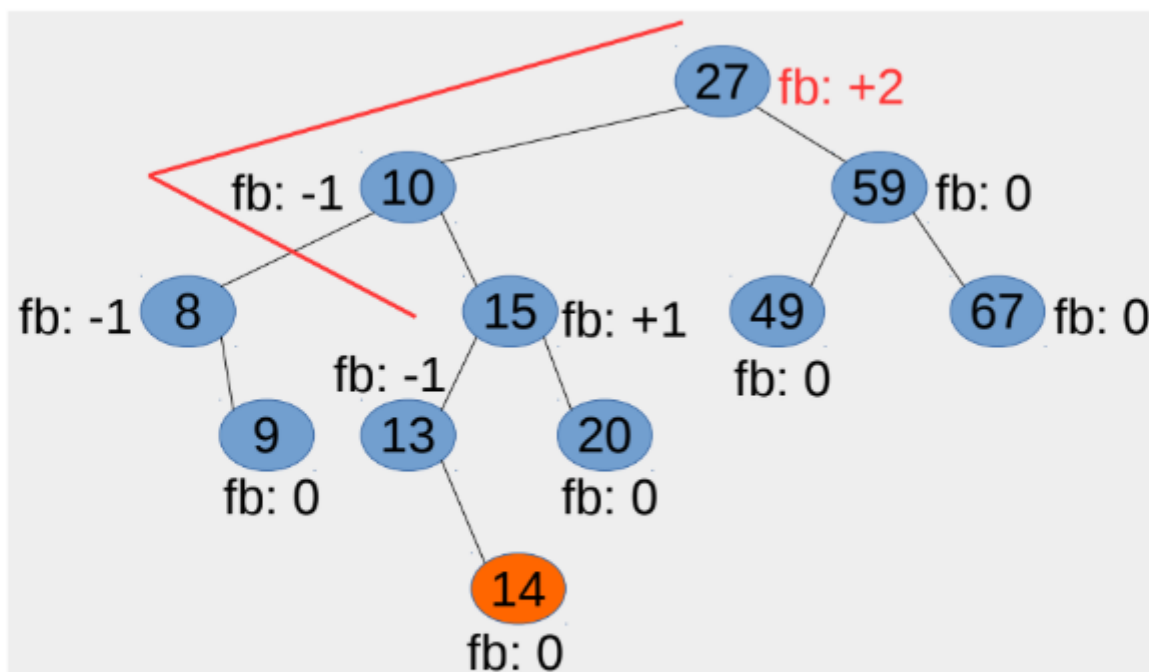
→ **Inserção**

~~15~~ - ~~27~~ - ~~49~~ - ~~10~~ - ~~8~~ - ~~67~~ - ~~59~~ - ~~9~~ - ~~13~~ - ~~20~~ - ~~14~~



Inserção

~~15~~ - ~~27~~ - ~~49~~ - ~~10~~ - ~~8~~ - ~~67~~ - ~~59~~ - ~~9~~ - ~~13~~ - ~~20~~ - ~~14~~



$$\text{RDD} = \text{RSE}(15, 10) + \text{RSD}(27, 15)$$

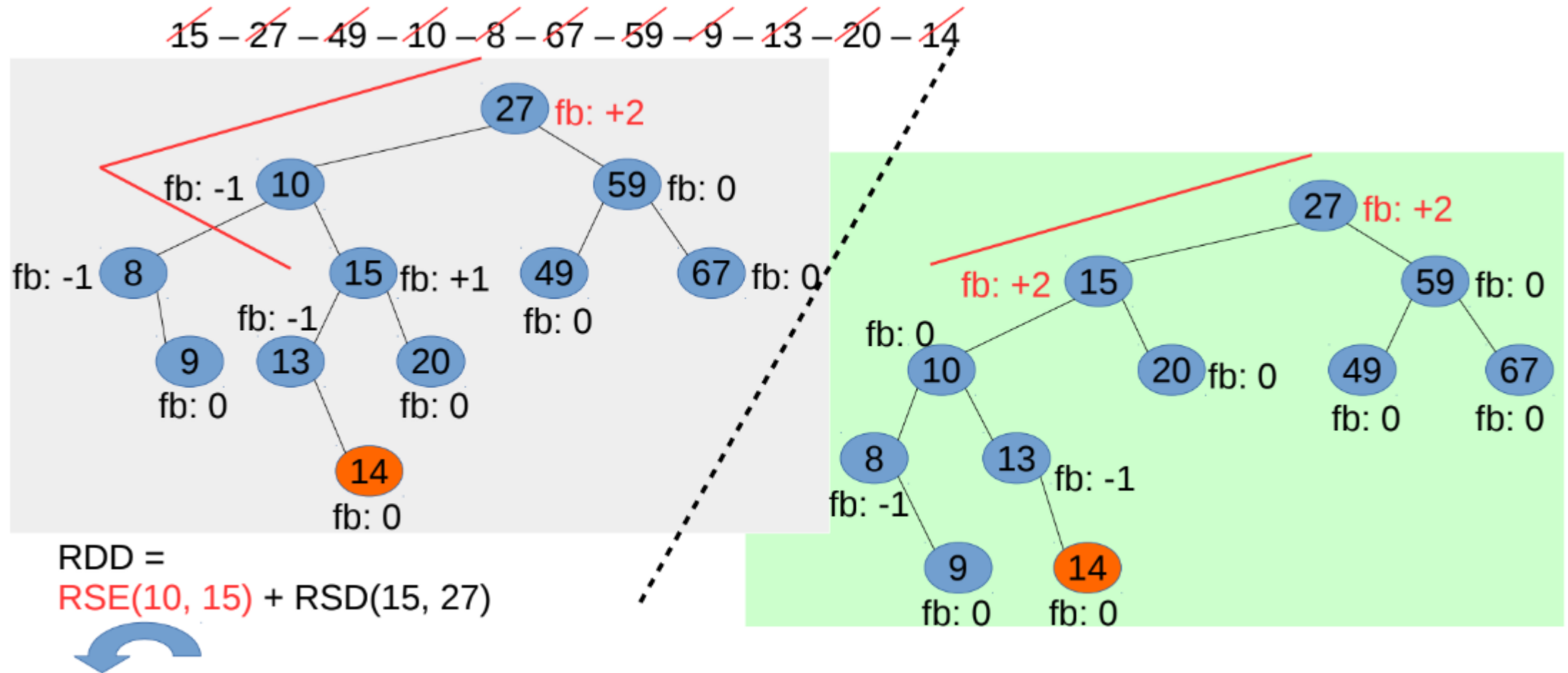
Inserção

Definição

Fator de balanceamento

Rotações

→ Inserção



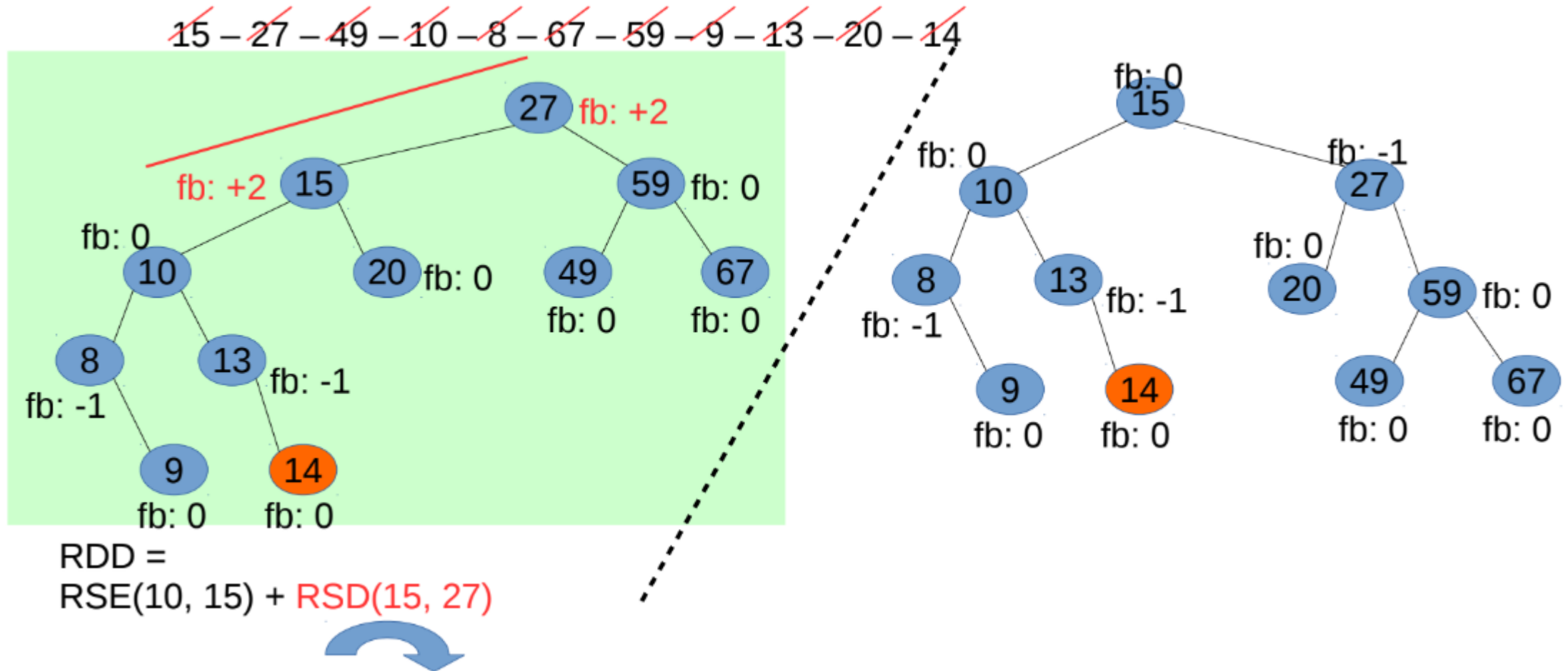
Inserção

Definição

Fator de balanceamento

Rotações

→ Inserção



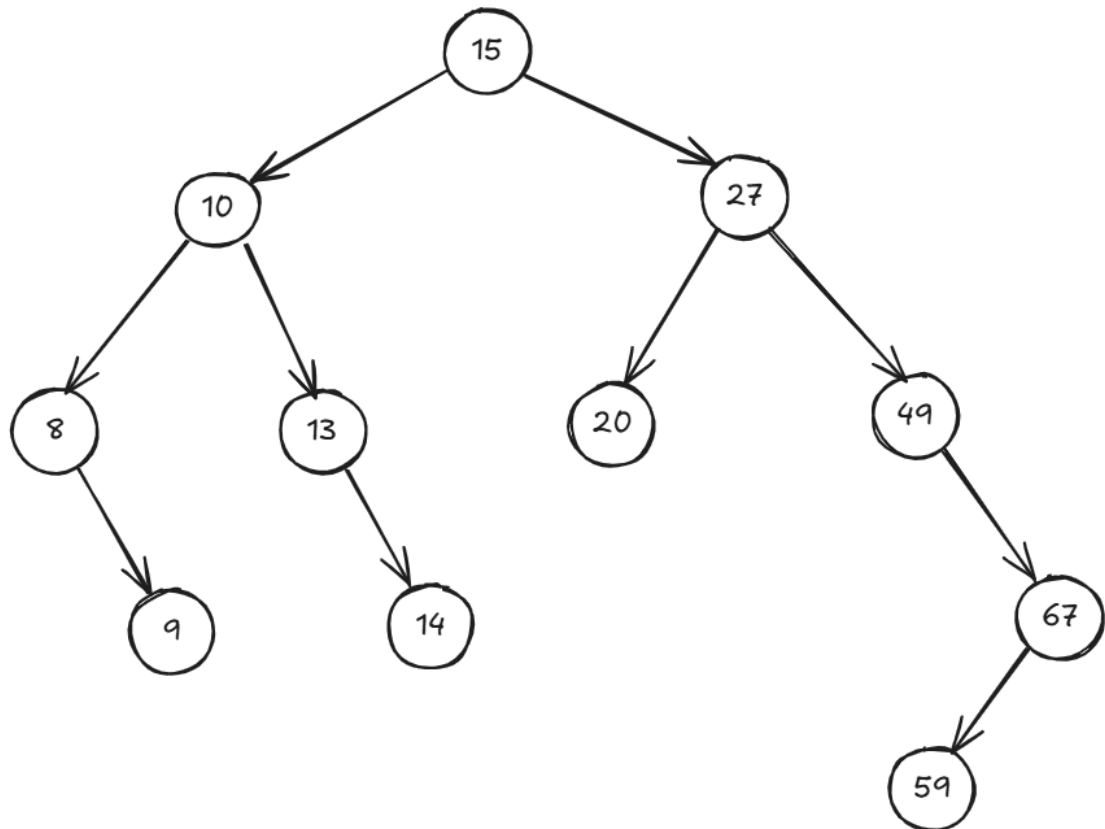
Inserção

Definição

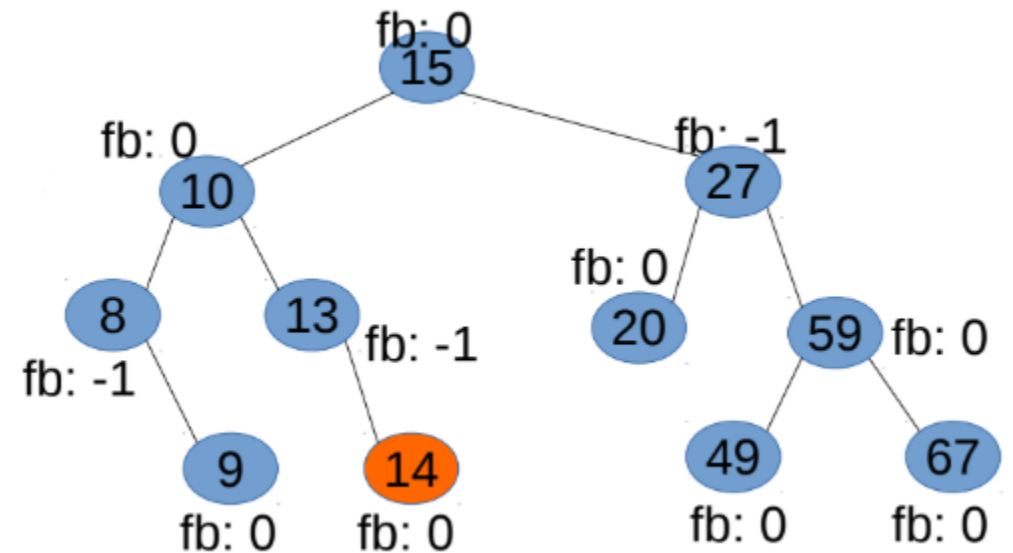
Fator de balanceamento

Rotações

→ **Inserção**



Inserção dos elementos em uma árvore binária de busca tradicional



Inserção dos elementos em uma árvore binária de busca AVL

Inserção

- Caso queiram testar alguns exemplos de inserção de elementos em uma Árvore AVL, podem acessar o site:

<https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/AVLtree.html>

Inserção

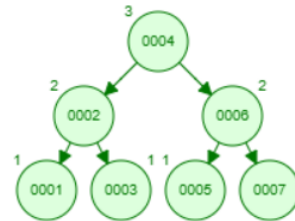
Definição

Fator de balanceamento

Rotações

→ **Inserção**

AVL Tree



Animation Completed

Animation Speed

w: 1000

h: 500

Algorithm Visualizations

Algoritmos e Estrutura de Dados II

Prof. Fellipe Guilherme Rey de Souza

Aula 13 –Árvore AVL